Лекция 3 (30 сентября 2013)
Интегрирование на римановых поверхностях

3.0. Соглашения 1
3.1. Общий обзор 1
...3.1.0. Классические интегралы 2
...3.1.1. Современная картина 4
...3.1.2. Интегралы, зависящие от параметров 8
3.2. Когомологии римановых поверхностей 10
...3.2.0. Связь с гомологиями 10
...3.2.1. Изоморфизм де Рама и интегрирование 11
...3.2.2. Симплектическая структура 11
...3.2.3. Разложение Ходжа 12
...3.2.4. Вещественная структура 19
...3.2.5. Решётка периодов 20

3.0. Соглашения. В этой лекции мы работаем исключительно над полем $\mathbb{C}$, сохраняя обозначение S для *произвольной, но фиксированной* поверхности рода $g > 0$.

3.1. Общий обзор. Интегрирование алгебраических выражений[1] занимает математиков вот уже несколько столетий. В нашем курсе их понимание будет и *целью* нашей работы, и *средством* исследования римановых поверхностей.

3.1.0. Классические интегралы. Когда речь идёт о *неопределённом* интегрировании, рассматриваются

$$\int R(x,y)\mathrm{d}x, \tag{3.1a}$$

где R – рациональная функция, а x и y связаны нетривиальным полиномиальным соотношением

$$F(x,y) = 0; \tag{3.1b}$$

[1] временно воспользуемся этим нейтральным термином; классики говорили об интегрировании *функций* , что, как мы знаем, бессмысленно, и мы собираемся интегрировать исключительно *формы*

предполагается, что многочлен F неприводим и не делит знаменателя функции R. Традиционно эти интегралы рассматривались над полем вещественных чисел, но алгебраические вопросы – например, возможность преобразования этих интегралов друг в друга, выражение их через рациональные функции и т.п. – могут ставиться и над произвольным полем.

В 1826 году Абель обнаружил класс эллиптических интегралов третьего рода, *берущихся* в элементарных функциях. С современным изложением этой теории можно познакомиться по работе **[PoortenTran2000]**, которая начинается с примера

$$\int \frac{6x\mathrm{d}x}{\sqrt{x^4+4x^3-6x^2+4x+1}} =$$
$$= \log[x^6+12x^5+45x^4+44x^3-33x^2+43)+$$
$$+(x^4+10x^3+30x^2+22x-11)\sqrt{x^4+4x^3-6x^2+4x+1}].$$

Определённые же интегралах этого класса

$$\int_{x_1}^{x_2} R(x,y)\mathrm{d}x, \qquad (\mathbf{3.1c})$$

над произвольным полем смысла не имеют; постепенно стало ясно, что в них невозможно разобраться, оставаясь в рамках *вещественного* анализа. Эти интегралы были одним из важнейших стимулов *комплексификации* математики, происходившей в 17 – 19 веках.

Уточним определение "функций" (кавычки означают, что определение аргументов неочевидно) **(3.1c)** в комплексном случае.

Итак, пусть даны три ненулевых многочлена $F; A, B \in \mathbb{C}[x,y] \setminus \{0\}$ – мы вводим обозначение $R = \frac{A}{B}$. Предполагается, что

- F неприводим;
- F A и B взаимно просты;
- B не делится на F.

В этих предположениях можно пытаться определять интеграл

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{A(x,y)\mathrm{d}x}{B(x,y)} \qquad (\mathbf{3.1d})$$

при любых $x_1, x_2 \in \mathbb{C}$, но в некоторых случаях – а именно, если для некоторого $y_1 \in \mathbb{C}$ или $y_2 \in \mathbb{C}$ окажется, что $F(x_1, y_1) = 0$ и $B(x_1, y_1) = 0$ или $F(x_2, y_2) = 0$ и $B(x_2, y_2) = 0$ – интеграл окажется несобственным. Исторически первый *эллиптический* интеграл, выражающий длину эллипса (см. предыдущую лекцию) оказывается именно таким и при этом сходится, в чём читателю предлагается убедиться в упражнении **3.0**.

Не менее важной, чем идея комплексификации, была идея *проективизации*, пришедшая в математику из учения о *перспективе* и в 19-м веке завоевавшая алгебраическую геометрию и комплексный анализ. В случае обсуждаемых интегралов идея проявляется в том, что в **(3.1d)** следует рассматривать $x_1, x_2 \in \mathbf{P}_1(\mathbb{C}) := \mathbb{C} \coprod \{\underline{\infty}\}$; возникает другой тип несобственных интегралов, которые тоже часто сходятся. На эту тему читателю предлагается упражнение **3.1**.

Несколько более сложной задачей, чем установление запретов для пределов интегрирования в **(3.1d)**, является задача *выбора пути* интегрирования. При работе с вещественными интегралами такой задачи нет; в комплексной же области путь по x-плоскости надо проложить так, чтобы, во-первых, для каждого x *по непрерывности* однозначно выбирался y, являющийся корнем уравнения $F(x, y) = 0$, а во-вторых, чтобы во всех этих точках $B(x, y) \neq 0$. Для этого достаточно, чтобы путь в x-плоскости не пересекался с конечным множеством

$$\mathrm{Bad}_{F;A,B} :=$$

$$:= \{x \in \mathbb{C} | \exists y \in \mathbb{C}; \left\{ \begin{array}{l} F(x,y) = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = 0 \end{array} \right. \} \bigcup \{x \in \mathbb{C} | \exists y \in \mathbb{C}; \left\{ \begin{array}{l} F(x,y) = 0 \\ B(x,y) = 0 \end{array} \right. \}.$$

Интеграл **(3.1d)** зависит не только от F, A, B, x_1 и x_2, но и от *гомотопического класса* пути из x_1 в x_2 в дополнении $\mathbb{C} \setminus \mathrm{Bad}_{F;A,B}$.

Разумеется, все эти определения не могли быть даны на ранних стадиях развития обсуждаемых нами интегралов, история которых восходит к 17-му веку. Это не помешало сильнейшим математикам получить в течение трёх столетий огромное количество глубоких и трудных результатов, иногда мучаясь с ещё неточно определёнными мнимыми величинами, бесконечными точками, разрезами поверхностей (*до* легализации первых понятий топологии) и т.п. Мы постараемся освоить некоторые из

этих результатов на современном языке – не забывая об их происхождении.

