Геометрические методы в математической физике

Катанаев Михаил Орионович[1]

Математический институт имени В. А. Стеклова
Российской Академии Наук

31 мая 2010 г.

[1]Любые замечания, указания на ошибки, неточности и опечатки прошу отправлять на e-mail: katanaev@mi.ras.ru

Оглавление

1 Основные обозначения и соглашения **7**

2 Введение **1**
2.1 Множества 1
2.2 Поле вещественных чисел $\mathbb{R}$ и прямая 3
2.3 Евклидово пространство $\mathbb{R}^n$ 9
2.3.1 $\mathbb{R}^n$ как метрическое пространство 9
2.3.2 $\mathbb{R}^n$ как топологическое пространство 14
2.4 Отображения 24
2.4.1 Отображения топологических пространств 27
2.5 Преобразования координат 32

3 Многообразия и тензорные поля **36**
3.1 Многообразие 36
3.2 Разбиение единицы 45
3.3 Многообразия с краем 46
3.4 Расслоения 48
3.5 Скалярные поля и плотности 51
3.6 Векторные поля и 1-формы 53
3.6.1 Локальное определение 53
3.6.2 Глобальное определение векторных и ковекторных полей 55
3.6.3 Кокасательные векторные поля и ростки 58
3.6.4 Векторные поля и дифференцирования 60
3.6.5 Векторные поля и интегральные кривые 63
3.6.6 1-формы и гиперповерхности 69
3.6.7 Алгебра Ли векторных полей 70
3.7 Тензорные поля 71
3.8 Полностью антисимметричные тензоры 77
3.9 Отображения многообразий 79
3.10 Подмногообразия 83
3.11 Теорема Фробениуса 87
3.12 Слоения 93
3.13 Бесконечно малые преобразования координат 97
3.14 Производная Ли 101

4 Дифференциальные формы и интегрирование **106**
4.1 Внешняя алгебра 106
4.2 Дифференциальные формы 113
4.3 Внешнее дифференцирование 116

4.4 Теорема Дарбу . . . 120
4.5 Оператор Лапласа–Бельтрами . . . 126
4.6 Интегрирование дифференциальных форм . . . 130
4.6.1 Форма объема . . . 133
4.6.2 Формула Стокса . . . 136

5 Метрика 140
5.1 Определение . . . 140
5.2 Метрика на лоренцевых многообразиях . . . 144
5.3 Векторные поля и вложения . . . 150
5.4 Выбор системы координат . . . 152
5.5 Разложение Ходжа . . . 153

6 Связности на векторных расслоениях 156
6.1 Векторные расслоения . . . 156
6.2 Связность на векторном расслоении . . . 160
6.3 Аффинная связность . . . 166

7 Связность на расслоении реперов 169

8 Аффинная геометрия. Локальное рассмотрение 176
8.1 Локальное определение аффинной связности . . . 176
8.2 Кручение и неметричность . . . 179
8.3 Ковариантная производная тензорных плотностей . . . 183
8.4 Параллельный перенос . . . 184
8.5 Геометрический смысл кручения . . . 189
8.6 Свойства аффинной связности . . . 190
8.7 Локальное определение тензора кривизны . . . 193
8.8 Свойства тензора кривизны . . . 194
8.9 Неголономный базис . . . 198
8.9.1 Тождества Бианки . . . 203

9 Группы Ли 204
9.1 Группы Ли и локальные группы Ли . . . 204
9.2 Действие группы слева . . . 210
9.3 Действие группы справа . . . 216
9.4 Присоединенное представление . . . 217
9.5 Группы Ли как римановы пространства . . . 220
9.6 Группы Ли как пространства Римана–Картана . . . 223
9.7 Двумерная неабелева группа Ли . . . 225
9.8 Гомоморфизмы групп Ли . . . 228
9.9 Экспоненциальное отображение для групп Ли . . . 232
9.10 Интегрирование на группах Ли . . . 234
9.11 Некоторые общие свойства групп и алгебр Ли . . . 236
9.12 Группа Ли $\mathbb{GL}(n,\mathbb{C})$ . . . 240
9.12.1 Алгебра Ли $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})$ . . . 240
9.12.2 Группа Ли $\mathbb{GL}(n,\mathbb{C})$ . . . 245

10 Группы преобразований 253
10.1 Действие групп преобразований . . . 253
10.2 Инфинитезимальные преобразования . . . 259
10.3 Инвариантные структуры . . . 261
10.4 Отображения групп преобразований . . . 263

11 Гомотопии и фундаментальная группа 266
11.1 Пути . . . 266
11.2 Гомотопия непрерывных отображений . . . 270
11.3 Фундаментальная группа . . . 273
11.4 Фундаментальная группа и ориентируемость . . . 277

12 Накрытия 283
12.1 Определения и примеры . . . 283
12.2 Фундаментальная группа пространства орбит . . . 287
12.3 Группа скольжений и существование накрытий . . . 290

13 Главные и ассоциированные расслоения 293
13.1 Главные расслоения . . . 293
13.2 Ассоциированные расслоения . . . 300
13.3 Отображение расслоений . . . 306

14 Связности на главных и ассоциированных расслоениях 311
14.1 Связность на главном расслоении . . . 311
14.2 Форма кривизны и структурное уравнение . . . 322
14.3 Параллельный перенос . . . 331
14.4 Группы голономии . . . 332
14.5 Петля Вильсона . . . 335
14.6 Отображение связностей . . . 338
14.7 Связность на ассоциированном расслоении . . . 341
14.8 Свойства групп голономий . . . 344
14.9 Плоские связности . . . 345
14.10Локальные и инфинитезимальные группы голономии . . . 351
14.11Инвариантные связности . . . 355

15 Приложения в квантовой механике 361
15.1 Адиабатическая теорема . . . 362
15.1.1 Двухуровневая система . . . 370
15.2 Фаза Берри . . . 373
15.2.1 Абелев случай: невырожденное состояние . . . 373
15.2.2 Частица со спином 1/2 в магнитном поле . . . 375
15.2.3 Неабелев случай: вырожденное состояние . . . 378
15.3 Эффект Ааронова–Бома . . . 380
15.3.1 Электрический потенциал . . . 382
15.3.2 Магнитный потенциал . . . 384

16 Векторные поля Киллинга 388
16.1 Изометрии и инфинитезимальные изометрии . . . 388
16.2 Однородные и изотропные многообразия . . . 392
16.3 Свойства векторных полей Киллинга . . . 398

16.4 Лоренц-инвариантные метрики 400

17 Геодезические и экстремали **405**
17.1 Геодезические 405
17.2 Экстремали 412
17.3 Интегрирование уравнений для экстремалей и геодезических 415
17.4 Вторая вариация уравнений для экстремалей 417
17.5 Уравнение Гамильтона–Якоби для экстремалей 420
17.6 Волновое уравнение 423
17.7 Приближение эйконала 426
17.8 Гармонические координаты 429
17.9 Нормальные, геодезические или римановы координаты 430
17.9.1 Нормальные координаты. Локальное рассмотрение. 431
17.9.2 Нормальные координаты в (псевдо-)римановом пространстве . 437
17.9.3 (Псевдо-)римановы пространства постоянной кривизны 438
17.9.4 Нормальные координаты и экспоненциальное отображение . . . 443
17.10Полнота римановых многообразий 445
17.11Формулы Френе 448

18 Симплектические и пуассоновы многообразия **451**
18.1 Симплектические группы 451
18.2 Симплектические многообразия 456
18.3 Пуассоновы многообразия 461
18.4 Структура Ли–Пуассона 466
18.5 Отображения пуассоновых многообразий 467

19 Принцип наименьшего действия **473**
19.1 Постановка вариационных задач 473
19.1.1 Задача с заданными граничными условиями 474
19.1.2 Задача со свободными граничными условиями 476
19.1.3 Задача с подвижной границей 477
19.1.4 Задача на условную стационарную точку 479
19.1.5 Другие задачи и терминология 481
19.2 Первая теорема Нетер 482
19.2.1 Тензор энергии-импульса 485
19.2.2 Тензор момента количества движения 487
19.3 Вторая теорема Нетер 488
19.4 Эффективное действие 491
19.5 Редуцированное действие 493

20 Канонический формализм **495**
20.1 Канонический формализм в механике точечных частиц 495
20.1.1 Преобразование Лежандра 495
20.1.2 Гамильтонова динамика точечных частиц 497
20.1.3 Потенциальное движение точечной частицы 503
20.1.4 Лемма Стокса 505
20.1.5 Канонические уравнения Гамильтона 507
20.1.6 Принцип Мопертюи 508
20.1.7 Уравнение Гамильтона–Якоби 512

20.1.8 Принцип Гюйгенса 515
20.1.9 Переменные действие-угол 517
20.1.10 Канонические преобразования 520
20.1.11 Производящие функции канонических преобразований. 528
20.2 Гамильтонова динамика частиц со связями 535
20.2.1 Гамильтонова динамика частиц со связями II рода 536
20.2.2 Гамильтонова динамика частиц со связями I рода 543
20.2.3 Калибровочная модель нерелятивистской частицы 549

21 Дополнение **553**
21.1 Кватернионы 553

Глава 1

Основные обозначения и соглашения

Дифференцирование выполняется раньше алгебраических операций.

$\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$	– множество натуральных чисел,
$\mathbb{Z} = \{\dots -1, 0, 1, \dots\}$	– множество целых чисел,
$\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$	– поле рациональных, вещественных, комплексных чисел,
$\mathbb{R}_+$	– множество положительных вещественных чисел,
$*$	– комплексное или эрмитово сопряжение,???
x и $(x^1, \dots, x^n)$	– точка многообразия и ее координаты,
$\{x^\alpha\} = \{x^0, x^\mu\} = \{x^0, \boldsymbol{x}\}$	– декартовы координаты в пространстве Минковского, или координаты на псевдоримановом многообразии,
$\partial_\alpha = \frac{\partial}{\partial x^\alpha}$	– частная производная,
$\partial^2_{\alpha\beta} = \frac{\partial^2}{\partial x^\alpha \partial x^\beta}$	– частная производная второго порядка,
∇_α	– ковариантная производная,
$\triangle$	– оператор Лапласа или Лапласа–Бельтрами,
$\Box$	– оператор Даламбера,
$\square$	– конец доказательства, примера или определения,
$(\partial f)^2 = g^{\alpha\beta}\partial_\alpha f \partial_\beta f$	– квадрат градиента функции f,
$g_{\alpha\beta}$	– компоненты метрики,
$g = \mathsf{det}\,(g_{\alpha\beta})$	– определитель метрики,
$e_\alpha{}^a$	– компоненты репера,
$e = \mathsf{det}\,(e_\alpha{}^a)$	– определитель репера,
e	– единица группы,
e	– основание натурального логарифма,
υ	– форма объема на многообразии $\mathbb{M}$,
$\Gamma_{\alpha\beta}{}^\gamma$	– компоненты аффинной связности,
$\omega_{\alpha a}{}^b$	– компоненты линейной или лоренцевой связности,
$\mathsf{sgn}\,\sigma(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$	– знак перестановки σ индексов $\alpha_1, \dots, \alpha_n$.

Некоторые многообразия и классы объектов имеют специальные обозначения:

$\mathbb{R}^n$ – n-мерное евклидово пространство,
$\mathbb{R}^n_+$ – полупространство в $\mathbb{R}^n$, определяемое условием $x^n > 0$,
$\mathbb{R}^{1,n-1}$ – n-мерное пространство Минковского,
$\mathbb{I} = (0,1)$ – единичный интервал,
$\mathbb{S}^n_r$ – n-мерная сфера радиуса r,
$\mathbb{B}^n_r$ – n-мерный шар радиуса r.
$\mathcal{C}^k(\mathbb{M})$ – класс функций, непрерывных вместе с производными вплоть до k-го порядка на многообразии $\mathbb{M}$,
$\mathcal{X}(\mathbb{M})$ – множество гладких векторных полей на многообразии $\mathbb{M}$,
$\mathcal{T}(\mathbb{M})$ – множество гладких тензорных полей на многообразии $\mathbb{M}$,
$\mathbb{M} \approx \mathbb{N}$ – многообразие $\mathbb{M}$ диффеоморфно (гомеоморфно) многообразию $\mathbb{N}$,
$\mathbb{G} \simeq \mathbb{H}$ – группа (алгебра, векторное пространство, ...) $\mathbb{G}$ изоморфна группе (алгебре, векторному пространству, ...) $\mathbb{H}$,
$\mathbb{M} \to \mathbb{N}$ – отображение множеств,
$\mathbb{M} \ni a \mapsto b \in \mathbb{N}$ – отображение элементов множеств,

Антисимметризация по индексам обозначается квадратными скобками:

$$A^{[ab]} = \frac{1}{2}(A^{ab} - A^{ba}),$$
$$A^{[abc]} = \frac{1}{6}(A^{abc} + A^{bca} + A^{cab} - A^{bac} - A^{acb} - A^{cba}).$$

В общем случае, когда имеется n индексов, сумма берется по всем $n!$ перестановкам. При этом четные перестановки индексов входят со знаком плюс, а нечетные – со знаком минус.

Симметризация индексов обозначается круглыми скобками:

$$A^{(ab)} = \frac{1}{2}(A^{ab} + A^{ba}),$$
$$A^{(abc)} = \frac{1}{6}(A^{abc} + A^{bca} + A^{cab} + A^{bac} + A^{acb} + A^{cba}).$$

Евклидова метрика δ_{ab} имеет два нижних индекса и равна единичной матрице. Например, в четырехмерном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^4$

$$\delta_{ab} = \mathsf{diag}\,(+\,+\,+\,+) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{1.1}$$

Символ Кронекера δ^b_a является тождественным оператором, действующим в векторном пространстве, и также равен единичной матрице. В $\mathbb{R}^4$

$$\delta^b_a = \mathsf{diag}\,(+\,+\,+\,+) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{1.2}$$

Для краткости, произведение символов Кронекера обозначается одним символом

$$\delta^{ab\ldots d}_{ef\ldots h} = \delta^a_e \delta^b_f \ldots \delta^d_h. \tag{1.3}$$

Иногда используется обобщенный символ Кронекера,

$$\hat{\delta}^{ab\ldots d}_{ef\ldots h} = n!\delta^{[a}_{\ e}\delta^b_f \ldots \delta^{d]}_h = n!\delta_{[e}^{\ \ a}\delta^b_f \ldots \delta^d_{h]}, \tag{1.4}$$

который получается из произведения (1.3) антисимметризацией по верхним или нижним индексам (что эквивалентно).

Метрика Минковского в четырехмерном пространстве-времени $\mathbb{R}^{1,3}$ имеет вид

$$\eta_{ab} = \mathsf{diag}\,(+---) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{1.5}$$

Каноническая симплектическая форма в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^{2n}$ имеет вид

$$\varpi = \begin{pmatrix} 0 & -\mathbb{1} \\ \mathbb{1} & 0 \end{pmatrix}, \tag{1.6}$$

где $\mathbb{1}$ – единичная $n \times n$ матрица.

Готический шрифт

$\mathfrak{A}\ \mathfrak{a}$	$\mathfrak{B}\ \mathfrak{b}$	$\mathfrak{C}\ \mathfrak{c}$	$\mathfrak{D}\ \mathfrak{d}$	$\mathfrak{E}\ \mathfrak{e}$	$\mathfrak{F}\ \mathfrak{f}$	$\mathfrak{G}\ \mathfrak{g}$	$\mathfrak{H}\ \mathfrak{h}$	$\mathfrak{I}\ \mathfrak{i}$
$\mathfrak{J}\ \mathfrak{j}$	$\mathfrak{K}\ \mathfrak{k}$	$\mathfrak{L}\ \mathfrak{l}$	$\mathfrak{M}\ \mathfrak{m}$	$\mathfrak{N}\ \mathfrak{n}$	$\mathfrak{O}\ \mathfrak{o}$	$\mathfrak{P}\ \mathfrak{p}$	$\mathfrak{Q}\ \mathfrak{q}$	$\mathfrak{R}\ \mathfrak{r}$
$\mathfrak{S}\ \mathfrak{s}$	$\mathfrak{T}\ \mathfrak{t}$	$\mathfrak{U}\ \mathfrak{u}$	$\mathfrak{V}\ \mathfrak{v}$	$\mathfrak{W}\ \mathfrak{w}$	$\mathfrak{X}\ \mathfrak{x}$	$\mathfrak{Y}\ \mathfrak{y}$	$\mathfrak{Z}\ \mathfrak{z}$	

Используемый греческий шрифт

α	β	$\Gamma\ \gamma$	$\Delta\ \delta$	ϵ	ε	ζ	η
$\Theta\ \theta$	ϑ	ι	κ	$\Lambda\ \lambda$	μ	ν	$\Xi\ \xi$
o	$\Pi\ \pi$	ϖ	ρ	ϱ	$\Sigma\ \sigma$	ς	τ
$\Upsilon\ \upsilon$	$\Phi\ \phi$	φ	χ	$\Psi\ \psi$	$\Omega\ \omega$		

Глава 2

Введение

После напоминания основных понятий теории множеств и введения обозначений, будет достаточно подробно рассмотрено евклидово пространство с различных точек зрения. Это сделано по двум причинам. Во-первых, чтобы подчеркнуть, что в евклидовом пространстве можно задавать различные структуры, которые в дальнейшем будут обобщаться в аффинной геометрии. Во-вторых, чтобы при изложении аффинной геометрии не напоминать относительно сложные понятия геометрии Евклида. В заключительных главах Введения рассматриваются пространства евклидовы пространства и пространства Минковского низших размерностей, которые играют очень важную роль в приложениях. При написании введения, которое содержит хорошо известный материал, использованы монографии [1–20].

2.1 Множества

В математике некоторые исходные понятия не имеют определения. Эти понятия основаны на интуиции и служат для определения других, более сложных, конструкций. Такими интуитивными понятиями являются *множество* и *элемент множества*. Под множеством понимают произвольную совокупность объектов, которые называются элементами множества. Говорят, что множество состоит из своих элементов. Один из способов задания множества состоит просто в перечислении его элементов.

Пример 2.1.1. Натуральные числа являются множеством, которое будем обозначать следующим образом:

$$\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}.$$

Множество натуральных чисел не определяется и лежит в основе всей математики. □

Пример 2.1.2. Множество целых чисел, включающее также нуль и все отрицательные числа, будем обозначать

$$\mathbb{Z} = \{\dots -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$$ □

Пример 2.1.3. Пусть m, n – произвольные целые числа, причем $n \neq 0$. Тогда множество чисел вида m/n называется множеством рациональных чисел и обозначается $\mathbb{Q}$. □

Пример 2.1.4. Вещественные и комплексные числа также являются множествами. Для них приняты обозначения $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$. □

Множества натуральных, целых и рациональных чисел являются бесконечными *счетными множествами*, т.е. их элементы можно пронумеровать натуральными числами. Множества вещественных $\mathbb{R}$ и комплексных чисел $\mathbb{C}$ представляют собой примеры *несчетных множеств*, поскольку их элементы невозможно пронумеровать натуральными числами. Множество называется *конечным*, если оно состоит из конечного числа элементов.

Пример 2.1.5. Множество поворотов евклидовой плоскости $\mathbb{R}^2$ на угол $\pi/2$ является конечным и состоит из четырех элементов. Это циклическая группа четвертого порядка. □

В большинстве случаев для обозначения множеств, таких как многообразия, группы, и др. мы будем употреблять латинские буквы, напечатанные ажурным шрифтом, $\mathbb{A}, \mathbb{B}, \mathbb{C}, \ldots$. Иногда будут использоваться также заглавные буквы, напечатанные курсивом $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, \ldots$.

Синонимами понятий множества и элемента множества являются *пространство* и *точка пространства*. Разница в употреблении терминов множество и пространство сложилась исторически. О множестве векторов говорят, как о векторном пространстве. Множество, снабженное топологией, называют топологическим пространством. Часто, говоря о пространстве, подразумевают, что оно, в отличие от множества, снабжено какой-либо дополнительной структурой, будь то топология или структура векторного пространства. Множество элементов называется также *семейством*. Как правило, термин семейство употребляется тогда, когда его элементами являются некоторые множества.

Если элемент x принадлежит множеству $\mathbb{U}$, то мы пишем $x \in \mathbb{U}$. В противном случае применяется обозначение $x \notin \mathbb{U}$. Если каждый элемент множества $\mathbb{U}$ принадлежит также множеству $\mathbb{V}$, то $\mathbb{U}$ является *подмножеством* $\mathbb{V}$. Это обозначается $\mathbb{U} \subset \mathbb{V}$ или $\mathbb{V} \supset \mathbb{U}$. При этом совпадение или равенство множеств $\mathbb{U} = \mathbb{V}$ значит, что $\mathbb{U} \subset \mathbb{V}$ и $\mathbb{V} \subset \mathbb{U}$. Это записывается в виде

$$\mathbb{U} = \mathbb{V} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbb{U} \subset \mathbb{V},\ \mathbb{V} \subset \mathbb{U},$$

где стрелка $\Leftrightarrow$ обозначает утверждение “тогда и только тогда”.

Пример 2.1.6. Множество целых чисел $\mathbb{Z}$ имеет много подмножеств. Среди них целые числа, которые делятся без остатка на целое число $n \in \mathbb{Z}$, отличное от нуля. Это подмножество обозначается $n\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z}$ и получается умножением каждого целого числа на n. □

Множество, не содержащее ни одного элемента, называется *пустым* и обозначается символом $\emptyset$. Оно, по-определению, является подмножеством любого множества, $\emptyset \subset \mathbb{U}$, $\forall \mathbb{U}$.

Подмножество элементов $x \in \mathbb{U}$, удовлетворяющих некоторому свойству P обозначается следующим образом

$$\{x \in \mathbb{U} |\ P\},$$

где свойство P, как правило, задается некоторым уравнением или неравенством для элементов x.

Пример 2.1.7. Множество положительных и отрицательных вещественных чисел определяется равенствами:

$$\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} |\ x > 0\},$$
$$\mathbb{R}_- = \{x \in \mathbb{R} |\ x < 0\}.$$ □

Определение. *Объединение, пересечение* и *разность* двух множеств $\mathbb{U}$ и $\mathbb{V}$ обозначается соответственно через

$$\mathbb{U} \cup \mathbb{V}, \quad \mathbb{U} \cap \mathbb{V}, \quad \mathbb{U} \setminus \mathbb{V}.$$

Эти множества определяются следующими равенствами:

$$\begin{aligned} \mathbb{U} \cup \mathbb{V} &= \{x |\ x \in \mathbb{U} \ \text{ или } \ x \in \mathbb{V}\}, \\ \mathbb{U} \cap \mathbb{V} &= \{x |\ x \in \mathbb{U} \ \text{ и } \ x \in \mathbb{V}\}, \\ \mathbb{U} \setminus \mathbb{V} &= \{x \in \mathbb{U} |\ x \notin \mathbb{V}\}. \end{aligned}$$

Если $\mathbb{U} \cap \mathbb{V} = \emptyset$, т.е. множества $\mathbb{U}$ и $\mathbb{V}$ не содержат общих элементов, то они называются *непересекающимися*. Если множество $\mathbb{V}$ является подмножеством в $\mathbb{U}$, $\mathbb{V} \subset \mathbb{U}$, то разность $\mathbb{U} \setminus \mathbb{V}$ называется *дополнением* к $\mathbb{V}$ в $\mathbb{U}$. □

Из определения, очевидно, следует

Предложение 2.1.1. *Пусть* $\mathbb{W} = \mathbb{U} \setminus \mathbb{V}$, *тогда* $\mathbb{W} \cup \mathbb{V} = \mathbb{U}$ *и* $\mathbb{W} \cap \mathbb{V} = \emptyset$.

Замечание. Операции объединения, пересечения и дополнения соответствуют логическим связкам “или”, “и”, “нет”. □

Предложение 2.1.2. *Операции объединения, пересечения и вычитания множеств удовлетворяют тождествам:*

$$\begin{aligned} \mathbb{M} \setminus (\mathbb{U} \cup \mathbb{V}) &= (\mathbb{M} \setminus \mathbb{U}) \cap (\mathbb{M} \setminus \mathbb{V}), \\ \mathbb{M} \setminus (\mathbb{U} \cap \mathbb{V}) &= (\mathbb{M} \setminus \mathbb{U}) \cup (\mathbb{M} \setminus \mathbb{V}) \end{aligned} \tag{2.1}$$

и

$$\begin{aligned} \mathbb{M} \cap (\mathbb{U} \cup \mathbb{V}) &= (\mathbb{M} \cap \mathbb{U}) \cup (\mathbb{M} \cap \mathbb{V}), \\ \mathbb{M} \cup (\mathbb{U} \cap \mathbb{V}) &= (\mathbb{M} \cup \mathbb{U}) \cap (\mathbb{M} \cup \mathbb{V}). \end{aligned}$$ □

Доказательство. Выполняется простой проверкой. Рис.2.1 иллюстрирует формулы (2.1). □

Рис. 2.1: Объединение, пересечение и разность множеств. Слева и справа те области, которые соответствуют равенствам (2.1), затемнены.

2.2 Поле вещественных чисел $\mathbb{R}$ и прямая

В геометрии к неопределяемым понятиям относится *прямая линия* или, короче, прямая, которую будем обозначать буквой $\mathbb{R}$. При этом ее представляют как отрезок, начерченный по линейке и мысленно продолженный до бесконечности в обе стороны. Прямая линия находится во взаимно однозначном соответствии с полем вещественных (действительных) чисел. Другими словами, прямая является наглядным изображением поля вещественных чисел. На ней выбирается произвольная точка,

начало отсчета, которой ставится в соответствие число нуль. Затем каждому положительному числу $x \in \mathbb{R}_+$ ставится в соответствие точка, лежащая справа от нуля на расстоянии, равном этому числу. Каждому отрицательному числу $x \in \mathbb{R}_-$ ставится в соответствие точка, лежащая слева от начала отсчета на расстоянии, равном модулю этого числа. При этом расстояние измеряется с помощью линейки, а число x называется координатой точки. Таким образом между точками прямой и вещественными числами устанавливается взаимно однозначное соответствие. Суммируя, можно сказать, что прямая это не более, чем наглядный образ вещественных чисел.

Расстояние l между двумя точками a и b, по-определению, равно модулю разности двух вещественных чисел $l(a,b) = |b-a|$. Его можно записать в виде интеграла

$$l(a,b) = \left| \int_a^b dx g \right| = |b-a|, \qquad g = 1. \tag{2.2}$$

Здесь введена функция g, равная единице, которая называется *метрикой*. Метрика в (2.2) всюду равна единице и называется *евклидовой*. В дифференциальной геометрии понятие расстояния обобщается за счет расширения класса рассматриваемых метрик. Понятие же евклидовой метрики чрезвычайно важно, т.к. служит той точкой отсчета, с которой сравниваются все остальные метрики.

Координаты точек складываются и умножаются так же, как и обычные вещественные числа. Для вещественных чисел определены две операции: сложение и умножение. По отношению к сложению вещественные числа образуют абелеву группу. Напомним общие определения и основные сведения из теории групп.

Определение. Непустое множество $\mathbb{G}$ называется *группой*, если выполнено четыре условия:

1) *Закон композиции.* Каждой паре элементов $a, b \in \mathbb{G}$ сопоставляется третий элемент этого же множества, называемый *произведением* элементов и обозначаемый $a \cdot b$ или ab. Закон композиции называется также *бинарной операцией*.
2) *Закон ассоциативности.* Для любых трех элементов $a, b, c \in \mathbb{G}$ имеет место равенство
$$(ab)c = a(bc).$$
3) В $\mathbb{G}$ существует левая *единица* e:
$$ea = a, \qquad \forall a \in \mathbb{G}.$$
4) Для каждого элемента $a \in \mathbb{G}$ существует по крайней мере один левый *обратный элемент* $a^{-1} \in \mathbb{G}$:
$$a^{-1}a = e.$$

Множество элементов с одной бинарной операцией, которая удовлетворяет только условию ассоциативности, называется *полугруппой*. Полугруппа с единичным элементом называется *моноидом*. Если для любых двух элементов $ab = ba$, то группа (или полугруппа) называется *коммутативной* или *абелевой*. В противном случае группа (или полугруппа) называется *неабелевой*. □

Пример 2.2.1. Пусть $n\mathbb{Z}$ – множество целых чисел, делящихся на n, где n – произвольное натуральное число. Это множество содержит число 0 при всех n, и в нем определены операции сложения $(+)$ и умножения $(\cdot)$. Относительно этих операций пара $(n\mathbb{Z}, +)$ является коммутативным моноидом, где роль единицы выполняет число 0, а пара $(n\mathbb{Z}, \cdot)$ – коммутативной полугруппой без единицы, если $n \geq 2$. □

Пример 2.2.2. Рассмотрим трехмерное евклидово пространство $\mathbb{R}^3$ с декартовыми координатами x, y, z. Пусть $\mathbb{G}$ – множество всех преобразований $\mathbb{R}^3$. Под композицией двух преобразований мы понимаем их последовательное выполнение. В предложении 2.4.1 будет доказано, что композиция преобразований произвольного множества является ассоциативной операцией. Множество преобразований $\mathbb{G}$ содержит единицу, которой является тождественное преобразование, оставляющее точки евклидова пространства неподвижными. Ясно, что множество всех преобразований представляет собой моноид. В общем случае множество преобразований $\mathbb{G}$ группу не образует, т.к. содержит, например, проекцию на плоскость x, y, которая не имеет обратного преобразования. □

В дифференциальной геометрии изучаются чаще всего такие преобразования многообразий, которые образуют группу. Поэтому опишем некоторые свойства групп более подробно.

Предложение 2.2.1. *Каждая левая единица $e \in \mathbb{G}$ является одновременно и правой единицей, $ae = a$ для всех $a \in \mathbb{G}$. Единица в группе единственна. Каждый левый обратный элемент $a^{-1} \in \mathbb{G}$ одновременно является и правым обратным элементом, $aa^{-1} = e$. Обратный элемент a^{-1} для всех $a \in \mathbb{G}$ единственен. Справедливо правило $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$.*

Доказательство. Приведено в большинстве учебников по теории групп. □

Определение. Группа, состоящая из конечного числа элементов, называется *конечной*. При этом количество элементов в группе называется *порядком* группы. Говорят, что группа не имеет *кручения*, если в ней нет элементов конечного порядка, т.е. не существует элемента конечная положительная степень которого равна единице. □

Замечание. В дифференциальной геометрии термин кручение имеет совершенно другой смысл (см. раздел 6.3). □

Пример 2.2.3. Множество невырожденных (с отличным от нуля определителем) квадратных $n \times n$ матриц над полем вещественных или комплексных чисел представляют собой группы по отношению к умножению матриц, которые обозначаются $\mathbb{GL}(n, \mathbb{R})$ и $\mathbb{GL}(n, \mathbb{C})$. Эти группы при $n > 1$ некоммутативны. □

Пример 2.2.4. Группа вращений трехмерного евклидова пространства $\mathbb{O}(3)$ и группа Лоренца $\mathbb{O}(1, 3)$ являются неабелевыми. □

Группа, состоящая из степеней одного элемента a называется *циклической*. Если циклическая группа имеет порядок n, то она обозначается $\mathbb{C}_n$, и $a^n = e$. Циклические группы обязательно абелевы.

Пример 2.2.5. Два целых числа 1 и -1 с обычным умножением образуют циклическую группу $\mathbb{Z}_2$. Ее также отождествляют с группой одномерных вращений, $\mathbb{Z}_2 = \mathbb{O}(1)$. □

Пример 2.2.6. Множество всех целых чисел $\mathbb{Z}$ образует бесконечномерную циклическую группу по отношению к сложению. □

Пример 2.2.7. Дробно-линейные преобразования комплексной плоскости

$$z \;\to\; \frac{az+b}{cz+d}, \qquad a,b,c,d \in \mathbb{C}, \quad ad-bc \neq 0 \tag{2.3}$$

образуют группу Ли, которая называется *группой Мёбиуса*. Эта группа шести параметрическая, т.к. числитель и знаменатель можно разделить на произвольное отличное от нуля комплексное число. □

Пусть $\mathbb{H} \subset \mathbb{G}$ – *подгруппа* группы $\mathbb{G}$, т.е. элементы $\mathbb{H}$ сами по себе образуют группу. При этом единица подгруппы $\mathbb{H}$ совпадает с единицей группы $\mathbb{G}$. Обозначим через $a\mathbb{H}$ и $\mathbb{H}a$ множество элементов вида ah и ha, где a – некоторый фиксированный элемент группы $\mathbb{G}$, а элемент $h \in \mathbb{H}$ пробегает всю подгруппу $\mathbb{H}$. Множества элементов $a\mathbb{H}$ и $\mathbb{H}a$, где $a \in \mathbb{G}$, называются *левым* и *правым смежными классами* группы $\mathbb{G}$ по подгруппе $\mathbb{H}$. Если $a \in \mathbb{H}$, то левый и правый смежный класс совпадает с $\mathbb{H}$.

Нетрудно проверить, что два левых смежных класса по $\mathbb{H}$ либо совпадают, либо не имеют ни одного общего элемента. Поэтому любой элемент группы принадлежит одному и только одному левому смежному классу, и его можно рассматривать как представитель этого класса. Под произведением двух левых смежных классов $a\mathbb{H}$ и $b\mathbb{H}$, которое также является левым смежным классом по подгруппе $\mathbb{H}$, понимается множество всех элементов вида cd, где $c \in a\mathbb{H}$ и $d \in b\mathbb{H}$. Сказанное выше верно и для правых смежных классов.

Определение. Два элемента a' и a называются *сопряженными*, если они связаны преобразованием *подобия*

$$a' = bab^{-1},$$

где b – некоторый элемент из $\mathbb{G}$. Сопряженность элементов является отношением эквивалентности (см. раздел 2.4) и определяет разбиение группы $\mathbb{G}$ на классы сопряженных элементов. Подгруппа $\mathbb{H}' \subset \mathbb{G}$ называется *сопряженной* подгруппе $\mathbb{H}$, если

$$\mathbb{H}' = b\mathbb{H}b^{-1},$$

для некоторого $b \in \mathbb{G}$. Очевидно, что единичные элементы сопряженных подгрупп $\mathbb{H}$ и $\mathbb{H}'$ совпадают. Подгруппа $\mathbb{H}$ отображается на себя для всех $b \in \mathbb{G}$ тогда и только тогда, когда подгруппа $\mathbb{H}$ содержит все элементы, сопряженные с ее элементами, что можно записать в виде $b\mathbb{H} = \mathbb{H}\,b$. Такая подгруппа называется *нормальной* подгруппой или *нормальным делителем*. Ее также называют *инвариантной подгруппой*. Левые и правые смежные классы по нормальному делителю совпадают и образуют группу по отношению к операции умножения смежных классов. Действительно, пусть $\mathbb{H}$ – нормальный делитель группы $\mathbb{G}$. Тогда для любых смежных классов $a\mathbb{H}$ и $b\mathbb{H}$ определено умножение

$$a\mathbb{H}b\mathbb{H} = ab\mathbb{H}\mathbb{H} = ab\mathbb{H}.$$

То есть множество смежных классов образует группу само по себе, при этом роль единицы выполняет нормальная подгруппа $\mathbb{H}$. Эта группа называется *факторгруппой* и обозначается $\mathbb{G}/\mathbb{H}$. □

Пример 2.2.8. Если в качестве подгруппы выбрать саму группу, $\mathbb{H} = \mathbb{G}$, то факторгруппа состоит из одного элемента – единицы, $\mathbb{G}/\mathbb{G} = e$. □

Множество всех элементов группы $\mathbb{G}$, перестановочных с любым элементом этой группы, является нормальным делителем и называется *центром* группы. Центр всегда является абелевой подгруппой группы $\mathbb{G}$.

Для абелевых групп композицию двух элементов часто называют *сложением* и пишут $a + b$. Тогда группу $\mathbb{G}$ называют *аддитивной группой* или *модулем*. Вместо единичного элемента здесь фигурирует *нулевой элемент*:

$$0 + a = a, \qquad \forall a \in \mathbb{G},$$

а обратный элемент обозначают $-a$:

$$-a + a = 0.$$

Очевидно, что любая подгруппа абелевой группы является нормальным делителем.

Пример 2.2.9. Множество натуральных чисел $\mathbb{N}$ группы по отношению к сложению не образует, т.к. не содержит ни нулевого, ни обратных элементов. □

Пример 2.2.10. Множества целых $\mathbb{Z}$ и вещественных чисел $\mathbb{R}$ образуют аддитивные группы по отношению к сложению. По сути дела, отсюда и пошло название "сложение" для групповой композиции в абелевых группах. □

Пример 2.2.11. По отношению к умножению вещественные числа группу не образуют, т.к. у нуля обратного элемента не существует. В то же время множество вещественных чисел без нуля образует абелеву группу по отношению к умножению. Эта группа является одномерной группой Ли и состоит из двух несвязных компонент: отрицательных и положительных чисел чисел $\mathbb{R}_- \cup \mathbb{R}_+$. □

Пример 2.2.12. Множество целых чисел с операцией сложения и отношением эквивалентности $n + p \sim n$, где число $p \in \mathbb{Z}$ фиксировано, и $n \in \mathbb{Z}$ любое, представляет собой конечную циклическую группу $\mathbb{Z}_p$, состоящую из p элементов. В этом случае мы пишем $n + p = n \mod p$.

Группу $\mathbb{Z}_p$ можно описать также следующим образом. Обозначим через $p\mathbb{Z}$ подгруппу целых чисел, состоящую из чисел, которые делятся на p без остатка. Тогда

$$\mathbb{Z}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}.$$

При $p = 2$ эта группа изоморфна группе, рассмотренной в примере 2.2.5. □

Определение. *Прямым произведением* двух групп $\mathbb{G}_1$ и $\mathbb{G}_2$ называется группа $\mathbb{G} = \mathbb{G}_1 \otimes \mathbb{G}_2$, образованная всеми упорядоченными парами (a_1, a_2), где $a_1 \in \mathbb{G}_1$ и $a_2 \in \mathbb{G}_2$, с умножением, определяемым формулой

$$(a_1, a_2)(b_1, b_2) = (a_1 b_1, a_2 b_2),$$

для всех $a_1, b_1 \in \mathbb{G}_1$ и $a_2, b_2 \in \mathbb{G}_2$. □

Если группы $\mathbb{G}_1$ и $\mathbb{G}_2$ конечны, то порядок группы $\mathbb{G}$ равен произведению порядков групп $\mathbb{G}_1$ и $\mathbb{G}_2$. Единицей группы $\mathbb{G}$ является пара (e_1, e_2), где e_1 и e_2 – единицы соответственно в группах $\mathbb{G}_1$ и $\mathbb{G}_2$. При этом элементы вида (a_1, e_2), где a_1 пробегает всю группу $\mathbb{G}_1$, образуют подгруппу в прямом произведении $\mathbb{G}_1 \otimes \mathbb{G}_2$, которая изоморфна $\mathbb{G}_1$. Аналогично, элементы вида (e_1, a_2) образуют подгруппу в $\mathbb{G}_1 \otimes \mathbb{G}_2$, изоморфную $\mathbb{G}_2$.

Если у групп $\mathbb{G}_1$ и $\mathbb{G}_2$ нет общих элементов, то элемент их прямого произведения (a_1, a_2) можно записывать просто $a_1 a_2$, причем $a_1 e_2 = a_1$ и $e_1 a_2 = a_2$.

Пример 2.2.13. Любая размерная величина в физике является прямым произведением числа и единицы измерения. Выражения вида сила = масса × ускорение также являются прямыми произведениями. □

Вещественные числа $\mathbb{R}$ представляют собой множество с двумя бинарными операциями. А именно, для двух произвольных чисел $a, b \in \mathbb{R}$ однозначно определена их сумма $a+b$ и произведение ab. Вещественные числа представляют собой частный случай множества, которое называется в алгебре кольцом.

Определение. Непустое множество с двумя бинарными операциями называется *кольцом*, если выполняются следующие условия.

Законы сложения.

1) Закон ассоциативности: $a + (b + c) = (a + b) + c$.

2) Закон коммутативности: $a + b = b + a$.

3) Разрешимость уравнения $a + x = b$ для всех a и b.

Закон умножения.

1) Закон ассоциативности: $a(bc) = (ab)c$.

Законы дистрибутивности.

1) $a(b + c) = ab + ac$.

2) $(b + c)a = ba + ca$. Если умножение в кольце коммутативно, то говорят о *коммутативном кольце*. □

Три закона сложения означают в совокупности, что элементы кольца образуют абелеву группу (модуль) по отношению к сложению. Если кольцо обладает правым и левым единичным элементом одновременно, $ea = ae = a$, то он называется *единицей*, и говорят о *кольце с единицей*. В общем случае левые и правые единицы у кольца могут различаться, а единиц может быть несколько.

Пример 2.2.14. Минимальное конечное кольцо состоит из двух элементов 0 и 1 со следующей таблицей сложения и умножения

$$\begin{array}{lll} 0+0=0, & 0+1=1, & 1+1=0, \\ 0\cdot 0=0, & 0\cdot 1=0, & 1\cdot 1=1. \end{array}$$ □

Пример 2.2.15. Множество целых чисел с операцией сложения и умножения образуют коммутативное кольцо с единицей. □

Определение. Кольцо, для каждого элемента которого $a^2 = a$, называется *булевым*. □

Определение. Кольцо называется *телом*, если:

1) в нем есть по крайней мере один элемент, отличный от нуля;

2) уравнения $ax = b$ и $xa = b$ при $a \neq 0$ разрешимы.

Коммутативное тело называется *полем* или *рациональным кольцом*.

Замечание. Тело, как и кольцо, является аддитивной группой (модулем) по отношению к сложению, однако не является группой по отношению к умножению, т.к. у нуля в общем случае нет обратного элемента. Операции сложения и умножения в поле связаны дистрибутивными законами. □

Пример 2.2.16. Множества рациональных $\mathbb{Q}$, действительных $\mathbb{R}$ и комплексных чисел $\mathbb{C}$ являются полями. При этом $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$. Целые числа образуют подкольцо поля рациональных чисел $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$. □

Говорят, что поле $\mathbb{F}$ имеет *характеристику* p, если существует такое простое число p, что выполнено равенство

$$\underbrace{a + \ldots + a}_{p} = 0, \qquad \forall a \in \mathbb{F}.$$

В этом случае поле $\mathbb{F}$ содержит подполе $\mathbb{Z}_p$. Если такого числа p не существует, то говорят, что поле $\mathbb{F}$ имеет характеристику нуль. В последнем случае оно содержит подполе, состоящее из рациональных чисел.

Пример 2.2.17. Поля рациональных $\mathbb{Q}$, действительных $\mathbb{R}$ и комплексных $\mathbb{C}$ чисел имеют характеристику нуль. □

2.3 Евклидово пространство $\mathbb{R}^n$

Основным понятием дифференциально геометрии является дифференцируемое многообразие, которое является обобщением евклидова пространства. Евклидово пространство наделено различными структурами: евклидовой метрикой, топологией, структурой векторного и аффинного пространства. Поэтому в настоящем разделе мы изучим это пространство с различных точек зрения, чтобы в дальнейшем было ясно, что именно и как обобщается в дифференциальной геометрии.

2.3.1 $\mathbb{R}^n$ как метрическое пространство

Пусть $\mathbb{R}$ – поле вещественных чисел. В геометрии поле вещественных чисел наглядно изображается в виде прямой линии на рисунках. При этом каждая точка прямой $x \in \mathbb{R}$ находится во взаимно однозначном соответствии с вещественным числом, которое обозначается той же буквой x и называется координатой точки. На прямой выбирается произвольная точка – *начало отсчета*, которой ставится в соответствие число нуль $0 \in \mathbb{R}$. Обычно предполагают, что на рисунках координаты точек упорядочены и возрастают слева направо, что отмечают стрелкой.

Расстояние l между двумя точками $x, y \in \mathbb{R}$, по-определению, равно модулю разности двух вещественных чисел $l(x, y) = |x - y|$.

Обозначим через $\mathbb{R}^n$ прямое произведение n прямых:

$$\mathbb{R}^n := \underbrace{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}}_{n}, \tag{2.4}$$

где $n \in \mathbb{N}$ – произвольное натуральное число, которое называется *размерностью* пространства $\mathbb{R}^n$. Точкой $x \in \mathbb{R}^n$ является упорядоченный набор n вещественных чисел $x^\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha = 1, \ldots, n$, которые называются *декартовыми координатами* данной точки. Мы записываем координаты точки в виде строки,

$$x = \{x^\alpha\} = (x^1, \ldots, x^n) \in \mathbb{R}^n.$$

Каждый из сомножителей, входящих в определение пространства $\mathbb{R}^n$ (2.4), называется *координатной прямой*, а точка с нулевыми координатами $(0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^n$ – *началом координат*.

Под 0-мерным пространством $\mathbb{R}^0$ понимают одну точку – число нуль. Одномерное пространство представляет собой прямую, $\mathbb{R}^1 = \mathbb{R}$. Двумерное пространство $\mathbb{R}^2$ называется *плоскостью*.

Замечание. Номер координаты обозначается с помощью верхнего индекса так же, как и показатель степени. Как правило, различие в значении индексов ясно из контекста. □

В определении пространства $\mathbb{R}^n$ точку и ее координаты можно отождествить. Однако, определив таким образом $\mathbb{R}^n$, мы можем затем перейти в другую систему координат (см. раздел 2.5). Тогда той же точке пространства $\mathbb{R}^n$ будет соответствовать другой набор вещественных чисел. Поэтому следует различать точку пространства $\mathbb{R}^n$ и ее координаты, которые зависят от выбора системы координат.

Расстояние l, т.е. отображение $l : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, между двумя произвольными точками $a, b \in \mathbb{R}^n$ с декартовыми координатами a^α и b^α определяется следующей формулой

$$l(a,b) := |b-a| = \sqrt{(b^1-a^1)^2 + \cdots + (b^n-a^n)^2}. \tag{2.5}$$

Между двумя бесконечно близкими точками x^α и $x^\alpha + dx^\alpha$ расстояние задается *интервалом*, который представляет симметричная квадратичная форма,

$$ds^2 := l^2(x, x+dx) = dx^\alpha dx^\beta g_{\alpha\beta}, \tag{2.6}$$

где метрика $g_{\alpha\beta}$ не зависит от точки пространства $\mathbb{R}^n$ и является единичной матрицей, которую будем обозначать следующим образом

$$g_{\alpha\beta} := \delta_{\alpha\beta} = \mathsf{diag}\,(\underbrace{1, \ldots, 1}_{n}). \tag{2.7}$$

В формуле (2.6) и в дальнейшем по повторяющимся индексам, один из которых пишется сверху, а другой – снизу, производится суммирование, если не оговорено противное. Это правило называется *правилом суммирования Эйнштейна*. Матрица (2.7) называется *евклидовой метрикой* и имеет специальное обозначение $\delta_{\alpha\beta}$.

В дифференциальной геометрии роль индексов чрезвычайно важна. Поэтому отметим ряд общих правил, которые всюду используются в дальнейшем. Эти правила связаны с группами преобразований, которые действуют на геометрические объекты.

1) Каждое слагаемое может содержать некоторый индекс один или два раза. В первом случае он называется *свободным*, а во втором случае – *немым*.
2) Если некоторое выражение состоит из суммы нескольких слагаемых, то каждое слагаемое должно содержать один и тот же набор свободных индексов. При этом значения этих индексов во всех слагаемых должно фиксироваться одновременно.
3) Немой индекс обязательно встречается один раз сверху и один раз снизу в каждом слагаемом. Значение этого индекса в каждом слагаемом не может быть зафиксировано, т.к. по нему проводится суммирование. В разных слагаемых немые индексы можно обозначать различными буквами, а число их пар может различаться.

Иногда мы все же будем писать повторяющиеся индексы как нижние или верхние. Например, запись $g_{\alpha\alpha}$ обозначает диагональный элемент метрики, стоящий на α-том месте. При этом суммирование не проводится.

Выше мы ввели евклидову метрику в декартовой системе координат, с помощью которой было определено пространство $\mathbb{R}^n$. С помощью расстояния, т.е. отображения

$\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, понятие декартовой системы координат можно обобщить следующим образом. Существуют преобразования координат пространства $\mathbb{R}^n$, которые сохраняют вид расстояния (2.5) и, следовательно, интервала (2.6). Эти преобразования образуют неоднородную группу вращений $\mathbb{IO}(n)$, состоящую из вращений пространства $\mathbb{R}^n$,

$$x'^{\alpha} = x^{\beta} S_{\beta}{}^{\alpha}, \qquad S_{\beta}{}^{\alpha} \in \mathbb{O}(n),$$

и сдвигов,

$$x'^{\alpha} = x^{\alpha} + a^{\alpha}, \qquad a^{\alpha} = \mathsf{const}.$$

Поэтому в дальнейшем под декартовой системой координат мы будем понимать любую систему координат, в которой расстояние между точками пространства $\mathbb{R}^n$ имеет вид (2.7).

Определение. Система координат x^{α}, $\alpha = 1, \ldots, n$ пространства $\mathbb{R}^n$, в которой расстояние между двумя произвольными точками $a, b \in \mathbb{R}^n$ имеет вид (2.5), называется *декартовой системой координат.* □

После того, как евклидово пространство определено, в нем можно строить произвольные криволинейные, например, сферические или цилиндрические системы координат в зависимости от специфики той или иной задачи. В таких системах координат метрика $g_{\alpha\beta}(x)$ будет зависеть от точки евклидова пространства.

Рассмотрим произвольную дифференцируемую *кривую* $\gamma = x(t) = \{x^{\alpha}(t)\}$, т.е. дифференцируемое отображение замкнутого единичного отрезка $\bar{\mathbb{I}} = [0, 1]$ в пространство $\mathbb{R}^n$,

$$\gamma : \quad \bar{\mathbb{I}} \ni t \;\mapsto\; \{x^{\alpha}(t)\} \in \mathbb{R}^n, \tag{2.8}$$

где t – вещественный параметр вдоль кривой. Говорят, что кривая соединяет две точки a и b, где $x(0) = a$, $x(1) = b$. Если граничные точки кривой совпадают, $a = b$, то кривая называется *замкнутой*. В общем случае кривая может иметь точки самопересечения. Функции $x^{\alpha}(t)$ предполагаются бесконечно дифференцируемыми $x^{\alpha}(t) \in \mathcal{C}^{\infty}(\bar{\mathbb{I}})$. Совокупность функций $\dot{x}^{\alpha}$, где точка обозначает дифференцирование по параметру t, определяет касательный вектор к кривой,

$$X_{(\gamma)} = \{X^{\alpha}_{(\gamma)} := \dot{x}^{\alpha}\},$$

который называется *вектором скорости* кривой. Мы всегда предполагаем, что вектор скорости кривой отличен от нуля, т.е. отлична от нуля по крайней мере одна из компонент $\dot{x}^{\alpha}$, что соответствует погружению отрезка $\bar{\mathbb{I}}$ в $\mathbb{R}^n$. В противном случае у дифференцируемой кривой могли бы существовать изломы в тех точках, где вектор скорости обращается в нуль.

Кривая γ называется также *путем*, при этом точка a является началом, а b – концом пути. Единичный отрезок в определении кривой выбран для удобства определения произведения путей и фундаментальной группы многообразия (см. раздел 11.1). Выбор другого замкнутого интервала соответствует *перепараметризации кривой*. Под этим понимается замена параметра $t \to t' = t'(t)$, где $t'(t)$ – произвольная дифференцируемая монотонная функция такая, что $dt'/dt \neq 0$. При этом вектор скорости преобразуется по-правилу дифференцирования сложных функций

$$X^{\alpha}_{(\gamma)} = \frac{dx^{\alpha}}{dt} = \frac{dx^{\alpha}}{dt'}\frac{dt'}{dt}.$$

Определение. *Кусочно дифференцируемой кривой* называется отображение (2.8), где $x^\alpha(t)$ являются кусочно дифференцируемыми функциями. *Длина кривой* γ задается интегралом

$$l(\gamma) := \int_a^b ds = \int_0^1 dt \sqrt{\dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta g_{\alpha\beta}}. \tag{2.9}$$

Это определение не зависит от выбора параметризации кривой. Если кривая является кусочно дифференцируемой, то ее длиной называется сумма длин каждой гладкой части. В пространстве $\mathbb{R}^n$ длину кривой $s(t)$ от начала a до текущей точки $x(t) \in \gamma$ всегда можно выбрать в качестве параметра вдоль кривой. В этом случае s называют *каноническим параметром*. Он однозначно определяется уравнением

$$ds = dt\sqrt{\dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta g_{\alpha\beta}} = dt\sqrt{X^\alpha_{(\gamma)} X^\beta_{(\gamma)} g_{\alpha\beta}},$$

с начальным условием $s(0) = 0$. □

Если кривая параметризована каноническим параметром s, то вектор скорости $X^\alpha_{(\gamma)} = dx^\alpha/ds$ имеет единичную длину

$$X^\alpha_{(\gamma)} X^\beta_{(\gamma)} g_{\alpha\beta} = 1.$$

Можно доказать, что расстояние (2.5) является точной нижней гранью интегралов (2.9) по всем возможным путям, соединяющим точки a и b,

$$l(a,b) = \inf \int_a^b ds. \tag{2.10}$$

Кривая, вдоль которой интеграл (2.10) принимает наименьшее значение называется отрезком *прямой линии*, соединяющим точки a и b.

Точная нижняя грань (2.10) по всем кривым, соединяющим две точки $a, b \in \mathbb{R}^n$, или явная формула (2.5) задают расстояние или метрику пространства $\mathbb{R}^n$ в топологическом смысле. Напомним определение метрики для произвольного множества.

Определение. *Метрикой* на множестве $\mathbb{M}$ называется функция $l(a,b)$, определенная для любых двух точек $a, b \in \mathbb{M}$, которая удовлетворяет следующим условиям:

1) $l(a,a) = 0; \quad l(a,b) > 0, \quad (a \neq b)$ – положительная определенность
2) $l(a,b) = l(b,a)$ – симметричность,
3) $l(a,b) \leq l(a,c) + l(c,b), \quad \forall c \in \mathbb{M}$ – неравенство треугольника.

Значение $l(a,b)$ называется *расстоянием* между точками a и b. Пара $(\mathbb{M}, l)$, т.е. множество $\mathbb{M}$ с заданной метрикой l, называется *метрическим пространством*. □

Замечание. Эту метрику мы будем называть *топологической метрикой*, чтобы отличать ее от дифференциально-геометрической метрики (2.7) и ее обобщения, которое будет сделано в разделе 5. □

Понятие топологической метрики очень важно и может быть использовано для определения сходимости последовательностей. Пусть $(\mathbb{M}, l)$ – метрическое пространство, и $\{x_i\}$, $i \in \mathbb{N}$ – последовательность точек в $\mathbb{M}$. Назовем $\{x_i\}$ *фундаментальной последовательностью* или *последовательностью Коши*, если для любого $\epsilon > 0$ существует такое натуральное число $N_\epsilon \in \mathbb{N}$, что $l(x_i, x_k) < \epsilon$ при всех $i > N_\epsilon$ и $k > N_\epsilon$. Фундаментальная последовательность, по-определению, называется сходящейся к некоторой точке, которая называется *пределом* последовательности. Пространство $\mathbb{M}$ называется *метрически полным*, если любая фундаментальная последовательность в $(\mathbb{M}, l)$ сходится к некоторой точке из $\mathbb{M}$. Другими словами, предел любой последовательности из $\mathbb{M}$, если он существует, тоже принадлежит $\mathbb{M}$. Нетрудно показать, что если предел существует, то он единственен.

На одном и том же множестве $\mathbb{M}$ можно задавать различные топологические метрики. Метрика l на множестве $\mathbb{M}$ называется *полной*, если метрическое пространство $(\mathbb{M}, l)$ полное.

Пример 2.3.1. Все пространство $\mathbb{R}^n$, а также любое замкнутое подмножество в нем с метрикой (2.10) является метрически полным. Открытые подмножества $\mathbb{R}^n$, отличные от всего пространства, метрически неполны, т.к. фундаментальные последовательности могут сходиться к граничным точкам, которые не принадлежат данным подмножествам. □

В пространстве $\mathbb{R}^n$, используя понятие расстояния (топологической метрики) (2.5), можно задавать различные подмножества, которые широко используются в дальнейшем и играют большую роль в приложениях. Эти подмножества определены в декартовой системе координат. В дальнейшем мы также предполагаем, что топология на этих подмножествах индуцирована вложением в евклидово пространство.

Пример 2.3.2 (Шар). Подмножество $\mathbb{B}^n_r(y) \subset \mathbb{R}^n$, определяемое неравенством:

$$\mathbb{B}^n_r(y) := \{x \in \mathbb{R}^n : \ |x - y| < r\}, \qquad r = \mathsf{const} > 0, \tag{2.11}$$

называется n-мерным открытым *шаром* радиуса r с центром в точке y. В одномерном случае, $n = 1$, шар называется *интервалом*[1]. При $n = 2$ шар $\mathbb{B}^2_r$ называется *диском* или *кругом*.

Если пара $(\mathbb{M}, l)$ – произвольное метрическое пространство, то в нем также можно определить шар радиуса r с центром в точке y:

$$\mathbb{B}_r(y) := \{x \in \mathbb{M} : \ l(x, y) < r\}. \tag{2.12}$$

Последнее определение не зависит от того имеет ли множество точек $\mathbb{M}$ размерность или нет. □

Пример 2.3.3 (Сфера). Подмножество $\mathbb{S}^{n-1}_r(y) \subset \mathbb{R}^n$, определяемое равенством:

$$\mathbb{S}^{n-1}_r(y) := \{x \in \mathbb{R}^n : \ |x - y| = r\}, \qquad r = \mathsf{const} > 0, \tag{2.13}$$

называется $(n-1)$-мерной *сферой* $\mathbb{S}^{n-1}_r$ радиуса r с центром в точке y. При $n = 1$ сфера вырождается в две точки, являющиеся концами интервала $(y - r, y + r) \subset \mathbb{R}$. □

[1]Этот термин употребляется в дифференциальной геометрии также для обозначения квадрата расстояния между двумя бесконечно близкими точками (2.6)

Пример 2.3.4 (Куб). Подмножество $\mathbb{U}^n_a(y) \subset \mathbb{R}^n$, определяемое неравенством:

$$\mathbb{U}^n_a(y) := \{x \in \mathbb{R}^n : \ |x^\alpha - y^\alpha| < a/2, \ \alpha = 1, \ldots, n\}, \quad a = \mathsf{const} > 0, \tag{2.14}$$

называется n-мерным открытым *кубом* со стороной a и центром в точке y. Куб представляет собой прямое произведение n интервалов $(-a/2, a/2) \subset \mathbb{R}$. □

Замечание. Условия (2.11)–(2.14) определяют только множества точек шара, сферы и куба, ничего не говоря о том, как устроена топология на этих множествах. Мы всегда предполагаем, что топология шара, сферы, куба, а также других подмножеств евклидова пространства индуцирована их вложением в $\mathbb{R}^n$ (см. следующий раздел). □

Пример 2.3.5. Обозначим через $\mathbb{R}^n_+ \subset \mathbb{R}^n$ подпространство в $\mathbb{R}^n$, определяемое условием $x^n > 0$. Его замыкание $\overline{\mathbb{R}}^n_+$ имеет край, который является гиперплоскостью $\mathbb{R}^{n-1}$ и определяется уравнением $x^n = 0$. Мы считаем, что топологии на $\mathbb{R}^n_+$ и $\overline{\mathbb{R}}^n_+$ индуцированы вложениями $\mathbb{R}^n_+, \overline{\mathbb{R}}^n_+ \to \mathbb{R}^n$. Заметим, что открытые подмножества $\overline{\mathbb{R}}^n_+$ могут содержать точки края. □

Подмножество $\mathbb{U} \subset \mathbb{R}^n$ называется *ограниченным*, если существует шар $\mathbb{B}^r_n$ конечного радиуса r, целиком содержащий $\mathbb{U}$. Согласно этому определению все $\mathbb{R}^n$ является неограниченным множеством.

2.3.2 $\mathbb{R}^n$ как топологическое пространство

В предыдущем разделе мы использовали понятия открытого и замкнутого множеств, не дав им определений. Ниже мы восполним этот пробел и приведем необходимые сведения из общей топологии, которые необходимы для определения основного понятия дифференциальной геометрии – многообразия.

Начнем с общего определения топологического пространства и топологии.

Определение. *Топологическим пространством* называется пара $(\mathbb{M}, \mathcal{I})$, состоящая из множества точек $x \in \mathbb{M}$ и некоторого семейства $\{\mathbb{U}_i\}_{i\in I} = \mathcal{I}$ своих подмножеств, которые удовлетворяют следующим условиям:

1) пустое множество $\emptyset$ и все множество $\mathbb{M}$ принадлежат $\mathcal{I}$;

2) пересечение *любой пары* подмножеств из $\mathcal{I}$ принадлежит $\mathcal{I}$;

3) объединение *любого семейства* подмножеств $\mathcal{I}$ принадлежит $\mathcal{I}$.

Элементы семейства $\mathcal{I}$ называются *открытыми множествами* пространства $\mathbb{M}$, а семейство открытых множеств $\mathcal{I}$ – *топологией* пространства $\mathbb{M}$. Некоторое семейство $\{\mathbb{B}_j\}_{j\in J} = \mathcal{J}$ открытых множеств называется *базой* топологии пространства $\mathbb{M}$, если каждое множество из $\mathcal{I}$ есть объединение каких-либо множеств из $\mathcal{J}$. □

Из условия 2) следует, что пересечение любого, но конечного числа открытых множеств также является открытым. В примере 2.3.13 показано, что пересечение бесконечного числа открытых множеств может не быть открытым. В условии 3) допускается объединение бесконечного числа открытых множеств.

Пустое множество $\emptyset$ – это множество, не содержащее ни одного элемента.

Одна и та же топология $\mathcal{I}$ на множестве $\mathbb{M}$ может иметь много баз.

На любом множестве можно задать топологию, и не одну. Исключение составляют пустое множество $\emptyset$ (топология состоит из одного открытого множества – самого $\emptyset$) и множество, состоящее из одного элемента. В последнем случае топология единственна и состоит из двух открытых множеств: пустого множества и самого элемента.

Пример 2.3.6. Пусть $\mathbb{M}$ – множество. Будем считать, что каждая точка $x \in \mathbb{M}$ является открытым множеством и их совокупность образует базу топологии $\mathbb{M}$. Такую топологию называют *дискретной*. □

Пример 2.3.7. Пусть $\mathbb{M}$ – множество. Будем считать, что вся топология $\mathbb{M}$ состоит из двух множеств: пустого множества и всего $\mathbb{M}$. Это – пример другой крайности, и поэтому такую топологию называют *антидискретной*. Антидискретную топологию называют также *тривиальной*, потому что она слишком бедна. □

Если на множестве $\mathbb{M}$ задано две топологии $\mathcal{I}_1$ и $\mathcal{I}_2$, причем $\mathcal{I}_1 \subset \mathcal{I}_2$, то говорят, что топология $\mathcal{I}_1$ *слабее (грубее)* топологии $\mathcal{I}_2$, или что топология $\mathcal{I}_2$ *сильнее (тоньше)* топологии $\mathcal{I}_1$. Очевидно, что дискретная топология является наиболее тонкой, а антидискретная топология – наиболее грубой.

Замечание. Явное описание всех открытых множеств, т.е. топологии на множестве точек $\mathbb{M}$ в общем случае является сложной задачей. Поэтому на практике, чтобы определить топологию в пространстве $\mathbb{M}$, сначала задают базу топологии, а затем объявляют все возможные объединения элементов базы открытыми множествами. Поэтому понятие базы топологии помогает конструктивно подойти к заданию топологии на множестве точек $\mathbb{M}$. □

Пример 2.3.8. Пусть $\mathbb{R}$ – вещественная прямая. Семейство всех открытых интервалов $(a, b) \subset \mathbb{R}$ является базой некоторой топологии на $\mathbb{R}$, которая занимает промежуточное положение между дискретной и антидискретной топологией. Такая топология на вещественной прямой называется *естественной*. Она лежит в основе математического анализа. □

Пусть $(\mathbb{M}, \mathcal{I})$ и $(\mathbb{N}, \mathcal{J})$ – два топологических пространства. На прямом произведении $\mathbb{M} \times \mathbb{N}$, образованном всеми упорядоченными парами (x, y), где $x \in \mathbb{M}$ и $y \in \mathbb{N}$, можно ввести топологию. А именно, множество всех пар подмножеств $(\mathbb{U}, \mathbb{V})$, где $\mathbb{U}$ и $\mathbb{V}$ открыты соответственно в $\mathbb{M}$ и $\mathbb{N}$, образует базу некоторой топологии в прямом произведении $\mathbb{M} \times \mathbb{V}$. Такое произведение называется *топологическим*.

Определение. *Евклидовым* пространством $\mathbb{R}^n$ размерности n называется топологическое произведение n вещественных прямых $\mathbb{R}$:

$$\mathbb{R}^n = \underbrace{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}}_{n}, \tag{2.15}$$

каждая из которых снабжена естественной топологией. Топологию $\mathbb{R}^n$ также будем называть *естественной*. Будем писать $\dim \mathbb{R}^n = n$. □

Для топологического произведения мы будем использовать тот же символ, что и для прямого, подразумевая, что на прямом произведении задается топология, которая определяется топологией сомножителей. Поэтому для евклидова пространства мы сохранили общепринятое прежнее обозначение $\mathbb{R}^n$.

Базой естественной топологии в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$ является множество всех кубов (2.14).

Аналогично определяется комплексное пространство

$$\mathbb{C}^n = \underbrace{\mathbb{C} \times \mathbb{C} \times \cdots \times \mathbb{C}}_{n}, \tag{2.16}$$

где $\mathbb{C} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ – комплексная плоскость с естественной топологией, совпадающей с топологией евклидовой плоскости $\mathbb{R}^2$. Очевидно, что, как топологическое пространство, комплексное пространство $\mathbb{C}^n$ диффеоморфно евклидову пространству вдвое большего числа измерений, $\mathbb{C}^n \approx \mathbb{R}^{2n}$.

Определение. Рассмотрим некоторое подмножество $\mathbb{D} \subset \mathbb{M}$ топологического пространства $(\mathbb{M}, \mathcal{I})$. Будем говорить, что на $\mathbb{D}$ задана *индуцированная топология* $(\mathbb{D}, \mathcal{J})$, если подмножество $\mathbb{V} \in \mathcal{J}$ открыто тогда и только тогда, когда $\mathbb{V} = \mathbb{U} \cap \mathbb{D}$, где $\mathbb{U} \in \mathcal{I}$ – некоторое открытое подмножество в $\mathbb{M}$. □

Пример 2.3.9. Пусть $\mathbb{D} \in \mathbb{R}^n$ – конечное множество точек пространства $\mathbb{R}^n$. Тогда топология на $\mathbb{D}$, индуцированная естественной топологией в $\mathbb{R}^n$, является дискретной. □

Замечание. При рассмотрении подмножеств евклидова пространства $\mathbb{R}^n$ как топологических пространств мы будем предполагать, что они снабжены индуцированной топологией, если не оговорено противное. В частности, говоря о шарах, сферах и других подмножествах в $\mathbb{R}^n$, мы предполагаем, что на них задана естественная топология, индуцированная вложением в евклидово пространство. □

Обсудим связь между метрическими пространствами, рассмотренными в предыдущем разделе, и топологическими пространствами. В произвольном метрическом пространстве $(\mathbb{M}, l)$ можно выбрать в качестве базы топологии семейство шаров, определенных формулой (2.11). Тем самым любое метрическое пространство превращается в топологическое. Обратное утверждение неверно. Не на всяком топологическом пространстве можно ввести метрику такую, чтобы она определяла заданную топологию.

Определение. Топологическое пространство $(\mathbb{M}, \mathcal{I})$ называется *метризуемым*, если на множестве его точек $\mathbb{M}$ можно ввести такую метрику $l(a, b)$, что множество всех шаров (2.12) является базой топологии $\mathcal{I}$. □

Пример 2.3.10. Топологическое пространство с дискретной топологией не является метризуемым. □

Если на множестве $\mathbb{M}$ заданы две различные топологические метрики (расстояния) l_1 и l_2, то они могут индуцировать одно и то же топологическое пространство $(\mathbb{M}, \mathcal{I})$.

Наличие евклидова расстояния (2.5) в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$ позволяет определить шар (2.11). Совокупность всех шаров можно выбрать в качестве базы некоторой топологии евклидова пространства. Любой куб можно представить в виде объединения бесконечного числа шаров. Поэтому множество всех шаров также является базой естественной топологии евклидова пространства $\mathbb{R}^n$. Таким образом, евклидово пространство является метризуемым. На нем определена евклидова метрика (2.5). В дальнейшем, мы всегда предполагаем, что на евклидовом пространстве задана также евклидова метрика.

Можно показать, что минимальная база естественной топологии евклидова пространства $\mathbb{R}^n$ состоит из шаров с рациональными радиусами. Эта база топологии является счетной.

В общем случае, если топологическое пространство $(\mathbb{M}, \mathcal{I})$ имеет счетную базу, то говорят, что $\mathbb{M}$ удовлетворяет *второй аксиоме счетности*.

В топологическом пространстве $\mathbb{M}$ *окрестностью* точки $x \in \mathbb{M}$ называют любое открытое множество в $\mathbb{M}$, содержащее x. Обычно в качестве окрестности точки евклидова пространства $x \in \mathbb{R}^n$ выбирается некоторый шар с центром в этой точке. Нетрудно показать, что подмножество $\mathbb{U} \in \mathbb{M}$ открыто тогда и только тогда, когда каждая точка $x \in \mathbb{U}$ имеет окрестность $\mathbb{U}_x$, целиком содержащуюся в $\mathbb{U}$. Точка x есть *предельная точка* подмножества $\mathbb{U} \subset \mathbb{M}$, если каждая окрестность точки x содержит точки множества $\mathbb{U}$, отличные от x.

Дадим два эквивалентных определения замкнутого множества.

Определение. Подмножество $\mathbb{U}$ топологического пространства $(\mathbb{M}, \mathcal{I})$ *замкнуто*, если

1) $\mathbb{U}$ есть дополнение в $\mathbb{M}$ некоторого открытого множества,

или

2) $\mathbb{U}$ содержит все свои предельные точки. □

Нетрудно доказать, что объединение двух и, следовательно, произвольного конечного числа замкнутых множеств является замкнутым множеством. Кроме того, пересечение любого семейства, в том числе бесконечного, замкнутых множеств есть замкнутое множество.

Пустое множество включается в определение топологического пространства и, по-определению, является открытым. Отсюда вытекает, что все топологическое пространство, как дополнение пустого множества, является одновременно открытым и замкнутым. Аналогично, само пустое множество также является открытым и замкнутым одновременно. Отдельная точка евклидова пространства $\mathbb{R}^n$ является замкнутым подмножеством как дополнение открытого подмножества.

Замечание. Топологию пространства можно определить в терминах замкнутых подмножеств. Определение аналогично приведенному выше, только открытые множества надо заменить на замкнутые, а операции пересечения и объединения поменять местами. □

Определение. *Дискретным подмножеством* топологического пространства $\mathbb{M}$ называется такое его подпространство $\mathbb{U} \subset \mathbb{M}$, каждое подмножество которого замкнуто в $\mathbb{M}$. □

Пример 2.3.11. Набор изолированных точек в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$ является дискретным подмножеством. Он всегда конечен или счетен. □

Рассмотрим произвольное подмножество $\mathbb{U} \subset \mathbb{R}^n$, которое не совпадает со всем евклидовым пространством. В общем случае оно может не быть ни открытым, ни замкнутым. *Замыканием* множества называется объединение самого множества $\mathbb{U}$ и всех его предельных точек или, что эквивалентно, пересечение всех замкнутых подмножеств, содержащих $\mathbb{U}$. Оно обозначается через $\overline{\mathbb{U}}$. Из определения следует, что всегда $\mathbb{U} \subset \overline{\mathbb{U}}$. Можно доказать следующее утверждение.

Лемма 2.3.1. *Точка $x \in \overline{\mathbb{U}}$ тогда и только тогда, когда любая окрестность $\mathbb{V}_x$ точки x имеет непустое пересечение с $\mathbb{U}$, $\mathbb{V}_x \bigcap \mathbb{U} \neq \emptyset$.*

Если некоторое множество совпадает со своим замыканием, $\mathbb{U} = \overline{\mathbb{U}}$, то оно является замкнутым. *Внутренностью* множества $\mathbb{U}$ называется наибольшее открытое множество $\mathsf{int}\,\mathbb{U}$, целиком содержащееся в $\mathbb{U}$, или, что эквивалентно, объединение

всех открытых множеств, содержащихся в $\mathbb{U}$. Точка $x \in \mathbb{U}$ называется внутренней, если $x \in \operatorname{int}\mathbb{U}$. *Границей* множества $\mathbb{U}$ называется разность

$$\partial\mathbb{U} = \overline{\mathbb{U}} \setminus \operatorname{int}\mathbb{U}.$$

Пример 2.3.12. Шар, определенный равенством (2.11), является *открытым* шаром. Замыкание шара $\overline{\mathbb{B}}^n_r$ включает в себя точки $(n-1)$-мерной сферы (2.13). При этом сфера $\mathbb{S}^{n-1}_r$ является границей как открытого, так и замкнутого шара. □

Пример 2.3.13. Покажем, что пересечение бесконечного числа открытых множеств может быть замкнутым. Рассмотрим последовательность шаров переменного радиуса $\mathbb{B}^n_{r_i}(0)$, $i \in \mathbb{N}$, в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, с центром в начале координат. Пусть все радиусы больше единицы, $r_i > 1$, и их последовательность сходится к единице. Тогда пересечением этой последовательности шаров является замкнутый шар единичного радиуса $\overline{\mathbb{B}}^n_1(0)$, включающий граничную окружность $\mathbb{S}^{n-1}_1(0)$. □

Пример 2.3.14. Объединение бесконечного числа замкнутых подмножеств может быть открыто. Рассмотрим последовательность замкнутых шаров переменного радиуса $\overline{\mathbb{B}}^n_{r_i}(0)$, $i \in \mathbb{N}$, в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, с центром в начале координат. Пусть все радиусы ограничены, $0 < r_i < 1$, и их последовательность сходится к единице. Тогда объединением этой последовательности шаров является открытый шар единичного радиуса $\mathbb{B}^n_1(0)$. □

Определение. Точка $x \in \mathbb{U}$ называется *изолированной*, если у нее есть окрестность, не содержащая других точек $\mathbb{U}$. Подмножество $\mathbb{U} \subset \mathbb{M}$ называется *всюду плотным* в $\mathbb{M}$, если его замыкание $\overline{\mathbb{U}}$ совпадает со всем $\mathbb{M}$. Эквивалентно, множество $\mathbb{U}$ *всюду плотно* в $\mathbb{M}$, если в каждом открытом множестве пространства $\mathbb{M}$ содержится хотя бы одна точка из $\mathbb{U}$. □

Пример 2.3.15. Множество рациональных чисел $\mathbb{Q}$ всюду плотно в $\mathbb{R}$. □

Определение. Семейство $\{\mathbb{U}_i\}_{i\in I}$ подмножеств пространства $\mathbb{M}$ называется *покрытием* множества $\mathbb{M}$, если

$$\mathbb{M} = \bigcup_{i\in I} \mathbb{U}_i.$$

При этом множество значений индекса $i \in I$ не обязано быть счетным. Если $\mathbb{M}$ – топологическое пространство, то покрытие называется *открытым*, если все множества $\mathbb{U}_i$ открыты. Мы говорим, что некоторое покрытие имеет *подпокрытие* $\{\mathbb{U}_i\}_{i\in J}$, где $J \subset I$, если оно является покрытием само по себе. Если множество значений индекса J является конечным, то подпокрытие будет конечным. Покрытие $\{\mathbb{V}_i\}_{i\in I}$ называется *измельчением* покрытия $\{\mathbb{U}_i\}_{i\in I}$, если для всех значений индекса $\mathbb{V}_i \subset \mathbb{U}_i$. При этом некоторые из множеств $\mathbb{V}_i$ могут быть пустыми. □

Пример 2.3.16. База топологии на $\mathbb{M}$ является покрытием. □

Пример 2.3.17. Совокупность интервалов $\mathbb{U}_1 = (0,1)$, $\mathbb{U}_2 = (0,3/4)$, $\mathbb{U}_3 = (1/4,1)$ является покрытием единичного интервала $(0,1)$. Это покрытие имеет много измельчений, в том числе $\mathbb{V}_1 = \emptyset$, $\mathbb{V}_2 = (0,2/3)$, $\mathbb{V}_3 = (1/3,1)$. □

Замечание. В дифференциальной геометрии важную роль играют счетные измельчения покрытий. □

Определение. Топологическое пространство $\mathbb{M}$ называется *компактным*, если каждое его открытое покрытие содержит конечное подпокрытие. Хаусдорфово компактное топологическое пространство называется *компактом*. Подмножество $\mathbb{U}$ топологического пространства $\mathbb{M}$ называется *компактным*, если оно компактно в индуцированной топологии. Подмножество $\mathbb{U}$ топологического пространства $\mathbb{M}$ называется *относительно компактным*, если его замыкание $\overline{\mathbb{U}}$ компактно.

Компактные топологические пространства обладают рядом замечательных свойств. Доказательства следующих пяти теорем можно найти, например, в [**?**].

Теорема 2.3.1. *Топологическое пространство компактно тогда и только тогда, когда всякая непрерывная функция на нем ограничена, т.е. достигает на нем своего минимального и максимального значения.*

Теорема 2.3.2. *Топологическое пространство компактно тогда и только тогда, когда каждое бесконечное его подмножество имеет предельную точку.*

Теорема 2.3.3. *Если $\mathbb{U}$ – компактное подмножество хаусдорфова пространства $\mathbb{M}$ и $x \in \mathbb{M} \setminus \mathbb{U}$, то у точки x и подмножества $\mathbb{U}$ существуют непересекающиеся окрестности.*

Следствие. Каждое компактное подмножество $\mathbb{U}$ хаусдорфова пространства $\mathbb{M}$ замкнуто: $\mathbb{U} = \overline{\mathbb{U}}$.

Теорема 2.3.4. *У любых двух непересекающихся компактных подмножеств $\mathbb{U}$ и $\mathbb{V}$ хаусдорфова пространства $\mathbb{M}$ существуют непересекающиеся окрестности.*

Теорема 2.3.5. *Пусть $\{\mathbb{U}_i\}$ – открытое покрытие компактного подмножества $\mathbb{V}$ метрического пространства $(\mathbb{M}, l)$. Тогда существует такое положительное число r, что открытый шар радиуса r с центром в произвольной точке подмножества $\mathbb{U}$ содержится в некотором элементе покрытия $\mathbb{U}_i$.*

Следствие (Лемма Лебега). Для любого открытого покрытия $\{\mathbb{U}_i\}$ замкнутого интервала вещественных чисел существует такое положительное число r, что если $|x - y| < r$, то в покрытии найдется такой элемент $\mathbb{U}_i$, который содержит обе точки x и y.

В предыдущем разделе мы определили сходимость последовательностей в метрических пространствах $(\mathbb{M}, l)$. Дадим определение сходимости последовательностей в топологических пространствах $(\mathbb{M}, \mathcal{I})$, которое не опирается на метрическую сходимость.

Определение. Последовательность точек $\{x_i\}$, $i \in \mathbb{N}$, топологического пространства $\mathbb{M}$ сходится к точке $x \in \mathbb{M}$, если для каждой окрестности $\mathbb{U}_x$ точки x существует такое число $N_{\mathbb{U}} \in \mathbb{N}$, что $x_i \in \mathbb{U}_x$ для всех $i > N_{\mathbb{U}}$. □

Теорема 2.3.6. *Если топологическое пространство $(\mathbb{M}, \mathcal{I})$ является метризуемым $(\mathbb{M}, l)$, то сходящаяся последовательность точек $\{x_i\}$ в топологии $\mathcal{I}$ сходится также по метрике l. Соответствующее метрическое пространство $(\mathbb{M}, l)$ является полным. Обратно. Пусть $(\mathbb{M}, l)$ – полное метрическое пространство и $\mathcal{I}$ – топология на $\mathbb{M}$, индуцированная метрикой l. Тогда любая последовательность $\{x_i\}$, сходящаяся по метрике l, сходится также в топологии $\mathcal{I}$.*

Из этой теоремы следует, что для полных метрических пространств определения сходимости по метрике и индуцированной топологии, по-существу, эквивалентны. В то же время определение сходимости последовательностей в топологических пространствах является более общим, т.к. не всякое топологическое пространство метризуемо.

Теорема 2.3.7. *Подмножество евклидова пространства с индуцированной топологией является компактным тогда и только тогда, когда всякая бесконечная последовательность его точек имеет в нем хотя бы одну предельную точку.*

Пример 2.3.18. Все евклидово пространство является некомпактным, т.к. можно выбрать последовательность точек, которая не содержит ни одной предельной точки. Например, множество натуральных чисел, лежащих на любой из координатных прямых не содержит предельной точки. □

Пример 2.3.19. Открытый шар $\mathbb{B}_r^n$является некомпактным множеством, т.к. последовательность точек, сходящихся к некоторой граничной точке, не имеет в нем предельной точки. В то же время замкнутый шар $\overline{\mathbb{B}}_r^n$ будет уже компактным множеством. □

Пример 2.3.20. Множество с дискретной топологией компактно тогда и только тогда, когда оно конечно. □

Пример 2.3.21. Произвольное замкнутое ограниченное подмножество евклидова пространства $\overline{\mathbb{U}} \subset \mathbb{R}^n$ является *компактом.* □

Теорема 2.3.8 (Гейне–Борель–Лебег). *Любой компакт является компактным множеством.*

Теорема 2.3.9 (Тихонов). *Топологическое произведение произвольного множества непустых топологических пространств является компактным тогда и только тогда, когда каждый сомножитель является компактным пространством.*

Доказательство. См. [?]. □

Замечание. Количество сомножителей в сформулированной теореме может быть несчетным. □

Теорема Тихонова позволяет дать критерий компактности подмножеств евклидова пространства с индуцированной топологией.

Теорема 2.3.10. *Подпространство $\mathbb{M}$ n-мерного евклидова пространства $\mathbb{R}^n$ является компактом в том и только в том случае, если множество $\mathbb{M}$ замкнуто и ограничено.*

Доказательство. См., например, [?]. □

Определение. Топологическое пространство $\mathbb{M}$ называется *локально компактным*, если каждая точка $x \in \mathbb{M}$ имеет окрестность, замыкание которой компактно. □

Конечно, каждое компактное топологическое пространство является локально компактным. Обратное утверждение неверно.

Пример 2.3.22. Евклидово $\mathbb{R}^n$ и комплексное $\mathbb{C}^n$ пространства некомпактны, но локально компактны. □

Пример 2.3.23. Бесконечномерное гильбертово пространство не является локально компактным. □

В дальнейшем при рассмотрении многообразий необходимо будет воспользоваться существованием разбиения единицы. Для этой цели нам понадобится понятие паракомпактности, которое является слабейшим требованием, достаточным для существования разбиения единицы.

Определение. Топологическое пространство $\mathbb{M}$ называется *паракомпактным*, если с любым покрытием $\mathbb{M}$ открытыми множествами $\{\mathbb{U}_i\}_{i\in I}$, можно ассоциировать его измельчение $\{\mathbb{V}_i\}_{i\in I}$, которое является локально конечным. *Локальная конечность* означает, что для каждой точки $x \in \mathbb{M}$ существует окрестность $\mathbb{W}_x \subset \mathbb{M}$ такая, что $\mathbb{V}_i \cap \mathbb{W}_x \neq \emptyset$ только для конечного числа индексов. Или, любое компактное подмножество $\mathbb{M}$ пересекается с конечным числом открытых множеств $\mathbb{V}_i$. □

Пример 2.3.24. Любое метризуемое топологическое пространство паракомпактно. В частности, евклидово пространство $\mathbb{R}^n$ является паракомпактным. □

Перечислим некоторые топологические свойства $\mathbb{R}^n$. Часть этих свойств, например, сепарабельность и хаусдорфовость, наследуется всеми многообразиями. Другие же свойства, такие как связность и односвязность, различны для различных многообразий.

Определение. Топологическое пространство называется *сепарабельным*, если оно содержит счетное всюду плотное подмножество. □

Пример 2.3.25. Евклидово пространство $\mathbb{R}^n$ является сепарабельным, т.к. в качестве такого подмножества можно выбрать, например, множество точек с рациональными координатами, которое, как известно, счетно при конечном n и всюду плотно в $\mathbb{R}^n$. □

Теорема 2.3.11. *Пространство, топология которого обладает счетной базой, сепарабельно.*

Доказательство. См., например, [**?**]. □

Определение. Топологическое пространство $\mathbb{M}$ называется *хаусдорфовым*, если для любой пары различных точек $x, y \in \mathbb{M}$ существуют открытые подмножества $\mathbb{U}_x$ и $\mathbb{U}_y$, содержащие соответственно точки x и y, такие, что $\mathbb{U}_x \cap \mathbb{U}_y = \emptyset$. □

Пример 2.3.26. Евклидово пространство является хаусдорфовым пространством. □

Хаусдорфовость топологического пространства важна при определении предела последовательностей. Если мы хотим, чтобы у любой последовательности точек мог существовать не более, чем один предел, необходимо потребовать, чтобы пространство было хаусдорфовым.

Рис. 2.2: Примеры 2.3.27 и 2.3.28 нехаусдорфовых топологических пространств.

Теорема 2.3.12. *Топологическое пространство является хаусдорфовым тогда и только тогда, когда никакая последовательность в этом пространстве не сходится к двум различным точкам.*

Пример 2.3.27. Дадим пример нехаусдорфова топологического пространства. Рассмотрим множество точек, состоящее из объединения вещественной прямой $y = 0$ и точки $(0, 1) \in \mathbb{R}^2$ на евклидовой плоскости, изображенных на рис.2.2,*a*. Определим топологию на рассматриваемом множестве следующим образом. Совокупность открытых интервалов (a, b) на оси x, а также множества, состоящие из объединения точки $(0, 1)$ с интервалами (a, b), $a < 0$, $b > 0$ оси x с выколотым началом координат, будем считать базой топологии. По-построению, любые окрестности начала координат $(0, 0) \in \mathbb{R}^2$ и точки $(0, 1) \in \mathbb{R}^2$ имеют непустое пересечение, и, следовательно, построенное топологическое пространство не является хаусдорфовым. Любая последовательность точек, сходящаяся к началу координат $(0, 0)$, сходится также и к точке $(0, 1)$, и наоборот. Другими словами, с точки зрения топологии две точки $(0, 0)$ и $(0, 1)$ неразличимы. □

Пример 2.3.28. Рассмотрим две прямые на плоскости с естественной топологией, проходящие через точку $(0, 1) \in \mathbb{R}^2$, и отождествим их точки с отрицательными абсциссами, $x < 0$, как показано на рис.2.2,*b*. В результате получим некоторое топологическое пространство $\mathbb{M}$. Тогда одна точка плоскости $(0, 1) \in \mathbb{R}^2$ соответствует двум различным точкам в $\mathbb{M}$, которые лежат на разных прямых и неотождествлены. Эти точки различны, и в тоже время не имеют непересекающихся окрестностей. □

Замечание. В приведенных примерах нехаусдорфовых пространств топология на них не является топологией, индуцированной из $\mathbb{R}^2$. □

Теорема 2.3.13. *Любое метризуемое топологическое пространство* $\mathbb{M}$ *является хаусдорфовым.*

Доказательство. Выберем две произвольные различные точки $x \neq y$ в $\mathbb{M}$ и построим два непересекающихся шара с центрами в x и y. □

Дадим два эквивалентных определения связности топологических пространств.

Определение. Топологическое пространство $\mathbb{M}$ называется *связным*,

1) если его нельзя представить в виде объединения двух непересекающихся множеств, каждое из которых не содержит предельных точек другого, или
2) если единственными подмножествами $\mathbb{M}$, открытыми и замкнутыми одновременно, являются $\emptyset$ и $\mathbb{M}$.

Компонентой топологического пространства называется максимальное связное подпространство. □

Если пространство связно, то оно состоит из одной компоненты.

Предложение 2.3.1. *Если топологическое пространство является объединением двух непустых непересекающихся открытых подмножеств,* $\mathbb{M} = \mathbb{U}_1 \cup \mathbb{U}_2$, *где* $\mathbb{U}_1 \cap \mathbb{U}_2 = \emptyset$, *то оно не является связным.*

Доказательство. От противного. Пусть $x \in \mathbb{U}_1$ – предельная точка для $\mathbb{U}_2$. Выберем окрестность $\mathbb{U}_x \subset \mathbb{U}_1$, содержащую точку x. Тогда она содержит точки множества $\mathbb{U}_2$, и, следовательно, подмножества $\mathbb{U}_1$ и $\mathbb{U}_2$ пересекаются. □

Пример 2.3.29. Евклидово пространство $\mathbb{R}^n$ является связным. Будем называть $\mathbb{R}^n$ *тривиальным многообразием*. Произвольное открытое связное и односвязное (см. раздел 11.3) подмножество $\mathbb{U} \subset \mathbb{R}^n$ называется *областью*. □

Пример 2.3.30. Рассмотрим сферу, вложенную в евклидово пространство, $\mathbb{S}^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$. Будем считать, что топология на сфере индуцирована вложением. Тогда сфера – связное топологическое пространство. □

Несвязные топологические пространства $\mathbb{M}$ представляют собой объединение конечного или бесконечного числа компонент. В последнем случае число компонент может быть счетным или несчетным. Каждая точка принадлежит только одной компоненте, которая называется компонентой данной точки. Всякая компонента является замкнутым подмножеством в $\mathbb{M}$.

Замечание. В общем случае компонента топологического пространства может не быть открытой. Экзотический пример описан [**?**]. □

В дальнейшем будут использованы следующие утверждения, доказательство которых приведено, например, в [**?**].

Теорема 2.3.14. *Если произвольное семейство $\{\mathbb{U}_i\}$, $i \in I$, связных подпространств топологического пространства $\mathbb{M}$ имеет непустое пересечение, то его объединение $\cup_{i\in I}\mathbb{U}_i$ связно.*

Теорема 2.3.15. *Топологическое произведение произвольного множества непустых топологических пространств связно в том и только в том случае, если все сомножители связны.*

Определение. Топологическое пространство $\mathbb{M}$ называется *локально связным*, если для каждой точки $x \in \mathbb{M}$ и любой ее окрестности $\mathbb{U}_x$ существует связное множество $\mathbb{V} \subset \mathbb{U}_x$, такое, что $x \in \mathsf{int}\,\mathbb{V}$. □

Пример 2.3.31. Евклидово пространство $\mathbb{R}^n$ локально связно. □

Очевидно, что всякое связное топологическое пространство является локально связным. Обратное утверждение неверно.

Пример 2.3.32. Рассмотрим подмножество точек плоскости $\mathbb{R}^2$, состоящее из прямых, проходящих через начало координат и заданных уравнениями $mx + ny = 0$ с целыми коэффициентами m и n. Будем считать, что топология этого подмножества индуцирована плоскостью. Это множество связно, как объединение связных множеств, имеющих общую точку. В то же время оно не является локально связным, т.к. любое связное подпространство обязано содержать начало координат. □

Теорема 2.3.16. *Топологическое пространство $\mathbb{M}$ локально связно в том, и только в том случае, если компоненты открытых множеств открыты. В частности, любая окрестность любой точки локально связного пространства содержит связную окрестность этой точки.*

Доказательство. См., например, [**?**]. □

Теорема 2.3.17. *В локально связном топологическом пространстве $\mathbb{M}$ каждая компонента является одновременно открытой и замкнутой.*

2.4 Отображения

Определение. Рассмотрим два множества $\mathbb{M}_1$ и $\mathbb{M}_2$ и их *отображение*

$$f: \quad \mathbb{M}_1 \to \mathbb{M}_2 \quad \text{или} \quad \mathbb{M}_1 \xrightarrow{f} \mathbb{M}_2, \tag{2.17}$$

которое ставит каждому элементу $x \in \mathbb{M}_1$ единственный элемент $f(x) \in \mathbb{M}_2$. Отображение f называется также *функцией*. Вообще говоря, функция может отображать различные элементы из $\mathbb{M}_1$ в один и тот же элемент множества $\mathbb{M}_2$. Ситуация, когда один элемент из $\mathbb{M}_1$ отображаются сразу в несколько элементов множества $\mathbb{M}_2$, не допускается. *Тождественное* отображение

$$\mathsf{id}\,(\mathbb{M}): \quad \mathbb{M} \to \mathbb{M}$$

определяется равенством $\mathsf{id}\,(x) = x$ для всех $x \in \mathbb{M}$. Отображение f называется *взаимно однозначным* или *инъективным*, если различные точки $x_1 \neq x_2$ из $\mathbb{M}_1$ отображаются в различные точки $f(x_1) \neq f(x_2)$ из $\mathbb{M}_2$. Отображение f является отображением $\mathbb{M}_1$ *на* $\mathbb{M}_2$ или *сюръективным*, если $f(\mathbb{M}_1) = \mathbb{M}_2$. Если отображение f инъективно и сюръективно одновременно, то оно называется *биективным отображением* или *биекцией*. □

Пример 2.4.1. Рассмотрим дифференцируемую функцию одной переменной $f(x) \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$. Если эта функция монотонно возрастает, $f' > 0$, или монотонно убывает, $f' < 0$, на интервале $x \in (a, b)$, то она задает биективное отображение интервалов $f: (a, b) \to (f(a), f(b))$. □

Пример 2.4.2. Преобразование координат с невырожденным якобианом является биекцией двух областей евклидова пространства (теорема 2.5.1). □

Сопоставление аргументу $x \in \mathbb{M}_1$ в (2.17) значения функции $f(x) \in \mathbb{M}_2$ будем обозначать ограниченной стрелкой:

$$f: \quad \mathbb{M}_1 \ni x \mapsto f(x) \in \mathbb{M}_2.$$

Определение. Множество $f(\mathbb{M}_1) = \mathbb{U} \subset \mathbb{M}_2$, которое может и не совпадать со всем $\mathbb{M}_2$, называется *образом* множества $\mathbb{M}_1$ или *областью значений* функции f. Множество $\mathbb{M}_1$ при этом называется *прообразом* $\mathbb{U}$ или *областью определения* f и обозначается $\mathbb{M}_1 = f^{-1}(\mathbb{U})$. Вообще, прообразом произвольного подмножества $\mathbb{V} \subset \mathbb{U} \subset \mathbb{M}_2$ называется множество тех точек $\mathbb{W} \subset \mathbb{M}_1$, для которых $f(\mathbb{W}) = \mathbb{V}$. При этом символ f^{-1} является отображением

$$f^{-1}: \quad \mathbb{U} \ni f(x) \mapsto x \in \mathbb{M}_1$$

тогда и только тогда, когда отображение f является взаимно однозначным. В этом случае оно единственно и называется *обратным отображением*. □

Для биективного отображения $f: \mathbb{M}_1 \to \mathbb{M}_2$ всегда существует обратное отображение

$$f^{-1}: \quad \mathbb{M}_2 \to \mathbb{M}_1.$$

При этом отображение f^{-1} также биективно и выполнено равенство

$$(f^{-1})^{-1} = f.$$

Если отображение f не является взаимно однозначным, то прообразом одной точки $f^{-1}(x)$, где $x \in \mathbb{U}$, может быть несколько элементов из $\mathbb{M}_1$ или их бесконечное число. В этом случае символ f^{-1} не является отображением.

Пример 2.4.3. Рассмотрим три отображения:

$$f:\ \mathbb{R}\to\mathbb{R},\qquad g:\ \mathbb{R}\to\mathbb{R}_+\cup\{0\},\qquad h:\ \mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+,$$

которые определены одним и тем же правилом $x\mapsto x^2$. Эти отображения различны: f ни сюръективно, ни инъективно; g сюръективно, но не инъективно; h биективно. Этот пример показывает, что задание области определения и области значений является существенной частью определения отображения (функции). □

Определение. Пусть f – функция (2.17) и $\mathbb{U}_1$ – некоторое подмножество $\mathbb{M}_1$, тогда отображение

$$f|_{\mathbb{U}_1}:\quad \mathbb{U}_1\to\mathbb{M}_2,$$

называется *сужением* функции (или отображения) на $\mathbb{U}_1\subset\mathbb{M}_1$. Функция f является *продолжением* функции

$$g:\quad \mathbb{U}_1\to\mathbb{M}_2,$$

заданной на некотором подмножестве $\mathbb{U}_1\subset\mathbb{M}_1$, если ее сужение на $\mathbb{U}_1$ совпадает с g, $f|_{\mathbb{U}_1}=g$. □

Определение. *Композицией*, (*произведением* или *суперпозицией*) двух отображений $f:\ \mathbb{M}_1\to\mathbb{M}_2$ и $g:\ \mathbb{M}_2\to\mathbb{M}_3$ называется отображение

$$g\circ f:\quad \mathbb{M}_1\to\mathbb{M}_3,$$

которое состоит в последовательном применении этих отображений:

$$(g\circ f)(x)=g\big(f(x)\big).$$ □

Замечание. Произведение определено не для всех отображений, а только для тех, у которых множество $\mathbb{M}_2$ в предыдущих обозначениях общее. Если рассматриваются отображения некоторого множества в себя, то для них композиция всегда определена. □

Если задано отображение $f:\ \mathbb{M}_1\to\mathbb{M}_2$, то

$$f\circ\mathsf{id}\,(\mathbb{M}_1)=f\quad\text{ и }\quad\mathsf{id}\,(\mathbb{M}_2)f=f$$

или

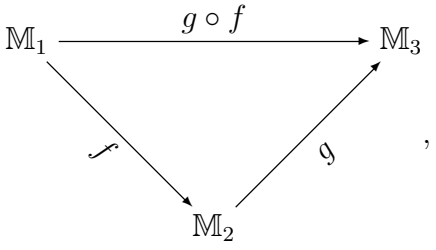
$$f^{-1}\circ f=\mathsf{id}\,(\mathbb{M}_1)\quad\text{ и }\quad f\circ f^{-1}=\mathsf{id}\,(\mathbb{M}_2).$$

Если заданы два биективных отображения f и g и определена их композиция, т.е. область значений f совпадает с областью определения g, то обратное отображение для композиции существует и задается формулой

$$(g\circ f)^{-1}=f^{-1}\circ g^{-1}.$$

В дальнейшем вместо $g\circ f$ мы часто будем писать просто gf.

