12.9.16 / 12.10.3

Лекция 2

ЭТО – ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ВЕРСИЯ ЛЕКЦИИ.
ОНА, ОДНАКО СОДЕРЖИТ ЗАДАЧИ И МАТЕРИАЛ, ДОСТАТОЧНЫЙ ДЛЯ ИХ РЕШЕНИЯ.

В дальнейшем этот текст будет исправляться и расширяться. Следите за датой последнего изменения, содержащейся после слэша в правом верхнем углу первой страницы в формате yy.mm.dd

Буду признателен за любые замечания и предложения,
george.shabat@gmail.com

2.0. Точные последовательности в (ко)гомологических теориях
2.1. Сингулярные гомологии
2.2. Функториальность
2.3. Относительные гомологии
2.4. Гомотопии
2.5. Связь относительных и абсолютных гомологий

2.0. Точные последовательности в (ко)гомологических теориях. Мы начнём с несложного результата, относящегося к чистой *гомологической алгебре* и играющего центральную роль во всех (ко)гомологических теориях самой разной природы.

Фиксируем *кольцо коэффициентов* $\mathbb{K}$. Введём категорию *дифференциальных* $\mathbb{K}$*-модулей*

$$\mathcal{DIFF}(\mathbb{K})\mathcal{MOD} := \{\{(M,\partial)||\partial : M \to M, \partial^2 = 0\}\},$$

где подразумевается $M \in\in (\mathbb{K})\mathcal{MOD}$ и $\partial \in \mathrm{End}_{(\mathbb{K})\mathcal{MOD}}M$. Морфизмы определяются очевидным образом:

$$\mathrm{Mor}_{\mathcal{DIFF}(\mathbb{K})\mathcal{MOD}}((M,\partial),(M',\partial')) := \{f : M \to M' | f \circ \partial = \partial' \circ f\}.$$

Лемма о зигзаге. *Пусть*

$$0 \longrightarrow (M',\partial') \xrightarrow{i} (M,\partial) \xrightarrow{p} (M'',\partial'') \longrightarrow 0$$

– короткая точная последовательность дифференциальных $\mathbb{K}$*-модулей. Тогда определена* длинная *точная последовательность*

$$\ldots \longrightarrow \mathrm{H}(M',\partial') \xrightarrow{i_*} \mathrm{H}(M,\partial) \xrightarrow{p_*} \mathrm{H}(M'',\partial'') \xrightarrow{\delta} \mathrm{H}(M',\partial') \longrightarrow \ldots,$$

в которой определения морфизмов i_* *и* p_* *очевидны, а* связующий *морфизм* δ *определяется как класс соответствия* $i^{-1\circ}\partial \circ p^{-1\circ}$.

Доказательство. Предоставляется читателю в упражнении **2.0.** ■

2.1. Сингулярные гомологии. Для произвольного топологического пространства $T \in\in \mathcal{TOP}$ и произвольного кольца $\mathbb{K}$ введём *комплекс ориентированных сингулярных цепей*

$$\mathrm{C}_\bullet(T;\mathbb{K}) := \oplus_{k=0}^{\infty}\mathrm{C}_k(T;\mathbb{K}),$$

где пространство $k-$цепей определяется как свободный модуль

$$\mathrm{C}_k(T;\mathbb{K}) := \oplus_{\underline{\sigma}:\mathbf{\Delta_k}\to T}\underline{\sigma}\mathbb{K},$$

где сумма берётся по всем непрерывным отображениям $\sigma : \mathbf{\Delta_k} \to T$ $k-$симплексов в пространство T, отфакторизованных, как и в лекции 1, по ориентированным заменам аргумента. Этот набор (*компле́кс*) свободных $\mathbb{K}-$модулей рассматривается вместе с *граничным оператором*

$$\partial : \mathrm{C}_k(T;\mathbb{K}) \longrightarrow \mathrm{C}_{k-1}(T;\mathbb{K}),$$

определённым при $k \geq 1$ на образующих формулами

$$\partial : [\mathrm{v}_0,\mathrm{v}_1] \mapsto [\mathrm{v}_1] - [\mathrm{v}_0],$$

$$\partial : [\mathrm{v}_0,\mathrm{v}_1,\mathrm{v}_2] \mapsto [\mathrm{v}_1,\mathrm{v}_2] - [\mathrm{v}_0,\mathrm{v}_2] + [\mathrm{v}_0,\mathrm{v}_1],$$

$$\ldots$$

$$\partial : [\mathrm{v}_0,\ldots,\mathrm{v}_\mathrm{k}] \mapsto \sum_{i=0}^{k}(-1)^i[\mathrm{v}_0,\ldots,\mathrm{v}_\mathrm{i}\text{ omitted },\ldots\mathrm{v}_\mathrm{k}].$$

При $k = 0$ будем считать граничный оператор нулевым, хотя иногда бывает полезно рассмотреть *аугментацию*

$$\mathrm{C}_0(T;\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{K} : [\mathrm{v}] \mapsto 1,$$

переводящие все 0-цепи, то есть точки пространства T, в единицу кольца $\mathbb{K}$.

