Курс НОЦ.
Алгебры Клиффорда и спиноры.

Лектор: Д.С.Широков*

25 августа 2011 г.

В лекциях рассматривается понятие алгебры Клиффорда над полем вещественных или комплексных чисел. В настоящее время алгебра Клиффорда (или, иногда, Геометрическая алгебра) применяется во многих разделах современной математики и физики - теории поля, робототехнике, обработке сигналов и изображений, механике, химии, космической динамике, электродинамике, геометрии и др.

Алгебра Клиффорда была открыта английским математиком Вильямом Клиффордом в 1878 году как алгебра, объединяющая свойства алгебры Грассмана и кватернионов Гамильтона. Теория алгебр Клиффорда развивалась усилиями многих математиков - Липшицем (R. Lipschitz), Картаном (E. Cartan), Валеном (K. T. Vahlen), Уиттом (E. Witt), Шевалле (C. Chevalley), Риссом (M. Riesz), Портеусом (I. R. Porteous), Хелмстейтером (J. Helmstetter).

Курс построен таким образом, что алгебра Клиффорда рассматривается не как абстрактная алгебра, а как математический аппарат, который активно используется в различных приложениях математической физики. По этой причине материал излагается без излишней формализации. Излагается своя точка зрения на рассматриваемые объекты.

Никаких дополнительных знаний от слушателей не требуется. Все необходимые понятия даются по ходу изложения. Курс будет полезен как студентам младших курсов для расширения своего кругозора, так и студентам старших курсов и аспирантам для возможного применения аппарата алгебр Клиффорда в различных приложениях.

*отдел мат.физики Математического Института им. В.А. Стеклова РАН

План курса:

- Определение алгебры Клиффорда с фиксированным базисом. Алгебра матриц Дирака, алгебра Грассмана (внешняя алгебра).
- Классификации элементов алгебр Клиффорда по четности, рангам и кватернионным типам.
- Матричные представления вещественных и комплексных алгебр Клиффорда. Эрмитовы идемпотенты и связанные с ними левые идеалы. Понятия определителя и следа от элемента алгебры Клиффорда.
- Периодичность Картана-Ботта (8-периодичность). Рекуррентный метод построения матричных представлений.
- Структура унитарного пространства на алгебре Клиффорда (операция скалярного произведения). Операция эрмитова сопряжения от элемента алгебры Клиффорда. Другие операции сопряжения.
- Усреднения элементов алгебры Клиффорда по наборам элементов базиса. Усреднения по различным наборам генераторов.
- Теорема Паули (о связи двух наборов генераторов) и ее обобщения. Связь с теорией представлений.
- Ортогональные и псевдоортогональные группы и их подгруппы - ортохронная, ортохорная, специальная и специальная ортохронная. Структура ортогональных групп.
- Спинорные группы в формализме алгебр Клиффорда. Доказательство теоремы о двойных накрытиях ортогональных групп спинорными в случае произвольной сигнатуры (p, q). Спинорные группы в случае малых размерностей $n \leq 6$.
- Спиноры Паули, Дирака, Вейля, Майорана, Вейля-Майорана. Киральный оператор. Дираковское, Майорановское и зарядовое сопряжения.
- Унитарные, псевдоунитарные и симплектические группы Ли в алгебрах Клиффорда, их алгебры Ли. Связь со стандартными матричными группами и алгебрами Ли.

Рекомендованный список литературы

1. Марчук Н.Г. Уравнения теории поля и алгебры Клиффорда, Главы 3 и 4, Ижевск, РХД, (2009), 302 стр.

2. Lounesto P., *Clifford Algebras and Spinors*, Cambridge Univ. Press (1997, 2001).

3. Benn I. M., Tucker R. W., *An introduction to Spinors and Geometry with Applications in Physics*, Publishing Ltd, (1987).

4. Gallier J., *Clifford algebras, Clifford groups, and a Generalization of the Quaternions: The Pin and Spin Groups*, (2008).

5. Snygg J., *Clifford Algebra*, Oxford Univ. Press (1997).

6. M.F. Atiyah, R. Bott, A.Shapiro, *Clifford modules*, Topology 3, pp. 3-38 (1964).

7. Chevalley C., *The algebraic theory of Spinors and Clifford algebras*, Springer, (1996).