Поработать с элементарными функциями в виде интегралов читателю предлагается в упражнении **3.2**. а в качестве менее тривиального действия – вывести *формулу удвоения Фаньяно* в упражнении **3.3**.

3.1.1. Современная картина. При переходе на язык сегодняшней математики формулировки заметно упрощаются. Всё, что нужно для интегрирования, мы ввели и обозначили на предыдущей лекции:

S – компактная связная риманова поверхность рода g;
$\omega \in \Omega^1(\mathrm{S})$ – мероморфный дифференциал на ней.

Пара (S, ω) проще тройки многочленов $(F; A, B)$ из предыдущего подраздела прежде всего тем, что сама её запись подразумевает решенными задачи *компактификации* и *десингуляризации* поверхности.

При работе с интегралами в классической записи решение обеих задач требует определённых усилий. Так, *лежандров интеграл первого рода*

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$$

связан с аффинной кривой $y^2 = (1-x^2)(1-k^2x^2)$, которая некомпактна: она представляет собой над $\mathbb{C}$ гладкий тор, из которого выколоты две точки. Проективное замыкание этой кривой, задаваемой в однородных координатах уравнением $Y^2Z^2 = (Z^2 - X^2)(Z^2 - k^2X^2)$, имеет особенность в "бесконечной" точке $(X : Y : Z) = (0 : 1 : 0)$, и, чтобы работать на гладком торе, эту особенность надо *разрешить*.

Далее, *особенности*, то есть *полюса* дифференциала ω определены в предыдущей лекции внутренним образом, с помощью нормирований: это те и только те точки $P \in \mathrm{S}$, в которых $\mathrm{ord}_P\omega < 0$. Наконец, интегрировать дифференциал можно вдоль тех и только тех (кусочно-гладких,...) путей, которые не пересекаются с его полюсами.

Относительно мероморфных дифференциалов $\omega \in \Omega^1(\mathrm{S})$ ставится два класса задач:

• изучить для $P, Q \in \mathrm{S}$ *неполные абелевы интегралы*

$$\int_Q^P \omega;$$

• изучить *периоды*

$$\oint \omega.$$

В обоих случаях подразумеваются интегралы по *всем* путям и циклам, минующим полюса. Неполные абелевы интегралы часто рассматриваются как функции своих *верхних* пределов (нижние фиксируются случайным образом).

При решении задач обеих классов полезно фиксировать поверхность S и охватить мысленным взором *все* дифференциалы $\omega \in \Omega^1(\mathrm{S})$; напомним, что они составляют *одномерное* векторное пространство над полем мероморфных функций $\mathcal{M}(\mathrm{S})$. Важную роль играет обсуждавшееся в предыдущей лекции разложение

$$\Omega(\mathrm{S}) = \Omega^1_{\mathrm{II}}(\mathrm{S}) + \Omega_{\mathrm{III}}(\mathrm{S}).$$

Оно позволяет отделить дифференциалы третьего рода, периоды которых определены плохо: каждый интеграл зависит от того, "с какой стороны" обходить полюс. Тем не менее, интегралы третьего рода играют важную роль в теории; ограничиваясь дифференциалами третьего рода *с целыми вычетами*

$$\Omega^{\mathbb{Z}}_{\mathrm{III}} := \{\omega \in \Omega_{\mathrm{III}} | \forall P \in \mathrm{S}; \mathrm{res}_P \omega \in \mathbb{Z}\},$$

рассматривают *экспоненциальные интегралы* $\mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} \int_Q^P \omega}$ и *экспоненциальные периоды* $\mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} \oint \omega}$, которые "не замечают" полюсов.

Что же касается дифференциалов второго рода, интегралы от них не замечают полюсов никогда: если путь интегрирования прошёл через такой полюс, то этот путь надо сместить с полюса малым шевелением в окрестности полюса, и получаемые интегралы не зависят от того, обходится полюс "слева" или "справа" . Это позволяет рассматривать интегрирование по замкнутым контурам как глобальное спаривание дифференциалов второго рода с гомологиями

$$\oint : \Omega_{\mathrm{II}}(\mathrm{S}) \times \mathrm{H}_1(\mathrm{S}; \mathbb{Z}) \longrightarrow \mathbb{C}, \qquad (\mathbf{3.1.1a})$$

которое займёт важное место в нашем курсе; оно же допускает многочисленные обобщения, которые мы рассмотреть *не* успеем.

Поскольку интегралы второго рода очевидным образом[2] тривиально ведут себя на *точных* дифференциалах в силу формул

$$\int_Q^P \mathrm{d}f = f(P) - f(Q) \text{ и } \oint \mathrm{d}f = 0$$

для любой $f \in \mathcal{M}(\mathrm{S})$, спаривание **(3.1.1a)** определяет спаривание с гомологиями алгебраических когомологий де Рама

$$\mathrm{H}^1_{\mathrm{dR}}(\mathrm{S}) \times \mathrm{H}_1(\mathrm{S};\mathbb{Z}) \longrightarrow \mathbb{C}. \qquad (\mathbf{3.1.1b})$$

Невырожденность комплексификации этого спаривания является основной теоремой об алгебраических когомологиях де Рама, доказательство которой было обещано выше и будет проведено ниже.

Поскольку среди дифференциалов второго рода содержатся дифференциалы первого, спаривание **(3.1.1a)** включает в себя спаривание

$$\oint : \Omega_{\mathrm{I}}(\mathrm{S}) \times \mathrm{H}_1(\mathrm{S};\mathbb{Z}) \longrightarrow \mathbb{C}; \qquad (\mathbf{3.1.1c})$$

здесь факторизация по точным дифференциалам не нужна: среди ненулевых голоморфных абелевых дифференциалов нет точных.

Выбрав базис в пространстве голоморфных дифференциалов на S

$$\Omega^1[\mathrm{S}] = \mathbb{C}\omega_1 \oplus \cdots \oplus \mathbb{C}\omega_g$$

и введя вектор дифференциалов

$$\vec{\omega} := \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \cdots \\ \omega_g \end{pmatrix},$$

[2]то есть в силу *формулы Стокса*, которая предполагается общеизвестной. Отметим, однако, что человечество веками шло к этой *очевидности* – через частные случаи, называемые *формулой Грина, Остроградского-Гаусса*, etc., которые до сих пор заполняют учебники физики для младшекурсников...