Ключевое равенство $\partial\circ\partial = 0$ читателю предлагается проверить в упражнении **2.1.** Это равенство позволяет во введённых обозначениях определить (градуированный) *модуль сингулярных гомологий пространства* T *с коэффициентами в* $\mathbb{K}$

$$\mathrm{H}_\bullet(T,\mathbb{K}) := \frac{\ker\partial}{\mathrm{im}\partial}$$

или, подробнее,

$$\mathrm{H}_\bullet(T,\mathbb{K}) := \oplus_{k=0}^{\infty}\mathrm{H}_k(T,\mathbb{K}),$$

где

$$\mathrm{H}_k(T,\mathbb{K}) := \frac{\ker\partial|_{\mathrm{C}_k(T,\mathbb{K})}}{\partial\mathrm{C}_{k+1}(T,\mathbb{K})}.$$

В дальнейшем, когда мы будем говорить не о *модулях* гомологий, а о *группах* гомологий, это будет означать, что под кольцом коэффициентов мы подразумеваем кольцо целых чисел $\mathbb{Z}$.

Приведённое определение малопригодно для практических вычислений напрямую ; несколько лёгких результатов читателю предлагается установить в упражнениях **2.2-2.5.**

2.2. Функториальность. Зато с теоретической точки зрения определение сингулярных гомологий имеет важные преимущества перед определением симплициальных гомологий полиэдров. Они общее; трудные для симплициальных теорий классические результаты об *инвариантности чисел Бетти* оказываются почти тривиальными.

Для непрерывного отображения $f : T \to T'$ определяется морфизм (градуированных) $\mathbb{K}$-модулей,

$$f_\bullet : \mathrm{C}_\bullet(T;\mathbb{K}) \longrightarrow \mathrm{C}_\bullet(T';\mathbb{K}) : \underline{\sigma} \mapsto \underline{f\circ\sigma},$$

в очевидных обозначениях очевидно удовлетворяющий $f_\bullet\circ\partial = \partial'\circ f_\bullet$ и потому являющийся морфизмом дифференциальных модулей. Он определяет морфизм модулей гомологий

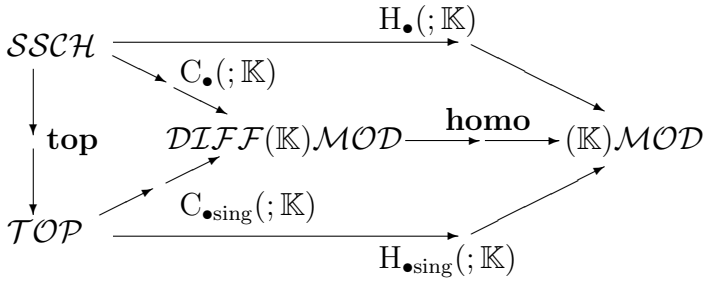
$$f_* : \mathrm{H}_\bullet(T;\mathbb{K}) \longrightarrow \mathrm{H}_\bullet(T';\mathbb{K}) : [z]_{\mathrm{im}\delta} \mapsto [f_\bullet(z)]_{\mathrm{im}\delta'},$$

превращая построение модулей гомологий в функтор

$$\mathrm{H}_\bullet :: \mathcal{TOP} \longrightarrow\longrightarrow (\mathbb{K})\mathcal{MOD}.$$

Провести необходимые проверки читателю предоставляется в упражнении **2.6**. "Инвариантность чисел Бетти" предлагается установить в качестве следствия.

Наши промежуточные итоги можно подвести в виде диаграммы функторов, коммутативной с точностью до изоморфизма:



Её главный недостаток – невычислимость нижнего треугольника. Этот недостаток преодолевается двумя идеями: переходу от пространств к *парам* пространств и огрублению объектов и морфизмов с точностью до *гомотопии.*

Коммутативность внешнего треугольника диаграммы устанавливается с помощью теоремы о *симплициальной аппроксимации.*

2.3. Относительные гомологии. Короткие точные последовательности, к которым окажется применима лемма о зигзаге, строятся с помощью *пар* топологических пространств.

Пусть $A \subseteq X$ – топологическое пространство и его подпространство; допускается случай $A = \emptyset$.