Произведение отображений играет огромную роль в математике, и его изображают в виде диаграммы



,

которая называется *коммутативной*. Это значит, что результат перехода от $\mathbb{M}_1$ к $\mathbb{M}_3$ не зависит от того, по какому пути мы движемся: то ли вдоль стрелки $g \circ f$, то ли последовательно вдоль стрелок f и g. Изображение произведений отображений в виде коммутативных диаграмм наглядно и полезно, т.к. их можно накладывать друг на друга, что позволяет в ряде случаев упрощать доказательства. Это будет продемонстрировано в следующем утверждении.

Предложение 2.4.1. *Пусть определено произведение трех отображений:*

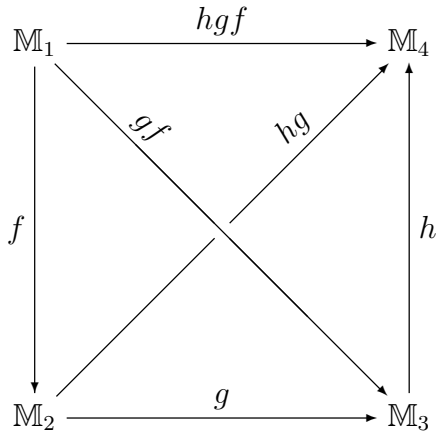
$$f:\ \mathbb{M}_1 \to \mathbb{M}_2, \qquad g:\ \mathbb{M}_2 \to \mathbb{M}_3, \qquad h:\ \mathbb{M}_3 \to \mathbb{M}_4.$$

Тогда произведение этих отображений ассоциативно:

$$h(gf) = (hg)f$$

и его обозначают $hgf:\ \mathbb{M}_1 \to \mathbb{M}_4$.

Доказательство. Все необходимые рассуждения содержатся в следующей диаграмме:



Для доказательства необходимо проследить куда отобразится произвольный элемент $x \in \mathbb{M}_1$ под действием композиций $h(gf)$ и $(hg)f$. Формально доказательство выглядит следующим образом:

$$\big(h(gf)\big)x = h\big((gf)x\big) = h\big(g(fx)\big) = (hg)(hx) = \big((hg)f\big)x. \qquad \square$$

Отображения конечных множеств обладают простыми свойствами.

Предложение 2.4.2. *Если отображение* $f:\ \mathbb{M} \to \mathbb{M}$ *конечного множества* $\mathbb{M}$ *в себя инъективно или сюръективно, то оно биективно.*

Доказательство. Пусть отображение f инъективно. Покажем, что оно является также сюръективным. Для произвольного элемента множества $x \in \mathbb{M}$ определим последовательность

$$f^0(x) = x, \qquad \text{и} \qquad f^k(x) = \underbrace{f\big(\dots f}_{k}(x)\dots\big) = f\big(f^{k-1}(x)\big), \qquad k = 1, 2, \dots .$$

Из конечности множества $\mathbb{M}$ вытекает, что в этой последовательности есть повторения. Допустим, скажем, что $f^m(x) = f^n(x)$ при некоторых $m > n$. Если $n > 0$, то из равенства $f\big(f^{m-1}(x)\big) = f\big(f^{n-1}(x)\big)$ и инъективности f следует $f^{m-1}(x) = f^{n-1}(x)$. Сократив отображение f n раз, приходим к равенству

$$f^{m-n}(x) = x.$$

В этом случае для любого $x \in \mathbb{M}$ найдется такое $x' = f^{m-n-1}(x)$, что $f(x') = x$, т.е. отображение f сюръективно.

Второе утверждение предложения докажем от противного. Пусть отображение f сюръективно, но не инъективно. Тогда существует такой элемент $x \in \mathbb{M}$, что его прообраз состоит не менее, чем из двух элементов. Пусть множество $\mathbb{M}$ содержит N элементов. Тогда f должно отобразить оставшиеся элементы, которых не более, чем $N-2$, на $N-1$ элемент. Для сюръективного отображения это невозможно. □

В приведенном доказательстве существенна конечность множества $\mathbb{M}$.

Пример 2.4.4. *Отображение следования*, определенное для натуральных чисел сдвигом на единицу,

$$\sigma: \quad \mathbb{N} \ni n \mapsto n+1 \in \mathbb{N},$$

является инъективным, но не сюръективным, поскольку единица не принадлежит образу $\sigma(\mathbb{N})$. □

Определение. Мы говорим, что множества $\mathbb{M}_1$ и $\mathbb{M}_2$ имеют одинаковую *мощность*, если существует биективное отображение $f: \mathbb{M}_1 \to \mathbb{M}_2$. Множества, имеющие ту же мощность, что и множество натуральных чисел $\mathbb{N}$ называется *счетным*. □

2.4.1 Отображения топологических пространств

При отображении топологических пространств важную роль играют отображения, согласованные с их топологией.

Определение. Отображение (2.17) двух топологических пространств называется *непрерывным* в точке $x \in \mathbb{M}_1$, если для каждой окрестности $\mathbb{U}_2$ точки $f(x) \in \mathbb{M}_2$ существует такая окрестность $\mathbb{U}_1$ точки x, что ее образ $f(\mathbb{U}_1)$ содержится в $\mathbb{U}_2$. Отображение называется непрерывным в области, если оно непрерывно в каждой точке этой области. □

Замечание. В общем случае окрестность $\mathbb{U}_2 \subset \mathbb{U}_2$ может содержать точки, не лежащие в образе $f(\mathbb{M}_1)$ и образ $f(\mathbb{U}_1)$ совсем не обязан совпадать с $\mathbb{U}_2$. □

Определение. Говорят, что два топологических пространства $\mathbb{M}_1$ и $\mathbb{M}_2$ *гомеоморфны*, если существуют взаимно обратные непрерывные отображения $f: \mathbb{M}_1 \to \mathbb{M}_2$ и $g: \mathbb{M}_2 \to \mathbb{M}_1$, $g \circ f = \mathsf{id}\,(\mathbb{M}_1)$, $f \circ g = \mathsf{id}\,(\mathbb{M}_2)$. Тогда отображения f и g называются *гомеоморфизмами*. □

Справедливы две фундаментальные теоремы, которые приведем без доказательства.

Теорема 2.4.1 (Инвариантность размерности). *При $m \neq n$ открытое подмножество в $\overline{\mathbb{R}}^m_+$ не может быть гомеоморфно никакому открытому подмножеству в $\overline{\mathbb{R}}^n_+$.*

В этой теореме замкнутое полупространство $\overline{\mathbb{R}}^n_+$ можно заменить на все евклидово пространство $\mathbb{R}^n$.

Теорема 2.4.2 (Инвариантность края). *Пусть* $\mathbb{U}$ *и* $\mathbb{V}$ *– два открытых подмножества* $\overline{\mathbb{R}}^n_+$ *и* f *– гомеоморфизм* $\mathbb{U}$ *на* $\mathbb{V}$*, тогда* $f(\mathbb{U}\bigcap\mathbb{R}^{n-1}) = \mathbb{V}\bigcap\mathbb{R}^{n-1}$*, где* $\mathbb{R}^{n-1}$ *– гиперплоскость, определяемая условием* $x^n = 0$*.*

Другими словами, при гомеоморфизмах точки края отображаются в край.

Приведем пять критериев (необходимых и достаточных условий) непрерывности отображения, которые будут использоваться в дальнейшем.

Теорема 2.4.3. *Если отображение* $f:\ \mathbb{M}_1 \to \mathbb{M}_2$ *сюръективно, то оно непрерывно тогда и только тогда, когда выполнено одно из следующих условий:*

1) прообраз любого замкнутого подмножества $\mathbb{M}_2$ *замкнут в* $\mathbb{M}_1$*;*

2) прообраз любого открытого подмножества $\mathbb{M}_2$ *открыт в* $\mathbb{M}_1$*;*

3) $\forall\mathbb{U}_1 \subset \mathbb{M}_1$ *имеем* $f(\overline{\mathbb{U}}_1) \subset \overline{f(\mathbb{U}_1)}$*;*

4) $\forall\mathbb{U}_2 \subset \mathbb{M}_2$ *имеем* $\overline{f^{-1}(\mathbb{U}_2)} \subset f^{-1}(\overline{\mathbb{U}}_2)$*;*

5) $\forall\mathbb{U}_2 \subset \mathbb{M}_2$ *имеем* $f^{-1}(\,\mathsf{int}\,\mathbb{U}_2) \subset\ \mathsf{int}\, f^{-1}(\mathbb{U}_2)$*.*

Доказательство. См., например, [**?**]. □

Определение и критерии непрерывности отображений говорят о топологических свойствах прообраза, исходя из свойств образа. При этом нельзя сделать однозначного утверждения относительно свойств образа при заданных свойствах прообраза. Действительно, из критерия 3) следует, что образ замкнутого множества, вообще говоря, не является замкнутым. Критерий 5), записанный в виде

$$\mathsf{int}\,\mathbb{U}_2 \subset f(\,\mathsf{int}\, f^{-1}(\mathbb{U}_2)),$$

говорит о том, что образ открытого множества может не быть открытым.

Определение. Непрерывное отображение (2.17) называется *открытым* (*замкнутым*) если образ любого открытого (замкнутого) подмножества $\mathbb{M}_1$ открыт (замкнут) в $\mathbb{M}_2$. □

Пример 2.4.5. Гомеоморфизм двух топологических пространств является открытым и замкнутым одновременно, т.е. открытое множество отображается в открытое, а замкнутое – в замкнутое. □

Пример 2.4.6. Приведем пример замкнутого, но не открытого непрерывного сюръективного отображения прямой в прямую (см. рис.2.3),

$$\mathbb{R} \ni x \mapsto f \in \mathbb{R},$$

где

$$f(x) = \begin{cases} x+1, & x \le -2, \\ -1, & -2 \le x \le -1, \\ x, & -1 \le x \le 1, \\ 1, & 1 \le x \le 2, \\ x-1, & 2 \le x. \end{cases}$$

При таком отображении открытый интервал (a, b), где $a \in (-2, -1)$ и $b \in (1, 2)$ отображается в замкнутый отрезок $[-1, 1]$. □

Рассмотрим отображение $f: \mathbb{M}_1 \to \mathbb{M}_2$ топологического пространства $\mathbb{M}_1$ в некоторое множество $\mathbb{M}_2$. Если отображение f является сюръективным, т.е. отображением на, то на множестве $\mathbb{M}_2$ можно определить *топологию идентификации* или *фактортопологию*. А именно, назовем подмножество $\mathbb{U} \subset \mathbb{M}_2$ открытым, если его прообраз $f^{-1}(\mathbb{U}) \subset \mathbb{M}_1$ открыт в $\mathbb{M}_1$. Это самая тонкая топология на $\mathbb{M}_2$, в которой отображение f является непрерывным.

Пример 2.4.7. Пусть $\mathbb{M}$ – топологическое пространство, на котором задано некоторое отношение эквивалентности $x_1 \sim x_2$. Пусть $\mathbb{M}/\sim$ – множество классов эквивалентности, и $f: \mathbb{M} \to \mathbb{M}/\sim$ – каноническая проекция элемента $x \in \mathbb{M}$ на его класс эквивалентности. Тогда отображение f сюръективно и на фактор пространстве $\mathbb{M}/\sim$ можно ввести топологию идентификации. □

Рис. 2.3: Пример замкнутого, но не открытого непрерывного сюръективного отображения.

На самом деле, этот пример является общим. Если задано сюръективное отображение $f: \mathbb{M}_1 \to \mathbb{M}_2$, то на множестве $\mathbb{M}_1$ всегда можно определить отношение эквивалентности: будем считать точки $x_1, x_2 \in \mathbb{M}_1$ эквивалентными, если $f(x_1) = f(x_2)$. Другими словами, в множестве $\mathbb{M}_1$ мы идентифицируем те точки, которые отображаются в одну точку пространства-мишени $\mathbb{M}_2$. Этим объясняется название "топология идентификации".

Если некоторое свойство P топологического пространства сохраняется при гомеоморфизме, то оно называется *топологическим инвариантом* или *свойством*. Другими словами, топологическое пространство $\mathbb{M}$ обладает свойством P в том и только в том случае, если этим свойством обладает любое другое гомеоморфное ему топологическое пространство. Так как гомеоморфизм устанавливает взаимно однозначное соответствие не только между точками, но и между открытыми множествами, то любое свойство, определенное в терминах открытых множеств, является топологическим инвариантом.

Пример 2.4.8. Число связных компонент топологического пространства является топологическим инвариантом. □

Если отображение (2.17) непрерывно, но не является гомеоморфизмом, то число связных компонент может уменьшаться, но не увеличиваться.

Пример 2.4.9. Если пространство $\mathbb{M}_1 = \mathbb{I}_1 \bigcup \mathbb{I}_2$ является объединением двух непересекающихся открытых интервалов $\mathbb{I}_1$ и $\mathbb{I}_2$, то его можно непрерывно отобразить на произвольный открытый интервал $\mathbb{I}_3$. При этом $\mathbb{I}_1 \to \mathbb{I}_3$ и $\mathbb{I}_2 \to \mathbb{I}_3$, т.е. каждый из интервалов $\mathbb{I}_1$ и $\mathbb{I}_2$ отображается на весь интервал $\mathbb{I}_3$. Обратное утверждение неверно. Один интервал невозможно непрерывно отобразить на два. Действительно, если существует непрерывное отображение

$$g: \quad \mathbb{I}_3 \to \mathbb{I}_1 \bigcup \mathbb{I}_2,$$

то в силу непрерывности g прообразы $\mathbb{I}_1$ и $\mathbb{I}_2$ являются открытыми и замкнутыми непустыми подмножествами в $\mathbb{I}_3$ одновременно. Поскольку интервал $\mathbb{I}_3$ связен, то $\mathbb{I}_3 = g^{-1}(\mathbb{I}_1) = g^{-1}(\mathbb{I}_2)$. Это означает, что каждой точке интервала $\mathbb{I}_3$ соответствует две точки в объединении $\mathbb{I}_1 \bigcup \mathbb{I}_2$, что противоречит определению отображения (2.17). □

Определение. *Компактификацией* топологического пространства $\mathbb{M}$ называется пара $(\mathbb{U}, f)$, где $\mathbb{U}$ – компактное топологическое пространство, а f – гомеоморфизм $\mathbb{M}$ на всюду плотное подмножество в $\mathbb{U}$. □

Пример 2.4.10. Отображение евклидовой плоскости на сферу, $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{S}^2$, которое задается стереографической проекцией (см. раздел **??**) является компактификацией. При этом все бесконечно удаленные точки евклидовой плоскости отображаются на одну точку сферы – северный полюс. □

Пример 2.4.11. Добавим к евклидову пространству $\mathbb{R}^n$ бесконечно удаленную точку ∞ и объявим ее окрестностями множества вида $(\mathbb{R}^n \setminus \mathbb{B}) \bigcup \infty$ для всех ограниченных замкнутых подмножеств $\mathbb{B} \subset \mathbb{R}^n$. Тогда объединение $\mathbb{R}^n \bigcup \infty$ будет компактным пространством, гомеоморфным сфере $\mathbb{S}^n$. В этом примере пара $(\mathbb{R}^n \bigcup \infty), f)$, где отображение $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \bigcup \infty$ имеет вид

$$f : \quad \mathbb{R}^n \ni x \mapsto (x, \infty) \in \mathbb{R}^n \bigcup \infty,$$

является компактификацией евклидова пространства. □

Пусть задано семейство $\mathcal{F}$ отображений топологического пространства $\mathbb{M}_1$ в топологическое пространство $\mathbb{M}_2$, т.е. элементами семейства $f \in \mathcal{F}$ являются отображения (2.17). Тогда возникает естественный вопрос, можно ли на $\mathcal{F}$ задать такую топологию, что отображение топологического произведения

$$\mathcal{F} \times \mathbb{M}_1 \ni (f, x) \mapsto f(x) \in \mathbb{M}_2$$

является непрерывным. Ответ положительный: такие топологии существуют. Ниже мы рассмотрим две из них.

Отображения хаусдорфовых топологических пространств. В конце настоящего раздела мы кратко обсудим отображения хаусдорфовых пространств, которые в дальнейшем будут играть большую роль. Поскольку многообразия, по определению, являются хаусдорфовыми топологическими пространствами, то отображения хаусдорфовых пространств будут играть в дальнейшем важную роль.

Доказательство следующих двух теорем и следствий содержится, например, в [**?**].

Теорема 2.4.4. *Если компактное пространство $\mathbb{M}_1$ непрерывно отображается на пространство $\mathbb{M}_2$, то $\mathbb{M}_2$ компактно.*

Следствие. Если $f : \mathbb{M}_1 \to \mathbb{M}_2$ – непрерывное отображение компактного пространства $\mathbb{M}_1$ в хаусдорфово пространство $\mathbb{M}_2$, то $\overline{f(\mathbb{U})} = f(\overline{\mathbb{U}})$ для каждого подмножества $\mathbb{U} \subset \mathbb{M}_1$.

Следствие. Каждое непрерывное отображение компактного пространства в хаусдорфово пространство замкнуто.

Теорема 2.4.5. *Каждое непрерывное взаимно однозначное отображение компактного пространства на хаусдорфово пространство является гомеоморфизмом.*

Приведем несколько утверждений, доказательство которых можно найти, например, в [**?**].

Теорема 2.4.6. *Компактное подмножество $\mathbb{U}$ хаусдорфова топологического пространства $\mathbb{M}$ хаусдорфово и замкнуто.*

Теорема 2.4.7. *Пусть* $\mathbb{M}_1$ *и* $\mathbb{M}_2$ *– топологические пространства. Тогда* $\mathbb{M}_1$ *и* $\mathbb{M}_2$ *хаусдорфовы в том и только в том случае, если произведение* $\mathbb{M}_1 \times \mathbb{M}_2$ *хаусдорфово.*

Хотя подпространства и произведения хаусдорфовых пространств хаусдорфовы, факторпространство хаусдорфова пространства, вообще говоря, нехаусдорфово.

Пример 2.4.12. Рассмотрим вещественную прямую $\mathbb{R}$ и открытый интервал $(0,1)$. Введем отношение эквивалентности $\sim$ на $\mathbb{R}$, при котором $x \sim x'$ тогда и только тогда, когда $x = x'$ или $x, x' \in (0,1)$. Грубо говоря, фактор пространство $X/\sim$ – это вещественная прямая $\mathbb{R}$ со стянутым в точку интервалом $(0,1)$. Если снабдить $\mathbb{R}/\sim$ фактортопологией относительно естественной проекции $\pi : \mathbb{R} \ni x \mapsto \tilde{x} \in \mathbb{R}/\sim$, то прообраз точки $\tilde{x}_0$, где $x_0 \in (0,1)$ есть интервал $(0,1)$, который открыт в $\mathbb{R}$. Следовательно, точка $\tilde{x}_0$ открыта в $\mathbb{R}/\sim$. Таким образом фактор пространство $\mathbb{M}/\sim$ представляет собой объединение двух лучей $(-\infty, 0]$, $[1, \infty)$ и точки $\tilde{x}_0$, которая открыта. Любые окрестности точек 0 и 1 содержат точку $\tilde{x}_0$ и, потому, пересекаются. Следовательно, факторпространство $\mathbb{R}/\sim$ нехаусдорфово. Подчеркнем, что в рассматриваемом примере фактор пространство $\mathbb{R}/\sim$ снабжено фактор топологией (топологией идентификации), которая отличается от топологии, индуцируемой вложением в $\mathbb{R}^2$. □

В рассмотренном примере факторпространство $\mathbb{R}/\sim$ не является многообразием, хотя проекция π непрерывна. Для того, чтобы обеспечить хаусдорфовость факторпространства $\mathbb{N}$ хаусдорфова пространства $\mathbb{M}$ необходимо наложить дополнительные условия. Достаточное условие дает следующая

Теорема 2.4.8. *Пусть* $\mathbb{N}$ *– факторпространство топологического пространства* $\mathbb{M}$*, определенное при помощи сюръективного отображения* $f : \mathbb{M} \to \mathbb{N}$*. Если пространство* $\mathbb{M}$ *компактно и хаусдорфово, а отображение* f *замкнуто, то* $\mathbb{N}$ *компактно и хаусдорфово.*

Следствие. Если $\mathbb{M}$ – компактное хаусдорфово пространство, на котором действует конечная группа преобразований $\mathbb{G}$, то $\mathbb{M}/\mathbb{G}$ – компактное хаусдорфово пространство. □

Пример 2.4.13. Проективное пространство $\mathbb{RP}^n$ получается из сферы $\mathbb{S}^n$ отождествлением диаметрально противоположных точек, $\mathbb{RP}^n = \mathbb{S}^n/\mathbb{Z}_2$. Это есть компактное хаусдорфово пространство. □

Чтобы сформулировать другое следствие теоремы 2.4.8, рассмотрим пространство $\mathbb{M}$ вместе с его подмножеством $\mathbb{U} \subset \mathbb{M}$. Обозначим через $\mathbb{M}/\mathbb{U}$ фактор пространство $\mathbb{M}/\sim$, где $\sim$ – отношение эквивалентности на $\mathbb{M}$, при котором $x \sim x'$ тогда и только тогда, когда $x = x'$ или $x, x' \in \mathbb{U}$.

Следствие. Если $\mathbb{M}$ – компактное хаусдорфово пространство и $\mathbb{U}$ – его замкнутое подмножество, то $\mathbb{M}/\mathbb{U}$ – компактное хаусдорфово пространство. □

2.5 Преобразования координат

Важным примером отображений являются преобразования координат, которые рассмотрены в настоящем разделе. Евклидово пространство $\mathbb{R}^n$ было определено в разделе 2.3.2 как топологическое произведение n прямых. При этом каждая точка $x \in \mathbb{R}^n$ задается набором n вещественных чисел:

$$x = (x^1, \ldots, x^n) = \{x^\alpha\}, \qquad \alpha = 1, \ldots, n,$$

– декартовых координат, которые покрывают все евклидово пространство. Рассмотрим n дифференцируемых функций

$$x^{\alpha'} = x^{\alpha'}(x) \quad \in \mathcal{C}^1(\mathbb{U}), \qquad \alpha' = 1, \ldots, n, \tag{2.18}$$

от декартовых координат x^α, заданных в некоторой области $\mathbb{U} \subset \mathbb{R}^n$. В общем случае эти функции отображают область $\mathbb{U} \subset \mathbb{R}^n$ на некоторое множество точек $\mathbb{U}' \subset \mathbb{R}^n$ – образ отображения. В наших обозначениях запись $x^{\alpha'}$ эквивалентна записи x'^{α}. При этом штрихованные индексы пробегают те же значения, что и нештрихованные $\alpha, \alpha' = 1, \ldots, n$. Такая запись удобнее, т.к. позволяет во многих случаях опускать букву x. В сокращенной записи мы опускаем индексы

$$x'(x): \quad \mathbb{U} \;\to\; \mathbb{U}'. \tag{2.19}$$

Матрица, составленная из частных производных,

$$J_\alpha{}^{\alpha'} = \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^\alpha} = \partial_\alpha x^{\alpha'} \tag{2.20}$$

называется *матрицей Якоби*. Здесь индекс α считается первым, а индекс α' – вторым. Определитель матрицы Якоби называется *якобианом*,

$$J = \frac{\partial(x^{\alpha'})}{\partial(x^\alpha)} = \mathsf{det}\left(\frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^\alpha}\right). \tag{2.21}$$

Из курса математического анализа известно следующее утверждение.

Теорема 2.5.1. *Пусть функции (2.18) задают дифференцируемое отображение класса $\mathcal{C}^k$ открытого множества $\mathbb{U} \subset \mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^n$. Если якобиан этого отображения не обращается в нуль в точке $x_0 \in \mathbb{U}$, то существуют такие окрестности $\mathbb{U}_0 \subset \mathbb{U}$ и $\mathbb{U}'_0 \subset \mathbb{R}^n$ точек x_0 и $x'_0 = x'_0(x_0)$, что функции $x^{\alpha'}(x)$ задают взаимно однозначное отображение окрестности $\mathbb{U}_0$ на $\mathbb{U}'_0$ (биекцию), и обратное ему отображение дифференцируемо и того же класса гладкости $\mathcal{C}^k$ в области $\mathbb{U}'_0$. В частности, возможно $k = \infty$.*

Следствие. Пусть $x'(x)$ – дифференцируемое отображение открытого множества $\mathbb{U} \subset \mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^n$. Если якобиан этого отображения отличен от нуля на всем $\mathbb{U}$, то образ этого множества $\mathbb{U}'$ также является открытым множеством. В частности, область отображается в область. □

Пусть задана последовательность биекций:

$$\mathbb{U} \xrightarrow{x'(x)} \mathbb{U}' \xrightarrow{x''(x')} \mathbb{U}'' \to \ldots$$

Мы говорим, что точка $x \in \mathbb{U} \subset \mathbb{R}^n$ евклидова пространства задается n вещественными числами

$$x = \{x^\alpha\} = \{x^{\alpha'}\} = \{x^{\alpha''}\} = \ldots,$$

которые являются координатами одной и той же точки в различных системах координат. Теперь мы можем расширить понятие евклидова пространства, допустив произвольные замены координат. Тогда мы считаем, что евклидово пространство $\mathbb{R}^n$ покрывается некоторыми областями (картами)

$$\mathbb{R}^n = \bigcup_i \mathbb{U}_i,$$

на каждой из которых выбрана своя система координат. Рассмотрим две пересекающиеся карты $\mathbb{U}_i$ и $\mathbb{U}_j$ в $\mathbb{R}^n$. В частном случае одна или обе области могут совпадать со всем евклидовым пространством. Обозначим координаты точек, принадлежащих $\mathbb{U}_i$ и $\mathbb{U}_j$, соответственно через x^α и $x^{\alpha'}$. Тогда в области пересечения карт $\mathbb{U}_i \cap \mathbb{U}_j$ координаты точек будут связаны некоторым преобразованием вида (2.18). По этой причине функции (2.18) называются *функциями перехода* к новой системе координат или *функциями склейки*. Заметим, что их одновременно можно рассматривать и как функции, осуществляющие склейку двух областей и как замену координат на пересечении $\mathbb{U}_i \cap \mathbb{U}_j$.

Замечание. В дифференциальной геометрии такие объекты как векторные поля, метрика, связность и другие геометрические структуры вводятся инвариантным образом, независимо от выбранной системы координат. В приложениях выбор той или иной системы координат диктуется симметрией задачи, и эти координаты, как правило, не покрывают все евклидово пространство. Например, сферические и цилиндрические координаты определены всюду в $\mathbb{R}^3$ за исключением оси z. □

Функции (2.18) осуществляют замену или *преобразование координат*. Это преобразование в зависимости от обстоятельств можно рассматривать как *пассивное* или *активное*. При пассивном рассмотрении считается, что одной и той же точке области соответствуют различные координаты в различных системах отсчета. Именно так мы и рассматривали преобразование координат до сих пор. В втором случае считается, что заданная точка евклидова пространства с координатами x^α в результате некоторого преобразования или деформирования области занимает новое положение с координатами $x^{\alpha'}$ относительно старой координатной системы. Такая точка зрения принята в теории групп преобразований. Например, вращение евклидова пространства относительно начала в данной декартовой системе координат обычно рассматривают как активное. С математической точки зрения оба подхода равноправны, т.к. определяются одним и тем же набором функций (2.18), а деление преобразований на активные и пассивные зависит от физической интерпретации и традиций.

Обычно от функций перехода (2.18) требуется, чтобы они и их обратные $x^\alpha = x^\alpha(x')$ были достаточно гладкими. В частности, непрерывность функций перехода означает гомеоморфность отображения (2.18). В дальнейшем, если не оговорено противное, мы рассматриваем преобразования координат из класса $\mathcal{C}^\infty$. В этом случае гомеоморфизм (3.67) называется *диффеоморфизмом*.

Отличие от нуля якобиана (2.21) означает, что функции (2.18), определяющие преобразования координат, функционально независимы. Напомним, что набор функций $u^i(x^\alpha)$, $i = 1, \ldots, \mathrm{N}$, в некоторой области $\mathbb{U}$ называется *функционально зависимым*, если на любом компакте из $\mathbb{U}$ существует функция от N переменных $F(u^i)$, определенная в области значений u^i, которая непрерывна вместе со всеми частными производными первого порядка, не равна тождественно нулю ни в какой подобласти и для которой выполнено соотношение $F(u^i(x^\alpha)) = 0$. Дифференцируя это уравнение по x^α, получим

$$\frac{\partial F}{\partial u^i}\frac{\partial u^i}{\partial x^\alpha} = 0.$$

Поскольку среди функций $\partial F/\partial u^i$ по крайней мере одна отлична от нуля, то для функциональной зависимости необходимо, чтобы ранг матрицы $\partial u^i/\partial x^\alpha$ был меньше N. Это условие является и достаточным. В частности, при $\mathrm{N} > n$ функции всегда будут функционально зависимы. Тем самым можно дать эквивалентное определение. N функций, для которых ранг матрицы $\partial u^i/\partial x^\alpha$ равен N в каждой точке области $\mathbb{U} \subset$

$\mathbb{R}^n$ называются *функционально независимыми*. Таким образом, n функционально независимых функций (2.18) задают преобразование координат в некоторой области $\mathbb{U} \subset \mathbb{R}^n$.

Преобразование координат (2.18) называется *невырожденным* в некоторой точке или области, если якобиан преобразования отличен от нуля в этой точке или области, соответственно. Если преобразование координат невырождено в некоторой области $\mathbb{U}$, то согласно теореме 2.5.1 в достаточно малой окрестности произвольной точки $x \in \mathbb{U}$ это преобразование является взаимно однозначным. Для невырожденных преобразований координат локально существует обратное преобразование

$$x^{\alpha'} \to x^\alpha = x^\alpha(x'),$$

при этом якобиан обратного преобразования равен

$$J^{-1} = \det\left(\frac{\partial x^\alpha}{\partial x^{\alpha'}}\right).$$

Если якобиан преобразования обращается в нуль в некоторой точке, то в этой точке преобразование координат является вырожденным, и обратного преобразования не существует.

Совершим два преобразования координат $x \to x' \to x''$. Тогда координаты точки x можно выразить, как в системе координат x', так и в x''. При этом, по-определению, справедливы равенства $x^\alpha(x'') = x^\alpha(x'(x''))$. Отсюда следует, что каждая координатная функция x^α при преобразовании координат $x' \to x''$ ведет себя, как скалярное поле (см. раздел 3.5). Верно также и обратное утверждение. Если в некоторой области евклидова пространства $\mathbb{U} \subset \mathbb{R}^n$ задано n функций (скалярных полей) $f^a(x)$, $a = 1, \ldots, n$, таких, что $\det(\partial f^a/\partial x^\alpha) \neq 0$, то их всегда можно выбрать в качестве новой системы координат на $\mathbb{U}$.

Обозначим множество невырожденных преобразований координат в $\mathbb{R}^n$ через $\mathbb{G}(\mathbb{R}^n)$. При этом будем рассматривать преобразования координат как активные, т.е. отображающие области в одном фиксированном евклидовом пространстве. Для заданного преобразования координат $f = x'(x)$ будем писать $f \in \mathbb{G}(\mathbb{R}^n)$. Эти преобразования согласованы с топологией в $\mathbb{R}^n$.

Определение. Множество преобразований $\mathbb{G}(\mathbb{R}^n)$ топологического пространства $\mathbb{R}^n$ называется *псевдогруппой преобразований*, если выполнены следующие условия:

1) каждое преобразование $f \in \mathbb{G}(\mathbb{R}^n)$ является гомеоморфизмом открытого множества $\mathbb{U}_i$ (область определения f) на другое открытое множество $f(\mathbb{U}_i) = \mathbb{U}_j$ (область значений f);
2) если $f \in \mathbb{G}(\mathbb{R}^n)$, то сужение f на произвольное открытое подмножество области определения f также принадлежит $\mathbb{G}(\mathbb{R}^n)$;
3) пусть множество $\mathbb{U}$ есть объединение произвольного числа открытых множеств, $\mathbb{U} = \bigcup_i \mathbb{U}_i$, тогда гомеоморфизм f множества $\mathbb{U}$ принадлежит $\mathbb{G}(\mathbb{R}^n)$, если сужение f на $\mathbb{U}_i$ принадлежит $\mathbb{G}(\mathbb{R}^n)$ для каждого i;
4) тождественное преобразование каждого открытого множества $\mathbb{U} \subset \mathbb{R}^n$ принадлежит $\mathbb{G}(\mathbb{R}^n)$;
5) для каждого $f \in \mathbb{G}(\mathbb{R}^n)$ существует обратное преобразование $f^{-1} \in \mathbb{G}(\mathbb{R}^n)$;
6) если f_1 есть гомеоморфизм $\mathbb{U}_1 \to \mathbb{V}_1$, а f_2 – гомеоморфизм $\mathbb{U}_2 \to \mathbb{V}_2$, и пересечение $\mathbb{V}_1 \cap \mathbb{U}_2$ не пусто, то гомеоморфизм $f_2 f_1$ множества $f_1^{-1}(\mathbb{V}_1 \cap \mathbb{U}_2)$ на множество $f_2(\mathbb{V}_1 \cap \mathbb{U}_2)$ также принадлежит $\mathbb{G}(\mathbb{R}^n)$. □

Замечание. Первые три свойства являются топологическими, а остальные – групповыми, если под композицией преобразований понимать их последовательное выполнение в тех точках, где они определены. В общем случае преобразования координат группы не образуют, т.к. при композиции двух преобразований необходимо следить за их областью определений и значений. Например, если область значений преобразования f_1 не имеет общих точек с областью определения f_2, то композиция $f_2 \circ f_1$ не определена. Следовательно, преобразования координат группы не образуют, так как закон композиции в группе должен быть определен для всех элементов группы. Тем не менее часто употребляется термин группа преобразований координат. Для того, чтобы преобразования координат действительно образовали группу необходимо предположить, что области определений и значений $\mathbb{U} \subset \mathbb{R}^n$ для всех $f \in \mathbb{G}(\mathbb{R}^n)$ совпадают и отказаться от условия 2). Эта группа бесконечномерна, т.к. параметризуется n функциями от n переменных. □

Отображение f областей евклидова пространства называется *диффеоморфизмом*. Если все диффеоморфизмы $f \in \mathbb{G}(\mathbb{R}^n)$ одного класса гладкости $\mathcal{C}^k$, то будем писать $f \in \mathsf{diff}^{\,k}(\mathbb{R}^n)$. Для гладкой псевдогруппы преобразований координат индекс обычно опускают $\mathsf{diff}^{\,\infty}(\mathbb{R}^n) = \mathsf{diff}\,(\mathbb{R}^n)$. Ее часто называют просто *группой диффеоморфизмов* евклидова пространства $\mathbb{R}^n$. Очевидно, что $\mathsf{diff}^{\,l}(\mathbb{R}^n)$ – подпсевдогруппа $\mathsf{diff}^{\,k}(\mathbb{R}^n)$ при $l > k$. Множество преобразований координат с положительным определителем $\mathsf{diff}^{\,k}_0(\mathbb{R}^n)$ также является подпсевдогруппой: $\mathsf{diff}^{\,k}_0(\mathbb{R}^n) \subset \mathsf{diff}^{\,k}(\mathbb{R}^n)$. Все невырожденные преобразования координат можно разделить на два класса: с положительным, $\mathsf{diff}^{\,k}_0(\mathbb{R}^n)$, и отрицательным, $\mathsf{diff}^{\,k}(\mathbb{R}^n) \setminus \mathsf{diff}^{\,k}_0(\mathbb{R}^n)$, якобианом. Говорят, что координатный базис касательного пространства (см. раздел 3.6) имеет одинаковую *ориентацию* в двух системах координат, если якобиан соответствующего преобразования положителен. Если якобиан преобразования отрицателен, то при переходе между системами координат базис касательного пространства, по-определению, меняет ориентацию.

Глава 3

Многообразия и тензорные поля

В настоящей главе начинается изложение основных понятий дифференциальной геометрии. Изложение часто носит координатный характер, т.е. все соотношения записываются в локальной системе координат и приводятся правила преобразований геометрических объектов при переходе от одной системы координат к другой. Параллельно даются также глобальные определения, не зависящие от выбора системы координат, и показывается связь координатного и инвариантного описания. Глобальный бескоординатный подход более компактен в обозначениях, прозрачен и удобен для определения геометрических объектов. Координатный подход является более громоздким, однако это не является признаком меньшей строгости. Он незаменим в моделях математической физики, основанных на дифференциальной геометрии, где требуется проведение расчетов.

3.1 Многообразие

Основным понятием дифференциальной геометрии является дифференцируемое многообразие $\mathbb{M}$, которое обобщает понятие евклидова пространства $\mathbb{R}^n$. Топологически нетривиальные многообразия не покрываются одной системой координат, однако локально устроены так же, как и евклидовы пространства. Это позволяет использовать математический анализ для построения и анализа многих важных моделей современной математической физики.

Определение. Топологическое хаусдорфово пространство $\mathbb{M}$ со счетной базой, каждая точка которого имеет окрестность, гомеоморфную открытому n-мерному шару единичного радиуса $\mathbb{B}_1^n$ в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$, называется n-мерным *многообразием*. Число n называется *размерностью* многообразия. Мы пишем $\dim \mathbb{M} = n$. □

Замечание. В определении многообразия требование хаусдорфовости существенно и исключает случаи подобные примерам на с. 22. Согласно теореме 2.3.12, любая сходящаяся последовательность в хаусдорфовом пространстве имеет не более одного предела.

Предположение о счетности базы также существенно, потому что это требование обеспечивает паракомпактность многообразия, которая в рассматриваемом случае достаточна для существования разбиения единицы. В свою очередь, существование разбиения единицы важно, т.к. позволяет определять геометрические объекты на

всем многообразии, исходя из их задания в локальных координатах. Оно часто используется для доказательства теорем существования.

Выбор шаров единичного радиуса $\mathbb{B}_1^n$ сделан для определенности и не является существенным, т.к. шар единичного радиуса гомеоморфен всему евклидову пространству $\mathbb{R}^n$, а также любой (связной и односвязной) области в $\mathbb{R}^n$. □

Замечание. Поскольку многообразие, по-определению, является хаусдорфовым топологическим пространством, то для многообразий понятие компактного пространства и компакта совпадают. □

Окрестность произвольной точки многообразия $\mathbb{M}$ устроена так же, как и окрестность точки в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$. Однако в отличие от евклидова пространства, которое, по-определению, может быть покрыто одной картой, многообразие в общем случае одной картой не покрывается. Поэтому на многообразии общего вида нельзя ввести структуру векторного или аффинного пространства.

Из определения следует, что многообразие представляет собой объединение конечного или счетного числа областей, $\mathbb{M} = \bigcup_i \mathbb{U}_i$, каждая из которых гомеоморфна n-мерному шару, а, значит, и любой области в $\mathbb{R}^n$. Действительно, поскольку каждая точка имеет окрестность, гомеоморфную $\mathbb{R}^n$, то все многообразие можно покрыть, возможно, несчетным числом карт. Выберем счетную базу на $\mathbb{M}$, которая также является покрытием. Каждая координатная окрестность $\mathbb{U}_i$ является объединением счетного числа элементов базы и, поэтому, на каждом элементе базы задан гомеоморфизм в $\mathbb{R}^n$. Теперь можно выбрать базу топологии в качестве координатного покрытия, а она – счетна. В приложениях рассматриваются, как правило, многообразия, которые покрываются конечным числом карт.

Поскольку многообразие представляет собой объединение не более, чем счетного числа областей, гомеоморфных n-мерному шару, то любое многообразие является сепарабельным топологическим пространством.

Согласно данному определению, многообразие, как объединение открытых множеств, не имеет границы, которую в случае многообразий принято называть краем (см. следующий раздел).

Поскольку каждая точка многообразия гомеоморфна шару в евклидовом пространстве, то всякое многообразие является локально связным. Согласно теореме 2.3.17 всякое многообразие представляет собой объединение связных компонент, каждая из которых является одновременно открытой и замкнутой. Число этих компонент может быть не более, чем счетным, т.к. мы предполагаем счетность базы многообразия.

Под 0-мерным многообразием мы будем понимать счетное множество точек с дискретной топологией. Одномерное и двумерное многообразия называются соответственно *линией* и *поверхностью*.

Размерность многообразия является топологическим инвариантом: два гомеоморфных многообразия имеют одинаковую размерность. Это утверждение является прямым следствием теоремы 2.4.1 об инвариантности размерности.

Говорят, что данное выше определение задает *топологическое многообразие*, т.к. в нем говорится только о непрерывности.

По-определению, существует гомеоморфизм (непрерывная биекция)

$$\varphi_i : \quad \mathbb{M} \supset \mathbb{U}_i \ \rightarrow \ \varphi_i(\mathbb{U}_i) \subset \mathbb{R}^n,$$

области $\mathbb{U}_i$ на ее образ $\varphi_i(\mathbb{U}_i)$ (суммирования нет) в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$. Поскольку в евклидовом пространстве есть система координат, например, декартова,

то гомеоморфизм можно записать в виде

$$\varphi_i(x) = (x^1, \ldots, x^n), \qquad x \in \mathbb{U}_i, \quad (x^1, \ldots, x^n) \in \mathbb{R}^n,$$

где точку многообразия x и ее координаты $(x^1, \ldots, x^n)$ мы обозначили одной и той же буквой. Области $\mathbb{U}_i$, покрывающие многообразие, называются *координатными окрестностями*, а набор чисел $(x^1, \ldots, x^n)$ – *локальными координатами*. Пара $(\mathbb{U}_i, \varphi_i)$ называется *картой*.

При проведении вычислений в одной карте точку многообразия $x \in \mathbb{M}$ и ее координаты $\varphi(x) \in \mathbb{R}^n$ можно отождествлять.

Если две карты пересекаются, $\mathbb{U}_i \bigcap \mathbb{U}_j \neq 0$, то произвольная точка из пересечения $x \in \mathbb{U}_i \bigcap \mathbb{U}_j$ имеет свой набор координат в каждой карте. Отображение областей евклидова пространства,

$$\varphi_j \circ \varphi_i^{-1} : \qquad \mathbb{R}^n \supset \varphi_i(\mathbb{U}_i \cap \mathbb{U}_j) \to \varphi_j(\mathbb{U}_i \cap \mathbb{U}_j) \subset \mathbb{R}^n,$$

задается набором функций $x^{\alpha'}(x^\alpha)$ (2.18), где x^α и $x^{\alpha'}$ – координаты соответственно на $\mathbb{U}_i$ и $\mathbb{U}_j$. Они называются *функциями склейки*, поскольку склеивают между собой различные карты. Совокупность всех карт, покрывающих многообразие, $\mathbb{M} = \bigcup_i \mathbb{U}_i$, называется *координатным покрытием* или *атласом* $\{\mathbb{U}_i, \varphi_i\}$, $i \in I$ многообразия $\mathbb{M}$. Атлас, который не содержится ни в каком другом атласе, называется *полным*.

Замечание. В силу счетности топологической базы многообразия, координатное покрытие всегда можно выбрать счетным. Однако, даже евклидово пространство можно при желании покрыть несчетным числом карт. Это значит, что полный атлас любого многообразия всегда несчетен. □

Каждая функция склейки $\varphi_j \circ \varphi_i^{-1}$ является диффеоморфизмом, т.е. элементом псевдогруппы преобразований координат $\mathsf{diff}^{\,k}(\mathbb{R}^n)$ для некоторого k, определенной в разделе 2.5. Поэтому мы говорим, что атлас $\{\mathbb{U}_i, \varphi_i\}$ совместим с псевдогруппой преобразований координат $\mathsf{diff}^{\,k}(\mathbb{R}^n)$.

Определение. Многообразие $\mathbb{M}$ вместе с полным атласом $\{\mathbb{U}_i, \varphi_i\}$ называется *дифференцируемым многообразием* класса $\mathcal{C}^k$, $k \in \mathbb{N}$, если функции склейки (2.18) для всех пересекающихся карт непрерывны вместе со своими частными производными, включая производные k-того порядка $\varphi_j \circ \varphi_i^{-1} \in \mathsf{diff}^{\,k}(\mathbb{R}^n)$. Полный атлас $\{\mathbb{U}_i, \varphi_i\}$ называется *дифференцируемой структурой* многообразия $\mathbb{M}$.

Аналогично определяются гладкие $\mathcal{C}^\infty$ и вещественно аналитические многообразия $\mathcal{C}^\omega$. На $\mathcal{C}^\omega$-многообразиях функции склейки задаются сходящимися степенными рядами. Напомним, что функции склейки имеют ненулевой якобиан и поэтому осуществляют взаимно однозначное отображение областей в $\mathbb{R}^n$ (теорема 2.5.1). Это означает, что обратное преобразование существует, и дифференцируемость обратных функций такая же, как и самих функций склейки. В дальнейшем, если не оговорено противное, под многообразием мы будем понимать $\mathcal{C}^\infty$ дифференцируемые многообразия. Многие из рассмотренных ниже утверждений справедливы и при более слабых ограничениях на дифференцируемость функций склейки. Для проверки достаточно следить лишь за числом производных при вычислениях.

Замечание. В определение дифференцируемого многообразия входит понятие евклидова пространства $\mathbb{R}^n$. В евклидовом пространстве можно определить много различных структур. Для определения топологического многообразия нам достаточно

наличия топологии в $\mathbb{R}^n$. Для определения дифференцируемого многообразия нам достаточно дополнительно предположить наличие структуры поля на вещественной прямой $\mathbb{R}$ (для определения производной необходимо вычитать и делить числа). Конечно, в евклидовом пространстве всегда можно ввести евклидову метрику и структуру векторного пространства. Однако для определения дифференцируемого многообразия это не является необходимым условием. □

Предложение 3.1.1. *Любой атлас класса $\mathcal{C}^k$ можно дополнить до полного атласа того же класса гладкости, и соответствующий полный атлас единственный. Если на многообразии задано два диффеоморфных атласа $\{\mathbb{U}_i, \varphi_i\}$ и $\{\mathbb{V}_\text{A}, \psi_\text{A}\}$, т.е. все отображения*

$$\psi_\text{A} \circ \varphi_i^{-1} : \qquad \varphi_i(\mathbb{U}_i \cap \mathbb{V}_\text{A}) \to \psi_j(\mathbb{U}_i \cap \mathbb{V}_\text{A})$$

являются диффеоморфизмами областей евклидова пространства $\mathbb{R}^n$, как только пересечения $\mathbb{U}_i \cap \mathbb{V}_\text{A}$ не пусты, то они содержатся в одном полном атласе. Любые два атласа, содержащиеся в одном полном атласе связаны между собой диффеоморфизмом.

Доказательство. Пусть $\{\mathbb{W}, \chi\}$ – семейство всех пар таких, что χ есть гомеоморфизм открытого подмножества $\mathbb{W} \subset \mathbb{M}$ на открытое подмножество в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$ и что отображение

$$\varphi_i \circ \chi^{-1} : \qquad \chi(\mathbb{W} \cap \mathbb{U}_i) \to \varphi_i(\mathbb{W} \cap \mathbb{U}_i)$$

есть элемент $\mathsf{diff}^{\,k}(\mathbb{R}^n)$, как только $\mathbb{W} \cap \mathbb{U}_i$ не пусто. Тогда $\{\mathbb{W}, \chi\}$ есть полный атлас, содержащий $\{\mathbb{U}_i, \varphi_i\}$. Этот атлас единственный по-построению.

Если заданы два диффеоморфных атласа $\{\mathbb{U}_i, \varphi_i\}$ и $\{\mathbb{V}_\text{A}, \psi_\text{A}\}$, то их объединение также является атласом и того же класса гладкости. Поэтому они содержатся в одном полном атласе.

Все атласы, содержащиеся в одном полном атласе, получаются путем отбрасывания некоторого числа карт. Они диффеоморфны между собой, поскольку все функции склейки полного атласа принадлежат $\mathsf{diff}^{\,k}(\mathbb{R}^n)$. □

Доказанное предложение означает, что для задания дифференцируемой структуры на многообразии достаточно задать один атлас, не обязательно полный. Если на многообразии $\mathbb{M}$ можно задать два атласа одного класса гладкости, которые не диффеоморфны между собой, то это означает, что на $\mathbb{M}$ существуют различные дифференцируемые структуры.

Пусть на многообразии $\mathbb{M}$ введено две дифференцируемые структуры разных классов гладкости $\mathcal{C}^k$ и $\mathcal{C}^l$, $l > k$, причем полный атлас класса $\mathcal{C}^l$ является одновременно атласом класса $\mathcal{C}^k$. Если $l = \infty$, то ограничение класса гладкости $\mathcal{C}^k$-многообразия до $\mathcal{C}^\infty$-многообразия называется *сглаживанием*. При этом сглаживания, которые связаны $\mathcal{C}^k$ автоморфизмами, рассматриваются, как эквивалентные. Уитни доказал [**?**], что каждое $\mathcal{C}^k$-многообразие имеет ровно одно (с точностью до $\mathcal{C}^k$-диффеоморфизмов) сглаживание. Поэтому во многих случаях можно игнорировать различие между $\mathcal{C}^k$ дифференцируемыми и $\mathcal{C}^\infty$ гладкими структурами.

Дифференцируемые структуры, по-определению, согласованы с естественной топологией евклидова пространства $\mathbb{R}^n$, т.е. можно считать, что топология многообразия индуцирована отображениями областей $\mathbb{U}_i$ в евклидово пространство $\mathbb{R}^n$ с естественной топологией.

В низших размерностях дифференцируемая структура на многообразиях единственна. Доказано, что двух- и трехмерные многообразия допускают ровно одну

дифференцируемую структуру [?]. Для многообразий более высоких размерностей это не так. Это утверждение иллюстрирует пример Милнора [?], который показал, что на семимерной сфере $\mathbb{S}^7$, рассматриваемой, как топологическое многообразие, существует 28 недиффеоморфных дифференцируемых структур. Построение этих структур является сложным, и мы его не приводим. Было также доказано, что четырехмерное евклидово пространство $\mathbb{R}^4$ допускает бесконечное множество недиффеоморфных дифференцируемых структур [?]. Существует также теорема о том, что каждое гладкое многообразие имеет единственную вещественно аналитическую структуру [?].

Если в определении многообразия отбросить требование о счетности базы, то получим *локально евклидово топологическое пространство*. Существуют такие топологические локально евклидовы пространства, которые вообще не допускают дифференцируемой структуры [?].

Любое открытое подмножество $\mathbb{D}$ дифференцируемого многообразия $\mathbb{M}$ само является многообразием. Дифференцируемая структура на $\mathbb{D}$ состоит из карт $(\mathbb{U}_i \cap \mathbb{D}, \varphi_i|_{\mathbb{D}})$, возникающих после сужения гомеоморфизмов φ_i на $\mathbb{D}$.

Поскольку многообразия являются топологическими пространствами, то их можно умножать как топологические пространства. При этом произведение двух многообразий $\mathbb{M} \times \mathbb{N}$ также является многообразием размерности $m + n$, где $\mathsf{dim}\,\mathbb{M} = m$ и $\mathsf{dim}\,\mathbb{N} = n$. Дифференцируемая структура на произведении $\mathbb{M} \times \mathbb{N}$ строится, как прямое произведение дифференцируемых структур на $\mathbb{M}$ и $\mathbb{N}$. Пусть дифференцируемая структура на многообразии $\mathbb{M}$ определяется атласом $\{\mathbb{U}_i, \varphi_i\}$, а на $\mathbb{N}$ – атласом $\{\mathbb{V}_{\text{A}}, \phi_{\text{A}}\}$. Тогда естественная дифференцируемая структура на топологическом произведении $\mathbb{M} \times \mathbb{N}$ определяется атласом $\{\mathbb{U}_i \times \mathbb{V}_{\text{A}}, \varphi_i \times \phi_{\text{A}}\}$, где отображение

$$\varphi_i \times \phi_{\text{A}} : \quad \mathbb{U}_i \times \mathbb{V}_{\text{A}} \;\to\; \mathbb{R}^{m+n} = \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$$

определяется естественным образом. Отметим, что этот атлас не будет полным даже если атласы $\{\mathbb{U}_i, \varphi_i\}$ и $\{\mathbb{V}_{\text{A}}, \phi_{\text{A}}\}$ полны.

Если связное многообразие покрыто совокупностью карт $\mathbb{U}_i$ причем якобианы функций перехода (2.21) для всех пересекающихся карт $\mathbb{U}_i$ и $\mathbb{U}_j$ положительны,

$$\mathsf{det}\left(\frac{\partial x_i^\alpha}{\partial x_j^\beta}\right) > 0, \qquad \forall i, j$$

то многообразие называется *ориентированным*. Многообразие называется *неориентируемым*, если атласа со всеми положительными якобианами функций склейки не существует. При неудачно выбранном атласе на ориентируемом многообразии якобианы могут быть разных знаков, однако атлас с положительными якобианами существует. Такие многообразия называются *ориентируемыми*. Несвязное многообразие $\mathbb{M}$ называется ориентируемым, если ориентируема каждая его компонента. Ориентация такого многообразия – это выбор ориентации на каждой компоненте. Связное ориентируемое многообразие допускает в точности две ориентации. Чтобы поменять ориентацию ориентированного многообразия достаточно заменить каждую карту $(\mathbb{U}_i, \varphi_i)$ ориентированного атласа на карту $(\mathbb{U}_i, \psi_i)$, где гомеоморфизм ψ_i является композицией φ_i и отражения первой (или любой другой) координаты: $(x^1, x^2, \ldots, x^n)$ $\to (-x^1, x^2, \ldots, x^n)$. (Более подробно ориентируемость многообразий будет обсуждаться в разделе 11.4.)

Рассмотрим простейшие примеры многообразий.

Пример 3.1.1. Все евклидово пространство $\mathbb{R}^n$ является простейшим n-мерным многообразием, которое можно покрыть одной картой (а можно и несколькими). Дифференцируемая структура – это полный атлас, содержащий естественную карту $(\mathbb{U} = \mathbb{R}^n, \varphi = \mathsf{id}(\mathbb{R}^n))$. При этом класс гладкости многообразия определяется классом гладкости допустимых преобразований координат. Любое многообразие $\mathbb{M}$, $\mathsf{dim}\,\mathbb{M} = n$, которое покрывается одной картой, диффеоморфно (см. раздел 3.9) $\mathbb{R}^n$ и называется *тривиальным*. □

Пример 3.1.2. Рассмотрим произвольное вещественное векторное пространство $\mathbb{V}$, $\mathsf{dim}\,\mathbb{V} = n$. Если в векторном пространстве выбран базис $\{e_a\}$, $a = 1, \ldots, n$, то каждая точка векторного пространства задается упорядоченным набором вещественных чисел $(x^1, \ldots, x^n)$. Тогда его можно отождествить с евклидовым пространством $\mathbb{R}^n$ и рассматривать, как гладкое многообразие. Дифференцируемая структура в $\mathbb{V}$ не зависит от выбора базиса, т.к. замена базиса задается невырожденной матрицей, и соответствует преобразованию координат класса $\mathcal{C}^\infty$. В дальнейшем мы всегда будем считать, что все векторные пространства снабжены естественной дифференцируемой структурой евклидова пространства. □

Пример 3.1.3. Рассмотрим ломанную линию γ на евклидовой плоскости $\mathbb{R}^2$, заданную уравнением $y = |x|$ (см. рис. 3.1,*a*). Топология, индуцированная из $\mathbb{R}^2$, превращает ее в связное хаусдорфово топологическое пространство. Ломаную γ можно покрыть одной картой, спроектировав ломаную линию на ось x,

$$\mathbb{U} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \quad y = |x|\}, \qquad \varphi(x, y) = x.$$

Таким образом γ становится одномерным тривиальным многообразием класса $\mathcal{C}^\infty$. Однако вложение $\gamma \to \mathbb{R}^2$ (см. раздел 3.9) является только непрерывным, а не дифференцируемым, и это является причиной излома. □

Рис. 3.1: *a)* Ломаная прямая является $\mathcal{C}^\infty$ многообразием. *b)* Покрытие окружности $\mathbb{S}^1$ четырьмя картами. Показана точка, принадлежащая пересечению $\mathbb{U}_1 \cap \mathbb{U}_4$.

Пример 3.1.4. n-мерная сфера $\mathbb{S}^n_r$ радиуса r с центром в начале координат, вложенная в $(n+1)$-мерное евклидово пространство: $\mathbb{S}^n_r \subset \mathbb{R}^{n+1}$, задается уравнением

$$\mathbb{S}^n_r := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : \quad (x^1)^2 + (x^2)^2 + \ldots + (x^{n+1})^2 = r^2\}, \qquad r = \mathsf{const} > 0. \tag{3.1}$$

Само по себе это уравнение задает только множество точек в $\mathbb{R}^{n+1}$, а никак не многообразие. Зададим на нем топологию, сказав, что топология индуцирована вложением $\mathbb{S}^n_r \to \mathbb{R}^{n+1}$. Тогда сфера становится n-мерным компактным ориентируемым многообразием. Пусть $N = (0, \ldots, 0, r)$ и $S = (0, \ldots, 0, -r)$ – северный и южный полюс сферы. Гладкая дифференцируемая структура на $\mathbb{S}^n_r$ – это полный атлас, содержащий две карты: $(\mathbb{S}^n_r \setminus N, \varphi_N)$ и $(\mathbb{S}^n_r \setminus S, \varphi_S)$, где φ_N и φ_S – стереографические проекции из северного и южного полюса. Это многообразие нетривиально и покрывается не менее, чем двумя картами. В дальнейшем для сферы единичного радиуса нижний индекс мы будем опускать $\mathbb{S}^n = \mathbb{S}^n_1$. □

Пример 3.1.5. Рассмотрим задание окружности $\mathbb{S}^1 \subset \mathbb{R}^2$ единичного радиуса с помощью четырех карт:

$$\begin{aligned}
\mathbb{U}_1 &= \{x \in \mathbb{S}^1 : \quad x^2 > 0\}, \quad \varphi_1(x) = x^1, \\
\mathbb{U}_2 &= \{x \in \mathbb{S}^1 : \quad x^1 > 0\}, \quad \varphi_2(x) = x^2, \\
\mathbb{U}_3 &= \{x \in \mathbb{S}^1 : \quad x^2 < 0\}, \quad \varphi_3(x) = x^1, \\
\mathbb{U}_4 &= \{x \in \mathbb{S}^1 : \quad x^1 < 0\}, \quad \varphi_4(x) = x^2.
\end{aligned}$$

Очевидно, что совокупность областей $\{\mathbb{U}_1, \mathbb{U}_2, \mathbb{U}_3, \mathbb{U}_4\}$ является конечным открытым покрытием окружности $\mathbb{S}^1$. Четыре карты $\{(\mathbb{U}_1, \varphi_1), (\mathbb{U}_2, \varphi_2), (\mathbb{U}_3, \varphi_3), (\mathbb{U}_4, \varphi_4)\}$ представляют собой атлас. В области пересечения двух карт $\mathbb{U}_1 \cap \mathbb{U}_4$ функции преобразования координат имеют вид (см. рис. 3.1,*b*)

$$\begin{aligned}
x^{2'} &= \quad \sqrt{1 - (x^1)^2} > 0, \\
x^{1'} &= -\sqrt{1 - (x^2)^2} < 0,
\end{aligned}$$

где нештрихованные и штрихованные координаты относятся соответственно к областям $\mathbb{U}_1$ и $\mathbb{U}_4$. Аналогично выписываются функции склейки для всех других пересечений карт. Все функции склейки являются бесконечно дифференцируемыми. Это значит, что построенный атлас принадлежит классу $\mathcal{C}^\infty$. □

Пример 3.1.6. Тор $\mathbb{T}^n$ представляет собой топологическое произведение n окружностей,

$$\mathbb{T}^n = \underbrace{\mathbb{S} \times \mathbb{S} \times \cdots \times \mathbb{S}}_{n},$$

и является n-мерным компактным ориентируемым многообразием. □

Пример 3.1.7. *Проективным пространством* $\mathbb{RP}^n$ над полем вещественных чисел называется множество прямых евклидова пространства $\mathbb{R}^{n+1}$, проходящих через начало координат. Проективное пространство $\mathbb{RP}^n$ представляет собой многообразие размерности n. Его можно представлять себе как сферу $\mathbb{S}^n$ с отождествленными диаметрально противоположными точками. Действительно, любая прямая, проходящая через начало координат, пересекает единичную сферу с центром в начале координат ровно в двух диаметрально противоположных точках. Обратно, любая из этих двух точек однозначно определяет прямую, проходящую через начало координат. Таким образом

$$\mathbb{RP}^n \approx \frac{\mathbb{S}^n}{\mathbb{Z}_2},$$

где циклическая группа $\mathbb{Z}_2$ состоит из двух элементов $\{1, -1\}$. Проективное пространство $\mathbb{RP}^n$ можно представить также в виде полусферы $x \in \mathbb{S}^n$, $x^n \geq 0$, у которой отождествлены диаметрально противоположные "граничные" точки, т.е. точки $(n-1)$-мерной сферы

$$\mathbb{S}^{n-1} = \{x \in \mathbb{S}^n : \; x^n = 0\}.$$

Рассмотрим замкнутую кривую, проходящую через одну из "граничных" точек. На рис. 3.2,*a*, для наглядности изображена проективная плоскость $\mathbb{RP}^2$ в трехмерном евклидовом пространстве и возможная кривая. Выберем ортонормированный базис вдоль кривой, включающий единичный касательный вектор e_1. При прохождении через "граничную" точку p касательный вектор e_1 не меняет ориентации относительно

кривой, в то время как все остальные базисные векторы $e_2, e_3, \ldots$ меняют направление. Это значит, что ориентация ортонормированного базиса при прохождении вдоль этой замкнутой кривой изменится при четных n и сохранится при нечетных n. Если замкнутая кривая целиком лежит в верхней полусфере, то ориентация базиса вдоль кривой сохраняется. Тем самым мы показали, что проективные пространства четного числа измерений неориентируемы, а нечетного числа измерений – ориентируемы. □

Рис. 3.2: *a)* Проективная плоскость $\mathbb{RP}^2$ как полусфера в $\mathbb{R}^3$. Показан замкнутый путь, проходящий через граничную точку p, и перенос базиса вдоль пути. *b)* Две пересекающиеся прямые не являются многообразием.

Пример 3.1.8. Продемонстрируем отличие топологического пространства от многообразия. Пусть множество точек на евклидовой плоскости состоит из двух пересекающихся прямых $y^2 - x^2 = 0$, изображенных на рис. 3.2,*b*. Пусть топология индуцирована вложением. Тогда это множество представляет собой связное хаусдорфово топологическое пространство. В то же время оно не является многообразием, потому что окрестность точки пересечения прямых нельзя взаимно однозначно отобразить на интервал вещественной прямой $\mathbb{R}$. □

Пример 3.1.9. Рассмотрим прямое произведение двух прямых $\mathbb{M} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}_{\text{D}}$. Будем считать, что на первом сомножителе задана естественная топология а на втором – дискретная, что отмечено индексом D. Тогда, как множество, многообразие $\mathbb{M}$ совпадает с двумерным евклидовым пространством $\mathbb{R}^2$, а как многообразие – нет. База топологии $\mathbb{M}$ состоит из всех интервалов на всех прямых, параллельных оси x и проходящих через все точки оси y (см. рис. reffsloen). На каждой прямой база топологии счетна. Рассмотрим открытый диск $\mathbb{D} \subset \mathbb{M}$. Так же как и в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^2$, он является открытым множеством, но на этот раз как объединение несчетного числа интервалов. Рассмотрим отображение многообразия $\mathbb{M}$ на евклидову плоскость $\mathbb{R}^2$, которое задается простым отождествлением координат $\mathbb{M} \ni (x, y) \xrightarrow{\varphi} (x, y) \in \mathbb{R}^2$. Это отображение биективно и непрерывно. Однако обратное отображение φ^{-1} не является непрерывным, т.к. на евклидовой плоскости не существует открытого множества $\mathbb{U} \subset \mathbb{R}^2$, образ которого при обратном отображении $\varphi^{-1}(\mathbb{U})$ лежал бы в интервале. Поэтому отображение φ не является гомеоморфизмом и множество $\mathbb{M} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}_{\text{D}}$ не является двумерным многообразием. По построению, множество $\mathbb{M}$ является одномерным несвязным многообразием, состоящим из несчетного числа одномерных многообразий – прямых $\mathbb{R}$.

Рассмотренный пример показывает, что на одном и том же множестве точек можно задавать различные структуры. Мы говорим, что на евклидовой плоскости $\mathbb{R}^2$, рассматриваемой, как двумерное многообразие, задана структура слоения, т.е. мы представляем плоскость в виде объединения несчетного числа одномерных подмногообразий – прямых $\mathbb{R}$. Каждая прямая является листом слоения, которые параметризуются точками другой прямой $\mathbb{R}_{\text{D}}$. □

В дальнейшем мы будем изучать различные свойства многообразий. Условимся о терминологии. Будем говорить, что данное свойство выполняется на многообразии $\mathbb{M}$ *глобально*, если оно выполнено во всех точках $x \in \mathbb{M}$. Гораздо чаще встречаются свойства, которые выполнены только *локально*. А именно, для каждой точки $x \in \mathbb{M}$

Рис. 3.3: Отображение φ объединения $\mathbb{M}$ несчетного числа прямых, параллельных оси x, на евклидову плоскость $\mathbb{R}^2$.

существует координатная окрестность $\mathbb{U}_x$ такая, что данное свойство выполнено на $\mathbb{U}_x$. В этом случае можно говорить, что данное свойство выполнено в фиксированной системе координат. Конечно, любое свойство, выполненное глобально, справедливо и локально, но не наоборот.

Кроме этого, если употребляется слово многообразие без эпитета дифференцируемое, вещественно аналитическое или топологическое, то всегда подразумевается гладкое $\mathbb{C}^\infty$ многообразие.

3.2 Разбиение единицы

При изучении многообразий нам необходимо склеивать карты атласов и использовать разбиение единицы. Как уже отмечалось, для существования разбиения единицы нам достаточно рассматривать паракомпактные многообразия. Счетность базы многообразия является достаточным условием паракомпактности.

Теорема 3.2.1. *Паракомпактное топологическое пространство является объединением семейства связных паракомпактных топологических пространств, которые являются счетными в бесконечности.*

Доказательство. См., например, [?]. □

Определение. Мы говорим, что топологическое пространство $\mathbb{M}$ является *счетным в бесконечности*, если существует счетное семейство компактных множеств $\mathbb{U}_i$, $i \in \mathbb{N}$, таких, что

$$\mathbb{U}_1 \subset \mathsf{int}\,\mathbb{U}_2 \subset \mathbb{U}_2 \subset \ldots \subset \mathbb{U}_i \subset \mathsf{int}\,\mathbb{U}_{i+1} \subset \mathbb{U}_{i+1} \ldots$$

и

$$\mathbb{M} = \bigcup_{i=1}^{\infty} \mathbb{U}_i.$$

□

Теорема 3.2.2. *Любое покрытие паракомпактного многообразия имеет счетное локально конечное измельчение.*

Доказательство. Существование локально конечного измельчения, которое также является покрытием, входит в определение паракомпактности и его доказывать не надо. Нетривиальность утверждения теоремы в том, что локально конечное покрытие можно выбрать счетным. Доказательство приведено в [?]. □

Определение. *Носителем* функции f, заданной на многообразии $\mathbb{M}$, называется замыкание множества тех точек, в которых она отлична от нуля. Носитель функции обозначается $\mathsf{supp}\, f \subset \mathbb{M}$. Если носитель функции компактен, то функция называется *финитной*. □

Определение. *Разбиением единицы*, подчиненным заданному покрытию $\{\mathbb{U}_i\}_{i\in I}$, называется семейство функций $\{f_i\}$, удовлетворяющих следующим условиям:

1) $\mathsf{supp}\, f_i \subset \mathbb{U}_i$ для всех i;
2) каждая точка имеет окрестность $\mathbb{W}$ такую, что $\mathbb{W} \cap \mathsf{supp}\, f_i = \emptyset$ за исключением конечного числа функций f_i;
3) $0 \le f_i \le 1, \quad \sum_i f_i = 1.$ □

Замечание. В данном определении покрытие произвольно и не обязательно счетное и локально конечное. Сумма в условии 3) определена, т.к. содержит только конечное число слагаемых в силу условия 2). □

Теорема 3.2.3 (Разбиение единицы). *На любом паракомпактном многообразии класса $\mathcal{C}^k$ существует $\mathcal{C}^k$ разбиение единицы, подчиненное заданному счетному локально конечному покрытию.*

Доказательство. См., например, [?, ?]. □

Замечание. Заметим, что разбиение единицы существует как для ориентируемых, так и для неориентируемых многообразий. □

Для заданного покрытия $\{\mathbb{U}_i\}$ существует много разбиений единицы. Пусть $\{f_i\}$ и $\{g_j\}$ – два разбиения единицы, подчиненные покрытию $\{\mathbb{U}_i\}$. Тогда очевидна формула

$$\sum_i f_i \sum_j g_j = \sum_{ij} f_i g_j = \sum_j g_j \sum_i f_i.$$

Существование разбиения единицы на многообразии является эффективным средством доказательства существования глобальных структур на многообразии путем склеивания этих структур, заданных в отдельных картах. Например, в теореме 5.1.1 доказано существование римановой метрики на произвольном многообразии.

Замечание. Условие паракомпактности, являющееся достаточным условием существования разбиения единицы можно заменить на вторую аксиому счетности, утверждающую существование счетной базы топологии. Если потребовать, чтобы многообразие $\mathbb{M}$ являлось хаусдорфовым топологическим пространством, удовлетворяющим второй аксиоме счетности, то отсюда будет следовать паракомпактность многообразий и, кроме того, нормальность и метризуемость. (Доказательство метризуемости топологических пространств, удовлетворяющих второй аксиоме счетности, приведено, например, в [?].) □

3.3 Многообразия с краем

Определение. Пусть $f(x) \in C^\infty(M)$ – гладкая функция на многообразии $\mathbb{M}$. Тогда замкнутое множество $\mathbb{A} \subset \mathbb{M}$, выделяемое в многообразии $\mathbb{M}$ неравенством $f(x) \le 0$ (или $f(x) \ge 0$) называется *многообразием с краем*. Подмногообразие $\partial\mathbb{A} \subset \mathbb{M}$, задаваемое уравнением $f(x) = 0$, называется *краем* $\mathbb{A}$. Мы предполагаем, что градиент функции f на крае $\partial\mathbb{A}$ отличен от нуля. □

Если функция положительна, $f > 0$, на $\mathbb{M}$, то край пустой, $\partial\mathbb{A} = \emptyset$, и $\mathbb{A} = \mathbb{M}$. Нетривиальное многообразие с краем получается, если область значений функции f включает нуль.

Пример 3.3.1. Замыкание любой ограниченной открытой области $\mathbb{U} \subset \mathbb{R}^n$ в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$ является многообразием с краем $\overline{\mathbb{U}}$. При этом краем является граница области: $\partial\overline{\mathbb{U}} = \overline{\mathbb{U}} \setminus \mathbb{U}$. □

Замечание. Условие отличия градиента функции от нуля на крае является достаточным условием того, что край является $(n-1)$-мерным подмногообразием в $\mathbb{M}$. По сути дела это определение является инвариантным обобщением понятия области и ее границы в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$. Если многообразие с краем можно покрыть одной картой, то оба понятия в точности совпадают. □

Пример 3.3.2. Ориентируемым многообразием с краем является цилиндр конечной высоты, который получается при склейке двух краев прямоугольника, показанного на рис. 3.4,*a*. При этом направление склеиваемых сторон, которое показано стрелками, сохраняется. Цилиндр можно покрыть двумя картами, которые пересекаются по двум областям, и в обеих областях якобиан перехода положителен. Краем цилиндра являются две окружности. □

Рис. 3.4: Цилиндр *(a)* и лента Мебиуса *(b)* получаются при склеивании двух сторон прямоугольника с сохранением и изменением направления сторон при склейке, как показано стрелками.

Пример 3.3.3. Если перед склейкой прямоугольника изменить направление одной из сторон, как показано стрелками на рис. 3.4,*b*, то получится неориентируемая поверхность с краем, которая называется *листом Мебиуса*. Лист Мебиуса также можно покрыть двумя картами, пересекающимися по двум областям, но в этом случае якобиан перехода в этих областях будет иметь разный знак. У листа Мебиуса край диффеоморфен одной окружности и является связным. Окружность, возникающая при склеивании отрезка $[A, B]$, называется центральной. □

Если $\mathbb{A}$ – многообразие с краем, то разность $\mathbb{A}\setminus\partial\mathbb{A}$ также является многообразием, но уже без края.

Дадим эквивалентное определение многообразия с краем. Обозначим полупространство евклидова пространства $\mathbb{R}^n$, определяемое уравнением $x^n > 0$, через $\mathbb{R}^n_+$. Будем считать, что на замыкании $\overline{\mathbb{R}}^n_+ \subset \mathbb{R}^n$ задана индуцированная топология. При этом открытые множества в $\overline{\mathbb{R}}^n_+$ могут как содержать, так и не содержать точки края, определяемого уравнением $x^n = 0$.

Определение. Топологическое хаусдорфово пространство $\mathbb{M}$ со счетной базой, каждая точка которого имеет окрестность, гомеоморфную открытому множеству в $\overline{\mathbb{R}}^n_+$, называется n-мерным *многообразием с краем*. Точки, которые имеют окрестность, гомеоморфную $\mathbb{R}^n$, называются *внутренними*. Остальные точки называются *краевыми*. □

Дифференцируемая структура на многообразии с краем вводится так же как и на многообразии без края. Как правило мы рассматриваем гладкие дифференцируемые структуры.

Теорема 3.3.1. *Пусть* $\mathbb{M}$, $\dim\mathbb{M} = n$, *– многообразие с краем. Если край* $\partial\mathbb{M}$ *не является пустым, то* $\partial\mathbb{M}$ *представляет собой многообразие размерности* $n-1$ *и без края* $\partial(\partial\mathbb{M}) = \emptyset$.

Определение. Многообразие с краем $\mathbb{M}$ называется *ориентируемым*, если ориентируемо соответствующее ему многообразие без края $\mathbb{M} \setminus \partial\mathbb{M}$. □

Теорема 3.3.2. *Если многообразие с краем $\mathbb{M}$ ориентируемо, то его край $\partial\mathbb{M}$ также является ориентируемым многообразием. Ориентация на $\mathbb{M}$ индуцирует каноническую ориентацию края $\partial\mathbb{M}$.*

Доказательство. Пусть на $\mathbb{M} \setminus \partial\mathbb{M}$ задана какая либо ориентация, которую назовем положительной. Рассмотрим естественное вложение края $f : \partial\mathbb{M} \to \mathbb{M}$. Тогда дифференциал отображения действует на касательные векторы $f_* : \mathbb{T}_x(\partial\mathbb{M}) \to \mathbb{T}_x(\mathbb{M})$. Для каждой точки края $x \in \partial\mathbb{M}$ выберем первый базисный вектор $e_1 \in \mathbb{T}_x(\mathbb{M})$, $e_1 \notin \mathbb{T}_x(\partial\mathbb{M})$ таким образом, чтобы он был ориентирован наружу. Это значит, что для любой дифференцируемой функции, удовлетворяющей условиям $f(\partial\mathbb{M}) = 0$ и $f(\mathbb{M} \setminus \partial\mathbb{M}) \leq 0$, производная вдоль e_1 неотрицательна $e_1 f \geq 0$. Дополним этот вектор базисными векторами края $\{e_2, \ldots, e_n\}$ таким образом, чтобы базис $\{e_1, \ldots, e_n\}$ имел положительную ориентацию в $\mathbb{M}$. Тогда ориентация $\{e_2, \ldots, e_n\}$ задает *каноническую ориентацию* края. □

На языке дифференциальных форм задание согласованной ориентации многообразия $\mathbb{M}$ и его края $\partial\mathbb{M}$ означает следующее. Пусть $\{e^a\}$, $a = 1, \ldots, n$, – набор 1-форм, дуальных к базису e_a, построенному в доказательстве теоремы 3.3.2, $e^a(e_b) = \delta^a_b$. Поскольку 1-формы линейно независимы, то n-форма $e^1 \wedge e^2 \wedge \ldots \wedge e^n$ отлична от нуля и задает ориентацию на $\mathbb{M}$. Формы $e^2, \ldots, e^n$, по-построению, линейно независимы на крае $\partial\mathbb{M}$ и задают каноническую ориентацию края. В дальнейшем мы всегда предполагаем, что ориентация края $\partial\mathbb{M}$ индуцирована ориентацией самого многообразия $\mathbb{M}$.

Из определения края следует выражение для края прямого произведения двух многообразий (правило Лейбница)

$$\partial(\mathbb{M}_1 \times \mathbb{M}_2) = \partial\mathbb{M}_1 \times \mathbb{M}_2 \bigcup \mathbb{M}_1 \times \partial\mathbb{M}_2.$$

В моделях гравитации принято называть вселенную *замкнутой*, если она представляет собой компактное многообразие без края. *Открытая вселенная* является некомпактным многообразием без края. В общем случае будем называть компактное многообразие без края *замкнутым*. Такие многообразия являются, конечно, замкнутыми множествами в топологическом смысле. Однако термин замкнутый в данном определении и в определении замкнутого множества в топологии имеют разный смысл.

Пример 3.3.4. Прямая представляет собой замкнутое (и одновременно открытое) множество в естественной топологии. В то же время она не является замкнутым многообразием, поскольку некомпактна. □

3.4 Расслоения

В разделе 3.1 было сказано, что прямое произведение $\mathbb{M} \times \mathbb{F}$ двух дифференцируемых многообразий $\mathbb{M}$ и $\mathbb{F}$ также является дифференцируемым многообразием с дифференцируемой структурой, которая определяется дифференцируемыми структурами сомножителей. В настоящем разделе мы обобщим понятие прямого произведения.

Определение. *Расслоением* называется четверка $\mathbb{E}(\mathbb{M}, \pi, \mathbb{F})$, где $\mathbb{E}, \mathbb{M}, \mathbb{F}$ – многообразия, а $\pi : \mathbb{E} \to \mathbb{M}$ – дифференцируемое отображение, которые удовлетворяют следующим условиям:
1) каждая точка $x \in \mathbb{M}$ имеет окрестность $\mathbb{U}_x$ такую, что существует диффеоморфизм $\chi : \pi^{-1}(\mathbb{U}_x) \to \mathbb{U}_x \times \mathbb{F}$ (локальная тривиальность);
2) композиция отображений $\pi \circ \chi^{-1} : \mathbb{U}_x \times \mathbb{F} \to \mathbb{M}$ есть проекция на первый сомножитель: $(y, v) \mapsto y$ для всех $y \in \mathbb{U}_x$ и $v \in \mathbb{F}$.
Многообразие $\mathbb{E}$ называется *пространством расслоения*, $\mathbb{M}$ – *базой* расслоения, $\mathbb{F}$ – *типичным слоем* и π – *проекцией*. □

Поскольку отображение χ в условии 1) является диффеоморфизмом, то

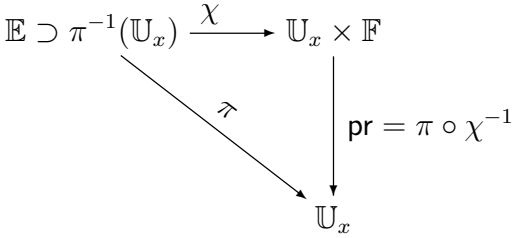
$$\dim \mathbb{E} = \dim \mathbb{M} + \dim \mathbb{F}.$$

Мы предполагаем, что все многообразия являются дифференцируемыми. Кроме того база предполагается связным многообразием. В противном случае расслоения можно рассматривать над каждой связной компонентой. Расслоение также называется *расслоенным пространством* и обозначается $\mathbb{E} \xrightarrow{\pi} \mathbb{M}$. Мы считаем, что проекция π является дифференцируемым отображением на базу $\mathbb{M}$, т.е. сюрьективным. В противном случае можно рассмотреть расслоение с базой $\pi(\mathbb{E}) \subset \mathbb{M}$. Поскольку отображение π непрерывно, то согласно теореме 2.4.3 прообраз $\pi^{-1}(x)$ является замкнутым подмногообразием в $\mathbb{E}$, которое называется *слоем* над точкой базы $x \in \mathbb{M}$.

В дальнейшем, для краткости, мы иногда будем обозначать расслоение одной буквой $\mathbb{E}$. На рис. 3.5 схематично показана структура расслоения.

Рис. 3.5: Схематичное изображение структуры расслоения ffibun

Замечание. Атласы, заданные на базе и типичном слое, определяют атлас на пространстве расслоения в силу локальной тривиальности расслоения. Тем самым первое условие в определении расслоения является достаточным для того, чтобы дифференцируемые структуры на трех многообразиях $\mathbb{E}, \mathbb{M}$ и $\mathbb{F}$ были согласованы между собой. Второе требование является условием коммутативности диаграммы



где pr – естественная проекция прямого произведения $\mathbb{U}_x \times \mathbb{F} \xrightarrow{\mathsf{pr}} \mathbb{U}_x$ на первый сомножитель. В общем случае это могло бы быть не так. В приведенной диаграмме окрестность $\mathbb{U}_x$ нельзя заменить на все многообразие $\mathbb{M}$, так как отображение χ определено локально. □

Пример 3.4.1. Прямое произведение двух многообразий $\mathbb{E} = \mathbb{M} \times \mathbb{F}$ с проекцией на первый сомножитель $\mathbb{M} \times \mathbb{F} \xrightarrow{\pi} \mathbb{M}$ является расслоением с базой $\mathbb{M}$ и типичным слоем $\mathbb{F}$, которое называется *тривиальным*. С равным успехом четверка $\mathbb{M} \times \mathbb{F} \xrightarrow{\pi'} \mathbb{F}$ с проекцией на второй сомножитель является тривиальным расслоением с базой $\mathbb{F}$ и типичным слоем $\mathbb{M}$. □

Многообразия $\mathbb{M}, \mathbb{F}, \mathbb{E}$ могут быть как с краем, так и без края. Мы допускаем также в качестве базы или типичного слоя 0-мерные многообразия, т.е. конечные или счетные наборы точек с дискретной топологией.

По-построению, пространство расслоения $\mathbb{E}$ представляет собой объединение несчетного числа слоев, $\mathbb{E} = \bigcup_{x\in\mathbb{M}} \pi^{-1}(x)$, каждый из которых диффеоморфен типичному слою $\mathbb{F}$ и "нумеруется" точкой базы. Это – частный случай слоения.

Как было отмечено, дифференцируемые структуры на базе и слое согласованы с дифференцируемой структурой на пространстве расслоения $\mathbb{E}$. Опишем это более подробно. Пусть $\mathbb{E}(\mathbb{M}, \pi, \mathbb{F})$ – расслоение, $\mathsf{dim}\,\mathbb{M} = n$, $\mathsf{dim}\,\mathbb{F} = k$. По-определению, отображение χ действует на каждую точку $p \in \mathbb{E}$: $\chi(p) = \big(x = \pi(p), v\big) \in \mathbb{M} \times \mathbb{F}$. Поскольку база и типичный слой – многообразия, то существуют карты:

$$(\mathbb{U}_x, \varphi): \quad \mathbb{M} \supset \mathbb{U}_x \xrightarrow{\varphi} \varphi(\mathbb{U}_x) \subset \mathbb{R}^n,$$
$$(\mathbb{V}_v, \phi): \quad \mathbb{F} \supset \mathbb{V}_v \xrightarrow{\phi} \phi(\mathbb{V}_v) \subset \mathbb{R}^k.$$

Локально определено отображение из пространства расслоения $\mathbb{E}$ в евклидово пространство $\mathbb{R}^{n+k}$:

$$\rho: \ \chi^{-1}(\mathbb{U}_x \times \mathbb{V}_v) \ \to \ \varphi(\mathbb{U}_x) \times \phi(\mathbb{V}_v) \in \mathbb{R}^{n+k}$$

Таким образом, для каждой точки расслоения $p \in \mathbb{E}$ определена карта $\big(\chi^{-1}(\mathbb{U}_x \times \mathbb{V}_v), \rho\big)$. Определено также отображение, действующее из $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k$ в $\mathbb{R}^n$:

$$\tilde{\pi} = \varphi \circ \pi \circ \rho^{-1} : \varphi(\mathbb{U}_x) \times \phi(\mathbb{V}_v) \ni (y, w) \ \mapsto \ y \in \varphi(\mathbb{U}_x),$$

где $y \in \varphi(\mathbb{U}_x) \subset \mathbb{R}^n$ и $w \in \phi(\mathbb{V}_f) \subset \mathbb{R}^k$.

Определение. Дифференцируемое отображение $\mathbb{M} \xrightarrow{\sigma} \mathbb{E}$ называется *сечением* или *глобальным сечением* расслоения $\mathbb{E} \xrightarrow{\pi} \mathbb{M}$, если $\pi \circ \sigma = \mathsf{id}\,(\mathbb{M})$. Аналогичным образом, дифференцируемое отображение $\mathbb{U} \xrightarrow{\sigma} \mathbb{E}$, где $\mathbb{U}$ – открытое подмножество базы $\mathbb{M}$, называется *локальным сечением* расслоения $\mathbb{E} \xrightarrow{\pi} \mathbb{M}$, если $\pi \circ \sigma = \mathsf{id}\,(\mathbb{U})$. □

Локальные сечения существуют у любого расслоения – это функции со значениями в пространстве расслоения $\mathbb{E}$, которые определены в областях $\mathbb{U} \subset \mathbb{M}$. Глобальные сечения расслоений, как мы увидим ниже, существуют далеко не всегда.

Пример 3.4.2. Пусть $\mathbb{E} = \mathbb{M} \times \mathbb{R}$ – тривиальное расслоение, типичным слоем которого является поле вещественных чисел. Тогда множество всех гладких сечений $f(x)$, где $x \in \mathbb{M}$ и $f \in \mathbb{R}$ совпадает с множеством всех вещественнозначных бесконечно дифференцируемых функций $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{M})$ □

Пример 3.4.3 (Цилиндр). Цилиндр конечной высоты – это прямое произведение окружности на единичный отрезок $\mathbb{S}^1 \times \bar{\mathbb{I}}$. Его можно рассматривать как расслоение с базой $\mathbb{M} = \mathbb{S}^1$ и типичным слоем $\bar{\mathbb{I}}$. У этого расслоения существуют глобальные сечения – гладкие функции на окружности со значениями в единичном отрезке $\bar{\mathbb{I}}$. □

Пример 3.4.4 (Лист Мёбиуса). Лист Мебиуса, изображенный на рис.**??**, является расслоением с базой $\mathbb{S}^1$ и типичным слоем $\bar{\mathbb{I}}$. Это расслоение нетривиально. □

Пример 3.4.5 (Бутылка Клейна). Построение бутылки Клейна изображено на рис.**??**. Мы берем цилиндр конечной высоты и отождествляем точки граничных окружностей, предварительно отобразив точки окружности с одной стороны цилиндра относительно произвольного диаметра. Эту поверхность нельзя вложить в трехмерное евклидово пространство $\mathbb{R}^3$ и поэтому трудно представить. Бутылку Клейна можно рассматривать, как расслоение с базой $\mathbb{M} = \mathbb{S}^1$ и типичным слоем $\mathbb{F} = \mathbb{S}^1$. Это расслоение нетривиально. □

Пример 3.4.6. Пусть задана группа Ли $\mathbb{G}$ и ее нормальная подгруппа $\mathbb{H} \subset \mathbb{G}$. Рассмотрим отображение группового многообразия $\mathbb{G}$ на пространство правых (или левых) смежных классов $\pi : \mathbb{G} \to \mathbb{G}/\mathbb{H}$, определенное правилом $\pi(g) = \mathbb{H}g$, где $g \in \mathbb{G}$. Тогда $\mathbb{G} \xrightarrow{\pi} \mathbb{G}/\mathbb{H}$ – расслоение. Пространством расслоения является группа Ли $\mathbb{G}$, базой – факторгруппа $\mathbb{G}/\mathbb{H}$ и типичным слоем – нормальная подгруппа $\mathbb{H}$. Дифференцируемая структура на фактор пространстве $\mathbb{G}/\mathbb{H}$ будет определена позже в теореме 10.1.1. Если размерность группы равна размерности нормальной подгруппы, $\mathsf{dim}\,\mathbb{G} = \mathsf{dim}\,\mathbb{H}$, то базой является конечный или счетный набор точек, т.е. 0-мерное многообразие. □

Замечание. В определении расслоения общего вида мы не предполагаем наличия каких либо структур в типичном слое, кроме структуры дифференцируемого многообразия. В дальнейшем мы рассмотрим частные случаи расслоенных пространств, когда типичным слоем является векторное пространство (векторное расслоение) или группа Ли (главное расслоение). □

3.5 Скалярные поля и плотности

В моделях математической физики, как правило, постулируется, что пространство и пространство-время, в котором мы живем, являются многообразиями. Само по себе это очень глубокое предположение. Однако для построения физических моделей его недостаточно. Для описания движения и взаимодействия различных физических объектов в пространстве-времени необходимо задание дополнительных структур на многообразии. Такими структурами являются скалярные и векторные поля, r-формы, тензорные поля, метрика и связность, которые, в частности, характеризуются различными трансформационными свойствами при преобразовании координат. Начнем с простейшего объекта – скалярного поля (функции).

Рассмотрим вещественнозначную функцию f на многообразии $\mathbb{M}$, т.е. отображение

$$f : \quad \mathbb{M} \to \mathbb{R}. \tag{3.2}$$

Это отображение часто, особенно в физических приложениях, называют *скалярным полем* на $\mathbb{M}$. По-определению отображения (2.17) скалярное поле должно быть однозначно. Функция называется *дифференцируемой* класса $\mathcal{C}^k$, если отображение (3.2), заданное в координатах,

$$f \circ \varphi_i^{-1} : \quad \mathbb{R}^n \supset \varphi_i(\mathbb{U}_i) \;\to\; \mathbb{R}$$

k раз непрерывно дифференцируемо в каждой карте атласа $\{\mathbb{U}_i, \varphi_i\}$. Конечно, не имеет смысла говорить говорить о степени гладкости функции, которая превышает степень гладкости дифференцируемой структуры многообразия. В двух областях $\mathbb{U}_i$ и $\mathbb{U}_j$ она задается, соответственно, двумя функциями $f(x^\alpha)$ и $f'(x^{\alpha'})$ от n переменных. Если области пересекаются, то в области пересечения согласно (2.18) имеем

$$f'(x^{\alpha'}(x^\alpha)) = f(x^\alpha), \tag{3.3}$$

поскольку в каждой точке функция имеет только одно значение. Формулу (3.3) можно интерпретировать, как правило преобразования функции при замене координат $x^\alpha \to x^{\alpha'}(x^\alpha)$. Другими словами, значение функции после преобразования в точке $x^{\alpha'}$ равно ее прежнему значению в точке x^α.

Замечание. В дальнейшем мы будем позволять себе некоторую вольность в обозначениях. Запись $f(x)$ обозначает значение функции f в произвольной точке $x \in \mathbb{M}$ безотносительно какой либо карты. Это не есть функция n вещественных переменных. В то же время запись $f(x^\alpha)$ обозначает значение функции $f \circ \varphi^{-1}$ в точке $\{x^\alpha\} \in \mathbb{R}^n$. Это – обычная функция от n вещественных переменных (координат). Строго говоря, частная производная от функции на многообразии $\partial_\alpha f$ не определена, т.к. мы не знаем, что такое разность двух точек $x_1 - x_2$ на многообразии. Тем не менее мы будем употреблять запись $\partial_\alpha f$, принимая

$$\partial_\alpha f := \partial_\alpha (f \circ \varphi^{-1}).$$

Фактически это означает, что в каждой отдельно взятой карте мы отождествляем точки многообразия с точками евклидова пространства $x \sim \varphi(x) = \{x^\alpha\} \in \mathbb{R}^n$ и функции $f \sim f \circ \varphi^{-1}$. При проведении вычислений в одной карте это не приводит к какой либо путанице. □

Множество всех функций класса $\mathcal{C}^k$ на многообразии $\mathbb{M}$ обозначим $\mathcal{C}^k(\mathbb{M})$. Множество гладких (бесконечно дифференцируемых) функций обозначим $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{M})$. Скалярное поле называется *тривиальным*, если оно равно нулю на $\mathbb{M}$. *Носителем* функции f называется замыкание множества тех точек $x \in \mathbb{M}$, в которых $f(x) \neq 0$. По-определению, носитель f всегда замкнут в $\mathbb{M}$.

На множестве функций $\mathcal{C}^k(\mathbb{M})$ определим две поточечные операции: сложение и умножение,

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x), \qquad (fg)(x) = f(x)g(x).$$

То есть значения суммы и произведения двух функций в данной точке равно соответственно сумме и произведению значений этих функций в той же точке. Нетрудно проверить, что сумма и произведение двух функций снова дает функцию. По отношению к этим операциям функции образуют коммутативное кольцо. Кроме этого функции можно умножать на действительные числа. Вместе с операцией сложения множество функций образует векторное пространство над полем вещественных чисел. Таким образом, множество функций с тремя операциями (умножение на числа, сложение и умножение функций) образует коммутативную ассоциативную алгебру с единицей над полем вещественных чисел, которую так же будем обозначать $\mathcal{C}^k(\mathbb{M})$. Эта алгебра является бесконечномерной.

В разделе 2.5 было показано, что координаты точки евклидова пространства сами можно рассматривать, как набор функций. Для каждой карты $(\mathbb{U}, \varphi)$ многообразия $\mathbb{M}$ определен набор функций $x^\alpha(x)$, $\alpha = 1, \ldots, n$ от точки многообразия $x \in \mathbb{U}$,

$$\varphi(x) = \{x^\alpha(x)\} \in \mathbb{R}^n, \tag{3.4}$$

которые называются *координатными функциями*. Эти функции свои для каждой карты. Во многих случаях координатные функции, определенные на $\mathbb{U} \subset \mathbb{M}$, упрощают запись, позволяя опускать символ отображения $\varphi(x)$.

Определим локально новый геометрический объект – скалярную плотность h. При преобразовании координат можно умножить "функцию" на якобиан преобразования (2.21) в степени p:

$$h'(x^{\alpha'}(x^\alpha)) = J^p h(x^\alpha), \tag{3.5}$$

Геометрический объект с таким правилом преобразования при переходе между системами координат называется скалярной *плотностью степени* p, и мы будем писать $\deg h = p$. Если рассматривать преобразования (3.5) как преобразования значения функции в некоторой фиксированной точке, то они образуют группу, т.к. как

якобианы отличны от нуля, якобиан двух последовательных преобразований равен произведению якобианов, а якобиан обратного преобразования равен J^{-1}.

Строго говоря, скалярная плотность не является функцией в смысле определения (3.2), и мы не можем писать $h(x)$, где x – точка многообразия. Имеет смысл лишь запись $h(x^\alpha)$ для функции $h \circ \varphi^{-1}$, которая задана в координатном евклидовом пространстве. Несмотря на это, использование скалярных плотностей, например, при интегрировании, бывает удобным. Кроме того, производить вычисления с плотностями часто бывает проще, чем с тензорами, как, например, в общей теории относительности.

Забегая вперед, отметим, что поскольку определитель репера $e = \det e_\alpha{}^a \neq 0$ является плотностью веса -1, то произвольную скалярную плотность степени p можно представить в виде

$$h = e^{-p} f,$$

где $f = e^p h$ – скалярное поле (функция).