рассмотрим *решётку периодов*

$$\mathrm{Per}_{\vec{\omega}}(\mathrm{S}) := \oint_{\mathrm{H}_1(\mathrm{S};\mathbb{Z})} \vec{\omega} \subset \mathbb{C}^g;$$

так обозначается *аддитивная подгруппа* $\{\oint_c \vec{\omega} | c \in \mathrm{H}_1(\mathrm{S};\mathbb{Z})\}$ координатного пространства $\mathbb{C}^g$.

Теорема. *При любом выборе базиса в пространстве голоморфных дифференциалов решётка периодов имеет максимальный ранг*

$$\mathrm{rank}\ \mathrm{Per}_{\vec{\omega}}(\mathrm{S}) = 2g.$$

Доказательство. Выберем систему образующих

$$\mathrm{H}_1(\mathrm{S};\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}c_1 + \cdots + \mathbb{Z}c_{2g};$$

достаточно показать, что $2g$ векторов в $\mathbb{C}^g$

$$\oint_{c_1} \vec{\omega}, \ldots, \oint_{c_{2g}} \vec{\omega}$$

линейно независимы над $\mathbb{R}$.

Предположим, что это не так, и между ними имеется линейная зависимость

$$\lambda_1 \oint_{c_1} \vec{\omega} + \cdots + \lambda_{2g} \oint_{c_{2g}} \vec{\omega} = 0, \qquad (\mathbf{3.1d})$$

где

$$\lambda_1, \ldots, \lambda_{2g} \in \mathbb{R} \qquad (\mathbf{3.1e})$$

и $(\lambda_1, \ldots, \lambda_{2g}) \neq (0, \ldots, 0)$.

Векторное равенство **(3.1d)** означает g числовых равенств

$$\lambda_1 \oint_{c_1} \omega_i + \cdots + \lambda_{2g} \oint_{c_{2g}} \omega_i = 0 \text{ при } i = 1, \ldots, g, \qquad (\mathbf{3.1f})$$

а в силу **(3.1e)** из них вытекает ещё g равенств

$$\lambda_1 \oint_{c_1} \overline{\omega_i} + \cdots + \lambda_{2g} \oint_{c_{2g}} \overline{\omega_i} = 0 \text{ при } i = 1, \ldots, g. \qquad (\mathbf{3.1g})$$

Согласно **(3.1f)** и **(3.1g)**, вещественный цикл

$$\lambda_1 c_1 + \cdots + \lambda_{2g} c_{2g} \in \mathrm{H}_1(\mathrm{S};\mathbb{R})$$

аннулирует все $2g$ форм $\omega_1, \ldots, \omega_g, \overline{\omega_1} \ldots, \overline{\omega_g}$, порождающих пространство $\mathrm{H}^1(\mathrm{S};\mathbb{C})$, а это противоречит предположению о том, что $c_1, \ldots, c_{2g}$ порождают $\mathrm{H}_1(\mathrm{S};\mathbb{R})$.

■

Класс подобия решётки $\mathrm{Per}_{\vec{\omega}}(\mathrm{S})$, то есть орбита группы $\mathsf{GL}_2(\mathbb{C})$, действующей на подмножествах пространства $\mathbb{C}^g$, очевидно не зависит от выбора базиса $\vec{\omega}$ и доставляет важнейший инвариант поверхности S. Фактор пространства $\mathbb{C}^g$ по этой решётке, называемый её *якобианом*, будет подробно обсуждён; в частности, ему будет дано инвариантное определение.

3.1.2. Интегралы, зависящие от параметров. Мы проиллюстрируем эту огромную тему одним примером, который начали рассматривать в предыдущей лекции.

Семейство $\mathcal{E}$ алгебраических кривых, заданных уравнением

$$y^2 = x(x-1)(x-t), \tag{**3.1.2a**}$$

мы теперь, не мудря, будем считать *множеством* эллиптических кривых $\mathcal{E}_t$, параметризованных точками $t \in \ddot{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \setminus \{0,1\}$; точки $t = 0$ и $t = 1$ надо удалить, поскольку соответствующие им кривые особы.

Мы ввели на всех кривых $\mathcal{E}_t$ регулярные дифференциалы

$$\omega := \frac{\mathrm{d}x}{y} \in \Omega^1[\mathcal{E}]$$

и готовы рассмотреть их периоды. Выберем один из удобных вариантов – *полу*период $\int_1^\infty \omega$, на который мы будем смотреть как на *аналитическую* функцию

$$\mathfrak{p}(t) := \int_1^\infty \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x(x-1)(x-t)}} \tag{**3.1.2b**}$$

вещественного (для начала) аргумента $t \in (0,1)$; после того, как мы разложим её в ряд, можно будет подумать об её аналитическом продолжении.

Подсмотренную в книге **[Клеменс1984]**) формулу перепишем в виде

$$[t(t-1)\frac{\partial^2}{\partial t^2}+(2t-1)\frac{\partial}{\partial t}+\frac{1}{4}]\cdot\frac{1}{\sqrt{x(x-1)(x-t)}}=-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}\frac{\sqrt{x(x-1)(x-t)}}{(x-t)^2}. \tag{3.1.2c}$$

Читатель может снова проверить её с помощью подручных компьютерных средств в её сегодняшней *вещественной* интерпретации.

Проинтегрировав формулу **(3.1.2c)** по x от 1 до ∞, в силу **(3.1.2d)** получим

$$t(t-1)\ddot{\mathfrak{p}}(t)+(2t-1)\dot{\mathfrak{p}}(t)+\frac{1}{4}\mathfrak{p}(t)=0; \tag{3.1.2d}$$

оказывается, наша функция $\mathfrak{p}$ удовлетворяет *гипергеометрическому* дифференциальному уравнению

$$[t(t-1)\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}+((a+b+1)t-c)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}+ab]\cdot\mathfrak{p}=0 \tag{3.1.2e}$$

при $a=\frac{1}{2}, b=\frac{1}{2}, c=1$. С незапамятных времён[3] известно, что уравнению **(3.1.2e)** удовлетворяет *гипергеометрический ряд*

$$F(a,b;c;t):=1+\frac{ab}{1!c}t+\frac{a(a+1)b(b+1)}{2!c(c+1)}t^2+$$
$$+\frac{a(a+1)(a+1)b(b+1)(b+2)}{3!c(c+1)(c+2)}t^3+\dots \tag{3.1.2f}$$

и, разумеется, пропорциональные ему ряды, сходящиеся при $|t|<1$. В нашем случае

$$\mathfrak{p}(t)=\mathrm{Const}\cdot F(\frac{1}{2},\frac{1}{2};1;t); \tag{3.1.2g}$$

коэффициент пропорциональности вычисляется с помощью подстановки $t=0$, при которой интеграл перестаёт быть эллиптическим, но берётся. Предыдущие равенства приводят к ответу

$$\int_1^\infty\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x(x-1)(x-t)}}=\pi[1+(\frac{1}{2})^2t+(\frac{1\cdot3}{2\cdot4})^2t^2+(\frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6})^2t^3+\dots], \tag{3.1.2h}$$

[3]термин *гипергеометрический* ввёл Валлис в 1655 году; гипергеометрическими функциями занимались Эйлер, Гаусс, Риман,...