При любом кольце коэффициентов $\mathbb{K}$ имеется очевидное включение комплексов

$$\mathrm{C}_\bullet(A;\mathbb{K}) \overset{i}{\hookrightarrow} \mathrm{C}_\bullet(X;\mathbb{K}),$$

удовлетворяющее $\partial\mathrm{C}_\bullet(A;\mathbb{K}) \subseteq \mathrm{C}_\bullet(A;\mathbb{K})$, где, разумеется, ∂ – граничный оператор комплекса $\mathrm{C}_\bullet(X;\mathbb{K})$. Это позволяет определить на (градуиро-

ванном) фактор - модуле дифференциал

$$\underline{\partial} : \frac{\mathrm{C}_\bullet(X;\mathbb{K})}{\mathrm{C}_\bullet(A;\mathbb{K})} \longrightarrow \frac{\mathrm{C}_\bullet(X;\mathbb{K})}{\mathrm{C}_\bullet(A;\mathbb{K})} : [z] \mapsto [\partial z].$$

Введя традиционное обозначение для модуля *относительных цепей*

$$\mathrm{C}_\bullet(X, A;\mathbb{K}) := \frac{\mathrm{C}_\bullet(X;\mathbb{K})}{\mathrm{C}_\bullet(A;\mathbb{K})}$$

и обозначив проекцию $p : \mathrm{C}_\bullet(X;\mathbb{K}) \to \mathrm{C}_\bullet(X, A;\mathbb{K})$, получим для любой пары топологических пространств $A \subset X$ короткую точную последовательность дифференциальных модулей

$$0 \longrightarrow \mathrm{C}_\bullet(A;\mathbb{K}) \xrightarrow{i} \mathrm{C}_\bullet(X;\mathbb{K}) \xrightarrow{p} \mathrm{C}_\bullet(X, A;\mathbb{K}) \longrightarrow 0$$

и, следовательно, по лемме о зигзаге длинную точную последовательность гомологий

$$\ldots \longrightarrow \mathrm{H}(A;\mathbb{K}) \xrightarrow{i_*} \mathrm{H}(X;\mathbb{K}) \xrightarrow{p_*} \mathrm{H}(X, A;\mathbb{K}) \xrightarrow{\delta} \mathrm{H}(A;\mathbb{K}) \longrightarrow \ldots.$$

Такого рода длинные (ко)гомологические последовательности играют, как уже было упомянуто, центральную роль в разнообразных областях математики – как с теоретической точки зрения, так и в качестве основного средства вычислений. Рассматриваемая нами сейчас длинная точная последовательность уникальна в том отношении, что её связующий оператор имеет простой геометрический смысл: $\delta([z]) = [\partial z]$, то есть он переводит цепь большего пространства с границей, содержащейся в меньшем, в эту самую границу.

Обычно длинную гомологическую последовательность рассматривают с учётом градуировки:

$$\ldots \longrightarrow \mathrm{H}_k(A;\mathbb{K}) \xrightarrow{i_*} \mathrm{H}_k(X;\mathbb{K}) \xrightarrow{p_*} \mathrm{H}_k(X, A;\mathbb{K}) \xrightarrow{\delta} \mathrm{H}_{k-1}(A;\mathbb{K}) \longrightarrow \ldots.$$

при $k \geq 1$.

Рассмотреть простые примеры длинных гомологических последовательностей читателю предлагается в упражнении **2.7**.

2.4. Гомотопии. Мы будем предполагать известным понятие гомотопности непрерывных отображений топологических пространств

$$f_{0,1} : X \longrightarrow Y,$$

задаваемой непрерывным отображением $f : X \times [0,1] \to Y$.

Теорема. *Гомотопные отображения топологических пространств индуцируют одинаковые отображения их гомологий.*

При всей важности этой теоремы ещё важнее чисто алгебраическая конструкция, применяемая при её доказательстве.

Пусть даны два дифференциальных $\mathbb{K}$-модуля (M, ∂) и (M', ∂') и два морфизма $\phi_{0,1} : (M, \partial) \to (M', \partial')$. Эти морфизмы называются *гомотопными,* если существует такой (НЕдифференциальный!) морфизм $\mathbb{K}$-модулей $\beta : M \to M'$, что

$$f_0 - f_1 = \beta \circ \partial + \partial' \circ \beta.$$

Эта гомотопность является отношением эквивалентности, что читателю предлагается проверить в упражнении **2.8**.

Доказательство теоремы основано на следующей лемме, фундаментальной с точки зрения привлечения геометрической интуиции к конструкциям гомологической алгебры:

Морфизмы цепных комплексов, индуцированные гомотопными отображениями топологических пространств, гомотопны.