Замечание. Множество скалярных плотностей фиксированной степени алгебры не образует, т.к. произведение двух плотностей степеней p_1 и p_2 дает скалярную плотность степени $p_1 + p_2$. □

3.6 Векторные поля и 1-формы

3.6.1 Локальное определение

Начнем с локального определения векторных полей и 1-форм, которое является более наглядным. Рассмотрим многообразие $\mathbb{M}$, $\dim \mathbb{M} = n$. Ограничим наше рассмотрение двумя пересекающимися картами $(\mathbb{U}_i, \varphi_i)$ и $(\mathbb{U}_j, \varphi_j)$ с координатами x^α и $x^{\alpha'}$ соответственно. В области пересечения этих карт (или при преобразовании координат $x^\alpha \to x^{\alpha'}$) дифференциалы умножаются на матрицу Якоби, а частные производные – на ее обратную:

$$dx^{\alpha'} = dx^\alpha \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^\alpha}, \tag{3.6}$$

$$\partial_{\alpha'} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x^{\alpha'}} \partial_\alpha. \tag{3.7}$$

Матрицы преобразования дифференциалов и частных производных являются взаимно обратными по правилу дифференцирования сложных функций:

$$\frac{\partial x^\alpha}{\partial x^\beta} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x^{\alpha'}} \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^\beta} = \delta^\alpha_\beta. \tag{3.8}$$

Векторные поля и 1-формы на многообразии определяются, исходя из правила преобразования дифференциалов и частных производных. А именно, n гладких функций $X^\alpha(x)$, заданных на карте $(\mathbb{U}, \varphi)$ и преобразующихся по правилу (3.6),

$$X^{\alpha'} = X^\alpha \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^\alpha}, \tag{3.9}$$

при преобразовании координат, называются *компонентами векторного* или *контравариантного векторного* поля. Аналогично, n гладких функций A_α, преобразующихся по правилу (3.7),

$$A_{\alpha'} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x^{\alpha'}} A_\alpha. \tag{3.10}$$

называются *компонентами ковекторного*, или *ковариантного векторного* поля, или 1-*формы*. 1-формы называются также *формами Пфаффа*. В общем случае (ко-)векторное поле имеет n независимых компонент. Каждая из функций X^α или A_α является компонентой векторного или ковекторного поля относительно координатных базисов $e_\alpha = \partial_\alpha$ и $e^\alpha = dx^\alpha$. Смысл обозначения координатных базисов частными производными и дифференциалами не случаен и будет ясен из дальнейшего. Для того, чтобы задать компоненты (ко-)векторного поля на всем многообразии, их необходимо задать в каждой карте некоторого атласа $\{\mathbb{U}_i\}$ таким образом, чтобы во всех областях пересечения карт $\mathbb{U}_i \cap \mathbb{U}_j$ они были связаны преобразованием (3.9).

Само векторное поле X на многообразии $\mathbb{M}$ является инвариантным геометрическим объектом и не зависит от выбора системы координат. Выше мы определили *компоненты* векторного поля на многообразии $\mathbb{M}$ путем их задания в некотором атласе. Далее мы должны показать, что таким образом определенный геометрический объект – векторное поле – не зависит от выбора атласа. Это также обеспечено правилом преобразования (3.9). Таким образом, для задания векторного поля X на многообразии $\mathbb{M}$ достаточно задать его компоненты в некотором атласе и указать правило преобразования (3.9) или (3.10). Аналогично дается глобальное определение ковекторного поля.

Пример 3.6.1. Если векторное поле имеет нулевые компоненты в одной системе координат, то они равны нулю и во всех других системах. Такое векторное поле называется *тривиальным*. Это единственное векторное поле, компоненты которого инвариантны относительно преобразований координат. □

Пример 3.6.2. Дифференциалы dx^α, рассматриваемые как функции от точки $x \in \mathbb{U}$, являются компонентами гладкого векторного поля. Это векторное поле определено в произвольной карте, а в областях пересечения карт справедливо равенство (3.6). Сами координатные функции $x^\alpha(x)$, хотя и имеют векторный индекс, векторного поля не образуют. Это – набор скалярных функций. □

Пример 3.6.3. Частные производные от произвольной функции $f \circ \varphi$ на образе $\varphi(\mathbb{U}) \subset \mathbb{R}^n$ являются компонентами ковариантного векторного поля $\{\partial_\alpha f\}$, которое называется градиентом функции. Это ковекторное поле определено в произвольной карте. □

Пример 3.6.4. Примером векторного поля на кривой $\gamma \in \mathbb{M}$ является вектор скорости (2.8). Действительно, при преобразовании координат компоненты вектора скорости $\dot{x}^\alpha$ преобразуются, как дифференциалы. При этом вектор скорости рассматривается в точке кривой $\gamma \in \mathbb{M}$. В то же время сами координатные функции $x^\alpha(t)$ определены на отрезке $t \in [0, 1]$, а не на многообразии и векторного поля не образуют. Векторное поле скорости называется также *касательным* векторным полем к кривой γ. □

Преобразования векторных полей (3.9) и 1-форм (3.10) различны, поэтому контравариантные и ковариантные индексы необходимо различать и они всегда будут писаться, соответственно, сверху и снизу.

Преобразования векторов (3.9) и 1-форм (3.10) линейны и однородны, причем матрица $\partial x^\alpha / \partial x^{\alpha'}$ в каждой точке многообразия невырождена и поэтому принадлежит группе невырожденных матриц $\mathbb{GL}(n, \mathbb{R})$. То есть каждому преобразованию координат соответствует $\mathbb{GL}(n, \mathbb{R})$ преобразование компонент векторного поля в касательном пространстве. Поскольку элементы группы $\mathbb{GL}(n, \mathbb{R})$ зависят от точки

многообразия, то такие преобразования называются локальными. Обратное утверждение, вообще говоря, неверно. Не каждому локальному $\mathbb{GL}(n,\mathbb{R})$ преобразованию компонент векторного поля можно сопоставить некоторое преобразование координат. Это видно из подсчета параметров: локальное $\mathbb{GL}(n,\mathbb{R})$ преобразование параметризуется n^2 функциями по числу элементов $n\times n$ матрицы, в то время как преобразования координат параметризуются n функциями.

Из закона преобразования частных производных (3.7) и дифференциалов (3.6) следует, что суммы

$$X = X^\alpha \partial_\alpha, \tag{3.11}$$

$$A = dx^\alpha A_\alpha \tag{3.12}$$

инвариантны относительно преобразований координат.

Замечание. Скажем несколько слов об обозначениях. Там, где это возможно, мы будем записывать индексы суммирования по правилу "с десяти до четырех", т.е. сначала будем писать верхний индекс, а затем – нижний. Это правило является следствием записи *оператора внешнего дифференцирования* в виде

$$d = dx^\alpha \partial_\alpha. \tag{3.13}$$

В дифференциальной геометрии, когда все координаты являются вещественными числами, это правило не играет существенной роли, т.к. компоненты векторов и 1-форм можно менять местами. Однако, если часть координат антикоммутирует, то порядок индексов существенен, и необходимо придерживаться какого-либо фиксированного правила. Правило "с десяти до четырех" не является единственным, однако оно широко используется при построении моделей супергравитации в суперпространстве, где часть координат является антикоммутирующей. □

Дифференцируемое векторное поле, заданное в какой нибудь одной карте $\mathbb{U} \subset \mathbb{M}$, не всегда может быть продолжено до дифференцируемого векторного поля на всем многообразии.

Пример 3.6.5. Рассмотрим сферу $\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$ единичного радиуса, вложенную в евклидово пространство (рис.**??**):

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1, \qquad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3.$$

Рассмотрим открытую верхнюю полусферу:

$$\mathbb{U} = \{(x,y,z) \in \mathbb{S}^2 : \ z > 0\}.$$

Зададим на $\mathbb{U}$ систему координат, спроектировав точки полусферы на плоскость x, y: $(x,y,z) \to (x,y)$. Таким образом мы построили карту $(\mathbb{U},\varphi)$. Зададим в этой карте векторное поле $X = \partial_y$. В координатном базисе оно имеет компоненты $(0,1)$ и поэтому является гладким векторным полем на $\mathbb{U}$. Точки сферы $(1,0,0)$ и $(-1,0,0)$ являются предельными для $\mathbb{U}$ и существенно особыми точками для векторного поля X, поскольку предел зависит от пути, по которому мы стремимся к данным точкам. Пока речь идет об открытом подмножестве $\mathbb{U}$ проблем не возникает, т.к. указанные точки не принадлежат $\mathbb{U}$. Однако любое продолжение векторного поля на окрестность, содержащую любую из точек $(1,0,0)$ и $(-1,0,0)$ приведет к векторному полю с особенностью. В данном случае особенность означает не обращение компонент векторного поля в бесконечность, а то, что в указанных точках векторное поле не будет однозначно определено. □

3.6.2 Глобальное определение векторных и ковекторных полей

Дадим глобальное определение векторных полей и 1-форм на многообразии $\mathbb{M}$, как это обычно делается в современных курсах дифференциальной геометрии. Рассмотрим кривую $\gamma_1 : [-a, a] \ni t \to \mathbb{M}$, $a \in \mathbb{R}_+$, проходящую через некоторую точку $p \in \mathbb{M}$. Пусть $(\mathbb{U}, \varphi)$ – карта, содержащая точку $p \in \mathbb{U} \subset \mathbb{M}$. Тогда в координатах кривая задается набором функций:

$$\varphi \circ \gamma_1 = \{x_1^\alpha(t)\}, \quad p = \gamma_1(0).$$

Для определенности мы выбрали такую параметризацию кривой, что точке p соответствует значение $t = 0$. Рассмотрим другую кривую γ_2, также проходящую через точку p,

$$\varphi \circ \gamma_2 = \{x_2^\alpha(t)\}, \quad p = \gamma_2(0).$$

Мы говорим, что две кривые касаются друг друга в точке p, если векторы скорости кривых в этой точке совпадают:

$$\dot{x}_1^\alpha|_{t=0} = \dot{x}_2^\alpha|_{t=0}, \qquad \alpha = 1, \ldots, n.$$

Поскольку векторы скорости при преобразованиях координат преобразуются одинаково, то данное определение не зависит от карты, покрывающей точку $p \in \mathbb{M}$. Касание кривых в точке p является отношением эквивалентности в классе всех кривых, проходящих через эту точку. Обозначим класс эквивалентности кривых, проходящих через точку p, который соответствует некоторому представителю γ, квадратными скобками $[\gamma_p]$. Каждый класс эквивалентности в координатах взаимно однозначно характеризуется набором чисел $\{\dot{x}^\alpha(0)\}$.

Определение. *Касательным вектором* $X_{(\gamma)}(p)$ к многообразию $\mathbb{M}$ в точке $p \in \mathbb{M}$ называется класс эквивалентности кривых $[\gamma_p]$, проходящих через эту точку. Множество всех касательных векторов в точке p называется *касательным пространством* к многообразию в точке p и обозначается $\mathbb{T}_p(\mathbb{M})$. Объединение всех касательных пространств

$$\mathbb{T}(\mathbb{M}) = \bigcup_{p \in \mathbb{M}} \mathbb{T}_p(\mathbb{M}). \tag{3.14}$$

называется *касательным расслоением* с базой $\mathbb{M}$ и естественной проекцией $\pi : \mathbb{T}(\mathbb{M}) \to \mathbb{M}$, которая задана отображением $(p, [\gamma_p]) \to p$. Слоем касательного расслоения в точке p является касательное пространство $\pi^{-1}(p) = \mathbb{T}_p(\mathbb{M})$. *Векторным полем* на многообразии $\mathbb{M}$ называется сечение касательного расслоения $\mathbb{T}(\mathbb{M})$. □

То, что каждый слой является многообразием и диффеоморфен n-мерному векторному пространству, мы покажем чуть ниже.

Пусть f – функция на многообразии $\mathbb{M}$. Тогда каждому вектору $X_{(\gamma)}$ в точке p мы ставим в соответствие производную функции вдоль вектора

$$X_{(\gamma)} f|_p = \left.\frac{df(\gamma(t))}{dt}\right|_{t=0} = X^\alpha(p) \partial_\alpha (f \circ \varphi^{-1})\big|_{t=0}, \tag{3.15}$$

где $X^\alpha(p) = \dot{x}^\alpha(0)$ – компоненты вектора $X(p)$ в точке p в некоторой карте. Поскольку векторы скорости для всех кривых из одного класса эквивалентности совпадают, то вектор $X(p)$ в точке p взаимно однозначно характеризуется своими компонентами

$\{X^\alpha(p)\}$. Отсюда следует, что векторное поле в произвольной карте $(\mathbb{U},\varphi)$ взаимно однозначно задается своими компонентами $X(x)=\{X^\alpha(x)\}$, $x\in\mathbb{U}$. При этом компоненты векторного поля при переходе от одной системы координат к другой преобразуются по-правилу (3.9), что является следствием правила дифференцирования сложных функций. Таким образом, локальное определение векторного поля, данное ранее, согласуется с глобальным определением настоящего раздела.

В каждой точке многообразия $p\in\mathbb{M}$ множество векторов $\mathbb{T}_p(\mathbb{M})$ обладает естественной структурой векторного пространства.

Теорема 3.6.1. *Касательное пространство $\mathbb{T}_p(\mathbb{M})$ имеет естественную структуру вещественного векторного пространства той же размерности, что и само многообразие,* $\mathsf{dim}\,\mathbb{T}_p(\mathbb{M})=\mathsf{dim}\,\mathbb{M}=n$.

Доказательство. Рассмотрим два вектора $X_1=[\gamma_1]\in\mathbb{T}_p(\mathbb{M})$ и $X_2=[\gamma_2]\in\mathbb{T}_p(\mathbb{M})$ в произвольной точке $p\in\mathbb{M}$. Пусть $(\mathbb{U},\varphi)$ – координатная окрестность точки p. Пусть $\gamma_1\in[\gamma_1]$ и $\gamma_2\in[\gamma_2]$ – две произвольные кривые из классов эквивалентности $[\gamma_1]$ и $[\gamma_2]$. Тогда в евклидовом пространстве определены две кривые $\varphi\circ\gamma_1$ и $\varphi\circ\gamma_2$, которые задаются набором функций $\varphi\circ\gamma_1=\{x_1^\alpha(t)\}$ и $\varphi\circ\gamma_2=\{x_2^\alpha(t)\}$. Поскольку координаты являются вещественными числами, то их можно складывать и умножать. Определим сумму двух векторов и умножение на число $a\in\mathbb{R}$ как следующие классы эквивалентности

$$X_1+X_2=[\varphi^{-1}\circ(\varphi\circ\gamma_1+\varphi\circ\gamma_2)],$$
$$aX=[\varphi^{-1}\circ(a\varphi\circ\gamma)].$$

Касательные векторы к кривым $\varphi\circ\gamma_1+\varphi\circ\gamma_2$ и $a\varphi\circ\gamma$ в точке p имеют, соответственно, компоненты: $\{\dot{x}_1^\alpha(0)+\dot{x}_2^\alpha(0)\}$ и $\{a\dot{x}^\alpha(0)\}$. Это определение суммы векторов и умножения на числа не зависит от выбора карты $(\mathbb{U},\varphi)$ и представителя $\gamma\in[\gamma]$. Тем самым касательное пространство $\mathbb{T}_p(\mathbb{M})$ снабжается структурой векторного пространства. Поскольку каждый вектор $X(p)$ в карте взаимно однозначно задается набором n чисел $\{X^\alpha(p)\}$, то размерность касательного пространства совпадает с размерностью самого многообразия, $\mathsf{dim}\,\mathbb{T}_p(\mathbb{M})=\mathsf{dim}\,\mathbb{M}=n$. □

Таким образом, мы установили, что касательное пространство $\mathbb{T}_p(\mathbb{M})$ в каждой точке многообразия имеет естественную структуру векторного пространства $\mathbb{R}^n$. Определим в этом векторном пространстве евклидову топологию, которая является единственной топологией, согласованной с линейной структурой. Тем самым касательное пространство $\mathbb{T}_p(\mathbb{M})$ так же является многообразием. В дальнейшем мы всегда предполагаем, что касательное пространство $\mathbb{T}_p(\mathbb{M})$ снабжено естественной структурой векторного пространства $\mathbb{R}^n$ и евклидовой топологией.

Типичным слоем касательного расслоения $\mathbb{T}(\mathbb{M})\xrightarrow{\pi}\mathbb{M}$ является евклидово пространство $\mathbb{R}^n$, на котором введена структура векторного пространства. Это частный случай векторных расслоений, рассмотренных в разделе **??**.

Касательное расслоение является многообразием размерности $2n$. При этом, если на базе $\mathbb{M}$ задана дифференцируемая структура класса $\mathcal{C}^k$, $k\geq 1$, то касательное расслоение $\mathbb{T}(\mathbb{M})$ является дифференцируемым многообразием класса $\mathcal{C}^{k-1}$. Понижение класса дифференцируемости связано с тем, что, если функции преобразования координат принадлежат классу $\mathcal{C}^k$, то матрица Якоби преобразования координат, которая действует в касательном пространстве, принадлежит классу $\mathcal{C}^{k-1}$.

Пусть $\mathbb{M}$ – гладкое многообразие. Векторное поле $X(x)$ называется гладким, если в любой карте атласа $\{\mathbb{U}_i, \varphi_i\}$ компоненты $X^\alpha(x)$, задающие векторное поле, являются гладкими функциями. Множество всех гладких векторных полей на многообразии $\mathbb{M}$ обозначим $\mathcal{X}(\mathbb{M})$. Это множество, так же как и множество всех векторов в фиксированной точке $\mathbb{T}_p(\mathbb{M})$, обладает структурой вещественного линейного пространства с поточечным определением сложения и умножения на числа. Более того, вместо умножения на числа можно рассматривать умножение на гладкие функции $f \in \mathbb{C}^\infty(\mathbb{M})$. Легко проверить, что, если $X(x)$ – векторное поле, то $fX(x)$ так же является векторным полем. Таким образом, множество векторных полей $\mathcal{X}(\mathbb{M})$ является модулем над алгеброй гладких функций $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{M})$. Как линейное пространство множество векторных полей является бесконечномерным.

Теперь нетрудно дать глобальное определение ковариантных векторных полей.

Определение. Множество линейных функционалов на касательном пространстве $\mathbb{T}_p(\mathbb{M})$ в точке $p \in \mathbb{M}$ называется *кокасательным векторным пространством* и обозначается $\mathbb{T}^*_p(\mathbb{M})$. Объединение всех кокасательных пространств

$$\mathbb{T}^*(\mathbb{M}) = \bigcup_{p\in\mathbb{M}} \mathbb{T}^*_p(\mathbb{M}). \tag{3.16}$$

называется *кокасательным расслоением* с базой $\mathbb{M}$ и естественной проекцией $\pi : \mathbb{T}^*(\mathbb{M}) \to \mathbb{M}$. Слоем кокасательного расслоения в точке p является кокасательное пространство $\pi^{-1}(p) = \mathbb{T}^*_p(\mathbb{M})$. *Кокасательным векторным полем* или 1-*формой* на многообразии $\mathbb{M}$ называется сечение кокасательного расслоения $\mathbb{T}^*(\mathbb{M})$ или линейное отображение на множестве векторных полей

$$A : \ \mathcal{X}(\mathbb{M}) \ni X \to \mathcal{C}^\infty(\mathbb{M}). \qquad \square$$

В координатах ковекторное поле задается набором n функций $A_\alpha(x)$, которые при преобразовании координат преобразуются по правилу (3.10). Кокасательное векторное поле $A(x)$ называется гладким, если его компоненты $\{A_\alpha(x)\}$ являются гладкими функциями во всех картах. Кокасательное пространство $\mathbb{T}^*_p(\mathbb{M})$ в точке $p \in \mathbb{M}$ снабжается естественной структурой векторного пространства $\mathbb{R}^n$ и евклидовой топологией. Множество всех кокасательных векторных полей, которое обозначим $\Lambda^1(\mathbb{M})$, так же как и множество векторных полей $\mathcal{X}(\mathbb{M})$, образует модуль над алгеброй функций $\mathbb{C}^\infty(\mathbb{M})$.

Касательное пространство к прямому произведению двух многообразий $\mathbb{M} \times \mathbb{N}$ естественно изоморфно прямой сумме касательных пространств:

$$\begin{aligned} \mathbb{T}_{(p,q)}(\mathbb{M}\times\mathbb{N}) &\simeq \mathbb{T}_p(\mathbb{M}) \oplus \mathbb{T}_q(\mathbb{N}), \\ X &\mapsto (\pi_{1*}(X), \pi_{2*}(X)), \end{aligned}$$

где введены проекции на первый и второй сомножитель

$$\begin{aligned} \pi_1 : \ \mathbb{M}\times\mathbb{N} &\to \mathbb{M}, \\ (p,q) &\mapsto p, \\ \pi_2 : \ \mathbb{N}\times\mathbb{N} &\to \mathbb{N}, \\ (p,q) &\mapsto q, \end{aligned}$$

и π_{1*}, π_{2*} – дифференциалы соответствующих отображений (см. следующий раздел). Для доказательства достаточно спроектировать кривую в прямом произведении $\mathbb{M}\times\mathbb{N}$ на каждый из сомножителей.

3.6.3 Кокасательные векторные поля и ростки

Дадим также независимое определение кокасательного пространства 1-форм $\mathbb{T}^*_p(\mathbb{M})$ в точке $p \in \mathbb{M}$, без обращения к понятию дуального пространства. Рассмотрим алгебру гладких функций $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{M})$. Зафиксируем точку $p \in \mathbb{M}$. Будем считать две функции $f, g \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{M})$ эквивалентными $f \sim g$, если существует окрестность $\mathbb{U} \ni x$ такая, что $f|_{\mathbb{U}} = g|_{\mathbb{U}}$. Очевидно, что отношение $\sim$ является отношением эквивалентности в алгебре функций $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{M})$. Класс эквивалентности функции f обозначается $[f_p]$ и называется $\mathcal{C}^\infty$ *ростком* в точке $p \in \mathbb{M}$. Обозначим множество всех ростков в точке p через

$$\mathcal{C}_p = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{M})/\sim \; = \{[f_p] : \quad f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{M})\}. \tag{3.17}$$

Это множество естественным образом снабжается структурой векторного пространства, которая переносится из алгебры функций,

$$[f_p] + [g_p] = [f_p + g_p], \qquad a[f_p] = [af_p], \qquad a \in \mathbb{R}.$$

Таким образом, множество $\mathcal{C}^\infty$ ростков $\mathcal{C}_p$ в точке $p \in \mathbb{M}$ превращается в бесконечномерное вещественное векторное пространство.

Обозначим множество гладких кривых $\gamma(t)$, которые задаются набором функций $\{x^\alpha(t)\}$, проходящих через точку $\gamma(0) = p$, символом Γ_p. Тогда производная функции вдоль кривой в точке p равна (3.15). Выражение $\partial_\alpha(f \circ \varphi^{-1})$ в правой части равенства зависит только от ростка $[f] \in \mathcal{C}_x$, но не от представителя $f \in [f_p]$. Поэтому будем писать

$$X_{(\gamma)}[f_p] : \quad \mathcal{C}_p \to \mathbb{R}.$$

Это отображение линейно по росткам

$$X_{(\gamma)}([f_p] + [g_p]) = X_{(\gamma)}[f_p] + X_{(\gamma)}[g_p], \qquad X_{(\gamma)}(a[f_p]) = aX_{(\gamma)}[f_p], \qquad a \in \mathbb{R}.$$

Введем обозначение для тех ростков, производные которых вдоль всех кривых $\gamma \in \Gamma_p$, проходящих через точку p, равны нулю

$$\mathcal{H}_p = \{[f_p] \in \mathcal{C}_p : \quad X_{(\gamma)}[f_p] = 0\}.$$

Множество $\mathcal{H}_p$ является линейным подпространством $\mathcal{C}_p$. В координатах принадлежность $[f_p] \in \mathcal{H}_p$ задается равенством $\partial_\alpha(f \circ \varphi^{-1} = 0)$. То есть подпространство $\mathcal{H}_p$ состоит в точности из тех ростков, у которых все частные производные равны нулю.

Определение. *Кокасательным пространством* в точке $p \in \mathbb{M}$ называется фактор пространство $\mathbb{T}^*_p(\mathbb{M}) = \mathcal{C}_p/\mathcal{H}_p$. □

Из данного определения следует, что кокасательное пространство состоит из тех ростков $[f_p]$, для которых хотя бы одна частная производная была отлична от нуля. Поскольку две функции принадлежат одному ростку $f \sim g$ тогда и только тогда, когда совпадают все их частные производные, то каждый росток взаимно однозначно определяется градиентом функции. Это доказывает эквивалентность независимого определения кокасательного пространства определению, данному ранее, т.к. градиент функции есть 1-форма в смысле прежнего определения. В основе данного определения, так же, как и в определении вектора, лежит понятие кривой на многообразии и вектора скорости.

В дальнейшем, в целях упрощения обозначений, мы почти всегда будем писать

$$\partial_\alpha f = \frac{\partial f}{\partial x^\alpha} = \frac{\partial(f \circ \varphi^{-1})}{\partial x^\alpha},$$

несмотря на то, что функция $f(x)$ определена на точках многообразия $x \in \mathbb{M}$, а не в евклидовом пространстве. Это является общепринятой записью и не приводит к путанице. В тех местах, где нужно подчеркнуть различие точки многообразия и точки евклидова пространства, мы будем использовать полную запись.

3.6.4 Векторные поля и дифференцирования

Дадим второе, теперь уже алгебраическое, глобальное определение векторных полей на многообразии $\mathbb{M}$. Зафиксируем произвольную точку $p \in \mathbb{M}$ и рассмотрим некоторую координатную окрестность этой точки $(\mathbb{U}, \varphi)$. С каждым векторным полем естественным образом связывается оператор дифференцирования (3.11) в алгебре гладких функций $\mathbb{C}^\infty(\mathbb{U})$. Его действие на функцию в произвольной карте

$$Xf = X^\alpha \partial_\alpha f \tag{3.18}$$

представляет собой *дифференцирование вдоль векторного поля*. Это дифференцирование не зависит от выбора карты, т.к. запись (3.18) инвариантна относительно преобразований координат, и удовлетворяет свойствам

1) $X(af + bg) = aXf + bXg$ – линейность,
2) $X(fg) = (Xf)g + f(Xg)$ – правило Лейбница,

для всех $a, b \in \mathbb{R}$ и $f, g \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{U})$.

Определение. Непрерывное линейное отображение алгебры функций $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{U})$ в $\mathbb{R}$:

$$X: \ \mathcal{C}^\infty(\mathbb{U}) \ \to \ \mathbb{R},$$

удовлетворяющее правилу Лейбница 2), называется *дифференцированием* в точке $p \in \mathbb{M}$. Множество всех дифференцирований обозначим $\mathbb{D}_p(\mathbb{M})$. □

Замечание. Каждое векторное поле на $\mathbb{U} \subset \mathbb{M}$ отображает алгебру функций $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{M})$ в себя. Обратим внимание, что в определении дифференцирования в точке стоит отображение не в алгебру функций $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{M})$, а в вещественную прямую $\mathbb{R}$. □

Множество дифференцирований $\mathbb{D}_p(\mathbb{M})$ снабжается естественной структурой вещественного векторного пространства:

$$\begin{gathered}(X_1 + X_2)f = X_1 f + X_2 f, \\ (aX)f = a(Xf).\end{gathered} \tag{3.19}$$

Мы покажем, что касательное пространство $\mathbb{T}_p(\mathbb{M})$ и пространство дифференцирований $\mathbb{D}_p(\mathbb{M})$ изоморфны как векторные пространства. То, что каждому вектору $X \in \mathbb{T}_p(\mathbb{M})$ однозначно ставится в соответствие дифференцирование было показано выше. Нетрудно проверить, что это отображение сохраняет линейную структуру.

Докажем обратное утверждение. С этой целью рассмотрим важный пример отображений $\mathbb{C}^\infty(\mathbb{U}) \to \mathbb{R}$:

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\right)_p f(x) := \partial_\alpha (f \circ \varphi^{-1})|_{\varphi(p)}, \qquad \alpha = 1, \ldots, n, \tag{3.20}$$

Эти отображения линейны, удовлетворяют правилу Лейбница и, следовательно, являются дифференцированиями. Подчеркнем, что символ $\left(\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\right)_p$ не является частной производной, т.к. определен в точке многообразия $p \in \mathbb{M}$, а не евклидова пространства $\mathbb{R}^n$. В правой же части равенства (3.20) стоит частная производная от функции, определенной в евклидовом пространстве. Теперь докажем две леммы.

Предложение 3.6.1. *Пусть X – дифференцирование в $\mathbb{C}^\infty(\mathbb{U})$ и $f_c(x) = c =$ const – постоянная функция на $\mathbb{M}$. Тогда $Xc = 0$.*

Доказательство. Представим постоянную функцию на $\mathbb{M}$ в виде $f_c = cf_1 = cf_1 \cdot f_1$, где $f_1(x) = 1$ – функция, равная единице на всем многообразии $\mathbb{M}$. Используем линейность дифференцирования и правило Лейбница:

$$Xc = cX(1 \cdot 1) = cX(1) + cX(1) = 2cX(1) = 2Xc,$$

что возможно только при $Xc = 0$. Это – нетривиальное использование, казалось бы, тривиального тождества: $1 \cdot 1 = 1$. □

Предложение 3.6.2. *Для любой гладкой функции $f \in \mathbb{C}^\infty(\mathbb{U})$ существует такой набор функций $f_\alpha \in \mathbb{C}^\infty(\mathbb{U})$, $\alpha = 1, \ldots, n$, что для любой точки x в некоторой окрестности точки $p \in \mathbb{U}$ выполнены равенства:*

$$f_\alpha(p) = \left(\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\right)_p f(p), \tag{3.21}$$

$$f(x) = f(p) + x^\alpha(x) f_\alpha(x), \tag{3.22}$$

где $\{x^\alpha(x)\} : \mathbb{U} \to \mathbb{R}^n$ – координатные функции.

Доказательство. Для определенности будем считать, что образ точки $p \in \mathbb{U}$ совпадает с началом координат евклидова пространства, $\varphi(p) = (0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^n$. Пусть $F(x^1, \ldots, x^n) = f \circ \varphi^{-1}$ – координатное представление функции f в некоторой окрестности точки p. Тогда справедливо тождество

$$\begin{aligned} F(x^1, \ldots, x^n) = {} & F(x^1, \ldots, x^n) - F(x^1, \ldots, x^{n-1}, 0) + \\ & + F(x^1, \ldots, x^{n-1}, 0) - F(x^1, \ldots, x^{n-2}, 0, 0) + \\ & + \ldots \\ & + F(x^1, 0, \ldots, 0) - F(0, \ldots, 0) + \\ & + F(0, \ldots, 0). \end{aligned}$$

Это тождество перепишем в виде

$$\begin{aligned} F(x^1, \ldots, x^n) = {} & F(0, \ldots, 0) + \sum_{\alpha=1}^n F(x^1, \ldots, tx^\alpha, 0, \ldots, 0)|_{t=0}^{t=1} = \\ = {} & F(0, \ldots, 0) + \sum_{\alpha=1}^n \int_0^1 dt \frac{\partial F}{\partial (tx^\alpha)}(x^1, \ldots, x^{\alpha-1}, tx^\alpha, 0, \ldots, 0) x^\alpha = \\ = {} & F(0, \ldots, 0) + x^\alpha F_\alpha(x^1, \ldots, x^n), \end{aligned}$$

где

$$F_\alpha(x^1, \ldots, x^n) = \int_0^1 dt \frac{\partial F}{\partial (tx^\alpha)}(x^1, \ldots, x^{\alpha-1}, tx^\alpha, 0, \ldots, 0)$$

– набор гладких функций в некоторой окрестности начала координат евклидова пространства. Теперь вернемся на многообразие и определим набор функций $f_\alpha = F \circ \varphi$. Отсюда сразу следует равенство (3.22).

Теперь надо определить вид функций $f_\alpha(x)$. С этой целью применим дифференцирование $\left(\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\right)_x$ к равенству (3.22)

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\right)_x f(x) = \left(\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\right)_x f(p) + \left(\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\right)_x x^\beta(x) f_\beta(x) + x^\beta(x) \left(\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\right)_x f_\beta(x).$$

Первое слагаемое равно нулю, как следствие леммы 3.6.1. Поскольку $\left(\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\right)_x x^\beta(x) = \delta^\beta_\alpha$, то в точке p имеем равенство (3.21) т.к. $x^\alpha(p) = 0$. □

Следствие. Если $X \in \mathbb{D}_p(\mathbb{U})$ – дифференцирование в точке $p \in \mathbb{M}$, то

$$X(p) = X(x^\alpha(x))_p \left(\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\right)_p = X^\alpha(p) \left(\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\right)_p . \tag{3.23}$$

Доказательство. Пусть $(\mathbb{U}, \varphi)$ – произвольная карта в окрестности точки $p \in \mathbb{M}$. Тогда, возможно, $x^\alpha(p) \neq 0$. В этом случае сдвинем начало координат в евклидовом пространстве: $y^\alpha = x^\alpha - x^\alpha(p)$. Тогда из леммы 3.6.2 следует представление

$$f(x) = f(p) + (x^\alpha(x) - x^\alpha(p) f_\alpha(x).$$

Применяя дифференцирование X к этому равенству и переходя в точку p, получим (3.23). □

Таким образом, множество всех дифференцирований $\mathbb{D}_p(\mathbb{U})$ в произвольной точке $p \in \mathbb{M}$ представляет собой конечномерное векторное пространство, $\mathsf{dim}\, \mathbb{D}_p(\mathbb{U}) = n$, с базисом $\left(\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\right)_p$. Это пространство изоморфно касательному пространству $\mathbb{T}_p(\mathbb{M})$.

Определение. *Координатным базисом* векторных полей $\mathcal{X}(\mathbb{U})$ на карте $(\mathbb{U}, \varphi)$ многообразия $\mathbb{M}$ называется набор гладких векторных полей $\left\{e_\alpha(x) := \left(\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\right)_x\right\} \in \mathcal{X}(\mathbb{U})$, $\alpha = 1, \ldots, n$, определенных формулой (3.20). Дуальный базис $\{e^\alpha(x)\} \in \Lambda^1(\mathbb{U})$, $e^\alpha(e_\beta) = \delta^\alpha_\beta$, называется *координатным базисом* ковекторных полей (1-форм). Координатный базис называют также *голономным*. □

Замечание. Подчеркнем, что координатный базис – это не набор частных производных, а векторные поля на многообразии. Их действие, как дифференцирований, определено только для функций $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{U})$. Действие векторных полей $e_\alpha(x)$ на тензоры более высокого ранга не определено. □

Из разложения по базису (3.23) следует, что компонента векторного поля X в точке $p \in \mathbb{M}$ – это результат действия векторного поля на координатную функцию $X^\alpha(p) = Xx^\alpha(x)|_{x=p}$.

В дальнейшем мы будем писать сокращенно $X = X^\alpha(x)\partial_\alpha$, имея в виду, что на функции $f \circ \varphi$ в евклидовом пространстве координатный базис действительно действует, как частная производная. Для 1-форм в координатном базисе мы часто будем использовать общепринятую запись $A = dx^\alpha A_\alpha$, $e^\alpha = dx^\alpha$.

Пусть $D_x(\mathbb{U}) \in \mathbb{D}_x(\mathbb{M})$ – дифференцирование в точке $x \in \mathbb{M}$. Рассмотрим объединение $D(\mathbb{M}) = \bigcup_{x\in\mathbb{M}} D_x(\mathbb{U})$ по всем точкам многообразия, которое соответствует некоторому векторному полю $X(\mathbb{M})$ на $\mathbb{M}$. Оно задает отображение

$$D(\mathbb{M}) :\ \mathcal{C}^\infty(\mathbb{M}) \to \mathcal{C}^\infty(\mathbb{M}), \tag{3.24}$$

которое называется дифференцированием в алгебре функций $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{M})$, т.е. непрерывный линейный эндоморфизм в $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{M})$, удовлетворяющий правилу Лейбница. Поэтому каждому векторному полю $X(\mathbb{M}) \in \mathcal{X}(\mathbb{M})$ ставится в соответствие некоторое дифференцирование $D(\mathbb{M}) \in \mathcal{D}(\mathbb{M})$, где $\mathcal{D}(\mathbb{M})$ – множество всех дифференцирований а алгебре функций. Верно также и обратное утверждение: любому дифференцированию в алгебре функций $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{M})$ соответствует единственное векторное поле.

Мы доказали аналогичное утверждение в фиксированной точке многообразия, где пространство $\mathbb{D}_x(\mathbb{U})$ является конечномерным. Доказательство в рассматриваемом бесконечномерном случае сложнее и приведено в [?]. Линейная структура на $\mathcal{D}(\mathbb{M})$ вводится также, как и в точке (3.19). Таким образом множество векторных полей $\mathcal{X}(\mathbb{M})$ биективно отображается на множество дифференцирований $\mathcal{D}(\mathbb{M})$, при этом как векторные пространства эти множества изоморфны. Эта биекция позволяет дать эквивалентное определение векторного поля.

Определение. *Векторным полем* $X(\mathbb{M})$ на многообразии $\mathbb{M}$ называется дифференцирование в алгебре функций $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{M})$. □

Координатный базис для ковекторных полей, который дуален к базису $\left(\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\right)_p$, обозначается dx^α_p или просто dx^α.

3.6.5 Векторные поля и интегральные кривые

Начнем с локального описания. Рассмотрим векторное поле $X = X^\alpha \partial_\alpha$, все компоненты которого отличны от нуля в окрестности некоторой точки $x \in \mathbb{M}$, $\mathsf{dim}\,\mathbb{M} = n$. Бесконечно малые перемещения dx^α точки x вдоль этого векторного поля должны быть пропорциональны компонентам X^α и поэтому удовлетворять системе уравнений

$$\frac{dx^1}{X^1} = \frac{dx^2}{X^2} = \cdots = \frac{dx^n}{X^n}. \tag{3.25}$$

Эту систему уравнений можно переписать в виде равенства нулю 1-форм

$$A^{\text{м}} = \frac{dx^{\text{м}}}{X^{\text{м}}} - \frac{dx^1}{X^1} = 0, \qquad \text{м} = 2, \ldots, n.$$

В каждой точке $x \in \mathbb{M}$ векторное поле X задает одномерное подпространство в касательном пространстве $\mathbb{T}_x(\mathbb{M})$, а совокупность 1-форм $\{A^{\text{м}}\}$ – $(n-1)$-мерное ортогональное дополнение в сопряженном пространстве $\mathbb{T}^*_x(\mathbb{M})$, поскольку $A^{\text{м}}(X) = 0$.

Согласно теории дифференциальных уравнений, уравнения (3.25) допускают $n-1$ функционально независимых решений

$$\varphi^{\text{м}}(x^\alpha) = c^{\text{м}} = \mathsf{const}, \qquad \text{м} = 2, \ldots, n, \tag{3.26}$$

для которых $A^{\text{м}} = d\varphi^{\text{м}} = 0$. При этом прямоугольная матрица, составленная из производных $\partial_\alpha \varphi^{\text{м}}$, имеет ранг $n-1$, и каждая из функций $\varphi^{\text{м}}$ является решением уравнения в частных производных

$$X^\alpha \partial_\alpha \varphi^{\text{м}} = 0. \tag{3.27}$$

Совершим преобразование координат $x^\alpha \to y^\alpha(x)$, выбрав в качестве последних $n-1$ координат функции (3.26) $(y^2, \ldots, y^n) = (\varphi^2, \ldots, \varphi^n)$, а координату x^1 оставим без изменения. Якобиан этого преобразования отличен от нуля в силу функциональной независимости функций $\varphi^{\text{м}}$. Тогда из закона преобразования векторного поля (3.9) и уравнения (3.27) следует, что в новой системе координат все компоненты векторного поля, кроме первой, равны нулю

$$X^1 \neq 0, \quad X^2 = \ldots = X^n = 0.$$

Заменим теперь координату x^1 на функцию $y^1(x)$, которая удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{dy^1}{dx^1}X^1 = 1.$$

Это уравнение локально разрешимо, и, значит, в новой системе координат $X^1 = 1$.

Если у векторного поля X^α часть компонент равнялась нулю до преобразования координат, то все, сказанное выше, можно повторить для ненулевых компонент. Отсюда следует частный случай теоремы Фробениуса.

Теорема 3.6.2. *Для произвольного нетривиального векторного поля $X \in \mathcal{X}(\mathbb{M})$ в некоторой окрестности $\mathbb{U}_x$ произвольной точки $x \in \mathbb{M}$ существует такая система координат, в которой все компоненты X, кроме одной (например, первой) обращаются в нуль. Координатную функцию $x^1(x)$, $x \in \mathbb{U}_x$ можно подобрать таким образом, чтобы первая компонента векторного поля X^1 была равна единице в этой окрестности, т.е. $X = \partial_1$.*

Замечание. Эта теорема показывает, что векторное поле в окрестности точки, в которой оно отлично от нуля, устроено довольно просто. Если в некоторой точке векторное поле обращается в нуль, то в окрестности этой точки оно может быть устроено очень сложно [**?**]. Нули гладкого касательного поля к многообразию связаны с топологическими свойствами. Например, на четномерной сфере не существует векторного поля, нигде не обращающегося в нуль (см. теорему 11.2.1). В то же время такое поле всегда можно задать на торе. □

Если в уравнения (3.26) подставить координаты некоторой фиксированной точки $p = \{x^\alpha_p\} \in \mathbb{M}$, то определятся значения постоянных $c^{\text{м}}$. При этих значениях постоянных система $n-1$ трансцендентных уравнений относительно x^α (3.26) определяет кривую, проходящую через точку p. Если кривая параметризуется параметром t, $x^\alpha = x^\alpha(t)$, то уравнения (3.25) эквивалентны системе обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx^\alpha}{dt} = X^\alpha, \tag{3.28}$$

с начальными условиями

$$x^\alpha|_{t=t_p} = x^\alpha_p, \tag{3.29}$$

где $t = t_p$ – значение параметра вдоль кривой, при котором она проходит через точку p. Если в окрестности точки p компоненты векторного поля X^α достаточно гладкие, то решение системы уравнений (3.28) существует и зависит от n постоянных интегрирования. Одна из постоянных соответствует сдвигу параметра вдоль кривой $t \to t + \mathsf{const}$, а оставшиеся $n-1$ постоянных определяются положением точки p на гиперповерхности (3.26), проходящей через точку p. Решение уравнений (3.28) при $X_p \neq 0$ вблизи точки p выглядит просто

$$x^\alpha(t) = x^\alpha_p + X^\alpha_p(t - t_p) + \ldots, \qquad (t - t_p) \ll 1.$$

Отметим, что интегральные кривые являются ни чем иным, как *характеристиками* (линиями уровня) для решений дифференциального уравнения в частных производных первого порядка (3.27).

Перейдем к глобальному описанию.

Определение. *Интегральной кривой* векторного поля $X \in \mathcal{X}(\mathbb{M})$, проходящей через точку $p \in \mathbb{M}$ называется кривая $(a,b) \ni t \mapsto \gamma(t) \in \mathbb{M}$ такая, что $\gamma(t_p) = p$ и

$$\gamma_* \partial_t = X(\gamma(t)), \tag{3.30}$$

где γ_* – дифференциал отображения некоторого открытого интервала $(a,b) \subset \mathbb{R}$, содержащего точку t_p, и ∂_t – касательный вектор к интервалу в точке $t \in (a,b)$. Вектор $X(\gamma(t))$ называется *касательным вектором* к кривой γ в точке $\gamma(t)$. □

Нетрудно проверить, что в каждой карте уравнение (3.30) записывается в виде системы обыкновенных дифференциальных уравнений (3.28).

Вообще говоря, интегральные кривые существуют только локально, даже для гладких векторных полей, заданных на всем многообразии. Другими словами, параметр t в общем случае определен лишь на некотором конечном или полубесконечном интервале $(a,b) \subset \mathbb{R}$. Векторное поле $X \in \mathcal{X}(\mathbb{M})$ называется *полным*, если все интегральные кривые этого поля определены при всех $t \in \mathbb{R}$. Для компактных многообразий справедливо утверждение.

Теорема 3.6.3. *На компактном многообразии $\mathbb{M}$ любое гладкое векторное поле $X \in \mathcal{X}(\mathbb{M})$, не обращающееся в нуль, является полным.*

Доказательство. См., например, [**?**]. □

Замечание. Для многообразий понятие компакта и компактного пространства совпадают, т.к. многообразие, по-определению, является хаусдорфовым пространством.

На некомпактном многообразии векторное поле может быть либо полным, либо неполным.

Пример 3.6.6. Векторное поле ∂_x на вещественной прямой $\mathbb{R}$ полно. Однако оно неполно на полупрямой $\mathbb{R}_+$ или любом конечном открытом интервале $(a,b) \subset \mathbb{R}$. □

Пример 3.6.7. Рассмотрим гладкое векторное поле $X = x^2 \partial_x$ на вещественное прямой $\mathbb{R}$. Общее решение уравнения интегральной кривой $\dot{x} = x^2$ имеет вид

$$x = -\frac{1}{t-c}, \qquad c = \mathsf{const}.$$

Таким образом, имеем две никак не связанные между собой интегральные кривые:

$$\begin{aligned} \gamma_1 :&\ \ (-\infty, c) \ \to\ (0, \infty), \\ \gamma_2 :&\ \ (c, \infty) \ \to\ (-\infty, 0). \end{aligned}$$

При этом точка $x = 0$ соответствует бесконечному значению параметра вдоль интегральной кривой $t = \pm\infty$, а бесконечно удаленные точки $x = \pm\infty$ – конечному значению параметра $t = c$. Поэтому векторное поле $X = x^2 \partial_x$ неполно. □

Множество всех полных векторных полей на некомпактном многообразии $\mathbb{M}$ является подмножеством в $\mathcal{X}(\mathbb{M})$. В отличие от всего множества $\mathcal{X}(\mathbb{M})$ это подмножество не образует абелеву группу (модуль) по отношению к сложению.

Пример 3.6.8. Рассмотрим два векторных поля $X = y^2\partial_x$ и $Y = x^2\partial_y$ на евклидовой плоскости $\mathbb{R}^2$. Оба поля являются полными, однако их сумма $X + Y$ неполна. Действительно, векторное поле X определяет интегральные кривые:

$$\begin{aligned} \dot{x} = y^2 \quad &\Rightarrow \quad x = C^2 t + C_0, \qquad && C, C_0 = \mathsf{const}, \\ \dot{y} = 0 \quad &\Rightarrow \quad y = C. \end{aligned}$$

Эти интегральные кривые параллельны оси x и проходят через все точки y, кроме $y = 0$. Поскольку все интегральные прямые определены при всех $t(-\infty, \infty)$, то векторное поле X полно. Точки $(x, 0) \in \mathbb{R}^2$ для векторного поля X являются особыми, так как через них не проходит ни одна интегральная кривая. Аналогично, векторное поле Y определяет интегральные кривые:

$$\begin{aligned} \dot{x} = 0 \quad &\Rightarrow \quad x = C, \qquad && C, C_0 = \mathsf{const}, \\ \dot{y} = x^2 \quad &\Rightarrow \quad y = C^2 t + C_0. \end{aligned}$$

Интегральные кривые параллельны оси y и проходят через все точки x, кроме $x = 0$. Соответствующее векторное поле Y полно. Уравнения для интегральных кривых, определяемых суммой векторных полей, имеют вид:

$$\dot{x} = y^2, \tag{3.31}$$

$$\dot{y} = x^2. \tag{3.32}$$

При $x \neq 0$ и $y \neq 0$ отсюда следует дифференциальное уравнение для формы интегральной кривой:

$$x^2 dx = y^2 dy \quad \Rightarrow \quad y^3 = x^3 + C, \qquad C = \mathsf{const}.$$

Подставляя это решение в уравнение (3.31), получаем

$$\dot{x} = (x^3 + C)^{2/3} \quad \Leftrightarrow \quad t = \int \frac{dx}{(x + C)^{2/3}}.$$

При $C = 0$ это уравнение легко интегрируется

$$x = -\frac{1}{t - C_0}.$$

После подстановки в (3.32) получаем

$$y = -\frac{1}{t - C_0} + C_1, \qquad C_1 = \mathsf{const}.$$

Таким образом мы получили интегральные кривые для векторного поля $X + Y$, которые неполны, т.к. сингулярны при $t = C_0$. Остальные интегральные кривые можно не исследовать, поскольку, по-определению, векторное поле полно, если *все* интегральные кривые определены при всех t. □

Векторное поле, заданное в некоторой области, определяет семейство интегральных кривых, проходящих через каждую точку из этой области, причем через каждую точку проходит единственная кривая.

Отметим, что интегральные кривые являются ни чем иным, как *характеристиками* (линиями уровня) для решений дифференциального уравнения в частных производных первого порядка (3.27).

Определение. Пусть $s(t,p)$ – интегральная кривая векторного поля $X \in \mathcal{X}(\mathbb{M})$, проходящая через точку p, $s(0,p) = p$. Будем считать, что векторное поле полно. Тогда отображение

$$s: \quad \mathbb{R} \times \mathbb{M} \to \mathbb{M}, \tag{3.33}$$

генерируемое векторным полем X, называется *потоком.* □

Предложение 3.6.3. *Отображение (3.33) удовлетворяет тождеству*

$$s(t_1, s(t_2,p)) = s(t_1+t_2, p), \tag{3.34}$$

для всех значений $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$, для которых формула (3.34) имеет смысл.

Доказательство. Предложение следует из единственности решения системы дифференциальных уравнений. Действительно, в произвольной карте выполнено равенство

$$\frac{d}{dt_1} s^\alpha(t_1, s(t_2,p)) = X^\alpha(s(t_2,p))$$
$$s(0, s(t_2,p)) = s(t_2,p).$$

С другой стороны

$$\frac{d}{dt_1} s^\alpha(t_1+t_2,p) = \frac{d}{d(t_1+t_2)} s^\alpha(t_1+t_2,p) = X^\alpha(s(t_1+t_2,p)),$$
$$s(0+t_2,p) = s(t_2,p).$$

Тем самым и правая, и левая часть равенства (3.34) удовлетворяют одной и той же системы уравнений с одинаковыми начальными условиями. □

Теорема 3.6.4. *Пусть на многообразии $\mathbb{M}$ задано гладкое полное векторное поле $X \in \mathcal{X}(\mathbb{M})$. Тогда для любой точки $x \in \mathbb{M}$ существует гладкое отображение (3.33) со свойствами:*

1) $s(0,x) = x$;
2) $s(t,x)$ есть решение (3.30);
3) $s(t_1, s(t_2,x)) = s(t_1+t_2, x)$.

Замечание. Поток векторного поля можно представлять себе, как стационарный поток жидкости. В этом случае параметр t является временем, а X – векторным полем скорости частиц жидкости. □

Пример 3.6.9. Рассмотрим гладкое векторное поле $K = -y\partial_x + x\partial_y$ на евклидовой плоскости $\mathbb{M} = \mathbb{R}^2$. Нетрудно проверить, что поток этого векторного поля имеет вид

$$s: \quad t \times (x,y) \to (x\cos t - y \sin t, x \sin t + y \cos t).$$

Интегральная кривая, проходящая через точку (x,y), представляет собой окружность с центром в начале координат. В начале координат векторное поле обращается в нуль, и интегральная кривая вырождается в точку. Векторное поле K является ничем иным, как векторным полем Киллинга двумерных вращений евклидовой плоскости и принимает особо простой вид в полярных координатах, $K = \partial_\varphi$. Интегральные кривые поля K являются в данном случае траекториями Киллинга. Поток векторного поля на $\mathbb{M}$ определяется независимо от наличия метрики. Однако интерпретация векторного поля K, как поля Киллинга уже связана с наличием на плоскости евклидовой метрики. □

Пример 3.6.10. Рассмотрим гладкое векторное поле $K = y\partial_x + x\partial_y$ на плоскости $\mathbb{M} = \mathbb{R}^2$. Поток этого векторного поля имеет вид

$$s: \quad t \times (x, y) \to (x\,\mathsf{ch}\,t + y\,\mathsf{sh}\,t, x\,\mathsf{sh}\,t + y\,\mathsf{ch}\,t).$$

Интегральная кривая, проходящая через точку (x, y), является ветвью гиперболы $x^2 - y^2 = \mathsf{const}$ с центром в начале координат. При $y = \pm x$ гиперболы вырождаются в прямые линии, проходящие через начало координат под углом $\pm\pi/4$. Векторное поле K является векторным полем Киллинга для метрики Минковского, заданной на плоскости $\mathbb{R}^2$, а интегральные кривые – траекториями Киллинга. □

Определение. При фиксированном значении параметра t поток $s(t, x)$ представляет собой диффеоморфизм, обозначаемый также

$$s_t: \quad \mathbb{M} \to \mathbb{M}.$$

Он представляет собой абелеву группу:
1) $s_{t_1} s_{t_2} = s_{t_1+t_2}$;
2) s_0 – единичный элемент;
3) $s_t^{-1} = s_{-t}$ – обратный элемент.

Эта группа называется *однопараметрической группой преобразований*, генерируемой векторным полем X. Действительно, из системы уравнений (3.28) следует, что при малых значениях параметра поток имеет вид

$$s_\epsilon: \quad x^\alpha \to x^\alpha + \epsilon X^\alpha.$$

То есть векторное поле X является генератором бесконечно малых преобразований многообразия $\mathbb{M}$. □

Псевдогруппа гладких преобразований координат $\mathsf{diff}\,\mathbb{M}$ на многообразии $\mathbb{M}$, бесконечномерна. С соответствующими оговорками множество гладких векторных полей $\mathcal{X}(\mathbb{M})$ можно рассматривать, как бесконечномерную алгебру Ли для $\mathsf{diff}\,\mathbb{M}$.

Сам поток часто обозначают

$$s^\alpha(t, x) = \mathsf{exp}\,(tX)x^\alpha$$

и называют *экспоненциальным отображением*. Это обозначение оправдано следующим образом. Разложим функцию $s^\alpha(t, x)$ в ряд Тейлора по t

$$\begin{aligned} s^\alpha(t, x) &= x^\alpha + t\,\frac{\partial s^\alpha(\tau, x)}{\partial\tau}\bigg|_{\tau=0} + \frac{t^2}{2!}\,\frac{\partial^2 s^\alpha(\tau, x)}{\partial\tau^2}\bigg|_{\tau=0} + \cdots \\ &= \left[1 + t\frac{\partial}{\partial\tau} + \frac{t^2}{2!}\frac{\partial^2}{\partial\tau^2} + \cdots\right] s^\alpha(\tau, x)\bigg|_{\tau=0} \\ &= \mathsf{exp}\left(t\frac{\partial}{\partial\tau}\right) s^\alpha(\tau, x)\bigg|_{\tau=0} = \mathsf{exp}\,(tX)x^\alpha. \end{aligned}$$

При этом выполнены формальные свойства экспоненты

$$\begin{gathered} \mathsf{exp}\,(0X)x = x, \\ \mathsf{exp}\,(t_1X)\,\mathsf{exp}\,(t_2X)x = \mathsf{exp}\,[(t_1 + t_2)X]x, \\ \frac{d}{dt}\,\mathsf{exp}\,(tX)x = X\,\mathsf{exp}\,(tX)x. \end{gathered}$$

Выше было показано, что любое полное векторное поле генерирует единственную однопараметрическую группу преобразований. Верно и обратное утверждение: любая однопараметрическая группа $s^\alpha(t,x)$ определяет векторное поле. Для этого достаточно положить

$$X^\alpha = \left.\frac{ds^\alpha}{dt}\right|_{t=0}.$$

Если векторное поле $X(\mathbb{M})$ является неполным, то понятие потока и однопараметрической группы преобразований можно ввести только локально (см., например, [**?**].

3.6.6 1-формы и гиперповерхности

Рассмотрим отличную от нуля в каждой точке 1-форму $dx^\alpha A_\alpha(x)$ в некоторой карте на многообразии $\mathbb{M}$, $\mathsf{dim}\,\mathbb{M} = n$. Тогда линейное алгебраическое уравнение

$$dx^\alpha A_\alpha = 0 \tag{3.35}$$

относительно дифференциалов dx^α имеет $n-1$ линейно независимых решений в каждой точке $x \in \mathbb{M}$. При этом любое решение уравнения (3.35) является линейной комбинацией данных решений. Отсюда следует, что совокупность векторов dx^α, удовлетворяющих уравнению (3.35), задает $(n-1)$-мерное подпространство в касательном пространстве $\mathbb{T}_x(\mathbb{M})$. Таким образом, отличная от нуля 1-форма задает поле $(n-1)$-мерных подпространств в касательном пространстве к каждой точке, т.е. $(n-1)$-мерное распределение.

Казалось бы, что существуют такие $(n-1)$-мерные подмногообразия в $\mathbb{M}$, что касательные векторы к ним образуют $(n-1)$-мерное распределение, задаваемое 1-формой. Однако в общем случае это не так. Критерий существования таких подмногообразий дает теорема Фробениуса 3.11.4, которая будет рассмотрена несколько позже. Сейчас мы остановимся на простейшем случае.

Пусть 1-форма (3.35) является точной, т.е. имеет вид,

$$A_\alpha = \partial_\alpha f, \tag{3.36}$$

для некоторой функции $f(\mathbb{M}) \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{M})$. Тогда уравнение (3.35) можно рассмотреть, как дифференциальное уравнение на f, любое решение которого имеет вид

$$f(x^\alpha) = \mathsf{const}. \tag{3.37}$$

Уравнение (3.37) при разных значениях константы определяет семейство $(n-1)$-мерных подмногообразий в $\mathbb{M}$, которые называются *гиперповерхностями* или *сечениями*. (При $n=2$ эти подмногообразия называются *линиями уровня*.) В этом случае касательные векторы к гиперповерхностям определяют те же $(n-1)$-мерные подпространства в касательном пространстве, что и 1-форма. Говорят также, что гиперповерхность имеет коразмерность один.

Не ограничивая общности, для нетривиальной скалярной функции можно считать, что только $\partial_1 f \neq 0$ в некоторой области. Поэтому скалярную функцию f можно выбрать в качестве первой координаты $f = x^1$. Тогда семейство гиперповерхностей будет задано уравнением $x^1 = \mathsf{const}$, а направления вдоль остальных координатных осей будут определять касательные к гиперповерхности направления.

3.6.7 Алгебра Ли векторных полей

Ранее мы дали два эквивалентных определения векторных полей $\mathcal{X}(\mathbb{M})$ как сечений касательного расслоения $\mathbb{T}(\mathbb{M})$ и как дифференцирований в алгебре функций $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{M})$. Это – разные определения, одно из которых может иметь определенные преимущества в той или иной ситуации. При рассмотрении алгебраических вопросов, как правило, удобнее использовать алгебраическое определение векторных полей через дифференцирования. Ниже мы введем на множестве векторных полей $\mathcal{X}(\mathbb{M})$ структуру алгебры Ли.

Последовательное применение двух двух дифференцирований (векторных полей) X и Y к некоторой функции f снова дает функцию из $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{M})$. Определим композицию двух дифференцирований $X \circ Y$ формулой $(X \circ Y)f = X(Yf)$. Отображение $(X \circ Y)$ является линейным, однако Правило Лейбница для него не выполнено:

$$(X \circ Y)fg = XfYg + fX(Yg) + XgYf + gX(Yf) \neq f(X \circ Y)g + g(X \circ Y)f.$$

Это означает, что композиция векторных полей $X \circ Y$ не является векторным полем. По другому, отображение $X \circ Y$ в координатах содержит не только первые, но и вторые производные. Рассмотрим композицию этих дифференцирований в другом порядке

$$(Y \circ X)fg = YfXg + fY(Xg) + YgXf + gY(Xf).$$

Нетрудно проверить, что разность $Y \circ X - Y \circ X$ удовлетворяет правилу Лейбница

$$(X \circ Y - Y \circ X)fg = f(X \circ Y - Y \circ X)g + g(X \circ Y - Y \circ X)f,$$

т.е. является векторным полем. Эта разность называется *коммутатором векторных полей* или *скобкой Ли* и обозначатся

$$[X, Y] = X \circ Y - Y \circ X.$$

Из определения следует, что коммутатор двух векторных полей антисимметричен,

$$[X, Y] = -\,[Y, X]\,, \tag{3.38}$$

и коммутаторы трех произвольных векторных полей удовлетворяют *тождеству Якоби*

$$[[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] = 0, \tag{3.39}$$

где слагаемые отличаются циклической перестановкой.

Отметим, что антисимметрия коммутатора (3.38) эквивалентна условию $[X, X] = 0$. Действительно, то, что это условие вытекает из (3.38) очевидно. Для доказательства обратного утверждения достаточно рассмотреть уравнение $[X + Y, X + Y] = 0$.

Алгебра Ли является неассоциативной алгеброй, при этом условие ассоциативности заменяется на тождества Якоби.

Рассмотрим векторные поля в произвольной карте $X = X^\alpha \partial_\alpha$, $Y = Y^\alpha \partial_\alpha$. Тогда коммутатор дает новое векторное поле

$$Z = [X, Y] = (X^\beta \partial_\beta Y^\alpha - Y^\beta \partial_\beta X^\alpha)\partial_\alpha. \tag{3.40}$$

Используя закон преобразования компонент векторных полей (3.9), нетрудно проверить, что выражение в правой части инвариантно относительно преобразования координат.

Множество векторных полей с операцией сложения и коммутирования, которое удовлетворяет условиям (3.38) и (3.39) образует *кольцо Ли*. Умножение векторного поля на числа снова дает векторной поле, при этом коммутатор (3.40) билинеен

$$[aX + bY, Z] = a[X, Z] + b[Y, Z].$$
$$[X, aY + bZ] = a[X, Y] + b[X, Z].$$

Множество векторных полей с операциями умножения на числа, сложения и коммутирования образует *алгебру Ли* над полем вещественных чисел. Эта алгебра бесконечномерна и также обозначается $\mathcal{X}(\mathbb{M})$.

Пример 3.6.11. Двумерное векторное пространство с базисом e_1 и e_2 становится алгеброй Ли, если положить

$$[e_1, e_1] = [e_2, e_2] = 0, \qquad [e_1, e_2] = e_2$$

и продолжить эту операцию по линейности. □

Пример 3.6.12. Трехмерное векторное пространство $\mathbb{R}^3$ является алгеброй Ли, если в качестве коммутатора двух векторов $X, Y \in \mathbb{R}^3$ выбрать их векторное произведение

$$[X, Y]^i = -\varepsilon^{ijk} X_j Y_k,$$

где опускание индексов производится с помощью евклидовой метрики δ_{ij}. Это будет алгебра Ли группы трехмерных вращений $\mathbb{SO}(3)$ (**??**). □

Пример 3.6.13. Векторное пространство $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ всех вещественных $n \times n$-матриц образует конечномерную алгебру Ли, если положить

$$[A, B] = AB - BA, \qquad A, B \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}),$$

где AB – обычное произведение матриц. При этом $\dim \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}) = n^2$. □

Забегая вперед (см. раздел 8.2), заметим, что коммутатор векторных полей (3.40) можно записать в эквивалентном виде, используя ковариантную производную и тензор кручения

$$[X, Y] = (X^\beta \nabla_\beta Y^\alpha - Y^\beta \nabla_\beta X^\alpha - X^\beta Y^\gamma T_{\beta\gamma}{}^\alpha)\partial_\alpha.$$

В таком виде правая часть явно ковариантна.

3.7 Тензорные поля

Рассмотрим многообразие $\mathbb{M}$, $\dim \mathbb{M} = n$. В каждой точке $x \in \mathbb{M}$ у нас есть два n-мерных векторных пространства: касательное $\mathbb{T}_x(\mathbb{M})$ и кокасательное $\mathbb{T}^*_x(\mathbb{M})$ пространства. Рассмотрим их тензорное произведение

$$\mathbb{T}^r_{s,x}(\mathbb{M}) = \underbrace{\mathbb{T}_x(\mathbb{M}) \otimes \ldots \otimes \mathbb{T}_x(\mathbb{M})}_{r} \otimes \underbrace{\mathbb{T}^*_x(\mathbb{M}) \otimes \ldots \otimes \mathbb{T}^*_x(\mathbb{M})}_{s}, \tag{3.41}$$

где мы взяли r экземпляров касательного и s экземпляров кокасательного пространства. Таким образом в каждой точке многообразия мы построили векторное пространство размерности $\dim \mathbb{T}^r_{s,x}(\mathbb{M}) = n^{r+s}$.

Определение. Объединение

$$\mathbb{T}^r_s(\mathbb{M}) = \bigcup_{x\in\mathbb{M}} \mathbb{T}^r_{s,x}(\mathbb{M}),$$

взятое по всем точкам многообразия, называется *расслоением тензоров типа* (r,s) на многообразии $\mathbb{M}$. Сечение этого расслоения $T^r_s(x)$ называется *тензорным полем типа* (r,s) или r раз контравариантным и s раз ковариантным тензорным полем. Число $r+s$ называется *рангом* тензорного поля. □

Базой этого расслоения является многообразие $\mathbb{M}$, типичным слоем – векторное пространство

$$\underbrace{\mathbb{R}^n\otimes\ldots\otimes\mathbb{R}^n}_{r}\otimes\underbrace{\mathbb{R}^n\otimes\ldots\otimes\mathbb{R}^n}_{s},$$

где $\mathbb{R}^n$ – типичный слой касательного расслоения. Слоем над $x\in\mathbb{M}$ является векторное пространство (3.41) (тем самым мы определили проекцию). Дифференцируемая структура на расслоении тензоров задается дифференцируемыми структурами на базе и в типичном слое аналогично тому, как она была построена для касательного расслоения.

Координатные базисы в касательном и кокасательном пространствах, $e_\alpha=\partial_\alpha$ и $e^\alpha=dx^\alpha$, индуцируют координатный базис в тензорном произведении, который мы обозначим

$$e_{\alpha_1}\otimes\ldots\otimes e_{\alpha_r}\otimes e^{\beta_1}\otimes\cdots\otimes e^{\beta_s}. \tag{3.42}$$

Напомним, что тензорное произведение векторов не является коммутативным,

$$e_\alpha\otimes e^\beta\neq e^\beta\otimes e_\alpha,$$

поэтому порядок следования базисных векторов в произведении (3.42) фиксирован: сначала мы пишем базисные векторы касательного, а затем кокасательного пространств.

Рассмотрим произвольную карту $(\mathbb{U},\varphi)$ на многообразии. Тогда тензорное поле типа (r,s) в координатах имеет вид

$$T^r_s(x)=T_{\beta_1\ldots\beta_s}{}^{\alpha_1\ldots\alpha_r}(x)\,e_{\alpha_1}\otimes\ldots\otimes e_{\alpha_r}\otimes e^{\beta_1}\otimes\ldots\otimes e^{\beta_s}. \tag{3.43}$$

Нижние и верхние индексы называют соответственно *ковариантными* и *контравариантными*. Общее число индексов $r+s$ равно рангу тензорного поля.

Замечание. Для определенности, у компонент $T_{\beta_1\ldots\beta_s}{}^{\alpha_1\ldots\alpha_r}(x)$ мы сначала выписали все ковариантные индексы, а затем – все контравариантные. Порядок индексов зафиксирован порядком сомножителей в правой части (3.41) и принятом нами соглашением для записи тензорного поля типа $(1,1)$:

$$dx^\beta T_\beta{}^\alpha\partial_\alpha.$$

Контравариантные индексы, так же, как и ковариантные, упорядочены между собой. В разделе 5 будет введена операция опускания и подъема индексов с помощью метрики. Она будет неоднозначной, если порядок контравариантных и ковариантных индексов не фиксирован. Ниже мы построим тензорную алгебру для тензорных полей вида (3.43). Аналогично можно построить тензорную алгебру для произвольного

расположения сомножителей в правой части (3.41), когда касательные и кокасательные пространства чередуются в произвольном порядке. Мы будем предполагать, что все индексы упорядочены определенным образом. В этом случае обозначение векторного поля $T^r_s(x)$ является грубым, т.к. учитывает только общее число ковариантных и контравариантных индексов, а не их последовательность. □

Набор функций $X_{\beta_1\dots\beta_s}{}^{\alpha_1\dots\alpha_r}(x)$ с r верхними и s нижними индексами называется *компонентами* тензорного поля типа (r,s) в карте $(\mathbb{U},\varphi)$. Тензорное поле называется гладким, если все компоненты – гладкие функции. При преобразованиях координат каждый контравариантный индекс умножается на матрицу Якоби (2.20), так же, как и компоненты вектора, а каждый ковариантный индекс – на обратную матрицу Якоби, так же, как и 1-форма.

Пример 3.7.1. Компоненты тензорного поля типа (1,1) преобразуются по правилу:

$$X_{\beta'}{}^{\alpha'} = \frac{\partial x^\beta}{\partial x^{\beta'}} X_\beta{}^\alpha \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^\alpha}. \tag{3.44}$$

Аналогично преобразуются компоненты тензорных полей произвольного типа. □

В дальнейшем, для краткости, тензорные поля мы часто будем называть просто тензорами.

Пример 3.7.2. Очевидно, что, если все компоненты тензорного поля равны нулю в какой-то одной системе координат, то они равны нулю во всех остальных системах отсчета. У нетривиальных тензоров хотя бы одна компонента должна быть отлична от нуля. В общем случае у тензора типа (r,s) на многообразии размерности n имеется n^{r+s} независимых компонент в каждой точке. □

Обозначим множество гладких тензорных полей типа (r,s) символом $\mathcal{T}^r_s(\mathbb{M})$. При этом $\mathcal{T}^0_0(\mathbb{M}) = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{M})$, $\mathcal{T}^1_0 = \mathcal{X}(\mathbb{M})$ и $\mathcal{T}^0_1 = \Lambda^1(\mathbb{M})$. В дальнейшем индекс 0 у множеств тензорных полей, имеющих только контравариантные или ковариантные индексы, писаться не будет: $\mathcal{T}^r_0(\mathbb{M}) = \mathcal{T}^r(\mathbb{M})$ и $\mathcal{T}^0_s(\mathbb{M}) = \mathcal{T}_s(\mathbb{M})$.

Тензорные поля фиксированного типа в каждой точке можно складывать и умножать на числа, т.е. они образуют (бесконечномерное) векторное пространство над полем вещественных чисел. Кроме того, тензорное поле произвольного типа можно поточечно умножать на произвольные функции, при этом получится новое тензорное поле того же типа. Таким образом они образуют модуль над алгеброй гладких функций $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{M})$.

Введем обозначение для прямой суммы тензорных полей

$$\mathcal{T}(\mathbb{M}) = \bigoplus_{r,s=0}^{\infty} \mathcal{T}^r_s(\mathbb{M}).$$

На множестве $\mathcal{T}(\mathbb{M})$ можно ввести поточечное тензорное умножение, которое двум тензорам типа (r,s) и (p,q) ставит в соответствие тензорное поле типа $r+p, s+q$. А именно, зафиксируем точку $x \in \mathbb{M}$. Из универсального факторизационного свойства тензорного произведения следует, что существует единственное билинейное отображение из $\mathbb{T}^r_{s,x} \times \mathbb{T}^p_{q,x}$ в $\mathbb{T}^{r+p}_{s+q,x}$, которое отображает пару тензоров

$$(X_1 \otimes \dots \otimes X_r \otimes A_1 \otimes \dots \otimes A_s) \in \mathbb{T}^r_{s,x},$$
$$(Y_1 \otimes \dots \otimes Y_p \otimes B_1 \otimes \dots \otimes B_q) \in \mathbb{T}^p_{q,x}$$

в тензор типа $r+p, s+q$:

$$X_1 \otimes \cdots \otimes X_r \otimes Y_1 \otimes \cdots \otimes Y_p \otimes A_1 \otimes \cdots A_s \otimes B_1 \otimes \cdots \otimes B_q \quad \in \mathbb{T}^{r+p}_{s+q,x}. \tag{3.45}$$

Это отображение называется тензорным произведением тензоров в данной точке.

Замечание. Мы зафиксировали порядок сомножителей в произведении (3.45), который соответствует тензорному произведению (3.41).

Определение. *Тензорным произведением* тензорных полей $\mathcal{T}^r_s(\mathbb{M})$ и $\mathcal{T}^p_q(\mathbb{M})$ называется тензорное поле типа $\mathcal{T}^{r+p}_{s+q}(\mathbb{M})$, полученное поточечным тензорным произведением (3.45). □

Чтобы получить выражение для компонент тензорного произведения в определенной карте, достаточно в качестве векторных X, Y и ковекторных A, B полей в определении тензорного произведения выбрать координатный базис. Пусть в некоторой карте задано два тензорных поля:

$$\begin{aligned} K &= K_{\beta_1\cdots\beta_s}{}^{\alpha_1\cdots\alpha_r}\, e_{\alpha_1} \otimes e_{\alpha_r} \otimes e^{\beta_1} \cdots \otimes e^{\beta_s} \quad \in \mathcal{T}^r_s(\mathbb{M}), \\ L &= L_{\delta_1\cdots\delta_q}{}^{\gamma_1\cdots\gamma_p}\, e_{\gamma_1} \otimes e_{\gamma_p} \otimes e^{\delta_1} \cdots \otimes e^{\delta_q} \quad \in \mathcal{T}^p_q(\mathbb{M}). \end{aligned}$$

Тогда компоненты их тензорного произведения

$$(K \otimes L)_{\beta_1\cdots\beta_s\delta_1\cdots\delta_q}{}^{\alpha_1\cdots\alpha_r\gamma_1\cdots\gamma_p} = K_{\beta_1\cdots\beta_s}{}^{\alpha_1\cdots\alpha_r} L_{\delta_1\cdots\delta_q}{}^{\gamma_1\cdots\gamma_p}$$

просто равны произведению компонент каждого сомножителя, как чисел.

Пример 3.7.3. Произведение двух векторных полей $X \otimes Y$ дает контравариантный тензор второго ранга с компонентами

$$T(x) = T^{\alpha\beta}(x) e_\alpha \otimes e_\beta = X(x) \otimes Y(x) = X^\alpha(x) Y^\beta(x) e_\alpha \otimes e_\beta,$$

Эта операция является некоммутативной, поскольку первый индекс поля $T(x)$ относится к векторному полю X, а не Y. □

Вместе с тензорным умножением, множество тензорных полей $\mathcal{T}(\mathbb{M})$ образует некоммутативную ассоциативную *тензорную алгебру* над полем вещественных чисел. Эта алгебра бесконечномерна, поскольку векторное пространство тензоров фиксированного типа бесконечномерно само по себе и, вдобавок, ранг тензоров неограничен. Алгебра тензоров имеет естественную градуировку, как прямая сумма тензоров фиксированного типа. Образующими тензорной алгебры являются векторные поля и 1-формы.

Каждой паре индексов (i, j) таких, что $1 \le i \le r$ и $1 \le j \le s$, мы ставим в соответствие линейное отображение $C : \mathcal{T}^r_s \to \mathcal{T}^{r-1}_{s-1}$:

$$\begin{aligned} &X_1 \otimes \cdots \otimes X_r \otimes A_1 \otimes \cdots \otimes A_s \quad \to \\ &\quad \to (A_j, X_i) X_1 \otimes \cdots X_{i-1} \otimes X_{i+1} \otimes \cdots \otimes X_r \otimes A_1 \otimes \cdots \otimes A_{j-1} \otimes \cdots \otimes A_{j+1} \otimes A_s, \end{aligned}$$

где $(A_j, X_i) = A_j(X_i)$ – значение 1-формы A_j на векторе X_i. Это отображение называется *сверткой* и обозначается C^j_i. Компоненты свернутого тензора $K \in \mathcal{T}^r_s$ имеют вид

$$K_{\beta_1\cdots\beta_{j-1}\gamma\beta_{j+1}\cdots\beta_s}{}^{\alpha_1\cdots\alpha_{i-1}\gamma\alpha_{i+1}\cdots\alpha_r} = \delta^{\beta_j}_{\alpha_i} K_{\beta_1\cdots\beta_s}{}^{\alpha_1\cdots\alpha_r}.$$

Пример 3.7.4. Тензору типа $(1,1)$ ставится в соответствие скалярное поле $\mathsf{tr}\, K = K_\alpha{}^\alpha$, которое называется *следом* тензора $K = K_\beta{}^\alpha e_\alpha \otimes e^\beta$. □

Пример 3.7.5. Значением 1-формы $A = dx^\alpha A_\alpha$ на векторном поле $X = X^\alpha \partial_\alpha$ является свертка тензорного произведения $A \otimes X$: $\langle X, A\rangle = A(X) = X^\alpha A_\alpha$. □

Тензорное поле $K \in \mathcal{T}^r_s(\mathbb{M})$ называется *разложимым*, если его можно представить в виде

$$K = X_1 \otimes \cdots \otimes X_r \otimes A_1 \otimes \cdots \otimes A_s,$$

для некоторых векторов: $X_i \in \mathcal{T}^1(\mathbb{M})$, $i = 1, \cdots, r$ и 1-форм: $A_j \in \mathcal{T}_1(\mathbb{M})$, $j = 1, \cdots, s$.

Пример 3.7.6. Сумма двух разложимых контравариантных тензоров второго ранга

$$X_1 \otimes Y_1 + X_2 \otimes Y_2 = (X_1^\alpha Y_1^\beta + X_2^\alpha Y_2^\beta) e_\alpha \otimes e_\beta$$

может не быть разложимым тензором. □

Если тензор имеет два или более индексов одного типа, то с помощью симметризации или антисимметризации по верхним или нижним индексам можно строить новые тензорные поля. Поскольку преобразование координат действует одинаково на каждый ковариантный и контравариантный индекс, то симметризация и антисимметризация индексов является инвариантной операцией и свойство симметрии по индексам сохраняется при преобразовании координат.

Тензорное поле называется *неприводимым*, если нельзя найти такие линейные комбинации его компонент с постоянными коэффициентами, которые сами образовывали бы тензор.

Пример 3.7.7. Скалярные, векторные поля и 1-формы являются неприводимыми тензорными полями. □

Ковариантные или контравариантные тензорные поля второго ранга приводимы, т.к. их компоненты можно разложить на симметричную и антисимметричную неприводимую части

$$X_{\alpha\beta} = X_{(\alpha\beta)} + X_{[\alpha\beta]}, \tag{3.46}$$

где

$$X_{(\alpha\beta)} = \frac{1}{2}(X_{\alpha\beta} + X_{\beta\alpha}), \qquad X_{[\alpha\beta]} = \frac{1}{2}(X_{\alpha\beta} - X_{\beta\alpha}).$$

Замечание. Выделение следа у тензоров со всеми ковариантными или контравариантными индексами невозможно без наличия метрики. □

Тензорное поле $X_\alpha{}^\beta$ типа (1,1) также приводимо, поскольку у него можно выделить след X и бесследовую часть $Y_\alpha{}^\beta$ $(Y_\alpha{}^\alpha = 0)$

$$X_\alpha{}^\beta = Y_\alpha{}^\beta + \frac{1}{n}\delta^\beta_\alpha \,\mathsf{tr}\, X, \tag{3.47}$$

где

$$\mathsf{tr}\, X = X_\alpha{}^\alpha, \qquad Y_\alpha{}^\beta = X_\alpha{}^\beta - \frac{1}{n}\delta^\beta_\alpha \,\mathsf{tr}\, X.$$

Тензорные поля более высокого ранга, в общем случае, приводимы. Если на многообразии не задано никаких других объектов, кроме тензорного поля, то разложение на неприводимые компоненты может осуществляться только с помощью взятия следа, симметризации или антисимметризации по индексам.

Замечание. При проведении вычислений с тензорными полями важно иметь ввиду следующее обстоятельство. Если тензорное поле приводимо, то его разложение на неприводимые компоненты в большинстве случаев упрощает вычисления и проясняет математическую структуру модели. □

Пример 3.7.8. *Символ Кронекера*, компоненты которого в каждой карте многообразия $\mathbb{M}$ составляют n-мерную единичную матрицу,

$$\delta^\alpha_\beta = \begin{cases} 1, & \alpha = \beta, \\ 0, & \alpha \neq \beta, \end{cases} \tag{3.48}$$

и имеют один верхний и один нижний индекс, является тензорным полем типа $(1,1)$. Он инвариантен относительно преобразований координат

$$\delta^{\alpha'}_{\beta'} = \frac{\partial x^\beta}{\partial x^{\beta'}} \delta^\alpha_\beta \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^\alpha} = \frac{\partial x^\beta}{\partial x^{\beta'}} \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^\beta} = \begin{cases} 1, & \alpha' = \beta', \\ 0, & \alpha' \neq \beta', \end{cases}$$

т.к. верхний и нижний индексы преобразуется с помощью взаимно обратных матриц. Символ Кронекера представляет собой исключение. Во-первых, он инвариантен относительно преобразований координат и, во-вторых, его индексы можно писать один под другим, поскольку подъем и опускание индексов с помощью метрики приводит к симметричным тензорам. □

Тензорное поле $T_\alpha{}^\beta \in \mathcal{T}^1_1(\mathbb{M})$ типа $(1,1)$ можно рассматривать, как линейный оператор (эндоморфизм), действующий в пространстве векторов $\mathcal{T}^1(\mathbb{M})$ и 1-форм $\mathcal{T}_1(\mathbb{M})$. В компонентах действие оператора задается правилами:

$$A'_\alpha = T_\alpha{}^\beta A_\beta, \qquad X'^\alpha = X^\beta T_\beta{}^\alpha.$$

Действие оператора $T_\alpha{}^\beta$ естественным образом распространяется на тензоры произвольного типа.

Пример 3.7.9. Символ Кронекера представляет собой тождественный оператор. □

Пример 3.7.10. Проекционные операторы (5.25) являются тензорными полями типа $(1,1)$. □

На многообразии $\mathbb{M}$ можно также определить *тензорные плотности* степени p и ранга (r,s), если при преобразовании координат все их компоненты умножить на якобиан преобразования в степени p, как и в случае скалярных полей (3.5). Например, тензорная плотность типа $(1,1)$ и степени p преобразуется по-правилу

$$X_{\alpha'}{}^{\beta'} = J^p \frac{\partial x^\alpha}{\partial x^{\alpha'}} X_\alpha{}^\beta \frac{\partial x^{\beta'}}{\partial x^\beta}. \tag{3.49}$$

В каждой точке многообразия тензорные плотности фиксированного типа и степени образуют векторное пространство над полем вещественных чисел и модуль над алгеброй гладких функций. По аналогии с тензорным произведением тензоров можно ввести тензорное произведение плотностей, которое двум плотностям типа (r_1, s_1), (r_2, s_2) и степени p_1, p_2 ставит в соответствие тензорную плотность типа (r_1+r_2, s_1+s_2) и степени p_1+p_2. Если ограничиться случаем, когда степени плотностей p пробегают счетное множество значений, то множество тензорных плотностей и всех их линейных комбинаций в фиксированной точке образует некоммутативную ассоциативную

алгебру над полем вещественных чисел. Эта алгебра имеет естественную градуировку, как прямая сумма тензорных плотностей фиксированного типа и степени.

Так же, как и в случае скалярных плотностей тензорные плотности ${X_{\beta_1\dots\beta_s}}^{\alpha_1\dots\alpha_r}$ степени p можно представить в виде

$$ {X_{\beta_1\dots\beta_s}}^{\alpha_1\dots\alpha_r} = e^{-p}{Y_{\beta_1\dots\beta_s}}^{\alpha_1\dots\alpha_r}, $$

где $e = \mathsf{det}\, {e_\alpha}^a$ – определитель репера, а ${Y_{\beta_1\dots\beta_s}}^{\alpha_1\dots\alpha_r}$ – тензорное поле того же типа, что и исходная тензорная плотность.

Множество тензорных полей можно интерпретировать, как множество полилинейных отображений.

Теорема 3.7.1. *Множество ковариантных тензорных полей $\mathcal{T}_s(\mathbb{M})$ можно рассматривать, как s линейное отображение ($\mathcal{C}^\infty(\mathbb{M})$-модуль) из $\underbrace{\mathcal{X}\times\ldots\times\mathcal{X}}_{s}$ в алгебру функций $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{M})$ такое, что*

$$ K(f_1X_1,\dots,f_sX_s) = f_1\dots f_sK(X_1,\dots,X_s), \qquad K(x)\in\mathcal{T}_s(\mathbb{M}), $$

для всех $f_i\in\mathcal{C}^\infty(\mathbb{M})$ и $X_i\in\mathcal{X}(\mathbb{M})$. Обратно, каждое такое отображение можно рассматривать, как тензорное поле типа $(0,s)$.

Доказательство. См., например, [?]. □

Аналогично можно интерпретировать тензоры произвольного типа (r,s), как множество всех $r+s$ линейных отображений:

$$ \mathcal{T}^r_s(\mathbb{M}):\ \underbrace{\mathcal{X}\times\cdots\times\mathcal{X}}_{s}\times\underbrace{\Lambda^1\times\cdots\times\Lambda^1}_{r}\ \to\ \mathcal{C}^\infty(\mathbb{M}). \tag{3.50} $$

Поскольку между тензорными полями и полилинейными отображениями существует взаимно однозначное соответствие, то некоторые авторы принимают эти отображения в качестве глобального определения тензорных полей.

3.8 Полностью антисимметричные тензоры

В настоящем разделе мы рассмотрим полностью антисимметричные тензоры, которые играют очень важную роль в различных приложениях дифференциальной геометрии.

Рассмотрим тензорные поля типа $(r,0)$ или $(0,r)$ при $r\le n$ на многообразии $\mathbb{M}$, $\mathsf{dim}\,\mathbb{M}=n$, компоненты которых антисимметричны относительно перестановки любой пары индексов. В инвариантном виде условие антисимметричности для ковариантных тензоров записывается в виде:

$$ T(X_1,\dots,X_i,\dots,X_j,\dots,X_r) = -T(X_1,\dots,X_j,\dots,X_i,\dots,X_r), \qquad 1\le i<j\le r, $$

где $T\in\mathcal{T}_r(\mathbb{M})$, $X_1,\dots,X_r\in\mathcal{X}(\mathbb{M})$. Эти тензоры неприводимы и называются *полностью антисимметричными* тензорами ранга r. Компонента полностью антисимметричного тензорного поля может быть отлична от нуля только в том случае, если все индексы различны, поскольку при совпадении двух или более индексов соответствующая компонента равна нулю. На многообразии размерности n не существует

полностью антисимметричного тензора ранга большего, чем размерность многообразия, т.к. в этом случае по крайней мере два индекса будут совпадать. Очевидно, что число независимых компонент полностью антисимметричного тензора ранга r равно $C_n^r = n!/r!(n-r)!$. В частности, полностью антисимметричный тензор $X_{\alpha_1\ldots\alpha_n}$ максимального ранга n имеет только одну независимую компоненту. Нетрудно проверить, что при преобразовании координат $x \to y(x)$ полностью антисимметричный тензор типа $(0, n)$ преобразуется по закону

$$X'_{\alpha_1\ldots\alpha_n} = \frac{\partial x^{[\beta_1}}{\partial y^{\alpha_1}} \ldots \frac{\partial x^{\beta_n]}}{\partial y^{\alpha_n}} X_{\beta_1\ldots\beta_n} = X_{\alpha_1\ldots\alpha_n} J^{-1}, \tag{3.51}$$

где $J = \det(\partial y^\alpha / \partial x^\beta)$ – якобиан преобразования координат. То есть каждая компонента полностью антисимметричного ковариантного тензора максимального ранга умножается на якобиан преобразования в минус первой степени, и ее фиксированную компоненту можно рассматривать как скалярную плотность веса -1.

В каждой карте $(\mathbb{U}, \varphi)$ можно построить полностью антисимметричный объект, компоненты которого равны по модулю единице

$$\hat{\varepsilon}_{\alpha_1\ldots\alpha_n} = \operatorname{sgn}\sigma(\alpha_1 \ldots \alpha_n), \qquad \hat{\varepsilon}_{1\ldots n} = 1, \tag{3.52}$$

где $\operatorname{sgn}\sigma$ – *знак перестановки* σ, который равен $+1$ или -1, если для получения последовательности индексов $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ из последовательности натуральных чисел $1, \ldots, n$ необходимо переставить соответственно четное и нечетное число пар индексов. Объект $\hat{\varepsilon}_{\alpha_1\ldots\alpha_n}$ не может быть тензором, т.к. в общем случае якобиан преобразования J отличен от единицы. Из закона преобразования тензорных плотностей (3.5) следует, что каждую фиксированную компоненту $\hat{\varepsilon}_{\alpha_1\ldots\alpha_n}$ можно рассматривать, как скалярную тензорную плотность степени 1. Поскольку компоненты антисимметричной тензорной плотности постоянны, то в произвольной системе координат имеем

$$\partial_\alpha \hat{\varepsilon}_{\alpha_1\ldots\alpha_n} = 0. \tag{3.53}$$

В римановом пространстве при наличии метрики $g_{\alpha\beta}$ (см. раздел 5.1) можно построить полностью антисимметричный тензор

$$\varepsilon_{\alpha_1\ldots\alpha_n} = e\hat{\varepsilon}_{\alpha_1\ldots\alpha_n}, \tag{3.54}$$

где введено сокращенное обозначение для корня из модуля определителя метрики, которое будет часто использоваться в дальнейшем

$$e = \sqrt{g}, \qquad g = |\det g_{\alpha\beta}|. \tag{3.55}$$

Полностью антисимметричный тензор (3.54) преобразуется по стандартному закону (3.51).

Здесь и в дальнейшем мы примем следующее обозначение: шляпка над символом означает, что рассматривается тензорная плотность, а не тензор.

Полностью антисимметричные тензоры типа $(k, 0)$ со всеми контравариантными индексами называются *поливекторами*. Поливектор максимального ранга n имеет одну независимую компоненту, которая преобразуется по правилу

$$X'^{\alpha_1\ldots\alpha_n} = X^{\alpha_1\ldots\alpha_n} J, \tag{3.56}$$

В пространстве контравариантных тензоров можно ввести полностью антисимметричную тензорную плотность степени -1 с компонентами, равными по модулю единице, аналогично тому, как это было сделано для ковариантных тензоров. Мы положим

$$\hat{\varepsilon}^{\alpha_1\ldots\alpha_n} = \hat{\varepsilon}_{\alpha_1\ldots\alpha_n}\,\mathsf{sgn}\,, \tag{3.57}$$

где множитель sgn зависит от того задана ли на многообразии метрика или нет

$$\mathsf{sgn} = \begin{cases} 1, & \text{если метрика не задана,} \\ \mathsf{sgn}\,(\det g_{\alpha\beta}), & \text{если метрика задана.} \end{cases} \tag{3.58}$$

Компоненты этой плотности также равны по модулю единице и постоянны $\partial_\alpha \hat{\varepsilon}^{\alpha_1\ldots\alpha_n} = 0$. При наличии метрики можно ввести полностью антисимметричный контравариантный тензор

$$\varepsilon^{\alpha_1\ldots\alpha_n} = \frac{1}{e}\hat{\varepsilon}^{\alpha_1\ldots\alpha_n}. \tag{3.59}$$

Замечание. Отметим, что равенство (3.57) имеет смысл, несмотря на то, что индексы слева контравариантны, а справа ковариантны, т.к. компоненты тензорных плотностей $\hat{\varepsilon}$ не зависят от выбора системы координат. Появление множителя (3.58) в определении (3.57) объясняется тем, что на римановом многообразии мы требуем, чтобы тензор с контравариантными индексами можно было бы получить из тензора с ковариантными индексами простым подъемом индексов:

$$\hat{\varepsilon}^{\alpha_1\ldots\alpha_n} = g(g^{\alpha_1\beta_1}\ldots g^{\alpha_n\beta_n})\hat{\varepsilon}_{\beta_1\ldots\beta_n} = \hat{\varepsilon}_{\alpha_1\ldots\alpha_n}\,\mathsf{sgn}\,. \qquad \square$$

Наличие тензора $\varepsilon_{\alpha_1\ldots\alpha_n}$ позволяет представить компоненты произвольного антисимметричного тензора максимального ранга в виде

$$X_{\alpha_1\ldots\alpha_n} = X^*(x)\varepsilon_{\alpha_1\ldots\alpha_n}, \qquad X^* = \hat{\varepsilon}^{\alpha_1\ldots\alpha_n}X_{\alpha_1\ldots\alpha_n}\,\mathsf{sgn}\,, \tag{3.60}$$

где $X^*(x)$ – некоторое (псевдо-)скалярное поле.

3.9 Отображения многообразий

Рассмотрим отображение h многообразия $\mathbb{M}$, $\mathsf{dim}\,\mathbb{M} = m$, в многообразие $\mathbb{N}$, $\mathsf{dim}\,\mathbb{N} = n$,

$$h: \quad \mathbb{M} \to \mathbb{N}. \tag{3.61}$$

Многообразие $\mathbb{N}$ мы будем называть *пространством-мишенью*. Пусть при этом отображении карта $(\mathbb{U}, \varphi) \subset \mathbb{M}$ отображается в некоторую карту $(\mathbb{V}, \phi) \subset \mathbb{N}$, $h(\mathbb{U}) \subset \mathbb{V}$. Обозначим координаты на $\mathbb{U}$ и $\mathbb{V}$ через x^α, $\alpha = 1, \ldots, m$, и y^μ, $\mu = 1, \ldots, n$. Тогда отображение

$$\phi \circ h \circ \varphi^{-1}: \quad \mathbb{R}^m \supset \varphi(\mathbb{U}) \;\to\; \phi(\mathbb{V}) \subset \mathbb{R}^n \tag{3.62}$$

двух областей евклидова пространства $\varphi(\mathbb{U}) \subset \mathbb{R}^m$ и $\phi(\mathbb{V}) \subset \mathbb{R}^n$ задается n гладкими функциями от m переменных $y^\mu(x)$. При этом размерность многообразия $\mathbb{M}$ может быть меньше, равна или больше размерности $\mathbb{N}$. Отображение гладких многообразий называется *гладким*, если задается гладкими функциями (3.62) в полных атласах на $\mathbb{M}$ и $\mathbb{N}$. В дальнейшем мы будем рассматривать только гладкие отображения.

Отображение (3.61) индуцирует линейное отображение касательных пространств

$$h_*: \quad \mathbb{T}_x(\mathbb{M}) \ni X = X^\alpha\partial_\alpha \;\mapsto\; Y = Y^\mu\partial_\mu \in \mathbb{T}_{h(x)}(\mathbb{N}) \tag{3.63}$$

следующим образом. Рассмотрим кривую $\gamma_p \subset \mathbb{M}$, проходящую через произвольную точку $p \in \mathbb{M}$ в направлении произвольного вектора $X_{(\gamma)}(p)$. Эта кривая отобразится в некоторую кривую $h(\gamma_p)$ на $\mathbb{N}$. По определению, вектор $X_{(\gamma)}(p) \in \mathbb{T}_p(\mathbb{M})$ отображается в тот вектор $Y_{(h\circ\gamma)} \in \mathbb{T}_{h(p)}(\mathbb{N})$, который касается кривой $h(\gamma_p)$ в точке $h(p)$. Поскольку вектор в точке p – это класс эквивалентности кривых, то это условие записывается в виде

$$h_*(X_{(\gamma)}(p)) = [h \circ \gamma_p] = Y_{(h\circ\gamma)}(f(p)), \qquad X_{(\gamma)}(p) = [\gamma_p].$$

Теперь мы упростим обозначения, опустив индекс кривой у вектора и обозначение точки p. Поскольку по правилу дифференцирования сложной функции

$$\dot{y}^\mu(\phi \circ h \circ \gamma(t)) = \frac{\partial y^\mu}{\partial x^\alpha}\dot{x}^\alpha(\gamma(t)),$$

то вектор Y единственен и не зависит от представителя класса эквивалентности кривых, определяющих вектор X в точке $x \in \mathbb{M}$. Это отображение касательных пространств (3.63) называется *дифференциалом отображения.*

В компонентах дифференциал отображения задается матрицей Якоби:

$$Y^\mu = X^\alpha \frac{\partial y^\mu}{\partial x^\alpha}. \tag{3.64}$$

Дифференциал отображения h_* является линейным отображением

$$h_*(X+Y) = h_*(X) + h_*(Y), \qquad X, Y \in \mathcal{X}(\mathbb{M}),$$
$$h_*(aX) = ah_*(X), \qquad a \in \mathbb{R}.$$

множества всех векторных полей $\mathcal{X}(\mathbb{M})$ на $\mathbb{M}$ в множество векторных полей $\mathcal{X}(h(\mathbb{M}))$ на образе $h(\mathbb{M}) \subset \mathbb{N}$, который может не совпадать со всем $\mathbb{N}$.

Дифференциал отображения согласован со структурами алгебры Ли в пространствах векторных полей, т.е.

$$h_*[X, Y] = [h_*X, h_*Y], \tag{3.65}$$

что проверяется прямой проверкой.

Рассмотрим два отображения $\mathbb{M} \xrightarrow{h} \mathbb{N} \xrightarrow{g} \mathbb{P}$. Если обозначить координаты на многообразиях $\mathbb{M}$, $\mathbb{N}$ и $\mathbb{P}$ соответственно через x, y и z, то по правилу дифференцирования сложной функции в соответствующих областях определения имеем

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x}.$$

Здесь, для краткости, мы опустили индексы. Отсюда следует, что дифференциал произведения равен произведению дифференциалов каждого отображения

$$(g \circ h)_* = g_* \circ h_*. \tag{3.66}$$

В координатах мы имеем обычное произведение матриц Якоби. Это уравнение говорит о том, что прямое отображение $g \circ h : \ \mathbb{M} \to \mathbb{P}$ не зависит от выбора промежуточного многообразия $\mathbb{N}$: $\mathbb{M} \to \mathbb{N} \to \mathbb{P}$.