который читателю предлагается проверить в упражнении **3.3**.

Аналитическое продолжение функции $\mathfrak{p}$ многозначно: при обходе особых точек $t = 0$ и $t = 1$ меняется базис в гомологиях торов $\mathcal{E}_t$. Соответствующие конструкции тщательно исследованы и обобщены; уже полвека связанные с ними объекты называются *связностью Гаусса-Манина.*

3.2. Когомологии римановых поверхностей. В этой лекции речь пойдёт исключительно о когомологиях с *постоянными* коэффициентами. Некоторое представление о гомологиях и когомологиях предполагается.

3.2.0. Связь с гомологиями. Для модулей M, N над кольцом R мы будем пользоваться необщепринятым обозначением[4]

$$M \pitchfork_R N := \mathrm{Mor}_R(M, N);$$

разумеется, значок $\pitchfork$ следует воспринимать как близкого родственника значка $\otimes$.

Считая гомологии известными и наглядными, *определим* нужные нам когомологии как

$$\mathrm{H}^q(\mathrm{S}, \mathbb{C}) := \mathrm{H}_q(\mathrm{S}, \mathbb{Z}) \pitchfork_{\mathbb{Z}} \mathbb{C};$$

здесь $q \in \{0, 1, 2\}$, но содержательный смысл имеет лишь при $q = 1$. Элементы пространства $\mathrm{H}^1(\mathrm{S}, \mathbb{C})$ предлагается представлять себе как комплекснозначные функционалы на гомологических классах циклов.

Для $\Phi \in \mathrm{H}^1(\mathrm{S}, \mathbb{C}), c \in \mathrm{H}_1(\mathrm{S}, \mathbb{Z})$ для получаемого из них числа иногда будет применяться обозначение

$$< \Phi, c >:= \Phi(c) \in \mathbb{C}.$$

Приведённое определение в общем случае неправильно, но для наших скромных целей – когда речь идёт о компактных ориентируемых поверхностях – пригодно. Мы принимаем его, чтобы (временно) избежать коцепей, коциклов и кограниц.

[4] я встретился с ним в 70-е годы прошлого века в замечательных лекциях М.М.Постникова

3.2.1. Изоморфизм де Рама и интегрирование. Для гладкого ориентированного многообразия M будем обозначать $\mathcal{A}^q(M)$ пространство гладких внешних *комплекснозначных* $q-$форм. Градуированная сумма этих пространств

$$\mathcal{A}^\bullet(M) := \oplus_{q=0}^{\dim M} \mathcal{A}^q(M)$$

снабжена *внешним дифференциалом*

$$\mathrm{d} : \mathcal{A}^\bullet(M) \longrightarrow \mathcal{A}^\bullet(M) : \mathcal{A}^q(M) \longrightarrow \mathcal{A}^{q+1}(M).$$

Интегрирование вдоль циклов представляет собой билинейную форму

$$\mathcal{A}^q(M) \times \mathrm{H}_q(M, \mathbb{Z}) \longrightarrow \mathbb{C} : (\phi, c) \mapsto \int_c \phi.$$

Благодаря *формуле Стокса* интегрирование определяет *изоморфизм де Рама*

$$\mathrm{H}^q(M; \mathbb{C}) \cong \frac{\ker d|_{\mathcal{A}^q(M)}}{\mathrm{d}\mathcal{A}^{q+1}(M)}.$$

3.2.2. Симплектическая структура. На пространстве форм $\mathcal{A}^\bullet(M)$ определено ассоциативное *внешнее умножение*

$$\wedge : \mathcal{A}^\bullet(M) \times \mathcal{A}^\bullet(M) \longrightarrow \mathcal{A}^\bullet(M),$$

превращающее пространство $\mathcal{A}^\bullet(M)$ в *градуированную алгебру*:

$$\mathcal{A}^i(M) \wedge \mathcal{A}^j(M) \subseteq \mathcal{A}^{i+j}(M).$$

Внешнее умножение *суперкоммутативно*:

$$\forall \phi \in \mathcal{A}^i(M), \psi \in \mathcal{A}^j(M);$$

$$\phi \wedge \psi = (-1)^{ij} \psi \wedge \phi.$$

Теорема. *В случае компактной связной ориентированной поверхности* S *спаривание*

$$\mathrm{H}^1(\mathrm{S}, \mathbb{C}) \times \mathrm{H}^1(\mathrm{S}, \mathbb{C}) \longrightarrow \mathbb{C} : (\underline{\phi}, \underline{\psi}) \mapsto \iint_{\mathrm{S}} \phi \wedge \psi$$

корректно определено, кососимметрично и невырожденно, то есть определяет на $2g$-мерном пространстве $\mathrm{H}^1(\mathrm{S},\mathbb{C})$ симплектическую структуру.

При установлении канонического изоморфизма

$$\mathrm{can} : \mathrm{H}^1(\mathrm{S},\mathbb{C}) \xrightarrow{\cong} \mathrm{H}_1(\mathrm{S},\mathbb{C}) : \underline{\phi_0} \mapsto [\underline{\phi} \mapsto \iint_{\mathrm{S}} \phi_0 \wedge \phi]$$

это спаривание переходит в индекс пересечения, то есть

$$\forall \underline{\phi}, \underline{\psi} \in \mathrm{H}_1(\mathrm{S};\mathbb{C});$$

$$\iint_{\mathrm{S}} \phi \wedge \psi = \#(\mathrm{can}(\underline{\phi}) \cdot \mathrm{can}(\underline{\psi})).$$

Важное замечание. В этом определении используется только *гладкая* структура поверхности S, то есть не используется её *комплексная* структура.

