Разрывы в решениях нелинейных гиперболических систем уравнений

Лектор: Анна Павловна Чугайнова

Курс лекций представляет математическое введение, суммирующее известные общие результаты относительно одномерных нелинейных волн и разрывов в решениях гиперболических систем уравнений, выражающих законы сохранения. Наряду со стандартным материалом, касающимся характеристик поведения волн малой амплитуды, волн Римана, соотношений на разрывах, эволюционности разрывов, свойств разрывов с малым изменением величин, обсуждаются и не столь широко известные вопросы: поведение ударной адиабаты в окрестности точек Жуге, обобщение понятия энтропии и возможности приведения уравнений к специальному виду, предложенному С.К. Годуновым, введение диссипации, дисперсии, рассмотрение с общей точки зрения структуры ударных волн и разрывов с дополнительными соотношениями на них, определение возможного числа таких соотношений.

Программа курса:

1. Интегральные законы сохранения и соответствующие им дифференциальные уравнения для одномерных движений с плоскими волнами.
2. Гиперболические системы уравнений. Характеристические скорости и характеристические направления.
3. Слабые разрывы. Условия на слабых разрывах.
4. Линейные и линеаризованные уравнения. Общее решение в виде бегущих волн. Инварианты Римана. Представление системы двух квазилинейных уравнений с использованием инвариантов Римана.
5. Граничные условия. Приходящие и уходящие характеристики. Необходимое число граничных условий. Эволюционность границы.
6. Волны Римана. Характеристики, соответствующие волне Римана, на плоскости x, t. Интегральные кривые волн Римана. Эволюция профиля волны: опрокидывание волны, условие для расширяющейся волны с гладким решением.
7. Поверхности разрыва и соотношения на них. Ударная адиабата в фазовом пространстве состояний.
8. Условия эволюционности разрывов решений произвольных гиперболических систем. Диаграмма эволюционности и отображение на нее ударной адиабаты. «Основные» и «дополнительные» условия на разрывах. Условие априорной эволюционности. Разрывы с недостатком и избытком граничных условий. Условие Жуге, разрывы Жуге. Ударные волны и обратимые разрывы. Условие эволюционности в классическом случае, когда порядок систем уравнений с каждой из сторон от разрыва равен числу соотношений

на разрыве. Условия эволюционности в случае, когда линеаризованная система соотношений на разрыве распадается на независимые подсистемы.

9. Ударные волны малой амплитуды для системы уравнений, выражающей законы сохранения. Теоремы о скорости слабой ударной волны и о близости ударной адиабаты и интегральной кривой волны Римана. Отображение частей ударной адиабаты, соответствующих слабым ударным волнам, на диаграмму эволюционности.
10. Поведение ударной адиабаты в окрестности точек Жуге.
11. Задача о распаде произвольного разрыва и другие автомодельные задачи, решение которых зависит от x/t. Утверждение о несуществовании или неединственности решений автомодельных задач, когда одна из ударных волн мало отличается от ударной волны Жуге.
12. Исследование связи существования структуры разрыва и его эволюционности в общем случае. Требования, предъявляемые к полной системе уравнений, пригодной для описания процессов произвольного масштаба, и получение из нее упрощенной гиперболической системы, описывающей крупномасштабные явления. Постановка задачи о структуре разрыва. Получение соотношений на разрывах путем «сшивки» решений, продолжаемых из областей по обе стороны от структуры. Формулировка основного результата о числе соотношений на разрывах. Вырождение, имеющее место в случае, когда число основных соотношений превышает число, требующееся для эволюционности.
13. Асимптотическое поведение нелинейных волн в упругих средах с дисперсией и диссипацией. Неединственность решений автомодельной волновой задачи.
14. Неклассические разрывы при распространении продольных волн в стержнях со сложной нелинейностью.