Замечание. Поскольку сами многообразия в общем случае не являются векторными пространствами, то дифференциал отображения не имеет смысла производной по Фреше отображения h. □

Дифференциал отображения естественным образом обобщается на случай произвольных тензорных полей типа $(r,0)$, имеющих только контравариантные индексы, и обозначается $(h_*)^r$. При этом каждый контравариантный индекс суммируется с матрицей Якоби отображения.

Пример 3.9.1. Для компонент контравариантных тензоров второго ранга имеем

$$Y^{\mu\nu} = \frac{\partial y^\mu}{\partial x^\alpha}\frac{\partial y^\nu}{\partial x^\beta}X^{\alpha\beta},$$

где $X = X^{\alpha\beta}(x)\partial_\alpha \otimes \partial_\beta \in \mathcal{T}^2(\mathbb{M})$ и $Y = Y^{\mu\nu}(y)\partial_\mu \otimes \partial_\nu \in \mathcal{T}^2(\mathbb{N})$ □

Замечание. Если векторное поле рассматривается, как дифференцирование в алгебре функций, то дифференциал отображения определяется следующей формулой

$$(h_*X)f = X(f\circ h), \quad \forall\ f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{N}),\ X \in \mathcal{X}(\mathbb{M}). \tag{3.67}$$

При таком определении дифференциала отображения, его линейность очевидна. Это еще раз говорит о том, что алгебраические определения удобнее в тех случаях, когда исследуются алгебраические свойства. □

Отображение h индуцирует *возврат отображения* в кокасательных пространствах, который мы обозначим тем же символом, но со звездочкой вверху:

$$h^*: \quad \mathbb{T}^*_{h(x)}(\mathbb{N}) \ni B \ \mapsto A \in \mathbb{T}^*_x(\mathbb{M}). \tag{3.68}$$

Возврат отображения h^* дуален к дифференциалу отображения h_* и определяется следующим равенством

$$A(X) = B(Y) \quad \text{или} \quad h^*B(X) = B(h_*X). \tag{3.69}$$

Отметим, что возврат отображения действует в сторону, обратную самому отображению h.

Возврат отображения определен не на всех формах из $\mathcal{T}_1(\mathbb{N})$, а только на формах из образа отображения $\mathcal{T}_1(h(\mathbb{M}))$. Возврат отображения h^* будет определен на множестве всех форм $\mathcal{T}_1(\mathbb{N})$ только в том случае, если отображение h сюръективно.

В компонентах возврат отображения записывается в виде

$$A_\alpha = \frac{\partial y^\mu}{\partial x^\alpha}B_\mu, \tag{3.70}$$

т.е. так же, как и дифференциал отображения, определяется матрицей Якоби.

Возврат отображения естественным образом обобщается на тензорные поля из $\mathcal{T}_s(\mathbb{N})$ типа $(0,s)$, имеющие только ковариантные индексы, и обозначается $(h^*)^s$.

Пример 3.9.2. Для компонент ковариантных тензоров второго ранга имеем

$$X_{\alpha\beta} = \frac{\partial y^\mu}{\partial x^\alpha}\frac{\partial y^\nu}{\partial x^\beta}Y_{\mu\nu},$$

где $X = X_{\alpha\beta}(x)dx^\alpha \otimes dx^\beta \in \mathcal{T}_2(\mathbb{M})$ и $Y = Y_{\mu\nu}(y)dy^\mu \otimes dy^\nu \in \mathcal{T}_2(\mathbb{N})$ □

Из правила дифференцирования сложных функций следует, что возврат произведения отображений равен произведению возвратов отображений, но взятых в обратном порядке

$$(g \circ f)^* = f^* \circ g^*.$$

Для тензоров смешанного типа в общем случае не существует индуцированного отображения, поскольку дифференциал и возврат отображения действуют в разные стороны.

Назовем *рангом отображения* h ранг соответствующей матрицы Якоби

$$\mathsf{rank}\, h = \mathsf{rank}\, \frac{\partial y^\mu}{\partial x^\alpha}.$$

Если $\mathsf{rank}\, h = m$ во всех точках многообразия $\mathbb{M}$, то отображение h называется *невырожденным*. Для этого необходимо, чтобы $m \leq n$.

Рассмотрим отображение (3.61) двух многообразий одинаковой размерности $\mathsf{dim}\, \mathbb{M} = \mathsf{dim}\, \mathbb{N}$ и одного класса дифференцируемости $\mathcal{C}^k$. Если отображение h биективно, и оба отображения h и h^{-1} в координатах задаются функциями класса $\mathcal{C}^k$, то отображение h называется *диффеоморфизмом*.

Пример 3.9.3. Пусть $(\mathbb{U}, \varphi)$ карта на многообразии $\mathbb{M}$. Тогда отображение $\varphi : \mathbb{U} \to \varphi(\mathbb{U}) \subset \mathbb{R}^n$ является диффеоморфизмом. □

Пример 3.9.4. Преобразование координат $\mathbb{U}_0 \to \mathbb{U}'_0$ в теореме 2.5.1 является диффеоморфизмом. □

Композиция двух диффеоморфизмов снова будет диффеоморфизмом. Таким образом, диффеоморфизм является отношением эквивалентности в категории дифференцируемых многообразий. С точки зрения дифференциальной геометрии два диффеоморфных между собой многообразия можно рассматривать, как одно многообразие, заданное в различных координатах, поэтому мы пишем $\mathbb{M} \approx \mathbb{N}$[1]. В этом случае индуцированные отображения касательных пространств представляют собой не что иное, как правила преобразования тензорных полей при преобразовании координат. Отметим, что не имеет смысла рассматривать степень гладкости отображения, которая превышает гладкость самих многообразий.

Любой диффеоморфизм представляет собой гомеоморфизм многообразий, рассматриваемых, как топологические пространства, т.к. функции h и h^{-1} непрерывны. Обратное утверждение неверно. Как уже отмечалось, на семимерной сфере можно задать несколько дифференцируемых структур. То есть гомеоморфные многообразия могут быть недиффеоморфны.

Множество гладких отображений $h : \mathbb{M} \to \mathbb{M}$ образует группу преобразований многообразия, которая обозначается $\mathsf{diff}\,(\mathbb{M})$. Если многообразие тривиально (т.е. покрывается одной картой), то это просто группа преобразований координат $\mathsf{diff}\,(\mathbb{R}^n)$.

Пусть для отображения (3.61) $m < n$. Если отображение касательного пространства $\mathbb{T}_x(\mathbb{M})$ для всех точек $x \in \mathbb{M}$ на его образ в касательном пространстве $\mathbb{T}_{h(x)}(\mathbb{N})$ является взаимно однозначным, т.е. $\mathsf{rank}\, h = \mathsf{dim}\, \mathbb{M}$, то отображение h называется *погружением*. По-определению, любое невырожденное отображение задает погружение. При погружении само отображение h может не быть взаимно однозначным. Размерность многообразия $\mathbb{M}$ не может превосходить размерности многообразия $\mathbb{N}$,

[1] Мы не используем обычный знак равенства, т.к. множества точек $\mathbb{M}$ и $\mathbb{N}$ могут отличаться по другим признакам, например, по наличию групповой структуры.

т.к. в этом случае не может быть взаимной однозначности дифференциала отображения. Если само отображение h на его образ $h(\mathbb{M})$ и его дифференциал являются взаимно однозначными, то отображение h называется *вложением*. Конечно, каждое вложение одновременно является и погружением.

Пример 3.9.5. Отображение окружности $\mathbb{S}^1$ на плоскость $\mathbb{R}^2$ в виде восьмерки является погружением, но не вложением, см. рис. 3.6,*a*. В то же время отображение окружности в гладкую замкнутую кривую без самопересечений представляет собой вложение, рис. 3.6,*b*. □

Рис. 3.6: Отображение окружности на плоскость в виде восьмерки является погружением, но не вложением, *a*. Вложение окружности в плоскость в виде гладкой замкнутой кривой без самопересечений,*b*. fcirem

Если $m = n$, отображение h биективно и образ $h(\mathbb{M})$ совпадает со всем $\mathbb{N}$, то точки многообразий $\mathbb{M}$ и $\mathbb{N}$ можно отождествить и рассматривать вложение $\mathbb{M} \xrightarrow{h} \mathbb{N} \approx \mathbb{M}$ как диффеоморфизм. Нетривиальная ситуация может возникнуть, если многообразие $\mathbb{M}$ отображается только на часть $\mathbb{N}$. Тогда мы имеем диффеоморфизм между многообразием $\mathbb{M}$ и его образом $h(\mathbb{M})$.

3.10 Подмногообразия

Важным классом отображений многообразий являются подмногообразия.

Определение. Пусть f – вложение многообразия $\mathbb{M}$ в $\mathbb{N}$, размерностей m и n, $m \leq n$, тогда пара $(f, \mathbb{M})$ называется *подмногообразием* в $\mathbb{N}$.

В дальнейшем под вложением мы понимаем, как правило, дифференцируемое вложение, когда отображение f определяется дифференцируемыми функциями.

Пример 3.10.1 (Лемниската Бернулли). Кривая четвертого порядка, заданная в декартовых координатах на плоскости $\mathbb{R}^2$ уравнением

$$(x^2 - y^2)^2 - 2a^2(x^2 - y^2) = 0, \qquad a \in \mathbb{R},$$

называется *лемнискатой Бернулли*. В полярных координатах уравнение лемнискаты имеет вид:

$$r^2 = 2a^2 \cos(2\varphi).$$

Лемниската Бернулли не является одномерным многообразием, т.к. имеет точку самопересечения – начало координат. Точка самопересечения имеет касательные $y = \pm x$ и является точкой перегиба. Площадь каждой петли равна a^2.

Рассмотрим вложение прямой в евклидову плоскость

$$\gamma : \ \mathbb{R} \ni t \ \mapsto \ (x, y) \in \mathbb{R}^2,$$

гладко отобразив прямую в точки лемнискаты, как показано на рис.**??**. При этом мы считаем, что точка $t = 0$ отображается в начало координат $(0, 0) \in \mathbb{R}^2$. Стрелки показывают, что концы прямой $t = \pm\infty$ при вложении стремятся к началу координат

$(0,0) \in \mathbb{R}^2$. Это – гладкое вложение. Однако топология прямой не совпадает с топологией, которая индуцирована вложением. Действительно, любая последовательность $\{t_k\}$ такая, что $\lim_{k\to\infty} x_k = \pm\infty$ в естественной топологии на прямой, будет сходится к точке $t = 0$ в индуцированной топологии. Конечно, вместо лемнискаты Бернулли можно было бы выбрать произвольную гладкую кривую в виде восьмерки. □

Пример 3.10.2 (Всюду плотная обмотка тора). Двумерный тор $\mathbb{T}^2 = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ можно рассматривать, как двумерное многообразие, полученное путем отождествления противоположных сторон единичного квадрата на евклидовой плоскости. Тем самым точка тора задается упорядоченной парой чисел $(x, y) \bmod 1$. Зафиксируем пару чисел a и $b \neq 0$ и рассмотрим отображение вещественной прямой в тор $f : \mathbb{R} \to \mathbb{T}^2$

$$f(t) = (at \bmod 1, bt \bmod 1).$$

Если отношение a/b иррационально, то отображение f является вложением, причем образ прямой $f(\mathbb{R})$ всюду плотен в $\mathbb{T}^2$ (*всюду плотная обмотка тора*). Если отношение a/b рационально, то f представляет собой погружение, и его образ диффеоморфен окружности. Согласно данному определению всюду плотная обмотка тора является одномерным подмногообразием на торе. Для всюду плотной обмотки тора индуцированная топология на образе прямой не совпадает с естественной топологией на $\mathbb{R}$. □

При вложении дифференцируемая структура и топология, заданные на $\mathbb{M}$, естественным образом переносятся на образ $f(\mathbb{M})$, поскольку отображение f инъективно и дифференцируемо. Тем самым многообразие $\mathbb{M}$ диффеоморфно своему образу $f(\mathbb{M})$. С другой стороны, поскольку образ $f(\mathbb{M})$ является подмножеством $\mathbb{N}$, то на нем определяется индуцированная из $\mathbb{N}$ топология. Рассмотренные примеры вложения прямой в плоскость и всюду плотной обмотки тора показывает, что топология на $f(\mathbb{M})$, наследуемая из $\mathbb{M}$ при вложении, совсем не обязательно совпадает с топологией, индуцированной из $\mathbb{N}$. В общем случае топология из $\mathbb{M}$ является более тонкой, чем топология, индуцированная из $\mathbb{N}$. Это наблюдение мотивирует следующее

Определение. Пусть вложение $f : \mathbb{M} \to \mathbb{N}$ является также и гомеоморфизмом. Тогда пара $(f, \mathbb{M})$ называется *регулярным подмногообразием*, а f – *регулярным вложением* $\mathbb{M}$ в $\mathbb{N}$. □

Доказательство следующих трех теорем приведено в [**?**].

Теорема 3.10.1. *Пусть $(f, \mathbb{M})$ является m-мерным подмногообразием в n-мерном многообразии $\mathbb{N}$, $m < n$. Для того, чтобы пара $(f, \mathbb{M})$ была регулярным подмногообразием в $\mathbb{N}$, необходимо и достаточно, чтобы оно было замкнутым подмногообразием некоторого открытого подмногообразия в $\mathbb{N}$.*

Теорема 3.10.2. *Пара $(f, \mathbb{M})$ является регулярным подмногообразием в $\mathbb{N}$ тогда и только тогда, когда для каждой точки $x \in \mathbb{M}$ существует система координат x^α на $\mathbb{U}_x \subset \mathbb{N}$, $x^\alpha(f(x)) = 0$, такая, что пересечение $f(\mathbb{M}) \cap \mathbb{U}_x$ определяется системой, состоящей из $n - m$ уравнений:*

$$x^1 = x^2 = \ldots = x^{n-m} = 0.$$

Теорема 3.10.3. *Пусть пара $(f, \mathbb{M})$ является подмногообразием в $\mathbb{N}$. Если многообразие $\mathbb{M}$ компактно, тогда вложение $f : \mathbb{M} \to \mathbb{N}$ регулярно.*

В дальнейшем под вложением мы будем понимать регулярное вложение, для краткости не оговаривая этого явно. В этом случае мы будем отождествлять подмногообразие $\mathbb{M}$ и его образ $f(\mathbb{M})$ и будем писать $\mathbb{M} \subset \mathbb{N}$.

Определение. Пусть $\mathbb{U}$ является открытым подмножеством $\mathbb{N}$. Если ограничить гладкую структуру $\mathbb{N}$ на $\mathbb{U}$, то $\mathbb{U}$ становится многообразием той же размерности $\dim \mathbb{U} = \dim \mathbb{N}$. Тогда вложение $f : \mathbb{U} \to \mathbb{N}$ осуществляется тождественным отображением, а подмногообразие $\mathbb{U} \subset \mathbb{N}$ называется *открытым подмногообразием* в $\mathbb{N}$.

Пусть $f(\mathbb{M})$ является подмногообразием в $\mathbb{N}$ таким, что выполнены два условия:
1) $f(M)$ – замкнутое подмножество в $\mathbb{N}$;
2) для каждой точки $x \in f(\mathbb{M})$ существует такая система координат x^α на $\mathbb{U}_x \subset \mathbb{N}$, что пересечение $f(\mathbb{M}) \cap \mathbb{U}_x$ задается уравнениями $x^1 = x^2 = \ldots = x^{n-m} = 0$, где $m = \dim \mathbb{M}$.

Тогда подмногообразие $f(\mathbb{M})$ называется *замкнутым подмногообразием* в $\mathbb{N}$. Размерность замкнутого подмногообразия $f(\mathbb{M})$ всегда меньше размерности $\mathbb{N}$. □

Замечание. Если подмногообразие (без края) $\mathbb{M} \subset \mathbb{N}$ имеет ту же размерность, что и $\mathbb{N}$, то оно будет обязательно открытым подмногообразием, т.к. в противном случае оно имело бы край. Теорема 3.10.2 утверждает, что любое подмногообразие $\mathbb{M} \subset \mathbb{N}$ меньшей размерности $1 < m < n$ является замкнутым подмногообразием. □

Мы видим, что подмногообразия меньшей размерности $1 < m < n$ в евклидовом пространстве $\mathbb{M} \subset \mathbb{R}^n$ можно задавать с помощью системы алгебраических уравнений на координаты, покрывающие все $\mathbb{R}^n$. Вернее, алгебраические уравнения задают только множества точек. Чтобы превратить это множество в многообразие мы предполагаем, что топология на $\mathbb{M}$ задается вложением $\mathbb{M} \xrightarrow{f} \mathbb{R}^n$. Тогда подмногообразие определяется системой уравнений по крайней мере локально. Обратное утверждение неверно. Не каждая система алгебраических уравнений на координаты в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$ определяет некоторое подмногообразие.

Пример 3.10.3. Рассмотрим уравнение $x^2 = y^2$ на евклидовой плоскости $\mathbb{R}^2$. Оно определяет две пересекающиеся прямые, которые не являются многообразием. □

Приведем критерий, который часто используется в приложениях.

Теорема 3.10.4. *Для того, чтобы подмножество $\mathbb{M} \subset \mathbb{R}^n$, $\dim \mathbb{M} = m \leq n$, было подмногообразием класса $\mathcal{C}^k$, необходимо и достаточно, чтобы для каждой точки $x \in \mathbb{M}$ существовала окрестность $\mathbb{U}$ этой точки и система $n-m$ функций $f^{\text{м}}(x) \in \mathcal{C}^k$, $\text{м} = m+1, \ldots, n$, определенных на $\mathbb{U}$, и обладающих следующими свойствами:*
1) функции $f^{\text{м}}$ – функционально независимы;
2) пересечение $\mathbb{U} \bigcap \mathbb{M}$ в точности определяется системой уравнений

$$f^{\text{м}} = 0, \qquad \text{м} = m+1, \ldots, n. \tag{3.71}$$

Доказательство. См., например, [?]. □

Заметим, что если $m = n$, то уравнений не будет, а $\mathbb{M}$ будет некоторым открытым подмножеством в $\mathbb{M}$. При $m = 0$ число уравнений равно размерности многообразия. Тогда, если в точке $x \in \mathbb{R}^n$ система уравнений (3.71) выполнена, то в некоторой окрестности точки x других решений кроме самой точки не будет. В этом случае

подмногообразие $\mathbb{M}$ имеет размерность 0 и представляет собой множество корней системы уравнений $f^{\text{м}} = 0$. Подмногообразие $(f, \mathbb{M})$ размерности $n-1$ в $\mathbb{N}$ называется *гиперповерхностью* в $\mathbb{N}$.

Напомним, что функции $f^{\text{м}}$ функционально независимы в области $\mathbb{U}$ тогда и только тогда, когда $n \times m$ матрица, составленная из частных производных

$$(\partial_\alpha f^{\text{м}}) = \begin{pmatrix} \partial_1 f^{m+1} & \partial_1 f^{m+2} & \dots & \partial_1 f^n \\ \partial_2 f^{m+1} & \partial_2 f^{m+2} & \dots & \partial_2 f^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \partial_n f^{m+1} & \partial_n f^{m+2} & \dots & \partial_n f^n \end{pmatrix} \tag{3.72}$$

имеет постоянный ранг m во всех точках $\mathbb{U}$.

Замечание. Забегая вперед, переформулируем условие 1) в теореме 3.10.4 в терминах 1-форм. По-определению, 1-формы $df^{\text{м}} = dx^\alpha \partial_\alpha f^{\text{м}}$, заданные в области $\mathbb{U}$, называются *линейно независимыми* в области $\mathbb{U}$, если в каждой точке этой области ранг матрицы (3.72) равен m. Поэтому условие функциональной независимости функций можно заменить условием линейной независимости 1-форм $df^{\text{м}}$. □

Если подмногообразие $\mathbb{M} \subset \mathbb{R}^n$ задано с помощью $n-m$ алгебраических уравнений (3.71), то множество функций $f^{\text{м}}$, в окрестности произвольной точки $x \in \mathbb{M}$ всегда можно дополнить m функциями $g^1(x), \dots, g^m(x)$ такими, что весь набор функций $g^1, \dots, g^m, f^{m+1}, \dots, f^n$ будет функционально независим. В этом случае можно перейти в новую систему координат

$$\begin{gathered} \{y^\alpha\} = \{y^{\text{а}}, y^{\text{м}}\} = \{g^{\text{а}}, f^{\text{м}}\} = \{g^1, \dots, g^n, f^{m+1}, \dots, f^n\}, \\ {\text{а}} = 1, \dots, m, \quad {\text{м}} = m+1, \dots, n, \end{gathered} \tag{3.73}$$

в которой подмногообразие $\mathbb{M}$ будет задаваться особенно просто $f^{\text{м}} = 0$. При этом функции $y^{\text{а}} = g^{\text{а}}$ образуют систему координат на подмногообразии $\mathbb{M} \subset \mathbb{R}^n$. Конечно, выбор координат $g^{\text{а}}$ на $\mathbb{M}$ является неоднозначным. Отметим, что $\{y^\alpha\}$ – это те координаты, которые фигурируют в теореме 3.10.2.

Пример 3.10.4. Двумерная сфера $\mathbb{S}^2_r$ радиуса r с центром в начале координат является замкнутым подмногообразием трехмерного евклидова пространства $\mathbb{R}^3$, которое задается одним уравнением (**??**). Она является гиперповерхностью в $\mathbb{R}^3$. В сферической системе координат уравнение сферы задается уравнением $r = \mathsf{const}$, а угловые координаты образуют систему координат на сфере. □

Скалярные функции $f^{\text{м}}(x)$ определяют $n-m$ 1-форм. В силу их линейной независимости, в каждой точке $x \in \mathbb{M}$ они определяют $(n-m)$-мерное подпространство в кокасательном пространстве $\mathbb{T}^*_x(\mathbb{R}^n)$. Ортогональное дополнение этого подпространства является касательным к подмногообразию $\mathbb{M}$ и образовано всеми векторами $X^\alpha \partial_\alpha \in \mathbb{T}_x(\mathbb{R}^n)$, для которых выполнено условие $X^\alpha \partial_\alpha f^{\text{м}} = 0$. Это подпространство касательного пространства имеет размерность m, такую же, как и само подмногообразие. Нетрудно проверить, что, если два векторных поля X_1 и X_2 касательны к подмногообразию $\mathbb{M}$, то их коммутатор $[X_1, X_2]$ также касателен.

Ответ на обратный вопрос, в каком случае распределение векторных полей на многообразии определяет касательные подпространства к некоторому подмногообразию, дает теорема Фробениуса (см. следующий раздел).

В координатах $\{g^{\text{A}}, f^{\text{M}}\}$ ортогональное дополнение касательного пространства к подмногообразию записывается особенно просто. Пусть в $\mathbb{R}^n$ задано векторное поле $X = X^\alpha \partial_\alpha$. Тогда в координатах, связанных с подмногообразием, оно будет иметь компоненты

$$X = (X^\alpha \partial_\alpha g^{\text{A}})\partial_{\text{A}} + (X^\alpha \partial_\alpha f^{\text{M}})\partial_{\text{M}}.$$

При этом первое и второе слагаемые задают векторы, касательные и ортогональные к подмногообразию $\mathbb{M} \subset \mathbb{N}$, соответственно.

Определение. Пусть $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{N})$ и $\mathbb{M} \subset \mathbb{N}$ – подмногообразие, тогда отображение

$$f|_{\mathbb{M}} : \quad \mathbb{M} \to \mathbb{R}.$$

называется *сужением* функции на подмногообразие. Функция f является *продолжением* функции g с некоторого подмногообразия $\mathbb{M}$ на все $\mathbb{N}$, если ее сужение на $\mathbb{M}$ совпадает с g, $f|_{\mathbb{M}} = g$. Аналогично, сужением произвольного тензорного поля $T \in \mathcal{T}(\mathbb{N})$ на подмногообразие называется тензорное поле $T|_{\mathbb{M}}$, рассматриваемое только в точках $x \in \mathbb{M}$. Обратно, тензорное поле $T \in \mathcal{T}(\mathbb{N})$ является продолжением тензорного поля $K \in \mathcal{T}(\mathbb{N})$, заданного на подмногообразии $\mathbb{M}$, если его сужение совпадает с K, $T|_{\mathbb{M}} = K$. □

3.11 Теорема Фробениуса

В разделе 3.6.5 было показано, что у любого векторного поля X существует интегральная кривая. Если векторное поле нигде не обращается в нуль на многообразии $\mathbb{M}$, $\dim \mathbb{M} = n$, то интегральная кривая, проходящая через точку $x \in \mathbb{M}$, представляет собой одномерное подмногообразие, и в окрестности точки x существует такая система координат, что $X = \partial_1$. Поставим более общую задачу. Пусть в некоторой окрестности $\mathbb{U} \subset \mathbb{M}$ задано k векторных полей $\{X_1, \ldots, X_k\} = \{X_{\text{A}}\}$, $\text{A} = 1, \ldots, k < n$, которые линейно независимы в каждой точке $x \in \mathbb{U}$. Возникает вопрос о том, существуют ли такие подмногообразия в $\mathbb{M}$, касательные пространства к которым в каждой точке $x \in \mathbb{U}$ совпадают с подпространством, натянутым на векторы $\{X_{\text{A}}\}$? Ответ на этот вопрос дает теорема Фробениуса. Чтобы ее сформулировать введем несколько новых понятий.

Определение. *Распределением* $\mathcal{L}_k(\mathbb{M})$ размерности k на многообразии $\mathbb{M}$ называется сопоставление каждой точке $x \in \mathbb{M}$ k-мерного подпространства в касательном пространстве $\mathbb{L}_x(\mathbb{M}) \subset \mathbb{T}_x(\mathbb{M})$. Распределение называется *дифференцируемым*, если каждая точка $x \in \mathbb{M}$ имеет окрестность $\mathbb{U}$ и k дифференцируемых векторных полей $\{X_1, \ldots, X_k\}$, которые образуют базис в $\mathbb{L}_x(\mathbb{M})$ для всех $x \in \mathbb{U}$. Множество векторных полей $\{X_1, \ldots, X_k\}$ называется *локальным базисом* распределения $\mathcal{L}_k(\mathbb{M})$ на $\mathbb{U}$. Векторное поле X принадлежит распределению, если $X(x) \in \mathbb{L}_x(\mathbb{M})$ для всех $x \in \mathbb{M}$. Распределение называется *инволютивным* или *вполне интегрируемым*, если для любых векторных полей из распределения $X, Y \in \mathcal{L}_k(\mathbb{M})$ их коммутатор также принадлежит распределению $[X, Y] \in \mathcal{L}_k(\mathbb{M})$. □

Замечание. Ни одно из векторных полей X_{A} не может обращаться в нуль, т.к. в соответствующей точке векторные поля были бы линейно зависимы. □

Замечание. Инволютивность векторных полей, принадлежащих распределению, означает, что эти векторные поля образуют подалгебру Ли алгебры Ли векторных полей $\mathcal{X}(\mathbb{M})$. □

Определение. Связное подмногообразие $\mathbb{N} \xrightarrow{f} \mathbb{M}$ называется *интегральным многообразием* распределения $\mathcal{L}_k(\mathbb{M})$, если $f_*(\mathbb{T}_x(\mathbb{N})) = \mathbb{L}_{f(x)}(\mathbb{M})$, для всех $x \in \mathbb{N}$. Если не существует других интегральных многообразий, содержащих $\mathbb{N}$, то $\mathbb{N}$ называется *максимальным интегральным многообразием* для распределения $\mathcal{L}_k(\mathbb{M})$. □

Замечание. Поскольку интегральное многообразие – это подмногообразие и, следовательно задается парой $(f, \mathbb{N})$, где f – вложение $\mathbb{N}$ в $\mathbb{M}$, то определение максимального интегрального многообразия требует уточнения. А именно, мы говорим, что интегральное многообразие $(f_1, \mathbb{N}_1)$ содержит интегральное многообразие $(f_2, \mathbb{N}_2)$, если $f_1(\mathbb{N}_1)$ есть подмножество в $f_2(\mathbb{N}_2)$: $f_1(\mathbb{N}_1) \supset f_2(\mathbb{N}_2)$. Из определения максимального интегрального многообразия сразу следует его единственность. □

Предложение 3.11.1. *Пусть $\mathcal{L}_k(\mathbb{M})$ – гладкое распределение на многообразии $\mathbb{M}$ такое, что через каждую точку $x \in \mathbb{M}$ проходит интегральное многообразие, тогда распределение $\mathcal{L}_k(\mathbb{M})$ инволютивно.*

Доказательство. Пусть X, Y – два произвольных векторных поля, принадлежащих распределению $\mathcal{L}_k(\mathbb{M})$. Пусть $(f, \mathbb{N})$ – интегральное многообразие, проходящее через точку $f(x) \in \mathbb{M}$, $x \in \mathbb{N}$. Поскольку отображение f в каждой точке интегрального многообразия $x \in \mathbb{N}$ задает изоморфизм $\mathbb{T}_x(\mathbb{N}) \simeq \mathbb{L}_{f(x)}(\mathbb{M})$, то существуют векторные поля $\tilde{X}(x) = f_*^{-1}X(f(x))$ и $\tilde{Y} = f_*^{-1}Y(f(x))$ на подмногообразии $\mathbb{N}$. Поскольку коммутатор касательных векторов к $\mathbb{N}$ также касателен к $\mathbb{N}$, то $[X, Y](f(x)) = f_*[\tilde{X}, \tilde{Y}](x) \in \mathbb{L}_x(\mathbb{M})$. □

Теорема 3.11.1 (Фробениус). *Пусть $\mathcal{L}_k(\mathbb{M})$ – k-мерное гладкое инволютивное распределение на многообразии $\mathbb{M}$. Тогда для каждой точки $x \in \mathbb{M}$ существует интегральное многообразие распределения $\mathcal{L}_k(\mathbb{M})$, проходящее через точку x. Кроме того, существует такая система координат в некоторой окрестности точки x, что базис распределения имеет вид $\{\partial_1, \ldots, \partial_k\}$.*

Доказательство. См., например, [**?**]. □

Замечание. Предложение 3.11.1 дает необходимое условие для существования интегральных многообразий, а теорема 3.11.1 – достаточное. Обе теоремы локальны, т.к. в них говорится об интегральных многообразиях, проходящих через точку многообразия. □

Если распределение $\mathcal{L}_k(\mathbb{U})$ задано набором гладких линейно независимых векторных полей $\{X_1, \ldots, X_k\} = \{X_\text{A}\}$, $\text{A} = 1, \ldots, k < n$, в каждой точке $x \in \mathbb{U} \subset \mathbb{M}$, то будем писать $\mathcal{L}_k(\mathbb{U}) = \{X_\text{A}\}$. В этом случае будем говорить, что распределение задано *распределением векторных полей*. Тогда теорему Фробениуса вместе с предложением 3.11.1 можно переформулировать.

Теорема 3.11.2 (Фробениус). *Пусть $\mathcal{L}_k(\mathbb{U}) = \{X_\text{A}\}$, $\text{A} = 1, \ldots, k$, является k-мерным гладким распределением векторных полей в области $\mathbb{U} \subset \mathbb{M}$. Тогда для существования такой системы координат в некоторой подобласти $\mathbb{V} \subset \mathbb{U}$, что распределение имеет вид*

$$\mathcal{L}_k(\mathbb{V}) = \{\partial_1, \ldots, \partial_k\} \tag{3.74}$$

необходимо и достаточно, чтобы коммутатор векторных полей также принадлежал распределению,

$$[X_\text{A}, X_\text{B}] = f_{\text{AB}}{}^\text{C} X_\text{C} \in \mathbb{L}_x(\mathbb{M}), \qquad \forall x \in \mathbb{U}, \tag{3.75}$$

где $f_{\text{AB}}{}^\text{C}(x)$ – некоторые гладкие функции на $\mathbb{U}$.

Доказательство. См., например, [**?**]. □

Замечание. Конечно, функции $f_{\text{AB}}{}^{\text{C}}$ в теореме Фробениуса не могут быть произвольными. Из определения (3.75) следует, что они антисимметричны по нижним индексам и удовлетворяют тождествам, вытекающим из тождеств Якоби для коммутатора векторных полей. □

Допустим, что на многообразии $\mathbb{M}$ существует гладкое распределение $\mathcal{L}_k(\mathbb{M})$. Тогда существование системы координат (3.74) в окрестности каждой точки $x \in \mathbb{M}$ означает следующее. Уравнения

$$x^\alpha = \mathsf{const}, \qquad \alpha = k+1, \ldots, n$$

определяют k-мерные подмногообразия, которые являются интегральными многообразиями распределения $\mathcal{L}_k(\mathbb{M})$, причем каждое векторное поле X_{A} касается одного из подмногообразий. Интегральные многообразия не пересекаются, т.к. в точке пересечения у нас не было бы подмногообразия. Кроме того, через каждую точку $\mathbb{M}$ проходит одно подмногообразие. Тем самым k-мерное распределение $\mathcal{L}_k(\mathbb{M})$ расслаивает область $\mathbb{V} \subset \mathbb{M}$, представляя ее в виде объединения несчетного числа k-мерных подмногообразий. Очевидно, что интегральная кривая для любого векторного поля из заданного инволютивного распределения, проходящая через точку $x \in \mathbb{M}$ целиком лежит в интегральном подмногообразии, содержащем эту точку.

Пример 3.11.1. Произвольное векторное поле $X \in \mathcal{X}(\mathbb{M})$, не равное нулю ни в одной точке, задает одномерное распределение на $\mathbb{M}$. Это распределение инволютивно. Интегральными многообразиями одномерного распределения являются интегральные кривые векторного поля X. □

Пример 3.11.2. Рассмотрим трехмерное евклидово пространство с выколотым началом $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ в сферической системе координат r, θ, φ. Векторные поля ∂_θ и ∂_φ коммутируют и, значит, находятся в инволюции. Интегральными подмногообразиями этого распределения являются сферы $r = \mathsf{const}$ с центром в начале координат. Угловые координаты θ, φ и есть те координаты, которые фигурируют в теореме Фробениуса.

Векторные поля

$$J_1 = \frac{1}{2}(y\partial_z - z\partial_y), \qquad J_2 = \frac{1}{2}(z\partial_x - x\partial_z), \qquad J_3 = \frac{1}{2}(x\partial_y - y\partial_x), \tag{3.76}$$

заданные в декартовых координатах, являются генераторами алгебры $\mathfrak{so}(3)$ и находятся в инволюции. Интегральными подмногообразиями для них также являются сферы. Однако поля (3.76) не задают базис распределения, т.к. линейно зависимы

$$xJ_1 + yJ_2 + zJ_3 = 0.$$ □

Сформулируем глобальный вариант теоремы.

Теорема 3.11.3 (Фробениус). *Пусть $\mathcal{L}_k(\mathbb{M})$ – гладкое инволютивное k-мерное распределение. Тогда через каждую точку $x \in \mathbb{M}$ проходит единственное максимальное k-мерное интегральное многообразие $\mathbb{N} \xrightarrow{f} \mathbb{M}$ распределения $\mathcal{L}_k(\mathbb{M})$. Любое другое связной интегральное многообразие этого распределения, проходящее через точку x, содержится в $(f, \mathbb{N})$.*

Доказательство. См., например, [**?**]). □

Эта теорема означает, что, если на всем многообразии $\mathbb{M}$ существует гладкое инволютивное k-мерное распределение, то оно представляет собой слоение, т.е. объединение несчетного числа k-мерных максимальных интегральных многообразий (листов) данного распределения.

Переформулируем теорему Фробениуса на языке дифференциальных форм. Дополним поля $\{X_{\text{А}}\} = \{X_1, \dots, X_k\}$ в окрестности $\mathbb{U} \subset \mathbb{M}$ $n-k$ векторными полями $\{X_{\text{М}}\} = \{X_{k+1}, \dots, X_n\}$ так, чтобы вся совокупность векторных полей $\{X_{\text{А}}, X_{\text{М}}\} = \{X_1, \dots, X_n\}$ была линейно независима в каждой точке $x \in \mathbb{U}$. Пусть $\{A^{\text{А}}, A^{\text{М}}\} = \{A^1, \dots, A^n\}$ – соответствующие дуальные 1-формы. Тогда в каждой точке $x \in \mathbb{U}$ 1-формы $A^{\text{М}}$ определяют ортогональное дополнение $(\mathcal{L}_k)^{\perp}$. Это значит, что локально задание распределения векторных полей эквивалентно системе $n-k$ уравнений на дифференциалы dx^α

$$A^{\text{М}} = dx^\alpha A_\alpha{}^{\text{М}} = 0, \qquad \text{М} = k+1, \dots, n. \tag{3.77}$$

Эта система называется *пфаффовой системой уравнений*. Из тождества (4.36) следует

$$2dA^{\text{М}}(X_{\text{А}}, X_{\text{В}}) = X_{\text{А}}(A^{\text{М}}(X_{\text{В}})) - X_{\text{В}}(A^{\text{М}}(X_{\text{А}})) - A^{\text{М}}([X_{\text{А}}, X_{\text{В}}]) = 0, \tag{3.78}$$

т.к. распределение векторных полей удовлетворяет условию теоремы Фробениуса (3.75). Это значит, что распределение векторных полей $\mathcal{L}_k$ удовлетворяет условию теоремы Фробениуса тогда и только тогда, когда

$$dA^{\text{М}}(X_{\text{А}}, X_{\text{В}}) = 0, \qquad \text{А}, \text{В} = 1, \dots, k, \quad \text{М} = k+1, \dots, n.$$

Для любой 2-формы, в том числе и для $dA^{\text{М}}$, справедливо представление

$$dA^{\text{М}} = B^{\text{М}}{}_{\text{N}} \wedge A^{\text{N}} + g^{\text{М}}{}_{\text{ВА}} A^{\text{А}} \wedge A^{\text{В}},$$

где $\{B^{\text{М}}{}_{\text{N}}\}$ и $\{g^{\text{М}}{}_{\text{ВА}}\}$ – некоторые наборы, соответственно, 1-форм и функций. Поскольку $A^{\text{А}}(X_{\text{В}}) = \delta^{\text{А}}_{\text{В}}$, то из равенства (3.78) следует, что $g^{\text{М}}{}_{\text{ВА}} = 0$. Таким образом, справедливо разложение

$$dA^{\text{М}} = B^{\text{М}}{}_{\text{N}} \wedge A^{\text{N}},$$

которое эквивалентно условию на векторные поля (3.75).

Система уравнений Пфаффа называется *вполне интегрируемой*, если существует такая система координат $y^\alpha(x)$, что подмногообразия, определяемые системой уравнений

$$y^{\text{М}} = \mathsf{const} \quad \Leftrightarrow \quad dy^{\text{М}} = dx^\alpha \partial_\alpha y^{\text{М}} = 0, \qquad \text{М} = k+1, \dots, n, \tag{3.79}$$

удовлетворяют системе уравнений Пфаффа (3.77). В этом случае распределение векторных полей $\mathcal{L}_k$ задается в точности первыми k координатными полями $\partial_1, \dots, \partial_k$. Обратное утверждение также справедливо. Таким образом теорему Фробениуса можно переформулировать полностью в терминах 1-форм.

Теорема 3.11.4 (Фробениус). *Для того, чтобы система уравнений Пфаффа*

$$A^{\text{М}} = 0, \qquad \text{М} = k+1, \dots, n, \tag{3.80}$$

была вполне интегрируемой, необходимо и достаточно, чтобы существовал такой набор 1-форм $B^{\text{М}}{}_{\text{N}}$, что

$$dA^{\text{М}} = B^{\text{М}}{}_{\text{N}} \wedge A^{\text{N}}. \tag{3.81}$$

Следствие. Если все 1-формы $A^{\text{м}}$ замкнуты, $dA^{\text{м}} = 0$, то система уравнений Пфаффа (3.80) вполне интегрируема. □

Пример 3.11.3. Рассмотрим уравнение Пфаффа на 1-форму

$$A = dxP + dyQ = 0, \tag{3.82}$$

заданную на евклидовой плоскости $\mathbb{R}^2$. Для определенности будем считать, что $P \neq 0$. Тогда 1-формы

$$dxP + dyQ \quad \text{и} \quad dy$$

можно выбрать в качестве базиса 1-форм на плоскости. Соответствующий ему дуальный базис векторных полей имеет вид

$$X_1 = \left(\frac{1}{P}, 0\right), \quad X_2 = \left(-\frac{Q}{P}, 1\right).$$

Векторное поле X_2 определяет ортогональное дополнение к A и задает уравнения, определяющие интегральные кривые в параметрическом виде

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -\frac{Q}{P}, \\ \dot{y} &= 1. \end{aligned}$$

Отсюда следует уравнение на форму интегральной кривой

$$\frac{dx}{dy} = -\frac{Q}{P},$$

которое эквивалентно уравнению Пфаффа (3.82). Это уравнение для достаточно гладких функций P и Q всегда интегрируемо. Нетрудно проверить, что в двумерном случае 1-формы B в условии теоремы Фробениуса (3.81) всегда существуют.

Отметим, что интегрируемость уравнения Пфаффа (3.82) совсем не означает, что 1-форма A является точной, т.е. $A = df$ для некоторой функции $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2)$. Критерием точности 1-формы на плоскости являются нетривиальные условия интегрируемости $\partial_x Q = \partial_y P$, которые не имеют отношения к интегрируемости уравнений Пфаффа. Полная интегрируемость уравнений Пфаффа $A = 0$ означает существование такой функции $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2)$, что $df = 0$ для любой траектории, определяемой уравнением Пфаффа (3.82), а не то, что $A = df$. □

Пример 3.11.4. Покажем, что в общем случае, когда распределение не является инволютивным, интегральные многообразия отсутствуют. Пусть в трехмерном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3$ задана 1-форма

$$A = dx + ydz.$$

Ее внешняя производная равна

$$dA = dy \wedge dz.$$

Поскольку

$$dA \wedge A = dx \wedge dy \wedge dz \neq 0,$$

то условие теоремы Фробениуса не выполняются, которое в трехмерном случае имеет вид (3.84). Это значит, что уравнение Пфаффа $A = 0$ в данном случае неинтегрируемо.

Посмотрим на эту задачу с точки зрения векторных полей. Ортогональное дополнение к форме A натянуто, например, на векторные поля

$$X = -y\partial_x + \partial_z \quad \text{и} \quad Y = \partial_y,$$

поскольку они линейно независимы и

$$A(X) = 0, \quad A(Y) = 0.$$

Эти векторные поля не находятся в инволюции, т.к. их коммутатор нельзя представить в виде линейной комбинации

$$[X, Y] = \partial_x \neq fX + gY, \quad f, g \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^3).$$

Это значит, что условие теоремы Фробениуса нарушено.

Докажем от противного, что у векторных полей X, Y интегральных поверхностей не существует. Допустим, что через начало координат проходит интегральная поверхность. Это значит, что, двигая начало координат вдоль интегральных кривых, задаваемых векторными полями, мы никогда не покинем эту поверхность. Векторные поля X, Y задают потоки $s_X(t), s_Y(t)$, проходящие через точку (x_0, y_0, z_0) (см. раздел 3.6.5),

$$\begin{aligned} s_X: &\quad t \times (x_0, y_0, z_0) \to (-y_0 t + x_0, y_0, t + z_0), \\ s_Y: &\quad t \times (x_0, y_0, z_0) \to (x_0, t + y_0, z_0). \end{aligned}$$

Коммутатору векторных полей $[Y, X]$ соответствует отображение

$$s_Y^{-1}(t_2) s_X^{-1}(t_1) s_Y(t_2) s_X(t_1)$$

При этом начало координат перейдет в точку

$$(0,0,0) \xrightarrow{s_X(t_1)} (0,0,t_1) \xrightarrow{s_Y(t_2)} (0,t_2,t_1) \xrightarrow{s_X^{-1}(t_1)} (t_1 t_2, t_2, 0) \xrightarrow{s_Y^{-1}(t_2)} (t_1 t_2, 0, 0).$$

Ясно, что не существует такой линейной комбинации векторных полей $fX + gY$, чей поток переводил бы начало координат в точку $(t_1 t_2, 0, 0)$. Тем самым мы пришли к противоречию, что и доказывает отсутствие интегральной поверхности, проходящей через начало координат. Аналогичное построение можно провести для произвольной точки $\mathbb{R}^3$. По сути дела доказательство теоремы Фробениуса сводится к такому же построению в общем случае. □

Пример 3.11.5. Рассмотрим уравнение Пфаффа на 1-форму в трехмерном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3$

$$A = dxP + dyQ + dzR = 0, \tag{3.83}$$

где P, Q, R – некоторые гладкие функции на $\mathbb{R}^3$. Полная интегрируемость этого уравнения означает существование гладкой функции $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^3)$ такой, что равенство $f = \mathsf{const}$ является первым интегралом уравнения Пфаффа (3.83). Из теоремы Фробениуса следует критерий интегрируемости, который можно (только для трехмерного многообразия) записать в виде

$$dA = B \wedge A \quad \Leftrightarrow \quad dA \wedge A = 0. \tag{3.84}$$

Поскольку

$$dA = dx \wedge dy(\partial_x Q - \partial_y P) + dy \wedge dz(\partial_y R - \partial_z Q) + dz \wedge dx(\partial_z P - \partial_x R),$$

то необходимым и достаточным условием интегрируемости уравнения (3.83) является равенство

$$dA \wedge A = dx \wedge dy \wedge dz\,[P(\partial_y R - \partial_z Q) + Q(\partial_z P - \partial_x R) + R(\partial_x Q - \partial_y P)] = 0. \qquad \square$$

3.12 Слоения

Слоения обобщают понятие расслоения, введенное в разделе 3.4. Они часто возникают и играют большую роль в теории динамических систем. Мы начнем с простейшего примера слоения, который поможет понять данное ниже общее определение.

Пример 3.12.1 (Тривиальное слоение). Представим евклидово пространство $\mathbb{R}^n$ с естественной топологией и декартовой системой координат в виде прямого произведения:

$$\mathbb{R}^n \ni x = (y, z) \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k}, \quad 1 \leq k < n.$$

Построим многообразие $\mathbb{M}^k$ меньшей размерности k, которое как множество совпадает с $\mathbb{R}^n$, т.е. $\mathbb{M}^k = \mathbb{R}^n$, и задает на нем структуру слоения. Базу топологии $\mathbb{M}^k$ зададим открытыми множествами вида

$$\mathbb{B}_z = \{x = (y, z) \in \mathbb{R}^n : \ y \in \mathbb{O}, \},$$

где $\mathbb{O}$ – открытое множество в $\mathbb{R}^k$, для каждой фиксированной точки $z \in \mathbb{R}^{n-k}$. Эта топология тоньше исходной топологии в $\mathbb{R}^n$. Назовем листом тривиального слоения сечение евклидова пространства $\mathbb{R}^n$ гиперплоскостью $z = \mathsf{const}$:

$$\mathbb{V}_z = \{x = (y, z) \in \mathbb{R}^n : \ y \in \mathbb{R}^k, \ z = \mathsf{const}\}.$$

Тогда многообразие $\mathbb{M}^k$ представляет собой несвязное объединение всех листов

$$\mathbb{M}^k = \bigcup_{z \in \mathbb{R}^{n-k}} \mathbb{V}_z$$

и покрывается картами

$$\psi_z : \quad \mathbb{V}_z \ni (y, z) \mapsto y \in \mathbb{R}^k.$$

Рассмотренную конструкцию можно представить по-другому. Рассмотрим два евклидова пространства: $\mathbb{R}^k$ с обычной топологией и $\mathbb{R}^{n-k}_{\mathrm{D}}$ с дискретной топологией, что отмечено индексом D. Тогда многообразие $\mathbb{M}^k$ является топологическим произведением $\mathbb{M}^k = \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k}_{\mathrm{D}}$ и как множество совпадает с $\mathbb{R}^n$.

В этом примере многообразие $\mathbb{M}^k$ несвязно и состоит из несчетного множества связных компонент (листов) $\mathbb{V}_z$, которые параметризуются точкой $z \in \mathbb{R}^{n-k}$. Эти свойства лежат в основе общего определения. $\square$

Определение. Пусть на множестве $\mathbb{M}$ заданы две структуры многообразия разных размерностей. То есть у нас есть два многообразия: $\mathbb{M}^n$, $\dim \mathbb{M}^n = n$, и $\mathbb{M}^k$, $\dim \mathbb{M}^k = k$, где $1 \leq k < n$, которые совпадают как множества: $\mathbb{M}^n = \mathbb{M}^k = \mathbb{M}$. Многообразие $\mathbb{M}^n$ называется *слоением*, если на нем дополнительно определена другая

более тонкая топология и вторая соответствующая ей структура многообразия меньшей размерности $\mathbb{M}^k$. Поскольку размерность многообразия $\mathbb{M}^k$ меньше размерности многообразия $\mathbb{M}^n$, то многообразие $\mathbb{M}^k$ не может быть связным, и $\mathbb{M}^n$ представляет собой несчетное объединение связных компонент $\mathbb{M}^k$. Связная компонента многообразия $\mathbb{M}^k$, содержащая точку $p \in \mathbb{M}^n$, называется *листом слоения*, проходящим через эту точку. Мы говорим, что многообразие $\mathbb{M}^k$ *слоит* многообразие $\mathbb{M}^n$. Числа k и $n-k$ называются соответственно *размерностью* и *коразмерностью* слоения. Слоение мы будем обозначать парой $(\mathbb{M}^n, \mathbb{M}^k)$. □

По-определению, через каждую точку $p \in \mathbb{M}^n$ проходит один и только один лист. В общем случае листы устроены довольно сложно. Как покажет дальнейший пример слоения тора, листы могут не быть даже регулярными подмногообразиями в $\mathbb{M}^n$. Многообразие $\mathbb{M}^n$ является объединением своих листов, число которых бесконечно и не может быть счетным из-за разных размерностей. Многообразие $\mathbb{M}^k$ также является объединением листов и не может быть связным, т.к. каждый лист является открытым подмножеством и представляет собой компоненту связности. В этом смысле многообразие $\mathbb{M}^n$ слоится на листы.

Можно доказать, что если $(\mathbb{M}^n, \mathbb{M}^k)$ – слоение, то на многообразии $\mathbb{M}^n$ существует атлас $\{\mathbb{U}_i, \varphi_i\}$, $i \in I$, со следующими свойствами. Пусть

$$\varphi: \quad \mathbb{M}^n \supset \mathbb{U} \to \varphi(\mathbb{U}) \subset \mathbb{R}^n$$

– карта исходной дифференцируемой структуры многообразия $\mathbb{M}^n$. Представим евклидово пространство $\mathbb{R}^n$ в виде прямого произведения $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k}$, тогда для всех $p \in \mathbb{U}$

$$\varphi(p) = (y, z) \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k}.$$

Для каждой фиксированной точки $z \in \mathbb{R}^{n-k}$ обозначим

$$\varphi(\mathbb{U})|_z = \{(y, z) \in \varphi(\mathbb{U}): \ z = \mathsf{const}\}$$

сечение образа $\varphi(\mathbb{U})$ гиперплоскостью $z = \mathsf{const}$. Соответствующий прообраз

$$\mathbb{V}_z := \varphi^{-1}\big(\varphi(\mathbb{U})|_z\big)$$

называется *локальным листом*. Локальный лист является частью листа, проходящего через точку $\varphi^{-1}(y, z)$. Каждый локальный лист – это открытое подмногообразие (возможно пустое) в $\mathbb{M}^k$, а пара $(\mathbb{V}_z, \psi_z)$ для непустого $\mathbb{V}_z$ является картой на многообразии $\mathbb{M}^k$:

$$\psi_z: \quad \mathbb{M}^k \supset \mathbb{V}_z \to \psi_z(\mathbb{V}_z) \subset \mathbb{R}^k,$$

где отображение $\psi_z := \pi_k \circ \varphi|_{\mathbb{V}_z}$ определено естественной проекцией

$$\pi_k: \quad \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k} \ni (y, z) \mapsto y \in \mathbb{R}^k$$

и сужением $\varphi|_{\mathbb{V}_z}$ отображения φ на $\mathbb{V}_z$. Описанная конструкция изображена на рис.3.7.

Рис. 3.7: fleaffoliation Локальный лист слоения

Функции склейки данного атласа для любых пересекающихся карт имеют вид

$$\varphi_j \circ \varphi_i^{-1}: \quad \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k} \supset \varphi_i(\mathbb{U}_i \cap \mathbb{U}_j) \ni y, z \mapsto y', z' \in \varphi_j(\mathbb{U}_i \cap \mathbb{U}_j) \subset \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k},$$

где $y' = y'(y,z)$, но $z' = z'(z)$. В этом случае локальные листы для этих карт принадлежат одному листу слоения тогда и только тогда, когда они содержат хотя бы одну точку из пересечения $p \in \mathbb{U}_i \cup \mathbb{U}_j$. Условие того, что функции перехода $z' = z'(z)$ зависят только от z необходимо и достаточно, для того, чтобы склеивание локальных листов не зависело от выбора точки p из пересечения. Действительно, если $q, p \in \mathbb{U}_i \cup \mathbb{U}_j$ – две различные точки из пересечения координатных окрестностей, то в этих картах они имеют координаты (y_p, z_p), (y'_p, z'_p) и (y_q, z_q), (y'_q, z'_q). Если $z_p = z_q$, то $z'_p = z'_q$ тогда и только тогда, когда $z' = z'(z)$.

Теперь рассмотрим несколько типичных примеров слоений.

Пример 3.12.2. Пусть $y' = f(x,y)$ – обыкновенное дифференциальное уравнение, где $y' = dy/dx$ и $f(x,y)$ – функция класса $\mathcal{C}^r$ в некоторой области $\mathbb{U}^2 \subset \mathbb{R}^2$. Из теории обыкновенных дифференциальных уравнений известно, что через каждую точку области $\mathbb{U}^2$ проходит одна и только одна интегральная кривая (решение) данного уравнения класса $\mathcal{C}^{r+1}$. Поскольку решение является функцией класса $\mathcal{C}^r$ от начальных данных, то объединение всех интегральных кривых образует одномерное многообразие $\mathbb{U}^1$, которое слоит $\mathbb{U}^2$.

Аналогичный результат справедлив и для систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Для уравнений в частных производных ситуация существенно отличается. □

Пример 3.12.3 (**Распределение**). Пусть на многообразии $\mathbb{M}^n$ задано k-мерное распределение векторных полей $\mathcal{L}_k(\mathbb{M}^n)$, где $1 \le k < n$, которое находится в инволюции (см. раздел 3.11). Напомним, что k-мерное распределение векторных полей ставит каждой точке многообразия некоторое подпространство размерности k в касательном пространстве к данной точке: $p \mapsto \mathbb{L}_p(\mathbb{M}^n) \subset \mathbb{T}_p(\mathbb{M}^n)$. Тогда согласно теореме Фробениуса через каждую точку $p \in \mathbb{M}^n$ проходит интегральное подмногообразие данного распределения размерности k. Эти интегральные подмногообразия можно рассматривать как листы слоения $(\mathbb{M}^n, \mathbb{M}^k)$. □

Рассмотрим слоение $\mathbb{M}^n$, которое слоится многообразием $\mathbb{M}^k$. Тогда определено касательное пространство к листу $\mathbb{T}_p(\mathbb{M}^k)$ в произвольной точке $p \in \mathbb{M}^n$. Размерность этого пространства равна k, и оно является k-мерным подпространством касательного пространства $\mathbb{T}_p(\mathbb{M}^n)$. Следовательно, определено k-мерное распределение векторных полей $\mathcal{L}_k(\mathbb{M}^n)$ на многообразии $\mathbb{M}^n$. Вместе с предыдущим примером это доказывает следующее утверждение.

Теорема 3.12.1. *Любое гладкое слоение $(\mathbb{M}^n, \mathbb{M}^k)$, $1 \le k < n$, находится во взаимно однозначном соответствии с k-мерным гладким инволютивным распределением векторных полей $\mathcal{L}_k(\mathbb{M}^n)$, которое касается $\mathbb{M}^k$, т.е. $\mathbb{L}_p(\mathbb{M}^n) = \mathbb{T}_p(\mathbb{M}^k)$. При этом лист слоения, проходящий через точку $p \in \mathbb{M}^n$, совпадает с интегральным подмногообразием данного распределения, проходящим через ту же точку.*

Замечание. В силу данной теоремы слоение часто определяют с помощью распределений и их интегральных подмногообразий. □

Заметим, что не каждое многообразие допускает структуру слоения.

Пример 3.12.4. Теорема 11.2.1 утверждает, что на четномерной сфере $\mathbb{S}^{2n}$, $n = 1, 2, \ldots$, не существует непрерывного векторного поля, которое всюду отлично от нуля. Это означает, что на $\mathbb{S}^{2n}$ невозможно задать одномерное распределение векторных полей $\mathcal{L}_1(\mathbb{S}^{2n})$, и, следовательно одномерных слоений на четномерной сфере

не существует. В частности, на двумерной сфере $\mathbb{S}^2$ нельзя задать структуру слоения. □

Далее мы рассмотрим более подробно связь слоений и расслоений.

Пример 3.12.5 (Расслоение). Рассмотрим дифференцируемое расслоение $\mathbb{E}(\mathbb{M},\pi,\mathbb{F})$ (см., раздел 3.4) с n-мерным пространством расслоения $\mathbb{E}$, k-мерным типичным слоем $\mathbb{F}$ и $(n-k)$-мерной базой $\mathbb{M}$. Через каждую точку расслоения $p\in\mathbb{E}$ проходит слой $\mathbb{V}_{\pi(p)} := \pi^{-1}\big(\pi(p)\big)$, диффеоморфный типичному слою $\mathbb{F}$, и, значит, имеющий структуру дифференцируемого k-мерного многообразия. Известно, что слои расслоения либо совпадают: $\mathbb{V}_{\pi(p)} = \mathbb{V}_{\pi(q)}$, если $\pi(p)=\pi(q)$, либо не пересекаются: $\mathbb{V}_{\pi(p)}\cap\mathbb{V}_{\pi(q)}=\emptyset$, если $\pi(p)\neq\pi(q)$. Рассмотрим множество, которое состоит из объединения всех слоев

$$\mathbb{E}^k = \bigcup_{x\in\mathbb{M}} \mathbb{V}_x.$$

Как множество оно совпадает с пространством расслоения $\mathbb{E}$, но мы введем на нем другую топологию и дифференцируемую структуру. А именно, будем считать, что в этой топологии и дифференцируемой структуре каждый слой является открытым подмножеством и открытым подмногообразием. Для того, чтобы проверить, что многообразие $\mathbb{E}^k$ слоит расслоение $\mathbb{E}$ следует воспользоваться картами на $\mathbb{E}$, которые тривиализируют расслоение. Как и в предыдущем примере многообразие $\mathbb{E}^k$ несвязно и состоит из несчетного числа листов, которые совпадают со слоями расслоения $\mathbb{V}_x$ и параметризуются точками базы $x\in\mathbb{M}$. В этом слоении все листы диффеоморфны между собой. □

Рассмотренный пример показывает, что на каждом расслоении определена естественная структура слоения. Обратное утверждение неверно: не каждое слоение является расслоением. Чтобы построить соответствующий пример, нам понадобится

Определение. Дифференцируемое отображение двух многообразий $f:\ \mathbb{M}\to\mathbb{N}$ называется *субмерсией*, если дифференциал отображения $f_*:\ \mathbb{T}_p(\mathbb{M})\to\mathbb{T}_{f(p)}(\mathbb{N})$ является сюръективным отображением для всех точек $p\in\mathbb{M}$. □

Пример 3.12.6 (Субмерсия). Рассмотрим субмерсию двух многообразий $f:\ \mathbb{M}\to\mathbb{N}$. Из определения следует, что $\dim\mathbb{M}\geq\dim\mathbb{N}$. Мы положим $\dim\mathbb{M}=n$ и $\dim\mathbb{N}=n-k$, где $1\leq k<n$. Каждая точка $p\in\mathbb{M}$ порождает лист или несвязное объединение листов $\mathbb{V}_p := f^{-1}\big(f(p)\big)$. При этом прообразы либо совпадают: $\mathbb{V}_p=\mathbb{V}_q$, если $f(p)=f(q)$, либо не пересекаются: $\mathbb{V}_p\cap\mathbb{V}_q=\emptyset$, если $f(p)\neq f(q)$. Предположим, что отображение f сюръективно. Тогда слои можно параметризовать точками $x\in\mathbb{N}$. Из условия сюръективности $f_*\big(\mathbb{T}_p(\mathbb{M})\big)=\mathbb{T}_{f(p)}(\mathbb{N})$ для всех $p\in\mathbb{M}$ следует, что для каждой точки $p\in\mathbb{M}$ найдутся карты:

$$\begin{aligned}\varphi:&\ \mathbb{M}\supset\mathbb{U}\ni p\mapsto\varphi(x)\in\mathbb{R}^n,\\ \chi:&\ \mathbb{N}\supset\mathbb{W}\ni x=f(p)\mapsto\chi(x)\in\mathbb{R}^{n-k}\end{aligned}$$

со следующими свойствами:

1. $f(\mathbb{U})\subset\mathbb{W}$,
2. $\varphi(q)=(y,z)\in\mathbb{R}^k\times\mathbb{R}^{n-k},\ \ \forall q\in\mathbb{U}$,
3. $\chi(x)\in\mathbb{R}^{n-k},\ \ \forall x\in\mathbb{W}$,

4. $(\chi \circ f \circ \varphi^{-1})(y,z) = z \in \chi(\mathbb{W}),\ \ \forall (y,z) \in \varphi(\mathbb{U})$,
5. $\varphi(\mathbb{V}_p) = \{(y,z) \in \varphi(\mathbb{U}) :\ z = \chi\big(f(p)\}, \ \ \forall f(p) \in \mathbb{W}$.

Отсюда легко выводится, что на множестве $\mathbb{M}$ определена структура k-мерного слоения $\mathbb{M}^k$, в котором листы, содержащиеся в $f^{-1}(x)$, являются открытыми подмногообразиями. □

Ранее было показано, что любое расслоение является слоением. Приведем пример слоения, которое не является расслоением.

Пример 3.12.7. Рассмотрим субмерсию, изображенную на рис.3.8, где лента в $\mathbb{R}^2$ с вырезанной дыркой проектируется на прямую x. Ленту с вырезанной дыркой мы рассматриваем, как открытое подмногообразие $\mathbb{M}$ в $\mathbb{R}^2$ с декартовыми координатами x, y. Субмерсия задается проекцией $f :\ (x,y) \mapsto x$ и определяет одномерное слоение $\mathbb{M}$. Соответствующее распределение векторных полей имеет вид ∂_y. Все интегральные кривые этого распределения, которые являются листами слоения, параллельны оси y. Если $x < a$ или $x > b$, то листами слоения $f^{-1}(x)$ являются интервалы. В то же время каждый прообраз $f^{-1}(x)$ для $a \le x \le b$ представляет несвязное объединение двух листов. Ясно, что не все прообразы $f^{-1}(x)$ данного слоения диффеоморфны между собой, и поэтому рассматриваемое слоение не может быть расслоением. □

Следующий пример показывает, что листы слоения даже в простых случаях могут быть устроены достаточно сложно.

Рис. 3.8: Субмерсия ленты с вырезанной дыркой на прямую x

Пример 3.12.8 (Слоения тора). Рассмотрим двумерный тор, как квадрат на плоскости $\mathbb{T}^2 = [0,1] \times [0,1] \subset \mathbb{R}^2$ с отождествленными противоположными сторонами. Пусть на нем задано векторное поле $X^x = a$, $X^y = b$, где $a \neq 0, b$ – некоторые постоянные. Тем самым определено одномерное распределение векторного поля. Оно, конечно, находится в инволюции. Обозначим интегральные кривые этого векторного поля через γ_{ab}. Они же являются листами одномерного слоения тора. Если отношение b/a рационально, то каждый лист диффеоморфен окружности $\mathbb{S}^1$ и является регулярным замкнутым подмногообразием в $\mathbb{T}^2$. Если отношение b/a иррационально (всюду плотная обмотка тора в примере 3.10.2), то каждый лист диффеоморфен прямой $\mathbb{R}$. При этом отображение $\mathbb{R} \to \gamma_{ab} \in \mathbb{T}^2$ не является регулярным. В этом случае лист не является одномерным регулярным подмногообразием и замкнутым подмножеством в $\mathbb{T}^2$. □

3.13 Бесконечно малые преобразования координат

В настоящем разделе рассматриваются свойства полей на многообразии при бесконечно малых преобразованиях координат. Полученные ниже формулы важны в приложениях, в частности, они будут использованы в следующем разделе для вычисления производных Ли.

Поскольку рассмотрение носит локальных характер, то для простоты и наглядности мы рассмотрим евклидово пространство $\mathbb{R}^n$ с фиксированной декартовой системой координат. Будем рассматривать преобразования координат (2.18) с активной точки зрения. То есть будем считать, что в евклидовом пространстве точка с координатами x^α перемещается в новую точку с координатами $x^{\alpha'}(x^\alpha)$ в той же системе координат. Бесконечно малые преобразования координат

$$x'^\alpha = x^\alpha + u^\alpha(x) \tag{3.85}$$

определяются векторным полем

$$u = u^\alpha \partial_\alpha.$$

Обозначение $u^\alpha(x)$ заимствовано из теории упругости, где этот вектор называется *вектором смещения*. Будем считать, что малы сами смещения, $|u^\alpha| \ll 1$[2], и относительные смещения $|\partial_\alpha u^\beta| \ll 1$ для всех значений индексов α, β.

Рассмотрим, как меняются тензорные поля при инфинитезимальных преобразованиях координат (3.85). Начнем со скалярного поля $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$. Из закона преобразования скалярного поля (3.3) следует

$$f'(x+u) = f(x). \tag{3.86}$$

Разлагая левую часть этого равенства в ряд Тейлора[3], в первом порядке по u получим

$$f' = f - u^\alpha \partial_\alpha f, \tag{3.87}$$

где все поля рассматриваются в точке x. Полученное соотношение интерпретируется следующим образом. При инфинитезимальном преобразовании координат (3.85) значение функции $f(x)$ в точке x меняется на бесконечно малую величину

$$\delta f(x) = f'(x) - f(x) = -u^\alpha \partial_\alpha f = -uf. \tag{3.88}$$

которая называется *приращением* или *вариацией формы* функции f в точке x. Правая часть этого равенства с обратным знаком представляет собой производную от функции f вдоль векторного поля u, определяющего преобразование координат.

Из закона преобразования векторных полей (3.9), который можно переписать в виде

$$X'^\alpha(x+u) = X^\beta(\delta^\alpha_\beta + \partial_\beta u^\alpha),$$

следует, что

$$\delta X^\alpha = X^\beta \partial_\beta u^\alpha - u^\beta \partial_\beta X^\alpha = [X,u]^\alpha. \tag{3.89}$$

То есть приращение векторного поля в точке x равно коммутатору этого векторного поля с инфинитезимальным векторным полем смещения u.

Закон преобразования компонент 1-формы (3.10) приводит к следующему приращению компонент

$$\delta\omega_\alpha = -\partial_\alpha u^\beta \omega_\beta - u^\beta \partial_\beta \omega_\alpha \tag{3.90}$$

или в ковариантном виде

$$\begin{aligned}\delta\omega_\alpha &= -\nabla_\alpha u^\beta \omega_\beta - u^\beta \nabla_\beta \omega_\alpha + u^\beta T_{\alpha\beta}{}^\gamma \omega_\gamma \\ &= -\widetilde{\nabla}_\alpha u^\beta \omega_\beta - u^\beta \widetilde{\nabla}_\beta \omega_\alpha.\end{aligned} \tag{3.91}$$

При этом использовано явное выражение для аффинной связности (8.15). Напомним, что ∇ и $\widetilde{\nabla}$ обозначают ковариантные производные производные с аффинной связностью и символами Кристоффеля, соответственно.

Отметим, что приращения тензорных полей, а также связности при инфинитезимальных преобразованиях координат являются тензорными полями. Поскольку

[2]В физике координаты являются размерными величинами, и условие малости смещений записывается в виде $|u^\alpha| \ll l$, где l – выбранная единица длины.

[3]Здесь и далее мы предполагаем, что разложение всех функций и компонент тензорных полей в ряд Тейлора имеет смысл.

бесконечно малые преобразования координат параметризуются векторным полем u, то вариации полей всегда можно записать в явно ковариантном виде.

Аналогично находится явный вид бесконечно малых преобразований координат для тензоров произвольного ранга. Рассмотрим бесконечно малые преобразования основных геометрических объектов: метрики и аффинной связности, а также репера и линейной связности. В частности, для метрики имеем

$$\delta g_{\alpha\beta} = -\partial_\alpha u^\gamma g_{\gamma\beta} - \partial_\beta u^\gamma g_{\alpha\gamma} - u^\gamma \partial_\gamma g_{\alpha\beta} \tag{3.92}$$

или в ковариантном виде

$$\begin{aligned}\delta g_{\alpha\beta} &= -\nabla_\alpha u_\beta - \nabla_\beta u_\alpha + u^\gamma (T_{\alpha\gamma\beta} + T_{\beta\gamma\alpha} - Q_{\alpha\gamma\beta} - Q_{\beta\gamma\alpha} + Q_{\gamma\alpha\beta}) \\ &= -\widetilde{\nabla}_\alpha u_\beta - \widetilde{\nabla}_\beta u_\alpha .\end{aligned} \tag{3.93}$$

Отсюда следует, что, если метрика инвариантна относительно бесконечно малых преобразований координат, $\delta g_{\alpha\beta} = 0$, то соответствующее векторное поле должно удовлетворять уравнению Киллинга (16.4).

Из уравнения (3.92) следует правило преобразования определителя метрики

$$\delta g = -u^\alpha \partial_\alpha g - 2\partial_\alpha u^\alpha g. \tag{3.94}$$

Рассмотрим, как меняются компоненты аффинной связности при инфинитезимальных преобразованиях координат. Из закона преобразования (8.5) следует, что

$$\delta \Gamma_{\alpha\beta}{}^\gamma = -\partial_\alpha u^\delta \Gamma_{\delta\beta}{}^\gamma - \partial_\beta u^\delta \Gamma_{\alpha\delta}{}^\gamma + \Gamma_{\alpha\beta}{}^\delta \partial_\delta u^\gamma - \partial^2_{\alpha\beta} u^\gamma - u^\delta \partial_\delta \Gamma_{\alpha\beta}{}^\gamma . \tag{3.95}$$

В ковариантном виде это изменение имеет вид

$$\delta \Gamma_{\alpha\beta}{}^\gamma = -\nabla_\alpha \nabla_\beta u^\gamma + \nabla_\alpha u^\delta T_{\beta\delta}{}^\gamma + u^\delta (R_{\alpha\delta\beta}{}^\gamma + \nabla_\alpha T_{\beta\delta}{}^\gamma). \tag{3.96}$$

В частном случае для символов Кристоффеля имеем

$$\delta \widetilde{\Gamma}_{\alpha\beta}{}^\gamma = -\widetilde{\nabla}_\alpha \widetilde{\nabla}_\beta u^\gamma + u^\delta \widetilde{R}_{\alpha\delta\beta}{}^\gamma . \tag{3.97}$$

Эту вариацию можно переписать в виде

$$\delta \widetilde{\Gamma}_{\alpha\beta\gamma} = \frac{1}{2}(\widetilde{\nabla}_\alpha \delta g_{\beta\gamma} + \widetilde{\nabla}_\beta \delta g_{\alpha\gamma} - \widetilde{\nabla}_\gamma \delta g_{\alpha\beta}). \tag{3.98}$$

В римановой геометрии, где связность однозначно определяется метрикой, инвариантность метрики является достаточным условием инвариантности символов Кристоффеля. Необходимое условие инвариантности символов Кристоффеля имеет вид (3.97). Антисимметризация уравнения (3.96) по индексам α, β дает приращение тензора кручения:

$$\begin{aligned}\delta T_{\alpha\beta}{}^\gamma &= \nabla_\alpha u^\delta T_{\beta\delta}{}^\gamma - \nabla_\beta u^\delta T_{\alpha\delta}{}^\gamma + T_{\alpha\beta}{}^\delta \nabla_\delta u^\gamma \\ &\quad + u^\delta (-R_{\alpha\beta\delta}{}^\gamma - R_{\delta\alpha\beta}{}^\gamma - R_{\beta\delta\alpha}{}^\gamma + \nabla_\alpha T_{\beta\delta}{}^\gamma - \nabla_\beta T_{\alpha\delta}{}^\gamma)\end{aligned} \tag{3.99}$$

или, с учетом (8.68),

$$\begin{aligned}\delta T_{\alpha\beta}{}^\gamma &= \nabla_\alpha u^\delta T_{\beta\delta}{}^\gamma - \nabla_\beta u^\delta T_{\alpha\delta}{}^\gamma + T_{\alpha\beta}{}^\delta \nabla_\delta u^\gamma \\ &\quad - u^\delta (\nabla_\delta T_{\alpha\beta}{}^\gamma + T_{\alpha\beta}{}^\epsilon T_{\epsilon\delta}{}^\gamma + T_{\beta\delta}{}^\epsilon T_{\epsilon\alpha}{}^\gamma + T_{\delta\alpha}{}^\epsilon T_{\epsilon\beta}{}^\gamma)\end{aligned} \tag{3.100}$$

Нетрудно получить также изменение тензора неметричности при инфинитезимальных преобразованиях координат:

$$\delta Q_{\alpha\beta\gamma} = -\nabla_\alpha u^\delta Q_{\delta\beta\gamma} - \nabla_\beta u^\delta Q_{\alpha\delta\gamma} - \nabla_\gamma u^\delta Q_{\alpha\beta\delta} + u^\delta (T_{\alpha\delta}{}^\epsilon Q_{\epsilon\beta\gamma} + T_{\beta\delta}{}^\epsilon Q_{\alpha\epsilon\gamma} + T_{\gamma\delta}{}^\epsilon Q_{\alpha\beta\epsilon}). \tag{3.101}$$

В аффинной геометрии при заданной связности можно поставить задачу нахождения таких преобразований координат, которые не меняют связность, кручение или неметричность. Для этого необходимо решить, соответственно, уравнения (3.96), (3.99) или (3.101).

Репер и лоренцева связность являются ковекторами относительно преобразований координат. Поэтому их приращения такие же, как и приращения 1-форм (3.90). Приведем их явный вид, т.к. они часто встречаются в приложениях

$$\delta e_\alpha{}^a = -\partial_\alpha u^\beta e_\beta{}^a - u^\beta \partial_\beta e_\alpha{}^a = -\widetilde{\nabla}_\alpha u^a + u^\beta \widetilde{\omega}_{\beta b}{}^a e_\alpha{}^b, \tag{3.102}$$

$$\delta e = -u^\alpha \partial_\alpha e - e\partial_\alpha u^\alpha = -e\widetilde{\nabla}_\alpha u^\alpha, \tag{3.103}$$

$$\delta \omega_\alpha{}^{ab} = -\partial_\alpha u^\beta \omega_\beta{}^{ab} - u^\beta \partial_\beta \omega_\alpha{}^{ab} = -\widetilde{\nabla}_\alpha u^\beta \omega_\beta{}^{ab} - u^\beta (\partial_\beta \omega_\alpha{}^{ab} - \widetilde{\Gamma}_{\beta\alpha}{}^\gamma \omega_\gamma{}^{ab}). \tag{3.104}$$

Бесконечно малые приращения различных полей, рассмотренные в настоящем разделе, называются *вариацией формы*, т.к. показывают как меняется значение полей в фиксированной точке многообразия. Следующее свойство проверяется прямой проверкой и используется при доказательстве теоремы Нетер.

Предложение 3.13.1. *Вариация формы производной скалярного поля равно производной от вариации*

$$\delta(\partial_\alpha f) = \partial_\alpha(\delta f). \qquad \square$$

Рассмотрим коммутатор двух преобразований координат. Пусть эти преобразования задаются векторными полями $u = u^\alpha \partial_\alpha$ и $v = v^\alpha \partial_\alpha$. Для простоты ограничимся их последовательным действием на функцию $f(x)$. Поскольку преобразования координат евклидова пространства $\mathbb{R}^n$ образуют псевдогруппу, то коммутатор двух преобразований также является преобразованием координат с параметром, который квадратичен по u^α и v^α. Поэтому, в отличие от предыдущего рассмотрения, для вычисления коммутатора необходимо удерживать квадратичные слагаемые.

Сначала совершим преобразование координат, определяемое векторным полем u. Из закона преобразования функции (3.86) с учетом квадратичных слагаемых получаем

$$f' + u^\alpha \partial_\alpha f' + \frac{1}{2} u^\alpha u^\beta \partial^2_{\alpha\beta} f' = f.$$

Во втором слагаемом в левой части равенства f' можно выразить через f, воспользовавшись линейным приближением (3.87), а в третьем слагаемом заменим f' на f, потому что коэффициент перед ним уже квадратичен по u. В результате с точностью до квадратичных слагаемых получаем

$$f' := (1 + T_u) f = f - u^\alpha \partial_\alpha f + u^\alpha \partial_\alpha u^\beta \partial_\beta f + \frac{1}{2} u^\alpha u^\beta \partial^2_{\alpha\beta} f + \dots, \tag{3.105}$$

где мы ввели генератор общих преобразований координат T_u и выписали его действие на функцию в квадратичном приближении.

Совершим теперь второе преобразование координат с параметром v

$$\begin{aligned}(1+T_v)f' &= (1+T_v)(1+T_u)f = \\ &= f' - v^\alpha\partial_\alpha f' + v^\alpha\partial_\alpha v^\beta\partial_\beta f' + \frac{1}{2}v^\alpha v^\beta\partial^2_{\alpha\beta}f' + \ldots = \\ &= f - (u^\alpha + v^\alpha - u^\beta\partial_\beta u^\alpha - v^\beta\partial_\beta v^\alpha - v^\beta\partial_\beta u^\alpha)\partial_\alpha f \\ &\quad + \frac{1}{2}(u^\alpha u^\beta + 2u^\alpha v^\beta + v^\alpha v^\beta)\partial^2_{\alpha\beta}f + \ldots .\end{aligned}$$

Вычитая из этого выражения результат тех же преобразований в обратном порядке, получим явное выражение для коммутатора двух преобразований координат

$$[T_v, T_u]f = T_{[v,u]}f = (v^\beta\partial_\beta u^\alpha - u^\beta\partial_\beta v^\alpha)\partial_\alpha f. \tag{3.106}$$

Таким образом, коммутатор двух преобразований координат в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$, определяемых инфинитезимальными векторными полями u и v, является преобразованием координат, которое задается коммутатором векторных полей $[v, u]$.

Из групповых соображений следует, что коммутатор двух преобразований координат не зависит от представления. Другими словами, это же выражение для коммутатора имеет место не только для функций, но и для тензорных полей или плотностей более высокого ранга. В последнем случае вычисления являются более громоздкими.

Рассмотрим, как меняются при бесконечно малых преобразованиях тензорные плотности, заданные на многообразии $\mathbb{M}$. Мы уже получили правила преобразования определителей метрики (3.94) и репера (3.103), которые являются тензорными плотностями соответственно степеней -2 и -1. В общем случае, если на $\mathbb{M}$ задана скалярная плотность f степени $\deg f = p$, то из правила преобразования тензорных плотностей (3.5) следует правило

$$\delta f = -u^\alpha\partial_\alpha f + p\partial_\alpha u^\alpha f,$$

т.к. якобиан бесконечно малых преобразований координат (3.85) в первом порядке по вектору смещения имеет вид

$$J = \det(\delta^\beta_\alpha + \partial_\alpha u^\beta) \approx 1 + \partial_\alpha u^\alpha. \tag{3.107}$$

Если на многообразии $\mathbb{M}$ задана тензорная плотность T произвольного ранга и степени p, то ее вариация формы равна

$$\delta T = \ldots + p\partial_\alpha u^\alpha T,$$

где точки обозначают набор обычных тензорных слагаемых для всех ковариантных и контравариантных индексов.

3.14 Производная Ли

Понятие потока $\mathbb{R}\times\mathbb{M} \xrightarrow{s} \mathbb{M}$ или экспоненциального отображения $s^\alpha(t,x) = \exp(tX)x^\alpha$, генерируемого векторным полем $X \in \mathcal{X}(\mathbb{M})$ (раздел 3.6.5), позволяет определить производную Ли L_X от произвольного тензорного поля T вдоль векторного поля X. Для этого определения достаточно, чтобы поток существовал локально.

Рассмотрим произвольную точку $x \in \mathbb{M}$. Тогда у нее существует окрестность $\mathbb{U}_x$ такая, что отображение $s: \mathbb{U}_x \to s(\mathbb{U}_x)$ является диффеоморфизмом. Поэтому

для него определены дифференциал отображения s_* и обратное отображение s^{*-1} к возврату отображения s^*. Пусть в некоторой окрестности точки $x \in \mathbb{M}$ задано тензорное поле $T \in \mathcal{T}^r_s(\mathbb{M})$ типа (r,s). В результате экспоненциального отображения $s(\epsilon, x)$ с малым параметром ϵ тензор $T(x)$ в точке x отобразится в тензор $\tilde{s}T(x)$ в точке $s(\epsilon,x)$, где $\tilde{s}T$ обозначает продолжение отображения $(s_*)^r(s^{*-1})^s T$, заданного в касательном и кокасательном пространствах, на всю тензорную алгебру (в компонентах: на каждый контравариантный индекс действует дифференциал отображения s_*, а на каждый ковариантный индекс – обратное отображение s^{*-1}). Это значит, что в точку x отобразится тензор из точки $s(-\epsilon,x)$:

$$T\big(s(-\epsilon,x)\big) \;\mapsto\; \tilde{s}\big(\epsilon, s(-\epsilon,x)\big)T\big(s(-\epsilon,x)\big).$$

Определение. *Производной Ли* от тензорного поля T вдоль векторного поля X в точке x называется предел

$$\mathsf{L}_X T = \lim_{\epsilon\to 0} \frac{T(x) - \tilde{s}\big(\epsilon, s(-\epsilon,x)\big)T\big(s(-\epsilon,x)\big)}{\epsilon}. \tag{3.108}$$

В упрощенной записи мы пишем

$$\mathsf{L}_X T = \lim_{\epsilon\to 0} \frac{T(x) - \tilde{s}(\epsilon)T}{\epsilon}, \tag{3.109}$$

где мы опустили аргумент точки $x \in \mathbb{M}$. □

Для дифференцируемых векторных и тензорных полей этот предел существует.

Замечание. При малых ϵ экспоненциальное отображение имеет вид $x^\alpha \to s^\alpha(\epsilon,x) = x^\alpha + \epsilon X^\alpha + \ldots$, т.е. соответствует бесконечно малым преобразованиям координат, рассмотренным в предыдущем разделе, с вектором смещения $u^\alpha = \epsilon X^\alpha$. При этом выражение, стоящее в числителе производной Ли (3.108), совпадает с вариацией формы тензорного поля T, взятой с обратным знаком. Это следует непосредственно из определения вариации формы тензорного поля. Поэтому определение (3.108) для компонент тензорного поля типа (r,s) принимает вид

$$\mathsf{L}_X T_{\beta_1\ldots\beta_s}{}^{\alpha_1\ldots\alpha_r}(x) = -\lim_{\epsilon\to 0} \frac{\delta T_{\beta_1\ldots\beta_s}{}^{\alpha_1\ldots\alpha_r}(x)}{\epsilon}, \tag{3.110}$$

где $\delta T_{\beta_1\ldots\beta_s}{}^{\alpha_1\ldots\alpha_r}(x)$ – вариация формы компонент тензорного поля типа (r,s), рассмотренная в разделе 3.13. Несложные вычисления приводят к следующему выражению для производной Ли

$$\begin{aligned}\mathsf{L}_X T_{\beta_1\ldots\beta_s}{}^{\alpha_1\ldots\alpha_r} &= X^\gamma \partial_\gamma T_{\beta_1\ldots\beta_s}{}^{\alpha_1\ldots\alpha_r} \\ &+ \partial_{\beta_1} X^\gamma T_{\gamma\beta_2\ldots\beta_s}{}^{\alpha_1\ldots\alpha_r} + \ldots + \partial_{\beta_s} X^\gamma T_{\beta_1\ldots\beta_{s-1}\gamma}{}^{\alpha_1\ldots\alpha_r} \\ &- T_{\beta_1\ldots\beta_s}{}^{\gamma\alpha_2\ldots\alpha_r}\partial_\gamma X^{\alpha_1} - \ldots - T_{\beta_1\ldots\beta_s}{}^{\alpha_1\ldots\alpha_{r-1}\gamma}\partial_\gamma X^{\alpha_1}.\end{aligned} \tag{3.111}$$

Первое слагаемое в правой части (3.111) соответствует смещению самой точки x, слагаемые во второй и третьей строках (3.111) возникают при действии отображений s^{*-1} и s_* на каждый ковариантный и контравариантный индекс, соответственно. □

Получим явные выражения для производных Ли различных тензорных полей в координатах.

Пример 3.14.1. В простейшем случае скалярного поля $f(x)$ производная Ли совпадает с производной функции вдоль векторного поля. Покажем это. Поскольку на скалярное поле ни дифференциал отображения, ни его возврат не действуют, то из определения (3.108) следует

$$\mathsf{L}_X f = \lim_{\epsilon\to 0} \frac{f(x) - f(x - \epsilon X)}{\epsilon} = X^\alpha \partial_\alpha f.$$

Таким образом, производная Ли от функции – это просто производная вдоль векторного поля. □

Пример 3.14.2. Из уравнения (3.111) следует выражение для производной Ли от векторного поля Y в координатах

$$\mathsf{L}_X Y^\alpha = X^\beta \partial_\beta Y^\alpha - Y^\beta \partial_\beta X^\alpha,$$

что совпадает с коммутатором векторных полей (3.40)

$$\mathsf{L}_X Y = [X, Y]. \tag{3.112}$$

Определение производной Ли (3.108) для векторного поля принимает вид

$$\mathsf{L}_X Y = \lim_{\epsilon\to 0} \frac{Y - s_*(\epsilon)Y}{\epsilon}. \tag{3.113}$$

Производная Ли от векторного поля обладает следующими свойствами:

$$\mathsf{L}_{fX} Y = f[X, Y] - (Yf)X,$$
$$\mathsf{L}_X (fY) = f[X, Y] + (Xf)Y,$$

где $f(x)$ – произвольное скалярное поле.

Отметим, что тождества Якоби (3.39) в алгебре Ли векторных полей можно переписать в эквивалентном виде, используя производную Ли,

$$\mathsf{L}_X [Y, Z] = [\,\mathsf{L}_X Y, Z] + [Y, \mathsf{L}_X Z].$$

В таком виде тождества Якоби аналогичны правилу Лейбница.

Производная Ли отличается от ковариантной производной вдоль векторного поля (8.11). В частности, для векторного поля имеем

$$\mathsf{L}_X Y^\alpha - \nabla_X Y^\alpha = -Y^\beta (\nabla_\beta X^\alpha + X^\gamma T_{\beta\gamma}{}^\alpha), \tag{3.114}$$

где ∇_α – ковариантная производная и $T_{\beta\gamma}{}^\alpha$ – тензор кручения. Это равенство доказывается путем простой проверки. □

Пример 3.14.3. Производная Ли от 1-формы $A = dx^\alpha A_\alpha$ имеет вид

$$\mathsf{L}_X A_\alpha = X^\beta \partial_\beta A_\alpha + \partial_\alpha X^\beta A_\beta.$$

При этом разность с ковариантной производной вдоль векторного поля имеет другой знак по сравнению с (3.114)

$$\mathsf{L}_X A_\alpha - \nabla_X A_\alpha = (\nabla_\alpha X^\beta + X^\gamma T_{\alpha\gamma}{}^\beta) A_\beta.$$

□

Определение. *Дифференцированием* D тензорной алгебры $\mathcal{T}(\mathbb{M})$ называется линейный эндоморфизм $\mathcal{T}(\mathbb{M})$, удовлетворяющий следующим свойствам:

1) D сохраняет тип тензорных полей: $D\mathcal{T}^r_s(\mathbb{M}) \subset \mathcal{T}^r_s(\mathbb{M})$.
2) Дифференцирование удовлетворяет правилу Лейбница. Если Y и Z – два произвольных тензорных поля на $\mathbb{M}$, то

$$D(Y \otimes Z) = DY \otimes Z + Y \otimes DZ.$$

3) D перестановочен с каждым свертыванием: $DC = CD$. □

Пример 3.14.4. Нетрудно проверить, что производная Ли L_X является дифференцированием в тензорной алгебре $\mathcal{T}(\mathbb{M})$. □

Рассмотрим тензорное поле $S = S_\beta{}^\alpha(x) e_\alpha \otimes e^\beta$ типа $(1,1)$. В каждой точке $x \in \mathbb{M}$ оно задает линейный эндоморфизм касательного $\mathbb{T}_x(\mathbb{M})$ и кокасательного $\mathbb{T}^*_x(\mathbb{M})$ пространств, который естественным образом продолжается до линейного эндоморфизма D_S тензорной алгебры в этой точке. Если $T \in \mathbb{T}^r_{s,x}(\mathbb{M})$ – тензорное поле типа (r,s), то в компонентах

$$\begin{aligned}(D_S T)_{\beta_1\ldots\beta_s}{}^{\alpha_1\ldots\alpha_r} = {} & S_{\beta_1}{}^\gamma T_{\gamma\beta_2\ldots\beta_s}{}^{\alpha_1\ldots\alpha_r} + \ldots + S_{\beta_s}{}^\gamma T_{\beta_1\ldots\beta_{s-1}\gamma}{}^{\alpha_1\ldots\alpha_r} - \\ & - T_{\beta_1\ldots\beta_s}{}^{\gamma\alpha_2\ldots\alpha_r} S_\gamma{}^{\alpha_1} - \ldots - T_{\beta_1\ldots\beta_s}{}^{\alpha_1\ldots\alpha_{r-1}\gamma} S_\gamma{}^{\alpha_r}.\end{aligned}$$

Тогда D_S представляет собой дифференцирование тензорной алгебры $\mathcal{T}(\mathbb{M})$, индуцированное тензорным полем S типа $(1,1)$.

Теорема 3.14.1. *Каждое дифференцирование D тензорной алгебры $\mathcal{T}(\mathbb{M})$ допускает единственное разложение*

$$D = \mathsf{L}_X + D_S,$$

где X есть векторное поле, а S – тензорное поле типа $(1,1)$.

Доказательство. См., например, [**?**]. □

Замечание. Поскольку любое дифференцирование D линейно отображает алгебру функций $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{M})$ в себя, и выполняется правило Лейбница, то векторное поле X существует и определяется единственным образом из условия $Df = Xf$ для всех $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{M})$. □

Следствие. Разность двух произвольных дифференцирований есть дифференцирование, индуцированное некоторым тензорным полем типа $(1,1)$. □

Таким образом, у нас есть два дифференцирования в тензорной алгебре $\mathcal{T}(\mathbb{M})$: производная Ли вдоль векторного поля L_X и дифференцирование D_S, индуцированное тензорным полем S типа $(1,1)$. В разделе **??** будет введено еще одно дифференцирование в тензорной алгебре – ковариантное дифференцирование ∇. Согласно теореме 3.14.1, эти три вида дифференцирований связаны между собой. Нетрудно убедиться, что в общем случае производная Ли L_X и ковариантная производная вдоль векторного поля ∇_X связаны следующим соотношением

$$\begin{aligned}&(\mathsf{L}_X - \nabla_X) Y_{\beta_1\ldots\beta_s}{}^{\alpha_1\ldots\alpha_r} = \\ &= (\nabla_{\beta_1} X^\gamma + T_{\beta_1\delta}{}^\gamma X^\delta) Y_{\gamma\beta_2\ldots\beta_s}{}^{\alpha_1\ldots\alpha_r} + \ldots + (\nabla_{\beta_s} X^\gamma + T_{\beta_s\delta}{}^\gamma X^\delta) Y_{\beta_1\ldots\beta_{s-1}\gamma}{}^{\alpha_1\ldots\alpha_r} \\ &- Y_{\beta_1\ldots\beta_s}{}^{\gamma\alpha_2\ldots\alpha_r}(\nabla_\gamma X^{\alpha_1} + T_{\gamma\delta}{}^{\alpha_1} X^\delta) - \ldots - Y_{\beta_1\ldots\beta_s}{}^{\alpha_1\ldots\alpha_{r-1}\gamma}(\nabla_\gamma X^{\alpha_r} + T_{\gamma\delta}{}^{\alpha_r} X^\delta).\end{aligned}$$

То есть разность ковариантного дифференцирования и производной Ли является дифференцированием, индуцированном тензорным полем с компонентами $\nabla_\beta X^\alpha + T_{\beta\gamma}{}^\alpha X^\gamma$.

Как следствие этой формулы или непосредственной проверкой можно убедиться в том, что в правой части (3.111) все частные производные можно выразить через ковариантные. Это естественно, т.к. производная Ли является инвариантным оператором. В этом случае появляются дополнительные слагаемые, содержащие тензор кручения для каждого тензорного индекса. Если кручение аффинной связности равно нулю, то все частные производные в производной Ли (3.111) можно просто заменить на ковариантные.

Пример 3.14.5. Для иллюстрации приведем формулу производной Ли от компонент тензора $Y_\alpha{}^\beta$ типа (1,1)

$$\begin{aligned}\mathsf{L}_X Y_\alpha{}^\beta =& X^\gamma \partial_\gamma Y_\alpha{}^\beta + \partial_\alpha X^\gamma Y_\gamma{}^\beta - Y_\alpha{}^\gamma \partial_\gamma X^\beta \\ =& X^\gamma \nabla_\gamma Y_\alpha{}^\beta + \nabla_\alpha X^\gamma Y_\gamma{}^\beta - Y_\alpha{}^\gamma \nabla_\gamma X^\beta \\ &+ X^\gamma Y_\alpha{}^\delta T_{\delta\gamma}{}^\beta - X^\gamma Y_\delta{}^\beta T_{\alpha\gamma}{}^\delta.\end{aligned}$$

Аналогичные формулы справедливы для произвольных тензоров. □

Замечание. Производная Ли не зависит ни от метрики, ни от аффинной связности, которые могут быть заданы на многообразии совершенно независимо. □

Пример 3.14.6. Приведем также явное выражение для производной Ли от метрики

$$\mathsf{L}_X g_{\alpha\beta} = X^\gamma \partial_\gamma g_{\alpha\beta} + \partial_\alpha X^\gamma g_{\gamma\beta} + \partial_\beta X^\gamma g_{\alpha\gamma}.$$

Это выражение можно переписать в виде

$$\mathsf{L}_X g_{\alpha\beta} = \widetilde{\nabla}_\alpha X_\beta + \widetilde{\nabla}_\beta X_\alpha, \tag{3.115}$$

где $\widetilde{\nabla}_\alpha$ – ковариантная производная со связностью Леви–Чивиты (раздел 8.2). □

Пусть $T \in \mathcal{T}^r_s(\mathbb{M})$ и $X \in \mathcal{X}(\mathbb{M})$ – произвольное тензорное поле типа (r,s) и полное векторное поле на многообразии $\mathbb{M}$. Полное векторное поле порождает однопараметрическую группу преобразований $s(t,x)$. Если значение тензорного поля $T(s)$ в точке $s(t,x)$ равно $\tilde{s}(t,x)T(x)$, то мы говорим, что тензорное поле $T(x)$ *инвариантно* при действии однопараметрической группы преобразований. Из определения производной Ли следует

Предложение 3.14.1. *Тензорное поле $T \in \mathcal{T}^r_s(\mathbb{M})$ инвариантно относительно однопараметрической группы преобразований $s(t,x)$, порожденной векторным полем X, для всех t тогда и только тогда, когда производная Ли равна нулю $\mathsf{L}_X T = 0$.*

Глава 4

Дифференциальные формы и интегрирование

В дифференциальной геометрии и приложениях важную роль играют дифференциальные формы. Они используются для определения связностей на расслоениях, интегрирования по многообразию, характеристических классов, когомологий де Рама, в гамильтоновом формализме и других областях. В настоящей главе будут даны определения и рассмотрены основные свойства дифференциальных форм. Будут также сформулированы две фундаментальные теоремы: теорема Дарбу и формула Стокса, играющие исключительно важную роль в приложениях.

4.1 Внешняя алгебра

Рассмотрим векторное и сопряженное к нему пространства $\mathbb{V}$ и $\mathbb{V}^*$. В разделе **??** над произвольным векторным пространством, например, над $\mathbb{V}^*$, была построена тензорная алгебра $\otimes\mathbb{V}^*$. В этой алгебре существуют двусторонние идеалы, и соответствующие фактор пространства также представляют собой алгебры. Наиболее важными из этих фактор алгебр являются внешняя алгебра и алгебры Клиффорда. В настоящем разделе мы рассмотрим внешнюю алгебру $\Lambda(\mathbb{V})$, которая лежит в основе теории дифференциальных форм.

Рассмотрим n-мерное векторное пространство $\mathbb{V}$ над полем вещественных чисел с базисом e_a, $a = 1, \ldots, n$. Дуальный базис сопряженного пространства $\mathbb{V}^*$ обозначим через e^a, $e^a(e_b) = \delta^a_b$. В следующем разделе мы отождествим пространства $\mathbb{V}$ и $\mathbb{V}^*$ с касательным $\mathbb{T}_x(\mathbb{M})$ и кокасательным $\mathbb{T}^*_x(\mathbb{M})$ пространствами в фиксированной точке $x \in \mathbb{M}$ многообразия $\mathbb{M}$.