О доказательстве. См. любой учебник.

■

3.2.3. Разложение Ходжа. Если на поверхности задан атлас

$$\mathrm{S} = \bigcup_{\alpha\in\mathfrak{A}} U_\alpha$$

с локальными координатами $z_\alpha : U_\alpha \hookrightarrow \mathbb{C}$, то любая (напомним, *комплекснозначная*) гладкая форма $\phi \in \mathcal{A}^1(\mathrm{S})$ в каждой карте однозначно представляется в виде

$$\phi|_{U_\alpha} = \Phi^{1,0}_\alpha \mathrm{d}z_\alpha + \Phi^{0,1}_\alpha \mathrm{d}\overline{z}_\alpha$$

с гладкими $\Phi^{1,0}_\alpha, \Phi^{0,1}_\alpha \in \mathcal{C}^\infty(U_\alpha) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$. В силу голоморфности отношений соседства эти разложения $\phi|_{U_\alpha} = \phi^{1,0}|_{U_\alpha} + \phi^{0,1}|_{U_\alpha}$ не зависят от карт, определяя глобальное разложение каждой 1-формы $\phi = \phi^{1,0} + \phi^{0,1}$, из которого сразу следует *разложение Ходжа* пространства 1-форм *по бистепеням*

$$\mathcal{A}^1(\mathrm{S}) =: \mathcal{A}^{1,0}(\mathrm{S}) \oplus \mathcal{A}^{0,1}(\mathrm{S}).$$

Несравненно более глубоким фактом является наличие аналогичного *разложения Ходжа* на уровне когомологий:

$$\mathrm{H}^1(\mathrm{S};\mathbb{C}) =: \mathrm{H}^{1,0}(\mathrm{S}) \oplus \mathrm{H}^{0,1}(\mathrm{S}).$$

Чтобы установить это разложение, надо в каждом *когомологическом классе* замкнутой формы $[\phi] \in \mathrm{H}^1(\mathrm{S};\mathbb{C})$ найти представителя, допускающего разложение

$$\phi + \mathrm{d}\Phi = \phi^{1,0} + \phi^{0,1}$$

в сумму *замкнутых* форм бистепеней (1,0) и (0,1).

Вряд ли существует лёгкое доказательство того, что это возможно. В доказательствах, которые можно найти в современной литературе, обычно используются *метрики* на римановой поверхности, *нормы* на пространствах дифференциальных форм, обобщённые функции и глубокие результаты функционального анализа.

Мы всё-таки обойдёмся *без* метрик и других дополнительных структур, или, как часто говорят, будем использовать *конформную метрику*, которая и есть *комплексная структура* на поверхности S. Мы будем работать с *линеаризацией* этой структурой, то есть со структурой *одномерного комплексного пространства* на каждой касательной плоскости $\mathrm{T}_P\mathrm{S}$.

Для задания этой линеаризованной структуры достаточно научиться умножать на i все касательные вектора из всех $\mathrm{T}_P\mathrm{S}$. Это умножение представлено так называемым оператором *квазикомплексной структуры*

$$\mathbf{J} : \mathrm{T}_P\mathrm{S} \longrightarrow \mathrm{T}_P\mathrm{S},$$

– точнее, совокупностью эндоморфизмов касательных пространств, удовлетворяющих соотношению

$$\mathbf{J}^2 = -\mathbf{1}_{\mathrm{T}_P\mathrm{S}}.$$

Эти операторы должны в подходящем смысле слова *гладко* зависеть от точки $P \in \mathrm{S}$ и учитывать *ориентацию* поверхности S; геометрически для любого ненулевого касательного вектора $\partial \in \mathrm{T}_P\mathrm{S} \setminus \{0\}$ вектор $\mathbf{J}\partial$

представляет собой результат *поворота* вектора ∂ на 90° *против* часовой стрелки.

В вещественных локальных координатах $z_\alpha = x_\alpha + y_\alpha \mathrm{i}$, очевидно,

$$\mathbf{J}\frac{\partial}{\partial x_\alpha} = \frac{\partial}{\partial y_\alpha},\ \mathbf{J}\frac{\partial}{\partial y_\alpha} = -\frac{\partial}{\partial x_\alpha} \qquad (\mathbf{3.2.3a})$$

или, равносильным образом, для любых $a, b \in \mathcal{C}^\infty(U_\alpha)$

$$\mathbf{J}(a\frac{\partial}{\partial x_\alpha} + b\frac{\partial}{\partial y_\alpha}) = -b\frac{\partial}{\partial x_\alpha} + a\frac{\partial}{\partial y_\alpha}. \qquad (\mathbf{3.2.3b})$$

Оператор Ходжа

$$\star : \mathcal{A}^1(\mathrm{S}) \longrightarrow \mathcal{A}^1(\mathrm{S})$$

определяется как *сопряжённый* к оператору квазикомплексной структуры:

$$< \star\phi, \partial >:=< \phi, \mathbf{J}\partial > . \qquad (\mathbf{3.2.3c})$$

Согласно **(3.2.3a)**,

$$\star(\mathrm{d}x_\alpha) = \mathrm{d}y_\alpha,\ \ \star(\mathrm{d}y_\alpha) = -\mathrm{d}x_\alpha \qquad (\mathbf{3.2.3d})$$

или, равносильным образом, для любых $a, b \in \mathcal{C}^\infty(U_\alpha)$

$$\star(a\mathrm{d}x_\alpha + b\mathrm{d}y_\alpha) = -b\mathrm{d}x_\alpha + a\mathrm{d}y_\alpha. \qquad (\mathbf{3.2.3e})$$

Последнюю формулу можно взять за *определение* оператора Ходжа, как это и делается во многих текстах (без объяснения причин).

Отметим для $\phi = a\mathrm{d}x_\alpha + b\mathrm{d}y_\alpha \in \mathcal{A}^1(U_\alpha)$ формулу

$$\phi \wedge \star\phi = (a\mathrm{d}x_\alpha + b\mathrm{d}y_\alpha) \wedge (-b\mathrm{d}x_\alpha + a\mathrm{d}y_\alpha) = (a^2 + b^2)\mathrm{d}x_\alpha \wedge \mathrm{d}y_\alpha,$$

из которой видно, что спаривание $(\phi, \psi) \mapsto \iint_{\mathrm{S}} \phi \wedge \star\psi$ положительно определено на пространстве *вещественных* дифференциалов.

