Задачи для экзамена по курсу
«Спинорная геметрия с точки зрения некоммутативной»

Для получения оценки «4» нужно сдать одну задачу, для получения оценки «5» — две задачи. Задачи в списке сгруппированы по темам, названия тем набраны **жирным** *шрифтом. Сдавать две задачи из одной и той же темы нельзя. Если в задаче несколько утверждений (или пунктов), то для сдачи нужно доказать все утверждения (решить все пункты).*

Решения задач нужно присылать на следующие адреса электронной почты (лучше присылать решения на несколько адресов сразу или даже на все сразу):

sergeev@mi.ras.ru
komlov@mi.ras.ru
palvelev@mi.ras.ru
innocenti.maresin@gmail.com

Клиффордовы алгебры и спинорные группы

1. а) Докажите, что при $n > 2$ группа $Spin(n)$ является односвязной и двукратно накрывает группу $SO(n)$.

б) Докажите, что группы $Pin(n, \mathbb{C})$ и $Spin(n, \mathbb{C})$ двукратно накрывают группы $O(n, \mathbb{C})$ и $SO(n, \mathbb{C})$ соответственно.

в) Докажите, что группа $Spin(n, \mathbb{C})$ связна и односвязна, а группа $Spin(n)$ является максимальной компактной подгруппой в группе $Spin(n, \mathbb{C})$.

2. а) Пусть V — конечномерное евклидово пространство. Пусть $S\colon \Lambda(V) \to Cl(V)$ — отображение симметризации. Покажите, что элементы алгебры Клиффорда $Cl(V)$ вида $S(\lambda)$, $\lambda \in \Lambda^2(V)$ образуют подалгебру Ли (относительно коммутатора $[a, b] = ab - ba$). Тем самым коммутатор в алгебре Клиффорда индуцирует скобку Ли на $\Lambda^2(V)$, которую мы обозначим через $\{\cdot, \cdot\}$.

б) Для каждого элемента $\lambda \in \Lambda^2(V)$ и для любого вектора $v \in V$ положим $\pi_\lambda(v) = [S(\lambda), v]$. Докажите, что при каждом $\lambda \in \Lambda^2(V)$ отображение π_λ — кососимметричный линейный оператор на пространстве V. Докажите, что отображение $\pi\colon \lambda \mapsto \pi_\lambda$ задает изоморфизм алгебр Ли $\Lambda^2(V)$ (относительно скобки $\{\cdot, \cdot\}$) и $o(V)$.

3. а) Пусть V — конечномерное евклидово пространство. Пусть J есть ортогональная комплексная структура на V, то есть $J \in O(V)$ и

$J^2 = -Id$. Обозначим через $U_J(V)$ соответствующую унитарную группу: $U_J(V) := \{A \in SO(V) \colon AJ = JA\}$. Докажите, что включение $U_J(V) \subset SO(V)$ допускает единственное поднятие до гомоморфизма групп $f \colon U_J(V) \to Spin^c(V)$ такого, что его композиция с отображением нормы $N \colon Spin^c(V) \to U(1)$ совпадает с детерминантом: для любого $A \in U_J(V)$

$$N(f(A)) = det_J A.$$

Здесь $det_J A$ — определитель преобразования A, рассматриваемого как комплексно линейное преобразование комплексного пространства размерности $\dfrac{1}{2}\dim_{\mathbb{R}} V$.

б) Определим двукратное накрытие $\widetilde{U}_J(V)$ группы $U_J(V)$, задаваемое двумя различными значениями корня из детерминанта:

$$\widetilde{U}_J(V) = \{(A, \lambda) \in U_J(V) \times \mathbb{C}^* \colon \lambda^2 = det_J A\}.$$

Докажите, что включение $U_J(V) \subset SO(V)$ допускает поднятие до гомоморфизма групп $\widetilde{U}_J(V) \to Spin(V)$.

Спинорное представление

4. Докажите, что:
а) $Spin(5) \cong Sp(2)$;
б) $S^7 \cong Spin(5)/SU(2)$;
в) $Spin(6) \cong SU(4)$.

5. Докажите, что $S^7 \cong Spin(7)/G_2$. (Здесь G_2 — одна из исключительных групп Ли.)

