Комбинаторные конструкции многообразий и их приложения

Руководитель:
Александр Александрович Гайфуллин

Широко используется два основных способа задания топологических пространств, в частности, многообразий. Первый – задание с помощью уравнений. Второй, который можно назвать синтетическим, – склеивание по определённым правилам из каких-либо простейших «кусочков», строение которых нам известно. Традиционно в качестве таких «кусочков» берутся симплексы или кубы, что приводит нас к изучению триангуляций и кубических разбиений многообразий. Однако, как правило, триангуляции и кубические разбиения даже достаточно простых многообразий имеют весьма сложное комбинаторное строение. В частности, до сих пор неизвестно достаточно хороших триангуляций комплексных проективных пространств $\mathbf{C}P^n$ при $n > 2$. Возникает естественное желание упростить правила склейки «кусочков», возможно, за счёт некоторого усложнения самих этих «кусочков», что приводит к рассмотрению многообразий, склеенных из произвольных выпуклых многогранников, но с достаточно простыми правилами склейки. Эта идея оказалась очень продуктивной и привела, начиная с 1980-х годов, к построению большого количества важных примеров многообразий, обладающих многими интересными свойствами. В первую очередь необходимо отметить связь таких многообразий с теорией кривизны в смысле А.Д. Александрова. Введённый А.Д. Александровым и развитый М. Громовым и другими математиками подход к понятию кривизны можно назвать глобальным, так как он оперирует непосредственно с функцией расстояния, а не с инфинитезимальным метрическим тензором. Такой подход оказался очень эффективным для пространств, имеющих «синтетическое» происхождение.

Спецкурс будет преследовать в основном две цели. С одной стороны, будут рассмотрены различные конструкции склеивания многообразий из многогранников и показано, что полученные многообразия обладают многими интересными свойствами и полезны во многих актуальных задачах. С другой стороны, будет дано введение в теорию ограниченной сверху кривизны в смысле А.Д. Александрова (так называемые $CAT(k)$-пространства). Эти две темы очень хорошо дополняют друг друга, так как, во-первых, многие свойства пространств, склеенных из многогранников, устанавливаются именно с помощью кривизны в смысле А.Д. Александрова, а во-вторых, многие свойства $CAT(k)$-пространств лучше всего видны именно на примере многообразий, склеенных из многогранников. Тематика спецкурса почти не требует предварительных знаний (за исключением понятия фундаментальной группы и некоторых фактов о накрытиях), но в то же время позволяет достаточно быстро добраться до весьма глубоких результатов, таких как теорема М. Дэвиса о существовании замкнутого многообразия, универсальная накрывающая которого стягиваема, но не гомеоморфна евклидову пространству, теорема К. Томеи о строении изоспектрального многообразия симметрических трёхдиагональных матриц и результаты лектора о реализации циклов любого пространства образами фундаментальных классов накрытий над многообразиями Томеи. Довольно большое внимание планируется уделить многочисленным связям рассматриваемых конструкций с другими областями математики, в частности, с

теорией групп Кокстера, торической топологией, геометрией и комбинаторикой выпуклых многогранников.

Планируется, что спецкурс будет доступен студентам с базовой математической подготовкой в объёме 1 – 2 курсов.