В комплексных локальных координатах имеем

$$\star(\Phi^+\mathrm{d}z_\alpha + \Phi^-\mathrm{d}\overline{z_\alpha}) = \star((\Phi^+ + \Phi^-)\mathrm{d}x_\alpha + \mathrm{i}(\Phi^+ - \Phi^-)\mathrm{d}y_\alpha) =_{(\mathbf{3.2.3e})}$$

$$= -\mathrm{i}(\Phi^+ - \Phi^-)\mathrm{d}x_\alpha + (\Phi^+ + \Phi^-)\mathrm{d}y_\alpha =$$
$$= -\mathrm{i}(\Phi^+ - \Phi^-)\frac{\mathrm{d}z_\alpha + \mathrm{d}\overline{z_\alpha}}{2} + (\Phi^+ + \Phi^-)\frac{\mathrm{d}z_\alpha - \mathrm{d}\overline{z_\alpha}}{2\mathrm{i}} =$$
$$= -\mathrm{i}\Phi^+\mathrm{d}z_\alpha + \mathrm{i}\Phi^-\mathrm{d}\overline{z_\alpha}. \qquad (\mathbf{3.2.3f})$$

Таким образом, разложение $\mathcal{A}^1(\mathrm{S}) = \mathcal{A}^{1,0}(\mathrm{S}) \oplus \mathcal{A}^{0,1}(\mathrm{S})$ является разложением в сумму инвариантных подпространств оператора $\star$, соответствующих его собственным значениям $\mp\mathrm{i}$.

Для $\phi = \Phi^+\mathrm{d}z_\alpha + \Phi^-\mathrm{d}\overline{z_\alpha}$ вычислим

$$\phi \wedge \star\overline{\phi} = (\Phi^+\mathrm{d}z_\alpha + \Phi^-\mathrm{d}\overline{z_\alpha}) \wedge \star(\overline{\Phi^+}\mathrm{d}\overline{z_\alpha} + \overline{\Phi^-}\mathrm{d}z_\alpha) =_{(\mathbf{3.2.3f})}$$
$$= (\Phi^+\mathrm{d}z_\alpha + \Phi^-\mathrm{d}\overline{z_\alpha}) \wedge (-\mathrm{i}\overline{\Phi^-}\mathrm{d}z_\alpha + \mathrm{i}\overline{\Phi^+}\mathrm{d}\overline{z_\alpha}) =$$
$$= \mathrm{i}(|\Phi^+|^2 + |\Phi^-|^2)\mathrm{d}z_\alpha \wedge \mathrm{d}\overline{z_\alpha}.$$

Отсюда видно, что функционал $\phi \mapsto \iint_{\mathrm{S}} \phi \wedge \star\overline{\phi}$ определяет на $\mathcal{A}^1(\mathrm{S})$ вещественную положительно определённую квадратичную форму. Мы будем считать пространство $\mathcal{A}^1(\mathrm{S}) = \mathcal{A}^{1,0}(\mathrm{S}) \oplus \mathcal{A}^{0,1}(\mathrm{S})$ снабжённым соответствующей ей *эрмитовой* формой

$$(\phi, \psi)_{\mathsf{herm}} := \iint_{\mathrm{S}} \phi \wedge \star\overline{\psi}, \qquad (\mathbf{3.2.3g})$$

превращающей $\mathcal{A}^1(\mathrm{S})$ в *комплексное предгильбертово*[5] пространство. Отметим, что относительно этой формы компоненты $\mathcal{A}^{1,0}(\mathrm{S})$ и $\mathcal{A}^{0,1}(\mathrm{S})$ *взаимно ортогональны.*

Теперь мы готовы к описанию разложения Ходжа в когомологиях.

Теорема. *В каждом когомологическом классе гладких дифференциалов*

$$\phi + \mathrm{d}\mathcal{A}^0(\mathrm{S}) \subset \mathcal{A}^1(\mathrm{S})$$

найдётся дифференциал с наименьшей нормой, причём единственный; он является суммой голоморфного и антиголоморфного.

[5] то есть удовлетворяющее всем аксиомам гильбертова пространства, кроме *полноты*

Набросок доказательства. Пусть ϕ_0 – такой дифференциал. Тогда для *любой* гладкой функции $\Phi \in \mathcal{A}^0(\mathrm{S})$ при вещественной вариации в направлении $\mathrm{d}\Phi$ получаем при $t \in \mathbb{R}$

$$0 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|_{t=0}||\phi_0 + t\mathrm{d}\Phi||^2 = 2\mathrm{Re}(\phi_0, \mathrm{d}\Phi)_{\mathsf{herm}}. \qquad (\mathbf{3.2.3h})$$

Заменив в этой записи Φ на $\mathrm{i}\Phi$, получим

$$0 = 2\mathrm{Im}(\phi_0, \mathrm{d}\Phi)_{\mathsf{herm}}. \qquad (\mathbf{3.2.3i})$$

Комбинация $\frac{(\mathbf{3.2.3h})+(\mathbf{3.2.3i})\mathrm{i}}{2}$ даёт

$$\forall \Phi \in \mathcal{A}^0(\mathrm{S});\ (\phi_0, \mathrm{d}\Phi)_{\mathsf{herm}} = 0,$$

то есть *замкнутый дифференциал с наименьшей нормой в своём когомологическом классе ортогонален точным дифференциалам,*

$$\phi_0 \perp \mathrm{d}\mathcal{A}^0(\mathrm{S}). \qquad (\mathbf{3.2.3j})$$

Теорема вытекает из двух лемм[6], локальной и глобальной.

