ВВЕДЕНИЕ В ТЕОРИЮ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Григорий Колюцкий

Лекция 2. Подкова Смейла

Сегодняшняя лекция будет посвящена отображению подковы, именно с появлением которого и берёт своё начало т.н. «гиперболическая революция». Мы поговорим об отображениях в размерности 2. Стандартный приём, о котором мы не скажем вовсе, позволяет перенести все объекты и наблюдаемые эффекты на векторные поля в размерности 3. В частности, там можно получить бесконечное число устойчивых периодических орбит, полностью противоречащих интуиции, сформированной теориями Пуанкаре-Бендиксона и Андронова-Понтрягина для векторных полей в размерности 2.

Мы будем следовать Ильяшенко, который упростил этот сюжет настолько, что его стало возможным рассказывать даже старшеклассникам.

1. Подкова (а точнее, скрепка!) Смейла

Рассмотрим единичный квадрат на координатной плоскости. Мы построим отображение на подмножестве этого квадрата, но его нетрудно продолжить до гладкого отображения сферы в себя[1]. Положим:

$$D = D_0 \cup D_1 = [0,1] \times \left[\frac{1}{5}, \frac{2}{5}\right] \cup [0,1] \times \left[\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right],$$

$$D' = D'_0 \cup D'_1 = \left[\frac{1}{5}, \frac{2}{5}\right] \times [0,1] \cup \left[\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right] \times [0,1].$$

Определение 1. *Отображение подковы:*[2]

$$f : D \to D', \qquad f|_{D_0} : (x,y) \mapsto \left(\frac{x+1}{5}, 5y - 1\right).$$

НОЦ МИАН, ОСЕНЬ 2013 ГОДА

[1]Неформально говоря, мы сжимаем квадрат по горизонтали, растягиваем его по вертикали, а затем изгибаем и накладываем на другую копию такого же квадрата.

[2]На самом деле, мы будем говорить о *скрепке*, а не о подкове, т.к. мы хотим всюду сохранить ориентацию. Доопределение отображения f на множестве D_1 в обоих случаях остаётся слушателям в качестве упражнения.

2. Судьба точки

Очевидно, что вовсе не для всех точек множества D определена хотя бы вторая итерация отображения подковы.

Мы будем изучать динамику только на *инвариантном множестве* $\Lambda \subset D \cap D'$, состоящем из тех и только тех точек p, для которых определена полная орбита $\{f^n(p) | n \in \mathbb{Z}\}$.

Определение 2. *Судьбой* точки $p \in \Lambda$ называется последовательность $\omega = \ldots\omega_{-n}\ldots\omega_0\omega_1\ldots\omega_n\ldots$, где

$$\omega_n = \begin{cases} 0, \text{ если } f^n(p) \in D_0, \\ 1, \text{ если } f^n(p) \in D_1. \end{cases}$$

На пространстве судеб $\Sigma_2 = \{0,1\}^{\mathbb{Z}}$ действует сдвиг Бернулли σ по правилу $(\omega_n) \mapsto (\omega'_n = \omega_{n+1})$.

Теорема 1 (О кодировании, т.е. о сопряжении динамики отображения f с символикой динамикой)**.**

- Λ — *это декартово произведение двух канторовских множеств.*
- *Для всякой последовательности* $\omega \in \{0,1\}^{\mathbb{Z}}$ *существует и единственна точка* $p \in \Lambda$ *такая, что* ω *— это её судьба, т.е.* $\omega(p) = (\omega_n)$.

Мы докажем эту теорему чуть позже, а пока воспользуемся ею для описания динамики отображения f.

3. Свойства подковы

Сейчас мы выведем несколько следствий из теоремы 1. [3]

- Периодических точек счётное число и они плотны в Λ.

  Доказательство. Опишем периодические точки отображения f. Если $p \in \Lambda$ — это n-периодическая точка с судьбой ω, то $p = f^n(p)$, а значит $\sigma^n\omega = \omega$, т.е. ω — это n-периодическая последовательность.

  Таким образом, периодическим точкам взаимно-однозначно соответствуют периодические последовательности из нулей и единиц. □

- Отображение f топологически транзитивно.

  Доказательство. Рассмотрим бесконечную последовательность, перечисляющую все конечные последовательности из нулей и единиц, — очевидно, она будет сколь угодно близко приближаться к каждой точке в Σ_2. □

[3] В этом пункте нам понадобится естественная топология на пространстве Σ_2 — см. соответствующее упражнение.