Начнем с длинного, но конструктивного определения внешней алгебры над векторным пространством $\mathbb{V}$. Сначала введем вспомогательные понятия.

Определение. Множество полностью антисимметричных ковариантных тензоров типа $(0, r)$, $0 \leq r \leq n$, называется множеством *форм степени* r над векторным пространством $\mathbb{V}$ и обозначается $\Lambda_r(\mathbb{V})$.

В данном определении антисимметрия формы означает следующее. Пусть $A \in \Lambda_r(\mathbb{V})$. Тогда ее значение на произвольном наборе векторов $X_1, \ldots, X_r \in \mathbb{V}$ антисимметрично относительно перестановки любой пары векторов

$$A(X_1, \ldots, X_i, \ldots, X_j, \ldots, X_r) = -A(X_1, \ldots, X_j, \ldots, X_i, \ldots, X_r), \quad 1 \leq i < j \leq r.$$

В компонентах это условие означает антисимметрию относительно перестановки любой пары индексов.

Множество форм $\Lambda_r(\mathbb{V}) \subset \otimes\mathbb{V}^*$ степени r является векторным пространством над полем вещественных чисел размерности C_n^r.

По определению, вещественные числа (скаляры) образуют множество 0-форм, $\Lambda_0(\mathbb{V}) = \mathbb{R}$. Отметим, что 1-формы $A \in \Lambda_1(\mathbb{V}) = \mathbb{V}^*$ (ковекторы или линейные формы) являются элементами сопряженного пространства и представляются в виде $A = e^a A_a$. Максимальная степень формы совпадает с размерностью векторного пространства n, поскольку для более высоких степеней по крайней мере два индекса будут совпадать, а это невозможно для антисимметричных тензоров.

Из определения тензора следует, что r-форма $A \in \Lambda_r(\mathbb{V})$ представляет собой полилинейное отображение r экземпляров векторного пространства $\mathbb{V}$ в вещественную прямую

$$A: \quad \underbrace{\mathbb{V} \times \ldots \times \mathbb{V}}_{r} \quad \to \quad \mathbb{R}.$$

Полилинейность означает, что значение r-формы на r векторах $X_1, \ldots, X_r \in \mathbb{V}$ линейно по каждому аргументу при фиксированных остальных.

Ввиду антисимметрии r-форм относительно перестановки индексов, они имеют меньше независимых компонент, чем ковариантные тензоры типа $(0, r)$. Ведем обозначение

$$e^{a_1} \wedge \ldots \wedge e^{a_r} := \sum_\sigma e^{\sigma(a_1} \otimes \ldots \otimes e^{a_r)} \operatorname{sgn} \sigma, \tag{4.1}$$

где символ $\otimes$ обозначает тензорное произведение, сумма берется по всем перестановкам $\sigma(a_1 \ldots a_r)$ индексов, а $\operatorname{sgn} \sigma = \pm 1$ обозначает знак перестановки. Здесь мы ввели знак внешнего умножения $\wedge$, которое будет определено ниже. Пока он рассматривается просто, как некоторый символ.

По-построению, выражение (4.1) является ковектором типа $(0, r)$ и антисимметрично относительно перестановки любой пары индексов:

$$e^{\sigma(a_1} \wedge \ldots \wedge e^{a_r)} = e^{a_1} \wedge \ldots \wedge e^{a_r} \operatorname{sgn} \sigma.$$

Поэтому множество ковекторов с упорядоченным набором индексов

$$e^{a_1} \wedge \ldots \wedge e^{a_r}, \qquad 1 \le a_1 < \ldots < a_r \le n, \tag{4.2}$$

образует базис в пространстве r-форм. Тогда произвольная форма степени r имеет вид

$$A = \sum_{a_1 < \ldots < a_r} e^{a_1} \wedge \ldots \wedge e^{a_r} A_{a_1 \ldots a_r}, \tag{4.3}$$

$$= \frac{1}{r!} e^{a_1} \wedge \cdots \wedge e^{a_r} A_{a_1 \ldots a_r}. \tag{4.4}$$

В разложении (4.3) при фиксированной выборке индексов суммирование по индексам отсутствует, а сумма подразумевается только по различным выборкам. В последнем выражении (4.4) суммирование проводится по всем значениям индексов, и поэтому введен компенсирующий множитель $1/r!$. Это часто бывает удобнее, поскольку запись r-формы A в виде (4.4) имеет инвариантный вид в отличие от (4.3).

Пример 4.1.1. Рассмотрим 2-форму $A = e^a \otimes e^b A_{ab}$, где $A_{ab} = -A_{ba}$. Тогда

$$A = \frac{1}{2} e^a \otimes e^b (A_{ab} - A_{ba}) = \frac{1}{2} e^a \wedge e^b A_{ab},$$

где

$$e^a \wedge e^b = -e^b \wedge e^a = e^a \otimes e^b - e^b \otimes e^a. \quad \square \tag{4.5}$$

В компонентах значение r-формы A на векторных полях $\{X_1, \ldots, X_r\}$ определяется сверткой компонент

$$A(X_1, \ldots, X_r) = X_1^{a_1} \ldots X_r^{a_r} A_{a_1 \ldots a_r}.$$

Построим 2^n-мерное векторное пространство, равное прямой сумме форм всех степеней

$$\Lambda(\mathbb{V}) = \bigoplus_{r=0}^{n} \Lambda_r(\mathbb{V}). \tag{4.6}$$

Базис этого пространства имеет вид

$$1, \quad e^a, \quad e^{a_1} \wedge e^{a_2}, \quad \ldots, \quad e^{a_1} \wedge \ldots \wedge e^{a_r}, \ldots, \quad e^1 \wedge \ldots \wedge e^n, \tag{4.7}$$

где последовательность $a_1 \ldots a_r$ является упорядоченным набором различных индексов, расположенных в порядке возрастания $1 \le a_1 < \cdots < a_r \le n$. Первый базисный вектор является единицей, поскольку поле вещественных чисел $\mathbb{R}$ является подпространством рассматриваемого векторного пространства. Последний базисный вектор единственен, т.к. содержит ровно n индексов. Элементы из $\Lambda(\mathbb{V})$ представимы в виде

$$A = \sum_{r=0}^{n} \frac{1}{r!} e^{a_1} \wedge \cdots \wedge e^{a_r} A_{a_1 \ldots a_r}, \tag{4.8}$$

где подразумевается суммирование по всем значениям индексов.

Введем на множестве форм *внешнее умножение*, отображающее $\Lambda(\mathbb{V}) \to \Lambda(\mathbb{V})$. Пусть A и B – формы фиксированных степеней r и s, соответственно. Их тензорное произведение $A \otimes B$ является ковариантным тензором типа $(0, r+s)$, однако не будет формой, т.к. не будет антисимметрично относительно всех перестановок индексов. Чтобы исправить ситуацию после тензорного умножения форм необходимо произвести полную антисимметризацию. Тогда внешнее умножение является отображением $\Lambda_r \times \Lambda_s \to \Lambda_{r+s}$.

Определение. Внешним произведением двух форм $A \in \Lambda_r(\mathbb{V})$ и $B \in \Lambda_s(\mathbb{V})$ называется форма $C \in \Lambda_{r+s}(\mathbb{V})$, построенная по правилу:

$$A \wedge B = \frac{1}{(r+s)!} e^{a_1} \wedge \cdots \wedge e^{a_{r+s}} C_{a_1 \ldots a_{r+s}}, \tag{4.9}$$

где коэффициенты внешнего произведения равны

$$\begin{aligned} C_{a_1 \ldots a_{r+s}} &= \frac{1}{r!s!} \sum_{\sigma} A_{\sigma(a_1 \ldots a_r} B_{a_{r+1} \ldots a_{r+s})} \operatorname{sgn} \sigma, \\ &= C^r_{r+s} A_{[a_1 \ldots a_r} B_{a_{r+1} \ldots a_{r+s}]}. \end{aligned} \tag{4.10}$$

Здесь $\sigma(a_1 \ldots a_r a_{r+1} \ldots a_{r+s})$ обозначает перестановку σ всех индексов $(a_1 \ldots a_{r+s})$, $\operatorname{sgn} \sigma$ – знак перестановки, суммирование ведется по всем перестановкам, а квадратные скобки обозначают антисимметризацию всех индексов. $\square$

Формулу внешнего произведения (4.9) можно переписать в эквивалентном виде

$$A \wedge B = \frac{1}{r!s!} e^{a_1} \wedge \cdots \wedge e^{a_{r+s}} A_{a_1 \ldots a_r} B_{a_{r+1} \ldots a_{r+s}}. \tag{4.11}$$

Замечание. Множитель $1/(r+s)!$ в (4.9) связан с тем, что суммирование проводится по всем значениям индексов. Необходимость введения множителя $1/r!s!$ в (4.10) будет ясна из дальнейшего. □

Пример 4.1.2. Внешнее умножение произвольной r-формы $A \in \Lambda_r(\mathbb{V})$ на 0-форму (число) $f \in \mathbb{R} = \Lambda_0(\mathbb{V})$ сводится к обычному умножению компонент формы A на число,

$$f \wedge A = \frac{1}{r!} e^{a_1} \wedge \cdots \wedge e^{a_r} (f A_{a_1 \ldots a_r}). \qquad \square$$

Пример 4.1.3. Внешнее произведение двух 1-форм $A = e^a A_a$ и $B = e^a B_a$ равно

$$A \wedge B = \frac{1}{2} e^a \wedge e^b (A_a B_b - A_b B_a) = e^a \wedge e^b A_a B_b. \quad \square \tag{4.12}$$

Пример 4.1.4. Внешнее произведение 1-формы $A = e^a A_a$ на 2-форму $B = \frac{1}{2} e^a \wedge e^b B_{ab}$ равно

$$\begin{aligned} A \wedge B &= \frac{1}{6} e^a \wedge e^b \wedge e^c (A_a B_{bc} + A_b B_{ca} + A_c B_{ab}) \\ &= \frac{1}{2} e^a \wedge e^b \wedge e^c A_a B_{bc}. \quad \square \end{aligned} \tag{4.13}$$

Если суммарная степень форм превосходит размерность векторного пространства $r + s > n$, то внешнее произведение этих форм дает нуль.

Можно проверить, что внешнее умножение обладает следующими свойствами:

$$A \wedge B \ \text{ линейно по } A \text{ и } B, \tag{4.14}$$

$$A \wedge B = (-1)^{rs} B \wedge A, \tag{4.15}$$

$$(A \wedge B) \wedge C = A \wedge (B \wedge C). \tag{4.16}$$

Первые два свойства очевидны. Из второго свойства (4.15) следует, что, если A – форма нечетной степени, то $A \wedge A = 0$.

Третье свойство доказывается прямым вычислением. Для трех форм, степеней r, s и t, соответственно, имеем

$$\begin{aligned} &(A \wedge B) \wedge C = A \wedge (B \wedge C) = A \wedge B \wedge C \\ &= \frac{1}{(r+s+t)!} e^{a_1} \wedge \ldots \wedge e^{a_{r+s+t}} \frac{1}{r!s!t!} \sum_\sigma \mathsf{sgn}\,(\sigma) A_{\sigma(a_1 \ldots a_r} B_{a_{r+1} \ldots a_{r+s}} C_{a_{r+s+1} \ldots a_{r+s+t})} \\ &= \frac{1}{r!s!t!} e^{a_1} \wedge \cdots \wedge e^{a_{r+s+t}} A_{a_1 \ldots a_r} B_{a_{r+1} \ldots a_{r+s}} C_{a_{r+s+1} \ldots a_{r+s+t}}. \end{aligned}$$

Последнее выражение симметрично относительно перестановок r, s и t, что соответствует ассоциативности внешнего умножения и определяют выбор коэффициента в (4.10). Внешнее умножение, введенное для форм фиксированной степени, линейным образом продолжается на формы общего вида (4.8). Тем самым множество форм $\Lambda(\mathbb{V})$ над произвольным векторным пространством $\mathbb{V}$, $\mathsf{dim}\,\mathbb{V} = n$, с операцией внешнего умножения представляет собой ассоциативную алгебру над полем вещественных чисел.

Форма фиксированной степени называется *однородной*. Прямая сумма форм разных степеней называется *неоднородной*. Внешнее умножение (4.9), определенное для однородных форм, продолжается на неоднородные формы по линейности.

Пример 4.1.5. Пусть A, B, C, D – четыре однородные формы различных степеней, тогда

$$(A \oplus B) \wedge (C \oplus D) := (A \wedge C) \oplus (B \wedge C) \oplus (A \wedge D) \oplus (B \wedge D). \qquad \square$$

Определение. Множество форм вида (4.8) с внешним умножением (4.9), продолженным на формы общего вида по линейности, называется *внешней алгеброй* $\Lambda(\mathbb{V})$ над векторным пространством $\mathbb{V}$, $\mathsf{dim}\,\mathbb{V} = n$. $\square$

Эта алгебра ассоциативна, градуирована, антикоммутативна и содержит единичный элемент $1 \in \Lambda_0(\mathbb{V})$. Внешняя алгебра является алгеброй Грассмана с образующими e^a (частным случаем алгебр Клиффорда).

В обозначении базисных векторов внешней алгебры (4.2) был использован знак внешнего умножения, которое было определено позже. Покажем, что это обозначение обосновано. Рассмотрим две базисные 1-формы $A^a = e^a$ и $B^b = e^b$. Тогда их внешнее произведение равно

$$A^a \wedge B^b = e^a \wedge e^b. \tag{4.17}$$

Более общо, для двух базисных форм $A^{a_1 \ldots a_r} = e^{a_1} \wedge \ldots \wedge e^{a_r}$ и $B^{b_1 \ldots b_s} = e^{b_1} \wedge \ldots \wedge e^{b_s}$ имеем

$$A^{a_1 \ldots a_r} \wedge B^{b_1 \ldots b_s} = e^{a_1} \wedge \ldots \wedge e^{a_r} \wedge e^{b_1} \wedge \ldots \wedge e^{b_s}.$$

Это оправдывает обозначение для базиса (4.1) и выбор коэффициентов для внешнего умножения (4.10).

Замечание. Для определения ассоциативного умножения в пространстве форм $\Lambda(\mathbb{V})$ выбор коэффициента в определении внешнего умножения не является единственным. При определении внешнего умножения (4.9), (4.10) можно было бы выбрать другой коэффициент в (4.10):

$$C_{a_1 \ldots a_{r+s}} = \frac{1}{(r+s)!} \sum_\sigma \mathsf{sgn}\,\sigma A_{\sigma(a_1 \ldots a_r} B_{a_{r+1} \ldots a_{r+s})}. \tag{4.18}$$

В этом случае произведение трех форм

$$\begin{aligned}(A \wedge B) \wedge C &= A \wedge (B \wedge C) = A \wedge B \wedge C \\ &= \frac{1}{(r+s+t)!} e^{a_1} \wedge \cdots \wedge e^{a_{r+s+t}} A_{a_1 \ldots a_r} B_{a_{r+1} \ldots a_{r+s}} C_{a_{r+s+1} \ldots a_{r+s+t}}\end{aligned}$$

также симметрично относительно перестановок r, s, t и, значит, ассоциативно. Однако в произведении базисных векторов (4.17) появился бы дополнительный множитель. $\square$

К определению внешней алгебры можно подойти с другой, более абстрактной, точки зрения. Рассмотрим две произвольные 1-формы $A, B \in \Lambda_1(\mathbb{V}) = \mathbb{V}^*$. Тогда для их тензорного произведения справедливо тождество

$$A \otimes B = A \wedge B + \frac{1}{2}[(A+B) \otimes (A+B) - A \otimes A - B \otimes B]. \tag{4.19}$$

Выражение в квадратных скобках является элементом тензорной алгебры, и каждое слагаемое представляет собой тензорное произведение одинаковых 1-форм. Рассмотрим элементы более общего вида $X \otimes A \otimes A \otimes Y$, где $A \in \mathbb{V}^*$ – линейная форма, а $X, Y \in \otimes\mathbb{V}^*$ – произвольные элементы тензорной алгебры. Нетрудно проверить, что

элементы такого вида образуют двусторонний идеал $\mathbb{I}$ в тензорной алгебре $\otimes\mathbb{V}^*$, которая рассматривается, как кольцо по отношению к сложению и тензорному умножению. Тогда из представления (4.19) следует, что внешняя алгебра является факторпространством

$$\Lambda(\mathbb{V}) = \otimes\mathbb{V}^*/\mathbb{I}.$$

То есть два элемента $A, B \in \otimes\mathbb{V}^*$ являются эквивалентными $A \sim B$, если $A = B + C$, где $C \in \mathbb{I}$. Выражение в квадратных скобках в (4.19) принадлежит идеалу, и, значит,

$$A \otimes B \sim A \wedge B.$$

Таким образом каждый элемент внешней алгебры взаимно однозначно определяет класс эквивалентности в тензорной алгебре.

Сформулируем четыре теоремы, доказательство которых сводится к алгебраическим выкладкам.

Теорема 4.1.1. *Для того, чтобы набор 1-форм $\{A_i\}$, $i = 1, \ldots, \mathrm{N}$, был линейно зависим, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство*

$$A_1 \wedge \ldots \wedge A_{\mathrm{N}} = 0. \tag{4.20}$$

Теорема 4.1.2. *Пусть $\{A_i\}$ и $\{B_i\}$, $i = 1, \ldots, \mathrm{N}$, – два набора 1-форм таких, что выполнено равенство*

$$\sum_{i=1}^{\mathrm{N}} A_i \wedge B_i = 0.$$

Если 1-формы $\{A_i\}$ линейно независимы, то 1-формы $\{B_i\}$ можно выразить в виде линейной комбинации 1-форм $\{A_i\}$

$$B_i = \sum_{j=1}^{\mathrm{N}} C_{ij} A_j,$$

причем $C_{ij} = C_{ji}$.

Теорема 4.1.3. *Пусть $\{A_i\}$, $i = 1, \ldots, \mathrm{N}$, – набор N линейно независимых 1-форм и $B \in \Lambda_s$. Для того, чтобы s-форму B можно было представить в виде*

$$B = A_1 \wedge C_1 + \ldots + A_{\mathrm{N}} \wedge C_{\mathrm{N}},$$

где $\{C_i\}$ – некоторый набор $(s-1)$-форм, необходимо и достаточно, чтобы

$$A_1 \wedge \ldots \wedge A_{\mathrm{N}} \wedge B = 0.$$

Замечание. При $\mathrm{N} + s > n$ эта теорема тривиально выполняется. □

Теорема 4.1.4. *Пусть $\{A_i, B_i\}$ и $\{A'_i, B'_i\}$, $i = 1, \ldots, \mathrm{N}$, – два набора по $2\mathrm{N}$ 1-форм. Если 1-формы $\{A_i, B_i\}$ линейно независимы и выполнено равенство*

$$\sum_{i=1}^{\mathrm{N}} A_i \wedge B_i = \sum_{i=1}^{\mathrm{N}} A'_i \wedge B'_i,$$

то набор 1-форм $\{A'_i, B'_i\}$ также линейно независим и представляется в виде линейных комбинаций 1-форм $\{A_i, B_i\}$.

Пусть некоторое семейство 1-форм $\{A_i\}$, $i = 1, \ldots, \mathrm{N}$, выражается в виде линейной комбинации 1-форм $\{B_i\}$,

$$A_i = M_i{}^j B_j,$$

где $M_i{}^j$ – некоторая квадратная $\mathrm{N}\times\mathrm{N}$ матрица. Тогда нетрудно проверить следующую формулу

$$A_1 \wedge \ldots \wedge A_{\mathrm{N}} = \det(M_i{}^j) B_1 \wedge \ldots \wedge B_{\mathrm{N}}.$$

Определение. Пусть $A \in \Lambda_r(\mathbb{V})$ – внешняя r-форма, тогда внешнее произведение

$$A^s := \underbrace{A \wedge \ldots \wedge A}_{s}$$

называется *внешней степенью* r-формы A.

На множестве 2-форм $\Lambda_2(\mathbb{V})$ можно определить *внешнюю экспоненту* $\widehat{\exp}$, которая каждой 2-форме $A \in \Lambda_2(\mathbb{V})$ ставит в соответствие прямую сумму форм четной степени по правилу

$$\widehat{\exp} A = 1 \oplus A \oplus \frac{1}{2} A \wedge A \oplus \frac{1}{3!} A \wedge A \wedge A \oplus \ldots \quad \square \tag{4.21}$$

Ряд (4.21) содержит конечное число слагаемых, т.к. максимальное число сомножителей в последнем отличном от нуля слагаемом не может превосходить $n/2$. Внешняя экспонента обладает следующими свойствами:

$$\widehat{\exp} A \wedge \widehat{\exp} B = \widehat{\exp}(A + B), \qquad \forall A, B \in \Lambda_2(\mathbb{V}).$$
$$\frac{d}{dt} \widehat{\exp}(tA) = A \wedge \widehat{\exp}(tA) = \widehat{\exp}(xA) \wedge A.$$

При доказательстве этих формул использовано равенство $A \wedge B = B \wedge A$, справедливое для форм четной размерности.

Определение. В пространстве векторов и r-форм введем *внутреннее умножение* как билинейное отображение

$$\mathsf{i} : \quad \mathbb{V} \times \Lambda_r(\mathbb{V}) \ni (X, A) \;\mapsto\; \mathsf{i}_X A \in \Lambda^{r-1}(\mathbb{V}).$$

Оно определяется следующим образом. Пусть $X \in \mathbb{V}$ и $A \in \Lambda_r(\mathbb{V})$. Положим

$$\mathsf{i}_X A(X_1, \ldots, X_{r-1}) = A(X, X_1, \ldots, X_{r-1}). \tag{4.22}$$

Другими словами, компоненты вектора X нужно просто свернуть с первым индексом r-формы. Правая часть выражения (4.22) $(r-1)$-линейна и антисимметрична, как функция $X_1, \ldots, X_{r-1}$, а также билинейна по X и A. Удобно считать, что $\mathsf{i}_X A = 0$, если $A \in \Lambda_0$ – форма нулевой степени. Внутреннее умножение обозначают также $\mathsf{i}_X A = X \rfloor A$. Определение (4.22) можно переписать в эквивалентном виде

$$\mathsf{i}_X A = X \rfloor A = \frac{1}{(r-1)!} e^{a_1} \wedge \ldots \wedge e^{a_{r-1}} X^b A_{b a_1 \ldots a_{r-1}}. \quad \square \tag{4.23}$$

Внутреннее умножение линейно

$$\mathsf{i}_{X+Y} = \mathsf{i}_X + \mathsf{i}_Y,$$
$$\mathsf{i}_{aX} = a\, \mathsf{i}_X, \qquad a \in \mathbb{R},$$

и антисимметрично

$$\mathsf{i}_X \mathsf{i}_Y = -\mathsf{i}_Y \mathsf{i}_X \quad \Leftrightarrow \quad \mathsf{i}_X \mathsf{i}_X = 0,$$

для всех $X, Y \in \mathbb{V}$.

Нетрудно проверить, что внутреннее умножение удовлетворяет правилу Лейбница

$$\mathsf{i}_X(A \wedge B) = \mathsf{i}_X A \wedge B + (-1)^r A \wedge \mathsf{i}_X B, \qquad A \in \Lambda_r(\mathbb{V}).$$

Поэтому внутреннее умножение называют также *внутренним дифференцированием.*

Внутреннее умножение удобно использовать для характеристики внешней алгебры, построенной на фактор пространстве $\mathbb{V}/\mathbb{U}$, где $\mathbb{U} \subset \mathbb{V}$. А именно, внешняя алгебра $\Lambda(\mathbb{V}/\mathbb{U})$ состоит из тех форм $A \in \Lambda(\mathbb{V})$, для которых выполнено равенство $\mathsf{i}_X A = 0$ для всех $X \in \mathbb{U}$. Верно и обратное утверждение. Пусть задано подпространство $\mathbb{U} \subset \mathbb{V}$. Тогда множество векторов X, удовлетворяющих условию $\mathsf{i}_X A = 0$ для всех $A \in \Lambda(\mathbb{V}/\mathbb{U})$ образует подпространство, которое совпадает с $\mathbb{U}$.

Пусть f – линейное отображение векторных пространств

$$f: \ \mathbb{V} \ \to \ \mathbb{W},$$

и пусть на векторном пространстве-мишени $\mathbb{W}$ заданы две формы $A, B \in \Lambda(\mathbb{W})$, тогда для возврата отображения справедливо равенство

$$f^*(A \wedge B) = (f^* A) \wedge (f^* B) \ \in \Lambda(\mathbb{V}).$$

4.2 Дифференциальные формы

Рассмотрим многообразие $\mathbb{M}$ размерности $\mathsf{dim}\,\mathbb{M} = n$. В каждой точке многообразия мы имеем касательное и кокасательное векторные пространства. Построим над касательным векторным пространством $\mathbb{V} = \mathbb{T}_x(\mathbb{M})$ с координатным базисом ∂_α в каждой точке $x \in \mathbb{M}$ векторное пространство форм степени r: $\Lambda_{r,x}(\mathbb{M})$, как это было сделано в предыдущем разделе. Объединение форм степени r по всем точкам многообразия $\bigcup_{x\in\mathbb{M}} \Lambda_{r,x}(\mathbb{M})$ приведет к векторному расслоению, сечениями которого являются полностью антисимметричные ковариантные тензорные поля ранга r (дифференциальные формы). Прямая сумма по r множества всех дифференциальных форм даст внешнюю алгебру дифференциальных форм $\Lambda(\mathbb{M})$ на многообразии $\mathbb{M}$, в которой все операции (умножение на числа, сложение и внешнее умножение) определены поточечно. Ясно, что все свойства внешнего умножения без изменений переносятся на внешнюю алгебру дифференциальных форм, и мы не будем их переписывать. Отметим изменение обозначений и терминологии.

Определение. Множество полностью антисимметричных ковариантных тензорных полей типа $(0, r)$, $0 \le r \le n$ называется множеством *дифференциальных форм степени* r на многообразии $\mathbb{M}$ и обозначается $\Lambda_r(\mathbb{M}) \subset \mathcal{T}_r(\mathbb{M})$. □

В дальнейшем дифференциальные формы на многообразии $\mathbb{M}$ степени r мы, для краткости, будем называть их просто r-формами.

По определению, гладкие функции на многообразии образуют множество 0-форм, $\Lambda_0(\mathbb{M}) = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{M})$. 1-формы $A \in \Lambda_1(\mathbb{M}) = \mathcal{T}_1(\mathbb{M})$ (ковариантные векторные поля = сечения кокасательных расслоений) представляются в виде

$$A(x) = dx^\alpha A_\alpha(x),$$

где дифференциалы dx^α представляют собой координатный базис кокасательного пространства, который дуален к ∂_α. Дифференциальные 1-формы называются также *формами Пфаффа*. Максимальная степень формы совпадает с размерностью многообразия n, поскольку для более высоких степеней по крайней мере два индекса будут совпадать, а это невозможно для антисимметричных тензоров.

Замечание. Напомним, что ∂_α это сокращенное обозначение набора векторных полей $(\partial_\alpha)_p \in \mathcal{X}(\mathbb{U})$, $p \in \mathbb{U}$, на карте $(\mathbb{U}, \varphi)$ многообразия $\mathbb{M}$ (см. раздел 3.6.4), а $dx^\alpha = (dx^\alpha)_p$ – дуальный базис 1-форм, $dx^\alpha(\partial_\beta) = \delta^\alpha_\beta$. □

Как и для векторных пространств, алгебра дифференциальных форм равна прямой сумме форм всех степеней

$$\Lambda(\mathbb{M}) = \bigoplus_{r=0}^{n} \Lambda_r(\mathbb{M}). \tag{4.24}$$

Координатный базис этого пространства имеет вид

$$1, \quad dx^\alpha, \quad dx^{\alpha_1} \wedge dx^{\alpha_2}, \quad \ldots, \quad dx^{\alpha_1} \wedge \cdots \wedge dx^{\alpha_r}, \ldots, \quad dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n, \tag{4.25}$$

где индексы упорядочены по возрастанию $1 \le \alpha_1 < \ldots \alpha_r \le r$. Элементы внешней алгебры $\Lambda(\mathbb{M})$, в соответствии с разложением (4.24), представимы в виде

$$A = \sum_{r=0}^{n} \frac{1}{r!} dx^{\alpha_1} \wedge \cdots \wedge dx^{\alpha_r} A_{\alpha_1 \ldots \alpha_r}, \tag{4.26}$$

где подразумевается суммирование по всем значениям индексов. Эта форма называется *дифференцируемой*, если все антисимметричные тензорные поля $A_{\alpha_1 \ldots \alpha_r}(x)$ (компоненты формы) дифференцируемы. Мы будем предполагать, что все компоненты форм гладко зависят от точки многообразия.

Замечание. Запись дифференциальной формы в виде (4.26) имеет смысл только в определенной карте многообразия, где определен координатный базис кокасательного пространства dx^α. Однако она универсальна, т.к. инвариантна относительно преобразований координат, поскольку в точках пересечения двух карт с координатами x^α и $x^{\alpha'}$ имеем

$$dx^{\alpha_1} \wedge \cdots \wedge dx^{\alpha_r} A_{\alpha_1 \ldots \alpha_r} = dx^{\alpha'_1} \wedge \cdots \wedge dx^{\alpha'_r} A_{\alpha'_1 \ldots \alpha'_r}.$$

Запись дифференциальных форм в виде (4.26) является общепринятой. □

Введем несколько новых понятий, которые являются полезными с точки зрения дифференциальной геометрии. Конечно, часть из них можно было бы ввести и для дифференциальных форм над векторным пространством еще в предыдущем разделе.

Можно рассматривать дифференциальные формы со значениями в произвольном векторном пространстве $\mathbb{W}$. Пусть e_i – базис векторного пространства $\mathbb{W}$. Тогда r-форма A со значениями в $\mathbb{W}$ имеет вид $A = A^i e_i$. При каждом значении индекса i коэффициенты этого разложения представляют собой r-формы на $A^i \in \Lambda_r(\mathbb{M})$. По индексу i эти формы преобразуются, как элементы векторного пространства $\mathbb{W}$.

Пример 4.2.1. Произвольную r-форму на многообразии $\mathbb{M}$

$$A = \frac{1}{r!} dx^{\alpha_1} \wedge \cdots \wedge dx^{\alpha_r} A_{\alpha_1 \ldots \alpha_r} \in \Lambda_r(\mathbb{M}),$$

можно поточечно рассматривать, как внешнее произведение базисной r-формы $e_i = dx^{\alpha_1} \wedge \ldots \wedge dx^{\alpha_r}$ на 0-форму $A_{\alpha_1 \ldots \alpha_r}$ со значениями в векторном пространстве $\mathbb{W} = \mathbb{T}^*_x(\mathbb{M}) \wedge \ldots \wedge \mathbb{T}^*_x(\mathbb{M})$. При этом индекс i соответствует набору индексов $\alpha_1 \ldots \alpha_r$. □

Пусть на многообразии $\mathbb{M}$ помимо форм заданы векторные поля. Тогда значение произвольной r-формы A на r векторных полях $X_1, \ldots, X_r \in \mathcal{X}(\mathbb{M})$ равно свертке компонент

$$A(X_1, \ldots, X_r) = X_1^{\alpha_1} \ldots X_r^{\alpha_r} A_{\alpha_1 \ldots \alpha_r}.$$

(Данное определение не зависит от выбора карты и потому корректно.) Отсюда следует, что произвольная r-форма в каждой точке $x \in \mathbb{M}$ определяет полилинейное отображение ($\mathcal{C}^\infty$-модуль): $(\mathbb{T}_x(\mathbb{M}))^r \to \mathbb{R}$, которое антисимметрично относительно перестановки аргументов.

Пример 4.2.2. Значение 1-формы $A = dx^\alpha A_\alpha$ на векторном поле $X = X^\alpha \partial_\alpha$ определяет функцию, которая равна сумме компонент, $A(X) = X^\alpha A_\alpha$. □

Пусть A_i и X_i, $i = 1, \ldots, r \le n$ – набор 1-форм и векторных полей на $\mathbb{M}$. Тогда из определения внешнего умножения следует, что значение внешнего произведения 1-форм на векторных полях равно определителю матрицы с элементами $A_i(X_j)$

$$(A_1 \wedge \cdots \wedge A_r)(X_1 \ldots X_r) = \det (A_i(X_j)).$$

Пусть две 1-формы A и B линейно зависимы, т.е. $A = fB$, где $f \in \Lambda_0(\mathbb{M})$, тогда их внешнее произведение, очевидно, равно нулю. Верно также и обратное утверждение, из которого следует, что, если $A \wedge B \neq 0$ в некоторой области $\mathbb{U} \subset \mathbb{M}$, то 1-формы линейно независимы в каждой точке $\mathbb{U}$. Более общо, справедливо следующее утверждение.

Теорема 4.2.1. *Для того, чтобы линейные формы $e^i = dx^\alpha e_\alpha{}^i$, $i = 1, \ldots, r \le n$ были линейно независимы в области $\mathbb{U} \subset \mathbb{M}$, необходимо и достаточно, чтобы в каждой точке этой области $e^1 \wedge \ldots \wedge e^r \neq 0$.*

Дифференциальные формы часто бывает удобно рассматривать в неголономном базисе. Выберем в качестве базиса кокасательного пространства 1-формы $e^a = dx^\alpha e_\alpha{}^a$, $a = 1, \ldots, n$, где $e_\alpha{}^a(x)$ – поле репера, тогда соответствующий базис r-форм имеет вид

$$e^{a_1} \wedge \cdots \wedge e^{a_r}, \qquad 1 \le a_1 < \cdots < a_r \le n. \tag{4.27}$$

Мы используем для неголономного базиса те же обозначения, что и для базиса форм над векторным пространством (4.2). Разница заключается в том, что теперь базис $e^a(x)$ зависит от точки многообразия, и это всегда ясно из контекста.

Для того, чтобы 1-формы e^a действительно образовывали базис, необходимо и достаточно, чтобы

$$\det e_\alpha{}^a \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad e^1 \wedge \ldots \wedge e^n \neq 0$$

во всех точках многообразия $\mathbb{M}$, что совпадает с определением репера. Компоненты разложения r-формы

$$A = \frac{1}{r!} e^{a_1} \wedge \cdots \wedge e^{a_r} A_{a_1 \ldots a_r}$$

по этому базису связаны с компонентами в голономном базисе простым соотношением

$$A_{a_1\dots a_r} = e^{\alpha_1}{}_{a_1}\dots e^{\alpha_r}{}_{a_r}A_{\alpha_1\dots\alpha_r},$$

где $e^{\alpha}{}_{a}$ – матрица обратного репера $e^{\alpha}{}_{a}e_{\alpha}{}^{b} = \delta^b_a$.

4.3 Внешнее дифференцирование

Во внешней алгебре дифференциальных форм $\Lambda(\mathbb{M})$ на многообразии $\mathbb{M}$ определим *внешнее дифференцирование* как линейное отображение

$$d: \quad \Lambda_r(\mathbb{M}) \;\to\; \Lambda_{r+1}(\mathbb{M}) \tag{4.28}$$

множества r-форм в множество $(r+1)$-форм. Начнем с локального определения. Пусть в некоторой карте $(\mathbb{U},\varphi)$ задана r-форма $\frac{1}{r!}dx^{\alpha_1}\wedge\dots\wedge dx^{\alpha_r}A_{\alpha_1\dots\alpha_r} \in \Lambda_r(\mathbb{U})$. Положим

$$\begin{aligned} dA &= \frac{1}{r!}dA_{\alpha_1\dots\alpha_r}\wedge dx^{\alpha_1}\wedge\dots\wedge dx^{\alpha_r} \\ &= \frac{1}{r!}dx^{\alpha_1}\wedge\dots\wedge dx^{\alpha_{r+1}}\partial_{\alpha_1}A_{\alpha_2\dots\alpha_{r+1}}. \end{aligned} \tag{4.29}$$

Здесь под $dA_{\alpha_1\dots\alpha_r} = dx^{\alpha}\partial_{\alpha}A_{\alpha_1\dots\alpha_r}$ понимается обычный дифференциал. Внешнее дифференцирование имеет следующие свойства:

$$1) \quad \text{если } f \text{ – 0-форма, то } df = dx^{\alpha}\partial_{\alpha}f, \tag{4.30}$$

$$2) \quad \text{если } A \text{ – } r\text{-форма, то } d(A\wedge B) = dA\wedge B + (-1)^r A\wedge dB, \tag{4.31}$$

$$3) \quad d(dA) = 0 \text{ для любой формы } A. \tag{4.32}$$

Первые два свойства легко проверяются, исходя из определения (4.29). Доказательство третьего свойства сводится к тому, что вторая частная производная $\partial^2_{\alpha\beta}$ симметрична по индексам и дает нуль при свертке с антисимметричным базисным вектором.

Формула для внешнего дифференцирования (4.29) является прямым следствием свойств 1)–3). Действительно, представив r-форму как внешнее произведение 0-формы $A_{\alpha_1\dots\alpha_n}$ со значениями в векторном пространстве на базисную r-форму $dx^{\alpha_1}\wedge\ldots\wedge dx^{\alpha_n}$ сразу приходим к (4.29). Поэтому она задает единственное дифференцирование во внешней алгебре, удовлетворяющее условиям 1)–3).

Теорема 4.3.1 (Внешнее дифференцирование). *Существует единственное линейное отображение (4.28) такое, что выполнены условия (4.30)–(4.32). Оно называется внешним дифференцированием.*

Доказательство. Выше мы доказали существование и единственность внешнего дифференцирования в определенной карте. Осталось доказать, что существование и единственность не зависят от выбора карты. Действительно, компоненты в разложении внешней производной от r-формы (4.29)

$$\partial_{[\alpha_1}A_{\alpha_2\dots\alpha_{r+1}]},$$

где квадратные скобки обозначают антисимметризацию всех индексов, являются компонентами полностью антисимметричного тензора типа $(0,r+1)$. Это утверждение нетривиально, потому что обычная частная производная от компонент тензора

не дает тензора. Для 1-формы имеем следующий закон преобразования частной производной в области пересечения двух карт

$$\partial_{\alpha'} A_{\beta'} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x^{\alpha'}} \frac{\partial x^\beta}{\partial x^{\beta'}} \partial_\alpha A_\beta + \frac{\partial^2 x^\alpha}{\partial x^{\alpha'} \partial x^{\beta'}} A_\alpha.$$

Первое слагаемое соответствует тензорному закону преобразования, а второе – нет. Однако второе слагаемое исчезает при антисимметризации и мы получаем тензорный закон преобразования для внешней производной. Аналогично сокращаются дополнительные слагаемые для произвольной r-формы. Подробности доказательства приведены в [?]. □

Для практических вычислений внешней производной, которые проводятся в координатах, достаточно формулы (4.29).

Пример 4.3.1. Внешний дифференциал от 1-формы $A = dx^\alpha A_\alpha$ равен

$$dA = dA_\alpha \wedge dx^\alpha = \frac{1}{2} dx^\alpha \wedge dx^\beta (\partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha) = dx^\alpha \wedge dx^\beta \partial_\alpha A_\beta. \quad \square \tag{4.33}$$

Пример 4.3.2. Внешний дифференциал от 2-формы $B = \frac{1}{2} dx^\alpha \wedge dx^\beta B_{\alpha\beta}$ равен

$$\begin{aligned} dB &= \frac{1}{2} dB_{\alpha\beta} \wedge dx^\alpha \wedge dx^\beta = \frac{1}{2} dx^\alpha \wedge dx^\beta \wedge dx^\gamma \partial_\alpha B_{\beta\gamma} \\ &= \frac{1}{12} dx^\alpha \wedge dx^\beta \wedge dx^\gamma (\partial_\alpha B_{\beta\gamma} + \partial_\beta B_{\gamma\alpha} + \partial_\gamma B_{\alpha\beta} - \partial_\alpha B_{\gamma\beta} - \partial_\gamma B_{\beta\alpha} - \partial_\beta B_{\alpha\gamma}). \quad \square \end{aligned} \tag{4.34}$$

Формулу внешнего дифференцирования легко запомнить с помощью следующего мнемонического правила. Сравнивая последнее выражение в (4.29) с формулой для внешнего умножения (4.11), можно записать

$$dA = \partial \wedge A.$$

Из определения 4.29 следует, что внешний дифференциал можно записать с помощью ковариантной производной, определяемой символами Кристоффеля или другой произвольной *симметричной* аффинной связностью

$$dA = \frac{1}{r!} dx^{\alpha_1} \wedge \cdots \wedge dx^{\alpha_{r+1}} \widetilde{\nabla}_{\alpha_1} A_{\alpha_2 \ldots \alpha_{r+1}}. \tag{4.35}$$

В противном случае возникнут слагаемые с тензором кручения.

Приведем некоторые свойства внешнего дифференцирования. С помощью прямых вычислений доказывается формула

$$2dA(X,Y) = X\big(A(Y)\big) - Y\big(A(X)\big) - A\big([X,Y]\big), \tag{4.36}$$

где A – произвольная 1-форма, а X, Y – любые векторные поля на $\mathbb{M}$. В общем случае справедлива

Теорема 4.3.2. *Пусть A – гладкая дифференциальная форма степени r и $X_1 \ldots X_{r+1}$ – гладкие векторные поля. Тогда значение формы dA на этих векторных полях может быть найдено по формуле*

$$\begin{aligned} dA(X_1, \ldots, X_{r+1}) = &\frac{1}{r+1} \sum_i (-1)^{i-1} X_i^\alpha \partial_\alpha A(X_1, \ldots, \breve{X}_i, \ldots, X_{r-1}) + \\ &+ \frac{1}{r+1} \sum_{i<j} (-1)^{i+j} A([X_i, X_j], X_1, \ldots, \breve{X}_i, \ldots, \breve{X}_j, \ldots, X_{r+1}), \end{aligned} \tag{4.37}$$

где символ $\breve{X}_i$ означает, что соответствующее векторное поле отсутствует.

Определение. Форма A степени $r \geq 1$ называется *точной*, если существует такая $(r-1)$-форма B, что

$$A = dB. \tag{4.38}$$

Форма A степени $r \geq 0$ называется *замкнутой*, если выполнено условие

$$dA = 0. \tag{4.39}$$

По-определению, точных 0-форм не существует. □

Множество всех замкнутых 0-форм на связном многообразии состоит из функций, которые равны постоянной на всем многообразии.

Любая точная форма является замкнутой в силу свойства внешнего дифференцирования (4.32). Обратное утверждение в общем случае неверно. Для замкнутой формы представление (4.38) справедливо только локально, т.е. в некоторой окрестности произвольной точки (лемма Пуанкаре). При этом глобальное представление может не иметь места. В общем случае множество замкнутых форм больше множества точных форм. В дальнейшем будет показано, что отличие множества замкнутых и точных форм связано с топологическими свойствами многообразий.

Замечание. Если форма A точна, $A = dB$, и принадлежит классу $\mathcal{C}^k$, то это не значит, что форма B принадлежит классу $\mathcal{C}^{k+1}$, потому что в определении (4.29) содержится только часть частных производных. Например, если $B \in \Lambda_n(\mathbb{M})$ – форма максимальной степени и класса $\mathcal{C}^1$, то $A = dB = 0$, и, следовательно, принадлежит классу $\mathcal{C}^\infty$, а это ничего не говорит о степени гладкости формы B. В лемме Пуанкаре нам встретится ситуация, когда обе формы A и B одного класса гладкости. □

Пример 4.3.3. Пусть на компактном многообразии $\mathbb{M}$ задана гладкая функция $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{M})$. Тогда 1-форма $A = dx^\alpha \partial_\alpha f$ точна, замкнута и имеет по крайней мере два нуля. Наличие нулей следует из теоремы 2.3.1 о том, что на компактном многообразии всякая непрерывная функция принимает свое минимальное и максимальное значения, где все частные производные обращаются в нуль. Этот пример показывает, что нули замкнутых форм связаны с топологией многообразий. □

Нетрудно доказать, что внешнее произведение замкнутых форм замкнуто, а если одна из форм, кроме того, точна, то это произведение является точной формой.

Приведем важную теорему, имеющую многочисленные применения в дифференциальной геометрии.

Теорема 4.3.3 (Лемма Пуанкаре). *Пусть $A \in \Lambda_r(\mathbb{R}^n)$, $r \geq 1$, – замкнутая r-форма, $dA = 0$, класса $\mathcal{C}^1$, задана в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$. Тогда существуют $(r-1)$-формы $B \in \Lambda_{r-1}(\mathbb{R}^n)$, класса $\mathcal{C}^1$, такие, что $A = dB$. При этом все формы B отличаются друг от друга на точные формы $B_1 = B_2 + dC$, где $C \in \Lambda_{r-2}(\mathbb{R}^n)$, класса $\mathcal{C}^1$ при $r \geq 2$. При $r = 1$, 0-формы B определены с точностью до константы.*

Доказательство. Доказательство проводится по индукции по размерности евклидова пространства путем явного построения формы B с помощью интеграла вдоль кривой [?]. □

Эта теорема локальна, т.к. все евклидово пространство диффеоморфно конечной области в $\mathbb{R}^n$. В случае, когда многообразие $\mathbb{M}$ нетривиально и не покрывается одной картой, теорема справедлива для каждой карты, но не для всего $\mathbb{M}$. Отличие классов замкнутых и точных форм служит для глобальной характеристики многообразий и лежит в основе теории когомологий де Рама – одного из подходов к теории гомологий.

Замечание. Согласно лемме Пуанкаре, если форма A определена на области $\mathbb{U} \subset \mathbb{M}$, гомеоморфной евклидову пространству $\mathbb{R}^n$, то она всегда точна. Поэтому различие различие между точными и замкнутыми формами проявляется для форм, заданных на всем многообразии $\mathbb{M}$. □

Пример 4.3.4. Поясним лемму Пуанкаре на примере 1-формы A и 0-формы f. В этом случае условие точности формы (4.38) сводится к уравнению

$$A_\alpha = \partial_\alpha f. \tag{4.40}$$

Из теории дифференциальных уравнений известно, что это уравнение локально разрешимо тогда и только тогда, когда

$$\partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha = 0 \quad \text{или} \quad dA = 0. \tag{4.41}$$

Таким образом, замкнутость некоторой формы обеспечивает ее точность только локально, но не глобально.

Дифференциальная форма $dx^\alpha A_\alpha$ задается n независимыми компонентами, а скалярное поле f – одной. На первый взгляд, число уравнений на компоненты A_α в (4.41) равно C_n^2, что превышает разность в числе независимых компонент $n-1$ при $n \geq 3$. Кажущееся противоречие заключается в наивном подсчете числа уравнений. Подсчитаем число независимых уравнений в (4.41). Общее число уравнений равно C_n^2, однако независимых уравнений меньше, поскольку имеется дифференциальное тождество $d^2A = 0$. Число этих тождеств равно C_n^3, однако среди них также есть зависимые в силу тождества $d^3A = 0$. Продолжая этот процесс до порядка $n-1$ (дальнейшая антисимметризация по индексам не имеет смысла) получим, что число независимых уравнений среди (4.41) равно

$$C_n^2 - C_n^3 + C_n^4 - \ldots (-1)^n C_n^n = C_n^1 - 1 = n - 1.$$

Это равенство следует из (**??**). То есть среди n компонент замкнутой 1-формы A (ковекторного поля) только одна является независимой, в качестве которой можно выбрать f. □

Пример 4.3.5. Продемонстрируем локальность леммы Пуанкаре и важность нетривиальных замкнутых форм для описания глобальных свойств многообразий. Рассмотрим евклидову плоскость $\mathbb{R}^2$ в декартовых координатах x, y. Тогда дифференциал полярного угла φ имеет вид (**??**)

$$A = \frac{xdy - xdy}{x^2 + y^2}.$$

1-форма A определена и замкнута , $dA = 0$, всюду, за исключением начала координат, и, значит, не удовлетворяет условиям леммы Пуанкаре. Отсюда следует, что не существует непрерывной функции $\varphi(x, y)$, определенной на всей плоскости $\mathbb{R}^2$, такой, что $A = d\varphi$. Действительно, при обходе начала координат по замкнутому контуру один раз, функция φ получит приращение 2π. В то же время на любой односвязной области, не содержащей начала координат, такая функция существует. □

Если на многообразии задано векторное поле X, то производная Ли (см. раздел 3.14) от произвольной r-формы $A \in \Lambda_r(\mathbb{M})$ представляет собой симметричную комбинацию внешней и внутренней производной

$$\mathsf{L}_X = d\, \mathsf{i}_X + \mathsf{i}_X d. \tag{4.42}$$

Это соотношение называется *основной формулой гомотопии.*

Для доказательства равенства достаточно показать, что правая часть этого выражения является дифференцированием, коммутирующим с внешней производной d, и что оно совпадает с производной Ли на функциях. Действительно, пусть $A \in \Lambda_r(\mathbb{M})$ и $B \in \Lambda_s(\mathbb{M})$, тогда нетрудно проверить равенство

$$(d\,\mathsf{i}_X + \mathsf{i}_X d)(A \wedge B) = (d\,\mathsf{i}_X + \mathsf{i}_X d)A \wedge B + A \wedge (d\,\mathsf{i}_X + \mathsf{i}_X d)B. \tag{4.43}$$

На функциях $f \in \Lambda_0$ имеем

$$(d\,\mathsf{i}_X + \mathsf{i}_X d)f = \mathsf{i}_X df = Xf = \mathsf{L}_X f.$$

Коммутативность $(d\,\mathsf{i}_X + \mathsf{i}_X d)$ с внешней производной легко проверяется.

Формулу (4.43) можно переписать в виде

$$\mathsf{L}_X(A \wedge B) = \mathsf{L}_X A \wedge B + A \wedge \mathsf{L}_X B.$$

Пусть задано отображение двух многообразий

$$h: \quad \mathbb{M} \to \mathbb{N}.$$

Тогда возврат отображения

$$h^*: \quad \mathbb{T}^*(\mathbb{N}) \to \mathbb{T}^*(\mathbb{M}),$$

действует на формы в обратную сторону и имеет следующие свойства.

1) Для произвольных форм $A, B \in \Lambda(\mathbb{N})$, заданных на многообразии $\mathbb{N}$, справедливо равенство
$$h^*(A \wedge B) = h^*A \wedge h^*B.$$

2) Возврат отображения коммутирует с внешней производной
$$h^* dA = d(h^*A), \tag{4.44}$$
где A – произвольная r-форма на многообразии $\mathbb{N}$.

2) Пусть задан набор векторных полей $X_1, \ldots, X_r$ на $\mathbb{M}$. Тогда
$$h^*A(X_1, \ldots, X_r) = A(h_*X_1, \ldots, h_*X_r),$$
где A – произвольная r-форма на $\mathbb{N}$.

Поскольку производная Ли от форм определяется возвратом отображения, то из свойства 1) вытекает, что производная Ли от произвольной r-формы коммутирует с внешним дифференцированием
$$\mathsf{L}_X d = d\,\mathsf{L}_X.$$

4.4 Теорема Дарбу

Пусть на многообразии $\mathbb{M}$, $\dim \mathbb{M} = n$, задана произвольная r-форма

$$A = \frac{1}{n!} dx^{\alpha_1} \wedge \ldots \wedge dx^{\alpha_r} A_{\alpha_1 \ldots \alpha_r} \quad \in \Lambda_r(\mathbb{M}).$$

Зададим вопрос о том, каково минимальное число функций $f^1(x), \ldots, f^q(x)$ таких, что r-форма A представима в виде

$$A = \sum_{1 \le \alpha_1 < \ldots < \alpha_r \le q} df^{\alpha_1} \wedge \ldots \wedge df^{\alpha_r} A_{\alpha_1 \ldots \alpha_r}(f^1 \ldots f^q). \tag{4.45}$$

Ясно, что при $q = n$ любая форма уже имеет такой вид. С другой стороны, число функций не может быть меньше степени формы. Поэтому представляет интерес случай $r \le q < n$. Важность этого вопроса заключается в том, что функции $f^1, \ldots, f^q$ можно выбрать в качестве части координат некоторой новой координатной системы и тем самым привести форму к каноническому виду, в котором она будет зависеть не от всех координат, а только от их части. Ответ на поставленный вопрос дает теорема 4.46, сформулированная в настоящем разделе. Для 1- и 2-форм ответ дают теоремы Дарбу.

Для формулировки теорем мы введем новые понятия: ранг и класс дифференциальных форм. Начнем с форм над произвольным векторным пространством $\mathbb{V}$ с базисом e_α, $\alpha = 1, \ldots, n$. Дадим несколько определений.

Определение. Назовем r-форму $A \in \Lambda_r(\mathbb{V})$ *разложимой*, если существует r линейно независимых 1-форм $a^1, \ldots, a^r \in \Lambda_1(\mathbb{V})$ таких, что

$$A = a^1 \wedge \ldots \wedge a^r. \qquad \square$$

Ясно, что всякую r-форму можно представить в виде суммы разложимых r-форм, например, разложив по базису. Однако, не всякая r-форма разложима.

Пример 4.4.1. Рассмотрим четырехмерное векторное пространство $\mathbb{V}$ с базисом e_α, $\alpha = 1, 2, 3, 4$. Базис сопряженного пространства $\mathbb{V}^*$ обозначим через e^α. Рассмотрим 2-форму

$$A = e^1 \wedge e^2 + e^3 \wedge e^4 \ \in \Lambda_2(\mathbb{V}).$$

Если форма A разложима, то существуют две 1-формы $a = a_\alpha e^\alpha$ и $b = b_\alpha e^\alpha$ такие, что

$$A = a \wedge b = e^\alpha \wedge e^\beta a_\alpha b_\beta = e^1 \wedge e^2 + e^3 \wedge e^4.$$

Отсюда вытекает следующая система уравнений на коэффициенты

$$\begin{aligned} a_1 b_2 &= 1, & a_2 b_3 &= 0, \\ a_1 b_3 &= 0, & a_2 b_4 &= 0, \\ a_1 b_4 &= 0, & a_3 b_4 &= 1. \end{aligned}$$

Не ограничивая общности, можно положить $a_1 = 1$. Тогда из трех уравнений в первой колонке следует $b_2 = 1$, $b_3 = b_4 = 0$. Подставив эти решения в остальные уравнения, приходим к противоречию. Следовательно, 2-форма A является неразложимой.

Рассмотрим другую 2-форму над тем же векторным пространством $\mathbb{V}$

$$A = e^1 \wedge e^2 + e^1 \wedge e^3 \ \in \Lambda_2(\mathbb{V}).$$

Ее можно представить в виде $A = e^1 \wedge (e^2 + e^3)$. Отсюда следует, что эта форма разложима: $A = e^1 \wedge b$, где $b = e^2 + e^3 \in \Lambda_1(\mathbb{V})$. $\square$

Определение. Назовем подпространство $\mathbb{A}(A) \subset \mathbb{V}$ *ассоциированным* с формой A, если это наибольшее из тех подпространств $\mathbb{H} \subset \mathbb{V}$, для которых $A \in \Lambda_r(\mathbb{V}/\mathbb{H})$. Другими словами, пространство $\mathbb{A}(A)$ образовано теми векторами $X \in \mathbb{V}$, чье внутреннее произведение с формой равно нулю, $\mathsf{i}_X A = 0$. Это значит, что подпространство, ассоциированное с формой A, есть подпространство в $\mathbb{V}$, которое определяется системой уравнений $\mathsf{i}_X A = 0$.

Каждому ассоциированному пространству $\mathbb{A}(A)$ можно поставить в соответствие *ассоциированную с формой систему* $\mathbb{A}^*(A)$, как ортогональное дополнение сопряженного пространства

$$\mathbb{A}^*(A) = \mathbb{A}^\perp(A) \in \mathbb{V}^*.$$

Размерность ассоциированной системы называется *рангом* формы A

$$\mathsf{rank}\, A = \mathsf{dim}\, \mathbb{A}^*(A). \qquad \square$$

Ясно, что ранг r-формы A равен минимальному числу линейно независимых 1-форм таких, что форма A равна линейной комбинации их внешних произведений. Для 2-форм $A = \frac{1}{2} e^\alpha \wedge e^\beta A_{\alpha\beta}$ понятие ранга особенно наглядно – это просто ранг матрицы коэффициентов

$$\mathsf{dim}\, \mathbb{A}^*(A) = \mathsf{rank}\, A_{\alpha\beta}.$$

Пример 4.4.2. Рассмотрим 0-формы $A \in \Lambda_0(\mathbb{V})$, т.е. $A \in \mathbb{R}$. Тогда ассоциированное подпространство $\mathbb{A}(A) = \mathbb{V}$, т.к. факторпространство $\mathbb{V}/\mathbb{V}$ состоит из одной точки – начала координат, и $\Lambda_0(\mathbb{V}/\mathbb{V}) = \mathbb{R}$. Соответствующая система $\mathbb{A}^*(A)$, ассоциированная с формой A, также состоит из одной точки – начала координат сопряженного пространства $\mathbb{A}^*(A) = \{0\}$. Таким образом, ранг произвольной 0-формы равен нулю. $\square$

Пример 4.4.3. Пусть $\mathbb{V} = \mathbb{R}^n$ с базисом $\{e_1, \ldots, e_n\}$ и $A = e^1 + e^2 \in \Lambda_1(\mathbb{R}^n)$, тогда максимальное подпространство $\mathbb{A}(A) = \mathbb{R}^{n-1}$ порождено базисными векторами $\{e_1 - e_2, e_3, \ldots, e_n\}$. Соответствующая ассоциированная система $\mathbb{A}^*(A)$ представляет собой одномерное подпространство сопряженного пространства $\mathbb{V}^* = \mathbb{R}^n$, порожденное формой A, т.е. натянутое на базисный вектор $e^1 + e^2$. Ранг 1-формы $e^1 + e^2$ равен единице. Ясно, что ранг произвольной 1-формы равен единице. $\square$

Пример 4.4.4. Пусть $\mathbb{V} = \mathbb{R}^n$ и $A = e^1 \wedge e^2 + e^3 \wedge e^4 \in \Lambda_2(\mathbb{R}^n)$. Эта 2-форма неразложима, поэтому ассоциированное с ней подпространство имеет размерность $n - 4$. Следовательно, ассоциированное подпространство имеет вид $\mathbb{A}(A) = \mathbb{R}^{n-4}$ и порождено векторами $e_5, \ldots, e_n$. Соответствующая ассоциированная система четырехмерна и порождена векторами e^1, e^2, e^3, e^4. Таким образом, ранг 2-формы $e^1 \wedge e^2 + e^3 \wedge e^4$ равен четырем. $\square$

В общем случае справедлива следующая теорема, дающая ограничения на возможный ранг формы степени r.

Теорема 4.4.1. *Если $A \in \Lambda_r(\mathbb{V})$ – ненулевая r-форма на $\mathbb{V}$, то ее ранг не меньше r и не больше n*

$$r \leq \mathsf{rank}\, A \leq n.$$

Ранг r-формы A равен r тогда и только тогда, когда форма A разложима.

Доказательство. См., например, [**?**]. $\square$

Как следствие получаем, что, поскольку любая n-форма разложима, то ее ранг равен n. Можно доказать, что любая $(n-1)$-форма разложима и ее ранг, следовательно, равен $n-1$. А также, что ранг $(n-2)$-формы равен либо $n-2$, либо n.

Доказательства следующих трех предложений для внешних форм второй степени $A \in \Lambda_2(\mathbb{V})$, $\mathsf{dim}\,(\mathbb{V}) = n$, приведены в [?].

Предложение 4.4.1. *Пусть $A \in \Lambda_2(\mathbb{V})$ – внешняя 2-форма. Тогда существует целое четное число $2s$ такое, что $2 \le 2s \le n$, и $2s$ независимых линейных форм $a^1, \ldots, a^{2s}$ таких, что*

$$A = a^1 \wedge a^2 + \ldots + a^{2s-1} \wedge a^{2s}.$$

При этом 1-форму a^1 можно выбрать произвольно в ассоциированной системе $\mathbb{A}^*(A)$.

Предложение 4.4.2. *Внешняя 2-форма имеет четный ранг.*

Предложение 4.4.3. *Пусть $A \in \Lambda_2(\mathbb{V})$ – внешняя 2-форма. Для того, чтобы 2-форма A имела ранг $2s$, необходимо и достаточно, чтобы*

$$A^s \neq 0 \quad и \quad A^{s+1} = 0,$$

где в левой части соотношений стоят внешние степени формы A.

Приведенные выше определения и теоремы даны для внешней алгебры $\Lambda(\mathbb{V})$ над произвольным векторным пространством $\mathbb{V}$ и применимы в каждой точке многообразия $\mathbb{M}$ для внешней алгебры $\Lambda(\mathbb{M})$. При рассмотрении форм на многообразии эти понятия, в том числе ранг формы, могут меняться от точки к точке.

Введем несколько новых понятий, для которых уже важна зависимость компонент формы от точки многообразия.

Определение. *Характеристическим подпространством* r-формы $A \in \Lambda_r(\mathbb{M})$ в точке $x \in \mathbb{M}$ называется подпространство касательного пространства $\mathbb{C}_x(A) \subset \mathbb{T}_x(\mathbb{M})$, которое является пересечением ассоциированных подпространств для формы A и ее внешней производной dA,

$$\mathbb{C}_x(A) = \mathbb{A}(A) \cap \mathbb{A}(dA).$$

Характеристической системой формы $A \in \Lambda_r(\mathbb{M})$ в точке $x \in \mathbb{M}$ называется подпространство $\mathbb{C}^*_x(A) \subset \mathbb{T}^*_x(\mathbb{M})$, которое ортогонально характеристическому подпространству этой формы $\mathbb{C}_x(A)$. □

Из определения и формулы (**??**) вытекает, что характеристическая система $\mathbb{C}^*_x(A)$ строится по ассоциированным системам $\mathbb{A}^*(A)$ и $\mathbb{A}^*(dA)$ следующим образом

$$\begin{aligned}\mathbb{C}^*_x(A) &= \mathbb{A}^*(A) \oplus \big[\mathbb{A}^*(dA) \setminus \big(\mathbb{A}^*(A) \cap \mathbb{A}^*(dA)\big)\big] \\ &= \big[\mathbb{A}^*(A) \setminus \big(\mathbb{A}^*(A) \cap \mathbb{A}^*(dA)\big)\big] \oplus \mathbb{A}^*(dA).\end{aligned}$$

Определение. *Классом* r-формы $A \in \Lambda_r(\mathbb{M})$ в точке $x \in \mathbb{M}$ называется размерность характеристической системы $\mathsf{class}\,(A) = \mathsf{dim}\,\mathbb{C}^*_x(A)$. □

Из определения следует, что класс ненулевой r-формы A не меньше ее ранга и, следовательно, не меньше степени r

$$r \le \mathsf{rank}\,(A) \le \mathsf{class}\,(A).$$

В общем случае класс формы может зависеть от точки многообразия.

Пример 4.4.5. Рассмотрим 1-форму $A = dy(x^2 + y^2)$ на евклидовой плоскости $\mathbb{R}^2$. Ее внешний дифференциал равен $dA = dx \wedge dy\, x$. Существует три случая.

1) $x \neq 0$. В этом случае ассоциированное подпространство $\mathbb{A}(A)$ порождено вектором ∂_x, а ассоциированное подпространство внешнего дифференциала нульмерно, $\mathbb{A}(dA) = \{0\}$. Поэтому характеристическое подпространство состоит из одной точки $\mathbb{C}_x(A) = \{0\}$, а характеристическая система совпадает с кокасательным пространством, $\mathbb{C}_x(A) = \mathbb{T}^*_x(\mathbb{R}^2)$. Следовательно, класс формы A равен двум, $\mathsf{class}\,(A) = 2$.

2) $x = 0$, $y \neq 0$. Ассоциированное подпространство $\mathbb{A}(A)$ по-прежнему порождено вектором ∂_x. Внешний дифференциал формы A равен нулю, $dA = 0$, и ассоциированное подпространство внешнего дифференциала совпадает с касательным пространством, $\mathbb{A}(dA) = \mathbb{T}_x(\mathbb{R}^2)$. Следовательно, характеристическое подпространство $\mathbb{C}_x(A)$ порождено вектором ∂_x, а характеристическая система – дифференциалом dy. Поэтому класс формы A равен единице, $\mathsf{class}\,(A) = 1$.

3) $x = y = 0$. В этом случае и форма, и ее внешний дифференциал обращаются в нуль: $A = 0$, $dA = 0$. Поэтому ассоциированное подпространство совпадает с касательным пространством, $\mathbb{C}_x(A) = \mathbb{T}_x(\mathbb{R}^2)$, а ассоциированная система состоит из одной точки $\mathbb{C}^*_x = \{0\}$. Следовательно, класс формы A равен нулю, $\mathsf{class}\,(A) = 0$.

Таким образом, класс рассматриваемой формы зависит от точки плоскости и равен:

$\mathsf{class}\,(\mathrm{A})$=2, если $x \neq 0$;
$\mathsf{class}\,(\mathrm{A})$=1, если $x = 0$ и $y \neq 0$;
$\mathsf{class}\,(\mathrm{A})$=0, если $x = y = 0$. □

Продолжим общее рассмотрение. Нетрудно проверить, что если класс r-формы A равен ее степени r в некоторой точке $x \in \mathbb{M}$, то эта форма замкнута, $dA(x) = 0$. В обратную сторону справедливо другое утверждение. Если форма замкнута, $dA(x) = 0$, в точке x, то в этой точке ее класс равен рангу, а не степени. Отсюда, в частности, следует, что замкнутая форма второй степени имеет четный класс.

Теперь сформулируем основное утверждение настоящего раздела.

Теорема 4.4.2. *Пусть $A \in \Lambda_r(\mathbb{M})$ – дифференциальная r-форма на многообразии $\mathbb{M}$ постоянного класса, $\mathsf{class}\,(A) = q$, $r \leq q \leq n$. Тогда в окрестности любой точки $x \in \mathbb{M}$ существует такая система координат $y^1, \ldots, y^n$, что форма A представима в виде*

$$A = \sum_{1 \leq \alpha_1 < \ldots < \alpha_r \leq q} dy^{\alpha_1} \wedge \ldots \wedge dy^{\alpha_r} A_{\alpha_1 \ldots \alpha_r}(y^1 \ldots y^q). \tag{4.46}$$

Для форм непостоянного класса представления (4.46) не существует.

Доказательство. См., например, [**?**] □

Нетривиальность этой теоремы заключается в том, что форма записана в виде, содержащим только первые q координат. Эта теорема дает ответ на вопрос, поставленный в начале раздела. Другими словами, класс формы равен минимальному числу независимых функций, необходимых для явного выражения r-формы постоянного класса.

Следствие. Пусть $A \in \Lambda_r(\mathbb{M})$ – дифференциальная r-форма на многообразии $\mathbb{M}$ постоянного класса, который равен степени $\mathsf{class}\,(A) = r$. Тогда в окрестности любой точки $x \in \mathbb{M}$ существует такая система координат $y^1, \ldots, y^n$, что форма A имеет вид

$$A = dy^{\alpha_1} \wedge \ldots \wedge dy^{\alpha_r} \tag{4.47}$$

Доказательство. См., например, [?] □

Для замкнутых 1- и 2-форм постоянного класса теорему 4.4.2 можно уточнить.

Теорема 4.4.3 (Дарбу). *Пусть A – произвольная 1-форма без нулей на многообразии $\mathbb{M}$ постоянного класса $2s+1$ (или $2s$). Тогда для любой точки $x \in \mathbb{M}$ существуют $2s+1$ (или $2s$) функций $y^1, \dots, y^{2s+1}$ (или $y^1, \dots, y^{2s}$), заданных в некоторой окрестности $\mathbb{U} \subset \mathbb{M}$, содержащей точку x, такие, что*

$$\begin{aligned} & y^1(x) = \dots = y^{2s+1}(x) = 0, \\ \textit{или} \quad & y^1(x) = \dots = y^{2s}(x) = 0, \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} & A|_{\mathbb{U}} = dy^1 + y^2 dy^3 + \dots + y^{2s} dy^{2s+1}, \\ \textit{или} \quad & A|_{\mathbb{U}} = (1+y^1)dy^2 + y^3 dy^4 + \dots + y^{2s-1} dy^{2s}. \end{aligned}$$

Доказательство. См., например, [?]. □

Замечание. Если 1-форма имеет постоянный нечетный класс, то она не имеет нулей на многообразии. Напротив, если 1-форма имеет постоянный четный класс, то она может иметь нули. В этом случае невозможно привести общую локальную модель 1-формы. □

Теорема 4.4.4 (Дарбу). *Пусть ω – замкнутая дифференциальная 2-форма на многообразии $\mathbb{M}$ постоянного класса $\mathsf{class}\,\omega = 2s$. Тогда для любой точки $x \in \mathbb{M}$ существуют $2s$ дифференцируемых функций $y^1, \dots, y^{2s}$, заданных в некоторой окрестности $\mathbb{U} \subset \mathbb{M}$, содержащей точку x, такие, что*

$$\begin{aligned} & y^1(x) = \dots = y^{2s}(x) = 0, \\ & \omega|_{\mathbb{U}} = dy^1 \wedge dy^2 + \dots + dy^{2s-1} \wedge dy^{2s}. \end{aligned}$$

Доказательство. Из замкнутости 2-формы ω по лемме Пуанкаре следует, что она локально представима в виде $\omega = dA$, где 1-форма A в точке x имеет класс $2s$ или $2s+1$. Тогда утверждение теоремы следует из теоремы 4.4.3. □

Пример 4.4.6. Рассмотрим симплектическое многообразие $(\mathbb{M}, \omega)$, $\mathsf{dim}\,\mathbb{M} = 2n$. По определению, симплектическая форма ω на многообразии $\mathbb{M}$ невырождена, и, следовательно, ее ранг и класс постоянны и равны размерности многообразия

$$\mathsf{rank}\,\omega = \mathsf{class}\,\omega = \mathsf{dim}\,\mathbb{M} = 2n.$$

Симплектическая форма ω также замкнута. Поэтому из теоремы Дарбу следует, что для любой точки $x \in \mathbb{M}$ существуют $2n$ дифференцируемых функций $y^1, \dots, y^{2n}$, заданных в некоторой окрестности $\mathbb{U} \subset \mathbb{M}$, содержащей точку x, таких, что

$$\begin{aligned} & y^1(x) = \dots = y^{2n}(x) = 0, \\ & \omega|_{\mathbb{U}} = dy^1 \wedge dy^2 + \dots + dy^{2n-1} \wedge dy^{2n}. \end{aligned} \tag{4.48}$$

Другими словами, для любой симплектической формы в окрестности произвольной точки существует такая система координат, в которой она имеет канонический вид. Именно это следствие теоремы Дарбу, которое часто тоже называют теоремой Дарбу, обычно используют в гамильтоновой динамике. □

Определение. Система координат, в которой симплектическая форма имеет канонический вид (4.48), называется *координатами Дарбу.* □

Замечание. В римановой геометрии $(\mathbb{M}, g)$ с метрикой g общего вида всегда можно выбрать такие координаты, чтобы метрика совпала с евклидовой метрикой (единичной матрицей) в любой заданной точке многообразия. В общем случае этого можно добиться вдоль экстремали, но не в окрестности. ??? На симплектическом многообразии симплектическую форму можно привести к каноническому виду в окрестности произвольной точки, что является значительно более сильным утверждением. □

4.5 Оператор Лапласа–Бельтрами

Пространства форм $\Lambda_r(\mathbb{M})$ и $\Lambda_{n-r}(\mathbb{M})$ имеют одинаковую размерность $C_n^r = C_n^{n-r}$, и при наличии метрики $g_{\alpha\beta}$ между их элементами можно установить взаимно однозначное соответствие (изоморфизм $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{M})$-модулей), которое задается оператором

$$* : \quad \Lambda_r(\mathbb{M}) \;\leftrightarrow\; \Lambda_{n-r}(\mathbb{M}).$$

Рассмотрим дифференциальную r-форму $A = \frac{1}{r!} dx^{\alpha_1} \wedge \cdots \wedge dx^{\alpha_r} A_{\alpha_1 \ldots \alpha_r}$ в (псевдо-)римановом пространстве, т.е. при наличии метрики. Поставим ей в соответствие $(n-r)$-форму по следующему правилу

$$* A = \frac{1}{(n-r)!} dx^{\alpha_1} \wedge \cdots \wedge dx^{\alpha_{n-r}} (*A)_{\alpha_1 \ldots \alpha_{n-r}}, \tag{4.49}$$

где компоненты $(n-r)$-формы определены выражением

$$(*A)_{\alpha_{r+1} \ldots \alpha_n} = \frac{1}{r!} \varepsilon_{\alpha_1 \ldots \alpha_n} A^{\alpha_1 \ldots \alpha_r}, \qquad A^{\alpha_1 \ldots \alpha_r} = g^{\alpha_1 \beta_1} \ldots g^{\alpha_r \beta_r} A_{\beta_1 \ldots \beta_r}. \tag{4.50}$$

Действие оператора $*$ можно записать также в виде

$$* A = \frac{1}{(n-r)!} dx^{\alpha_{r+1}} \wedge \cdots \wedge dx^{\alpha_n} \frac{1}{r!} \varepsilon_{\alpha_1 \ldots \alpha_n} A^{\alpha_1 \ldots \alpha_r}. \tag{4.51}$$

Эти формулы определяют *оператор* $*$, который также называется *оператором Ходжа.* Форма $*A$ называется *дуальной* к форме A.

Замечание. Метрика риманова пространства входит в определение оператора $*$ дважды. Во-первых, с ее помощью определяется полностью антисимметричный тензор $\varepsilon_{\alpha_1 \ldots \alpha_n} = e\hat{\varepsilon}_{\alpha_1 \ldots \alpha_n}$. Во-вторых, метрика используется для подъема индексов в (4.50). □

Оператор Ходжа $*$ линеен:

$$*(fA + gB) = f(*A) + g(*B), \qquad \forall\ f, g \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{M}), \quad A, B \in \Lambda_r(\mathbb{M}).$$

Оператор $*$, действуя на r-форму, обладает следующим свойством

$$** A = (-1)^{r(n-r)} A\, \mathsf{sgn}\,, \tag{4.52}$$

где множитель sgn равен знаку определителя метрики (3.58). Вид этой формулы сохраняется при замене $r \to n-r$. Отсюда следует, что обратный оператор, действующий на $(n-r)$-форму в порядке $*^{-1}*$ или на r-форму в порядке $**^{-1}$, имеет одинаковый вид

$$*^{-1} = (-1)^{r(n-r)} * \mathsf{sgn}\,.$$

Замечание. Отметим, что при проведении расчетов необходимо учитывать, что множитель $(-1)^{r(n-r)}$ зависит от степени формы, на которую действует оператор $*^{-1}$. □

Замечание. Оператор $*$ можно определить в произвольной внешней алгебре, снабженной метрикой, поскольку он не содержит дифференцирования. □

Свертка двух r-форм A и B с обратной метрикой

$$(A,B) = g^{\alpha_1\beta_1}\dots g^{\alpha_r\beta_r}A_{\alpha_1\dots\alpha_r}B_{\beta_1\dots\beta_r},$$

дает скалярное поле. Прямые вычисления показывают, что справедлива формула

$$A\wedge *B = dx^1\wedge\dots\wedge dx^n e\frac{(A,B)}{r!}. \tag{4.53}$$

Введем *скалярное произведение*

$$\langle\cdot,\cdot\rangle:\quad \Lambda_r(\mathbb{M})\times\Lambda_r(\mathbb{M})\to\mathbb{R}$$

в пространстве r-форм $A,B\in\Lambda_r(\mathbb{M})$ с помощью интеграла

$$\langle A,B\rangle := \int_{\mathbb{M}} A\wedge *B = \int_{\mathbb{M}} B\wedge *A = \frac{1}{r!}\int_{\mathbb{M}} dx^1\dots dx^n e\,\mathsf{sgn}\,(A,B). \tag{4.54}$$

Мы предполагаем, что этот интеграл сходится. В противном случае скалярное произведение неопределено. Скалярное произведение симметрично, $\langle A,B\rangle = \langle B,A\rangle$. Если метрика риманова, т.е. положительно определена, то скалярное произведение $\langle A,B\rangle$ также положительно определено.

Можно доказать, что оператор $*$ ортогонален

$$\langle *A,*B\rangle = \mathsf{sgn}\,\langle A,B\rangle.$$

Введем дифференциальный оператор *кограницы* δ: $\Lambda_r(\mathbb{M})\to\Lambda_{r-1}(\mathbb{M})$

$$\delta := (-1)^{n(r+1)+1}\,\mathsf{sgn}\;*\,d\,*, \tag{4.55}$$

понижающий степень формы на единицу. Его можно записать также в виде

$$\delta = (-1)^r\,*^{-1}\,d*,$$

учитывая, что обратный оператор $*^{-1}$ действует на $(n-r+1)$-форму. В координатах действие оператора δ на r-форму A имеет вид

$$\begin{aligned}\delta A &= -\frac{1}{(r-1)!}dx^{\alpha_2}\wedge\dots\wedge dx^{\alpha_r}\frac{1}{e}(g_{\alpha_2\beta_2}\dots g_{\alpha_r\beta_r})\partial_{\alpha_1}(eA^{\alpha_1\beta_2\dots\beta_r})\\ &= -\frac{1}{(r-1)!}dx^{\alpha_2}\wedge\dots\wedge dx^{\alpha_r}\widetilde{\nabla}_{\alpha_1}A^{\alpha_1}{}_{\alpha_2\dots\alpha_r}.\end{aligned} \tag{4.56}$$

Отсюда следует, что оператор δ можно интерпретировать, как ковариантную дивергенцию антисимметричного тензора с верхними индексами. По-определению, действие оператора кограницы на функцию дает нуль $\delta f = 0$. Оператор δ сопряжен с оператором внешнего дифференцирования относительно скалярного произведения (4.54)

$$\langle dA,B\rangle = \langle A,\delta B\rangle, \tag{4.57}$$

где $A \in \Lambda_{r-1}(\mathbb{M})$ и $B \in \Lambda_r(\mathbb{M})$. Квадрат оператора δ равен нулю

$$\delta\delta = 0, \tag{4.58}$$

что является прямым следствием определения (4.55) и нильпотентности внешнего дифференцирования (4.32).

Оператор *Лапласа–Бельтрами* в римановом пространстве имеет вид

$$\triangle_F = -(d+\delta)^2 = -d\delta - \delta d. \tag{4.59}$$

Он действует в пространстве $\Lambda_r(\mathbb{M})$, $0 \le r \le n$, и является самосопряженным

$$\langle \triangle_F A, B\rangle = \langle A, \triangle_F B\rangle,$$

поскольку

$$\langle d\delta A, B\rangle = \langle \delta A, \delta B\rangle = \langle A, d\delta B\rangle.$$

Замечание. Оператор Лапласа–Бельтрами является дифференциальным оператором второго порядка эллиптического типа в римановом пространстве с положительно определенной метрикой. Если на многообразии задана метрика лоренцевой сигнатуры, то инвариантный оператор (4.59) также определен. В этом случае он будет гиперболического типа. □

Оператор Лапласа–Бельтрами удовлетворяет следующим перестановочным соотношениям

$$\triangle_F d = d\triangle_F, \qquad \triangle_F \delta = \delta \triangle_F, \qquad \triangle_F * = * \triangle_F, \tag{4.60}$$

что является следствием определения (4.59).

С помощью прямых вычислений можно получить формулы действия оператора Лапласа–Бельтрами на 0-форму f, 1-форму A и произвольную r-форму B в координатах

$$\begin{aligned}
&\triangle_F f = \tilde{\triangle} f,\\
&\triangle_F A = dx^\alpha(\tilde{\triangle} A_\alpha + \widetilde{R}_\alpha{}^\beta A_\beta),\\
&\triangle_F B = \frac{1}{r!} dx^{\alpha_1} \wedge \ldots \wedge dx^{\alpha_r} \left(\tilde{\triangle} A_{\alpha_1 \ldots \alpha_r} + r \widetilde{R}_{\alpha_1}{}^\beta A_{\beta\alpha_2\ldots\alpha_r} - \frac{r(r-1)}{2} \widetilde{R}_{\alpha_1\alpha_2}{}^{\beta\gamma} A_{\beta\gamma\alpha_3\ldots\alpha_r} \right),
\end{aligned} \tag{4.61}$$

где $\tilde{\triangle} = g^{\alpha\beta}\widetilde{\nabla}_\alpha \widetilde{\nabla}_\beta$ – оператор Лапласа–Бельтрами, построенный с помощью символов Кристоффеля.

Замечание. В аффинной геометрии мы имеем три инвариантных дифференциальных оператора второго порядка $\triangle_F$, $\tilde{\triangle}$ и $\triangle$, действующих из $\Lambda_r(\mathbb{M}) \to \Lambda_r(\mathbb{M})$. Первый оператор определен только на формах, тогда как два других определены для произвольных тензорных полей. В римановой геометрии при нулевом кручении и неметричности $\tilde{\triangle} = \triangle$. Отметим также, что действие операторов $\triangle_F$ и $\tilde{\triangle}$ на функции совпадает. Как правило, под оператором Лапласа–Бельтрами мы понимаем оператор $\tilde{\triangle}$, действующий на произвольные тензорные поля и зависящий только от метрики.

В геодезических (римановых) координатах (см. раздел 17.9) символы Кристоффеля и все симметризованные частные производные от них обращаются в нуль в некоторой точке p, поэтому в этой точке оператор Лапласа–Бельтрами принимает вид $\tilde{\triangle}|_{x=p} = g^{\alpha\beta}\partial_\alpha\partial_\beta$ □

Пример 4.5.1. Рассмотрим трехмерное евклидово пространство $\mathbb{R}^3$ с декартовыми координатами $x^\alpha = \{x, y, z\}$. Приведем явные формулы действия операторов, введенных ранее, на формы. В трехмерном пространстве могут быть заданы только 0-, 1-, 2- и 3-формы:

$$
\begin{aligned}
&f && \text{– 0-форма,}\\
&A = dx^\alpha A_\alpha = dxA_x + dyA_y + dzA_z && \text{– 1-форма,}\\
&B = \frac{1}{2}dx^{\alpha_1}\wedge dx^{\alpha_2}B_{\alpha_1\alpha_2} = dx\wedge dyB_{xy} + dy\wedge dzB_{yz} + dz\wedge dxB_{zx} && \text{– 2-форма,}\\
&C = \frac{1}{3!}dx^{\alpha_1}\wedge dx^{\alpha_2}\wedge dx^{\alpha_3}C_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3} = dx\wedge dy\wedge dzC_{xyz} && \text{– 3-форма.}
\end{aligned}
$$

Формы более высокого порядка тождественно равны нулю в силу трехмерности пространства. Пространства 0- и 3-форм являются одномерными, а пространства 1- и 2-форм – трехмерны.

Оператор внешнего дифференцирования (4.29) повышает на единицу степень формы и действует следующим образом:

$$
\begin{aligned}
df &= dx\partial_x f + dy\partial_y f + dz\partial_z f,\\
dA &= dx\wedge dy(\partial_x A_y - \partial_y A_x) + dy\wedge dz(\partial_y A_z - \partial_z A_y) + dz\wedge dx(\partial_z A_x - \partial_x A_z),\\
dB &= dx\wedge dy\wedge dz(\partial_x B_{yz} + \partial_y B_{zx} + \partial_z B_{xy}),\\
dC &= 0.
\end{aligned}
$$

Действие оператора внешнего дифференцирования на 0-формы совпадает с определением градиента функции, поэтому назовем *градиентом* произвольной r-формы ее внешнюю производную

$$\mathsf{grad} = d. \tag{4.62}$$

Нетрудно проверить, что оператор $*$, определенный соотношением (4.49), действует на формы по-правилам:

$$
\begin{aligned}
*f &= dx\wedge dy\wedge dzf,\\
*A &= dx\wedge dyA_z + dy\wedge dzA_x + dz\wedge dxA_y,\\
*B &= dxB_{yz} + dyB_{zx} + dzB_{xy},\\
*C &= C_{xyz}.
\end{aligned}
$$

Этот оператор устанавливает взаимно однозначное соответствие между пространствами $\Lambda^0(\mathbb{R}^3)$ и $\Lambda^3(\mathbb{R}^3)$, а также между $\Lambda^1(\mathbb{R}^3)$ и $\Lambda^2(\mathbb{R}^3)$. Заметим, что для любой формы в трехмерном евклидовом пространстве квадрат оператора $*$ является тождественным оператором

$$** = 1.$$

Оператор кограницы δ, определенный соотношением (4.55), понижает степень форм на единицу:

$$
\begin{aligned}
\delta f &= 0,\\
\delta A &= -(\partial_x A_x + \partial_y A_y + \partial_z A_z),\\
\delta B &= dx(\partial_y B_{xy} - \partial_z B_{zx}) + dy(\partial_z B_{yz} - \partial_x B_{xy}) + dz(\partial_x B_{zx} - \partial_y B_{yz}),\\
\delta C &= -(dx\wedge dy\partial_z C_{xyz} + dy\wedge dz\partial_x C_{xyz} + dz\wedge dx\partial_y C_{xyz}).
\end{aligned}
$$

Действие оператора δ на 1-формы с точностью до знака совпадает с дивергенцией 1-формы. Поэтому примем в качестве инвариантного определения *дивергенции* от произвольной r-формы соотношение

$$\mathsf{div} = -\delta. \tag{4.63}$$

Теперь нетрудно найти явное действие оператора Лапласа–Бельтрами в пространстве форм:

$$\begin{aligned}
&\triangle_F f = \triangle f,\\
&\triangle_F A = dx\triangle A_x + dy\triangle A_y + dz\triangle A_z,\\
&\triangle_F B = dx\wedge dy\triangle B_{xy} + dy\wedge dz\triangle B_{yz} + dz\wedge dx\triangle B_{zx},\\
&\triangle_F C = dx\wedge dy\wedge dz\triangle C_{xyz},
\end{aligned}$$

где

$$\triangle = \partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2$$

– обычный оператор Лапласа в трехмерном евклидовом пространстве.

В заключение рассмотрим еще один инвариантный оператор, действующий в пространстве форм произвольной степени,

$$\mathsf{rot} = *d: \quad \Lambda_r \to \Lambda_{n-r-1}. \tag{4.64}$$

В частном случае трехмерного евклидова пространства он отображает 1-формы в 1-формы

$$*dA = dx(\partial_y A_z - \partial_z A_y) + dy(\partial_z A_x - \partial_x A_z) + dz(\partial_x A_y - \partial_y A_x),$$

что совпадает с определением ротора от 1-формы. Поэтому примем выражение (4.64) в качестве инвариантного определения *ротора*. Тогда определение оператора Лапласа–Бельтрами (4.59) сводится к хорошо известному тождеству из векторного анализа

$$\triangle_F = \mathsf{grad}\,\mathsf{div} - \mathsf{rot}\,\mathsf{rot}\,. \quad \square \tag{4.65}$$

4.6 Интегрирование дифференциальных форм

Начнем с евклидова пространства $\mathbb{R}^n$. Для наших целей достаточно знакомство с определением интеграла по Риману, т.к. мы будем интегрировать непрерывные, преимущественно гладкие, функции по достаточно хорошим областям. Напомним правило замены переменных интегрирования. Пусть h – диффеоморфизм ограниченного открытого подмножества $\mathbb{U}\subset\mathbb{R}^n$ на ограниченное открытое подмножество $h(\mathbb{U})\subset\mathbb{R}^n$. В координатах диффеоморфизм h задается n гладкими функциями $(x^\alpha)\mapsto(y^\alpha(x))$, где (x^α) – координаты точки из $\mathbb{U}$. Пусть f – ограниченная непрерывная функция на $\mathbb{U}$. Тогда

$$\int\limits_{\mathbb{U}} dx^1\ldots dx^n f(x) = \int\limits_{h(\mathbb{U})} dy^1\ldots dy^n J^{-1} f(x(y)).$$

где $J = \mathsf{det}\,(\partial y^\beta/\partial x^\alpha)$ – якобиан преобразования координат.

Рассмотрим теперь произвольную n-форму на многообразии $\mathbb{M}$, $\dim \mathbb{M} = n$. На карте $(\mathbb{U}, \varphi)$ она имеет вид

$$A = dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n A_{1\ldots n} = \frac{1}{n!} dx^{\alpha_1} \wedge \ldots \wedge dx^{\alpha_n} A_{\alpha_1 \ldots \alpha_n},$$

где в последнем выражении производится суммирование по всем значениям индексов. Положим

$$\int_{\mathbb{U}} A = \int_{\mathbb{U}} dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n A_{1\ldots n} := \int_{\varphi(\mathbb{U})} dx^1 \ldots dx^n A_{1\ldots n}(x) := \int_{\varphi(\mathbb{U})} d^n x A_{1\ldots n}(x). \quad (4.66)$$

Правая часть этого равенства определена, т.к. $\varphi(\mathbb{U}) \subset \mathbb{R}^n$, а запись $A_{1\ldots n}(x)$ обозначает значение тензорной плотности $A_{1\ldots n} \circ \varphi^{-1}$ в точке $(x^\alpha) \in \varphi(\mathbb{U})$. Формула (4.66) корректна, т.к. при преобразовании координат $(x^\alpha) \mapsto (y^\alpha(x))$ (замене переменных интегрирования) единственная нетривиальная компонента n-формы $A_{1\ldots n}$ преобразуется, как тензорная плотность степени -1: $A_{1\ldots n}(x) \mapsto J^{-1} A_{1\ldots n}(y)$. Равенство (4.66) примем за определение интеграла от n-формы по области $\mathbb{U}$.

Замечание. Определение интеграла от n-формы по области $\mathbb{U} \subset \mathbb{M}$ не зависит от того задана на многообразии метрика или нет. □

Из равенства

$$dx^{\alpha_1} \wedge \ldots \wedge dx^{\alpha_n} = dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n \hat{\varepsilon}^{\alpha_1 \ldots \alpha_n}, \quad (4.67)$$

где $\hat{\varepsilon}^{\alpha_1 \ldots \alpha_n} = e\varepsilon^{\alpha_1 \ldots \alpha_n}$ – полностью антисимметричная тензорная плотность степени -1, следует, что интеграл (4.66) можно записать в виде

$$\int_{\mathbb{U}} A = \int_{\varphi(\mathbb{U})} d^n x \hat{\varepsilon}^{\alpha_1 \ldots \alpha_n} A_{\alpha_1 \ldots \alpha_n}.$$

Поскольку компоненты тензорной плотности $\hat{\varepsilon}^{\alpha_1 \ldots \alpha_n}$ во всех системах координат по модулю равны единице, то этот интеграл не зависит от метрики на $\mathbb{M}$.

Правило замены переменных интегрирования можно переписать иначе на языке возврата отображения. Пусть $h : \mathbb{U} \to h(\mathbb{U})$ диффеоморфизм двух областей многообразия $\mathbb{M}$, и пусть форма A задана на области $h(\mathbb{U})$. Тогда

$$\int_{h(\mathbb{U})} A = \int_{\mathbb{U}} h^* A,$$

где h^* – возврат отображения h.

Замечание. Запись интеграла $\int d^n x A_{1\ldots n}$ в виде $\int dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n A_{1\ldots n}$ удобнее, т.к. якобиан преобразования координат возникает автоматически при замене дифференциалов:

$$dy^1 \wedge \cdots \wedge dy^n = \left(\frac{\partial y^1}{\partial x^{\alpha_1}} dx^{\alpha_1}\right) \wedge \cdots \wedge \left(\frac{\partial y^n}{\partial x^{\alpha_n}} dx^{\alpha_n}\right) = J dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n. \quad \square \quad (4.68)$$

Теперь определим интеграл по произвольному ориентируемому многообразию с помощью разбиения единицы. Пусть на многообразии $\mathbb{M}$, $\dim \mathbb{M} = n$, заданы: ориентация, некоторый атлас $\{\mathbb{U}_i\}$, согласованный с ориентацией, и подчиненное ему разбиение единицы $\{f_i\}$. Рассмотрим произвольную непрерывную n-форму $A \in \Lambda_n(\mathbb{M})$ с компактным носителем. Тогда

$$A = \left(\sum_i f_i\right) A = \sum_i (f_i A).$$

Поскольку $\mathsf{supp}\,(f_i A) \subset \mathsf{supp}\, f_i$, то положим

$$\int_{\mathbb{M}} f_i A = \int_{\mathbb{U}_i} f_i A,$$

где интеграл в правой части был определен ранее (4.66). Этот интеграл определен корректно, т.к. не зависит от выбора системы координат на $\mathbb{U}_i$. Определим *интеграл по ориентируемому многообразию* от n-формы с компактным носителем следующей формулой

$$\int_{\mathbb{M}} A = \sum_i \int_{\mathbb{M}} f_i A. \tag{4.69}$$

Для любого заданного разбиения единицы правая часть равенства однозначно определена. Нетрудно проверить, что данное определение не зависит от разбиения единицы. Требование компактности носителя формы A является достаточным для существования интеграла.

Замечание. При изменении ориентации системы координат на области $\mathbb{U}_i$ интеграл по этой области изменит знак. Поскольку на неориентируемом многообразии не существует возможности однозначно задать ориентацию, то правая часть равенства (4.69) будет зависеть от выбора ориентации областей и, следовательно, определена неоднозначно. Поэтому требование ориентируемости $\mathbb{M}$ является существенным. □

Для любых двух n-форм A и B с компактным носителем очевидны равенства

$$\int_{\mathbb{M}} (A + B) = \int_{\mathbb{M}} A + \int_{\mathbb{M}} B,$$
$$\int_{\mathbb{M}} aA = a \int_{\mathbb{M}} A, \qquad a \in \mathbb{R}.$$

Поэтому интеграл является линейным функционалом на множестве n-форм с компактным носителем.

Если $\mathbb{U}$ – ориентируемое многообразие с краем $\partial\mathbb{U}$, то положим

$$\int_{\mathbb{U}} A := \int_{\mathbb{U}\setminus\partial\mathbb{U}} A.$$

Правая часть этого равенства хорошо определена, т.к. $\mathbb{U} \setminus \partial\mathbb{U}$ ориентируемое многообразие без края.

Если ориентируемое многообразие $\mathbb{M}$, $\mathsf{dim}\,\mathbb{M} = n$, можно представить в виде объединения

$$\mathbb{M} = (\cup_i \mathbb{U}_i) \bigcup (\cup_{\mathrm{A}} \mathbb{V}_{\mathrm{A}})$$

непересекающихся открытых подмногообразий $\mathbb{U}_i$ (и, следовательно, многообразий той же размерности $\mathsf{dim}\,\mathbb{U}_i = n$, $\forall i$) и произвольного набора подмногообразий меньшей размерности $\mathbb{V}_{\mathrm{A}}$, $\mathsf{dim}\,\mathbb{V}_{\mathrm{A}} < n$, $\forall \mathrm{A}$, тогда

$$\int_{\mathbb{M}} A = \sum_i \int_{\mathbb{U}_i} A.$$

Это свойство можно использовать для вычисления интегралов, используя "глобальные" координаты, заданные на всем многообразии, за исключением подмногообразий меньшей размерности, которые не дают вклада в интеграл.

Пример 4.6.1. В задачах со сферической симметрией в $\mathbb{R}^3$ интегралы удобнее вычислять в сферических координатах, которые покрывают все многообразие, за исключением оси z. В этом случае евклидово пространство $\mathbb{R}^3$ представляется в виде

$$\mathbb{R}^3 = \mathbb{U} \cup \mathbb{V},$$

где $\mathbb{V} = \mathbb{R}$ – ось z, и $\mathbb{U} = \mathbb{R}^3 \setminus \mathbb{V}$ – неодносвязное открытое подмногообразие, $\dim \mathbb{U} = 3$. □

4.6.1 Форма объема

Пусть на многообразии $\mathbb{M}$ задана метрика $dx^\alpha \otimes dx^\beta g_{\alpha\beta}$[1]. Рассмотрим карту $(\mathbb{U}, \varphi)$. В этой карте метрика имеет компоненты $g_{\alpha\beta}$, и ее определитель при преобразовании координат $x \mapsto y(x)$ (в областях пересечения двух карт с координатами x^α и y^α) преобразуется по правилу

$$\det g_{\alpha\beta}(y) = \det g_{\alpha\beta}(x) J^{-2},$$

где $J = \det(\partial y^\beta / \partial x^\alpha)$ – якобиан преобразования координат. Поэтому определитель метрики является тензорной плотностью степени -2. Обозначим

$$e = \sqrt{g}, \qquad g = |\det g_{\alpha\beta}|. \tag{4.70}$$

Тогда e является скалярной плотностью степени -1. Точнее, при преобразованиях координат e умножается на *модуль* якобиана

$$e(y) = e(x)|J|^{-1} \tag{4.71}$$

и, следовательно, является тензорной плотностью степени -1 только при преобразованиях координат с положительным якобианом, что соответствует сохранению ориентации. Поэтому

$$\upsilon = dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n e = \frac{1}{n!} dx^{\alpha_1} \wedge \cdots \wedge dx^{\alpha_n} \varepsilon_{\alpha_1 \ldots \alpha_n}, \tag{4.72}$$

задает n-форму на $\mathbb{M}$, если атлас согласован с ориентацией. Таким образом, если метрика задана на всем ориентируемом многообразии и выбран атлас, согласованный с ориентацией, то форма (4.72) определена во всех картах согласованно, т.к. выражение (4.72) инвариантно относительно замены координат. Поэтому форма υ в этом случае определена на всем многообразии $\mathbb{M}$ и отлична от нуля, поскольку, по определению метрики, $\det g_{\alpha\beta} \neq 0$. Эта n-форма называется *формой объема* υ, задаваемой метрикой $g_{\alpha\beta}$.