Классы Штифеля-Уитни

6. Пусть M — компактное ориентируемое гладкое многообразие (без края). Докажите, что если $E \to M$ — комплексное векторное расслоение (конечного ранга), то

$$w_2(E) = c_1(E) \bmod 2,$$

где w_2 — второй класс Штифеля-Уитни, а c_1 — первый класс Черна.

7. а) Докажите, что вещественное проективное пространство $\mathbb{RP}^n$ является спинорным многообразием тогда и только тогда, когда $n \equiv 3 \bmod 4$.

б) Докажите, что комплексное проективное пространство $\mathbb{CP}^n$ является спинорным многообразием тогда и только тогда, когда n нечетно.

Спинорные связности

8. Пусть E — ориентированное евклидово векторное расслоение (конечного ранга) над гладким многообразием X, наделенное спинорной структурой $\Pi\colon P_{Spin}(E) \to P_{SO}(E)$. Пусть $\Delta_n\colon Spin(n) \to SO(W)$ — вещественное спинорное представление в некотором векторном пространстве W, а $W(E) = P_{Spin}(E) \times_{\Delta_n} W$ — соответствующее вещественное спинорное расслоение. Пусть ω — некоторая риманова связность на $P_{SO}(E)$. Она индуцирует ковариантную производную ∇ на расслоении $W(E)$. Докажите формулу для этой ковариантной производной:

$$\nabla\sigma_k = \frac{1}{2}\sum_{i<j} \widetilde{\omega}_{ji} \otimes e_i e_j \cdot \sigma_k.$$

Здесь $\mathcal{E} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ — локальный ортонормированный базис сечений расслоения E (или локальное сечение расслоения $P_{SO}(E)$), $(\sigma_1, \dots, \sigma_N)$ — локальный ортонормированный базис сечений расслоения $W(E)$, соответствующий базису $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ (то есть локальное сечение расслоения $P_{SO}(W(E))$, определяемое по $\mathcal{E}$ с помощью вложения $P_{Spin}(E) \subset P_{SO}(W(E))$), ω — форма связности на $P_{SO}(E)$, $\widetilde{\omega} = \mathcal{E}^*(\omega)$.

Оператор Дирака

9. Пусть X —полное риманово многоообразие и W — расслоение Дирака над X. Докажите, что замыкание оператора Дирака в пространстве $L^2(W)$ квадратично интегрируемых сечений расслоения W является неограниченным самосопряженным оператором.

$Spin^c$**-многообразия**

10. Докажите, что $Spin^c$-многообразие M с фундаментальным комплексным спинорным расслоением W^c, наделенным (послойной) эрмитовой метрикой, является спинорным тогда и только тогда, когда существует антилинейный изометрический изоморфизм $C\colon W^c \to W^c$, обладающий свойствами:

1. $C(sf) = (Cs)\bar{f}$ для $s \in \Gamma(W^c)$, $f \in C^\infty(M, \mathbb{C})$;
2. $C(\sigma s) = \alpha(\sigma)C(s)$ для $s \in \Gamma(W^c)$, $\sigma \in \Gamma(\mathbb{C}l(M))$ (здесь α — отображение градуировки);
3. $\langle Cs, Cs'\rangle = \langle s', s\rangle$ для $s, s' \in \Gamma(W^c)$.

Спектральные тройки

11. Пусть $\mathcal{G} = (C^\infty(M), \mathcal{H}, C, D, \chi)$ — геометрия Дирака на компактном ориентированном римановом многообразии M с метрикой g. Рассмотрим отображение c из $\Omega^n M$ в группу n-цепей Хохшильда $C_n(C^\infty(M))$, задаваемое формулой:

$$c(f_0 df_1 \wedge df_2 \wedge \cdots \wedge df_n) = \frac{1}{n!} \sum_{\pi \in S_n} (-1)^{\operatorname{sgn} \pi} f_0 \otimes f_{\pi(1)} \otimes f_{\pi(2)} \otimes \cdots \otimes f_{\pi(n)}.$$

Рассмотрим образ формы объема vol_g при отображении c. Докажите, что $c(vol_g)$ является n-циклом Хохшильда и задает цикл ориентации в геометрии $\mathcal{G}$, то есть $\pi_D(c(vol_g)) = \chi$.