Приведённые результаты позволяют считать функтор сингулярных гомологий определённым не на категории топологических пространств $\mathcal{TOP}$, а на гомотопической категории $\mathcal{HOT}$.

Оценить силу этих результатов читатель может, выполнив упражнение **2.9**, в котором в одну строчку доказывается результат, существенно усиливающий утверждение, которое ранее предлагалось доказать в непростом (без использования гомотопических понятий) упражнении **2.5**.

2.5. Связь относительных и абсолютных гомологий. Для установления этой связи необходимо наложить общетопологические ограничения на пару $A \subseteq X$.

Подпространство A топологического пространства X называется его *окрестностным ретрактом,* если существует такое открытое в X подмножество $U \supset A$, что A – ретракт U.

Теорема. *Если A – окрестностный ретракт в пространстве X, то при любом кольце коэффициентов $\mathbb{K}$, любом натуральном $k \geq 1$ и любой точке $\star \in A$ вложение пар $(X, \star) \hookrightarrow (X, A)$ индуцирует изоморфизмы гомологий*

$$\mathrm{H}_k(X/A; \mathbb{K}) \cong \mathrm{H}_k(X, \star; \mathbb{K}) \cong \mathrm{H}_k(X; \mathbb{K}).$$

Эта теорема уже позволяет вычислить многие гомологии, в том числе важные для нас. Примеры читатель найдёт в упражнении

ЭТА ЛЕКЦИЯ БУДЕТ РАСШИРЕНА. В дальнейшем в неё войдут следующие темы:

формула Кюннета;
мультипликативная структура в гомологиях;
гомологии компактных топологических многообразий;
ориентируемость и двойственность Пуанкаре;
числа Лефшеца;
аксиоматические теории гомологий.

Упражнения

2.0. Проведите подробное доказательство леммы о зигзаге.

2.1. Для произвольного топологического пространства T, произвольного кольца $\mathbb{K}$ и произвольного натурального числа $k \geq 1$, положив $\mathrm{C}_{-1}(T; \mathbb{K}) = 0$, докажите равенство $0 = \partial \circ \partial : \mathrm{C}_k(T; \mathbb{K}) \to \mathrm{C}_{k-2}(T; \mathbb{K})$.

2.2. Вычислите группы гомологий отделимых пространств, состоящих из одной, двух и трёх точек. Изменился бы результат, ели бы мы рассмотрели также и *не*отделимые пространства?

2.3. Докажите, что нулевая группа гомологий любого топологического пространства изоморфна свободной абелевой группе, порождённой компонентами его линейной связности.

2.4 (для знающих определение фундаментальной группы). Докажите, что первая группа гомологий любого линейно связного топологического пространства изоморфна фактору её фундаментальной группы (с любой начальной точкой) по коммутанту.

2.5. Докажите, что вторая группа гомологий любого выпуклого тела в трёхмерном пространстве $\mathbb{R}^3$ равна нулю.

2.6. Проверьте со всеми подробностями, что сопоставления топологическому пространству его модуля сингулярных цепей и его модуля гомологий функториальны. Выведите из этого результата *изоморфность гомологий гомеоморфных пространств.*

2.7. Напишите длинные гомологические последовательности пар, состоящих из
а) произвольного графа и множества его вершин;
б) тора, реализованного как квадрат с отождествлёнными противоположными сторонами, и "восьмёрки" , представляющей собой образ в торе объединения этих сторон;
в) вещественной проективной плоскости и вещественной проективной прямой $\mathbb{P}_1(\mathbb{R}) \subset \mathbb{P}_2(\mathbb{R})$.

В случаях а) и б) кольцо коэффициентов несущественно, а в случае в) рассмотрите $\mathbb{K} = \mathbb{Z}$ и $\mathbb{K} = \mathbb{F}_2$.

2.8. Проверьте, что гомотопность является отношением эквивалентности на любом множестве морфизмов дифференциальных модулей.

2.9. Вычислите гомологии произвольного стягиваемого пространства – в частности, выпуклого подмножества евклидова пространства $\mathbb{R}^n$ любой размерности.

2.10. Пользуясь индуктивными соображениями, вычислите гомологии

сфер и комплексных проективных пространств:

$$\mathrm{H}_k(\mathbb{S}^n;\mathbb{Z}) \simeq \begin{cases} \mathbb{Z}, \text{ если } k=0 \text{ или } k=n; \\ 0, \text{ иначе.} \end{cases}$$

$$\mathrm{H}_k(\mathbb{P}_n(\mathbb{C});\mathbb{Z}) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}, \text{ если } k \in \{0,2,4,\ldots,2n\}; \\ 0, \text{ иначе.} \end{cases}$$