Замечание. Если многообразие неориентируемо, то существуют карты с отрицательным якобианом преобразования координат. Обозначим координаты на этих картах x и y. Тогда в областях пересечения этих карт $\upsilon(y) = -\upsilon(x)$, т.к. справедливы равенства (4.68) и (4.71). Поэтому форму объема на неориентируемых многообразиях задать невозможно. □

Замечание. Для обозначения формы объема мы используем греческую букву эпсилон υ, которая по написанию очень похожа на латинскую букву v. □

[1] Согласно теореме 5.1.1 на любом гладком многообразии можно задать риманову (положительно определенную) метрику.

Замечание. Определение формы объема не зависит от сигнатуры метрики из-за наличия знака модуля в (4.70). □

Форма объема определена глобально на ориентируемых многообразиях и всюду отлична от нуля, поэтому она задает ориентацию многообразия и выбор знака в форме (4.72) соответствует выбору ориентации. При замене координат с отрицательным якобианом ориентация формы объема меняется на противоположную, а интеграл меняет знак.

Метрика евклидова пространства $\mathbb{R}^n$ в декартовых координатах равна единичной матрице (2.7). Поэтому форма объема евклидова пространства $\mathbb{R}^n$ в декартовых координатах имеет вид

$$\upsilon_0 = dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n. \tag{4.73}$$

Назовем эту форму *канонической ориентацией.*

Замечание. Покажем, что форма объема υ на многообразии $\mathbb{M}$ соответствует нашему обычному представлению об объеме. Для этого зафиксируем произвольную точку x риманова многообразия $\mathbb{M}$ с положительно определенной метрикой и диагонализируем в ней метрику, что всегда возможно в произвольной фиксированной точке. Тогда все базисные векторы в точке x будут ортогональны, а длина базисного вектора ∂_α будет равна $\sqrt{g_{\alpha\alpha}}$. В этом случае объем бесконечно малого параллелепипеда со сторонами ∂_α равен $\prod_\alpha \sqrt{g_{\alpha\alpha}} = \sqrt{g}$. □

Интеграл (4.66) от произвольной n-формы по многообразию можно переписать, используя форму объема,

$$\int_{\mathbb{U}} A = \frac{1}{n!}\int_{\mathbb{U}} dx^{\alpha_1}\wedge\cdots\wedge dx^{\alpha_n} A_{\alpha_1\ldots\alpha_n} = \frac{1}{n!}\int_{\mathbb{U}} d^n x\, e\varepsilon^{\alpha_1\ldots\alpha_n} A_{\alpha_1\ldots\alpha_n}\,\mathsf{sgn}\,, \tag{4.74}$$

где множитель sgn равен знаку определителя метрики (3.58).

Приведем два свойства формы объема. Нетрудно проверить, что форма объема дуальна к единице

$$\upsilon = \frac{1}{n!} dx^{\alpha_1}\wedge\cdots\wedge dx^{\alpha_n}\varepsilon_{\alpha_1\ldots\alpha_n} = *1.$$

Кроме того она является гармонической формой $\triangle_F \upsilon = 0$, т.к. форма объема точна $d\upsilon = 0$, как форма максимальной размерности, и коточна $\delta\upsilon = 0$, поскольку $(n+1)$-форм на $\mathbb{R}^n$ не существует и $\widetilde{\nabla}_\alpha e = 0$.

Если на многообразии задан репер, $g_{\alpha\beta} = e_\alpha{}^a e_\beta{}^b \eta_{ab}$, где η_{ab} – евклидова или лоренцева метрика, то $e = \mathsf{det}\, e_\alpha{}^a$ (это оправдывает выбор обозначения (4.70)). Тогда репер $e_\alpha{}^a$ однозначно определяет форму объема υ. В обратную сторону утверждение неверно, т.к. форма объема определяет только определитель репера. Даже если метрика и форма объема на ориентируемом многообразии $\mathbb{M}$ существуют, то репер может не существовать. Локально репер всегда существует, однако глобально это не так.

Пример 4.6.2. В теореме о невозможности причесать ежа 11.2.1 доказано, что на четномерной сфере не существует гладких векторных, нигде не обращающихся в нуль. Поскольку репер представляет собой набор из n линейно независимых в каждой точке векторных полей на многообразии $\mathbb{M}$, $\mathsf{dim}\,\mathbb{M} = n$, то на четномерной сфере не существует глобально определенного репера. В то же время метрика определена глобально. □

Наличие формы объема на (псевдо-)римановом ориентируемом многообразии позволяет определить инвариантным образом интеграл от произвольной функции $f(x) \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{M})$:

$$\int_{\mathbb{M}} \upsilon f = \int_{\mathbb{M}} dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n e f(x) = \int_{\mathbb{M}} d^n x\, e f(x).$$

Используя определение скалярного произведения (4.54), этот интеграл можно переписать в виде

$$\int_{\mathbb{M}} \upsilon f = \langle f, 1 \rangle.$$

Замечание. Именно это свойство чаще всего используется для построения моделей математической физики. А именно, мы фиксируем некоторый набор полей $\{\varphi^a(x)\}$, $a = 1, 2, \ldots$, на многообразии $\mathbb{M}$, среди которых содержится метрика пространства-времени, как в общей теории относительности. Затем строится лагранжева плотность $L(\varphi, \partial\varphi, \partial^2\varphi, \ldots)$, которая является скалярным полем (функцией), зависящим от данного набора полей и их частных производных. Определяем инвариантное действие на многообразии

$$S := \int_{\mathbb{M}} \upsilon L.$$

Уравнения Эйлера–Лагранжа для данного действия принимаются в качестве уравнений движения (уравнений равновесия и т.д.) для рассматриваемой модели. По построению, действие инвариантно относительно общих преобразований координат и, возможно, других преобразований симметрии. Соответствующие уравнения Эйлера–Лагранжа ковариантны, т.е. преобразуются, как тензорные поля, и из первой теоремы Нетер следуют законы сохранения. В релятивистских моделях теории поля, не описывающих гравитационные взаимодействия, предполагается, что многообразие $\mathbb{M}$ является пространством-временем Минковского $\mathbb{R}^{1,3}$ с заданной лоренцевой метрикой, по которой варьирование не проводится. Соответствующие модели инвариантны относительно преобразований из группы Пуанкаре и, возможно, других групп, а инвариантность относительно общих преобразований координат в них отсутствует. □

Приведем без доказательства два свойства формы объема υ на ориентированном римановом многообразии $\mathbb{M}$, $\dim \mathbb{M} = n$. Пусть $X_1, \ldots, X_n$ и $Y_1, \ldots, Y_n$ – два набора векторных полей на $\mathbb{M}$. Тогда

$$\upsilon(X_1, \ldots, X_n) \cdot \upsilon(Y_1, \ldots, Y_n) = \det\{(X_i, Y_j)\}, \qquad i, j = 1, \ldots, n,$$
$$\upsilon(X_1, \ldots, X_n) \cdot \upsilon = \tilde{X}_1 \wedge \ldots \wedge \tilde{X}_n,$$

где $(X_i, Y_j) = X_i^\alpha Y_j^\beta g_{\alpha\beta}$ и $\tilde{X}_i = dx^\alpha X_{i\alpha}$ обозначает 1-форму, сопряженную в смысле римановой метрики к векторному полю $X_i = X_i^\alpha \partial_\alpha$: $X_{i\alpha} = X_i^\beta g_{\beta\alpha}$.

Интеграл (4.74) определен для произвольной n-формы. Интеграл от формы объема (4.72) по всему многообразию, если он существует, дает инвариантное определение *объема* ориентируемого многообразия $\mathbb{M}$

$$V_{\mathbb{U}} = \int_{\mathbb{M}} \upsilon = \int_{\mathbb{M}} d^n x\, e. \tag{4.75}$$

Заметим, что объем многообразия определяется метрикой, входящей в определение формы объема, и всегда положителен, т.к. ориентация многообразия фиксирована.

4.6.2 Формула Стокса

Пусть $\mathbb{N}$, $\dim \mathbb{N} = n$ – ориентируемое многообразие, на котором задана произвольная r-форма $A \in \Lambda_r(\mathbb{N})$. Рассмотрим r-мерное ориентируемое подмногообразие $(f, \mathbb{M})$ в $\mathbb{N}$. Поскольку r-форма задана также на подмногообразии $\mathbb{M} \subset \mathbb{N}$, то ее можно по нему проинтегрировать. Пусть подмногообразие $\mathbb{M} \subset \mathbb{N}$ задано параметрически[2]

$$x^\alpha = x^\alpha(u^i), \qquad \alpha = 1, \dots, n, \quad i = 1, \dots, r \le n.$$

Тогда интеграл от произвольной r-формы A степени r по этому подмногообразию равен

$$\begin{aligned} \int_{f(\mathbb{M})} A &= \frac{1}{r!} \int_{f(\mathbb{M})} dx^{\alpha_1} \wedge \ldots \wedge dx^{\alpha_r} A_{\alpha_1 \ldots \alpha_r} = \\ &= \frac{1}{r!} \int_{\mathbb{M}} du^{i_1} \wedge \ldots \wedge du^{i_r} \frac{dx^{\alpha_1}}{du^{i_1}} \ldots \frac{dx^{\alpha_r}}{du^{i_r}} A_{\alpha_1 \ldots \alpha_r}. \end{aligned} \tag{4.76}$$

Этот интеграл имеет явно ковариантный вид и не зависит ни от выбора системы координат x^α, ни от параметризации подмногообразия u^i.

Пример 4.6.3. Рассмотрим интеграл от 1-формы $A = dx^\alpha A_\alpha$ вдоль кривой $x^\alpha(t)$, $t \in [a, b]$, соединяющей точки x_1 и x_2 в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$. Тогда интеграл (4.76) принимает стандартный вид

$$\int_{x_1}^{x_2} dx^\alpha A_\alpha = \int_a^b dt \frac{dx^\alpha}{dt} A_\alpha.$$

Этот интеграл инвариантен относительно перепараметризации кривой и общего преобразования координат на многообразии. □

Пример 4.6.4. Интеграл от 2-формы $A = dx^\alpha \wedge dx^\beta A_{\alpha\beta}$ по поверхности в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$, заданной параметрически $x^\alpha = x^\alpha(u, v)$, $(u, v) \in \mathbb{U}$, равен

$$\frac{1}{2} \int_{f(\mathbb{U})} dx^\alpha \wedge dx^\beta A_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{U}} du \wedge dv \left(\frac{dx^\alpha}{du} \frac{dx^\beta}{dv} - \frac{dx^\alpha}{dv} \frac{dx^\beta}{du} \right) A_{\alpha\beta}. \tag{4.77}$$

В трехмерном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3$ с декартовыми координатами x^α этот интеграл можно преобразовать к виду, хорошо знакомому из курса математического анализа. Касательные векторы к поверхности имеют вид

$$\xi = \frac{dx^\alpha}{du} \boldsymbol{e}_\alpha, \qquad \eta = \frac{dx^\alpha}{dv} \boldsymbol{e}_\alpha,$$

где $\boldsymbol{e}_\alpha$ – ортонормированные базисные векторы декартовой системы координат. Их векторное произведение $[\xi, \eta]^\alpha = \varepsilon^{\alpha\beta\gamma} \xi_\beta \eta_\gamma$ нормально к поверхности. Длина нормального вектора равна $\sqrt{n^\alpha n_\alpha} = \sqrt{\xi^2 \eta^2 - (\xi\eta)^2}$, что совпадает с $e = \sqrt{g}$, где $g = \det g_{ij}$ – определитель индуцированной метрики на поверхности

$$g_{ij} = \frac{dx^\alpha}{du^i} \frac{dx^\beta}{du^j} \delta_{\alpha\beta}, \qquad u^i = \{u, v\}.$$

[2]Чтобы не усложнять ситуацию склейкой карт, которую можно провести, будем считать, что каждое многообразие покрывается одной картой.

Так как в трехмерном евклидовом пространстве 2-форма взаимно однозначно определяется векторным полем $A_{\alpha\beta} = \varepsilon_{\alpha\beta\gamma}X^\gamma$, то интеграл (4.77) можно переписать в виде

$$\frac{1}{2}\int_{f(\mathbb{U})} dx^\alpha \wedge dx^\beta A_{\alpha\beta} = \int_{\mathbb{U}} du \wedge dv\, e(X^\alpha n_\alpha), \tag{4.78}$$

где

$$n^\alpha = \frac{[\xi,\eta]^\alpha}{e}$$

– единичный вектор нормали к поверхности. Таким образом интеграл от 2-формы по поверхности в трехмерном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3$ сводится к суммарному потоку дуального векторного поля через эту поверхность. □

Сформулируем общую теорему, связывающую интеграл от $(n-1)$-формы A по границе некоторой области $\partial\mathbb{U}$ с интегралом от n-формы dA по самой области $\mathbb{U}$.

Теорема 4.6.1 (Формула Стокса). *Пусть $\mathbb{U} \subset \mathbb{M}$ и $\partial\mathbb{U} = \overline{\mathbb{U}} \setminus \mathbb{U}$ – открытое компактное подмногообразие в $\mathbb{M}$ и его граница. Тогда справедлива формула Стокса*

$$\int_{\partial\mathbb{U}} A = \int_{\mathbb{U}} dA. \tag{4.79}$$

где $A \in \Lambda_{n-1}(\mathbb{M})$ – произвольная гладкая дифференциальная $(n-1)$-форма на $\mathbb{M}$. При этом предполагается, что ориентация границы задана каноническим образом.

Доказательство. Доказательство формулы Стокса довольно громоздко и приведено, например, в [?]. Каноническая ориентация края определена в доказательстве теоремы 3.3.2. □

Формулу Стокса можно переписать в другом виде. Пусть на многообразии задано векторное поле $X = X^\alpha\partial_\alpha$. Тогда ему можно взаимно однозначно поставить в соответствие $(n-1)$-форму

$$A = *X = \frac{1}{(n-1)!}dx^{\alpha_2} \wedge \cdots \wedge dx^{\alpha_n}\varepsilon_{\beta\alpha_2\ldots\alpha_n}X^\beta.$$

Внешний дифференциал этой формы равен

$$\begin{aligned} dA &= \frac{1}{(n-1)!}dx^{\alpha_1} \wedge \cdots \wedge dx^{\alpha_n}\partial_{\alpha_1}(\varepsilon_{\beta\alpha_2\ldots\alpha_n}X^\beta) \\ &= dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n e\widetilde{\nabla}_\alpha X^\alpha. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что формулу Стокса можно записать в виде

$$\int\limits_{\partial\mathbb{U}} X^\alpha ds_\alpha = \int\limits_{\mathbb{U}} dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n e\widetilde{\nabla}_\alpha X^\alpha, \tag{4.80}$$

где

$$ds_\alpha = \frac{1}{(n-1)!}dx^{\alpha_2} \wedge \cdots \wedge dx^{\alpha_n}\varepsilon_{\alpha\alpha_2\ldots\alpha_n} \tag{4.81}$$

– ориентированный *элемент площади* гиперповерхности.

Рассмотрим частные случаи формулы Стокса.

Пример 4.6.5. Пусть многообразие $\mathbb{M}$ одномерно $n = 1$, а форма $A = f(x)$ имеет нулевую степень. Тогда граница области $\mathbb{U} = (a, b)$ состоит из двух точек $\partial\mathbb{U} = \{a, b\}$, и формула Стокса принимает вид

$$\int_{\partial\mathbb{U}} f = f(b) - f(a) = \int_a^b df = \int_a^b dx\partial_x f.$$

Здесь под интегралом от функции (0-формы) по подмногообразию нулевой размерности, состоящему из отдельных точек, понимается алгебраическая сумма значений функции в этих точках. Таким образом мы получили хорошо известную *формулу Ньютона–Лейбница.* □

Пример 4.6.6. Пусть задана 1-форма $dx^\alpha A_\alpha$ на евклидовой плоскости с декартовыми координатами $\{x^\alpha\} = \{x, y\}$. Рассмотрим область $\mathbb{U}$, ограниченную замкнутой кривой $x^\alpha(t)$. Тогда

$$\int_{\partial\mathbb{U}} dt \frac{dx^\alpha}{dt} A_\alpha = \int_{\partial\mathbb{U}} (dx A_x + dy A_y) = \int_{\mathbb{U}} dx \wedge dy \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right). \tag{4.82}$$

Таким образом мы получили *формулу Грина.* □

Пример 4.6.7. Пусть задана 1-форма $A = dx^\alpha A_\alpha$ в трехмерном евклидовом пространстве с декартовыми координатами x^α. Рассмотрим поверхность $\mathbb{U} \subset \mathbb{R}^3$, с кусочно гладкой границей $\partial\mathbb{U}$. Тогда общая формула Стокса (4.6.1) принимает вид

$$\oint_{\partial\mathbb{U}} dx^\alpha A_\alpha = \int_{\mathbb{U}} [dx^1 \wedge dx^2 (\partial_1 A_2 - \partial_2 A_1) + dx^1 \wedge dx^3 (\partial_1 A_3 - \partial_3 A_1) + dx^2 \wedge dx^3 (\partial_2 A_3 - \partial_3 A_2)].$$

Если поверхность задана параметрически $x^\alpha = x^\alpha(u, v)$, то последний интеграл можно преобразовать к виду

$$\oint_{\partial\mathbb{U}} dx^\alpha A_\alpha = \int_{\mathbb{U}} du \wedge dv e(\,\mathsf{rot}\, A, n), \tag{4.83}$$

где введен ротор (4.64) 1-формы: $[\,\mathsf{rot}\, A]^\alpha = \varepsilon^{\alpha\beta\gamma}\partial_\beta A_\gamma$. Таким образом получена *формула Стокса.* □

Пример 4.6.8. Пусть в трехмерном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3$ с декартовыми координатами x^α задана 2-форма $A = \frac{1}{2} dx^\alpha \wedge dx^\beta A_{\alpha\beta}$. Рассмотрим двумерную компактную поверхность $\mathbb{U} \subset \mathbb{R}^3$ с кусочно дифференцируемой границей $\partial\mathbb{U}$. Будем считать, что поверхность задана параметрически $x^\alpha = x^\alpha(u, v)$. Тогда общая формула Стокса (4.79) принимает вид

$$\frac{1}{2} \int_{\partial\mathbb{U}} dx^\alpha \wedge dx^\beta A_{\alpha\beta} = \int_{\mathbb{U}} dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 (\partial_1 A_{23} + \partial_2 A_{31} + \partial_3 A_{12}). \tag{4.84}$$

Как уже отмечалось 2-форма в трехмерном пространстве взаимно однозначно определяется векторным полем $A_{\alpha\beta} = \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} X^\gamma$. Интеграл в левой части равенства сводится к интегралу по поверхности от скалярного произведения вектора X^α на единичную нормаль n^α к поверхности (4.78). Подынтегральное выражение в правой части (4.84) представляет собой дивергенцию от векторного поля

$$\partial_1 A_{23} + \partial_2 A_{31} + \partial_3 A_{12} = \partial_\alpha X^\alpha.$$

Таким образом окончательно получаем

$$\int_{\partial\mathbb{U}} du \wedge dv\, eX^\alpha n_\alpha = \int_{\mathbb{U}} dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3\, \partial_\alpha X^\alpha, \tag{4.85}$$

где e – квадратный корень из индуцированной метрики (см. пример 4.6.4). Это есть *формула Гаусса–Остроградского* в трехмерном евклидовом пространстве. □

Глава 5

Метрика

Одним из важнейших понятий в геометрии и физике является дифференциально геометрическая метрика или просто метрика. Трудно переоценить ту роль, которую метрика играет в физических приложениях. С ее помощью строятся инварианты, определяется форма объема. Симметрии метрики являются симметриями пространства-времени, которые определяют сохраняющиеся токи. В частности, фундаментальные законы сохранения энергии-импульса и момента количества движения связаны с наличием у метрики определенных симметрий (см. раздел 19.2).

5.1 Определение

Рассмотрим многообразие $\mathbb{M}$, $\dim \mathbb{M} = n$.

Определение. *Метрикой* $g \in \mathcal{T}_2(\mathbb{M})$ на многообразии $\mathbb{M}$ называется дифференцируемое ковариантное тензорное поле типа $(0,2)$, которое является симметричным и невырожденным в каждой точке многообразия:

$$\begin{aligned} &1) \quad g_{\alpha\beta} = g_{\beta\alpha} && \text{– симметричность,} \\ &2) \quad \det g_{\alpha\beta} \neq 0 && \text{– невырожденность,} \end{aligned}$$

где $g = dx^\alpha \otimes dx^\beta g_{\alpha\beta}$ – выражение для метрики в координатном базисе. Метрика называется *римановой*, если матрица $g_{\alpha\beta}(x)$ положительно определена во всех точках $x \in \mathbb{M}$. В противном случае метрика называется *псевдоримановой*. □

Замечание. Метрика в данном определении не совпадает с тем же термином, определенном в разделе 2.3.1. Слово метрика широко используется в научной литературе в обоих значениях. Как правило, смысл термина ясен из контекста. Там, где мы хотим подчеркнуть различие терминов, мы будем говорить дифференциально геометрическая метрика для метрики, которая определена в настоящем разделе, и топологическая метрика, определенная в разделе 2.3.1. Далее в подавляющем большинстве случаев термин метрика будет употребляться в дифференциально геометрическом смысле. □

Метрика определяет билинейное невырожденное и симметричное отображение

$$g: \quad \mathcal{X}(\mathbb{M}) \times \mathcal{X}(\mathbb{M}) \ \to \ \mathcal{C}^\infty(\mathbb{M}),$$

которое называется *скалярным произведением* векторных полей. В компонентах скалярное произведение векторных полей $X = X^\alpha\partial_\alpha$ и $Y = Y^\alpha\partial_\alpha$ задается сверткой индексов:

$$(X,Y) := X^\alpha Y^\beta g_{\alpha\beta}, \tag{5.1}$$

для которого мы также будем иногда употреблять обозначение $(X,Y) = g(X,Y)$, чтобы отметить метрику, с помощью которой проводится свертка. Скалярное произведение, очевидно, симметрично $(X,Y) = (Y,X)$. Невырожденность метрики формулируется так: не существует отличного от нуля векторного поля $X \in \mathcal{X}(\mathbb{M})$ такого, что скалярное произведение $(X,Y) = 0$ для всех $Y \in \mathcal{X}(\mathbb{M})$ и во всех точках $x \in \mathbb{M}$. Для римановой метрики скалярное произведение является положительно определенным в каждой точке, т.е. $(X,X) \geq 0$, причем равенство $(X,X) = 0$ имеет место только для тривиального векторного поля $X = 0$. Скалярное произведение базисных векторных полей ∂_α равно компонентам метрики:

$$(\partial_\alpha, \partial_\beta) = g_{\alpha\beta}. \tag{5.2}$$

Поскольку метрика невырождена, то существует *обратная метрика*, т.е. симметричное невырожденное контравариантное тензорное поле $g^{\alpha\beta}\partial_\alpha \otimes \partial_\beta \in \mathcal{T}^2(\mathbb{M})$ типа $(2,0)$, компоненты которого в каждой точке многообразия удовлетворяет условию

$$g^{\alpha\beta}g_{\beta\gamma} = g_{\gamma\beta}g^{\beta\alpha} = \delta^\alpha_\gamma. \tag{5.3}$$

При преобразовании координат $x^\alpha \to x^{\alpha'}(x)$ компоненты метрики и ее обратной преобразуются по обычным правилам для тензорных полей:

$$g_{\alpha'\beta'} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x^{\alpha'}}\frac{\partial x^\beta}{\partial x^{\beta'}}g_{\alpha\beta}, \tag{5.4}$$

$$g^{\alpha'\beta'} = g^{\alpha\beta}\frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^\alpha}\frac{\partial x^{\beta'}}{\partial x^\beta}. \tag{5.5}$$

Отсюда следует, что определитель метрики

$$g(x) = \det g_{\alpha\beta}(x) \tag{5.6}$$

преобразуется по правилу $g' = J^{-2}g$, где J – якобиан преобразования координат (2.21). То есть определитель метрики является скалярной плотностью степени -2. В общем случае, ввиду симметрии по индексам, метрика $g_{\alpha\beta}$ задается

$$[g_{\alpha\beta}] = \frac{n(n+1)}{2}$$

произвольными компонентами с единственным условием невырожденности. Здесь и в дальнейшем число компонент тензора мы будем обозначать квадратными скобками.

С помощью метрики и ее обратной можно изменить тип тензора путем опускания или подъема всех или части индексов произвольного тензорного поля.

Пример 5.1.1. Произвольному векторному полю $X \in \mathcal{X}(\mathbb{M})$ можно взаимно однозначно поставить в соответствие 1-форму и наоборот. В компонентах отображение задается следующими формулами:

$$X_\alpha = X^\beta g_{\beta\alpha}, \qquad X^\alpha = g^{\alpha\beta}X_\beta. \tag{5.7}$$

Это отображение $\mathcal{X}(\mathbb{M}) \Leftrightarrow \Lambda_1(\mathbb{M})$, очевидно, линейно, не зависит от выбора системы координат и, значит, является изоморфизмом $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{M})$-модулей. Операция подъема и опускания индексов естественным продолжается на тензоры произвольного типа. □

Замечание. Если на многообразии задана метрика, то между контравариантными и ковариантными тензорными полями одного ранга r существует взаимно однозначное соответствие, точнее, изоморфизм $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{M})$-модулей:

$$\mathcal{T}^r(\mathbb{M}) \simeq \mathcal{T}_r(\mathbb{M}) \simeq \mathcal{T}^p_q(\mathbb{M}), \qquad \forall p, q: \ p+q=r.$$

По этой причине будем считать, что тензоры одного ранга, но с различным типом индексов, описывают один и тот же геометрический объект и будем обозначать их, как правило, одной буквой. Например,

$$T_{\alpha\beta} = T_\alpha{}^\gamma g_{\gamma\beta} = T^\gamma{}_\beta g_{\gamma\alpha} = T^{\gamma\delta} g_{\gamma\alpha} g_{\delta\beta},$$

где $T_{\alpha\beta}$ и $T^{\alpha\beta}$ – ковариантные и контравариантные компоненты тензора второго ранга. Компоненты $T_\alpha{}^\beta$ и $T^\alpha{}_\beta$ называются смешанными. Поскольку при наличии метрики появилась возможность опускать и поднимать индексы, то необходимо следить за порядком ковариантных и контравариантных индексов, $T_\alpha{}^\beta \neq T^\beta{}_\alpha$. □

Скалярное произведение вектора в каждой точке $x \in \mathbb{M}$ с самим собой называется *квадратом* вектора и обозначается

$$X^2 := (X, X). \tag{5.8}$$

Длиной вектора X назовем выражение

$$|X| := \sqrt{|X^2|}. \tag{5.9}$$

Знак модуля в этом определении необходим в том случае, если метрика не является положительно определенной.

Рассмотрим риманово многообразие $\mathbb{M}$ с положительно определенной метрикой. Тогда между ненулевыми векторами можно определить *угол* φ:

$$\cos\varphi := \frac{(X,Y)}{\sqrt{X^2 Y^2}}. \tag{5.10}$$

Для положительно определенной метрики правая часть соотношения (5.10) не превышает единицу, поскольку справедливо неравенство треугольника

$$(X,Y) \leq \sqrt{X^2 Y^2}.$$

Поэтому определение угла (5.10) корректно. Определение угла инвариантно относительно выбора координат, поскольку правая часть (5.10) содержит только инвариантные комбинации векторных полей.

Если $(X,Y) = 0$, то два вектора называются *ортогональными* или *перпендикулярными*, независимо от положительной определенности метрики.

Замечание. Угол между векторами определяется только метрикой и не изменится, если метрику умножить на произвольную функцию, отличную от нуля (преобразование Вейля, раздел **??**). Две метрики $g' = dx^\alpha \otimes dx^\beta g'_{\alpha\beta}$ и $g = dx^\alpha \otimes dx^\beta g_{\alpha\beta}$ называются *конформно эквивалентными*, если они связаны между собой соотношением

$$g' = \mathrm{e}^{2\phi} g, \tag{5.11}$$

где $\phi(x)$ – некоторая функция. Это определение не зависит от выбора системы координат и поэтому задает вейлевскую (конформную) эквивалентность глобально.

Термин конформная эквивалентность метрик широко используется, однако он не имеет отношения к конформным преобразованиям в комплексном анализе. Конформные преобразования комплексных переменных – это подпсевдогруппа общих преобразований координат, в то время как при преобразовании (5.11) координаты не меняются. Поэтому мы будем употреблять термин вейлевская инвариантность, так как в двумерных моделях математической физики термин конформная инвариантность употребляется в своем первоначальном значении, как в комплексном анализе. □

Поскольку метрика невырождена, то у нее существует обратная метрика (5.3), которая естественным образом определяет скалярное произведение в пространстве 1-форм. Скалярное произведение двух 1-форм $A = dx^\alpha A_\alpha$ и $B = dx^\beta B_\beta$ по определению равно

$$(A, B) = g(A, B) := g^{\alpha\beta} A_\alpha B_\beta. \tag{5.12}$$

Это скалярное произведение согласовано с операцией подъема и опускания индексов (5.7):

$$g^{\alpha\beta} A_\alpha B_\beta = g_{\alpha\beta} A^\alpha B^\beta, \quad \text{где} \quad A^\alpha = g^{\alpha\beta} A_\beta, \quad B^\alpha = g^{\alpha\beta} B_\beta.$$

Скалярные произведения векторов (5.1) и 1-форм (5.12) естественным образом продолжаются на тензорные поля произвольного типа (r, s).

Метрика на многообразии определяет инвариантную квадратичную форму дифференциалов, которая называется *интервалом*

$$ds^2 = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta. \tag{5.13}$$

Интервал задает расстояние между двумя бесконечно близкими точками с координатами x^α и $x^\alpha + dx^\alpha$. Это расстояние зависит от точки многообразия, но не от выбора системы координат. В случае псевдоримановой метрики выражение (5.13) не задает метрику (расстояние) в топологическом смысле, определенную в разделе 2.3.1, т.к. квадратичная форма (5.13) не является положительно определенной. С помощью положительно определенной римановой метрики расстояние между двумя точками $a, b \in \mathbb{M}$ можно определить как точную нижнюю грань интеграла

$$l(a, b) = \inf \int_a^b ds, \qquad ds = \sqrt{ds^2} = dt \sqrt{g_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{dt} \frac{dx^\beta}{dt}}, \tag{5.14}$$

где интегрирование ведется по всем кусочно гладким кривым $x^\alpha(t)$, соединяющим точки a и b. Доказательство свойств расстояния при этом существенно опирается на положительную определенность римановой метрики. Топология, определяемая топологической метрикой (5.14), совпадает с топологией многообразия $\mathbb{M}$

Теорема 5.1.1. *На любом n-мерном гладком многообразии $\mathbb{M}$ существует риманова метрика.*

Доказательство. Выберем локально конечный атлас $\{\mathbb{U}_i\}$ на $\mathbb{M}$. Такой атлас всегда существует в силу теоремы 3.2.2. Обозначим координаты на каждой карте через x_i^α, $\alpha = 1, \ldots, n$. Пусть $\{f_i\}$ – разбиение единицы, подчиненное данному атласу, такое, что $\operatorname{supp} f_i \subset \mathbb{U}_i$. Выберем евклидову метрику на каждой карте и склеим карты с помощью разбиения единицы

$$ds_i^2 = \delta_{\alpha\beta} dx_i^\alpha dx_i^\beta, \tag{5.15}$$

$$ds^2 = \sum_i f_i ds_i^2, \tag{5.16}$$

где выражение $f_i ds_i^2$ определено

$$(f_i ds_i^2)(x) = \begin{cases} f_i(x) ds_i^2, & x \in \mathbb{U}_i, \\ 0, & x \notin \mathbb{U}_i. \end{cases}$$

Уравнения (5.15), (5.16) определяют гладкое симметричное ковариантное тензорное поле второго ранга на $\mathbb{M}$. Поскольку правая часть (5.16) содержит конечное число слагаемых в каждой точке $x \in \mathbb{M}$, то сумма корректно определена. Выберем координатную окрестность $\mathbb{U}$ с координатами x^α такую, что замыкание области $\overline{\mathbb{U}}$ является компактным. Тогда область $\mathbb{U}$ пересекается с конечным числом карт $\mathbb{U}_{i_1}, \ldots, \mathbb{U}_{i_r}$, т.к. атлас является локально конечным покрытием. Поэтому ограничение (5.16) на $\mathbb{U}$ можно записать в виде

$$ds^2 = \sum_{\lambda=1}^{r} f_{i_\lambda} ds_{i_\lambda}^2 = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta,$$

где

$$g_{\alpha\beta} = \sum_{\lambda=1}^{r} f_{i_\lambda} \delta_{\gamma\delta} \frac{\partial x_{i_\lambda}^\gamma}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x_{i_\lambda}^\delta}{\partial x^\beta}.$$

Поскольку $0 \le f_i \le 1$ и $\sum_i f_i = 1$, то существует такой индекс j, что $f_j(x) > 0$. Поэтому

$$ds^2(x) \ge f_j ds_j^2.$$

Таким образом метрика ds^2 является положительно определенной на $\mathbb{M}$. □

Замечание. Доказательство этой теоремы свелось к переносу евклидовой метрики δ_{ij} из евклидова пространства $\mathbb{R}^n$ на многообразие $\mathbb{M}$ с помощью возврата отображения, которое фигурирует в определении многообразия, как гомеоморфизм. При этом положительная определенность евклидовой метрики существенна. Доказательство не проходит, если таким же образом попытаться перенести лоренцеву метрику из $\mathbb{R}^{1,n-1}$ на $\mathbb{M}$. □

5.2 Метрика на лоренцевых многообразиях

За счет выбора системы координат метрику всегда можно привести к диагональному виду в любой наперед заданной точке $x \in \mathbb{M}$. Действительно, при замене координат компоненты метрики преобразуются по-правилу (5.4). При этом матрица Якоби преобразования координат $\partial x^\alpha / \partial x^{\alpha'}$ в фиксированной точке многообразия может быть выбрана произвольным образом.

Пример 5.2.1. Однородное линейное преобразование координат $x^\alpha = x^{\alpha'} M_{\alpha'}{}^\alpha$ с постоянной матрицей $M_{\alpha'}{}^\alpha = \mathsf{const}$ дает

$$g_{\alpha'\beta'} = M_{\alpha'}{}^\alpha M_{\beta'}{}^\beta g_{\alpha\beta}.$$ □

Замечание. В общем случае метрику можно привести к диагональному виду в фиксированной точке, но не в окрестности. Это связано с тем, что n функций преобразований координат, которыми можно воспользоваться, недостаточно для фиксирования $n(n-1)/2$ функций, параметризующих недиагональные элементы метрики. Исключение составляют многообразия двух и трех измерений. В двумерном случае метрика

имеет только одну недиагональную компоненту и ее можно привести к диагональному виду в окрестности произвольной точки. Более того, ее можно преобразовать к конформно плоскому виду. На трехмерном многообразии метрика имеет три недиагональные компоненты, что равно числу произвольных функций, параметризующих преобразования координат. Можно показать, что ее также можно привести к диагональному виду не только в заданной точке, но и в некоторой окрестности этой точки. □

Определение. *Сигнатурой метрики* называется пара натуральных чисел (p, q), $p+q = n$, где p и q – количество, соответственно, положительных и отрицательных чисел, стоящих на диагонали метрики после ее диагонализации в какой либо точке многообразия $x \in \mathbb{M}$. □

Предложение 5.2.1. *Сигнатура метрики не зависит от способа диагонализации и точки линейно связного многообразия, в которой метрика диагонализируется.*

Доказательство. Нулей быть не может, что следует из невырожденности метрики.

Привести метрику к диагональному виду в точке можно многими способами. При этом сигнатура не зависит от выбора системы координат в которой метрика диагональна. Действительно, если в точке $p \in \mathbb{M}$ метрика диагональна в двух системах координат и при этом имеет различную сигнатуру, то эти системы координат не могут быть связаны невырожденным преобразованием. В различных системах координат диагональные компоненты метрики могут иметь различные значения (ненулевые), может меняться последовательность положительных и отрицательных компонент, однако число положительных и отрицательных компонент остается неизменным.

Из непрерывности и невырожденности метрики следует, что ее сигнатура не зависит от точки линейно связного многообразия, т.к. в противном случае вдоль кривой, соединяющей точки с различной сигнатурой, определитель метрики обратился бы в нуль, что недопустимо. □

Замечание. В зависимости от сигнатуры метрики скалярное произведение векторов может быть положительно определено или нет. Риманова метрика на многообразии размерности n имеет сигнатуру $(n, 0)$. Отрицательно определенная метрика имеет сигнатуру $(0, n)$. В римановой геометрии $(\mathbb{M}, g)$ положительно и отрицательно определенные метрики, по существу, можно не различать, т.к. все геометрические характеристики многообразий связаны простым преобразованием – изменением знака метрики. Поэтому многообразия с отрицательно определенной метрикой мы также будем называть римановыми. В то же время многие модели математической физики неинвариантны относительно изменения знака метрики

$$g_{\alpha\beta} \to -g_{\alpha\beta}, \tag{5.17}$$

поскольку действие, которым описывается модель, помимо метрики содержит также другие поля. Поэтому решения уравнений Эйлера–Лагранжа с положительно и отрицательно определенной метрикой, вообще говоря, неэквивалентны. □

Сигнатура метрики инвариантна, не зависит от выбора системы координат и точки линейно связного многообразия. Будем считать, что после диагонализации номера координат выбраны таким образом, что сначала идут все положительные, а затем – отрицательные собственные значения. Будем писать

$$\mathsf{sign}\, g_{\alpha\beta} = (\underbrace{+\cdots+}_{p}\underbrace{-\cdots-}_{q}). \tag{5.18}$$

Определение. Пара $(\mathbb{M}, g)$ называется *римановым многообразием*, если метрика является знакоопределенной $p = n$ или $q = n$, и *псевдоримановым многообразием*, если метрика не является знакоопределенной, $p \neq 0$ и $q \neq 0$. Если положительный элемент на диагонали один,

$$\mathsf{sign}\, g_{\alpha\beta} = (+ - \cdots -),$$

то говорят, что метрика имеет *лоренцеву сигнатуру*. Если на многообразии задана лоренцева метрика, то будем говорить, что многообразие *лоренцево*. □

Замечание. Подчеркнем, что задание метрики на многообразии может быть произвольным. В частности, на одном многообразии можно задать несколько метрик одновременно, причем разной сигнатуры, если такие существуют. □

В настоящей монографии псевдоримановы многообразия размерности $n \geq 4$ с $p \geq 2$ и $q \geq 2$ не рассматриваются, так как они недостаточно хорошо изучены и не имеют широкого применения в математической физике.

Для лоренцевой метрики скалярное произведение двух векторов может быть положительно, отрицательно или равно нулю, а из условия $X^2 = 0$ не следует, что $X = 0$.

Определение. Назовем *пространством-временем* псевдориманово многообразие $\mathbb{M}$ с заданной метрикой $g = dx^\alpha \otimes dx^\beta g_{\alpha\beta}$ лоренцевой сигнатуры (лоренцево многообразие). В пространстве-времени векторное поле X в точке $x \in \mathbb{M}$ называется:

$$\begin{array}{lll} \textit{времениподобным,} & \text{если} & (X,X) > 0, \\ \textit{светоподобным (изотропным, нулевым),} & \text{если} & (X,X) = 0, \\ \textit{пространственноподобным,} & \text{если} & (X,X) < 0. \end{array} \qquad (5.19)$$

Это определение распространятся на область $\mathbb{U} \subset \mathbb{M}$, если во всех точках $x \in \mathbb{U}$ выполнены соответствующие соотношения. □

Замечание. Определение (5.19) инвариантно относительно замены координат. В общем случае гладкое векторное поле может иметь различный тип в различных областях связного многообразия. □

Так же, как и в римановом пространстве, два вектора в пространстве-времени называются *ортогональными (перпендикулярными)*, если их скалярное произведение равно нулю. В частности, любой изотропный вектор перпендикулярен самому себе.

Определим тип координатного векторного поля ∂_0. Из (5.2) следует, что $(\partial_0, \partial_0) = g_{00}$. Если в данной системе координат $g_{00} > 0$, то векторное поле ∂_0 времениподобно. В этом случае назовем координату $x^0 = t$ *времениподобной* или *временем*. Другими словами, временем называется любой параметр вдоль интегральной кривой произвольного времениподобного векторного поля. Противоположно направленное векторное поле $-\partial_0$ также времениподобно и связано с ∂_0 преобразованием координат $(x^0, x^1, \ldots, x^{n-1}) \to (-x^0, x^1, \ldots, x^{n-1})$, которое назовем *обращением времени*. Выберем (произвольно) ориентацию координаты x^0 и будем говорить, что векторное поле ∂_0 направлено в будущее, а $-\partial_0$ – в прошлое. Тогда на времениподобных векторных полях можно ввести ориентацию. Произвольное времениподобное поле X направлено в будущее, если $(X, \partial_0) = X^0 > 0$. В противном случае, когда $X^0 < 0$, будем говорить, что времениподобное векторное поле направлено в прошлое.

Замечание. В общем случае метрика, индуцированная на сечениях $t = \mathsf{const}$, может быть отрицательно определена или быть знаконеопределенной. То есть сечения пространства-времени, соответствующие постоянному времени, совсем не обязательно пространственноподобны (= все касательные векторы пространственноподобны). Это зависит от выбора остальных координат. В конце настоящего раздела мы рассмотрим простой пример. □

Можно доказать, что каждая точка многообразия $\mathbb{M}$ лоренцевой сигнатуры $(1, n-1)$ имеет такую координатную окрестность с координатами $(t, u^1, \dots, u^{n-1})$, что в этих координатах метрика имеет вид:

$$ds^2 = dt^2 + g_{\mu\nu}(t, u)du^\mu du^\nu, \qquad \mu, \nu = 1 \dots n-1. \tag{5.20}$$

При этом метрика $g_{\mu\nu}$, индуцированная на сечениях $t = \mathsf{const}$, является отрицательно определенной. Другими словами, все сечения $t = \mathsf{const}$ для метрики вида (5.20) являются пространственноподобными подмногообразиями, т.е. все касательные векторы к сечениями пространственноподобны. Эти сечения являются вложенными римановыми многообразиями с локальной системой координат $\{u^\mu\}$ и отрицательно определенной метрикой $g_{\mu\nu}$. Отметим также, что все векторы, касательные к этому подмногообразию ортогональны времениподобному векторному полю ∂_0.

Замечание. Здесь и в дальнейшем мы будем использовать следующие обозначения координат на лоренцевом многообразии. Греческие буквы из начала алфавита $\alpha, \beta, \dots$ будут использоваться для нумерации всех координат, а буквы из середины алфавита $\mu, \nu, \dots$ – для нумерации остальных координат, $\{x^\alpha\} = \{x^0, x^\mu\}$. Это правило легко запомнить по следующим включениям:

$$\{1, \dots, n-1\} \subset \{0, 1, \dots, n-1\}, \qquad \{\mu, \nu, \dots\} \subset \{\alpha, \beta, \dots\}.$$

Как правило, мы будем считать, что координата x^0 является временем, и все остальные координатные линии x^μ – пространственноподобны. Поэтому координаты x^μ будем называть пространственноподобными. □

В общем случае метрика на лоренцевом многообразии

$$g_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} g_{00} & g_{0\nu} \\ g_{\mu 0} & g_{\mu\nu} \end{pmatrix} \tag{5.21}$$

не имеет блочно диагонального вида (5.20). Приведем критерий того, что метрика (5.21), заданная на некотором многообразии $\mathbb{M}$, имеет лоренцеву сигнатуру.

Теорема 5.2.1. *Пусть в некоторой окрестности $\mathbb{U} \subset \mathbb{M}$ задана метрика (5.21) такая, что $g_{00} > 0$. Эта метрика имеет лоренцеву сигнатуру тогда и только тогда, когда матрица*

$$g_{\mu\nu} - \frac{g_{0\mu}g_{0\nu}}{g_{00}} \tag{5.22}$$

отрицательно определена в каждой точке $\mathbb{U}$.

Доказательство. Достаточно рассмотреть произвольную точку из $\mathbb{U}$. Пусть на $\mathbb{U}$ задана метрика (5.21) для которой $g_{00} > 0$. Интервал в окрестности $\mathbb{U} \subset \mathbb{M}$ имеет вид

$$ds^2 = g_{00}dx^0dx^0 + 2g_{0\mu}dx^0dx^\mu + g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu, \qquad g_{00} > 0.$$

Зафиксируем произвольную точку $x \in \mathbb{U}$. Введем вместо x^0 новую координату $\tilde{x}^0$, для которой в точке $x \in \mathbb{U}$ выполнено соотношение

$$dx^0 = d\tilde{x}^0 - \frac{dx^\mu g_{0\mu}}{g_{00}}.$$

В фиксированной точке этого всегда можно добиться линейным преобразованием координат. Тогда интервал примет вид

$$ds^2 = g_{00} d\tilde{x}^0 d\tilde{x}^0 + \left(g_{\mu\nu} - \frac{g_{0\mu} g_{0\nu}}{g_{00}} \right) dx^\mu dx^\nu. \tag{5.23}$$

Если метрика (5.21) имеет лоренцеву сигнатуру, то существует такая система координат, что в точке $x \in \mathbb{M}$ метрика диагональна, причем $g_{00} > 0$, а все остальные диагональные компоненты $g_{\mu\mu}$ отрицательны. Поскольку метрика (5.23) связана с диагональной метрикой также невырожденным преобразованием координат, то матрица (5.22) отрицательно определена.

Обратно. Если матрица (5.22) отрицательно определена, то дальнейшим линейным преобразованием координат x^μ ее всегда можно преобразовать к диагональному виду в фиксированной точке, причем на диагонали будут стоять отрицательные числа. Следовательно, метрика имеет лоренцеву сигнатуру. □

Матрица (5.22) на лоренцевом многообразии симметрична и невырождена, т.к. отрицательно определена. Она имеет следующий геометрический смысл. Вдоль координатных линий времени $t = x^0$ всегда можно определить единичное векторное поле $n = \frac{1}{\sqrt{g_{00}}} \partial_0$, $(n, n) = 1$. Рассмотрим произвольное векторное поле $X = X^0 \partial_0 + X^\mu \partial_\mu$. У него есть составляющая, перпендикулярная времениподобному векторному полю n,

$$X_\perp = X - (X, n) n = X^\mu \partial_\mu - X^\mu g_{0\mu} \partial_0.$$

Если задано два произвольных векторных поля X и Y, то скалярное произведение их перпендикулярных составляющих равно

$$(X_\perp, Y_\perp) = \left(g_{\mu\nu} - \frac{g_{0\mu} g_{0\nu}}{g_{00}} \right) X^\mu Y^\nu.$$

Таким образом, матрица (5.22) играет роль метрики для перпендикулярных составляющих векторных полей. Из теоремы 5.2.1 следует, что, если $\mathbb{M}$ – лоренцево многообразие и x^0 – время, то составляющие векторных полей, перпендикулярные n, всегда пространственноподобны.

Замечание. Не следует думать, что матрицу (5.22) можно рассматривать, как метрику на некотором $(n-1)$-мерном подмногообразии, касательные векторы к которому всюду перпендикулярны времениподобному векторному полю n. Дело в том, что такие подмногообразия могут не существовать. Можно проверить, что коммутатор двух перпендикулярных векторных полей $[X_\perp, Y_\perp]$ в общем случае не будет ортогонален n. Для этого достаточно, не ограничивая общности, положить $g_{00} = 1$ и проверить, что коммутатор $[X_\perp, Y_\perp]$ имеет нетривиальную составляющую вдоль n. Тем самым множество всех векторных полей $X_\perp$ не находится в инволюции, и, согласно теореме Фробениуса, подмногообразия, касательные векторы к которому всюду перпендикулярны n, не существует. □

Приведем без доказательства еще один критерий того, что метрика на многообразии является лоренцевой.

Теорема 5.2.2. *Для того, чтобы метрика (5.21) с $g_{00} > 0$ в точке $x \in \mathbb{M}$ имела лоренцеву сигнатуру необходимо и достаточно, чтобы выполнялись неравенства:*

$$\det \begin{pmatrix} g_{00} & g_{01} \\ g_{10} & g_{11} \end{pmatrix} < 0, \quad \det \begin{pmatrix} g_{00} & g_{01} & g_{02} \\ g_{10} & g_{11} & g_{12} \\ g_{20} & g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} > 0, \quad \ldots, \quad \det (g_{\alpha\beta}) \begin{cases} > 0, & n - \textit{нечетно}, \\ < 0, & n - \textit{четно}. \end{cases} \tag{5.24}$$

Пример 5.2.2. Рассмотрим плоскость Минковского $\mathbb{R}^{1,1}$ с декартовой системой координат $\{x^0, x^1\}$ и метрикой

$$\eta_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Введем новую систему координат $\{\tilde{x}^0, \tilde{x}^1\} = \{x^0 - \sqrt{2}x^1, x^1\}$. Тогда координатные базисные векторы $\{\partial_0, \partial_1\}$ преобразуются по-правилу $\{\tilde{\partial}_0, \tilde{\partial}_1\} = \{\partial_0, \sqrt{2}\partial_0 + \partial_1\}$ (см. рис. 5.1).

В новой системе координат сечения $\tilde{x}^0 = \mathsf{const}$ являются времениподобными прямыми, а метрика имеет вид

Рис. 5.1: Пример времениподобного сечения $\tilde{x}^0 = \mathsf{const}$. fmiplg

$$g_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}.$$

Матрица, соответствующая (5.22), состоит из одного элемента $g_{11} - g_{01}^2/g_{00} = -1$.

Обратная метрика имеет вид

$$g^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} -1 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -1 \end{pmatrix}.$$

Отметим, что в этих координатах обе компоненты обратной метрики на диагонали g^{00} и g^{11} отрицательны. □

Замечание. Рассмотренный пример показывает, что "пространственные" компоненты метрики $g_{\mu\nu}$ в общем случае не образуют отрицательно определенной матрицы. Роль пространственной части метрики играет выражение (5.22), и она должна быть отрицательно определена на лоренцевом многообразии. Кроме того, из примера следует, что, даже если координата x^0 на лоренцевом многообразии является временем, тем не менее временна́я компонента обратной метрики g^{00} может быть отрицательна. □

В дальнейшем мы всегда предполагаем, что координаты на лоренцевом многообразии выбраны таким образом, что координата x^0 является временем, и все сечения $x^0 = \mathsf{const}$ пространственноподобны. Такой выбор координат удобен, например, при постановке задачи Коши в различных моделях математической физики. На языке компонент

метрики эти условия означают, что $g_{00} > 0$, и матрица $g_{\mu\nu}$ отрицательно определена. В этом случае нетрудно доказать, что временна́я компонента обратной метрики также положительна $g^{00} > 0$. В обратную сторону утверждение неверно: условий положительности $g_{00} > 0$ и $g^{00} > 0$ недостаточно для отрицательной определенности матрицы $g_{\mu\nu}$.

5.3 Векторные поля и вложения

В разделе 3.6.6 было установлено, что отличная от нуля 1-форма $A = dx^\alpha A_\alpha$ определяет в касательном расслоении $\mathbb{T}(\mathbb{M})$ поле $(n-1)$-подпространств, натянутое на векторы dx^α, удовлетворяющие уравнению $dx^\alpha A_\alpha = 0$, т.е. распределение. Наличие метрики позволяет каждой 1-форме поставить в соответствие векторное поле $X^\alpha = g^{\alpha\beta}A_\beta$. По-построению, это векторное поле перпендикулярно любому вектору из $(n-1)$-мерного подпространства, т.к. $X^\alpha dx^\beta g_{\alpha\beta} = 0$. Таким образом, при наличии метрики, задание ненулевого векторного поля эквивалентно заданию поля $(n-1)$-мерного распределения на многообразии. В общем случае это распределение не является инволютивным, и поэтому у него не существует интегральных подмногообразий. То есть векторное поле не определяет ортогональные интегральные подмногообразия. Обратное утверждение верно. Каждое $(n-1)$-мерное подмногообразие (гиперповерхность) определяет нормальное векторное поле, заданное на подмногообразии.

Между двумя пересекающимися гиперповерхностями в точках их пересечения можно определить угол их пересечения, как угол между соответствующими нормальными векторами.

Если на многообразии задана метрика и векторное поле, то можно определить проекционные операторы на заданное векторное поле и перпендикулярные направления следующим образом. Пусть X^α – произвольное векторное поле, такое, что $X^2 \neq 0$. Тогда операторы

$$\Pi^{\text{L}\,\beta}_\alpha = \frac{X_\alpha X^\beta}{X^2}, \qquad \Pi^{\text{T}\,\beta}_\alpha = \delta^\beta_\alpha - \frac{X_\alpha X^\beta}{X^2}, \tag{5.25}$$

являются *проекционными операторами* на направление векторного поля и перпендикулярные направления, соответственно. При этом выполнены равенства, определяющие набор проекционных операторов,

$$(\Pi^{\text{L}})^2 = \Pi^{\text{L}}, \quad (\Pi^{\text{T}})^2 = \Pi^{\text{T}}, \quad \Pi^{\text{L}}\Pi^{\text{T}} = 0, \quad \Pi^{\text{L}} + \Pi^{\text{T}} = 1.$$

Поскольку нетривиальные ковекторы

$$V_\alpha - X_\alpha \frac{(V,X)}{X^2} \quad \text{и} \quad X_\alpha$$

являются собственными векторами проекционных операторов Π^{L} и Π^{T} с нулевыми собственными значениями, то проекционные операторы вырождены:

$$\mathsf{det}\,\Pi^{\text{L}} = \mathsf{det}\,\Pi^{\text{T}} = 0.$$

Рассмотрим, как меняется метрика при отображениях. Пусть многообразие $\mathbb{M}$ вложено[1] в $\mathbb{N}$, $\mathsf{dim}\,\mathbb{M} \leq \mathsf{dim}\,\mathbb{N}$, и на пространстве мишени $\mathbb{N}$ задана метрика g. Тогда

[1] На самом деле достаточно погружения.

возврат отображения $f:\ \mathbb{M}\to\mathbb{N}$ задает метрику на $\mathbb{M}$. Бескоординатное определение индуцированной метрики f^*g имеет вид

$$(f^*g)(X,Y)=g(f_*X,f_*Y),\qquad \forall X,Y\in\mathcal{X}(\mathbb{M}),$$

где f_* – дифференциал отображения, отображающий векторные поля X,Y на $\mathbb{M}$ в векторные поля f_*X,f_*Y на $\mathbb{N}$. Скалярные произведения на $\mathbb{M}$ и $\mathbb{N}$ заданы соответственно метриками f^*g и g. Это значит, что при вложении длины векторов и углы между ними сохраняются. Обозначив координаты на $\mathbb{M}$ и $\mathbb{N}$ через x^α и y^μ, получим явное выражение для компонент индуцированной метрики f^*g:

$$(f^*g)_{\alpha\beta}(x)=\frac{\partial y^\mu}{\partial x^\alpha}\frac{\partial y^\nu}{\partial x^\beta}g_{\mu\nu}(y). \tag{5.26}$$

Пусть на многообразии $\mathbb{M}$ заранее задана некоторая метрика h. Если при вложении $\mathbb{M}$ в многообразие $\mathbb{N}$ с метрикой g исходная метрика совпадает с индуцированной $h=f^*g$, то такое вложение называется *изометрическим*. Представляет большой интерес задача о нахождении изометрических вложений заданного многообразия с определенной на нем метрикой в евклидово пространство.

Пример 5.3.1. Пусть двумерная сфера $\mathbb{S}^2_r$ радиуса r вложена в трехмерное евклидово пространство $\mathbb{R}^3$. Вложение можно записать в виде

$$\begin{aligned}x&=r\sin\theta\cos\varphi,\\ y&=r\sin\theta\sin\varphi,\\ z&=r\cos\varphi,\end{aligned}$$

где $0\le\theta\le\pi$ и $0\le\varphi<2\pi$ – координаты на сфере. Тогда метрика, индуцированная на сфере, примет вид

$$ds^2=dx^2+dy^2+dz^2=r^2d\theta^2+r^2\sin^2\theta d\varphi^2. \tag{5.27}$$

То есть в выражение для евклидова интервала вместо дифференциалов dx, dy и dz необходимо просто подставить их выражения через дифференциалы полярного и азимутального углов. □

Пример 5.3.2. Пусть двумерный тор $\mathbb{T}^2$ радиуса r с направляющей окружностью радиуса $R>r$ вложен в трехмерное евклидово пространство $\mathbb{R}^3$ (см. рис. 5.2):

$$\begin{aligned}x&=(R+r\cos\theta)\cos\varphi,\\ y&=(R+r\cos\theta)\sin\varphi,\\ z&=r\sin\theta,\end{aligned}$$

где $0\le\theta<2\pi$ и $0\le\varphi<2\pi$ – координаты на торе. Тогда индуцированная метрика имеет вид

$$ds^2=dx^2+dy^2+dz^2=r^2d\theta^2+(R+r\cos\theta)^2d\varphi^2.\quad\square \tag{5.28}$$

Рис. 5.2: Двумерный тор, вложенный в трехмерное евклидово пространство. ftorin

5.4 Выбор системы координат

Если на многообразии задана метрика, которую преобразованием координат нельзя привести к евклидовой или лоренцевой форме, тогда понятие декартовой системы координат отсутствует, и это создает определенные трудности для наглядного представления о многообразии. С практической точки зрения удобнее сначала совершить преобразование координат, после которого метрика примет какой-либо относительно простой вид, связанный, например, с симметрией задачи, и уже потом дать физическую интерпретацию пространству-времени.

Рассмотрим частный случай возможного вида метрики. Говорят, что риманова метрика является *конформно евклидовой* в некоторой области $\mathbb{U}$, если существует такая система координат на $\mathbb{U}$, в которой метрика и ее обратная имеют вид

$$g_{\alpha\beta} = \mathsf{e}^{2\phi}\delta_{\alpha\beta}, \qquad g^{\alpha\beta} = \mathsf{e}^{-2\phi}\delta^{\alpha\beta}. \tag{5.29}$$

Здесь $\phi(x)$ – некоторая гладкая функция от x^α. Функция $\mathsf{e}^{2\phi}$ называется *конформным множителем*. В таком виде метрика и ее обратная невырождены при $\phi \neq \pm\infty$. Если у каждой точки $x \in \mathbb{M}$ существует окрестность, на которой метрика является конформно евклидовой, то метрика называется *локально конформно евклидовой*.

Замечание. Подчеркнем, что $\phi(x)$ не является скалярным полем, хотя и не имеет ни одного индекса, т.к. в другой системе координат конформно евклидова метрика может не иметь вида (5.29), и, значит, функция ϕ не определена вовсе. □

Если метрика записана в конформно евклидовом виде, то в этой системе координат угол (5.10) между двумя произвольными векторами тот же, что и в евклидовом пространстве. Это обстоятельство позволяет более наглядно представить себе свойства многообразия.

Конформно евклидова метрика является частным случаем метрики. Это видно уже из того, что в общем случае она зависит от $n+1$ независимой функции (здесь n функций соответствует выбору системы координат и одна функция – конформному множителю), в то время как метрика общего вида зависит от $n(n+1)/2$ функций. Исключение представляет только случай двух измерений.

Теорема 5.4.1. *Если риманова метрика принадлежит классу $\mathcal{C}^3(\mathbb{M})$ на двумерном многообразии $\mathbb{M}$ (поверхности), то для любой точки $x \in \mathbb{M}$ существует окрестность $\mathbb{U}_x$, в которой можно выбрать конформно евклидовы координаты.*

Доказательство. См., например, [**?**]. □

Замечание. Конформно евклидовы координаты x^1, x^2 в теореме 5.4.1 определены на окрестности $\mathbb{U}_x$ с точностью до конформных преобразований комплексных координат, которые вводятся на $\mathbb{U}_x$: $z = x^1 + ix^2$, что оправдывает название "конформно евклидова" для метрики. □

Если в пространстве-времени метрика имеет вид (5.29), где символ Кронекера $\delta_{\alpha\beta}$ заменен на лоренцеву метрику $\eta_{\alpha\beta}$, то пространство-время называется *конформно минковским*.

В общем случае, для того, чтобы задать метрику в некоторой окрестности, необходимо задать $n(n+1)/2$ функций от n переменных. Во многих случаях, например, в общей теории относительности, метрика ищется как решение некоторой системы уравнений, которая ковариантна относительно выбора системы координат. То есть

система уравнений движения выглядит по-разному в различных системах отсчета, однако пространства решений находятся во взаимно однозначном соответствии. При этом соответствие устанавливается преобразованием координат. При решении ковариантной системы уравнений удобно выбрать ту или иную систему отсчета с тем, чтобы уменьшить число неизвестных функций. Поскольку переход между системами координат характеризуется n функциями от n переменных, то максимальное число функций, которое можно зафиксировать в метрике общего вида, равно n. В результате метрика будет определяться $n(n-1)/2$ функциями. В этом случае говорят, что выбрана система координат или *зафиксирована калибровка* для метрики[2]. Как правило, координаты выбираются таким образом, чтобы система уравнений имела наиболее простой вид. Выбор системы координат не означает, что n функций, входящих в метрику, можно зафиксировать произвольным образом. Для того, чтобы определить, существует ли система отсчета, где метрика имеет заданный вид, необходимо проанализировать систему уравнений для функций перехода к такой системе координат. Если эта система уравнений имеет решение, то такая калибровка называется *допустимой*. Как правило, система уравнений на функции перехода, имеет только локальные решения. Это означает, что соответствующая система координат может быть выбрана только локально.

5.5 Разложение Ходжа

Если на многообразии $\mathbb{M}$, $\dim \mathbb{M} = n$, задана положительно определенная риманова метрика, то можно доказать ряд важных результатов для дифференциальных форм, которые не имеют места в общем случае. Для формулировки этих результатов введем несколько определений.

Форма $A \in \Lambda_r(\mathbb{M})$ является *коточной*, если ее можно представить в виде

$$A = \delta B, \qquad \text{где} \quad B \in \Lambda_{r+1}(\mathbb{M}).$$

Форма $A \in \Lambda_r(\mathbb{M})$ называется *козамкнутой*, если

$$\delta A = 0.$$

Любая скалярная функция, очевидно, является козамкнутой. Любая коточная форма является козамкнутой в силу свойства (4.58). Форма $A \in \Lambda_r(\mathbb{M})$ называется *гармонической*, если

$$\triangle_F A = 0.$$

Теорема 5.5.1. *Любая гармоническая форма $A \in \Lambda_r(\mathbb{M})$ на компактном ориентируемом римановом многообразии является замкнутой и козамкнутой.*

Доказательство. Из определения оператора Лапласа–Бельтрами (4.59) для скалярного произведения (4.54) следует равенство

$$\langle \triangle_F A, A\rangle = -\langle \delta A, \delta A\rangle - \langle dA, dA\rangle. \tag{5.30}$$

Отсюда следует, что условие гармоничности $\triangle_F A = 0$ влечет за собой равенства $\delta A = 0$ и $dA = 0$. При этом ориентируемость и компактность многообразия необходимы

[2]Это название пришло из электродинамики, инвариантной относительно локальных преобразований, которые называются калибровочными (см. раздел **??**).

для существования и конечности интеграла, входящего в скалярное произведение. Положительная определенность метрики необходима для того, чтобы оба слагаемых в правой части равенства (5.30) обращались в нуль по отдельности, и из равенства $\langle \delta A, \delta A\rangle = 0$ вытекало $\delta A = 0$ (аналогично для dA). □

Следствие. Любая гармоническая функция на компактном ориентируемом римановом многообразии является замкнутой $df = 0$ и, следовательно, равна константе. □

Замечание. Сформулированная теорема справедлива также для компактных неориентируемых многообразий. Действительно, она верна для двулистного ориентируемого накрытия $\widetilde{\mathbb{M}} \to \mathbb{M}$, которое всегда существует, и при проекции замкнутость и козамкнутость форм сохраняется. □

Теорема 5.5.2 (Разложение Ходжа). *Пусть $\mathbb{M}$ – компактное ориентируемое риманово многообразие. Тогда любую r-форму $A \in \Lambda_r(\mathbb{M})$ можно представить в виде суммы точной, коточной и гармонической формы*

$$A = dB + \delta C + H, \qquad B \in \Lambda_{r-1}(\mathbb{M}), \quad C \in \Lambda_{r+1}(\mathbb{M}), \quad H \in \Lambda_r(\mathbb{M}). \tag{5.31}$$

Это разложение единственно.

Доказательство. См., например, [**?**]. □

Единственность разложения вытекает из ортогональности трех подпространств относительно скалярного произведения форм

$$\langle A, A\rangle = \langle dB, dB\rangle + \langle \delta C, \delta C\rangle + \langle H, H\rangle.$$

Следствие. Уравнение

$$\triangle_F A = D, \qquad A, D \in \Lambda_r(\mathbb{M}),$$

на компактном ориентируемом многообразии имеет решение тогда и только тогда, когда r-форма D ортогональна пространству гармонических r-форм. □

Теорема 5.5.3. *На компактном ориентируемом римановом пространстве существует только конечное число линейно независимых гармонических форм.*

Доказательство. См., например, [**?**]. □

Размерность пространства гармонических r-форм

$$\mathcal{H}_r(\mathbb{M}) = \{H \in \Lambda_r(\mathbb{M}) : \quad \triangle_F H = 0\}$$

называется r-тым *числом Бетти*

$$b_r(\mathbb{M}) = \mathsf{dim}\, \mathcal{H}_r(\mathbb{M}). \tag{5.32}$$

Отметим несколько свойств чисел Бетти. Поскольку оператор Лапласа–Бельтрами коммутирует с оператором Ходжа (4.60), а оператор Ходжа устанавливает изоморфизм $\mathcal{H}_r(\mathbb{M})$ и $\mathcal{H}_{n-r}(\mathbb{M})$, то $b_r(\mathbb{M}) = b_{n-r}(\mathbb{M})$. Так как все гармонические 0-формы на компактном ориентируемом римановом многообразии являются константами, то $b_0(\mathbb{M}) = b_n(\mathbb{M}) = 1$. Отметим, что пространство $\mathcal{H}_n(\mathbb{M})$ состоит из n-форм, пропорциональных форме объема υ (4.72). Если многообразие $\mathbb{M}$ связно, то $b_n(\mathbb{M}) = 1$ или $b_n(\mathbb{M}) = 0$ для ориентируемых и неориентируемых многообразий.

Определение. Число

$$\chi(\mathbb{M}) = \sum_{r=0}^{n} (-1)^r b_r(\mathbb{M}) \tag{5.33}$$

называется *эйлеровой характеристикой* многообразия $\mathbb{M}$. □

Теорема 5.5.4. *Пусть $\mathbb{M}$ – компактное ориентируемое риманово многообразие и A – дифференцируемая 1-форма. Тогда*

$$\int \upsilon \delta A = 0.$$

В частности, для произвольной скалярной функции $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{M})$

$$\int \upsilon \triangle_F f = 0.$$

Доказательство. Справедливо равенство

$$\int_{\mathbb{M}} \upsilon \delta A = \langle \delta A, 1 \rangle = \langle A, d1 \rangle = 0.$$ □

Теорема 5.5.5. *Пусть $\mathbb{M}$ – компактное риманово многообразие с положительной гауссовой кривизной $K > 0$. Тогда первое число Бетти равно нулю $b_1(\mathbb{M}) = 0$.*

Доказательство. Напомним, что $K = -\frac{1}{2}\widetilde{R}$, где $\widetilde{R}$ – скалярная кривизна, определенная в разделе 8.8. Доказательство приведено, например, в [**?**]. □

Предложение 5.5.1. *Любая ковариантно постоянная форма является замкнутой, козамкнутой и гармонической.*

Доказательство. Это следует из выражений для внешней производной (4.35), оператора кограницы (4.56) и определения оператора Лапласа–Бельтрами (4.59). □

Пример 5.5.1. Форма объема υ (4.72) замкнута, козамкнута и гармонична, поскольку $\nabla_\alpha e = 0$. □

Глава 6

Связности на векторных расслоениях

Большинство моделей математической физики сводится к решению некоторых дифференциальных уравнений, которыми являются уравнения движения или уравнения равновесия. Мы предполагаем, что дифференциальные уравнения являются ковариантными объектами, т.е. при преобразовании координат преобразуются по тензорным правилам. В этом случае физические следствия не будут зависеть от выбора системы отсчета. Чтобы строить такие модели используется понятие связности и соответствующей ковариантной производной, т.к. что обычные частные производные от тензорных полей на многообразии не приводят к тензорным объектам. Это относится не только к уравнениям общей теории относительности, но и к другим моделям математической физики. По сути дела ковариантные производные появляются и в плоском пространстве-времени Минковского при переходе к криволинейным системам координат.

6.1 Векторные расслоения

В разделе (3.4) были определены расслоения общего вида, когда типичным слоем является произвольное многообразие. Ниже мы рассмотрим частный случай расслоений, типичными слоями которых являются векторные пространства, и введем понятие связности. Рассмотренные ранее касательное $\mathbb{T}(\mathbb{M})$, кокасательное $\mathbb{T}^*(\mathbb{M})$ и тензорные $\mathbb{T}^r_s(\mathbb{M})$ расслоения с базой $\mathbb{M}$ представляет собой частные примеры векторных расслоений, а понятие связности приводит к оператору ковариантного дифференцирования произвольных тензорных полей – исключительно важному инструменту для построения моделей математической физики.

Определение. Дифференцируемое многообразие $\mathbb{E}(\mathbb{M}, \pi, \mathbb{V})$ называется *векторным расслоением* с *базой* $\mathbb{M}$, *проекцией* π и *типичным слоем* $\mathbb{V}$, где $\mathbb{M}$ – дифференцируемое многообразие и $\mathbb{V} \simeq \mathbb{R}^n$ – векторное пространство. Проекция π является гладким сюръективным отображением $\mathbb{E} \xrightarrow{\pi} \mathbb{M}$. При этом требуется, чтобы для любого атласа $\mathbb{M} = \bigcup_i \mathbb{U}_i$ существовали отображения $\{\chi_i\}$, удовлетворяющие следующим условиям:

1) Отображение χ_i есть диффеоморфизм $\chi_i : \pi^{-1}(\mathbb{U}_i) \to \mathbb{U}_i \times \mathbb{V}$ такой, что $\pi \circ \chi_i^{-1}(x, v) = x$ для всех точек $x \in \mathbb{U}_i$ и $v \in \mathbb{V}$.

2) Сужение отображения χ_i на каждый слой $\chi_{i,x} : \pi^{-1}(x) \to \mathbb{V}$ есть гомоморфизм векторных пространств для всех $x \in \mathbb{U}_i$. При этом, если $x \in \mathbb{U}_i \cap \mathbb{U}_j$, то отображение
$$f_{ij}(x) = \chi_{j,x}\chi_{i,x}^{-1} : \mathbb{V} \to \mathbb{V},$$
является автоморфизмом, т.е. $f_{ij}(x) \in \mathbb{GL}(n, \mathbb{R})$.
3) Если $\mathbb{U}_i \cap \mathbb{U}_j \neq \emptyset$, то отображение $f_{ij}(x) : \mathbb{U}_i \cap \mathbb{U}_j \to \mathbb{GL}(n, \mathbb{R})$ является гладким. □

Пусть $p \in \pi^{-1}(x)$ – некоторая точка векторного расслоения $\mathbb{E}$ из слоя над $x \in \mathbb{U}_i \cap \mathbb{U}_j$. Тогда $\chi_i(p) = (x, v_i)$ и $\chi_j(p) = (x, v_j)$. Следовательно,
$$p = \chi_i^{-1}(x, v_i) = \chi_j^{-1}(x, v_j). \tag{6.1}$$

Зафиксируем базис $\hat{e}_a$, $a = 1, \ldots, n$ в векторном пространстве $\mathbb{V}$ и разложим по нему векторы: $v_i = v_i^a \hat{e}_a$ и $v_j = v_j^a \hat{e}_a$. Тогда из условия 2) следует равенство
$$v_j^a = v_i^b f_{ij\,b}{}^a,$$
где $f_{ij}(x) = \{f_{ij\,b}{}^a(x)\} \in \mathbb{GL}(n, \mathbb{R})$.

Замечание. В данном определении оба свойства из определения расслоения общего вида в разделе 3.4 объединены в одно свойство 1). Свойство 2) предполагает, что слой векторного расслоения $\pi^{-1}(x)$ в каждой точке $x \in \mathbb{M}$, сам является векторным пространством, *гомоморфным* типичному слою, а в областях пересечения карт допускаются автоморфизмы, то есть линейные отображения $\mathbb{V}$ на себя. С учетом свойства 1) получаем, что каждый слой изоморфен векторному пространству, $\pi^{-1}(x) \simeq \mathbb{V}$. В условии 2) гомоморфизм можно заменить на гомеоморфизм и не требовать изначально наличия структуры векторного пространства в слое $\pi^{-1}(x)$. Гомеоморфизма достаточно для переноса структуры векторного пространства из $\mathbb{V}$ на слой $\pi^{-1}(x)$, при этом каждый слой будет, конечно, изоморфен $\mathbb{V}$. Свойство 3) говорит о том, что автоморфизмы задаются матрицей $\mathbb{GL}(n, \mathbb{R})$, элементы которой гладко зависят от координат. Поэтому в определении векторного расслоения был выбран атлас вместо окрестности точки $x \in \mathbb{M}$ в определении расслоения общего вида. □

Если в векторном пространстве $\mathbb{V}$, $\dim \mathbb{V} = n$, зафиксирован базис $\{\hat{e}_a\}$, $a = 1, \ldots, n$, то его можно отождествить с евклидовым пространством $\mathbb{R}^n$. После этого топология и дифференцируемая структура евклидова пространства с помощью отображений $\{\chi_i\}$ естественным образом переносятся на пространство расслоения $\mathbb{E}$, превращая его в многообразие. Фактически, требование дифференцируемости отображений χ_i означает, что дифференцируемая структура на пространстве расслоения $\mathbb{E}$ согласована с дифференцируемой структурой, индуцированной отображениями χ_i.

Замечание. В общем случае размерности базы $\mathbb{M}$ и векторного пространства $\mathbb{V}$ (типичного слоя) могут не совпадать. Если $\dim \mathbb{M} = m$ и $\dim \mathbb{V} = n$, то $\dim \mathbb{E} = m + n$. □

В силу условия 1) в определении расслоения многообразие $\pi^{-1}(\mathbb{U}_i)$ является тривиальным расслоением над каждой областью $\mathbb{U}_i$.

Пример 6.1.1. Построим двумерные расслоения $\mathbb{E}(\mathbb{S}^1, \pi, \mathbb{R})$, базой которых является окружность $\mathbb{S}^1$, а типичным слоем – вещественная прямая $\mathbb{R}$, которая рассматривается, как векторное пространство. Отождествим каждую точку окружности с

полярным углом $\mathbb{S}^1 \supset \alpha \in [0, 2\pi)$. Покроем окружность двумя картами $\mathbb{S}^1 \supset \mathbb{U}_1 = (2\pi - \delta, 2\pi) \cup [0, \pi + \delta)$ и $\mathbb{S}^1 \supset \mathbb{U}_2 = (\pi - \delta, 2\pi) \cup [0, \delta)$, где $0 < \delta < \pi/2$, которые пересекаются по двум областям $\mathbb{U}_1 \cap \mathbb{U}_2 = \mathbb{U}_{12} \cup \mathbb{U}_{21}$, где $\mathbb{U}_{12} = (\pi - \delta, \pi + \delta)$ и $\mathbb{U}_{21} = (2\pi - \delta, 2\pi) \cup [0, \delta)$, при этом координатные функции определяют диффеоморфизмы:

$$\varphi_1(\mathbb{U}_1) = (-\delta, \pi + \delta) \in \mathbb{R},$$
$$\varphi_2(\mathbb{U}_2) = (\pi - \delta, 2\pi + \delta) \in \mathbb{R}.$$

Определим векторное расслоение $\mathbb{E}$ его локальным вложением в $\mathbb{R}^3$:

$$\pi^{-1}(\mathbb{U}_1) = \{p = (x, v^1, v^2) \in \mathbb{R}^3 : \quad x \in \varphi_1(\mathbb{U}_1),\ v^2 \cos(kx/2) = v^1 \sin(kx/2)\},$$
$$\pi^{-1}(\mathbb{U}_2) = \{p = (x, v^1, v^2) \in \mathbb{R}^3 : \quad x \in \varphi_2(\mathbb{U}_2),\ v^2 \cos(kx/2) = v^1 \sin(kx/2)\},$$

где $k = 0, 1, 2, \ldots$ и v^1, v^2 – декартовы координаты на плоскости $\mathbb{R}^2$. Для большей ясности мы обозначили точки окружности $\alpha \in \mathbb{S}^1$ и их координаты $x = \varphi(\alpha) \in \mathbb{R}$ разными буквами. Словами, при движении точки по окружности $\mathbb{S}^1$ вещественная прямая $\mathbb{R} \subset \mathbb{R}^2$ поворачивается в плоскости $\mathbb{R}^2$ на угол $kx/2$. Если $v \in \mathbb{R}$ – точка на прямой, то ей соответствует точка $\boldsymbol{v} = (v^1, v^2) = (v \cos(kx/2), v \sin(kx/2)) \in \mathbb{R}^2$ на плоскости. Направляющим вектором прямой является $\boldsymbol{n} = (\cos(kx/2), \sin(kx/2)) \in \mathbb{R}^2$. Теперь определим отображения:

$$\chi_1 : \quad \pi^{-1}(\mathbb{U}_1) \ni p \mapsto (\alpha, v) \in \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R},$$
$$\chi_2 : \quad \pi^{-1}(\mathbb{U}_2) \ni p \mapsto (\alpha, v) \in \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R},$$

где $v = (\boldsymbol{n}, \boldsymbol{v}) = v^1 \cos(kx/2) + v^2 \sin(kx/2)$. Для определения гомоморфизмов χ_{ij} необходимо учесть, что точки x и $x + 2\pi$ в пересечении $\mathbb{U}_{21}$ соответствуют одной и той же точке окружности, и

$$\cos(k(2\pi + x)/2) = (-1)^k \cos(kx/2), \qquad \sin(k(2\pi + x)/2) = (-1)^k \sin(kx/2).$$

Поэтому $f_{12} = \mathsf{id}(\mathbb{R})$ и $f_{21} = (-1)^k \mathsf{id}(\mathbb{R})$. Отсюда следует, что все расслоения для четных k диффеоморфны между собой и диффеоморфны тривиальному расслоению $\mathbb{E} = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$, которое получается при $k = 0$. Расслоения при нечетных k также диффеоморфны между собой и диффеоморфны листу Мебиуса, соответствующего $k = 1$. □

Набор отображений $\{f_{ij}\}$ называется *функциями перехода*. Последний пример показывает, что отображения χ_i однозначно определяют функции перехода. В обратную сторону. Если задано два векторных расслоения с одинаковой базой и функциями перехода, то они диффеоморфны между собой.

При задании расслоения функции перехода должны удовлетворять условиям совместности:

1) для $x \in \mathbb{U}_i$, $f_{ii} = \mathsf{id}$;

2) для $x \in \mathbb{U}_i \cap \mathbb{U}_j \cap \mathbb{U}_k \neq \emptyset$, $\quad f_{ij} f_{jk} f_{ki} = \mathsf{id}$.

Эти условия совместности являются, очевидно, необходимыми.

Теорема 6.1.1. *Пусть $\{\mathbb{U}_i\}$ – открытое координатное покрытие (атлас) дифференцируемого многообразия $\mathbb{M}$, и $\mathbb{V}$ – векторное пространство. Если для всех пар пересекающихся координатных областей $\mathbb{U}_i \cap \mathbb{U}_j \neq \emptyset$ заданы гладкие отображения $f_{ij} : \ \mathbb{U}_i \cap \mathbb{U}_j \to \mathbb{GL}(\mathbb{V})$, которые удовлетворяет условиям совместности 1) и 2), тогда существует векторное расслоение $\mathbb{E}(\mathbb{M}, \pi, \mathbb{V})$ с функциями перехода f_{ij}.*

Доказательство. См., например, [?]. □

Поскольку слоями векторных расслоений являются векторные пространства, то из заданных векторных расслоений с одной и той же базой можно строить новые векторные расслоения, производя со слоями операции, которые допустимы для векторных пространств, поточечно.

Пример 6.1.2 (Прямая сумма $\mathbb{E}_1 \oplus \mathbb{E}_2$ и тензорное произведение $\mathbb{E}_1 \otimes \mathbb{E}_2$ расслоений.). Пусть $\mathbb{E}_1(\mathbb{M}, \pi_1, \mathbb{V}_1)$ и $\mathbb{E}_2(\mathbb{M}, \pi_2, \mathbb{V}_2)$ – два векторных расслоения с одной и той же базой $\mathbb{M}$. Определим прямую сумму векторных расслоений

$$\mathbb{E}_1 \oplus \mathbb{E}_2(\mathbb{M}, \pi, \mathbb{V}_1 \oplus \mathbb{V}_2) := \bigcup_{x \in \mathbb{M}} \pi_1^{-1}(x) \oplus \pi_2^{-1}(x). \tag{6.2}$$

Если точка $p \in \mathbb{E}_1 \oplus \mathbb{E}_2$, то она имеет вид $p = p_1 \oplus p_2$, где $p_1 \in \pi_1^{-1}(x)$, $p_2 \in \pi_2^{-1}(x)$ для некоторого $x \in \mathbb{M}$. Тем самым определена проекция $\pi(p) = x$. Типичным слоем прямой суммы векторных расслоений является векторное пространство $\mathbb{V}_1 \oplus \mathbb{V}_2$. Пусть $\{\mathbb{U}_i\}$ – координатное покрытие $\mathbb{M}$ и $\{f_{ij}^{(1)}\}$ и $\{f_{ij}^{(2)}\}$ – функции перехода для расслоений $\mathbb{E}_1$ и $\mathbb{E}_2$, соответственно. Функции перехода для прямой суммы векторных расслоений имеют вид

$$h_{ij} := \begin{pmatrix} f_{ij}^{(1)} & 0 \\ 0 & f_{ij}^{(2)} \end{pmatrix},$$

которые задают автоморфизм в $\mathbb{V}_1 \oplus \mathbb{V}_2$.

Аналогично определяется тензорное произведение векторных расслоений:

$$\mathbb{E}_1 \otimes \mathbb{E}_2(\mathbb{M}, \pi, \mathbb{V}_1 \oplus \mathbb{V}_2) := \bigcup_{x \in \mathbb{M}} \pi_1^{-1}(x) \otimes \pi_2^{-1}(x). \tag{6.3}$$

Функции перехода для тензорного произведения имеют вид

$$h_{ij} := f_{ij}^{(1)} \otimes f_{ij}^{(2)},$$

которые действуют в тензорном произведении $\mathbb{V}_1 \otimes \mathbb{V}_2$. □

Размерности прямой суммы и тензорного произведения расслоений равны:

$$\begin{aligned} \mathsf{dim}\,(\mathbb{E}_1 \oplus \mathbb{E}_2) &= \mathsf{dim}\,\mathbb{M} + \mathsf{dim}\,\mathbb{V}_1 + \mathsf{dim}\,\mathbb{V}_2, \\ \mathsf{dim}\,(\mathbb{E}_1 \otimes \mathbb{E}_2) &= \mathsf{dim}\,\mathbb{M} + \mathsf{dim}\,\mathbb{V}_1 \times \mathsf{dim}\,\mathbb{V}_2. \end{aligned}$$

В заключение данного раздела обсудим касательное расслоение, построенное в разделе 3.6.2.

Теорема 6.1.2. *Касательное расслоение $\mathbb{T}(\mathbb{M})$ является векторным расслоением $\mathbb{E}(\mathbb{M}, \pi, \mathbb{R}^n)$ с базой $\mathbb{M}$, $\mathsf{dim}\,\mathbb{M} = n$, типичным слоем $\mathbb{R}^n$ и проекцией $\pi : (x, X) \to x$, где $X \in \mathbb{T}_x(\mathbb{M})$.*

Для доказательства достаточно проверить свойства 1)–3) в определении векторного расслоения.

Замечание. Для касательного расслоения размерности базы и типичного слоя совпадают:

$$\mathsf{dim}\,\mathbb{M} = \mathsf{dim}\,\mathbb{R}^n = n.$$ □

Касательное расслоение имеет свою специфику. Вообще говоря, в определении векторного расслоения ничего не говорится о том, какое именно линейное преобразование векторного пространства происходит в областях пересечения карт. Говорится лишь о том, что оно возможно. Для касательного расслоения реализован естественный способ гладко сопоставить каждому преобразованию координат автоморфизм касательного пространства. А именно, каждому преобразованию координат, соответствует тождественное преобразование касательного пространства, $f_{ij} = \mathsf{id}\,(\mathbb{T}_x(\mathbb{M}))$ для всех $x \in \mathbb{U}_i \cap \mathbb{U}_j$. Если в касательном пространстве в точке $x \in \mathbb{M}$ (слое над x) выбран координатный (голономный) базис $\{\partial_\alpha\}$, то при преобразовании координат в базе компоненты вектора умножаются на матрицу Якоби, а голономный базис касательного пространства – на обратную матрицу Якоби (3.7). Поэтому сам вектор остается без изменения. Если вектор касательного пространства рассматривается, как набор компонент $\{X^\alpha\}$, считая, что базис векторного пространства фиксирован, то при преобразовании координат компоненты вектора умножаются на матрицу Якоби $\partial_\alpha x^{\alpha'}$ справа. Тогда функциями перехода являются матрицы Якоби. Обе точки зрения на функции перехода допустимы. Это зависит от того, как рассматривать базис векторного пространства $\mathbb{V}$. В общем случае базис касательного пространства e_a, $a = 1, \ldots, n$, можно зафиксировать произвольным образом (неголономный базис). Тогда мы считаем, что при преобразовании координат базис и координаты векторов относительно этого базиса: $X = X^a e_a$ не меняются. Такой подход часто бывает удобнее и соответствует использованию репера $e_a = e^\alpha{}_a \partial_\alpha$, который образует базис касательного пространства.

Гладкое сечение векторного расслоения $\mathbb{E}(\mathbb{M}, \pi, \mathbb{V})$, которое всюду отлично от нуля, существует не всегда. Существование таких сечений отражает определенные топологические свойства базы $\mathbb{M}$.

Понятие (псевдо) риманова многообразия естественным образом обобщается на произвольные векторные расслоения. Если в каждой точке $x \in \mathbb{M}$ задана невырожденная симметричная билинейная форма g на слое $\pi^{-1}(x)$, и значение $g(V_1, V_2)$ является гладкой функцией на $\mathbb{M}$ для произвольных гладких сечений $V_1, V_2 \in \mathcal{V}_\mathbb{E}(\mathbb{M})$, то $\mathbb{E}$ называется *(псевдо) римановым векторным расслоением.*

Пример 6.1.3. Тензорное расслоение на римановом многообразии является римановым векторным расслоением. Например, для тензорных полей $X_\alpha{}^\beta, Y_\alpha{}^\beta$ типа $(1,1)$ квадратичная форма задается римановой метрикой

$$g(X, Y) = g^{\alpha\beta} X_\alpha{}^\gamma Y_\beta{}^\delta g_{\gamma\delta}. \qquad \square$$

6.2 Связность на векторном расслоении

В настоящем разделе мы определим связность на векторном расслоении в инвариантной форме. Рассмотрим многообразие $\mathbb{M}$, $\mathsf{dim}\,\mathbb{M} = m$, и векторное пространство $\mathbb{V}$, $\mathsf{dim}\,\mathbb{V} = n$. Пусть $\mathbb{E}(\mathbb{M}, \pi, \mathbb{V})$ – векторное расслоение. Сечениями этого расслоения являются векторные поля $V(x)$. Обозначим множество сечений расслоения $\mathbb{E}$ через $\mathcal{V}_\mathbb{E}(\mathbb{M})$. На множестве сечений векторного расслоения поточечно вводится сложение и умножение на гладкие функции. Таким образом, множество сечений $\mathcal{V}_\mathbb{E}(\mathbb{M})$ является $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{M})$-модулем.

Все дальнейшие конструкции мы будем иллюстрировать записью соответствующих выражений в компонентах, поскольку это, во-первых, наглядно и, во-вторых, необходимо при проведении вычислений. Выберем в каждом слое $\pi^{-1}(x)$, $x \in \mathbb{U} \subset \mathbb{M}$,

базис $e_a(x) \in \mathcal{V}_{\mathbb{E}}(\mathbb{U})$, $a = 1, \ldots, n$. Этот базис называется *репером*. Для каждой точки x существует окрестность $\mathbb{U} \subset \mathbb{M}$, в которой репер задается гладкими функциями от x. Вообще говоря, такой репер глобально существует не для всех многообразий, и это зависит от топологических свойств. В компонентах сечение векторного расслоения имеет вид $V = V^a(x)e_a$.

Кокасательное расслоение $\mathbb{T}^*(\mathbb{M})$ имеет ту же базу, что и $\mathbb{E}(\mathbb{M}, \pi, \mathbb{V})$, поэтому можно построить тензорное произведение расслоений $\mathbb{T}^*(\mathbb{M}) \otimes \mathbb{E}$. Пусть $\mathcal{V}_{\mathbb{T}^*\otimes\mathbb{E}}(\mathbb{M})$ – множество сечений тензорного произведения расслоений. В компонентах сечение этого расслоения задается векторным полем с дополнительным ковариантным индексом $dx^\alpha V_\alpha{}^a(x)e_a$, где dx^α, $\alpha = 1, \ldots, m$, – координатный базис 1-форм.

Определение. *Связностью* ∇ *на векторном расслоении* $\mathbb{E}(\mathbb{M}, \pi, \mathbb{V})$ называется отображение

$$\nabla : \quad \mathcal{V}_{\mathbb{E}}(\mathbb{M}) \to \mathcal{V}_{\mathbb{T}^*\otimes\mathbb{E}}(\mathbb{M}), \tag{6.4}$$

которое удовлетворяет двум условиям:

1) для любых двух сечений $V_1, V_2 \in \mathcal{V}_{\mathbb{E}}(\mathbb{M})$

$$\nabla(V_1 + V_2) = \nabla V_1 + \nabla V_2;$$

2) для произвольного сечения $V \in \mathcal{V}_{\mathbb{E}}(\mathbb{M})$ и произвольной функции $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{M})$

$$\nabla(fV) = df \otimes V + f\nabla V. \quad \square \tag{6.5}$$

Если в определении связности положить $f = \mathsf{const}$, то из условий 1) и 2) следует линейность отображения ∇.

По-определению, сечение $\nabla V \in \Lambda_1(\mathbb{M}) \otimes \mathbb{V}$ представляет собой 1-форму на $\mathbb{M}$ со значениями в векторном пространстве $\mathbb{V}$. Рассмотрим касательное векторное поле к базе $X \in \mathcal{X}(\mathbb{M})$. Тогда определено значение значение 1-формы ∇V на векторном поле X

$$\nabla_X V = \nabla V(X), \tag{6.6}$$

которое называется *ковариантной производной* векторного поля $V \in \mathcal{V}_{\mathbb{E}}(\mathbb{M})$ вдоль касательного векторного поля $X \in \mathcal{X}(\mathbb{M})$.

Ковариантная производная вдоль векторного поля ∇_X является отображением $\mathcal{V}_{\mathbb{E}}(\mathbb{M}) \to \mathcal{V}_{\mathbb{E}}(\mathbb{M})$. Пусть $X, Y \in \mathcal{X}(\mathbb{M})$ – два произвольных векторных поля на $\mathbb{M}$, и $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{M})$ – гладкая функция. Тогда ковариантная производная имеет следующие свойства:

$$\begin{aligned} \nabla_{X+Y}V &= \nabla_X V + \nabla_Y V, \\ \nabla_{fX}V &= f\nabla_X V, \\ \nabla_X(V_1 + V_2) &= \nabla_X V_1 + \nabla_X V_2, \\ \nabla_X(fV) &= (Xf)V + f\nabla_X V. \end{aligned}$$

Построим выражение для ковариантной производной в компонентах. Запишем отображение (6.4) для векторов репера:

$$\nabla e_a = dx^\alpha \otimes \omega_{\alpha a}{}^b e_b, \tag{6.7}$$

где $\omega_{\alpha a}{}^b(x)$ – некоторые функции на $\mathbb{M}$. Введем 1-формы

$$\omega_a{}^b = dx^\alpha \omega_{\alpha a}{}^b. \tag{6.8}$$

Тогда соотношение (6.7) можно переписать в виде

$$\nabla e_a = \omega_a{}^b \otimes e_b. \tag{6.9}$$

Рассмотрим, как меняются компоненты $\omega_{\alpha a}{}^b$ при преобразовании репера

$$e'_a = S_a{}^b e_b, \tag{6.10}$$

где $S_a{}^b(x) \in \mathbb{GL}(n,\mathbb{R})$ – некоторая матрица преобразования, элементы которой могут зависеть от точки $x \in \mathbb{M}$. В новом базисе имеем

$$\nabla e'_a = \omega'_a{}^b \otimes e'_b.$$

С другой стороны, из определения связности (6.5) следует

$$\nabla(S_a{}^b e_b) = dS_a{}^b \otimes e_b + S_a{}^b \nabla e_b.$$

Сравнивая эти выражения, получаем правило преобразования:

$$\omega'_a{}^b = S_a{}^c \omega_c{}^d S^{-1}{}_d^b + dS_a{}^c S^{-1}{}_c^b, \tag{6.11}$$

или, в комопонентах,

$$\omega'_{\alpha a}{}^b = S_a{}^c \omega_{\alpha c}{}^d S^{-1}{}_d^b + \partial_\alpha S_a{}^c S^{-1}{}_c^b. \tag{6.12}$$

Замечание. Это – одна из самых важных формул дифференциальной геометрии, которая широко используется в калибровочных моделях математической физики. Подчеркнем, что преобразование 1-форм $\omega_a{}^b$ содержит неоднородное слагаемое и поэтому не является тензорным. □

Теорема 6.2.1. *На любом векторном расслоении* $\mathbb{E}(\mathbb{M},\pi,\mathbb{V})$ *существует связность.*

Доказательство. Доказательство проводится путем явного построения связности с использованием разложения единицы [**?**]. □

Пусть на многообразии $\mathbb{M}$ задан атлас $\{\mathbb{U}_i\}$. Тогда связность в каждой карте задается компонентами $\omega_{\alpha a}{}^b$, которые в областях пересечения карт связаны преобразованием (6.12). Верно также и обратное утверждение. Набор компонент $\omega_{\alpha a}{}^b$, связанных преобразованием (6.12) в областях пересечения карт, однозначно определяет связность на векторном расслоении. По этой причине компоненты $\omega_{\alpha a}{}^b$ называются *локальной формой связности* или, просто, связностью.

Определив действие связности на репер, можно выписать явное выражение для действия связности на произвольное векторное поле $V^a e_a \in \mathcal{V}_{\mathbb{E}}(\mathbb{M})$:

$$\nabla V = (dV^a + V^b \omega_b{}^a) \otimes e_a = dx^\alpha (\partial_\alpha V^a + V^b \omega_{\alpha b}{}^a) \otimes e_a, \tag{6.13}$$

где мы воспользовались определением (6.5). Это выражение называется *ковариантной производной* векторного поля. Выражение в скобках,

$$\nabla_\alpha V^a = \partial_\alpha V^a + V^b \omega_{\alpha b}{}^a, \tag{6.14}$$

называется *ковариантной производной компонент* векторного поля. Замечательным свойством ковариантной производной является то, что при локальном изменении базиса (6.10) ковариантная производная меняется по тензорному закону. Действительно, при изменении базиса (репера) (6.10) компоненты вектора $V = V^a e_a = V'^a e'_a$ преобразуются по векторному представлению группы $\mathbb{GL}(n, \mathbb{R}^n)$:

$$V'^a = V^b S^{-1}{}^a_b, \qquad S_b{}^a(x) \in \mathbb{GL}(n, \mathbb{R}^n). \tag{6.15}$$

Используя преобразование связности (6.12), нетрудно проверить справедливость следующей формулы преобразования ковариантной производной

$$\nabla'_\alpha V'^a = \partial_\alpha V'^a + V'^b \omega'_{\alpha b}{}^a = (\nabla_\alpha V^b) S^{-1}{}^a_b,$$

где ковариантная производная со штрихом ∇'_α берется с локальной формой связности $\omega'_{\alpha b}{}^a$. Тем самым ковариантная производная компонент векторного поля преобразуется по векторному представлению группы $\mathbb{GL}(n, \mathbb{R}^n)$.