Лемма 1. *Следующие свойства замкнутой формы $\phi \in \mathcal{A}^1(\mathrm{S})$, выполняемые в достаточно малой окрестности U любой точки, равносильны:*

(a) быть локально дифференциалом гармонической функции, $\phi|_U = \mathrm{d}u$, где гармоничность $u \in \mathcal{A}^0(U)$ означает $\mathrm{d}\star\mathrm{d}u = 0$;
(b) быть козамкнутой, то есть удовлетворять $\mathrm{d}\star\phi = 0$;
(c) локально разлагаться в сумму голоморфного и антиголоморфного дифференциала

$$\phi|_U = \omega^+ + \overline{\omega^-},\ \text{где } \omega^\pm \in \Omega^1[U].$$

Доказательство. Поскольку ϕ замкнута, по *лемме Пуанкаре* она *локально точна*, то есть у любой точки найдётся такая окрестность U, что в ней

$$\phi|_U = \mathrm{d}u, \qquad (\mathbf{3.2.3k})$$

где $u \in \mathcal{A}^0(U)$. При необходимости уменьшим эту окрестность так, чтобы в ней действовала локальная голоморфная координата, у которой мы выделим вещественную и мнимую части

$$z = x + y\mathrm{i} :\hookrightarrow \mathbb{C}.$$

[6]представляющих значительный самостоятельный интерес, см. **[Спрингер1960]**. Мы, однако, не будем отвлекаться на *гармонические* дифференциалы

Пусть

$$\phi|_U = \Phi^+ \mathrm{d}z + \Phi^- \mathrm{d}\overline{z} = p\mathrm{d}x + q\mathrm{d}y, \qquad (\mathbf{3.2.3l})$$

где $\Phi^\pm, p, q \in \mathcal{A}^0(U)$. Замкнутость формы ϕ равносильна

$$\mathrm{d}\phi = 0 \Longleftrightarrow -\Phi^+_{\overline{z}} + \Phi^-_z = 0 \Longleftrightarrow -p_y + q_x = 0. \qquad (\mathbf{3.2.3m})$$

Согласно **(3.2.3k)**,

$$p = u_x,\ q = u_y,\ \Phi^+ = u_z,\ \Phi^- = u_{\overline{z}}. \qquad (\mathbf{3.2.3n})$$

Поскольку

$$\mathrm{d} \star \mathrm{d}u = \mathrm{d} \star (u_x \mathrm{d}x + u_y \mathrm{d}y) = \mathrm{d}(-u_y \mathrm{d}x + u_x \mathrm{d}y) = (u_{xx} + u_{yy})\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y,$$

условие (a) леммы равносильно

$$0 = u_{xx} + u_{yy} = u_{z\overline{z}},$$

откуда

$$p_x + q_y = 0,$$

а это и есть условие (b) козамкнутости, поскольку в вещественных координатах $\mathrm{d} \star \phi = \mathrm{d} \star (p\mathrm{d}x + q\mathrm{d}y) = \mathrm{d}(-q\mathrm{d}x + p\mathrm{d}y) = (p_x + q_y)\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$.

В комплексных же координатах

$$\mathrm{d} \star (\Phi^+ \mathrm{d}z + \Phi^- \mathrm{d}\overline{z}) = \mathrm{d}(-\mathrm{i}\Phi^+ \mathrm{d}z + \mathrm{i}\Phi^- \mathrm{d}\overline{z}) = \mathrm{i}(\Phi^+_{\overline{z}} + \Phi^-_z)\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}\overline{\mathrm{z}},$$

и обращение этой формы в нуль вместе с **(3.2.3m)** даёт $\Phi^+_{\overline{z}} = \Phi^-_z = 0$, то есть (c).

■

Дифференциал, обладающий в каждой точке поверхности равносильными свойствами из доказанной леммы, называется *гармоническим.*

Лемма 2. *Замкнутый дифференциал ортогонален пространству точных тогда и только тогда, когда он гармоничен.*

Доказательство. Для $\Phi \in \mathcal{A}^0(\mathcal{S}), \phi \in \mathcal{A}^1(\mathcal{S})$ имитируем "интегрирование по частям"

$$(\mathrm{d}\Phi, \phi)_{\mathsf{herm}} = \iint_{\mathrm{S}} \mathrm{d}\Phi \wedge \star\overline{\phi} = \iint_{\mathrm{S}} [\mathrm{d}(\Phi \star \overline{\phi}) - \Phi \mathrm{d} \star \overline{\phi}] = -\iint_{\mathrm{S}} \Phi \mathrm{d} \star \overline{\phi}.$$

Поскольку эта величина по предположению обращается в ноль для всех $\Phi \in \mathcal{A}^0(\mathcal{S})$, отсюда следует козамкнутость $\mathrm{d} \star \overline{\phi} = 0$ дифференциала $\overline{\phi}$ и потому, в силу тождества $\star\overline{\phi} \equiv -\overline{\star\phi}$, и козамкнутость $\mathrm{d} \star \phi = 0$ дифференциала ϕ.

■

Единственный существенный логический пробел в нашем доказательстве теоремы – предположение о *существовании* в данном когомологическом классе дифференциала с наименьшей нормой. Оно автоматически выполнялось бы, если бы (пред)гильбертово пространство $\mathcal{A}^1(\mathrm{S})$ было *конечномерным*; это пространство, разумеется, бесконечномерно, но развитие одной из центральных математических дисциплин XX-го века, *функционального анализа*, показало, что конечномерная интуиция работает и в *полных* гильбертовых пространствах, по крайней мере в отношении *замкнутых* подпространств.

Имеется два способа заполнить этот пробел.

Один, классический – *пополнить* пространство $\mathcal{A}^1(\mathrm{S})$ и поработать с обобщёнными функциями, измеримыми дифференциалами и т.п. Соответствующая математика красива и глубока, но весьма непроста, особенно для людей с мозгами алгебраистов и геометров. Все необходимые понятия и результаты подробно изложены в доступных монографиях – см., например, книгу **[Спрингер1960]**, в которой сохранён стиль мышления Римана, Клейна и Г. Вейля, и двухтомник **[ГриффитсХаррис1982]**, в котором используется современный язык.

Другой способ, основанный на идеях XXI-го века, связан с *дискретизацией* пространства $\mathcal{A}^1(\mathrm{S})$, в результате которой оно становится реально конечномерным. С необходимыми конструкциями можно познакомиться по ряду недавних работ – например, **[Mercat2001]** или **[Воеводский-Шабат2014]**. Возможность дискретизации *любой* компактной римановой поверхности следует из наличия на ней *штребелевых дифференциалов*, см. **[DouadyHubbard1975]**.