- Для произвольной пары точек x и y существует бесконечно много таких точек z, что:

$$f^n(x) - f^n(z) \to 0 \text{ при } n \to +\infty,$$
$$f^n(y) - f^n(z) \to 0 \text{ при } n \to -\infty.$$

Доказательство. В качестве z нужно рассмотреть последовательность с будущей судьбой x, прошлой y и произвольной конечной последовательностью нулей и единиц между ними. □

Отметим, что в случае векторных полей на плоскости подобное невозможно: даже представить себе сложно, как это для каждый пары может найтись бесконечно много траекторий, биасимптотических к каждой из них в положительном и отрицательном времени — такой эффект сильно противоречил интуиции специалистов в 60-ые годы.

4. Доказательство теоремы о кодировании

Вернёмся теперь к доказательству теоремы 1. Разобьём его в несколько промежуточных шагов.

Для начала опишем точки с фиксированной конечной будущей судьбой.

Определение 3. $\Lambda(\omega_0, \dots, \omega_n)$ — это горизонтальный прямоугольник, определяемый по индукции:

- База: $\Lambda(0) = D_0$, $\Lambda(1) = D_1$.
- Шаг: $\Lambda(\omega_0, \dots, \omega_n)$ получается делением $\Lambda(\omega_0, \dots, \omega_{n-1})$ на 5 равных горизонтальных прямоугольников и выбором второго снизу, если $\omega_n = 0$, и второго сверху, если $\omega_n = 1$.

Отсюда видно, что размеры $\Lambda(\omega_0, \dots, \omega_{n-1})$ — это 1 по горизонтали и 5^{-n} по вертикали.

Теперь построим канторово множество $C = \bigcup_{i=1}^{\infty} C_i$, где множества C_i определяются по индукции:

- База: $C_1 = \left[\frac{1}{5}, \frac{2}{5}\right] \cup \left[\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right]$.
- Шаг: C_{n+1} получается из C_n разбиением каждого из отрезков (компонент связности), составляющих C_n, на 5 равных частей и выбрасыванием первой, третьей и пятой частей (в каждом отрезке).

Построенное таким способом канторово множество допускает естественное кодирование бесконечными вправо последовательностями нулей и единиц: ноль на n-той позиции соответствует выбору второго отрезка на n-ом шаге, а единица — четвёртого.

Ввиду принципа вложенных отрезков Кантора, множество точек с будущей судьбой $\omega^+ = \omega_0\omega_1 \dots \omega_n \dots$ — это отрезок:

$$\Lambda\left(\omega^+\right) = [0,1] \times \left\{y\left(\omega^+\right)\right\}.$$

Аналогично получается множество точек с прошлой судьбой ω^-:

$$\Lambda\left(\omega'\right) = \left\{x\left(\tau\left(\omega^+\right)\right)\right\} \times [0,1],$$

где $\tau\left(\omega^-\right) = \omega'$, $\omega'_n = \omega_{-(n+1)}$.

Вычислить координаты точки по её судьбе, т.е. $x\left(\tau\left(\omega^+\right)\right)$ и $y\left(\omega^+\right)$ мы оставляем слушателям в качестве упражнения.

Теперь мы можем завершить доказательство теоремы 1. Будем искать точку с судьбой $\omega = \omega^-\omega^+$: $p = \Lambda\left(\omega^-\right) \cap \Lambda\left(\omega^+\right)$ — это точка пересечения вертикального и горизонтального единичных отрезков в единичном же квадрате, она существует и единственна.

Из симметричности прошлого и будущего мы видим, что проекции Λ на оси — это канторово множества, само Λ — это декартово произведение двух канторовых множеств, что завершает доказательство теоремы 1.

Как само отображение кодирования (обозначим его через h), так и отображение судьбы — это гомеоморфизмы (тоже упражнение).

Полученное сопряжение динамики на подкове с символической динамикой (сдвигом Бернулли на пространстве бесконечных двусторонних последовательностей нулей и единиц) можно представить в виде коммутативной диаграммы:

$$\begin{array}{ccc} \Lambda & \xrightarrow{f} & \Lambda \\ \downarrow{\scriptstyle h} & & \downarrow{\scriptstyle h} \\ \{0,1\}^{\mathbb{Z}} & \xrightarrow{\sigma} & \{0,1\}^{\mathbb{Z}} \end{array}$$