Ковариантная производная от векторного поля V вдоль касательного векторного поля X (6.6) в компонентах имеет вид

$$\nabla_X V^a = X^\alpha \nabla_\alpha V^a.$$

Рассмотрим некоторые свойства связности. Легко доказывается

Предложение 6.2.1. *Пусть на векторном расслоении $\mathbb{E}(\mathbb{M}, \pi, \mathbb{V})$ задана связность ∇ и зафиксирована точка базы $x \in \mathbb{M}$. Тогда в окрестности точки x существует такой репер, что компоненты локальной формы связности в этой точке обращаются в нуль $\omega_{\alpha a}{}^b(x) = 0$.*

Замечание. Подчеркнем, что в данном предложении речь идет о фиксированной точке многообразия, а не об окрестности. □

Продолжим изучение локальной формы связности. Перепишем соотношение (6.11) в виде

$$\omega' S = S\omega + dS, \tag{6.16}$$

где, для краткости, мы опустили векторные индексы, предполагая всюду суммирование "с десяти до четырех" (имеется ввиду расположение чисел на циферблате часов). Внешняя производная от этого равенства дает

$$d\omega' S - \omega' \wedge dS = dS \wedge \omega + S d\omega.$$

Подстановка выражения для dS из (6.16) приводит к равенству

$$d\omega' - \omega' \wedge \omega' = S(d\omega - \omega \wedge \omega) S^{-1}, \tag{6.17}$$

которое приводит к следующему важному понятию.

Определение. 2-форма на $\mathbb{M}$

$$R_a{}^b = d\omega_a{}^b - \omega_a{}^c \wedge \omega_c{}^b \tag{6.18}$$

называется *локальной формой кривизны* связности ∇. В компонентах:

$$R_{\alpha\beta a}{}^b = \partial_\alpha \omega_{\beta a}{}^b - \partial_\beta \omega_{\alpha a}{}^b - \omega_{\alpha a}{}^c \omega_{\beta a}{}^c + \omega_{\beta a}{}^c \omega_{\alpha c}{}^b. \quad \square \tag{6.19}$$

Локальная форма кривизны – это 2-форма на многообразии $\mathbb{M}$ со значениями в тензорном произведении $\mathbb{V}^* \otimes \mathbb{V}$, где $\mathbb{V}^*$ – векторное пространство, сопряженное к $\mathbb{V}$.

Формула (6.17) показывает, что при локальном преобразовании репера форма кривизны преобразуется по тензорному закону, т.е. однородно, несмотря на то, что преобразование формы связности (6.11) содержит неоднородное слагаемое.

Пусть на многообразии $\mathbb{M}$ задано два векторных поля $X, Y \in \mathcal{X}(\mathbb{M})$. Тогда значение формы кривизны на этих полях $R(X,Y)_a{}^b$ определяет линейное преобразование из $\mathcal{V}_{\mathbb{E}}(\mathbb{M})$ в $\mathcal{V}_{\mathbb{E}}(\mathbb{M})$. Если $V = V^a e_a \in \mathcal{V}_{\mathbb{E}}(\mathbb{E})$, то

$$R(X,Y): \quad V^a \to V^b R(X,Y)_b{}^a.$$

Это отображение обладает очевидными свойствами:

1) $R(X,Y) = -R(Y,X)$;
2) $R(fX,Y) = fR(X,Y)$;
3) $R(X,Y)(fV) = fR(X,Y)V$;

где $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{M})$.

Предложение 6.2.2. *Пусть на векторном расслоении $\mathbb{E}(\mathbb{M},\pi,\mathbb{V})$ задана связность ∇ с локальной формой кривизны R. Тогда для любых векторных полей $X, Y \in \mathcal{X}(\mathbb{M})$ справедлива формула*

$$R(X,Y) = \nabla_X \nabla_Y - \nabla_Y \nabla_X - \nabla_{[X,Y]}. \tag{6.20}$$

Предложение доказывается прямой проверкой в компонентах.

Теорема 6.2.2 (**Тождества Бианки**). *Форма кривизны R удовлетворяет тождествам Бианки:*

$$dR_a{}^b + R_a{}^c \wedge \omega_c{}^b - \omega_a{}^c \wedge R_c{}^b = 0. \tag{6.21}$$

Доказательство. Внешняя производная от определения кривизны (6.18) равна

$$\begin{aligned} dR &= -d\omega \wedge \omega + \omega \wedge d\omega \\ &= -(R + \omega \wedge \omega) \wedge \omega + \omega \wedge (R + \omega \wedge \omega) \\ &= -R \wedge \omega + \omega \wedge R. \end{aligned}$$

□

В компонентах тождества Бианки имеют вид:

$$dx^\alpha \wedge dx^\beta \wedge dx^\gamma \partial_\alpha R_{\beta\gamma a}{}^b = dx^\alpha \wedge dx^\beta \wedge dx^\gamma (\omega_{\alpha a}{}^c R_{\beta\gamma c}{}^b - R_{\alpha\beta a}{}^c \omega_{\gamma c}{}^b)$$

или

$$\nabla_\alpha R_{\beta\gamma a}{}^b + \nabla_\beta R_{\gamma\alpha a}{}^b + \nabla_\gamma R_{\alpha\beta a}{}^b = 0,$$

где

$$\nabla_\alpha R_{\beta\gamma a}{}^b = \partial_\alpha R_{\beta\gamma a}{}^b + R_{\beta\gamma a}{}^c \omega_{\alpha c}{}^b - \omega_{\alpha a}{}^c R_{\beta\gamma c}{}^b.$$

– ковариантная производная от тензора (формы) кривизны.

Замечание. Построенная конструкция имеет важное приложение в калибровочных моделях теории поля. Если матрицы $S_a{}^b(x) \in \mathbb{GL}(n,\mathbb{R})$ в (14.14) образуют представление ρ некоторой полупростой группы Ли $\mathbb{G}$, то эта группа называется калибровочной. В этом случае локальная форма связности $\omega_{\alpha a}{}^b$ называется *полем Янга-Миллса*, а локальная форма кривизны $R_{\alpha\beta a}{}^b$ – *напряженностью* поля Янга-Миллса. Векторные поля $V = V^a e_a$ называются *полями материи*, преобразующимися по представлению ρ калибровочной группы. Эти поля называются скалярными полями, так как представляют собой набор функций на многообразии, не меняющихся при преобразовании координат $V^a \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{M})$ для всех значений индекса a. □

Рассмотрим сечение векторного расслоения $\mathbb{E}$, т.е. векторное поле $V \in \mathcal{V}_{\mathbb{E}}(\mathbb{M})$. Сечение V называется *параллельным*, если ковариантная производная от него равна нулю

$$\nabla V = 0. \tag{6.22}$$

Нулевое сечение, очевидно, всегда является параллельным. В то же время отличное от нуля параллельное сечение в общем случае может отсутствовать. Рассмотрим этот вопрос подробно. Разложим векторное поле по локальному базису: $V = V^a e_a$. Тогда уравнение (6.22) эквивалентно пфаффовой системе уравнений на компоненты:

$$dV^a + V^b \omega_b{}^a = 0. \tag{6.23}$$

Для анализа этой системы уравнений введем обозначение

$$A^a = dV^a + V^b \omega_b{}^a.$$

Внешняя производная от этой 1-формы равна

$$dA^a = A^b \wedge \omega_b{}^a + V^b R_b{}^a.$$

Из этого выражения и теоремы Фробениуса (3.11.4), записанной в терминах дифференциальных форм, следует, что, если кривизна связности равна нулю, то пфаффова система уравнений (6.22) является вполне интегрируемой. В этом случае существует n линейно независимых параллельных сечений векторного расслоения. Мы видим, что для существования отличных от нуля локальных решений системы уравнений (6.23) локальная форма кривизны связности должна обращаться в нуль.

Пусть на многообразии $\mathbb{M}$ задана дифференцируемая кривая $\gamma(t) = \{x^\alpha(t)\}$, $\alpha = 1, \ldots, m$. Обозначим касательный вектор к кривой (вектор скорости) через v. Тогда сечение векторного расслоения $V \in \mathcal{V}_{\mathbb{E}}(\mathbb{M})$ называется *параллельным вдоль кривой* γ, если ковариантная производная от него вдоль v равна нулю

$$\nabla_v V = 0. \tag{6.24}$$

Касательный вектор к кривой (вектор скорости) имеет вид $v = \dot{x}^\alpha \partial_\alpha$. В компонентах условие параллельности сечения вдоль кривой γ сводится к системе уравнений на компоненты сечения

$$\dot{V}^a + \dot{x}^\alpha V^b \omega_{\alpha b}{}^a = 0. \tag{6.25}$$

Поскольку это – система обыкновенных дифференциальных уравнений, то локально у нее существует единственное решение при заданных начальных данных. Таким образом, если задан вектор V_p в некоторой точке p на кривой γ, то он однозначно определяет векторное поле вдоль кривой γ, которое называется *параллельным переносом* вектора V_p вдоль кривой γ. Очевидно, что параллельный перенос задает изоморфизм слоев векторного расслоения $\mathbb{E}$ в различных точках кривой γ.

Связность ∇ на векторном расслоении $\mathbb{E}(\mathbb{M}, \pi, \mathbb{V})$ индуцирует связность на сопряженном векторном расслоении $\mathbb{E}^*(\mathbb{M}, \pi, \mathbb{V}^*)$, которую мы также обозначим ∇. Это делается следующим образом. Пусть заданы сечения $V \in \mathcal{V}_{\mathbb{E}}(\mathbb{M})$ и $V^* \in \mathcal{V}_{\mathbb{E}^*}(\mathbb{M})$. Тогда каждое сечение $V^*(x)$ задает поточечное линейное отображение

$$V^*(x): \quad \mathcal{V}_{\mathbb{E}}(\mathbb{M}) \ni V(x) \;\mapsto\; (V^*, V) \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{M}).$$

Определим индуцированную связность на сопряженном расслоении $\mathbb{E}^*$ следующей формулой

$$d(V^*, V) = (V^*, \nabla V) + (\nabla V^*, V), \qquad \forall V \in \mathcal{V}_{\mathbb{E}}(\mathbb{M}). \tag{6.26}$$

Найдем выражение для индуцированной связности в компонентах. Пусть e^a – базис сопряженного векторного пространства $\mathbb{V}^*$: $(e^a, e_b) = \delta^a_b$. Этот базис называется *кореперо́м*. Тогда подстановка корепера e^a и репера e_b в определение (6.26) дает

$$\nabla e^a = -e^b \otimes \omega_b{}^a. \tag{6.27}$$

Отсюда следует выражение для ковариантной производной сечения $V^* = e^a V_a$ сопряженного расслоения

$$\nabla V^* = e^a \otimes (dV_a - \omega_a{}^b V_b). \tag{6.28}$$

Эта ковариантная производная отличается знаком у слагаемого со связностью от соответствующего выражения для сечения векторного расслоения (6.13).

Пусть на векторных расслоениях $\mathbb{E}_1(\mathbb{M}, \pi_1, \mathbb{V}_1)$ и $\mathbb{E}_2(\mathbb{M}, \pi_2, \mathbb{V}_2)$ с одинаковой базой $\mathbb{M}$ независимо заданы связности ∇_1 и ∇_2. Пусть заданы сечения $V_1 \in \mathcal{V}_{\mathbb{E}_1}(\mathbb{M})$ и $V_2 \in \mathcal{V}_{\mathbb{E}_2}(\mathbb{M})$. Тогда на прямой сумме $\mathbb{E}_1 \oplus \mathbb{E}_2$ и тензорном произведении $\mathbb{E}_1 \otimes \mathbb{E}_2$ расслоений определена связность

$$\begin{aligned} \nabla(V_1 \oplus V_2) &= \nabla_1 V_1 \oplus \nabla_2 V_2, \\ \nabla(V_1 \otimes V_2) &= \nabla_1 V_1 \otimes V_2 + V_1 \otimes \nabla_2 V_2, \end{aligned} \tag{6.29}$$

которая называется *индуцированной*.

6.3 Аффинная связность

Касательное расслоение $\mathbb{T}(\mathbb{M})$, $\dim \mathbb{M} = n$, является векторным расслоением, типичным слоем которого является векторное пространство $\mathbb{R}^n$. Поэтому определение связности на векторном расслоении без изменений переносится на касательные расслоения. Связность на касательном расслоении называется *аффинной связностью*. Если в касательном пространстве и сопряженном к нему пространстве 1-форм выбрать координатный базис ∂_α и dx^α, то формулы для компонент связности (6.7) и (6.27) определяют аффинную связность

$$\begin{aligned} \nabla(\partial_\alpha) &= \quad dx^\beta \otimes \Gamma_{\beta\alpha}{}^\gamma \partial_\gamma, \\ \nabla(dx^\alpha) &= -dx^\gamma \otimes dx^\beta \Gamma_{\beta\gamma}{}^\alpha. \end{aligned} \tag{6.30}$$

У компонент аффинной связности $\Gamma_{\alpha\beta}{}^\gamma$ все индексы являются координатными. Формула преобразования компонент аффинной связности при преобразовании координат получается из формулы преобразования компонент связности на векторном расслоении (6.12) после замены матрицы $S_b{}^a(x)$ на матрицу Якоби $\partial_\alpha x^{\alpha'}$. При этом необходимо учесть, что при преобразовании координат преобразуется также базис 1-форм, что приводит к дополнительному общему множителю:

$$\Gamma_{\beta'\gamma'}{}^{\alpha'} = (\partial_{\beta'} x^\beta \partial_{\gamma'} x^\gamma \Gamma_{\beta\gamma}{}^\alpha + \partial^2_{\beta'\gamma'} x^\alpha) \partial_\alpha x^{\alpha'}. \tag{6.31}$$

Совокупность функций $\Gamma_{\alpha\beta}{}^\gamma$, преобразующихся по правилу (6.31) при преобразовании координат, называется *компонентами локальной формы аффинной связности* или, короче, аффинной связностью на $\mathbb{M}$.

Замечание. Аффинная связность, так же как и связность на произвольном векторном расслоении, определенная в предыдущем разделе, не имеет ничего общего с метрикой. Ее можно задать независимо от метрики, которая может вообще отсутствовать на многообразии. □

Аффинная связность ∇ осуществляет отображение

$$\nabla : \quad \mathcal{X}(\mathbb{M}) \times \mathcal{X}(\mathbb{M}) \ni X, Y \ \mapsto \nabla_X Y \in \mathcal{X}(\mathbb{M}), \tag{6.32}$$

где $\nabla_X Y$ – ковариантная производная от векторного поля Y вдоль векторного поля X. Как и в разделе 6.2, можно убедиться, что это отображение обладает следующими свойствами:

$$\begin{aligned} \nabla_{X+Y} Z &= \nabla_X Z + \nabla_Y Z, \\ \nabla_{fX} Y &= f \nabla_X Y, \\ \nabla_X (Y + Z) &= \nabla_X Y + \nabla_X Z, \\ \nabla_X (fY) &= (Xf) Y + f \nabla_X Y, \end{aligned} \tag{6.33}$$

где $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{M})$ и $X, Y, Z \in \mathcal{X}(\mathbb{M})$. Верно также обратное утверждение: отображение ∇ со свойствами (6.33) определяет аффинную связность на касательном расслоении. Иногда его принимают в качестве определения аффинной связности.

Связность, определенная на касательном и кокасательном расслоении индуцирует связность на произвольных тензорных расслоениях с помощью правил (6.29). В компонентах ковариантная производная от тензорных полей будет выписана в следующем разделе. Индуцированная ковариантная производная линейна,

$$\nabla(aY \oplus bZ) = a \nabla Y \oplus b \nabla Z, \qquad a, b \in \mathbb{R},$$

где $Y, Z \in \mathcal{T}(\mathbb{M})$ – произвольные тензорные поля. Справедливо правило Лейбница

$$\nabla(Y \otimes Z) = (\nabla Y) \otimes Z + Y \otimes (\nabla Z). \tag{6.34}$$

Нетрудно проверить, что ковариантная производная перестановочна с каждым свертыванием: $\nabla C = C \nabla$. Кроме того, ковариантная производная вдоль векторного поля ∇_X сохраняет тип тензорных полей $\nabla_X \mathcal{T}^r_s(\mathbb{M}) \subset \mathcal{T}^r_s(\mathbb{M})$. Таким образом, ковариантная производная вдоль векторного поля ∇_X является дифференцированием в тензорной алгебре, которое было определено в разделе 3.14. В силу теоремы 3.14.1 ковариантная производная вдоль векторного поля ∇_X отличается от производной Ли L_X на дифференцирование, порожденное тензорным полем типа $(1,1)$.

Тензор кривизны (6.19) для аффинной связности (6.30) в компонентах принимает вид

$$R_{\alpha\beta\gamma}{}^{\delta} = \partial_\alpha \Gamma_{\beta\gamma}{}^{\delta} - \partial_\beta \Gamma_{\alpha\gamma}{}^{\delta} - \Gamma_{\alpha\gamma}{}^{\epsilon} \Gamma_{\beta\epsilon}{}^{\delta} + \Gamma_{\beta\gamma}{}^{\epsilon} \Gamma_{\alpha\epsilon}{}^{\delta}. \quad \square \tag{6.35}$$

Рассмотрим тензор кривизны (6.35), как отображение касательных пространств

$$\mathcal{X}(\mathbb{M}) \times \mathcal{X}(\mathbb{M}) \times \mathcal{X}(\mathbb{M}) \to \mathcal{X}(\mathbb{M})$$

и обозначим

$$R(X, Y, Z) = X^\alpha Y^\beta Z^\gamma R_{\alpha\beta\gamma}{}^{\delta} \partial_\delta.$$

Тогда нетрудно проверить справедливость следующего тождества:

$$R(X, Y, Z) = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z,$$

которое является частным случаем предложения 6.2.2. Это соотношение иногда принимают в качестве определения кривизны R аффинной связности ∇.

Определение. 2-форма со значениями в касательном пространстве, $T = \frac{1}{2} dx^\alpha \wedge dx^\beta T_{\alpha\beta}{}^\gamma \partial_\gamma$, определенная равенством:

$$T(X,Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y], \quad \forall X, Y \in \mathcal{X}(\mathbb{M}). \tag{6.36}$$

называется *тензором кручения*. Компоненты тензора кручения равны антисимметричной части компонент аффинной связности:

$$T_{\alpha\beta}{}^\gamma = \Gamma_{\alpha\beta}{}^\gamma - \Gamma_{\beta\alpha}{}^\gamma. \quad \square \tag{6.37}$$

Таким образом, аффинная связность определяет два тензора: тензор кривизны и тензор кручения. Поскольку при преобразовании координат неоднородное слагаемое в (6.31) симметрично по индексам β', γ', то компоненты кручения действительно преобразуются по тензорному закону.

Глава 7

Связность на расслоении реперов

Существует тесная взаимосвязь между касательным расслоением и расслоением реперов. Начнем с конструктивного построения расслоения реперов. Предположим, что задано дифференцируемое многообразие $\mathbb{M}$, $\dim \mathbb{M} = n$. *Репером* в точке $x \in \mathbb{M}$ называется упорядоченный набор объектов $p = (x, e_1, \ldots, e_n) = \{x, e_a\}$, $a = 1, \ldots, n$, где $\{e_a\}$ – набор линейно независимых касательных векторов в точке x. Множество всех реперов на $\mathbb{M}$ обозначим через $\mathbb{L}(\mathbb{M})$. Ниже мы построим дифференцируемую структуру на $\mathbb{L}(\mathbb{M})$, тем самым превратив множество всех реперов в дифференцируемое многообразие размерности $\dim \mathbb{L}(\mathbb{M}) = n + n^2$ такое, что естественная проекция

$$\pi(x, e_1, \ldots, e_n) \to x, \tag{7.1}$$

является гладким отображением $\mathbb{L}(\mathbb{M}) \to \mathbb{M}$. Тогда $\mathbb{L}(\mathbb{M})$ называется *расслоением реперов* на $\mathbb{M}$.

Замечание. Забегая вперед, скажем, что расслоение реперов представляет собой главное расслоение $\mathbb{L}(\mathbb{M}) = \mathbb{P}\big(\mathbb{M}, \pi, \mathbb{GL}(n, \mathbb{R})\big)$ с базой $\mathbb{M}$, проекцией π и структурной группой $\mathbb{GL}(n, \mathbb{R})$, с которым ассоциировано касательное расслоением $\mathbb{T}(\mathbb{M})$. □

Процедура построения дифференцируемой структуры на $\mathbb{L}(\mathbb{M})$ аналогична построению дифференцируемой структуры на тензорных расслоениях. Пусть $\mathbb{U} \subset \mathbb{M}$ – некоторая карта с координатами x^α, $\alpha = 1, \ldots, n$. Координатный базис касательного расслоения ∂_α образует координатный репер в каждой точке. Тогда произвольный репер можно разложить по координатному базису

$$e_a = e^\alpha{}_a \partial_\alpha. \tag{7.2}$$

По-определению, совокупность чисел $e^\alpha{}_a$ образует невырожденную $n \times n$ матрицу, т.е. представляет собой элемент группы $\mathbb{GL}(n, \mathbb{R})$ в каждой точке $x \in \mathbb{M}$. Поэтому можно определить отображение $\chi :\ \pi^{-1}(\mathbb{U}) \to \mathbb{U} \times \mathbb{GL}(n, \mathbb{R})$ такое, что для каждой точки $(x, e_1, \ldots, e_n) \in \mathbb{L}(\mathbb{M})$ и $x \in \mathbb{U}$, $e^\alpha{}_a \in \mathbb{GL}(n, \mathbb{R})$ имеем

$$\chi(x, e_1, \ldots, e_n) = (x, e^\alpha{}_a),$$

где репер e_a задан равенством (7.2). Очевидно, что отображение χ является взаимно однозначным.

Теперь выберем атлас $\{\mathbb{U}_i\}$ на $\mathbb{M}$ с построенными выше отображениями $\{\chi_i\}$. Прообразы всех открытых подмножеств топологических произведений $\mathbb{U}_i \times \mathbb{GL}(n, \mathbb{R})$ для отображений χ_i образует базу топологии на $\mathbb{L}(\mathbb{M})$. При этом все отображения χ_i будут гомеоморфизмами.

Благодаря отображению χ_i, прообраз проекции $\pi^{-1}(\mathbb{U}_i)$ становится координатной окрестностью расслоения реперов $\mathbb{L}(\mathbb{M})$. Пусть в пересекающихся областях $\mathbb{U}_i \cap \mathbb{U}_j \neq \emptyset$ заданы координаты x^α и $x^{\alpha'}$ соответственно. Тогда координатами репера $(x, e_1, \ldots, e_n)$ в пересечении $\mathbb{U}_i \cap \mathbb{U}_j$ будут наборы из $n+n^2$ чисел $\{x^\alpha, e^\beta{}_a\}$ и $\{x^{\alpha'}, e^{\beta'}{}_a\}$, которые связаны преобразованием

$$\begin{aligned} x^{\alpha'} &= x^{\alpha'}(x), \\ e^{\alpha'}{}_a &= e^\alpha{}_a \partial_\alpha x^{\alpha'}. \end{aligned} \tag{7.3}$$

Если преобразование координат на $\mathbb{M}$ класса $\mathcal{C}^\infty$, то мы получаем бесконечно дифференцируемую структуру на $\mathbb{L}(\mathbb{M})$. Таким образом расслоение реперов становится дифференцируемым $(n+n^2)$-мерным многообразием класса $\mathcal{C}^\infty$. При этом естественная проекция $\pi : \mathbb{L}(\mathbb{M}) \to \mathbb{M}$ является гладким сюръективным отображением.

Сечение расслоения реперов $\mathbb{L}(\mathbb{M})$ мы будем обозначать $e_a(x)$. Его также можно разложить по координатному базису $e_a(x) = e^\alpha{}_a(x)\partial_\alpha$. Мы предполагаем, что все компоненты этого разложения являются гладкими функциями: $e^\alpha{}_a(x) \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{U})$.

Замечание. В формуле (7.2) компоненты разложения $e^\alpha{}_a$ рассматриваются, как координаты (числа) на пространстве главного расслоения $\mathbb{L}(\mathbb{M})$, а не как функции $e^\alpha{}_a(x)$. Формулы (7.3) – это также преобразование координат на $\mathbb{L}(\mathbb{M})$. В физической литературе сечение расслоения реперов $e_a(x)$ принято называть просто репером. Для краткости мы также будем употреблять термин репер для обозначения сечения расслоения реперов там, где это не вызывает двусмысленности. □

Отображение χ задает локально структуру прямого произведения на расслоении реперов $\mathbb{L}(\mathbb{M})$. То есть прообраз $\pi^{-1}(\mathbb{U})$ диффеоморфен прямому произведению $\mathbb{U} \times \mathbb{GL}(n, \mathbb{R})$.

Сужение отображения χ на каждый слой $\chi_x : \pi^{-1}(x) \to \mathbb{GL}(n, \mathbb{R})$ является гомоморфизмом групп. Если $x \in \mathbb{U}_i \cap \mathbb{U}_j$ тогда отображения $f_{ij}(x) = \chi_{j,x} \circ \chi_{i,x}^{-1}$ (функции перехода) представляют собой автоморфизмы группы $\mathbb{GL}(n, \mathbb{R})$. Из (7.3) следует, что преобразование $\chi_{j,x} \circ \chi_{i,x}^{-1}$ является умножением справа в группе $\mathbb{GL}(n, \mathbb{R})$ на матрицу Якоби $J_{ij}{}_\alpha{}^{\alpha'} = \partial x^{\alpha'}_{(j)} / \partial x^\alpha_{(i)}$. Это значит, что набор матриц Якоби J_{ij} представляет собой совокупность функций склейки на расслоении реперов.

Замечание. Типичным слоем расслоения реперов является группа $\mathbb{GL}(n, \mathbb{R})$, на которой нет структуры векторного пространства. Поэтому расслоение реперов не является векторным расслоением.

Поскольку каждый слой $\pi^{-1}(x)$ диффеоморфен и гомоморфен $\mathbb{GL}(n, \mathbb{R})$, то он изоморфен группе Ли: $\pi^{-1}(x) \simeq \mathbb{GL}(n, \mathbb{R})$. □

Структурная группа $\mathbb{GL}(n, \mathbb{R})$ естественным образом действует на расслоении реперов и представляет собой группу преобразований $\mathbb{L}(\mathbb{M})$. Пусть $S_a{}^b \in \mathbb{GL}(n, \mathbb{R})$. Тогда правое действие r_S структурной группы на $\mathbb{L}(\mathbb{M})$ определим следующим образом

$$r_S(x, e_a) = (x, e'_a), \quad \text{где} \quad e'_a = S_a{}^b e_b.$$

Замечание. Мы записываем правое действие структурной группы в виде матричного умножения слева. В этом нет неоднозначности, т.к. суммирование всегда проводится по одному нижнему и одному верхнему индексу, $S_a{}^b e_b = e_b S_a{}^b$. Наши обозначения вызваны принятым правилом суммирования "с десяти до четырех". Это правило является следствием общепринятой записи $dx^\alpha \partial_\alpha$. Другая запись $\partial_\alpha dx^\alpha$ может вызвать недоразумения. Кроме того, векторы репера принято нумеровать нижним индексом, поскольку координатные векторы ∂_α образуют координатный репер. □

Очевидно, что каждое преобразование r_S задает диффеоморфизм $\mathbb{L}(\mathbb{M})$ и сохраняет слои: $\pi \circ r_S = \pi$. Действие r_S называется *правым действием структурной группы*. Если $S, T \in \mathbb{GL}(n, \mathbb{R})$, то

$$r_{ST} = r_S r_T.$$

Действие группы преобразований $\mathbb{GL}(n, \mathbb{R})$ свободно, т.е. любой элемент группы, отличный от единичного, перемещает все точки многообразия $\mathbb{L}(\mathbb{M})$.

Обозначим матрицу, обратную к реперу ${e^\alpha}_a$, через ${e_\beta}^b$:

$${e^\alpha}_a {e_\alpha}^b = \delta^b_a, \qquad {e_\alpha}^a {e^\beta}_a = \delta^\beta_\alpha.$$

Тогда при преобразовании координат (7.3) на пространстве расслоения $\mathbb{L}(\mathbb{M})$ она преобразуется, как ковекторное поле

$${e_{\alpha'}}^a = \partial_{\alpha'} x^\alpha {e_\alpha}^a.$$

Отсюда следует, что 1-формы (корепер)

$$e^a = dx^\alpha {e_\alpha}^a \tag{7.4}$$

не зависят от выбора координат на $\mathbb{M}$. Это значит, что e^a являются дифференциальными 1-формами, заданными в каждой координатной окрестности согласованным образом и, следовательно, определяющими некоторую 1-форму на всем пространстве расслоения $\mathbb{L}(\mathbb{M})$. Напомним, что числа ${e^\alpha}_a$ рассматриваются в качестве координат на $\mathbb{L}(\mathbb{M})$. Поэтому ${e_\alpha}^a$ представляют собой набор хорошо определенных функций на $\mathbb{L}(\mathbb{M})$, поскольку $\det {e^\alpha}_a \neq 0$.

Пфаффова система уравнений

$$e^a = 0 \tag{7.5}$$

определяет n^2-мерное касательное подпространство $\mathbb{V}_p(\mathbb{L})$ в касательном пространстве $\mathbb{T}_p(\mathbb{L})$ к каждой точке расслоения $p = (x, e) \in \mathbb{L}(\mathbb{M})$, которое называется *вертикальным пространством*. Система уравнений (7.5) в каждой координатной окрестности эквивалентна системе уравнений

$$dx^\alpha = 0.$$

Эта система уравнений является вполне интегрируемой, и ее максимальное интегральное многообразие задается уравнениями

$$x^\alpha = \text{const},$$

т.е. является слоем $\pi^{-1}(x)$ в точке $x \in \mathbb{M}$. Это значит, что вертикальные подпространства являются касательными пространствами к слоям.

Векторное поле на пространстве расслоения $X \in \mathcal{X}(\mathbb{L})$ в компонентах имеет вид

$$X = X^\alpha \frac{\partial}{\partial x^\alpha} + {X^\alpha}_a \frac{\partial}{\partial {e^\alpha}_a}.$$

Поэтому векторное поле Y принадлежит вертикальному подпространству $Y \in \mathbb{V}_p(\mathbb{L})$ в каждой точке $p = (x, e) \in \mathbb{L}(\mathbb{M})$ тогда и только тогда, когда оно имеет компоненты только вдоль координат слоя:

$$Y = {Y^\alpha}_a \frac{\partial}{\partial {e^\alpha}_a}$$

Дифференциал π_* проекции (7.1) отображает касательные пространства $\mathbb{T}_p(\mathbb{L}) \to \mathbb{T}_x(\mathbb{M})$. Очевидно, что все векторы из вертикального подпространства $\mathbb{V}_p(\mathbb{L})$ отображаются в нулевой вектор $\mathbb{T}_x(\mathbb{M})$. Верно и обратное утверждение. Если какой либо вектор из $\mathbb{T}_p(\mathbb{L})$ отображается в нулевой вектор, то он принадлежит вертикальному подпространству. Это значит, что вертикальные подпространства являются ядром дифференциала проекции π_*.

Пусть на базе $\mathbb{M}$ задана аффинная связность ∇ или, что эквивалентно, 1-формы $\Gamma_\alpha{}^\beta = dx^\gamma \Gamma_{\gamma\alpha}{}^\beta$. Тогда ковариантный дифференциал векторного поля $e_a(x)$ равен

$$De_a = (de^\alpha{}_a + e^\beta{}_a \Gamma_\beta{}^\alpha) \otimes \partial_\alpha.$$

Если рассматривать $e^\alpha{}_a$, как координаты на $\mathbb{L}(\mathbb{M})$ (что мы и делаем), то выражение

$$De^\alpha{}_a = de^\alpha{}_a + e^\beta{}_a \Gamma_\beta{}^\alpha$$

является 1-формой на координатной окрестности $\pi^{-1}(\mathbb{U})$ расслоения реперов $\mathbb{L}(\mathbb{M})$. Поскольку 1-форма $De^\alpha{}_a$ при преобразовании координат является вектором по индексу α, то 1-форма

$$\omega_a{}^b = e_\alpha{}^b De^\alpha{}_a \tag{7.6}$$

не зависит от выбора системы координат и, значит, задает дифференциальную 1-форму на всем расслоении реперов $\mathbb{L}(\mathbb{M})$. 1-форма $\omega_a{}^b$ называется *формой связности* на расслоении реперов. Так как $(x^\alpha, e^\beta{}_a)$ являются координатами на $\mathbb{L}(\mathbb{M})$, то $(dx^\alpha, de^\beta{}_a)$ представляют собой координатный базис кокасательного пространства к $\mathbb{L}(\mathbb{M})$. Поэтому $(x^\alpha, e^\beta{}_a, dx^\alpha, de^\beta{}_a)$ задают систему координат кокасательного расслоения $\mathbb{T}^*(\mathbb{L})$ к $\mathbb{L}(\mathbb{M})$. Теперь e^a и $\omega_a{}^b$ задают $n + n^2$ дифференциальных 1-форм на расслоении реперов $\mathbb{L}(\mathbb{M})$. В каждой координатной окрестности $\pi^{-1}(\mathbb{U})$ их можно выразить в виде линейной комбинации 1-форм dx^α и $de^\alpha{}_a$, и наоборот. Поскольку 1-формы e^a и $\omega_a{}^b$ линейно независимы, то они задают поле корепера на всем пространстве $\mathbb{L}(\mathbb{M})$. Дуальный к нему базис определяет поле репера на пространстве расслоения $\mathbb{L}(\mathbb{M})$ глобально.

Замечание. В общем случае сечение расслоения реперов $e_a(x)$ может не существовать глобально. Например, на двумерной сфере $\mathbb{S}^2$ не существует непрерывного векторного поля, которое не обращается в нуль ни в одной точке (теорема 11.2.1). Следовательно, глобального сечения $\mathbb{L}(\mathbb{S}^2)$ не существует. В то же время, поскольку на произвольном многообразии $\mathbb{M}$ существует аффинная связность, то на расслоении реперов $\mathbb{L}(\mathbb{M})$ всегда существует корепер e^a глобально. В этом смысле многообразие $\mathbb{L}(\mathbb{M})$ устроено проще, чем $\mathbb{M}$. □

В локальной системе координат из определения 1-форм e^a и $\omega_a{}^b$ следует

$$dx^\alpha = e^a e^\alpha{}_a,$$
$$de^\alpha{}_a = -e^\beta{}_a \Gamma_\beta{}^\alpha + \omega_a{}^b e^\alpha{}_b.$$

Взятие внешней производной от равенств (7.4) и (7.6) приводит к *структурным уравнениям* для аффинной связности

$$de^a - e^b \wedge \omega_b{}^a = \frac{1}{2} e^b \wedge e^c \, T_{bc}{}^a, \tag{7.7}$$

$$d\omega_a{}^b - \omega_a{}^c \wedge \omega_c{}^b = \frac{1}{2} e^c \wedge e^d \, R_{cda}{}^b, \tag{7.8}$$

где $T_{bc}{}^{a} = e^{\beta}{}_{b} e^{\gamma}{}_{c} T_{\beta\gamma}{}^{\alpha} e_{\alpha}{}^{a}$ и $R_{cda}{}^{b} = e^{\gamma}{}_{c} e^{\delta}{}_{d} e^{\alpha}{}_{a} R_{\gamma\delta\alpha}{}^{\beta} e_{\beta}{}^{b}$ – компоненты тензоров кручения и кривизны. Компоненты тензоров кручения $T_{\beta\gamma}{}^{\alpha}$ и кривизны $R_{\gamma\delta\alpha}{}^{\beta}$ в координатном базисе были определены ранее (6.37) и (6.35). Введем обозначения для 2-форм кручения и кривизны:

$$\begin{aligned} T^{a} &:= \frac{1}{2} e^{b} \wedge e^{c} T_{bc}{}^{a}, \\ R_{a}{}^{b} &:= \frac{1}{2} e^{c} \wedge e^{d} R_{cda}{}^{b}. \end{aligned} \tag{7.9}$$

Взятие внешней производной от уравнений структуры (7.7), (7.8) приводит к *тождествам Бианки* для аффинной связности:

$$\begin{aligned} dT^{a} + T^{b} \wedge \omega_{b}{}^{a} &= e^{b} \wedge R_{b}{}^{a}, \\ dR_{a}{}^{b} + R_{a}{}^{c} \wedge \omega_{c}{}^{b} - \omega_{a}{}^{c} \wedge R_{c}{}^{b} &= 0. \end{aligned} \tag{7.10}$$

Второе из этих тождеств совпадает с (6.21). В компонентах тождества Бианки будут подробно рассмотрены в разделе 8.9.1.

Замечание. Структурные уравнения (7.7) и (7.8) можно принять за определение тензоров кручения и кривизны. □

В координатном базисе $e^{a} \to dx^{\alpha}$, $\omega_{a}{}^{b} \to \Gamma_{\alpha}{}^{\beta} = dx^{\gamma} \Gamma_{\gamma\alpha}{}^{\beta}$ структурные уравнения принимают вид

$$\begin{aligned} -dx^{\beta} \wedge \Gamma_{\beta}{}^{\alpha} &= \frac{1}{2} dx^{\beta} \wedge dx^{\gamma}\, T_{\beta\gamma}{}^{\alpha}, \\ d\Gamma_{\alpha}{}^{\beta} - \Gamma_{\alpha}{}^{\gamma} \wedge \Gamma_{\gamma}{}^{\beta} &= \frac{1}{2} dx^{\gamma} \wedge dx^{\delta}\, R_{\gamma\delta\alpha}{}^{\beta}, \end{aligned} \tag{7.11}$$

где в правых частях стоят тензоры кручения $T_{\beta\gamma}{}^{\alpha}$ и кривизны $R_{\gamma\delta\alpha}{}^{\beta}$ и учтено равенство $ddx^{\alpha} = 0$.

Теорема 7.0.1. *Пусть на расслоении реперов $\mathbb{L}(\mathbb{M})$ заданы n^2 дифференциальных 1-форм $\omega_{a}{}^{b}$, которые вместе с корепером e^{a} удовлетворяют структурным уравнениям (7.7), (7.8), где $T_{bc}{}^{a}$ и $R_{cda}{}^{b}$ – некоторые функции, определенные на $\mathbb{L}(\mathbb{M})$. Тогда на расслоении реперов существует аффинная связность ∇ такая, что выполнено равенство (7.6).*

Доказательство. См., например, [**?**]. □

Замечание. От функций, определяющих кручение и кривизну, нет надобности требовать выполнения тождеств Бианки, т.к. они являются следствием структурных уравнений, выполнение которых является условием теоремы. □

Ранее было отмечено, что пфаффова система уравнений $e^{a} = 0$ определяет распределение вертикальных подпространств $\mathbb{V}_{p}(\mathbb{L}) \subset \mathbb{T}_{p}(\mathbb{L})$ на расслоении реперов $\mathbb{L}(\mathbb{M})$. В каждой точке $(x, e) \in \mathbb{L}(\mathbb{M})$ система пфаффовых уравнений

$$\omega_{a}{}^{b} = 0 \tag{7.12}$$

определяет n-мерное касательное подпространство $\mathbb{H}_{p}(\mathbb{L}) \subset \mathbb{T}_{p}(\mathbb{L})$, которое называется *горизонтальным*. Таким образом, мы имеем распределение горизонтальных подпространств $\mathbb{H}(\mathbb{L})$, однозначно определенное аффинной связностью ∇ на расслоении реперов $\mathbb{L}(\mathbb{M})$. Оно имеет следующие свойства.

Теорема 7.0.2. *Пусть задано расслоение реперов $\mathbb{L}(\mathbb{M})$ и на базе $\mathbb{M}$ определена аффинная связность ∇. Тогда определены поля вертикальных $\mathbb{V}_p(\mathbb{L})$ и горизонтальных $\mathbb{H}_p(\mathbb{L})$ подпространств, которые удовлетворяют свойствам:*

1) В каждой точке $(x, e) \in \mathbb{L}(\mathbb{M})$ касательное пространство $\mathbb{T}_p(\mathbb{L})$ разлагается в прямую сумму

$$\mathbb{T}_p(\mathbb{L}) = \mathbb{V}_p(\mathbb{L}) \oplus \mathbb{H}_p(\mathbb{L}). \tag{7.13}$$

При этом образ горизонтального пространства $\mathbb{H}_p(\mathbb{L})$ при проекции π изоморфен касательному пространству к базе $\mathbb{T}_x(\mathbb{M})$.

2) Горизонтальные пространства инвариантны относительно правого действия группы преобразований r_S, $S \in \mathbb{GL}(n, \mathbb{R})$. То есть

$$(r_S)_* \mathbb{H}_p(\mathbb{L}) = \mathbb{H}_{r_S(x,p)}(\mathbb{L}).$$

Доказательство. Докажем свойство 1). Поскольку сумма размерностей горизонтального $\mathbb{H}_p(\mathbb{L})$ и вертикального $\mathbb{V}_p(\mathbb{L})$ подпространств равна размерности касательного пространства $\mathbb{T}_p(\mathbb{L})$, то достаточно доказать, что $\mathbb{H}_p(\mathbb{L}) \cap \mathbb{V}_p(\mathbb{L}) = \emptyset$. От противного. Пусть $X \in \mathbb{H}_p(\mathbb{L}) \cap \mathbb{V}_p(\mathbb{L})$. Тогда, по-определению, выполнены уравнения

$$e^a(X) = 0, \qquad \omega_a{}^b(X) = 0.$$

Поскольку 1-формы $\{e^a, \omega_b{}^c\}$ образуют базис кореперов на $\mathbb{L}(\mathbb{M})$, то $X = 0$. Это доказывает разложение (7.13). Поскольку проекция π является гладким и сюрьективным отображением, то ее дифференциал π_* является сюрьективным гомоморфизмом. Поскольку $\pi_*(\mathbb{V}_p(\mathbb{L})) = 0$, то отображение $\pi_* : \mathbb{H}_p(\mathbb{L}) \to \mathbb{T}_x(\mathbb{M})$ является изоморфизмом.

Для доказательства свойства 2) необходимо проверить, что правое действие группы преобразований на 1-формы $\omega_a{}^b$ имеет вид

$$(r_S)^* \omega_a{}^b = S_a{}^c \omega_c{}^d S^{-1b}_d.$$

Действительно, это следует из определения (7.6) и равенства

$$de'^{\alpha}{}_a = \frac{\partial e'^{\alpha}{}_a}{\partial e^{\beta}{}_b} de^{\beta}{}_b = S_a{}^b de^{\alpha}{}_b.$$

Поскольку поле горизонтальных подпространств $\mathbb{H}(\mathbb{L})$ является аннигилятором подпространства $\omega_a{}^b$, то из правила действия левых преобразований следует свойство 2). □

Верно также обратное утверждение. Если в касательном расслоении $\mathbb{T}(\mathbb{L})$ задано дифференцируемое n-мерное распределение горизонтальных подпространств $\mathbb{H}$, удовлетворяющих свойствам 1) и 2), то на $\mathbb{M}$ существует аффинная связность ∇ такая, что $\mathbb{H}$ является распределением горизонтальных подпространств расслоения реперов $\mathbb{L}(\mathbb{M})$ для связности ∇. Поэтому, с точки зрения расслоения реперов, задание аффинной связности эквивалентно заданию распределения горизонтальных подпространств со свойствами 1), 2). Далее эти свойства лягут в основу определения связности на главных расслоениях общего вида.

Замечание. Поскольку аффинная связность ∇ зависит дифференцируемо от $p \in \mathbb{L}(\mathbb{M})$, то поле горизонтальных подпространств $\mathbb{H}_p(\mathbb{L})$ зависит дифференцируемо от p. □

В формулах (7.7)–(7.10) все формы рассматривались на пространстве расслоения $\mathbb{L}(\mathbb{M})$. В частности компоненты тензоров кручения $T_{bc}{}^{a}$ и кривизны $R_{cda}{}^{b}$ в структурных уравнениях (7.7) и (7.8) явно зависят от координат слоя $e^{\alpha}{}_{a}$. Эти формы можно спустить на базу с помощью возврата отображения. Рассмотрим сечение $\sigma : \mathbb{M} \to \mathbb{L}(\mathbb{M})$, которому в локальных координатах соответствует репер $e^{\alpha}{}_{a}(x)$. Тогда дифференциал сечения σ_* отображает касательные векторы к базе в касательные векторы к сечению:

$$\mathcal{X}(\mathbb{M}) \ni X = X^{\alpha}\partial_{\alpha} \;\mapsto\; \sigma_* X = X^{\alpha}\partial_{\alpha} + X^{\beta}\partial_{\beta}e^{\alpha}{}_{a}\frac{\partial}{\partial e^{\alpha}{}_{a}} \in \mathcal{X}(\sigma(\mathbb{M})).$$

Следовательно, возврат отображения σ^* спускает форму связности для каждого сечения на базу:

$$\sigma^*\omega_{a}{}^{b} := dx^{\alpha}\omega_{\alpha a}{}^{b} = dx^{\alpha}e_{\gamma}{}^{b}(\partial_{\alpha}e^{\gamma}{}_{a} + e^{\beta}{}_{a}\Gamma_{\alpha\beta}{}^{\gamma}). \tag{7.14}$$

Форма $dx^{\alpha}\omega_{\alpha a}{}^{b}$ называется *локальной формой связности* на расслоении реперов. Она получается из формы связности (7.6) простой заменой: $e^{\alpha}{}_{a} \mapsto e^{\alpha}{}_{a}(x)$ и $de^{\alpha}{}_{a} \mapsto dx^{\beta}\partial_{\beta}e^{\alpha}{}_{a}$. Аналогично спускаются на базу 2-формы кручения и кривизны (7.9):

$$T^{a} = \frac{1}{2}dx^{\alpha}\wedge dx^{\beta}\,T_{\alpha\beta}{}^{a} = de^{a} - e^{b}\wedge\omega_{b}{}^{a}, \tag{7.15}$$

$$R_{a}{}^{b} = \frac{1}{2}dx^{\alpha}\wedge dx^{\beta}\,R_{\alpha\beta a}{}^{b} = d\omega_{a}{}^{b} - \omega_{a}{}^{c}\wedge\omega_{c}{}^{b}, \tag{7.16}$$

где введены 1-формы локальной связности и корепера:

$$\omega_{a}{}^{b} = dx^{\alpha}\omega_{\alpha a}{}^{b}, \qquad e^{a} = dx^{\alpha}e_{\alpha}{}^{a}, \tag{7.17}$$

и

$$T_{\alpha\beta}{}^{a} = \partial_{\alpha}e_{\beta}{}^{a} - e_{\alpha}{}^{b}\omega_{\beta b}{}^{a} - (\alpha\leftrightarrow\beta), \tag{7.18}$$

$$R_{\alpha\beta a}{}^{b} = \partial_{\alpha}\omega_{\beta a}{}^{b} - \omega_{\alpha a}{}^{c}\omega_{\beta c}{}^{b} - (\alpha\leftrightarrow\beta). \tag{7.19}$$

2-формы (7.15) и (7.16) называются *локальными формами* кручения и кривизны.

Замечание. Для локальных форм мы сохранили прежние обозначения, чтобы не вводить новых. Фактически, в приложениях при проведении вычислений используются локальные формы, заданные на базе $\mathbb{M}$, а не на расслоении реперов $\mathbb{L}(\mathbb{M})$. □

Тождества Бианки (7.10) после спуска на базу имеют точно такой же вид, только вместо компонент корепера $e_{\alpha}{}^{a}$ надо рассматривать сечение $e_{\alpha}{}^{a}(x)$, вместо формы связности $\omega_{a}{}^{b}$, определенную в (7.6), – локальную форму связности $dx^{\alpha}\omega_{\alpha a}{}^{b}$ и вместо форм кручения и кривизны – соответствующие им локальные формы.

Поля $e_{\alpha}{}^{a}(x)$ и $\omega_{\alpha a}{}^{b}(x)$ в аффинной геометрии называются *переменными Картана* и часто используются в приложениях. Формулы (7.18) и (7.16) дают выражение для тензоров кручения и кривизны в переменных Картана.

Глава 8

Аффинная геометрия. Локальное рассмотрение

В современной дифференциальной геометрии принят бескоординатный язык. Это оправдано тем, что все геометрические объекты, например, тензорные поля, являются понятиями, которые не зависят от выбора системы координат. Этот язык удобен для определений и формулировки утверждений. Однако, он абстрактен, и требуется немалое время для его усвоения. Кроме того, при проведении вычислений, особенно в моделях математический физики, используется координатный подход, в котором геометрические объекты отождествляются с набором своих компонент. Этот язык действительно необходим для проведения вычислений и является более наглядным. В настоящем разделе мы дадим определения и опишем основные свойства объектов аффинной геометрии в компонентах. По сути дела это означает, что мы рассматриваем топологически тривиальное многообразие $\mathbb{M}$, которое диффеоморфно евклидову пространству $\mathbb{R}^n$ и покрывается одной картой. Это не значит, что координатный подход является менее строгим. Как только установлено, что некоторый объект или утверждение не зависят от выбора системы координат в $\mathbb{R}^n$, то все сказанное сразу переносится на нетривиальные многообразия.

8.1 Локальное определение аффинной связности

Ввиду важности понятия аффинной связности покажем, как она вводится локально без обращения к общей теории связностей в векторных расслоениях. Пусть на многообразии $\mathbb{M}$, $\dim \mathbb{M} = n$ в некоторой карте заданы: функция $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{M})$, векторное поле $X = X^\alpha \partial_\alpha \in \mathcal{X}(\mathbb{M})$ и 1-форма $A = dx^\alpha A_\alpha \in \Lambda_1(\mathbb{M})$. Пусть на этом многообразии задана также аффинная связность ∇. Тогда в компонентах ковариантные производные имеют вид:

$$\nabla_\alpha f = \partial_\alpha f \tag{8.1}$$

$$\nabla_\alpha X^\beta = \partial_\alpha X^\beta + X^\gamma \Gamma_{\alpha\gamma}{}^\beta, \tag{8.2}$$

$$\nabla_\alpha A_\beta = \partial_\alpha A_\beta - \Gamma_{\alpha\beta}{}^\gamma A_\gamma, \tag{8.3}$$

где $\Gamma_{\alpha\beta}{}^\gamma(x)$ – компоненты локальной формы аффинной связности, которые, мы предполагаем, являются гладкими функциями от координат x^α. То есть ковариантная производная для скалярного поля совпадает с обычной частной производной, а для векторного поля и 1-формы появляются дополнительные слагаемые, линейные по

компонентам. Отметим, что дополнительные слагаемые в (8.2) и (8.3) имеют разные знаки.

Покажем, что ковариантная производная от компонент векторного поля преобразуется, как тензор. Рассмотрим преобразование координат (2.18), тогда компоненты векторного поля преобразуется по правилу (3.9). Дифференцируя соотношение (3.9) по $x^{\beta'}$, получаем два слагаемых

$$\partial_{\beta'} X^{\alpha'} = \partial_{\beta'} x^{\beta} \partial_{\beta} X^{\alpha} \partial_{\alpha} x^{\alpha'} + \partial_{\beta'} x^{\beta} X^{\alpha} \partial^2_{\beta\alpha} x^{\alpha'}. \tag{8.4}$$

Первое слагаемое в правой части соответствует тензорному закону преобразования для производной от векторного поля, в то время как второе слагаемое этот закон нарушает. Дополнительное слагаемое обращается в нуль только для линейных (т.е. аффинных) преобразований координат, и поэтому в аффинном пространстве частная производная от тензора снова дает тензор. Чтобы получить тензорный закон преобразования в общем случае вводится понятие ковариантной производной, которая содержит дополнительное слагаемое в (8.2). Если потребовать, чтобы ковариантная производная после преобразования координат имела тот же вид с некоторыми новыми компонентами $\Gamma_{\beta'\gamma'}{}^{\alpha'}$,

$$\partial_{\beta'} X^{\alpha'} + \Gamma_{\beta'\gamma'}{}^{\alpha'} X^{\gamma'} = \partial_{\beta'} x^{\beta} (\partial_{\beta} X^{\alpha} + \Gamma_{\beta\gamma}{}^{\alpha} X^{\gamma}) \partial_{\alpha} x^{\alpha'},$$

то с учетом (8.4) получим следующий закон преобразования компонент аффинной связности

$$\Gamma_{\beta'\gamma'}{}^{\alpha'} = \partial_{\beta'} x^{\beta} \partial_{\gamma'} x^{\gamma} \Gamma_{\beta\gamma}{}^{\alpha} \partial_{\alpha} x^{\alpha'} - \partial_{\beta'} x^{\beta} \partial_{\gamma'} x^{\gamma} \partial^2_{\beta\gamma} x^{\alpha'}, \tag{8.5}$$

С учетом тождества

$$\partial_{\alpha} (\partial_{\beta} x^{\beta'} \partial_{\beta'} x^{\gamma}) = \partial_{\alpha} \delta^{\beta}_{\gamma} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \partial^2_{\alpha\beta} x^{\beta'} = -\partial_{\alpha} x^{\alpha'} \partial_{\beta} x^{\beta'} \partial^2_{\alpha'\beta'} x^{\gamma} \partial_{\gamma} x^{\beta'}$$

закон преобразования (8.5) можно переписать в эквивалентной форме (6.31), отличающейся вторым слагаемым.

Закон преобразования компонент аффинной связности отличается от тензорного закона наличием неоднородных слагаемых в (6.31) и (8.5), которые содержат вторые производные от функций перехода. Если ограничить класс допустимых преобразований координат аффинными, то аффинная связность будет преобразовываться как тензор.

Сами по себе компоненты аффинной связности не являются компонентами тензора, однако они позволяют строить новые тензорные поля из заданных с помощью ковариантного дифференцирования. Собственно, название “ковариантное” и отражает это обстоятельство. Нетрудно проверить, что ковариантная производная от 1-формы (8.3) является тензорным полем второго ранга типа $(0,2)$. Ковариантное дифференцирование было продолжено на тензоры произвольного ранга с помощью формул (6.29). В компонентах это выглядит следующим образом. Помимо обычной частной производной в ковариантную производную входят слагаемые с компонентами аффинной связности со знаком плюс для каждого контравариантного и минус для каждого ковариантного индекса:

$$\begin{aligned}\nabla_{\alpha} K_{\beta_1\ldots\beta_s}{}^{\gamma_1\ldots\gamma_r} = \partial_{\alpha} K_{\beta_1\ldots\beta_s}{}^{\gamma_1\ldots\gamma_r} &- \Gamma_{\alpha\beta_1}{}^{\delta} K_{\delta\beta_2\ldots\beta_s}{}^{\gamma_1\ldots\gamma_r} - \ldots - \Gamma_{\alpha\beta_s}{}^{\delta} K_{\beta_1\ldots\beta_{s-1}\delta}{}^{\gamma_1\ldots\gamma_r} \\ &+ K_{\beta_1\ldots\beta_s}{}^{\delta\gamma_2\ldots\gamma_r} \Gamma_{\alpha\delta}{}^{\gamma_1} + \ldots + K_{\beta_1\ldots\beta_s}{}^{\gamma_1\ldots\gamma_{r-1}\delta} \Gamma_{\alpha\delta}{}^{\gamma_r}.\end{aligned}$$

Пример 8.1.1. Для тензора второго ранга типа $(1,1)$ имеем

$$\nabla_\alpha K_\beta{}^\gamma = \partial_\alpha K_\beta{}^\gamma - \Gamma_{\alpha\beta}{}^\delta K_\delta{}^\gamma + \Gamma_{\alpha\delta}{}^\gamma K_\beta{}^\delta. \tag{8.6}$$

В частном случае, ковариантная производная от символа Кронекера (3.48) тождественно равна нулю

$$\nabla_\alpha \delta^\gamma_\beta = 0,$$

поскольку равна нулю частная производная $\partial_\alpha \delta^\gamma_\beta = 0$, а слагаемые со связностью сокращаются. То есть символ Кронекера ковариантно постоянен (параллелен) при любой аффинной связности. □

Можно показать с помощью прямых вычислений (если доказательство в общем виде, которое было дано ранее, кого то не убеждает), что определенная таким образом ковариантная производная от тензора произвольного типа (r,s) действительно дает тензор типа $(r,s+1)$.

Поскольку произвольный тензор типа (r,s) является полилинейным отображением (3.50), то вид ковариантной производной от тензорного поля в компонентах однозначно определяется четырьмя условиями: видом ковариантной производной от скалярной функции, векторного и ковекторного полей (8.1)–(8.3) и правилом Лейбница (6.34).

Пример 8.1.2. Найдем вид ковариантной производной от тензорного поля второго ранга $K_\alpha{}^\beta$. Ковариантная производная от функции $K_\gamma{}^\beta X^\gamma A_\beta \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{M})$, где $X^\gamma \in \mathcal{X}(\mathbb{M})$ и $A_\beta \in \Lambda_1(\mathbb{M})$ – произвольные векторное и ковекторное поля, совпадает с обычной:

$$\nabla_\alpha (K_\gamma{}^\beta X^\gamma A_\beta) = \partial_\alpha (K_\gamma{}^\beta X^\gamma A_\beta).$$

Воспользовавшись правилом Лейбница и видом ковариантных производных (8.2), (8.3), получим формулу для ковариантной производной от тензора второго ранга (8.6). □

Ковариантная производная коммутирует с произвольным свертыванием:

$$\nabla_\alpha (\delta^{\beta_j}_{\alpha_i} K_{\beta_1\cdots\beta_s}{}^{\alpha_1\cdots\alpha_r}) = \delta^{\beta_j}_{\alpha_i} \nabla_\alpha K_{\beta_1\cdots\beta_s}{}^{\alpha_1\cdots\alpha_r}, \qquad 1 \le i \le r,\ 1 \le j \le s.$$

что следует из ковариантного постоянства символа Кронекера. В частном случае,

$$\partial_\alpha (X^\beta A_\beta) = \nabla_\alpha (X^\beta A_\beta) = (\nabla_\alpha X^\beta) A_\beta + X^\beta (\nabla_\alpha A_\beta).$$

Произвольному векторному полю можно поставить в соответствие бесконечно малую величину

$$DX^\alpha = dx^\beta \nabla_\beta X^\alpha = dx^\beta (\partial_\beta X^\alpha + \Gamma_{\beta\gamma}{}^\alpha X^\gamma), \tag{8.7}$$

которая называется *ковариантным дифференциалом*. Аналогично определяется ковариантный дифференциал для произвольного тензорного поля. Для скалярной функции ковариантный дифференциал совпадает с обычным.

Рассмотрим произвольную гладкую кривую $\gamma(t) = \{x^\alpha(t)\}$ в римановом пространстве с положительно определенной метрикой. Тогда длина дуги кривой отлична от нуля

$$ds = dt\sqrt{\dot{x}^2} \neq 0, \qquad \text{где } \dot{x}^2 = \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta g_{\alpha\beta}. \tag{8.8}$$

Выражение

$$\frac{DX^\alpha}{ds} = T^\beta \nabla_\beta X^\alpha, \tag{8.9}$$

где

$$T^\alpha = \frac{\dot{x}^\alpha}{\sqrt{\dot{x}^2}}, \qquad T^2 = 1, \tag{8.10}$$

– единичный касательный вектор к кривой, называется *ковариантной производной вектора X вдоль кривой γ*.

Если метрика имеет лоренцеву сигнатуру, то ковариантную производную можно определить либо вдоль времениподобных, либо вдоль пространственноподобных кривых. В последнем случае $\dot{x}^2$ заменяется на $-\dot{x}^2$ под знаком корня.

Аналогично определяется ковариантная производная вдоль кривой от произвольного тензорного поля.

Пусть на многообразии задано векторное поле $X \in \mathcal{X}(\mathbb{M})$. Тогда *производная вдоль векторного поля X* от тензорного поля $T_{\alpha_1\ldots\alpha_r}{}^{\beta_1\ldots\beta_s}$ типа (r,s) дает тензорное поле того же типа с компонентами

$$(\nabla_X T)_{\alpha_1\ldots\alpha_r}{}^{\beta_1\ldots\beta_s} = X^\gamma \nabla_\gamma T_{\alpha_1\ldots\alpha_r}{}^{\beta_1\ldots\beta_s}. \tag{8.11}$$

Пример 8.1.3. В частности, для двух векторных полей имеем

$$(\nabla_X Y)^\alpha = X^\beta \nabla_\beta Y^\alpha. \quad \square \tag{8.12}$$

Рассмотренная выше ковариантная производная от тензора вдоль кривой является частным случаем ковариантной производной вдоль векторного поля, которое касается кривой. Ковариантная производная вдоль кривой определена только в тех точках многообразия $\mathbb{M}$, через которые проходит кривая.

Наличие неоднородного слагаемого в законе преобразования аффинной связности (8.5) или (6.31) не позволяет их складывать как тензорные поля и умножать даже на числа. Например, если на многообразии задано две аффинные связности $\Gamma_{1\alpha\beta}{}^\gamma$ и $\Gamma_{2\alpha\beta}{}^\gamma$, то их сумма в общем случае связностью не является. В то же время нетрудно проверить, что сумма

$$\Gamma_{\alpha\beta}{}^\gamma = f\Gamma_{1\alpha\beta}{}^\gamma + (1-f)\Gamma_{2\alpha\beta}{}^\gamma, \tag{8.13}$$

где $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{M})$, является связностью.

Разность двух аффинных связностей является тензорным полем типа $(1,2)$, т.к. неоднородные слагаемые сокращаются. В частности, определим *вариацию* аффинной связности $\delta\Gamma_{\alpha\beta}{}^\gamma$ как разность двух близких связностей (близость определяется либо поточечно, $\delta\Gamma_{\alpha\beta}{}^\gamma \ll 1$ для всех компонент, либо каким-то другим образом в зависимости от задачи). Тогда вариация связности будет является тензорным полем.

8.2 Кручение и неметричность

Продолжим локальное изучение аффинной связности. В общем случае связность $\Gamma_{\alpha\beta}{}^\gamma$ никакой симметрии по индексам не имеет и никак не связана с метрикой $g_{\alpha\beta}$, поскольку эти понятия определяют на многообразии $\mathbb{M}$ разные геометрические операции. А именно, метрика многообразия определяет в каждой точке скалярное произведение векторов из касательного пространства, а аффинная связность определяет ковариантное дифференцирование и параллельный перенос тензоров. Геометрия на многообразии $\mathbb{M}$ определяется метрикой и аффинной связностью. Будем говорить, что на $\mathbb{M}$ задана *аффинная геометрия*, если заданы гладкие метрика и аффинная связность, т.е. задано три объекта $(\mathbb{M}, g, \Gamma)$.

Замечание. В общем случае метрика и аффинная связность задаются произвольным образом и являются совершенно независимыми геометрическими объектами. Поэтому при построении физических моделей их можно рассматривать как независимые поля, имеющие разную физическую интерпретацию. В настоящее время принято считать, что метрика описывает гравитационное взаимодействие. Физический смысл аффинной связности пока неясен. Это связано с тем, что физическая интерпретация связности зависит от конкретной модели, а соответствующие модели сложны с математической точки зрения, и в настоящее время изучены недостаточно хорошо. □

По-определению, кручение многообразия в локальной системе координат равно антисимметричной части аффинной связности (**??**). Из закона преобразования связности (6.31) следует, что кручение является тензорным полем типа $(1,2)$.

Если на многообразии задана аффинная геометрия, то можно построить *тензор неметричности* $Q_{\alpha\beta\gamma}$, который, по-определению, равен ковариантной производной от метрики

$$-Q_{\alpha\beta\gamma} := \nabla_\alpha g_{\beta\gamma} = \partial_\alpha g_{\beta\gamma} - \Gamma_{\alpha\beta}{}^\delta g_{\delta\gamma} - \Gamma_{\alpha\gamma}{}^\delta g_{\beta\delta}. \tag{8.14}$$

Тензор неметричности, по-построению, симметричен относительно перестановки двух последних индексов

$$Q_{\alpha\beta\gamma} = Q_{\alpha\gamma\beta}.$$

Заметим, что для определения неметричности необходимы оба объекта: и метрика, и связность.

Таким образом по заданной метрике и аффинной связности построено два тензорных поля: кручение и тензор неметричности. Докажем, что по заданной метрике, кручению и тензору неметричности можно однозначно восстановить соответствующую аффинную связность. Уравнение (8.14) всегда можно решить относительно связности Γ. Действительно, линейная комбинация

$$\nabla_\alpha g_{\beta\gamma} + \nabla_\beta g_{\gamma\alpha} - \nabla_\gamma g_{\alpha\beta}$$

приводит к следующему общему решению для аффинной связности с опущенным верхним индексом

$$\begin{aligned}\Gamma_{\alpha\beta\gamma} := \Gamma_{\alpha\beta}{}^\delta g_{\delta\gamma} = \frac{1}{2}(\partial_\alpha g_{\beta\gamma} + \partial_\beta g_{\gamma\alpha} - \partial_\gamma g_{\alpha\beta}) + \frac{1}{2}(T_{\alpha\beta\gamma} - T_{\beta\gamma\alpha} + T_{\gamma\alpha\beta}) \\ + \frac{1}{2}(Q_{\alpha\beta\gamma} + Q_{\beta\gamma\alpha} - Q_{\gamma\alpha\beta}).\end{aligned} \tag{8.15}$$

Правая часть этого равенства симметрична по индексам α и β за исключением одного слагаемого, $\frac{1}{2}T_{\alpha\beta\gamma}$, что согласуется с определением тензора кручения (**??**). Заметим, что слагаемые с метрикой и тензором неметричности в (8.15) имеют одинаковый порядок индексов и знаков, а слагаемые с кручением при том же порядке индексов отличаются знаками. Таким образом, для того, чтобы на многообразии $\mathbb{M}$ задать аффинную геометрию, необходимо и достаточно задать три тензорных поля: метрику, кручение и неметричность. Подчеркнем еще раз, что все три объекта можно задать совершенно независимым образом, и в моделях математической физики их можно рассматривать как независимые динамические переменные.

Второе слагаемое в (8.15)

$$K_{\alpha\beta\gamma} = \frac{1}{2}(T_{\alpha\beta\gamma} - T_{\beta\gamma\alpha} + T_{\gamma\alpha\beta}) \tag{8.16}$$

называется тензором *кокручения*.

Заметим, что уравнение (8.14) симметрично по индексам β, γ, т.е. число алгебраических уравнений в точности равно числу компонент симметричной части связности $\Gamma_{\beta\gamma}{}^{\alpha}$. Поэтому весь произвол в решении этой системы уравнений определяется тензором кручения.

Вычислив ковариантную производную от тождества $g^{\alpha\beta}g_{\beta\gamma} = \delta^{\alpha}_{\gamma}$, находим, что ковариантная производная от обратной метрики,

$$\nabla_\alpha g^{\beta\gamma} = Q_\alpha{}^{\beta\gamma}, \qquad Q_\alpha{}^{\beta\gamma} = g^{\beta\delta}g^{\gamma\epsilon}Q_{\alpha\delta\epsilon}, \tag{8.17}$$

отличается знаком от (8.14). Если тензор неметричности отличен от нуля, то подъем и опускание индексов не коммутирует с ковариантным дифференцированием, например,

$$\nabla_\alpha X_\beta = (\nabla_\alpha X^\gamma)g_{\gamma\beta} - Q_{\alpha\gamma\beta}X^\gamma$$

Для задания аффинной геометрии на многообразии необходимо задать метрику и аффинную связность. Рассмотрим частные случаи аффинной геометрии.

При попытке объединить гравитацию с электромагнетизмом Г. Вейль рассмотрел тензор неметричности специального вида [**?**]

$$Q_{\alpha\beta\gamma} = W_\alpha g_{\beta\gamma}, \tag{8.18}$$

где W_α – *форма Вейля*, отождествленная с электромагнитным потенциалом, (при этом предполагалось, что кручение тождественно равно нулю). Будем говорить, что на многообразии задана *геометрия Римана–Картана–Вейля*, если на нем задана метрика, кручение и неметричность специального вида (8.18).

Если тензор неметричности тождественно равен нулю, а метрика и кручение нетривиальны, то будем говорить, что на многообразии задана *геометрия Римана–Картана*. В этом случае из (8.15) следует, что аффинная связность однозначно определяется метрикой и кручением

$$\Gamma_{\alpha\beta\gamma} = \frac{1}{2}(\partial_\alpha g_{\beta\gamma} + \partial_\beta g_{\alpha\gamma} - \partial_\gamma g_{\alpha\beta}) + \frac{1}{2}(T_{\alpha\beta\gamma} - T_{\beta\gamma\alpha} + T_{\gamma\alpha\beta}). \tag{8.19}$$

Такую связность называют *метрической*, поскольку ковариантная производная от метрики тождественно равна нулю,

$$\nabla_\alpha g_{\beta\gamma} = \partial_\alpha g_{\beta\gamma} - \Gamma_{\alpha\beta}{}^{\delta}g_{\delta\gamma} - \Gamma_{\alpha\gamma}{}^{\delta}g_{\beta\delta} = 0. \tag{8.20}$$

Это равенство называют *условием метричности*, и оно обеспечивает коммутативность ковариантного дифференцирования с опусканием и подъемом индексов. Условие метричности (8.20) эквивалентно условию $\nabla_\alpha g^{\beta\gamma} = 0$ в силу (8.17).

Если тензор кручения равен нулю, $T_{\alpha\beta}{}^{\gamma} = 0$, а неметричность имеет вид (8.18), то будем говорить, что задана геометрия *Римана–Вейля*. В геометрии Римана–Вейля выражение для аффинной связности можно записать в следующем виде:

$$\Gamma_{\alpha\beta\gamma} = \frac{1}{2}\left[(\partial_\alpha + W_\alpha)g_{\beta\gamma} + (\partial_\beta + W_\beta)g_{\alpha\gamma} - (\partial_\gamma + W_\gamma)g_{\alpha\beta}\right]. \tag{8.21}$$

При этом она симметрична по двум первым индексам.

Если и тензор неметричности, и кручение тождественно равны нулю, а метрика нетривиальна и положительно определена, то будем говорить, что на многообразии

задана *геометрия Римана*. В этом случае метрическая связность также симметрична по двум первым индексам и однозначно определяется метрикой

$$\widetilde{\Gamma}_{\alpha\beta}{}^{\gamma} = \frac{1}{2} g^{\gamma\delta}(\partial_\alpha g_{\beta\delta} + \partial_\beta g_{\alpha\delta} - \partial_\delta g_{\alpha\beta}) \tag{8.22}$$

Эта связность называется *связностью Леви–Чивита* или *символами Кристоффеля*. Заметим, что в определении метрики мы требовали невырожденность матрицы $g_{\alpha\beta}$. Из выражения для символов Кристоффеля видно, что это условие необходимо, в частности, для того, чтобы метрика определяла связность Леви–Чивиты. Если метрика не является положительно определенной, то геометрия называется *псевдоримановой*. Для связности при этом сохраняются прежние названия.

Замечание. Если на многообразии задана аффинная геометрия общего вида $(\mathbb{M}, g, \Gamma)$, то на нем определены две связности: аффинная связность Γ и связность Леви–Чивиты $\widetilde{\Gamma}$, поскольку задана метрика. В такой ситуации над связностью Леви–Чивиты и построенных с ее помощью геометрических объектах мы будем писать знак тильды. □

Связность Леви–Чивита имеет наглядный геометрический смысл для двумерных поверхностей, изометрически вложенных в трехмерное евклидово пространство. Рассмотрим два вектора X_x и Y_y, касательных к поверхности в близких точках x и y. Леви-Чивита [**?**] предложил считать вектор Y_y параллельным вектору X_x, если его проекция в евклидовом пространстве на касательную плоскость в точке x параллельна вектору X_x. Можно проверить, что такая связность согласована с метрикой, индуцированной вложением, и имеет нулевое кручение.

В римановой геометрии ковариантная производная определяется компонентами связности с двумя нижними и одним верхним индексом, $\widetilde{\Gamma}_{\alpha\beta}{}^{\gamma} = \widetilde{\Gamma}_{\alpha\beta\delta} g^{\gamma\delta}$ и поэтому одинакова для двух метрик, отличающихся постоянным множителем.

Символы Кристоффеля (8.22) симметричны по первым двум индексам. Это свойство выполняется в голономном базисе. В неголономном базисе эта симметрия нарушается (см. раздел 8.9).

Из выражения для символов Кристоффеля (8.22) или условия метричности (8.20) следует, что

$$\partial_\alpha g_{\beta\gamma} = \widetilde{\Gamma}_{\alpha\beta\gamma} + \widetilde{\Gamma}_{\alpha\gamma\beta}. \tag{8.23}$$

Это значит, что для того, чтобы символы Кристоффеля в некоторой системе координат были равны нулю, необходимо и достаточно, чтобы в этой системе координат компоненты метрики были постоянны. Поскольку символы Кристоффеля не являются компонентами тензора, то в другой системе координат они могут быть нетривиальны.

Пример 8.2.1. Символы Кристоффеля для евклидова пространства в декартовой системе координат равны нулю, но, скажем, в сферической или цилиндрической системе координат они отличны от нуля. □

В случае, когда тензор неметричности и кручение тождественно равны нулю, и при этом в окрестности любой точки существует система координат, в которой метрика является единичной диагональной матрицей, и, следовательно, символы Кристоффеля равны нулю, то геометрия называется *локально евклидовой* (или *псевдоевклидовой*, если часть единиц входят в метрику с отрицательным знаком). Соответствующая система координат называется *декартовой*.

Пример 8.2.2. Рассмотрим двумерный тор, вложенный в трехмерное евклидово пространство. Если предположить, что кручение и неметричность на торе равны нулю, а метрика индуцирована вложением, то тензор кривизны тора равен нулю. В этом случае тор представляет собой нетривиальное локально евклидово многообразие. □

Нетрудно посчитать число независимых компонент у связности, тензора кручения и неметричности:

$$[\Gamma_{\alpha\beta}{}^{\gamma}] = n^3, \qquad [T_{\alpha\beta}{}^{\gamma}] = \frac{n^2(n-1)}{2}, \qquad [Q_{\alpha\beta\gamma}] = \frac{n^2(n+1)}{2}.$$

Отсюда следует, что суммарное число независимых компонент кручения и неметричности равно числу компонент аффинной связности.

8.3 Ковариантная производная тензорных плотностей

Ковариантная производная тензорного поля естественным образом обобщается на тензорные плотности произвольной степени p. Для определенности рассмотрим тензорную плотность $X_{\alpha}{}^{\beta}$ степени p и типа $(1,1)$. По-определению, при преобразовании координат она преобразуется по-правилу

$$X_{\alpha'}{}^{\beta'} = J^p \frac{dx^{\alpha}}{dx^{\alpha'}} X_{\alpha}{}^{\beta} \frac{dx^{\beta'}}{dx^{\beta}},$$

где J – якобиан преобразования (2.21). Потребуем, чтобы ковариантная производная от тензорной плотности была тензорной плотностью той же степени,

$$\nabla_{\alpha'} X_{\beta'}{}^{\gamma'} = J^p \frac{dx^{\alpha}}{dx^{\alpha'}} \frac{dx^{\beta}}{dx^{\beta'}} \nabla_{\alpha} X_{\beta}{}^{\gamma} \frac{dx^{\gamma'}}{dx^{\gamma}}. \tag{8.24}$$

Отсюда следует, что ковариантная производная от тензорной плотности имеет вид

$$\nabla_{\alpha} X_{\beta}{}^{\gamma} = \partial_{\alpha} X_{\beta}{}^{\gamma} - \Gamma_{\alpha\beta}{}^{\delta} X_{\delta}{}^{\gamma} + X_{\beta}{}^{\delta} \Gamma_{\alpha\delta}{}^{\gamma} + p \Gamma_{\alpha} X_{\beta}{}^{\gamma}, \tag{8.25}$$

где $\Gamma_{\alpha} = \Gamma_{\alpha\beta}{}^{\beta}$ – след аффинной связности. Сравнивая эту ковариантную производную с ковариантной производной от тензорного поля типа $(1,1)$ (8.6), находим, что различие состоит в появлении дополнительного слагаемого, пропорционального степени тензорной плотности и следу аффинной связности. Чтобы проверить выполнение закона преобразования (8.24) заметим, что в законе преобразования следа аффинной связности (8.44) содержится неоднородное слагаемое, которое компенсирует производную от якобиана

$$\partial_{\alpha} J^p = p J^p \frac{dx^{\beta}}{dx^{\beta'}} \partial_{\alpha} \left(\frac{dx^{\beta'}}{dx^{\beta}} \right).$$

Отсюда следует, что ковариантная производная от тензорной плотности произвольного типа отличается от ковариантной производной соответствующего тензора одним дополнительным слагаемым, пропорциональным степени тензорной плотности и следу аффинной связности.

Параллельный перенос для тензорных плотностей определяется так же, как и для тензоров. Мы говорим, что тензорная плотность *параллельно переносится* вдоль заданной кривой, если ее ковариантная производная вдоль этой кривой равна нулю.

Ковариантная производная от линейной комбинации тензорных плотностей X и Y одинакового ранга и степени равна линейной комбинации ковариантных производных

$$\nabla_\alpha(aX + bY) = a\nabla_\alpha X + b\nabla_\alpha Y, \qquad a, b \in \mathbb{R}.$$

Естественным образом определяется тензорное произведение $X \otimes Y$ тензорных плотностей произвольных рангов и степеней. При этом степени тензорных плотностей складываются. Нетрудно проверить, что для ковариантного дифференцирования справедливо правило Лейбница

$$\nabla_\alpha(X \otimes Y) = (\nabla_\alpha X) \otimes Y + X \otimes (\nabla_\alpha Y).$$

Так же, как и для тензоров, свертка по индексам тензорных плотностей перестановочна с операцией ковариантного дифференцирования.

Рассмотрим частные случаи. Определители метрики g и репера e являются тензорными плотностями степени -2 и -1, соответственно. Используя выражение для следа аффинной связности (8.45), получаем

$$\nabla_\alpha g = \partial_\alpha g - 2\Gamma_\alpha g = -Q_\alpha e, \tag{8.26}$$

$$\nabla_\alpha e = \partial_\alpha e - \Gamma_\alpha e = -\frac{1}{2} Q_\alpha e. \tag{8.27}$$

Отсюда следует, что для метрической связности определители метрики и репера ковариантно постоянны. То есть в геометрии Римана–Картана и, в частности, в римановой геометрии имеем

$$\widetilde{\nabla}_\alpha g = 0, \qquad \widetilde{\nabla}_\alpha e = 0.$$

При этом условие метричности для связности является достаточным, но не необходимым. Из выражения (8.27) следует, что для сохранения элемента объема при параллельном переносе вдоль произвольной кривой, необходимо и достаточно, чтобы след тензора неметричности был равен нулю. В геометрии Римана–Картана–Вейля

$$\nabla_\alpha e = -\frac{n}{2} W_\alpha e,$$

где n – размерность многообразия. То есть форма Вейля определяет изменение элемента объема при параллельном переносе.

8.4 Параллельный перенос

В разделе 6.2 был определен параллельный перенос сечений произвольного векторного расслоения. С помощью аффинной связности на многообразии $\mathbb{M}$ можно определить *параллельный перенос* касательных векторов, а также тензоров произвольного ранга вдоль кривой. Пусть дифференцируемая кривая $\gamma(t) = \{x^\alpha(t)\}$, $t \in \mathbb{I}$ соединяет две точки многообразия $a, b \in \mathbb{M}$: $\gamma(0) = a$, $\gamma(1) = b$. Касательный вектор к кривой (вектор скорости) имеет компоненты $v^\alpha = \dot{x}^\alpha$ и предполагается отличным от нуля. Инвариантное условие параллельного переноса (6.24),

$$\nabla_v X = 0, \tag{8.28}$$

в компонентах (6.25) принимает вид

$$\dot{X}^\alpha = -\dot{x}^\beta X^\gamma \Gamma_{\beta\gamma}{}^\alpha \tag{8.29}$$

Это – система линейных дифференциальных уравнений на компоненты векторного поля $X^\alpha(t)$, которая решается с некоторым начальным условием $X^\alpha(0) = X_0^\alpha$. Решение этой задачи мы называем параллельным переносом вектора X_0 в точку $x(t)$ вдоль кривой γ. Результат параллельного переноса вектора вдоль кривой однозначен в силу единственности решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений с (8.29) с заданными начальными условиями.

Условие параллельного переноса (8.29) можно переписать в интегральной форме

$$X^\alpha(t) = X_0^\alpha - \int_0^t ds\, \dot{x}^\beta X^\gamma \Gamma_{\beta\gamma}{}^\alpha, \tag{8.30}$$

где все функции в подынтегральном выражении рассматриваются, как функции от параметра s вдоль кривой и точка обозначает дифференцирование по s. При $t = 1$ получим компоненты вектора в точке b.

Результат параллельного переноса вектора из точки a в точку b не зависит ни от параметризации кривой, что очевидно, ни от выбора системы координат. В штрихованной системе координат имеем

$$X^{\alpha'}(t) = X_0^{\alpha'} - \int_0^t ds\, \dot{x}^{\beta'} X^{\gamma'} \Gamma_{\beta'\gamma'}{}^{\alpha'}.$$

Это интегральное уравнение связано с уравнением (8.30) преобразованием координат. Чтобы доказать это, представим неоднородное слагаемое в преобразовании компонент аффинной связности (8.5), умноженное на $\dot{x}^{\beta'} X^{\gamma'}$, в виде

$$\dot{x}^\beta X^\gamma \partial^2_{\beta\gamma} x^{\alpha'} = X^\gamma \partial_t (\partial_\gamma x^{\alpha'})$$

и проинтегрируем по частям.

В то же время результат параллельного переноса вектора из точки a в точку b зависит от кривой γ, соединяющей эти точки.

Параллельный перенос вектора вдоль кривой можно естественным образом обобщить на кусочно гладкие кривые, как последовательный параллельный перенос от одного излома к другому.

Аналогично определяется параллельный перенос 1-форм и тензоров произвольного ранга.

При параллельном переносе вектора из точки x в близкую точку $x + dx$, где инфинитезимальное приращение dx^α мы рассматриваем, как касательный вектор к кривой в точке x, компоненты вектора получат приращение

$$\delta X^\alpha = -dx^\beta X^\gamma \Gamma_{\beta\gamma}{}^\alpha. \tag{8.31}$$

Эти приращения линейны по дифференциалам dx^α и самому векторному полю. Формула (8.31) позволяет дать следующую интерпретацию ковариантной производной (8.2). Пусть на многообразии задано произвольное векторное поле $X(x)$. Чтобы получить ковариантную производную от него в точке x, необходимо взять значение векторного поля в точке $x + dx$, вычесть из него результат параллельного переноса вектора из точки x в точку $x + dx$ и разделить эту разность на dx.

Пример 8.4.1. При параллельном переносе скаляра получаем постоянное скалярное поле вдоль кривой $\delta f = 0$. Результат параллельного переноса скаляра для любой аффинной связности не зависит от пути переноса □

Пример 8.4.2. При параллельном переносе 1-форма получает приращение

$$\delta A_\alpha = dx^\beta \Gamma_{\beta\alpha}{}^\gamma A_\gamma, \tag{8.32}$$

которое отличается знаком от приращения вектора (**??**). □

Пример 8.4.3. При параллельном переносе тензора типа $(1,1)$ он получает приращение

$$\delta T^\alpha{}_\beta = dx^\gamma(-\Gamma_{\gamma\delta}{}^\alpha T^\delta{}_\beta + \Gamma_{\gamma\beta}{}^\delta T^\alpha{}_\delta).$$

Аналогично для тензора произвольного ранга в правой части будем иметь по одному слагаемому со знаком минус и плюс для каждого контра- и ковариантного индекса соответственно. □

Пример 8.4.4. В геометрии Римана–Картана, по-определению, ковариантная производная от метрики равна нулю. Поэтому можно считать, что метрика получается в результате параллельного переноса симметричной невырожденной матрицы из произвольной точки многообразия. При этом результат параллельного переноса заданной матрицы не зависит от пути для любой метрической связности. □

Пусть на многообразии $\mathbb{M}$ помимо аффинной связности задана метрика. Рассмотрим, как меняется скалярное произведение (X, Y) двух векторов при параллельном переносе вдоль произвольной кривой γ.

Предложение 8.4.1. *Зависимость скалярного произведения (X, Y) двух векторов, которые параллельно переносятся вдоль γ, от точки кривой определяется только тензором неметричности:*

$$\partial_u(X, Y) = \nabla_u(X^\alpha Y^\beta g_{\alpha\beta}) = -u^\gamma X^\alpha Y^\beta Q_{\gamma\alpha\beta}. \tag{8.33}$$

Отсюда следует, что в геометрии Римана–Картана ($Q = 0$) скалярное произведение двух векторов при параллельном переносе вдоль произвольной кривой сохраняется. В частности, квадрат вектора скорости u^2 кривой γ в геометрии Римана–Картана постоянен вдоль нее.

Доказательство. Следует из определения тензора неметричности (8.14). □

Следствие. В римановой геометрии и геометрии Римана–Картана длины векторов и углы между ними сохраняются при параллельном переносе вдоль произвольной кривой γ.

Задание аффинной связности позволяет сравнивать тензоры в бесконечно близких точках, причем делать это ковариантным образом. Трудность сравнения тензоров в различных точках связана с тем, что при преобразовании координат тензоры в разных точках преобразуются по-разному, и их сравнение (сложение компонент) теряет всякий смысл.

Выберем точку многообразия $p = \{p^\alpha\} \in \mathbb{M}$ и замкнутую кривую γ_p с началом и концом в точке p. Возьмем произвольный вектор X_p в точке p и перенесем его параллельно вдоль кривой γ_p. В результате получим вектор $X_p + \triangle X_p$, который

может отличаться от исходного. Рассмотрим класс кривых $\gamma_p = \{x^\alpha(t)\}$, для которых выполнено неравенство

$$\oint dt\sqrt{(\dot{x}^1)^2 + \ldots + (\dot{x}^n)^2} < \epsilon \ll 1. \tag{8.34}$$

Это выражение нековариантно, т.е. мы работаем в фиксированной системе координат. Тогда все это заведомо происходит в малой окрестности точки p: $\mathbb{U}_{p,\epsilon} \subset \mathbb{M}$, координаты точек которой удовлетворяют неравенствам:

$$\mathbb{U}_{p,\epsilon} := \{x \in \mathbb{M} : \quad |x^\alpha - p^\alpha| < \epsilon,\ \alpha = 1, \ldots, n\}$$

Рассмотрим двумерную поверхность $\mathbb{S}_\gamma \subset \mathbb{M}$ в многообразии $\mathbb{M}$, с границей γ_p и целиком лежащую в $\mathbb{U}_{p,\epsilon}$, которая задана параметрически: $\{x^\alpha(u,v)\}$, где u, v – координаты на поверхности.

Теорема 8.4.1 (Геометрический смысл кривизны). *Пусть на многообразии $\mathbb{M}$ задана аффинная связность $\Gamma_{\alpha\beta}{}^\gamma$ с тензором кривизны $R_{\alpha\beta\gamma}{}^\delta$. Перенесем вектор X_p вдоль замкнутой кривой γ_p, для которой выполнено неравенство (8.34). Тогда компоненты вектора получат приращение порядка не выше ϵ^2, главный член которого имеет вид:*

$$\triangle X_p^\delta = -X_p^\gamma R_{\alpha\beta\gamma}{}^\delta(p) \int_{\mathbb{S}_\gamma} du \wedge dv \frac{\partial x^\alpha}{\partial u}\frac{\partial x^\beta}{\partial v} + o(\epsilon^2), \tag{8.35}$$

где $\mathbb{S}_\gamma \subset \mathbb{U}_{p,\epsilon}$ – поверхность, ограниченная кривой γ_p.

Доказательство. При параллельном переносе вектора вдоль замкнутого пути приращение его компонент задается интегралом (8.30)

$$\triangle X_p^\alpha = -\oint_{\gamma_p} dt\, \dot{x}^\beta X_\parallel^\gamma \Gamma_{\beta\gamma}{}^\alpha = -\oint_{\gamma_p} dx^\beta X_\parallel^\gamma \Gamma_{\beta\gamma}{}^\alpha, \tag{8.36}$$

где $X_\parallel^\gamma(t)$ – результат параллельного переноса вектора X_p вдоль кривой γ до точки $\gamma(t)$. Разложим подынтегральную функцию в ряд Тейлора

$$X^\gamma \Gamma_{\beta\gamma}{}^\alpha = (X^\gamma \Gamma_{\beta\gamma}{}^\alpha)_p + [\partial_\delta (X^\gamma \Gamma_{\beta\gamma}{}^\alpha)]_p (x^\delta - p^\delta) + \ldots$$

Интеграл от первого слагаемого равен нулю, и, поэтому, порядок приращения вектора при параллельном переносе не может превышать ϵ^2. Это значит, что при вычислении интеграла в (8.36) с точностью ϵ^2 в подынтегральном выражении необходимо учитывать члены порядка ϵ.

Разнесем вектор X_p из точки p на всю окрестность $\mathbb{U}_{p,\epsilon}$ с помощью следующего соотношения

$$X^\alpha(x) := X_p^\alpha - (x^\beta - p^\beta) X_p^\gamma \Gamma_{\beta\gamma}{}^\alpha(p). \tag{8.37}$$

Это – параллельный перенос вектора X_p на окрестность $\mathbb{U}_{p,\epsilon}$ с точностью ϵ. С указанной точностью параллельный перенос вектора X_p не зависит от пути, так как приращение компонент вектора по замкнутому пути порядка ϵ^2. В результате мы получаем гладкое векторное поле $X(x)$ на $\mathbb{U}_{p,\epsilon}$. Поэтому в подынтегральном выражении (8.36) можно заменить векторное поле вдоль кривой $X_\parallel^\alpha$, которое не является непрерывным, на гладкое векторное поле X. Тогда можно воспользоваться формулой Грина (4.82):

$$\oint_{\gamma_p} dt\, \dot{x}^\beta X^\gamma \Gamma_{\beta\gamma}{}^\alpha = \int_{\mathbb{S}_\gamma} du \wedge dv \left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial x^\beta}{\partial v} X^\gamma \Gamma_{\beta\gamma}{}^\alpha\right) - \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial x^\beta}{\partial u} X^\gamma \Gamma_{\beta\gamma}{}^\alpha\right)\right].$$

Для векторного поля (8.37) имеем

$$\frac{\partial X^\gamma}{\partial u} = -\frac{\partial x^\delta}{\partial u} X_p^\beta \Gamma_{\delta\beta}{}^\gamma(p)$$

и аналогичную формулу для частной производной по v. В результате с точностью ϵ^2 получаем формулу (8.35). □

Замечание. С точностью ϵ^2 приращение компонент вектора (8.35) ковариантно. По построению, это приращение не зависит от выбора поверхности $\mathbb{S}_\gamma \subset \mathbb{U}_{p,\epsilon}$, натянутой на контур γ_p. □

Пример 8.4.5. Рассмотрим "параллелограмм" γ_p со сторонами $\epsilon_1^\alpha, \epsilon_2^\alpha < \epsilon$ и вершинами в точках $\{p^\alpha\}$, $\{p^\alpha + \epsilon_1^\alpha\}$, $\{p^\alpha + \epsilon_1^\alpha + \epsilon_2^\alpha\}$ и $\{p^\alpha + \epsilon_2^\alpha\}$. Пусть на него натянута поверхность $\mathbb{S}_\gamma = \{p^\alpha + \epsilon_1^\alpha u + \epsilon_2^\alpha v\}$; $u, v \in [0,1]$. Тогда при обходе по "параллелограмму" вектор получит приращение

$$\triangle X_p^\delta = -\epsilon_1^\alpha \epsilon_2^\beta X_p^\gamma R_{\alpha\beta\gamma}{}^\delta(p),$$

что следует из (8.35). □

Пусть на многообразии $\mathbb{M}$ задана метрика $g_{\alpha\beta}$. Тогда на поверхности индуцируется метрика $g_{ij} = \partial_i x^\alpha \partial_j x^\beta$ ($i, j = 1, 2$, где $\{u^i\} = (u, v)$). Следовательно, определена форма объема (площади поверхности) (4.72)

$$\upsilon = \frac{1}{2} du^i \wedge du^j \varepsilon_{ij}.$$

Тогда интеграл в (8.35) можно переписать в виде

$$\frac{1}{2}\int_{\mathbb{S}_g} du^i \wedge du^j \frac{\partial x^\alpha}{\partial u^i}\frac{\partial x^\beta}{\partial u^j} = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{S}_\gamma} du dv\, e\varepsilon^{ij}\frac{\partial x^\alpha}{\partial u^i}\frac{\partial x^\beta}{\partial u^j}\,\mathsf{sgn}\,,$$

где $\mathsf{sgn} = \mathsf{sign}\,(\det g_{ij})$ и $e = \sqrt{|\det g_{ij}|}$. С точностью ϵ^2 подынтегральное выражение можно вынести из под знака интегрирования и формула для приращения компонент вектора при параллельном переносе вдоль малого замкнутого пути (8.35) принимает вид

$$\triangle X_p^\delta = -\frac{1}{e_p}\left(\frac{\partial x^\alpha}{\partial u}\frac{\partial x^\beta}{\partial v}\right)_p X_p^\gamma R_{\alpha\beta\gamma}{}^\delta(p) S, \tag{8.38}$$

где

$$S = \int_{\mathbb{S}_g} du dv\, e$$

– площадь поверхности $\mathbb{S}_\gamma$. Полученная формула ковариантна относительно преобразований координат на многообразии x^α и инвариантна относительно выбора координат на поверхности u, v.

Замечание. Геометрический смысл тензора кривизны лег в основу его физической интерпретации, как поверхностной плотности вектора Франка, характеризующего распределение дисклинаций в упругой среде со спиновой структурой (см. [**?**]). □

Формулы переноса вектора вдоль малого замкнутого контура без труда обобщаются на произвольные тензорные поля.

Пример 8.4.6. Рассмотрим такой же "параллелограмм" со сторонами ϵ_1 и ϵ_2 как и в примере 8.4.5. При параллельном переносе вдоль него тензор типа $(1,1)$ получает приращение

$$\delta T^{\alpha}{}_{\beta} = -\epsilon_1^{\gamma}\epsilon_2^{\delta}(R_{\gamma\delta\epsilon}{}^{\alpha}T^{\epsilon}{}_{\beta} - R_{\gamma\delta\beta}{}^{\epsilon}T^{\alpha}{}_{\epsilon}).$$

Для тензора произвольного ранга в правой части равенства будем иметь по одному слагаемому со знаками плюс и минус соответственно для каждого контравариантного и ковариантного индекса. □

8.5 Геометрический смысл кручения

Пусть в произвольной точке многообразия $\mathrm{P} \in \mathbb{M}$, на котором задана аффинная связность $\Gamma_{\alpha\beta}{}^{\gamma}$ заданы два касательных вектора $X_{\mathrm{P}} = \{X^{\alpha}_{\mathrm{P}}\}$ и $Y_{\mathrm{P}} = \{Y^{\alpha}_{\mathrm{P}}\}$, рис. 8.1. Чтобы

Рис. 8.1: Геометрический смысл кручения: "параллелограмм" с направляющими X_{P} и Y_{P} незамкнут. fgemto

дать геометрическую интерпретацию тензору кручения, построим следующую конструкцию. Перенесем вектор Y_{P} вдоль геодезической линии, которая касается вектора X_{P}, в близкую точку Q, соответствующую параметру $t = t_{\mathrm{P}} + \epsilon$, $\epsilon \ll 0$. Затем проведем геодезическую в точке Q, которая касается вектора Y_{Q}, и отметим на ней точку R, соответствующую параметру $t_{\mathrm{Q}} + \epsilon$. Затем проведем то же построение, но в обратном порядке: перенесем вектор X_{P} вдоль геодезической для Y_{P} в точку S, выпустим из нее геодезическую вдоль X_{S} и отметим точку T. Если кручение аффинной связности равно нулю, то точки R и T совпадут. При ненулевом кручении разность координат точек R и T имеет порядок ϵ^2 и определяется тензором кручения.

Начнем построение. Рассмотрим геодезическую линию $\{x^{\alpha}(t)\}$ в $\mathbb{M}$, которая проходит через P и касается вектора X_{P}. Перенесем вектор X_{P} вдоль геодезической. В результата получим векторное поле $X(t)$ на геодезической, компоненты которого, по-построению, удовлетворяет уравнению

$$\nabla_{\dot{x}} X^{\alpha} = \frac{DX^{\alpha}}{dt} = \dot{x}^{\beta}(\partial_{\beta}X^{\alpha} + X^{\gamma}\Gamma_{\beta\gamma}{}^{\alpha}) = \dot{X}^{\alpha} + \dot{x}^{\beta}X^{\gamma}\Gamma_{\beta\gamma}{}^{\alpha} = 0, \tag{8.39}$$

где DX – ковариантный дифференциал векторного поля (8.7) и t – произвольный параметр вдоль геодезической. Тогда геодезическая будет интегральной кривой полученного векторного поля, проходящей через точку P.