■

Далее для разложения Ходжа в когомологиях будет применяться стандартное обозначение

$$\mathrm{H}^1(\mathrm{S};\mathbb{C}) \cong \mathrm{H}^{1,0}(\mathrm{S}) \oplus \mathrm{H}^{0,1}(\mathrm{S});$$

имеет место изоморфизм

$$\mathrm{H}^{1,0}(\mathrm{S}) \cong \Omega^1[\mathrm{S}].$$

Следствие: теорема существования Римана. *На любой компактной римановой поверхности имеется непостоянная мероморфная функция.*

Доказательство. В случае поверхности рода $g = 0$ теорема следует из классификации односвязных римановых поверхностей, а в случае $g = 1$ мероморфные функции строятся явно: например, подходит $\wp$-функция Вейерштрасса. В случае $g \geq 2$ из гарантированного теоремой равенства

$$\dim_{\mathbb{C}} \mathrm{H}^{1,0}(\mathrm{S}) = \dim_{\mathbb{C}} \Omega^1[\mathrm{S}] = g$$

следует наличие на поверхности по крайней мере двух линейно независимых регулярных дифференциалов, и их отношение даёт требуемую функцию.

■

Разложение Ходжа в случае $g = 1$ читателю предлагается в упражнении **3.4**.

3.2.4. Вещественная структура. В отличие от предыдущей, эта структура очевидна (мы ей уже пользовались).

Вещественной структурой на векторном пространстве V над полем $\mathbb{C}$ называется *антилинейная* инволюция, то есть такая $\mathbb{R}$-линейная инволюция $V \to V : v \mapsto \overline{v}$, что для любых $\lambda \in \mathbb{C}$ и $v \in V$

$$\overline{\lambda v} = \overline{\lambda}\overline{v}.$$

Пример. $\mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n : (z_1, \ldots, z_n) \mapsto (\overline{z_1}, \ldots, \overline{z_n})$.

Пространства когомологий поверхностей были определены как пространства функционалов $\mathrm{H}^1(\mathrm{S};\mathbb{C}) := \mathrm{H}_1(\mathrm{S};\mathbb{Z}) \pitchfork_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}$, поэтому на них от рождения определена вещественная структура, задаваемая для $\psi \in \mathrm{H}^1(\mathrm{S};\mathbb{C})$ формулой $\overline{\psi}(c) := \overline{\psi(c)}$ для всех $c \in \mathrm{H}_1(\mathrm{S};\mathbb{Z})$.

Читателю следует тщательно продумать равенства

$$\overline{\mathrm{H}^{1,0}(\mathrm{S})} = \mathrm{H}^{0,1}(\mathrm{S}),\ \overline{\mathrm{H}^{0,1}(\mathrm{S})} = \mathrm{H}^{1,0}(\mathrm{S}).$$

3.2.5. Решётка периодов. Такой же тавтологичной, как предыдущая, может показаться конструкция вложения

$$\mathrm{H}^1(\mathrm{S};\mathbb{Z}) := \mathrm{H}_1(\mathrm{S};\mathbb{Z}) \pitchfork_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z} \hookrightarrow \mathrm{H}^1(\mathrm{S};\mathbb{C}).$$

Его образ состоит из комплекснозначных функционалов на гомологиях, принимающих целые значения; это – решётка ранга $2g$ в $2g$ -мерном комплексном пространстве когомологий.

Однако эта решётка, как мы увидим, таит в себе *всю* информацию о поверхности S! Её проекции на ходжевы "половинки" пространства когомологий, являющиеся g -мерными комплексными пространствами, являются решётками максимального ранга. Факторы по этим решёткам – компактные торы, по которым можно восстановить значения всех интегралов первого рода на римановой поверхности.

Упражнения

3.0. Проверьте сходимость интегралов

$$\int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} \text{ и } \int_{-1}^{1} \frac{x^2\mathrm{d}x}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$$

при любом $k \in (0,1)$. Восстановите геометрический смысл этих интегралов.

3.1. Проанализируйте сходимость интегралов

$$\int_1^\infty \frac{x^n\mathrm{d}x}{\sqrt{x^6-1}}, \int_1^\infty \frac{x^n\mathrm{d}x}{\sqrt{x^5-1}} \text{ и } \int_1^\infty \frac{x^n\mathrm{d}x}{\sqrt{x^5-x}}$$

при натуральных n.

3.2. Опишите области определения функций

$$\log(1+x)=\int_0^x\frac{\mathrm{d}u}{1+u},\arctan x=\int_0^x\frac{\mathrm{d}u}{1+u^2},\arcsin x=\int_0^x\frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{1-u^2}}.$$

в комплексной области. Помогут ли разложения этих функций в ряды Тейлора?

3.2. Докажите, что при любом вещественном $u\in(0,1)$ имеет место равенство

$$\int_0^{\frac{2u\sqrt{1-u^4}}{1+u^4}}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^4}}=2\int_0^u\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^4}}.$$

Указание. Интерпретируя рассматриваемые интегралы как *длины дуг лемнискаты,* Фаньяно обосновал требуемое равенство при $u\in(0,\sqrt{\sqrt{2}-1})$.

3.3. Проверьте равенство **(3.1.2h)** прямым вычислением, разложив подынтегральное выражение в ряд. Вычислите и сравните

$$\int_1^\infty\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x(x-1)(x-\frac{1}{2})}}\text{ и }\int_1^\infty\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x(x-1)(x+1)}}.$$

3.4. Постройте разложение Ходжа в когомологиях тора E_τ. **Указание.** Воспользуйтесь координатами z и $\overline{z}$ на универсальной накрывающей тора. Какие 1-формы окажутся гармоническими? Какие голоморфными?

Литература

[DouadyHubbard1975] A. Douady, J. Hubbard, *On the Density of Strebel Differentials.* Inventiones math. 30, 175 - 179.

[Mercat2001] Christian Mercat, *Discrete Riemann Surfaces and the Ising model.* Communications in Mathematical Physics 218, 1 (2001) 177-216.

[PoortenTran2000] Alfred J. van der Poorten, Xuan Chuong Tran, *Quasi-elliptic integrals and periodic continued fractions.* Monatshefte Math. 131 (2000), pp. 155–169.

[Воеводский[Шабат2014] В.А.Воеводский, Г.Б.Шабат, *Кусочно-евклидовы аппроксимации якобианов триангулированных римановых поверхностей.* Готовится к печати.

[ГриффитсХаррис1982] Ф.Гриффитс, Дж.Харрис, *Принципы алгебраической геометрии.* Перевод с англ. М., «Мир», 1982.
[Спрингер1960] Дж. Спрингер, *Введение в теорию римановых поверхностей.* Перевод с англ. М., ИЛ, 1960.