Алгебро-геометрические методы в теории интегрируемых систем

Аннотация

Курс охватывает алгебро-геометрические методы интегрирования солитонных уравнений и систем с конечным числом степеней свободы (в основном, системы Хитчина, но также волчки и многочастичные системы). Он будет прочитан в течение весеннего и осеннего семестров 2020 г.

1. Римановы поверхности как одномерные комплексные многообразия. Род неособой римановой поверхности. Мероморфные функции, дифференциалы, тензоры на компактных римановых поверхностях.

2. Абелевы дифференциалы 1-го, 2-го и 3-го рода на компактных римановых поверхностях. Билинейные соотношения Римана. Канонический базис голоморфных дифференциалов. Существование и единственность для абелевых дифференциалов 2-го и 3-го рода с нулевыми a–периодами.

3. Теорема Римана-Роха.

4. Матрица Римана. Отображение Абеля.

5. Тета-функции Римана. Обращение преобразования Абеля в терминах нулей тета-функций. Вектор римановых констант.

6. Римановы поверхности с особенностями. Арифметический и топологический род. Мероморфные функции и мероморфные дифференциалы на поверхностях с особенностями. Двойные точки. Разрешение особенностей.

7. Одномерные голоморфные расслоения над римановыми поверхностями и дивизоры.

8. Интегрируемые системы в размерности 1+1. Представление Лакса. Представление нулевой кривизны.

9. Примеры: уравнения Кортевега- де Фриза, Нелинейное уравнение Шредингера, уравнение Синус-Гордон

10. Спектральная кривая одномерного оператора с периодическими коэффициентами. Конечнозонные операторы. Конечнозонные решения КдФ. Формула Итса-Матвеева. Формула Итса для волновой функции.

11. Проблема отбора вещественных и регулярных решений. “Простая группа” – Уравнение Котревега- де Фриза, дефокусирующее Нелинейное уравнение Шредингера.

12. “Сложная группа”. Фокусирующее Нелинейное уравнение Шредингера, уравнение Синус-Гордон. Дифференциалы Чередника. Теорема о регулярности вещественных решений. Число компонент многообразия вещественных решений уравнения Синус-Гордон для фиксированной кривой.

13. Уравнение Кадомцева-Петвиашвили. Конструкция Кричевера. Две вещественных редукции. Их регулярные вещественные решения. М-кривые.

14. Двумерный оператор Шредингера. Конечнозонные при одной энергии потенциалы. Условия потенциальности и веществнности на спектральные данные при одной энергии.

15. Регулярные вещественные многосолитонные решения уравнение Кадомцева-Петвиашвили-2 как пределы регулярных вещественных конечнозонных решений.

16. Интегрируемые системы с конечным числом степеней свободы. Волчок Арнольда–Эйлера–Манакова. Рациональный спектральный параметр и спектральный параметр на римановой поверхности.

17. Системы Хитчина, классификация их спектральных кривых.

18. Разделение переменных для систем Хитчина. "Элементарное"определение систем Хитчина.

19. Метод обратной задачи рассеяния для систем Хитчина.