ВВЕДЕНИЕ В ТЕОРИЮ БЕСКОНЕЧНЫХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ГРУПП

С.И.АДЯН

Исследование бесконечных периодических групп тесно связано со знаменитой проблемой Бернсайда о периодических группах, которая была поставлена У. Бернсайдом в работе [1] в виде:

Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_m$ — конечное число независимых элементов, порождающих группу G, в которой для любого элемента x выполнено соотношение $x^n = 1$, где n — данное целое число. Будет ли определенная таким образом группа конечной, и если да, то каков ее порядок?

Максимальная группа, задаваемая $\boldsymbol{m}$ порождающими и тождеством $x^n = 1$, называется *свободной бернсайдовой группой периода* $\boldsymbol{n}$ и обозначается $\mathbf{B}(m, n) = \langle a_1, a_2, \ldots, a_m \mid x^n = 1 \rangle$.

Проблемой Бернсайда в течение многих десятилетий занимались видные алгебраисты разных стран. При этом положительный ответ на вопрос Бернсайда был получен только для очень малых значений периода n: $n \leqslant 4$ и $n = 6$, а также для всех конечно порожденных линейных периодических групп. До сих пор остаются открытыми важные вопросы о конечности групп $\mathbf{B}(2, 5)$ и $\mathbf{B}(2, 8)$.

Отрицательное решение проблемы Бернсайда впервые было получено в 1967 году и опубликовано в 1968 г. в серии из трех совместных статей П.С.Новикова и С.И.Адяна в журнале *Известия АН СССР, сер. матем., т. 32 (см.* [2]*)*. Основным результатом этих работ является следующая теорема.

Теорема Новикова–Адяна. *Свободные периодические группы $\boldsymbol{B}(m, n)$ нечетного периода $n \geq 4381$ при $m > 1$ бесконечны.*

Для доказательства теоремы Новикова-Адяна в работе [2] авторами была построена теория преобразований слов в периодических группах $\mathbf{B}(m, n)$. Эта теория была разработана в результате многолетней напряженной совместной работы с 1960 по 1967 год. В ней впервые в истории математики доказательство большого числа (более полсотни) утверждений проводилось совместной индукцией по так называемой „*глубине*" периодов периодических слов, которая называется *рангом* рассматриваемого периода и соответствующих периодических слов.

После 1968 года лектором была продолжена работа над усовершенствованием и обобщением созданной ранее теории Новикова–Адяна для того, чтобы применить ее к решению других трудных задач теории групп, и не только относящихся к периодическим группам. В опубликованной в 1975 году монографии [3] все понятия этой теории и их необходимые свойства были изложены посредством совместной индукции по рангу $\alpha \geqslant 1$. При этом оценка экспоненты была понижена до $n \geqslant 665$, был доказан экспоненциальный рост рассматриваемых групп и доказана вложимость групп $B(m,n)$ в группу $B(2,n)$ при всех m. Кроме того, в монографии впервые было дано решение известной проблемы конечного базиса, а именно была доказана независимость следующей бесконечной системы групповых тождеств $[x^{rn}, y^{rn}]^n = 1$ для всех простых $r > 2$. В [3] также были построены некоммутативные аналоги аддитивной группы рациональных чисел, то есть некоммутативной группы с любым числом порождающих $m \geqslant 2$, в которой пересечение любых двух нетривиальных подгрупп бесконечно.

В весеннем семестре для нечетных периодов $n > 100$ будут изложены основные понятия для рангов 1 и 2 и приведены схемы доказательства основных свойств этих понятий. Среди них понятия минимального и элементарного периода данного ранга, поворотов данного ранга, понятия нормальной формы приведённого слова данного ранга, понятия ядра и частично периодических групп рангов $\alpha > 1$.

В осеннем семестре курс будет продолжен для завершения доказательства бесконечности групп $B(m,n)$ при нечётных $n > 100$ с использованием понятий, изложенных во второй части статьи [4].

Автор надеется, что слушателям данного спецкурса не придётся преодолевать те трудности, о которых говорил В. Магнус, отмечая в своей книге по истории комбинаторной теории групп, что монография [3] по его мнению является одной из самых сложных для чтения математических работ, которые когда-либо были написаны.

Список литературы

[1] Burnside W. *On an unsettled question in the theory of discontinuous groups*, Quart. J. Pure Appl. Math., 1902, Vol. 33. pp. 230–238.
[2] П. С. Новиков, С. И. Адян, *О бесконечных периодических группах.*, Изв. АН СССР. Сер. матем., том 32, вып. 1,2,3, стр. 212–244, 251–524, 709–731.
[3] С. И. Адян, *Проблема Бернсайда и тождества в группах*, Наука, М., 1975 , 335 с.
[4] С. И. Адян, *Новые оценки нечетных периодов бесконечных бернсайдовых групп*, Тр. МИАН, 289, МАИК, М., 2015, 41–82.