Когомологии алгебраических многообразий (аннотация)

Лектор: Георгий Борисович Шабат

В курсе будет дано несколько определений когомологий алгебраических многообразий и будут приведены условия их равносильности. Будет рассказано о стандартных приложениях и открытых проблемах.

После краткого напоминания основных понятий алгебраической топологии будут рассмотрены когомологии *комплексных* алгебраических многообразий. Этот класс многообразий будет включён в более широкие классы кэлеровых, абстрактных комплексных, квазикомплексных, дифференцируемых, топологических многообразий; различие этих классов будет установлено с помощью когомологических инвариантов. Будет введено и изучено разложение Ходжа пространств когомологий. Будет рассказано о современном состоянии *гипотезы Ходжа* – одной из открытых проблем тысячеления.

Далее будут введены основные понятия аддитивных и абелевых категорий и развита теория когомологий как производных полуточных функторов. Эти понятия будут применены к построению когомологий пучков на алгебраических многообразиях над произвольным алгебраически замкнутым полем. Будет дана когомологическая интерпретация *теоремы Абеля.*

Наконец, будут введены этальные когомологии. Для них будут установлены теоремы сравнения и *формула следа Лефшеца.* Они будут применены к доказательству *слабой гипотезы Морделла* и *гипотез Вейля,* позволяющих установить *рациональность дзета-функций многообразий над конечными полями.*

Если останется время, будет дан обзор других когомологических теорий (кристалльной, Бореля-Мура,...) и рассказано об общих идеях *теории мотивов* Гротендика.

Предполагается, что слушатели владеют основными (в рамках стандартных университетских курсов) понятиями алгебры, анализа на многообразиях и комплексного анализа. Желательно владение основными понятиями алгебраической геометрии. Остальные используемые средства по мере необходимости будут вводиться в курсе. Курс будет сопровождаться *упражнениями*, состоящими в основном из применений лекционного материала к частным случаям.

Когомологии алгебраических многообразий (программа курса)

Лектор: Георгий Борисович Шабат

0. Краткое историческое введение. Элементы алгебраической топологии в работах Эйлера, Римана и Пуанкаре. Триангуляции подмножеств евклидовых пространств. Числа Бетти и их топологическая инвариантность. Полиэдры; симплициальные и сингулярные гомологии. Когомологии Чеха. Гомологические и когомологические функторы; мультипликативная структура. Числа Лефшеца. Гладкие компактные многообразия; ориентируемость и двойственность Пуанкаре, когомологии де Рама. Гомологии пар, аксиомы Картана-Эйленберга; точные (ко)гомологические последовательности.

1. Когомологии комплексных алгебраических многообразий. Гладкие комплексные проективные многообразия как кэлеровы, абстрактные комплексные, квазикомплексные, дифференцируемые, топологические многообразия; различение этих классов когомологическими инвариантами. Разложение Ходжа. Комплексные торы и абелевы многообразия. Алгебраические циклы и гипотеза Ходжа.

2. Когомологии как производные функторы. Аддитивные и абелевы категории. Проективные и инъективные объекты. Точные и полуточные функторы; производные полуточных функторов. Вычисления с помощью резольвент. Примеры: категории модулей над группами, кольцами и алгебрами Ли; категории пучков и предпучков на данном топологическом пространстве.

3. Когомологии пучков. Топология Зариского на алгебраическом многообразии над алгебраически замкнутым полем. Структурный пучок и пучки дифференциальных форм. Абстрактные группы Ходжа; двойственность Серра. Когерентные и квазикогерентные пучки. Теоремы сравнения; *GAGA* Серра. Пучковая интерпретация когомологий де Рама и Ходжа. Группа Пикара. Приложение к классической математике: когомологическая интерпретация многообразий Якоби и Пикара, теорема Абеля как изоморфизм когомологических функторов.

4. Этальные когомологии. Этальные топологии, предпучки и пучки над ними. Конструктивные и локально-конструктивные пучки; ℓ-адические когомологии. Сравнение с классическими когомологиями. Слабая гипотеза Морделла. Формула следа Лефшетца. Гипотезы Вейля. Рациональность дзета-функций многообразий над конечными полями.