Курс «Гамильтонова механика»

И.Ю. Полехин (к.ф.-м.н., МИАН)

Зачем изучать специальный класс дифференциальных уравнений, называемый гамильтоновыми системами? Одним из ответов может быть следующий: гамильтонов формализм естественным образом возникает практически во всех фундаментальных разделах физики (значительно превосходя область своего первоначального применения) и представляет собой ценный пример взаимного обогащения математических и физических наук.

Курс в основном посвящен рассмотрению базовых конструкций и теорем гамильтоновой механики, но также будут рассмотрены и некоторые более специальные темы, которые обычно не попадают в стандартные лекционные курсы. Материал рассчитан на студентов 2–5 курсов и аспирантов физико-математических отделений.

Программа курса

1. Принцип Даламбера-Лагранжа и уравнения Лагранжа.
   Мотивировка. Идеальные связи. Вывод уравнений Лагранжа. Уравнения Лагранжа как условие экстремума функционала действия.

2. Уравнения Гамильтона.
   Преобразование Лежандра. Аналитический переход к уравнениям Гамильтона. Примеры классических гамильтоновых систем. Перевернутый маятник.

3. Вариационные принципы.
   Принцип наименьшего действия в фазовом пространстве. Принцип Мопертюи. Приложение к доказательству существования периодических решений.

4. Геометрическая форма уравнений Гамильтона.
   Дифференциальные формы. Симплектические многообразия. Лагранжевы многообразия. Пуассоновы многообразия.

5. Интегральные инварианты.

6. Инвариантная мера. Теорема Пуанкаре о возвращении.

7. Стандартное отображение Чирикова. Антиинтегрируемый предел. Хаотические траектории.

8. Канонические замены переменных.
   Производящие функции. Уравнение Гамильтона-Якоби. Разделение переменных.

9. Вполне интегрируемые системы. Переменные действие-угол.
   Полный набор интегралов в инволюции. Теорема Лиувилля. Построение переменных действие-угол в случае одной степени свободы. Общая схема построения в случае многих степений свободы.

10. Классическая схема теории возмущений.
    Малые знаменатели. Критерий формальной интегрируемости для случая полиномиального возмущения. Теорема Пуанкаре о неинтегрируемости.

11. Усреднение в Гамильтоновых системах.
    Теорема об усреднении в одночастотном случае. Резонансы.

12. КАМ-теорема и следствия из нее.
    Диофантовы частоты. Теорема Колмогорова. Неавтономный вариант. Изоэнергетический вариант теоремы. Диффузия Арнольда.

13. Расщепление сепаратрис.