Замечание. Параметр t может не совпадать с каноническим параметром вдоль геодезической, а векторное поле $X(t)$ – с полем скорости, соответствующим каноническому параметру. □

Геодезическая удовлетворят уравнению с начальными условиями:

$$\dot{x}^{\alpha} = X^{\alpha}, \qquad x^{\alpha}|_{t=t_{\mathrm{P}}} = x^{\alpha}_{\mathrm{P}}. \tag{8.40}$$

Для наших целей вычисления достаточно провести во втором порядке по ϵ. В этом порядке координаты точки Q равны (**??**):

$$x^{\alpha}_{\mathrm{Q}} = x^{\alpha}_{\mathrm{P}} + X^{\alpha}_{\mathrm{P}}\epsilon + \frac{1}{2}\dot{X}^{\alpha}_{\mathrm{P}}\epsilon^2 = x^{\alpha}_{\mathrm{P}} + X^{\alpha}_{\mathrm{P}}\epsilon - \frac{1}{2}X^{\beta}_{\mathrm{P}}X^{\gamma}_{\mathrm{P}}\Gamma_{\mathrm{P}\beta\gamma}{}^{\alpha}\epsilon^2,$$

где мы учли уравнения (8.39) и (8.40). Теперь параллельно перенесем вектор $Y_{\rm P}$ в точку Q:

$$Y^\alpha_{\rm Q} = Y^\alpha_{\rm P} - (x^\beta_{\rm Q} - x^{\rm B}_{\rm P}) Y^\gamma_{\rm P} \Gamma_{{\rm P}\beta\gamma}{}^\alpha = Y^\alpha_{\rm P} - X^\beta_{\rm P} Y^\gamma_{\rm P} \Gamma_{{\rm P}\beta\gamma}{}^\alpha \epsilon,$$

где достаточно учесть только линейный член разложения. Теперь найдем координаты точки R вдоль геодезической, выпущенной из точки Q:

$$\begin{aligned} x^\alpha_{\rm R} &= x^\alpha_{\rm Q} + Y^\alpha_{\rm Q}\epsilon - \frac{1}{2} Y^\beta_{\rm Q} Y^\gamma_{\rm Q} \Gamma_{{\rm Q}\beta\gamma}{}^\alpha \epsilon^2 = \\ &= x^\alpha_{\rm P} + (X^\alpha_{\rm P} + Y^\beta_{\rm P})\epsilon^2 - \left(\frac{1}{2} X^\beta_{\rm P} X^\gamma_{\rm P} + X^\beta_{\rm P} Y^\gamma_{\rm P} + \frac{1}{2} Y^\beta_{\rm P} Y^\gamma_{\rm P} \right) \Gamma_{{\rm P}\beta\gamma}{}^\alpha \epsilon^2. \end{aligned} \tag{8.41}$$

Аналогично, координаты точки T во втором порядке по ϵ равны

$$x^\alpha_{\rm T} = x^\alpha_{\rm P} + (X^\alpha_{\rm P} + Y^\beta_{\rm P})\epsilon^2 - \left(\frac{1}{2} X^\beta_{\rm P} X^\gamma_{\rm P} + Y^\beta_{\rm P} X^\gamma_{\rm P} + \frac{1}{2} Y^\beta_{\rm P} Y^\gamma_{\rm P} \right) \Gamma_{{\rm P}\beta\gamma}{}^\alpha \epsilon^2.$$

Таким образом, получаем

$$x^\alpha_{\rm T} - x^\alpha_{\rm R} = X^\beta_{\rm P} Y^\gamma_{\rm P} T_{{\rm P}\beta\gamma}{}^\alpha \epsilon^2, \tag{8.42}$$

где $T_{{\rm P}\beta\gamma}{}^\alpha$ – компоненты тензора кручения в точке P.

Формула (8.42) позволяет дать геометрическую интерпретацию тензору кручения: главная часть разомкнутости бесконечно малого "параллелограмма" с направляющими $X_{\rm P}\epsilon$ и $Y_{\rm P}\epsilon$ квадратична по ϵ и линейна по тензору кручения.

Замечание. Геометрический смысл кручения лег в основу физической интерпретации кручения, как поверхностной плотности вектора Бюргерса, характеризующего дислокации в упругой среде (см. [**?**]). □

8.6 Свойства аффинной связности

Во многих важных моделях математической физики пространство-время рассматривается, как многообразие $\mathbb{M}$, $\dim \mathbb{M} = n$, на котором задана аффинная геометрия, т.е. метрика и аффинная связность. В настоящем разделе приведены тождества, включающие аффинную связность, которые полезны для приложений при проведении вычислений. Кроме того, определены инвариантные дифференциальные операторы второго порядка и приведена формула интегрирования по частям. Все формулы настоящего раздела доказываются прямыми вычислениями.

Определим *след аффинной связности*, который получается после свертки последней пары индексов:

$$\Gamma_\alpha := \Gamma_{\alpha\beta}{}^\beta. \tag{8.43}$$

Он не является ковекторным полем, поскольку закон преобразования содержит неоднородное слагаемое:

$$\Gamma_{\alpha'} = \partial_{\alpha'} x^\alpha \Gamma_\alpha - \partial_{\alpha'} x^\alpha \partial_{\beta'} x^\beta \partial^2_{\alpha\beta} x^{\beta'} = \partial_{\alpha'} x^\alpha \Gamma_\alpha + \partial^2_{\alpha'\beta'} x^\alpha \partial_\alpha x^{\beta'}. \tag{8.44}$$

Приведем ряд формул, которые встречаются в приложениях. Из (8.15) следует, что след аффинной связности (8.43) равен

$$\Gamma_\alpha = \widetilde{\Gamma}_\alpha + \frac{1}{2} Q_\alpha, \tag{8.45}$$

где след символов Кристоффеля, $\widetilde{\Gamma}_\alpha := \widetilde{\Gamma}_{\alpha\beta}{}^\beta = \widetilde{\Gamma}_{\beta\alpha}{}^\beta$, имеет вид

$$\widetilde{\Gamma}_\alpha = \frac{1}{2} g^{\beta\gamma}\partial_\alpha g_{\beta\gamma} = -\frac{1}{2} g_{\beta\gamma}\partial_\alpha g^{\beta\gamma} = \frac{1}{2}\frac{\partial_\alpha g}{g} = \frac{\partial_\alpha e}{e} = e^\beta{}_b \partial_\alpha e_\beta{}^b, \tag{8.46}$$

и введен след тензора неметричности по последним индексам:

$$Q_\alpha := Q_{\alpha\beta}{}^\beta. \tag{8.47}$$

В тождествах (8.46)

$$g := \det g_{\alpha\beta}, \qquad e := \det e_\alpha{}^a = \sqrt{|g|}.$$

Замечание. Для определителя репера (см. раздел **??**) мы используем ту же букву, что и для основания натурального логарифма, но используем разные шрифты. Смысл обозначения e всегда ясен из контекста. □

Замечание. След аффинной связности не зависит от кручения. □

В пространстве Римана–Картана–Вейля след неметричности пропорционален форме Вейля W_α из (8.18)

$$Q_\alpha = nW_\alpha.$$

Свертка аффинной связности (8.15) по первому и третьему индексам дает

$$\Gamma_{\beta\alpha}{}^\beta = \widetilde{\Gamma}_\alpha + T_\alpha + \frac{1}{2} Q_\alpha = \Gamma_\alpha + T_\alpha, \tag{8.48}$$

где введен след тензора кручения

$$T_\alpha := T_{\beta\alpha}{}^\beta. \tag{8.49}$$

С помощью прямых вычислений можно убедиться в том, что ковариантная производная от полностью антисимметричного тензора максимального ранга n определяется только следом тензора неметричности

$$\nabla_\alpha \varepsilon_{\alpha_1\ldots\alpha_n} = -\frac{1}{2} Q_\alpha \varepsilon_{\alpha_1\ldots\alpha_n}. \tag{8.50}$$

В частности, для метрической связности полностью антисимметричный тензор является ковариантно постоянным.

В дифференциальной геометрии естественным образом вводится понятие градиента и дивергенции. Назовем *градиентом* скалярного поля (функции) f ковекторное поле (1-форму):

$$\mathsf{grad}\, f = dx^\alpha \nabla_\alpha f = df = dx^\alpha \partial_\alpha f. \tag{8.51}$$

Назовем *дивергенцией* векторного поля скалярное поле

$$\mathsf{div}\, X = \nabla_\alpha X^\alpha = \partial_\alpha X^\alpha + \Gamma_{\beta\alpha}{}^\beta X^\alpha, \tag{8.52}$$

построенное с помощью ковариантной производной. С учетом выражения аффинной связности через кручение и неметричность (8.15) дивергенция векторного поля (8.52) принимает вид

$$\nabla_\alpha X^\alpha = \frac{1}{e}\partial_\alpha (eX^\alpha) + T_\alpha X^\alpha + \frac{1}{2} Q_\alpha X^\alpha. \tag{8.53}$$

В частности, в римановой геометрии

$$\widetilde{\nabla}_\alpha X^\alpha = \frac{1}{e}\partial_\alpha (eX^\alpha). \tag{8.54}$$

Замечание. Эта полезная формула позволяет переписать инвариантный интеграл от дивергенции произвольного векторного поля в римановой геометрии в виде

$$\int d^n x \sqrt{|g|} \widetilde{\nabla}_\alpha X^\alpha = \int d^n x \partial_\alpha (\sqrt{|g|} X^\alpha)$$

и воспользоваться формулой Стокса (см. раздел 4.6.2). В пространстве аффинной связности после применения формулы Стокса возникают дополнительные объемные интегралы с кручением и неметричностью (8.53). □

Дивергенция от антисимметричного тензорного поля, $F^{\alpha\beta} = -F^{\beta\alpha}$, равна

$$\nabla_\alpha F^{\alpha\beta} = \frac{1}{e}\partial_\alpha (eF^{\alpha\beta}) + F^{\alpha\beta}(T_\alpha + \frac{1}{2}Q_\alpha) + \frac{1}{2}F^{\alpha\gamma}T_{\alpha\gamma}{}^\beta. \tag{8.55}$$

В римановой геометрии это тождество упрощается:

$$\widetilde{\nabla}_\alpha F^{\alpha\beta} = \frac{1}{e}\partial_\alpha (eF^{\alpha\beta}). \tag{8.56}$$

Приведем также формулу для антисимметричной ковариантной производной от 1-формы:

$$\nabla_\alpha X_\beta - \nabla_\beta X_\alpha = \partial_\alpha X_\beta - \partial_\beta X_\alpha - T_{\alpha\beta}{}^\gamma X_\gamma. \tag{8.57}$$

Из этого равенства следует, что антисимметризация обычной производной от 1-формы дает тензорное поле типа $(0,2)$. Это процедура положена в основу определения внешней производной от произвольной формы (см. раздел 4.3).

Наличие ковариантной производной ∇_α и метрики $g_{\alpha\beta}$ позволяет строить ковариантные дифференциальные операторы, действующие на произвольные тензорные поля на многообразии. Для их построения достаточно взять произвольный дифференциальный оператор в (псевдо-) евклидовом пространстве, заменить частные производные ∂_α на ковариантные ∇_α и (псевдо-) евклидову метрику $\eta_{\alpha\beta}$ на метрику многообразия $g_{\alpha\beta}$.

Инвариантный дифференциальный оператор второго порядка, действующий на произвольные тензорные поля на многообразии имеет вид

$$\triangle := g^{\alpha\beta}\nabla_\alpha\nabla_\beta = \nabla_\alpha(g^{\alpha\beta}\nabla_\beta) - Q_\alpha{}^{\alpha\beta}\nabla_\beta. \tag{8.58}$$

Он обычно называется *оператором Лапласа–Бельтрами* независимо от сигнатуры метрики. В римановой геометрии оператор Лапласа–Бельтрами устроен проще:

$$\tilde{\triangle} := g^{\alpha\beta}\widetilde{\nabla}_\alpha\widetilde{\nabla}_\beta = \widetilde{\nabla}_\alpha(g^{\alpha\beta}\widetilde{\nabla}_\beta). \tag{8.59}$$

Замечание. Если метрика имеет лоренцеву сигнатуру, то мы будем обозначать оператор Лапласа–Бельтрами квадратом $\Box$, а не треугольником $\triangle$, по аналогии с оператором Даламбера. В этом случае уравнение $\Box K_{\beta_1\ldots\beta_s}{}^{\alpha_1\ldots\alpha_r} = 0$ для каждой компоненты тензорного поля $K \in \mathcal{T}^r_s(\mathbb{M})$ будет гиперболического типа. □

Действие оператора Лапласа–Бельтрами на скалярное поле можно записать в виде

$$\triangle f = \frac{1}{e}\partial_\alpha(eg^{\alpha\beta}\partial_\beta f) + (T^\beta + \frac{1}{2}Q^\beta - Q_\alpha{}^{\alpha\beta})\partial_\beta f. \tag{8.60}$$

В римановой геометрии правая часть этого равенства записывается через обычную производную от тензорной плотности

$$\tilde{\triangle} f = \frac{1}{e}\partial_\alpha(eg^{\alpha\beta}\partial_\beta f). \tag{8.61}$$

Приведем также формулу интегрирования по частям. Используя (8.46) и (19.25), проверяется, что

$$\partial_\alpha(eX^{\alpha\text{A}}Y_\text{A}) = e\nabla_\alpha X^{\alpha\text{A}}Y_\text{A} - e(T_\alpha + \tfrac{1}{2}Q_\alpha)X^{\alpha\text{A}}Y_\text{A} + eX^{\alpha\text{A}}\nabla_\alpha Y_\text{A}.$$

Здесь индекс A обозначает произвольную совокупность ковариантных и контравариантных индексов, по которым подразумевается суммирование. Интегрируя это соотношение по многообразию и пренебрегая граничными членами, получим

$$\int d^n x\, eX^{\alpha\text{A}}\nabla_\alpha Y_\text{A} = -\int d^n x\, e\left[\nabla_\alpha X^{\alpha\text{A}}Y_\text{A} - (T_\alpha + \tfrac{1}{2}Q_\alpha)X^{\alpha\text{A}}Y_\text{A}\right]. \tag{8.62}$$

В римановой геометрии эта формула имеет тот же вид, что и обычное интегрирование по частям

$$\int d^n x\, eX^{\alpha\text{A}}\widetilde{\nabla}_\alpha Y_\text{A} = -\int d^n x\, e\left[\widetilde{\nabla}_\alpha X^{\alpha\text{A}}Y_\text{A}\right]. \tag{8.63}$$

Отсюда следует, что с точностью до граничных членов имеет место равенство

$$\int d^n x\, eX^\text{A}\widetilde{\Box}Y_\text{A} = \int d^n x\, e\widetilde{\Box}X^\text{A}Y_\text{A}. \tag{8.64}$$

8.7 Локальное определение тензора кривизны

Помимо кручения аффинная связность $\Gamma_{\alpha\beta}{}^\gamma$ на многообразии $\mathbb{M}$ задает еще один важный геометрический объект – *тензор кривизны* аффинной связности (6.35) или *тензор Римана–Кристоффеля*. В локальной системе координат он определяется следующей формулой

$$R_{\alpha\beta\gamma}{}^\delta := \partial_\alpha\Gamma_{\beta\gamma}{}^\delta - \Gamma_{\alpha\gamma}{}^\epsilon\Gamma_{\beta\epsilon}{}^\delta - (\alpha \leftrightarrow \beta), \tag{8.65}$$

где скобки $(\alpha \leftrightarrow \beta)$ обозначают предыдущие слагаемые с переставленными индексами α и β.

Замечание. Тензор кривизны никакого отношения к метрике не имеет и определяется только связностью. □

Тензор кривизны играет очень важную роль в дифференциальной геометрии и возникает в различных контекстах. Покажем, что тензор кривизны позволяет сформулировать критерий локальной тривиальности аффинной связности. Пусть на многообразии задана аффинная связность с нулевым кручением, $T_{\alpha\beta}{}^\gamma = 0$. При этом неметричность, если задана также метрика, может быть отлична от нуля. Рассмотрим соотношения (6.31) как уравнения на функции перехода $x^\alpha(x')$. Потребуем, чтобы в новой системе координат компоненты связности обращались в нуль в некоторой окрестности. Тогда функции перехода должны удовлетворять уравнению

$$\frac{\partial^2 x^\alpha}{\partial x^{\beta'}\partial x^{\gamma'}} = -\frac{\partial x^\beta}{\partial x^{\beta'}}\frac{\partial x^\gamma}{\partial x^{\gamma'}}\Gamma_{\beta\gamma}{}^\alpha. \tag{8.66}$$

Дифференцируя это соотношение по $x^{\delta'}$ и исключая вторые производные от функций перехода с помощью (8.66), получим

$$\frac{\partial^3 x^\alpha}{\partial x^{\beta'}\partial x^{\gamma'}\partial x^{\delta'}} = \frac{\partial x^\beta}{\partial x^{\beta'}}\frac{\partial x^\gamma}{\partial x^{\gamma'}}\frac{\partial x^\delta}{\partial x^{\delta'}}\left(-\partial_\delta\Gamma_{\beta\gamma}{}^\alpha + \Gamma_{\beta\delta}{}^\epsilon\Gamma_{\epsilon\gamma}{}^\alpha + \Gamma_{\delta\gamma}{}^\epsilon\Gamma_{\beta\epsilon}{}^\alpha\right).$$

Условия интегрируемости уравнений (8.66) получаются из этих уравнений антисимметризацией выражения в круглых скобках по индексам $[\beta\delta]$ или $[\gamma\delta]$ и приравниванием результата нулю. Обе антисимметризации приводят к единственному условию: равенству нулю тензора кривизны (8.65). Назовем аффинную связность на многообразии $\mathbb{M}$ *локально тривиальной*, если для любой точки $x \in \mathbb{M}$ найдется окрестность $\mathbb{U}_x \ni x$ и такая система координат, что компоненты связности $\Gamma_{\alpha\beta}{}^{\gamma}$ на $\mathbb{U}_x$ равны нулю. Таким образом, найден критерий локальной тривиальности аффинной связности.

Теорема 8.7.1. *Для локальной тривиальности аффинной связности на многообразии $\mathbb{M}$ необходимо и достаточно, чтобы ее кручение и тензор кривизны равнялись нулю на $\mathbb{M}$.*

Замечание. Тензор кручения является тензором, и его компоненты нельзя обратить в нуль никаким преобразованием координат. Поэтому равенство нулю тензора кривизны необходимо для локальной тривиальности аффинной связности. □

Аффинная связность, для которой тензоры кривизны и кручения равны нулю, называется *интегрируемой*.

Пусть на многообразии $\mathbb{M}$ помимо связности $\Gamma_{\alpha\beta}{}^{\gamma}$ задана также метрика $g_{\alpha\beta}$. Тогда определен тензор неметричности (8.14). При ненулевом тензоре неметричности локальная тривиальность аффинной связности не означает, что многообразие является локально (псевдо-)евклидовым. Действительно, при $\Gamma_{\alpha\beta}{}^{\gamma} = 0$ и $T_{\alpha\beta}{}^{\gamma} = 0$ уравнение (8.14) дает соотношение между метрикой и неметричностью

$$\partial_\alpha g_{\beta\gamma} = -Q_{\alpha\beta\gamma}. \tag{8.67}$$

В частности, метрику можно задать произвольно, и она будет определять неметричность. В римановой геометрии $T_{\alpha\beta}{}^{\gamma} = 0$ и $Q_{\alpha\beta\gamma} = 0$, и равенство нулю тензора кривизны, $\widetilde{R}_{\alpha\beta\gamma}{}^{\delta} = 0$, означает, что найдется такая система координат, в которой $\partial_\alpha g_{\gamma\delta} = 0$, т.е. метрика имеет постоянные компоненты в некоторой окрестности $\mathbb{U} \subset \mathbb{M}$. С помощью последующего линейного преобразования координат ее всегда можно привести к диагональному виду, когда на диагонали будут стоять ± 1. Это дает критерий локальной (псевдо-)евклидовости. Сформулируем сразу глобальное утверждение.

Теорема 8.7.2. *Пусть на многообразии $\mathbb{M}$ задана аффинная геометрия. Тогда, если тензоры кручения, неметричности и кривизны равны нулю на всем многообразии, то $\mathbb{M}$ изометрично либо (псевдо-)евклидову пространству, $\mathbb{R}^n$, либо факторпространству $\mathbb{R}^n/\mathbb{G}$, где $\mathbb{G}$ – дискретная группа преобразований, действующая свободно.*

Доказательство. См., например, [**?**]. □

8.8 Свойства тензора кривизны

Помимо тождеств Бианки тензоры кручения и кривизны удовлетворяют ряду других дифференциальных соотношений. Выведем ряд полезных тождеств, исходя из определения тензора кривизны (8.65). Прямые вычисления с учетом выражения аффинной связности через метрику, кручение и неметричность показывают, что антисимметризация тензора кривизны по первым трем индексам определяется только тензором кручения и его ковариантными производными:

$$\begin{aligned} R_{\alpha\beta\gamma}{}^{\delta} + R_{\beta\gamma\alpha}{}^{\delta} + R_{\gamma\alpha\beta}{}^{\delta} = {} & \nabla_\alpha T_{\beta\gamma}{}^{\delta} + \nabla_\beta T_{\gamma\alpha}{}^{\delta} + \nabla_\gamma T_{\alpha\beta}{}^{\delta} \\ & + T_{\alpha\beta}{}^{\epsilon} T_{\epsilon\gamma}{}^{\delta} + T_{\beta\gamma}{}^{\epsilon} T_{\epsilon\alpha}{}^{\delta} + T_{\gamma\alpha}{}^{\epsilon} T_{\epsilon\beta}{}^{\delta}. \end{aligned} \tag{8.68}$$

Это означает, что в римановой геометрии, а также в аффинной геометрии без кручения тензор кривизны удовлетворяет тождеству

$$R_{\alpha\beta\gamma}{}^{\delta} + R_{\beta\gamma\alpha}{}^{\delta} + R_{\gamma\alpha\beta}{}^{\delta} = 0. \tag{8.69}$$

Обратное утверждение в общем случае неверно. То есть из равенства (8.69) не следует, что кручение равно нулю.

Пусть на многообразии $\mathbb{M}$ задана аффинная геометрия, т.е. метрика и связность. Приведем явное выражение для тензора кривизны со всеми опущенными индексами. С учетом разложения связности (8.15) и тождества (8.23) получаем

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta} := R_{\alpha\beta\gamma}{}^{\epsilon} g_{\epsilon\delta} = \partial_\alpha \Gamma_{\beta\gamma\delta} + \Gamma_{\alpha\gamma}{}^{\epsilon} \Gamma_{\beta\delta\epsilon} - \Gamma_{\alpha\gamma}{}^{\epsilon} (T_{\beta\delta\epsilon} + Q_{\beta\delta\epsilon}) - (\alpha \leftrightarrow \beta). \tag{8.70}$$

Если у тензора кривизны со всеми опущенными индексами произвести симметризацию по последней паре индексов, то получим тождество

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta} + R_{\alpha\beta\delta\gamma} = \nabla_\alpha Q_{\beta\gamma\delta} - \nabla_\beta Q_{\alpha\gamma\delta} + T_{\alpha\beta}{}^{\epsilon} Q_{\epsilon\gamma\delta}. \tag{8.71}$$

Свертывая это тождество по последней паре индексов, получаем

$$\begin{aligned} 2R_{\alpha\beta\gamma}{}^{\gamma} = 2(\partial_\alpha \Gamma_\beta - \partial_\beta \Gamma_\alpha) &= \nabla_\alpha Q_\beta - \nabla_\beta Q_\alpha + T_{\alpha\beta}{}^{\gamma} Q_\gamma \\ &= \partial_\alpha Q_\beta - \partial_\beta Q_\alpha, \end{aligned} \tag{8.72}$$

где $Q_\alpha = Q_{\alpha\beta}{}^{\beta}$. Отсюда следует, что в геометрии Римана–Картана–Вейля свертка тензора кривизны по последним двум индексам дает напряженность для формы Вейля.

Рассмотрим симметрии тензора кривизны относительно перестановок индексов. В общем случае аффинной геометрии единственная симметрия тензора кривизны со всеми опущенными индексами – это антисимметрия по первой паре индексов:

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta} = -R_{\beta\alpha\gamma\delta}, \tag{8.73}$$

что сразу вытекает из определения (8.65). Отсюда следует, что в аффинной геометрии число линейно независимых компонент тензора кривизны равно

$$[R_{\alpha\beta\gamma\delta}] = \frac{n^3(n-1)}{2}.$$

В геометрии Римана–Картана тензор кривизны антисимметричен также и по второй паре индексов, что является следствием (8.71)

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta} = -R_{\alpha\beta\delta\gamma}. \tag{8.74}$$

Поэтому число его линейно независимых компонент меньше:

$$[R_{\alpha\beta\gamma\delta}] = \frac{n^2(n-1)^2}{4}.$$

В римановой геометрии тензор кривизны обладает дополнительной симметрией: его антисимметризация по первым трем индексам тождественно обращается в нуль

$$\widetilde{R}_{[\alpha\beta\gamma]\delta} = 0. \tag{8.75}$$

что является следствием (8.68). Следовательно, число его линейно независимых компонент равно

$$[\widetilde{R}_{\alpha\beta\gamma\delta}] = \frac{n^2(n^2-1)}{12}.$$

Из свойств (8.73), (8.74) и (8.75) следует, что в римановой геометрии тензор кривизны симметричен также относительно перестановки первой пары индексов со второй,

$$\widetilde{R}_{\alpha\beta\gamma\delta} = \widetilde{R}_{\gamma\delta\alpha\beta}. \tag{8.76}$$

Замечание. Обратные утверждения, связывающие геометрию с симметрией тензора кривизны неверны. Например, тензор кривизны может быть антисимметричен по второй паре индексов и в то же время тензор неметричности может быть нетривиальным. □

По заданному тензору кривизны путем свертки пары индексов можно построить *тензор Риччи*

$$R_{\alpha\gamma} = R_{\alpha\beta\gamma}{}^{\beta}. \tag{8.77}$$

Замечание. Тензор кривизны и тензор Риччи строятся только по аффинной связности, без использования метрики. □

В общем случае тензор Риччи не обладает никакой симметрией по своим индексам. В римановой геометрии он симметричен относительно перестановки индексов

$$\widetilde{R}_{\alpha\gamma} = \widetilde{R}_{\gamma\alpha}.$$

Свертывая тензор Риччи с обратной метрикой получаем *скалярную кривизну* многообразия

$$R = R_{\alpha\beta}g^{\alpha\beta}. \tag{8.78}$$

Последняя зависит и от связности, и от метрики. Функция

$$K := -\frac{1}{2}R, \tag{8.79}$$

где R –скалярная кривизна, называется *гауссовой кривизной* многообразия.

Пример 8.8.1. Пусть двумерная поверхность задана в трехмерном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3$ уравнением $z = f(x, y)$, причем

$$f(0,0) = 0, \qquad f_x(0,0) = 0, \qquad f_y(0,0) = 0,$$

где $f_x = \partial_x f$ и $f_y = \partial_y f$. Тогда скалярная кривизна в начале координат, соответствующая индуцированной метрике,

$$\begin{aligned} ds^2 &= dx^2 + dy^2 + dz^2 = \\ &= (1 + f_x^2)dx^2 + 2f_x f_y dxdy + (1 + f_y^2)dy^2, \end{aligned}$$

пропорциональна определителю гессиана

$$R = -2\,\mathsf{det}\begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{pmatrix} = -2K,$$

где K – гауссова кривизна поверхности. Поворотом евклидова пространства в плоскости x, y гессиан всегда можно привести к диагональному виду

$$\begin{pmatrix} f_{xx} & 0 \\ 0 & f_{yy} \end{pmatrix},$$

где, скажем, $f_{xx}(0,0) \geq f_{yy}(0,0)$. Если $f_{xx} > f_{yy}$, то оси x, y называются *главными направлениями* поверхности в данной точке. При $f_{xx} = f_{yy}$, главные направления не определены. Если гауссова кривизна положительна, $K > 0$, то поверхность в начале координат имеет локальный экстремум и лежит по одну сторону плоскости $z = 0$. Если кривизна меньше нуля, $K < 0$, то поверхность в начале координат имеет седловую точку. При $K = 0$ по крайней мере одна из вторых частных производных обращается в нуль, и мы имеем касание более высокого порядка. □

Замечание. Многие авторы определяют тензор кривизны многообразия таким образом, чтобы скалярная кривизна совпала с гауссовой кривизной. Мы используем определения тензора кривизны, тензора Риччи и скалярной кривизны, которые широко используется в дифференциальной геометрии и приложениях. Это не приводит к недоразумениям. Однако, надо помнить, что в наших обозначениях скалярная и гауссова кривизна двумерной сферы радиуса r равны: $R = -2K = -2/r^2$ и $K = 1/r^2$ (см. вычисления в разделе **??**). □

В аффинной геометрии компоненты связности $\Gamma_{\alpha\beta}{}^{\gamma}$ инвариантны относительно преобразования

$$g_{\alpha\beta} \to -g_{\alpha\beta}, \qquad T_{\alpha\beta}{}^{\gamma} \to T_{\alpha\beta}{}^{\gamma}, \qquad Q_{\alpha\beta}{}^{\gamma} \to Q_{\alpha\beta}{}^{\gamma}. \tag{8.80}$$

Поэтому тензор кривизны и тензор Риччи также инвариантны. При этом скалярная кривизна (8.78) меняет знак.

Рассмотрим на многообразии $\mathbb{M}$ произвольное векторное $X = X^{\alpha}\partial_{\alpha} \in \mathcal{X}(\mathbb{M})$ и ковекторное $A = dx^{\alpha}A_{\alpha} \in \Lambda_1(\mathbb{M})$ поля. Ковариантные производные от их компонент имеют вид (8.2), (8.3). Прямые вычисления показывают, что коммутатор двух ковариантных производных определяется тензором кривизны и кручения

$$[\nabla_{\alpha}, \nabla_{\beta}]X^{\gamma} = R_{\alpha\beta\delta}{}^{\gamma}X^{\delta} - T_{\alpha\beta}{}^{\delta}\nabla_{\delta}X^{\gamma}, \tag{8.81}$$

$$[\nabla_{\alpha}, \nabla_{\beta}]X_{\gamma} = -R_{\alpha\beta\gamma}{}^{\delta}X_{\delta} - T_{\alpha\beta}{}^{\delta}\nabla_{\delta}X_{\gamma}. \tag{8.82}$$

и отличается только знаком перед слагаемым с кривизной. Коммутатор ковариантных производных от скалярного поля $\varphi(x)$ проще:

$$[\nabla_{\alpha}, \nabla_{\beta}]\varphi = -T_{\alpha\beta}{}^{\gamma}\nabla_{\gamma}\varphi \tag{8.83}$$

и определяется только тензором кручения.

Формулы (8.81), (8.82) обобщаются на тензоры произвольного ранга.

Пример 8.8.2. Коммутатор ковариантных производных от компонент тензора $K \in \mathcal{T}_1^1(\mathbb{M})$ типа $(1,1)$ имеет вид

$$[\nabla_{\alpha}, \nabla_{\beta}]K^{\gamma}{}_{\delta} = R_{\alpha\beta\epsilon}{}^{\gamma}K^{\epsilon}{}_{\delta} - R_{\alpha\beta\delta}{}^{\epsilon}K^{\gamma}{}_{\epsilon} - T_{\alpha\beta}{}^{\epsilon}\nabla_{\epsilon}K^{\gamma}{}_{\delta}.$$

Для тензоров более высокого ранга будем иметь по одному слагаемому с кривизной со знаком плюс и минус соответственно для каждого контравариантного и ковариантного индекса и одно общее слагаемое с тензором кручения. □

Формулы для коммутатора ковариантных производных можно использовать для доказательства некоторых тождеств. Докажем несколько формул, справедливых в римановой геометрии. Пусть $F^{\alpha\beta}$ – произвольный антисимметричный тензор второго ранга. Тогда в римановой геометрии справедливо равенство

$$\widetilde{\nabla}_\alpha \widetilde{\nabla}_\beta F^{\alpha\beta} = 0.$$

Действительно,

$$[\widetilde{\nabla}_\alpha, \widetilde{\nabla}_\beta] F^{\alpha\beta} = \widetilde{R}_{\alpha\beta\gamma}{}^{\alpha} F^{\gamma\beta} + \widetilde{R}_{\alpha\beta\gamma}{}^{\beta} F^{\alpha\gamma} = 2\widetilde{R}_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} = 0,$$

поскольку тензор Риччи в этом случае симметричен.

Докажем также формулу

$$\widetilde{\nabla}_\alpha \widetilde{\nabla}_\beta \widetilde{R}^{\alpha\beta\gamma\delta} = 0.$$

Имеем

$$\begin{aligned} 2\widetilde{\nabla}_\alpha \widetilde{\nabla}_\beta \widetilde{R}^{\alpha\beta\gamma\delta} &= [\widetilde{\nabla}_\alpha, \widetilde{\nabla}_\beta] R^{\alpha\beta\gamma\delta} = \\ &= \widetilde{R}_{\alpha\beta\epsilon}{}^{\alpha} \widetilde{R}^{\epsilon\beta\gamma\delta} + \widetilde{R}_{\alpha\beta\epsilon}{}^{\beta} \widetilde{R}^{\alpha\epsilon\gamma\delta} + \widetilde{R}_{\alpha\beta\epsilon}{}^{\gamma} \widetilde{R}^{\alpha\beta\epsilon\delta} + \widetilde{R}_{\alpha\beta\epsilon}{}^{\delta} \widetilde{R}^{\alpha\beta\gamma\epsilon}. \end{aligned}$$

Первые два слагаемых обращаются в нуль в силу симметрии тензора Риччи. Последние два слагаемых сокращаются:

$$\widetilde{R}_{\alpha\beta\epsilon}{}^{\gamma} \widetilde{R}^{\alpha\beta\epsilon\delta} - \widetilde{R}_{\alpha\beta\epsilon}{}^{\delta} \widetilde{R}^{\alpha\beta\epsilon\gamma} = 0$$

в силу симметрии слагаемых по индексам γ, δ.

В заключение настоящего раздела приведем важную формулу, связывающую скалярную кривизну $R(g, \Gamma)$ в геометрии Римана–Картана со скалярной кривизной $\widetilde{R}(g)$ в соответствующей римановой геометрии, вычисленной только по метрике при нулевом кручении,

$$R + \frac{1}{4} T_{\alpha\beta\gamma} T^{\alpha\beta\gamma} - \frac{1}{2} T_{\alpha\beta\gamma} T^{\gamma\alpha\beta} - T_\alpha T^\alpha - \frac{2}{e} \partial_\alpha (e T^\alpha) = \widetilde{R}, \tag{8.84}$$

где $T_\alpha = T_{\beta\alpha}{}^{\beta}$ – след тензора кручения. Это тождество проверяется путем прямых вычислений и справедливо в пространстве произвольной размерности $n \geq 2$ и для метрики произвольной сигнатуры. Приведенное тождество можно переписать в явно ковариантном виде

$$R + \frac{1}{4} T_{\alpha\beta\gamma} T^{\alpha\beta\gamma} - \frac{1}{2} T_{\alpha\beta\gamma} T^{\gamma\alpha\beta} - T_\alpha T^\alpha - 2\tilde{\nabla}_\alpha T^\alpha = \widetilde{R},$$

где мы воспользовались тождеством (8.54). Важность этой формулы заключается в том, что, поскольку обе скалярные кривизны приводят к уравнениям движения не выше второго порядка (в переменных Картана), то при выборе лагранжиана можно ограничиться одной скалярной кривизной и квадратами тензоров кручения.

8.9 Неголономный базис

Аффинная геометрия на многообразии $\mathbb{M}$ задается метрикой и аффинной связностью или, что эквивалентно, метрикой, кручением и неметричностью. При таком описании каждое преобразование координат сопровождаются соответствующим преобразованием компонент тензорных полей относительно координатного базиса. Существует

также другой способ описания геометрии, когда компоненты тензорных полей рассматриваются относительно репера, который не меняется при преобразовании координат. В этом случае на компоненты тензорных полей действует локальная группа невырожденных матриц $\mathbb{GL}(n,\mathbb{R})$, что соответствует вращению репера. В результате геометрия на многообразии $\mathbb{M}$ будет задана репером и линейной или $\mathbb{GL}(n,\mathbb{R})$-связностью. Эти переменные называются *переменными Картана* и были введены в разделе 7. Они, как правило, упрощают вычисления и необходимы при рассмотрении спинорных полей на многообразии $\mathbb{M}$. В четырехмерном пространстве-времени репер называется *тетрадой*. В двумерном и трехмерном пространстве репер называется соответственно *диадой* и *триадой*.

Напомним, что координатный базис касательных пространств $\mathbb{T}_x(\mathbb{M})$ во всех точках многообразия $x \in \mathbb{M}$ мы обозначаем ∂_α, и он называется *голономным*. Важным свойством координатных базисных векторов ∂_α является их коммутативность:

$$[\partial_\alpha, \partial_\beta] = 0.$$

Предположим, что в каждой точке многообразия $x \in \mathbb{M}$ задан произвольный базис касательного пространства $e_a(x)$ (репер) и дуальный к нему базис 1-форм $e^a(x)$ (корепер), $a = 1, \ldots, n$. Дуальность означает, что значение 1-форм e^a на векторных полях e_b равно символу Кронекера: $e^a(e_b) = \delta^a_b$.

Замечание. Как уже отмечалось, репер может существовать глобально не для всех многообразий. Например, его не существует на неориентируемых многообразиях. В таких случаях все, сказанное ниже, имеет локальный характер. Тем не менее полученные формулы важны для вычислений, которые, как правило, проводятся в какой либо системе координат. □

Репер и корепер можно разложить по координатному базису:

$$e_a = e^\alpha{}_a \partial_\alpha, \qquad e^a = dx^\alpha e_\alpha{}^a,$$

где $e^\alpha{}_a$ и $e_\alpha{}^a$ – взаимно обратные невырожденные матрицы:

$$e^\alpha{}_a e_\alpha{}^b = \delta^b_a, \qquad e^\alpha{}_a e_\beta{}^a = \delta^\alpha_\beta.$$

По-предположению, матрицы $e^\alpha{}_a$ и $e_\alpha{}^a$ невырождены и гладко зависят от точки многообразия.

В общем случае репер представляет собой *неголономный базис* касательного пространства, т.е. не существует такой системы координат $x^a = x^a(x^\alpha)$, что

$$e^\alpha{}_a = \partial_a x^\alpha. \tag{8.85}$$

Репер определен с точностью до локальных $\mathbb{GL}(n,\mathbb{R})$ преобразований, действующих на латинские индексы. Его важнейшей характеристикой являются *компоненты неголономности* $c_{ab}{}^c$, которые определяются коммутатором базисных векторных полей:

$$[e_a, e_b] = c_{ab}{}^c e_c \tag{8.86}$$

и антисимметричны по нижним индексам,

$$c_{ab}{}^c(x) = -c_{ba}{}^c(x).$$

Из тождеств Якоби для алгебры Ли векторных полей,

$$[e_a[e_b,e_c]]+[e_b[e_c,e_a]]+[e_c[e_a,e_b]]=0,$$

следуют тождества для компонент неголономности:

$$\partial_a c_{bc}{}^d+\partial_b c_{ca}{}^d+\partial_c c_{ab}{}^d+c_{ab}{}^e c_{ce}{}^d+c_{bc}{}^e c_{ae}{}^d+c_{ca}{}^e c_{be}{}^d=0, \tag{8.87}$$

где $\partial_a := e^\alpha{}_a\partial_\alpha$.

Из определения (8.86) следует явное выражение для компонент неголономности через репер и его производные

$$c_{ab}{}^c=(e^\alpha{}_a\partial_\alpha e^\beta{}_b-e^\alpha{}_b\partial_\alpha e^\beta{}_a)e_\beta{}^c. \tag{8.88}$$

Умножив это соотношение на обратные матрицы $e_\alpha{}^a$, получим эквивалентную формулу

$$c_{\alpha\beta}{}^c=e_\alpha{}^a e_\beta{}^b c_{ab}{}^c=-\partial_\alpha e_\beta{}^c+\partial_\beta e_\alpha{}^c, \tag{8.89}$$

которую можно переписать в виде

$$de^c=\frac{1}{2}e^a\wedge e^b\,c_{ba}{}^c, \tag{8.90}$$

где использовано определение внешнего умножения и дифференцирования форм (см. раздел 4).

Многие формулы содержат след компонент неголономности, который определяется следующим образом:

$$c_a=c_{ba}{}^b=\partial_\alpha e^\alpha{}_a+\frac{\partial_a e}{e}. \tag{8.91}$$

Компоненты неголономности ковариантны относительно преобразования координат $x^\alpha\to x^{\alpha'}(x)$, но не являются компонентами вектора относительно локальных $\mathbb{GL}(n,\mathbb{R})$ преобразований. Нетрудно проверить, что равенство нулю компоненты неголономности является необходимым и достаточным условием локальной разрешимости системы уравнений (8.85). Это означает, что, если компоненты неголономности равны нулю в некоторой области, то для любой точки из этой области существует окрестность, в которой можно выбрать такую систему координат, что базис станет голономным $e_a=\partial_a$.

Использование неголономного базиса вместо координатного бывает значительно удобнее и часто используется в приложениях. Поэтому получим основные формулы дифференциальной геометрии в неголономном базисе.

Произвольное векторное поле можно разложить как по координатному, так и по некоординатному (неголономному) базису

$$X=X^\alpha\partial_\alpha=X^a e_a,$$

где $X^\alpha=e^\alpha{}_a X^a$ и $X^a=X^\alpha e_\alpha{}^a$. Предположим, что переход от греческих индексов к латинским и наоборот у компонент тензорных полей произвольного всегда осуществляется с помощью компонент репера и корепера. При этом все симметрии относительно перестановок индексов, конечно, сохраняются. Компоненты метрики в неголономном базисе имеют вид

$$g_{ab}=e^\alpha{}_a e^\beta{}_b g_{\alpha\beta}. \tag{8.92}$$

В общем случае компоненты метрики $g_{ab}(x)$ зависят от точки многообразия. Метрика g_{ab} всегда имеет ту же сигнатуру, что и метрика $g_{\alpha\beta}$, т.к. матрица $e^{\alpha}{}_{a}$ невырождена. Подъем и опускание греческих и латинских индексов всегда осуществляется с помощью метрик $g_{\alpha\beta}$ и g_{ab}, соответственно.

Как правило, репер используют в тех случаях, когда матрица g_{ab} является диагональной и постоянной, а на диагонали расположены плюс и минус единицы

$$g_{ab} = \eta_{ab} = \mathsf{diag}\,(\underbrace{+\cdots+}_{p}\underbrace{-\cdots-}_{q}).$$

Локально такой репер существует, поскольку уравнение(8.92) при одинаковых сигнатурах метрик g_{ab} и $g_{\alpha\beta}$ всегда разрешимо относительно репера. Такой репер называется *ортонормальным* и определен с точностью до $\mathbb{SO}(p,q,\mathbb{R})$ вращений. Ортонормальный базис часто бывает более удобным, т.к. метрика в этом базисе постоянна.

Для римановой метрики множество реперов делится на два класса: с положительным и отрицательным определителем. Для многообразий с метрикой лоренцевой сигнатуры множество реперов можно разбить на четыре класса (см. раздел **??**), по числу несвязных компонент группы Лоренца.

Компоненты тензоров второго и более высокого рангов могут содержать одновременно и греческие и латинские индексы. По построению, ковариантная производная от компонент такого тензора содержит по одному слагаемому с аффинной связностью для каждого греческого индекса и одному слагаемому с линейной связностью для каждого латинского индекса. Из определения (локальной формы) линейной связности (7.14) следует взаимно однозначная связь между линейной и аффинной связностью:

$$\omega_{\alpha a}{}^{b} = \Gamma_{\alpha\beta}{}^{\gamma} e^{\beta}{}_{a} e_{\gamma}{}^{b} - \partial_{\alpha} e_{\beta}{}^{b} e^{\beta}{}_{a}. \tag{8.93}$$

Эту формулу можно переписать в виде равенства нулю ковариантной производной от компонент корепера:

$$\nabla_{\alpha} e_{\beta}{}^{a} = \partial_{\alpha} e_{\beta}{}^{a} - \Gamma_{\alpha\beta}{}^{\gamma} e_{\gamma}{}^{a} + e_{\beta}{}^{b} \omega_{\alpha b}{}^{a} = 0. \tag{8.94}$$

Отсюда следует, что ковариантная производная от компонент репера также обращается в нуль

$$\nabla_{\alpha} e^{\beta}{}_{a} = \partial_{\alpha} e^{\beta}{}_{a} + \Gamma_{\alpha\gamma}{}^{\beta} e^{\gamma}{}_{a} - \omega_{\alpha a}{}^{b} e^{\beta}{}_{b} = 0.$$

Тогда, используя правило Лейбница, можно свободно переходить от греческих индексов к латинским и наоборот под знаком ковариантного дифференцирования:

$$\nabla_{\alpha} X^{a} = \nabla_{\alpha}(X^{\beta} e_{\beta}{}^{a}) = (\nabla_{\alpha} X^{\beta}) e_{\beta}{}^{a},$$
$$\nabla_{\alpha} X_{a} = \nabla_{\alpha}(X_{\beta} e^{\beta}{}_{a}) = (\nabla_{\alpha} X_{\beta}) e^{\beta}{}_{a},$$

где

$$\begin{aligned} \nabla_{\alpha} X^{a} &= \partial_{\alpha} X^{a} + \omega_{\alpha b}{}^{a} X^{b}, \\ \nabla_{\alpha} X_{a} &= \partial_{\alpha} X_{a} - \omega_{\alpha a}{}^{b} X_{b} \end{aligned} \tag{8.95}$$

– ковариантные производные от компонент векторного поля относительно неголономного базиса. Если аффинная связность не является метрической, то операция подъема и опускания индексов с помощью метрик $g_{\alpha\beta}$ и g_{ab} не коммутирует с ковариантной производной.

Формулу (8.93) можно рассматривать, как калибровочное преобразование (вращение) $\Gamma \to \omega$ в касательном пространстве, которое совпадает с преобразованием

калибровочных полей Янга–Миллса (**??**). При этом репер $e_\alpha{}^a \in \mathbb{GL}(n,\mathbb{R})$ играет роль матрицы преобразования (локального вращения), а координаты многообразия не затрагиваются.

В координатном базисе преобразование координат сопровождается преобразование компонент тензорных полей. Введение репера позволяет отделить преобразование координат от преобразований в касательном пространстве. Это достигается путем введения n^2 новых полей $e_\alpha{}^a(x)$. В результате появляется дополнительная возможность совершать локальные $\mathbb{GL}(n,\mathbb{R})$ преобразования, зависящие также от n^2 функций, в касательном пространстве, не затрагивая координат многообразия. Очевидно, что всегда можно совершить такое преобразование, что в результате репер совпадет с координатным базисом $e_\alpha{}^a = \delta^a_\alpha$. В этом случае линейная связность совпадет с аффинной $\omega_{\alpha a}{}^b = \Gamma_{\alpha a}{}^b$, а выражения для кривизны (8.96) и кручения (8.97) перейдут в уже знакомые формулы аффинной геометрии, т.к. компоненты неголономности обратятся в нуль: $c_{ab}{}^c = 0$.

Формулы для кривизны (7.19) и кручения (7.18) содержат два греческих индекса. Эти индексы также можно преобразовать в неголономные. Простые вычисления приводят к следующим компонентам тензора кривизны и кручения в неголономном базисе

$$R_{abc}{}^d = \partial_a \omega_{bc}{}^d - \partial_b \omega_{ac}{}^d - \omega_{ac}{}^e \omega_{be}{}^d + \omega_{bc}{}^e \omega_{ae}{}^d - c_{ab}{}^e \omega_{ec}{}^d, \tag{8.96}$$

$$T_{ab}{}^c = \omega_{ab}{}^c - \omega_{ba}{}^c - c_{ab}{}^c, \tag{8.97}$$

где $\omega_{ab}{}^c := e^\alpha{}_a \omega_{\alpha b}{}^c$ и $\partial_a := e^\alpha{}_a \partial_\alpha$. Эти формулы также часто используются в приложениях, особенно тогда, когда компоненты линейной связности ω_{abc} являются постоянными относительно некоторого неголономного базиса. В разделе 9 мы используем их для вычисления тензора кручения и кривизны групп Ли.

Если на многообразии задана метрика, то ковариантные компоненты тензора кривизны в неголономном базисе равны

$$R_{abcd} = \partial_a \omega_{bcd} - \partial_b \omega_{acd} - \omega_{bc}{}^e \omega_{ade} + \omega_{ac}{}^e \omega_{bde} - c_{ab}{}^e \omega_{ecd}. \tag{8.98}$$

В этом случае линейную связность, аналогично аффинной, можно выразить через репер, кручение и неметричность. Из уравнения (8.15) и определения (8.93) следует выражение для линейной связности со всеми неголономными индексами:

$$\begin{aligned}\omega_{abc} = {} & \frac{1}{2}(\partial_a g_{bc} + \partial_b g_{ca} - \partial_c g_{ab}) + \frac{1}{2}(c_{abc} - c_{bca} + c_{cab}) \\ & + \frac{1}{2}(T_{abc} - T_{bca} + T_{cab}) + \frac{1}{2}(Q_{abc} + Q_{bca} - Q_{cab}),\end{aligned} \tag{8.99}$$

где $c_{abc} = c_{ab}{}^d g_{dc}$.

Если (псевдо-) риманово многообразие допускает векторное поле Киллинга $K^a = K^\alpha e_\alpha{}^a$, то уравнение Киллинга в неголономном базисе принимает вид

$$\widetilde{\nabla}_a K_b + \widetilde{\nabla}_b K_a = 0, \tag{8.100}$$

где

$$\widetilde{\nabla}_a K_b = e^\alpha{}_a \partial_\alpha K_b - \widetilde{\omega}_{ab}{}^c K_c, \qquad K_b = K^a g_{ab}. \tag{8.101}$$

Как и ранее знак тильды означает, что связность построена по метрике при нулевом кручении и неметричности. Эта формула следует из того, что переход между индексами можно проводить под знаком ковариантного дифференцирования.

В римановой геометрии кручение и неметричность равны нулю. Рассмотрим ортонормальные реперы, для которых $g_{ab} = \delta_{ab}$ или η_{ab}, если сигнатура отличается от евклидовой. Такие реперы определены с точностью до локальных $\mathbb{SO}(n, \mathbb{R})$ вращений (или $\mathbb{SO}(p, q, \mathbb{R})$ вращений, $p + q = n$, для неевклидовой сигнатуры). Тогда из формулы (8.99) следует выражение для соответствующей линейной связности ($\mathbb{SO}(n, \mathbb{R})$- или $\mathbb{SO}(p, q, \mathbb{R})$-связности) через компоненты неголономности:

$$\widetilde{\omega}_{abc} = \frac{1}{2}(c_{abc} - c_{bca} + c_{cab}). \tag{8.102}$$

8.9.1 Тождества Бианки

Тождества Бианки играют большую роль в приложениях и поэтому в настоящем разделе мы рассмотрим их в компонентах. Громоздкие, но прямые вычисления позволяют записать тождества (7.7) и (7.8) после спуска на базу в переменных Картана:

$$\nabla_\alpha R_{\beta\gamma a}{}^b + \nabla_\beta R_{\gamma\alpha a}{}^b + \nabla_\gamma R_{\alpha\beta a}{}^b = T_{\alpha\beta}{}^\delta R_{\gamma\delta a}{}^b + T_{\beta\gamma}{}^\delta R_{\alpha\delta a}{}^b + T_{\gamma\alpha}{}^\delta R_{\beta\delta a}{}^b, \tag{8.103}$$

$$\begin{aligned}\nabla_\alpha T_{\beta\gamma}{}^a + \nabla_\beta T_{\gamma\alpha}{}^a + \nabla_\gamma T_{\alpha\beta}{}^a &= T_{\alpha\beta}{}^\delta T_{\gamma\delta}{}^a + T_{\beta\gamma}{}^\delta T_{\alpha\delta}{}^a + T_{\gamma\alpha}{}^\delta T_{\beta\delta}{}^a \\ &\quad + R_{\alpha\beta\gamma}{}^a + R_{\beta\gamma\alpha}{}^a + R_{\gamma\alpha\beta}{}^a.\end{aligned} \tag{8.104}$$

В аффинной геометрии их можно свернуть, соответственно, с репером $e^\gamma{}_b$ и $e^\gamma{}_a$:

$$\begin{aligned}\nabla_\alpha R_{\beta a} - \nabla_\beta R_{\alpha a} + \nabla_\gamma R_{\alpha\beta a}{}^\gamma &= -T_{\alpha\beta}{}^\delta R_{\delta a} - T_{\alpha\gamma}{}^\delta R_{\alpha\delta a}{}^\gamma + T_{\beta\gamma}{}^\delta R_{\alpha\delta a}{}^\gamma, \\ \nabla_\alpha T_\beta - \nabla_\beta T_\alpha - \nabla_\gamma T_{\alpha\beta}{}^\gamma &= T_{\alpha\gamma}{}^\delta T_{\beta\delta}{}^\gamma - T_{\beta\gamma}{}^\delta T_{\alpha\delta}{}^\gamma - T_{\alpha\beta}{}^\gamma T_\gamma + R_{\alpha\beta} - R_{\beta\alpha} - R_{\alpha\beta\gamma}{}^\gamma.\end{aligned}$$

В геометрии Римана–Картана, когда выполнено условие метричности, последнее слагаемое в последнем тождестве обращается в нуль. Тогда свернутые тождества Бианки можно переписать в виде

$$\nabla_\alpha R_{\beta\gamma} - \nabla_\beta R_{\alpha\gamma} + \nabla_\delta R_{\alpha\beta\gamma}{}^\delta = -T_{\alpha\beta}{}^\delta R_{\delta\gamma} - T_{\alpha\delta}{}^\epsilon R_{\beta\epsilon\gamma}{}^\delta + T_{\beta\delta}{}^\epsilon R_{\alpha\epsilon\gamma}{}^\delta, \tag{8.105}$$

$$\nabla_\alpha T_\beta - \nabla_\beta T_\alpha - \nabla_\gamma T_{\alpha\beta}{}^\gamma = T_{\alpha\gamma}{}^\delta T_{\beta\delta}{}^\gamma - T_{\beta\gamma}{}^\delta T_{\alpha\delta}{}^\gamma - T_{\alpha\beta}{}^\gamma T_\gamma + R_{\alpha\beta} - R_{\beta\alpha}, \tag{8.106}$$

где мы перешли ко всем греческим индексам.

Из последнего тождества (8.106) следует, что антисимметричная часть тензора Риччи в римановой геометрии (при нулевом кручении) всегда равна нулю: $\widetilde{R}_{\alpha\beta} = \widetilde{R}_{\beta\alpha}$.

Далее, свертка (8.105) с $g^{\alpha\gamma}$ (при нулевом тензоре неметричности) дает

$$2\nabla_\beta R_\alpha{}^\beta - \nabla_\alpha R = 2T_{\alpha\beta\gamma}R^{\gamma\beta} - R_{\alpha\beta\gamma\delta}T^{\gamma\delta\beta}. \tag{8.107}$$

В римановой геометрии это тождество упрощается:

$$\widetilde{\nabla}_\beta G^{\beta\alpha} = 0, \tag{8.108}$$

где

$$G_{\alpha\beta} = \widetilde{R}_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}g_{\alpha\beta}\widetilde{R}$$

– тензор Эйнштейна.

Тождество (8.106) антисимметрично по индексам $\alpha\beta$ и поэтому свертка с $g^{\alpha\beta}$ приводит к тождеству $0 = 0$.

Глава 9

Группы Ли

Группы Ли образуют один из наиболее важных классов многообразий и имеют широкие приложения в математической физике. В настоящем разделе мы дадим формальные определения, опишем основные свойства, а также рассмотрим группы Ли с дифференциально геометрической точки зрения. В частности, многообразия полупростых групп Ли будут рассмотрены, как римановы пространства и пространства абсолютного параллелизма, когда групповая операция отождествляется с параллельным переносом.

9.1 Группы Ли и локальные группы Ли

Определение. Множество элементов $a, b, c, \ldots \in \mathbb{G}$ называется *группой Ли*, если оно является одновременно и группой, и гладким многообразием, при этом требуется, чтобы была определена гладкая групповая операция

$$\mathbb{G} \times \mathbb{G} \ni (a, b) \;\mapsto\; ab \in \mathbb{G}, \qquad \forall a, b \in \mathbb{G},$$

со следующими свойствами:

1) Ассоциативность: $(ab)c = a(bc), \quad \forall a, b, c \in \mathbb{G}$.
2) Существование единицы $e \in \mathbb{G}$: $ea = ae = a, \quad \forall a \in \mathbb{G}$.
3) Для каждого элемента $a \in \mathbb{G}$ существует обратный элемент $a^{-1} \in \mathbb{G}$ такой, что $a^{-1}a = aa^{-1} = e$, причем отображение $\mathbb{G} \ni a \mapsto a^{-1} \in \mathbb{G}$ гладкое. □

Замечание. В определении оба условия гладкости:

$$\mathbb{G} \times \mathbb{G} \ni (a, b) \;\mapsto\; ab \in \mathbb{G}, \tag{9.1}$$

$$\mathbb{G} \ni a \;\mapsto\; a^{-1} \in \mathbb{G}, \tag{9.2}$$

можно объединить в одно эквивалентное условие гладкости отображения:

$$\mathbb{G} \times \mathbb{G} \ni (a, b) \;\mapsto\; ab^{-1} \in \mathbb{G}. \tag{9.3}$$

То, что (9.3) следует из (9.1) и (9.2), очевидно. Обратно. Любой элемент группы можно представить в виде $c = ab^{-1}$ для некоторых $a, b \in \mathbb{G}$. Тогда отображение $c = ab^{-1} \mapsto c^{-1} = ba^{-1}$ также является гладким, как композиция двух гладких отображений. Условие (9.1) следует из (9.3) после гладкого отображения $b \mapsto b^{-1}$. □

Перефразируем определение: группой Ли является группа, снабженная гладкой структурой многообразия. При этом не всякая группа допускает существование такой структуры.

Замечание. Если на произвольной группе задать дискретную топологию, то она будет группой Ли, рассматриваемой, как 0-мерное многообразие (если отбросить требование счетности базы топологии). В дальнейшем, чтобы исключить подобные ситуации, при рассмотрении групп Ли мы не будем рассматривать 0-мерные многообразия. С этой точки зрения множество элементов группы Ли не может быть счетным, т.к. множество точек области в $\mathbb{R}^n$ несчетно. □

Пример 9.1.1. Группа перестановок конечного числа элементов не является группой Ли, т.к. содержит конечное число элементов. □

Можно сказать также, что группой Ли является многообразие, на котором задана групповая операция. При этом не на всяком многообразии можно определить гладкую бинарную операцию, удовлетворяющую групповым аксиомам.

Пример 9.1.2. Двумерная сфера $\mathbb{S}^2$ не может быть наделена групповой структурой. □

Поскольку группы Ли являются многообразиями, то на них без изменения переносится большинство характеристик многообразий. Например, *размерностью* группы Ли называется ее размерность как многообразия. Группа Ли называется *компактной*, если групповое многообразие компактно.

Из непрерывности групповой операции следует, что, если подмножество $\mathbb{U} \subset \mathbb{G}$ – открыто или замкнуто в $\mathbb{G}$, то таковым же будет подмножество $\mathbb{U}^{-1}$, состоящее из обратных элементов, а также подмножества $a\mathbb{U}$ и $\mathbb{U}a$ для всех $a \in \mathbb{G}$. Отсюда вытекает, что для открытого подмножества $\mathbb{U}$ подмножества $\mathbb{V}\mathbb{U}$ и $\mathbb{U}\mathbb{V}$ также открыты в $\mathbb{G}$ каково бы ни было подмножество $\mathbb{V} \in \mathbb{G}$.

Замечание. В определении группы Ли мы потребовали гладкость т.е. бесконечную дифференцируемость групповой операции и, соответственно, гладкость группы Ли, как многообразия. На самом деле ситуация следующая. Согласно теореме Глисона–Монтгомери–Циппина [**?**, **?**] на всякой непрерывной группе (класса $\mathcal{C}^0$) можно ввести структуру аналитического многообразия (класса $\mathcal{C}^\omega$), совместимую с групповой структурой. Эта теорема дает положительное решение пятой проблемы Гильберта: следует ли из существования в группе $\mathbb{G}$ каких-нибудь координат существование в ней дифференцируемых координат. Таким образом, не ограничивая общности, можно считать, что группы Ли являются вещественно аналитическими многообразиями, а групповая операция – вещественно аналитическое отображение. □

Таким образом, группы Ли представляют собой специальный класс групп, для которых групповая операция может быть записана в координатной форме. Это важное свойство позволяет применить методы математического анализа для исследования свойств групп Ли.

Приведем несколько примеров групп Ли.

Пример 9.1.3. Прямая $\mathbb{R}$, на которой определены сдвиги (сложение) $a + b = c$, где $a, b, c \in \mathbb{R}$, является одномерной связной односвязной некомпактной абелевой группой Ли. □

Пример 9.1.4. Проколатая прямая $\mathbb{R}_0 = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ является группой Ли по отношению к умножению, $xy = z$, где $x, y, z \in \mathbb{R}_0$. Эта группа одномерна абелева несвязна и состоит из двух компонент. Каждая компонента некомпактна. Связная компонента единицы $\mathbb{R}_+$ (положительные числа) изоморфна группе вещественных чисел по сложению, $\mathbb{R}_+ \simeq \mathbb{R}$. Изоморфизм задается показательной функцией с произвольным положительным основанием, отличным от единицы. Например, $x = \mathsf{e}^a$. □

Пример 9.1.5. Евклидово пространство $\mathbb{R}^n$ (как и произвольное векторное пространство) является n-мерной связной односвязной некомпактной абелевой группой Ли относительно сложения векторов. □

Пример 9.1.6. Единичная окружность $\mathbb{S}^1$, точками которой являются комплексные числа $z = e^{i\varphi}$ является абелевой компактной группой Ли по отношению к умножению. Она обозначается через $\mathbb{U}(1)$ (унитарные матрицы размера 1×1) и изоморфна группе собственных двумерных вращений $\mathbb{SO}(2)$. Эта группа связна, но не односвязна. Ее фундаментальная группа изоморфна группе целых чисел $\mathbb{Z}$. □

Пример 9.1.7. Трехмерная сфера $\mathbb{S}^3$ в пространстве кватернионов, точками которой являются кватернионы q, для которых $|q| = 1$, может быть снабжена групповой структурой (см. раздел **??**). Это – трехмерная связная односвязная неабелева компактная группа Ли, которая изоморфна группе унитарных матриц размерности 2×2 с единичным определителем $\mathbb{SU}(2)$. □

Можно показать, что сферы только двух размерностей $\mathbb{S}^1$ и $\mathbb{S}^3$ исчерпывают все сферы на которых можно задать структуру группы Ли.

В рассмотренных примерах есть две одномерные абелевы группы Ли: $\mathbb{R}$ и $\mathbb{S}^1$. Любая одномерная группа Ли является абелевой, и изоморфна либо вещественной прямой $\mathbb{R}$, либо окружности $\mathbb{S}^1$. Этот результат имеет широкие применения, т.к. каждая группа Ли имеет одномерные подгруппы.

В случае одномерных групп Ли можно описать все возможные гомоморфизмы между ними:

$$\begin{aligned}
\mathbb{R} \ni x &\mapsto ax \in \mathbb{R}, \quad a \in \mathbb{R};\\
\mathbb{R} \ni x &\mapsto \mathsf{e}^{iax} \in \mathbb{S}^1, \quad a \in \mathbb{R};\\
\mathbb{S}^1 \ni z &\mapsto 0 \in \mathbb{R};\\
\mathbb{S}^1 \ni z &\mapsto z^n \in \mathbb{S}^1, \quad n \in \mathbb{Z};
\end{aligned}$$

где x – точка вещественной прямой, z – комплексное число, равное по модулю единице, а числа a и n параметризуют гомоморфизмы.

Прямое произведение групп Ли $\mathbb{G}_1 \times \mathbb{G}_2$ является группой Ли с дифференцируемой структурой прямого произведения многообразий и групповой структурой прямого произведения групп.

Пример 9.1.8. Тор $\mathbb{T}^n = \underbrace{\mathbb{S}^1 \times \ldots \times \mathbb{S}^1}_{n}$ для всех n является n-мерной абелевой компактной группой Ли $\underbrace{\mathbb{U}^1 \times \ldots \times \mathbb{U}^1}_{n}$ как прямое произведение окружностей. Эта группа связна, но не односвязна. □

С топологической точки зрения группы Ли $\mathbb{G}$ могут состоять из нескольких несвязных компонент[1]. При этом каждая компонента имеет одинаковую размерность, равную размерности группы. Связная компонента единицы $\mathbb{G}_0$ является открытой подгруппой в $\mathbb{G}$ и представляет собой нормальный делитель. Остальные компоненты представляют собой смежные классы по этой подгруппе, и фактор группа $\mathbb{G}/\mathbb{G}_0$ состоит не более, чем из счетного числа элементов. Если группу Ли рассматривать, как группу преобразований, то каждая связная компонента представляет собой орбиту произвольного элемента из этой компоненты относительно действия элементов группы из связной компоненты единицы $\mathbb{G}_0$.

[1]Поскольку мы предполагаем, что многообразие обладает счетной базой, то число несвязных компонент у групп Ли может быть не более, чем счетно.

Поскольку группа Ли является многообразием, то групповое умножение можно записать в координатах. Рассмотрим связную компоненту единицы $\mathbb{G}_0$ группы Ли размерности N. Пусть в окрестности единицы задана некоторая система координат $\{a^{\mathrm{A}}\}$, $\mathrm{A} = 1, \ldots, \mathrm{N}$. Не ограничивая общности, будем считать, что начало координат $a^{\mathrm{A}} = 0$ совпадает с единицей группы. Тогда групповое умножение

$$c = ab = f(a, b), \qquad a, b, c \in \mathbb{G}_0, \tag{9.4}$$

и групповые аксиомы (см. с. 2.2) можно записать в координатном виде:

$$\begin{array}{lll} 1) & c^{\mathrm{A}} = f^{\mathrm{A}}(a, b) & \text{– закон композиции,} \\ 2) & f^{\mathrm{A}}(a, f(b, c)) = f^{\mathrm{A}}(f(a, b), c) & \text{– ассоциативность,} \\ 3) & a^{\mathrm{A}} = f^{\mathrm{A}}(a, 0) = f^{\mathrm{A}}(0, a) & \text{– существование единицы,} \\ 4) & f^{\mathrm{A}}(a, a^{-1}) = f^{\mathrm{A}}(a^{-1}, a) = 0 & \text{– существование обратного элемента.} \end{array} \tag{9.5}$$

Набор N функций f^{A} от 2N переменных, удовлетворяющих условиям (9.5), называется *функцией композиции* для группы Ли $\mathbb{G}$.

Связная компонента группы Ли $\mathbb{G}_0$ может оказаться нетривиальным многообразием и не покрываться одной картой. Поэтому введем новое понятие.

Определение. *Локальной группой Ли* называется пара $(\mathbb{U}, f)$, где $\mathbb{U} \subset \mathbb{R}^{\mathrm{N}}$ – область евклидова пространства, содержащая начало координат, и f – гладкое отображение $\mathbb{U} \times \mathbb{U} \to \mathbb{R}^{\mathrm{N}}$ такое, что выполнены условия (9.5). При этом мы предполагаем, что все равенства выполнены в той области, где определены все выражения, входящие в данное равенство. □

Замечание. В определении локальной группы Ли мы не предполагаем замкнутости области $\mathbb{U}$ относительно группового умножения, т.е. возможно существование таких точек в $\mathbb{U}$, что их произведение не лежит в $\mathbb{U}$. Конечно, для таких точек про ассоциативность в определении ничего не говорится. □

Каждая группа Ли $\mathbb{G}$ порождает бесконечное множество локальных групп Ли следующим образом. Пусть $(\mathbb{V}, \varphi)$ – карта на $\mathbb{G}$, содержащая единицу, которая отображается в начало координат евклидова пространства $\mathbb{R}^{\mathrm{N}}$. Возьмем такую окрестность $\mathbb{U} \subset \mathbb{V}$, что выполнены включения $\mathbb{U} \cdot \mathbb{U} \subset \mathbb{V}$ и $\mathbb{U}^{-1} \subset \mathbb{V}$, где под произведением $\mathbb{U} \cdot \mathbb{U}$ мы понимаем множество всех произведений ab, где $a, b \in \mathbb{U}$. Существование такой окрестности следует из непрерывности отображений $(a, b) \mapsto ab$ и $a \mapsto a^{-1}$. Тогда каждая пара $(\mathbb{U}, f)$, где мы отождествили область $\mathbb{U} \subset \mathbb{G}$ с ее образом $\varphi(\mathbb{U}) \in \mathbb{R}^{\mathrm{N}}$, а f – функция композиции на $\mathbb{G}$, записанная в координатах, является локальной группой Ли.

Определение. Две локальные группы Ли $(\mathbb{U}_1, f_1)$ и $(\mathbb{U}_2, f_2)$ называются *изоморфными*, если существуют такие окрестности нуля $\mathbb{U}_1' \subset \mathbb{U}_1$ и $\mathbb{U}_2' \subset \mathbb{U}_2$ и такой диффеоморфизм $h : \mathbb{U}_1' \to \mathbb{U}_2'$, что диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{U}_1' \times \mathbb{U}_1' & \xrightarrow{f_1} & \mathbb{R}^{\mathrm{N}} \supset \mathbb{U}_1' \\ \Big\downarrow{\scriptstyle h \times h} & & \Big\downarrow{\scriptstyle h} \\ \mathbb{U}_2' \times \mathbb{U}_2' & \xrightarrow{f_2} & \mathbb{R}^{\mathrm{N}} \supset \mathbb{U}_2' \end{array}$$

коммутативна, т.е. $h(f_1(a, b)) = f_2(h(a), h(b))$, где $a, b \in \mathbb{U}_1'$, там, где обе части равенства определены. □

Ясно, что все локальные группы Ли, полученные описанным выше способом из одной группы Ли, изоморфны между собой. Поэтому введем

Определение. Две группы Ли $\mathbb{G}_1$ и $\mathbb{G}_2$ называются *локально изоморфными*, если порождаемые ими локальные группы Ли изоморфны. □

Конечно, две изоморфные группы Ли являются также локально изоморфными. Нетривиальность данного выше определения заключается в том, что существуют локально изоморфные группы Ли, которые в то же время не изоморфны между собой.

Пример 9.1.9. Пусть $\mathbb{G}_1 = \mathbb{R}$ и $\mathbb{G}_2 = \mathbb{S}^1$. В качестве $\mathbb{U}'_1 \subset \mathbb{R}$ возьмем интервал $(-\pi, \pi)$, а в качестве $\mathbb{U}'_2 \subset \mathbb{S}^1$ – дополнение к точке $-1 \in \mathbb{S}^1$. Отображение

$$h: \quad \mathbb{R} \supset \mathbb{U}'_1 \ni x \ \mapsto \ \mathsf{e}^{ix} \in \mathbb{U}'_2 \subset \mathbb{S}^1$$

устанавливает диффеоморфизм между $\mathbb{U}'_1$ и $\mathbb{U}'_2$, перестановочный с умножением. Таким образом, группы Ли $\mathbb{R}$ и $\mathbb{S}^1$ локально изоморфны. В то же время они не изоморфны между собой. □

Существует определенная связь между группами Ли, локальными группами Ли и алгебрами Ли, которые будут определены следующем разделе 9.2. Сейчас мы приведем несколько утверждений об этой связи.

Теорема 9.1.1 (Э. Картан). *Каждая алгебра Ли является алгеброй Ли некоторой группы Ли.*

Важность понятия локальной группы Ли заключается в следующем утверждении, которое является следствием теоремы Картана. ???

Теорема 9.1.2. *Каждая алгебра Ли является алгеброй Ли некоторой локальной группы Ли. Локальные группы Ли изоморфны тогда и только тогда, когда изоморфны их алгебры Ли.*

Доказательство этой теоремы приведено в следующем разделе.

Другими словами, каждая алгебра Ли определяет локальную группу Ли с точностью до изоморфизма.

При описании связи между группами Ли, локальными группами Ли и алгебрами Ли используется

Теорема 9.1.3 (о монодромии). *Пусть $\mathbb{G}$ – связная односвязная группа Ли, и $\mathbb{H}$ – произвольная группа Ли. Тогда всякий локальный гомоморфизм $\mathbb{G}$ в $\mathbb{H}$ (т.е. гомоморфизм соответствующих локальных групп), однозначно продолжается до глобального гомоморфизма $\mathbb{G}$ в $\mathbb{H}$.*

Теорема 9.1.4. *Каждой алгебре Ли $\mathfrak{g}$ соответствует единственная, с точностью до изоморфизма, связная односвязная группа Ли $\mathbb{G}$, для которой $\mathfrak{g}$ является алгеброй Ли. Все связные группы Ли, для которых $\mathfrak{g}$ является алгеброй Ли имеют вид $\mathbb{G}/\mathbb{D}$, где $\mathbb{D}$ – дискретный нормальный делитель, лежащий в центре группы Ли $\mathbb{G}$.*

Напомним, что центром группы $\mathbb{G}$ называется множество всех элементов группы, которые перестановочны со всеми элементами из $\mathbb{G}$. Слово дискретный в сформулированной теореме означает, что множество $\mathbb{D} \subset \mathbb{G}$ состоит из отдельных точек.

Структура группы Ли накладывает жесткие условия на *функцию композиции* f^{A}. Как уже было отмечено, функция композиции $f^{\mathrm{A}}(a, b)$ вещественно аналитична (т.е. разлагается в сходящиеся степенные ряды) во всех точках группового многообразия по всем $2\mathrm{N}$ переменным.

Пример 9.1.10. Рассмотрим группу невырожденных $n \times n$ матриц $\mathbb{GL}(n, \mathbb{R})$. Произвольную матрицу $A \in \mathbb{GL}(n, \mathbb{R})$ можно представить в виде

$$A = \mathbb{1} + \| A_a{}^b \|, \qquad a, b = 1, \ldots, n,$$

где $\mathbb{1}$ – единичная матрица, и $A_a{}^b$ – набор n^2 чисел, которые мы примем за координаты матрицы A. Полученное таким образом отображение всей группы $\mathbb{GL}(n, \mathbb{R})$ на область евклидова пространства $\mathbb{R}^{n^2}$ переводит единицу группы в начало координат. Групповое многообразие при этом представляет собой открытую область в $\mathbb{R}^{n^2}$, которая является дополнением замкнутого множества точек, определяемого уравнением $\det A = 0$. Функция композиции для группы $\mathbb{GL}(n, \mathbb{R})$ принимает вид

$$f_a{}^b(A, B) = A_a{}^b + B_a{}^b + A_a{}^c B_c{}^b.$$

Таким образом, функция композиции является аналитической функцией. Аналогично, множество невырожденных $n \times n$ комплексных матриц $\mathbb{GL}(n, \mathbb{C})$ образует аналитическую группу Ли размерности $2n^2$. □

Из условия существования единицы (9.5) следует

$$\left.\frac{\partial f^{\mathrm{A}}}{\partial a^{\mathrm{B}}}\right|_{b=0} = \delta^{\mathrm{A}}_{\mathrm{B}}, \qquad \left.\frac{\partial f^{\mathrm{A}}}{\partial b^{\mathrm{B}}}\right|_{a=0} = \delta^{\mathrm{A}}_{\mathrm{B}}.$$

Из этих уравнений и дифференцируемости функции композиции следует, что вблизи единицы группы функция композиции разрешима относительно координат a^{A} и b^{A} соответствующих элементов группы cb^{-1} и $a^{-1}c$, где $c = f(a, b)$. При этом класс дифференцируемости функций $a^{\mathrm{A}}(c, b)$ и $b^{\mathrm{A}}(a, c)$ такой же, как и у функции композиции.

Разложим функцию композиции в ряд Тейлора в окрестности единицы группы с точностью до членов третьего порядка

$$f^{\mathrm{A}}(a, b) = a^{\mathrm{A}} + b^{\mathrm{A}} + a^{\mathrm{C}} b^{\mathrm{B}} \hat{f}_{\mathrm{BC}}{}^{\mathrm{A}} + a^{\mathrm{D}} a^{\mathrm{C}} b^{\mathrm{B}} g_{\mathrm{BCD}}{}^{\mathrm{A}} + a^{\mathrm{D}} b^{\mathrm{C}} b^{\mathrm{B}} h_{\mathrm{BCD}}{}^{\mathrm{A}} + \ldots \tag{9.6}$$

В этом разложении $\hat{f}_{\mathrm{BC}}{}^{\mathrm{A}}$, $g_{\mathrm{BCD}}{}^{\mathrm{D}} = g_{\mathrm{BDC}}{}^{\mathrm{A}}$, $h_{\mathrm{BCD}}{}^{\mathrm{D}} = h_{\mathrm{CBD}}{}^{\mathrm{A}}$ – некоторые константы. Из существования единичного элемента следует отсутствие нулевого члена разложения и вид линейных слагаемых. Слагаемые более высоких порядков обязательно должны содержать произведение $a^{\mathrm{A}} b^{\mathrm{B}}$, т.к. в противном случае условие 3) в определении функции композиции не может быть выполнено. Подстановка разложения (9.6) в условие ассоциативности накладывает условие на компоненты разложения:

$$\hat{f}_{\mathrm{BC}}{}^{\mathrm{E}} \hat{f}_{\mathrm{ED}}{}^{\mathrm{A}} + 2h_{\mathrm{BCD}}{}^{\mathrm{A}} = \hat{f}_{\mathrm{CD}}{}^{\mathrm{E}} \hat{f}_{\mathrm{BE}}{}^{\mathrm{A}} + 2g_{\mathrm{BCD}}{}^{\mathrm{A}}. \tag{9.7}$$

При антисимметризации этого выражения по индексам B, C, D слагаемые $h_{\mathrm{BCD}}{}^{\mathrm{A}}$ и $g_{\mathrm{BCD}}{}^{\mathrm{A}}$ выпадают из-за симметрии по паре индексов. В результате получаем ограничение на *структурные константы* группы Ли,

$$f_{\mathrm{AB}}{}^{\mathrm{C}} = -f_{\mathrm{BA}}{}^{\mathrm{C}} := -\hat{f}_{\mathrm{AB}}{}^{\mathrm{C}} + \hat{f}_{\mathrm{BA}}{}^{\mathrm{C}}, \tag{9.8}$$

известные как *тождества Якоби*

$$f_{\mathrm{AB}}{}^{\mathrm{D}} f_{\mathrm{CD}}{}^{\mathrm{E}} + f_{\mathrm{BC}}{}^{\mathrm{D}} f_{\mathrm{AD}}{}^{\mathrm{E}} + f_{\mathrm{CA}}{}^{\mathrm{D}} f_{\mathrm{BD}}{}^{\mathrm{E}} = 0, \tag{9.9}$$

где слагаемые отличаются циклической перестановкой индексов A, B, C. При свертке тождеств Якоби по индексам C, E последние два слагаемых сокращаются, и получаем тождество

$$f_{\mathrm{AB}}{}^{\mathrm{D}} f_{\mathrm{DC}}{}^{\mathrm{C}} = 0.$$

Для абелевых групп функция композиции симметрична $f^{\mathrm{A}}(a,b) = f^{\mathrm{A}}(b,a)$, и структурные константы тождественно обращаются в нуль.

Координаты обратного элемента $a^{-1\mathrm{A}}(a)$ зависят от элемента a. Разложив это выражение по a^{A}, и подставив в определение обратного элемента, получим следующее разложение для координат обратного элемента с точностью до членов третьего порядка

$$a^{-1\mathrm{A}} = -a^{\mathrm{A}} + a^{\mathrm{C}}a^{\mathrm{B}}\hat{f}_{\mathrm{BC}}{}^{\mathrm{A}} - \frac{1}{2}a^{\mathrm{D}}a^{\mathrm{C}}a^{\mathrm{B}}\hat{f}_{\mathrm{BC}}{}^{\mathrm{E}}(\hat{f}_{\mathrm{DE}}{}^{\mathrm{A}} + \hat{f}_{\mathrm{ED}}{}^{\mathrm{A}}). \tag{9.10}$$

При получении этого выражения было использовано соотношение (9.7).

9.2 Действие группы слева

Рассмотрим группу Ли как группу преобразований группового многообразия, действующую слева. При этом каждому элементу $a \in \mathbb{G}$ ставится в соответствие отображение

$$\mathbb{G} \ni b \;\mapsto\; l_a(b) := ab \in \mathbb{G}.$$

Это отображение не является автоморфизмом группы $\mathbb{G}$, т.к. нетривиально действует на единичный элемент. Из единственности единичного элемента в группе следует, что эта группа преобразований действует свободно и транзитивно (см. раздел 10.1).

Функция $F(a) \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{G})$, заданная на групповом многообразии, будет инвариантна относительно действия группы, если выполнено условие $F(ab) = F(b)$, $\forall a \in \mathbb{G}$, и, следовательно, также для всех $b \in \mathbb{G}$. Очевидно, что инвариантные функции на группе тождественно равны константе. Другими словами, значение инвариантной функции, например, в единице $F(e)$ разносится по всему групповому многообразию с помощью действия группы слева. При этом группа Ли $\mathbb{G}$ может состоять из нескольких компонент.

Перейдем к рассмотрению левоинвариантных векторных полей на групповом многообразии. Поскольку на группе задано отображение l_a, то в касательном пространстве определен соответствующий дифференциал отображения l_{a*}:

$$X(l_a(b)) = l_{a*}X(b). \tag{9.11}$$

Векторное поле $X(b) \in \mathcal{X}(\mathbb{G})$ на группе Ли $\mathbb{G}$ называется *левоинвариантным*, если выполнено условие (9.11) для всех $a \in \mathbb{G}$ и, следовательно, для всех $b \in \mathbb{G}$. Левоинвариантные векторные поля определены глобально, т.е. на всем групповом многообразии.

Проиллюстрируем действие дифференциала отображения для соответствующей локальной группы Ли, на которой задана функция композиции в явном виде. В компонентах дифференциал отображения записывается в виде

$$X^{\mathrm{A}}(b) \;\mapsto\; X^{\mathrm{A}}(c) = X^{\mathrm{B}}(b)U_{\mathrm{B}}{}^{\mathrm{A}}(a,b), \qquad c = ab,$$

где $X^{\mathrm{A}}(b)$ – компоненты касательного вектора в точке b относительно координатного базиса ∂_{A}, и дифференциал отображения задается матрицей

$$U_{\mathrm{B}}{}^{\mathrm{A}}(a,b) = \frac{\partial f^{\mathrm{A}}(a,b)}{\partial b^{\mathrm{B}}},$$

зависящей от координат двух точек $a, b \in \mathbb{G}$. Поскольку групповая операция, $(a,b) \mapsto f(a,b)$, является диффеоморфизмом группового многообразия на себя при фиксированном a или b, то матрица $U_{\mathrm{A}}{}^{\mathrm{B}}$ невырождена для всех $a, b \in \mathbb{G}$, $\det U_{\mathrm{A}}{}^{\mathrm{B}} \neq 0$.

Пусть $X_0 = \{X_0^{\text{A}}\}$ – произвольный вектор из касательного пространства к единице группы. Тогда этот вектор можно разнести по всему групповому многообразию с помощью дифференциала левого действия элементов группы. По построению, это будет левоинвариантное векторное поле $X(a) = l_{a*}X_0$. Оно определено глобально.

Компоненты левоинвариантного векторного поля вблизи единицы группы имеют вид

$$X^{\text{A}}(a) = X_0^{\text{B}} L_{\text{B}}{}^{\text{A}}(a),$$

где

$$L_{\text{B}}{}^{\text{A}}(a) = U_{\text{B}}{}^{\text{A}}(a,0) = \left.\frac{\partial f^{\text{A}}(a,b)}{\partial b^{\text{B}}}\right|_{b=0}.$$

Тем самым, каждому вектору из касательного пространства к единице однозначно ставится в соответствие левоинвариантное векторное поле, и, наоборот, каждое левоинвариантное векторное поле однозначно определяет некоторый вектор в касательном пространстве к единице группы.

Матрица $U_{\text{B}}{}^{\text{A}}(a,b)$ удовлетворяет простому тождеству. Дифференцируя равенство $f^{\text{A}}(0,b) = b^{\text{A}}$ по b^{B}, получаем тождество

$$U_{\text{B}}{}^{\text{A}}(0,b) = \delta_{\text{B}}^{\text{A}}, \tag{9.12}$$

которое нам понадобится в дальнейшем.

Множество векторных полей на группе Ли $\mathbb{G}$, как и на любом другом многообразии, образует бесконечномерную алгебру Ли $\mathcal{X}(\mathbb{G})$ (см. раздел 3.6.7) и $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{G})$-модуль. Поскольку дифференциал отображения сохраняет скобку Ли (коммутатор) (3.65), то коммутатор двух левоинвариантных векторных полей будет левоинвариантным векторным полем. Следовательно, множество всех левоинвариантных векторных полей образует подалгебру Ли в $\mathcal{X}(\mathbb{G})$. Поскольку, как векторное пространство, множество левоинвариантных векторных полей изоморфно касательному пространству в единице группы $\mathbb{T}_e(\mathbb{G})$, то множество левоинвариантных векторных полей представляет собой конечномерную алгебру Ли такой же размерности N, как и сама группа.

Замечание. Алгебра Ли левоинвариантных векторных полей не выдерживает умножения на гладкие функции $f(a) \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{G})$, и поэтому представляет собой линейное пространство, а не $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{G})$-модуль. □

Структура алгебры Ли левоинвариантных векторных полей естественным образом переносится на касательное пространство к единице группы:

$$[X_0, Y_0] := [l_{a*}X_0, l_{a*}Y_0]_e.$$

Словами. Берем два произвольных вектора X_0 и Y_0 из касательного пространства к единице группы, разносим их с помощью действия группы слева по всему многообразию, вычисляем коммутатор получившихся левоинвариантных векторных полей и выбираем в касательном пространстве к единице группы группы вектор, который соответствует коммутатору.

Множество левоинвариантных векторных полей образует N-мерное векторное пространство над полем вещественных чисел, которое изоморфно касательному пространству в начале координат (или в любой другой точке группового многообразия).

В качестве базиса левоинвариантных векторных полей удобно выбрать N левоинвариантных векторных полей (*образующих алгебры Ли*)

$$L_{\mathrm{A}}(a) := l_{a*}\partial_{\mathrm{A}}|_e = L_{\mathrm{A}}{}^{\mathrm{B}}\partial_{\mathrm{B}}|_a, \tag{9.13}$$

где мы разложили левоинвариантный базис по координатному базису $\partial_{\mathrm{A}}|_a$ в точке $a \in \mathbb{G}$. Тем самым коэффициенты разложения $L_{\mathrm{A}}{}^{\mathrm{B}}(a)$ определены глобально. В построенном базисе произвольное левоинвариантное векторное поле X имеет постоянные компоненты, равные его компонентам в начале координат относительно координатного базиса:

$$X = X_0^{\mathrm{A}} L_{\mathrm{A}}.$$

Поскольку левоинвариантные векторные поля образуют алгебру Ли, то коммутатор двух базисных левоинвариантных векторных полей L_{A} будет левоинвариантным векторным полем и, следовательно, его можно разложить по базису L_{A} с некоторыми постоянными коэффициентами:

$$[L_{\mathrm{A}}, L_{\mathrm{B}}] = f_{\mathrm{AB}}{}^{\mathrm{C}} L_{\mathrm{C}}. \tag{9.14}$$

То, что в правой части этого равенства стоят структурные константы $f_{\mathrm{AB}}{}^{\mathrm{C}}$, которые были определены ранее через функцию композиции (9.8) не случайно.

Докажем это, рассмотрев окрестность единицы группы и соответствующую локальную группу Ли. Вблизи единицы группы левоинвариантный базис в компонентах имеет вид

$$L_{\mathrm{A}}(a) = L_{\mathrm{A}}{}^{\mathrm{B}}(a)\partial_{\mathrm{B}},$$

где ∂_{B} – координатный базис касательных пространств, что оправдывает выбранные обозначения в (9.13). Из разложения (9.6) следует разложение для компонент левоинвариантного базиса:

$$L_{\mathrm{A}}{}^{\mathrm{B}} = \delta_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} + a^{\mathrm{C}} \hat{f}_{\mathrm{AC}}{}^{\mathrm{B}} + a^{\mathrm{D}} a^{\mathrm{C}} g_{\mathrm{ACD}}{}^{\mathrm{B}} + \dots . \tag{9.15}$$

Подстановка этого разложения в (9.14) доказывает, что в правой части стоят структурные константы (9.8), потому что коэффициенты разложения $f_{\mathrm{AB}}{}^{\mathrm{C}}$ постоянны. При этом возникают ограничения на коэффициенты разложения при высших степенях a^{A}, на которых мы останавливаться не будем.

Замечание. Для всех $a \in \mathbb{G}$ выполнено равенство $\det L_{\mathrm{A}}{}^{\mathrm{B}}(a) \neq 0$, потому что групповая операция задает диффеоморфизм группы $\mathbb{G}$ на себя. При малых a^{A} это следует также из (9.15). □

Продолжим рассмотрение локальной группы Ли и дадим независимый вывод формулы (9.14), исходя только из свойств функции композиции. Рассмотрев тождество $b = a^{-1}ab$ в касательном пространстве, получим

$$L_{\mathrm{A}}^{-1\mathrm{B}}(a) = U_{\mathrm{A}}{}^{\mathrm{B}}(a^{-1}, a).$$

Далее, распишем условие ассоциативности $(ab)c = a(bc)$ в касательном пространстве:

$$U_{\mathrm{A}}{}^{\mathrm{B}}(f(a,b),c) = U_{\mathrm{A}}{}^{\mathrm{C}}(b,c) U_{\mathrm{C}}{}^{\mathrm{B}}(a, f(b,c)).$$

Полагая $c = 0$, получим

$$\frac{\partial f^{\mathrm{C}}(a,b)}{\partial b^{\mathrm{A}}} = U_{\mathrm{A}}{}^{\mathrm{C}}(a,b) = L_{\mathrm{A}}^{-1\mathrm{D}}(b) L_{\mathrm{D}}{}^{\mathrm{C}}(f), \tag{9.16}$$

где $f = f(a,b)$. Рассмотрим эту систему уравнений, как уравнения на функцию композиции. Система уравнений (9.16) разрешима тогда и только тогда, когда выполнены условия совместности. Чтобы получить эти условия, продифференцируем уравнение (9.16) по b^{B} и антисимметризуем по индексам A и B. После несложных алгебраических преобразований получим уравнение

$$[L_{\text{A}}(b), L_{\text{B}}(b)]^{\text{D}} L_{\text{D}}^{-1\text{C}}(b) = [L_{\text{A}}(f), L_{\text{B}}(f)]^{\text{D}} L_{\text{D}}^{-1\text{C}}(f),$$

где квадратные скобки обозначают коммутатор векторных полей. Поскольку левая и правая часть этого равенства рассматриваются в различных точках группового многообразия, и точки могут выбираться произвольно, то они должны быть равны константе. Эти константы проще всего определить, рассмотрев линейное приближение для левоинвариантных векторных полей (9.15). В результате получим уравнение для образующих алгебры Ли (9.14).

Таким образом, мы доказали, что множество левоинвариантных векторных полей образует N-мерную алгебру Ли над полем вещественных чисел, которая является подалгеброй бесконечномерной алгебры всех векторных полей $\mathcal{X}(\mathbb{G})$.

Определение. Алгебра левоинвариантных векторных полей называется *алгеброй Ли* $\mathfrak{g}$ группы Ли $\mathbb{G}$. Базисные векторы (образующие) L_{A} алгебры Ли $\mathfrak{g}$ называются *генераторами группы Ли.* □

Алгебра Ли определяется с точностью до изоморфизма (выбора базиса левоинвариантных векторных полей) только окрестностью единицы группы. Поэтому, если две группы Ли локально изоморфны, то их алгебры Ли также изоморфны.

Пример 9.2.1. Группы $\mathbb{SO}(3)$ и $\mathbb{O}(3)$ имеют изоморфные алгебры Ли. □

Левоинвариантные векторные поля L_{A} образуют базис алгебры Ли. Этот базис определен с точностью до выбора базиса в касательном пространстве к единице группы, т.е. с точностью до действия группы $\mathbb{GL}(n,\mathbb{R})$. При этом вид структурных констант зависит от выбора базиса. Поэтому, если структурные константы алгебры Ли отличны от нуля и фиксированы, то базис, в общем случае, менять нельзя.

Выше мы показали, как групповая операция определяет алгебру Ли левоинвариантных векторных полей. Проведем обратное построение и покажем, что структурные константы (9.8) со свойством (9.9) позволяют восстановить функцию композиции $f^{\text{A}}(a,b)$ в окрестности единицы. Это построение дает

Доказательство теоремы 9.1.2. Перепишем соотношение (9.14) в компонентах:

$$L_{\text{A}}{}^{\text{D}} \partial_{\text{D}} L_{\text{B}}{}^{\text{C}} - L_{\text{B}}{}^{\text{D}} \partial_{\text{D}} L_{\text{A}}{}^{\text{C}} = f_{\text{AB}}{}^{\text{D}} L_{\text{D}}{}^{\text{C}}. \tag{9.17}$$

Свертка этого выражения с тремя обратными матрицами L^{-1} по индексам A, B, C дает

$$\partial_{\text{A}} L_{\text{B}}^{-1\text{C}} - \partial_{\text{B}} L_{\text{A}}^{-1\text{C}} = -L_{\text{A}}^{-1\text{E}} L_{\text{B}}^{-1\text{D}} f_{\text{DE}}{}^{\text{C}}. \tag{9.18}$$

Это равенство является дифференциальным уравнением на матрицу $L^{-1}(a)$. Левая часть этого уравнения антисимметрична по индексам A и B и, следовательно, представляет собой 2-форму на $\mathbb{G}_0$. Для того, чтобы найти необходимые и достаточные условия интегрируемости этой системы уравнений, ее необходимо продифференцировать, скажем, по a^{D}, и антисимметризовать по индексам A, B и D. После несложных вычислений, получим, что необходимым и достаточным условием интегрируемости

уравнений (9.18) являются тождества Якоби для структурных констант. Таким образом, матрицы $L^{-1}(a)$ и, следовательно, $L(a)$ определяются структурными константами с точностью до некоторой константы, которая фиксируется условием $L_{\text{A}}{}^{\text{B}}(0) = \delta_{\text{A}}^{\text{B}}$. После этого функция композиции однозначно находится из уравнения (9.16) с фиксированными условиями в нуле. Условия интегрируемости этих уравнений, как было показано выше, опять-таки сводятся к тождествам Якоби. Таким образом, если задан произвольный набор структурных констант $f_{\text{AB}}{}^{\text{C}} = -f_{\text{BA}}{}^{\text{C}}$, удовлетворяющих тождествам Якоби (9.9), то функция композиции однозначно определяется в окрестности единицы группы и, следовательно, групповая структура задается в некоторой окрестности единицы группы $\mathbb{G}$. Таким образом, доказано, что произвольная алгебра Ли определяет локальную группу Ли с точностью до изоморфизма.

В обратную сторону: каждая локальная группа Ли определяет алгебру Ли с точностью до изоморфизма. Это сразу следует из определения алгебры Ли, как множества левоинвариантных векторных полей. □

Замечание. Явный вид функции композиции известен только в самых простейших случаях, например, для абелевой группы сложения векторов евклидова пространства $f^{\text{A}} = a^{\text{A}} + b^{\text{A}}$. В примере 9.1.10 функция композиции была построена для группы $\mathbb{GL}(n, \mathbb{R})$. В разделе 9.7 будет явно построена функция композиции в простейшем случае двумерной неабелевой группы Ли (группа аффинных преобразований прямой). В более сложных случаях решить явно уравнения (9.18) и (9.16) не удается. Но это обычно и не нужно. В приложениях, как правило, работают с матричным представлением алгебры Ли и структурными константами. □

Пусть $X = X_0^{\text{A}} L_{\text{A}}{}^{\text{B}}(a)\partial_{\text{B}}$ – произвольное левоинвариантное векторное поле. Форма $\omega = dx^{\text{A}}\omega_{\text{A}}(a)$ называется *левоинвариантной,* если ее значение на левоинвариантном векторном поле равно константе,

$$\omega(X) = X_0^{\text{A}} L_{\text{A}}{}^{\text{B}}\omega_{\text{B}} = \mathsf{const}.$$

Отсюда следует, что компоненты инвариантной 1-формы в координатном базисе имеют вид

$$\omega_{\text{A}}(a) = L_{\text{A}}^{-1\text{B}}(a)\omega_{0\text{B}}, \tag{9.19}$$

где $\omega_{0\text{B}}$ – компоненты левоинвариантной 1-формы в начале координат. При работе с левоинвариантными 1-формами удобно ввести левоинвариантный базис, который дуален к левоинвариантным векторным полям: $\omega^{\text{A}}(L_{\text{B}}) = \delta_{\text{B}}^{\text{A}}$. Он имеет следующий вид в координатном базисе:

$$\omega^{\text{A}}(a) = dx^{\text{B}} L_{\text{B}}^{-1\text{A}}(a),$$

Тогда произвольная левоинвариантная 1-форма будет иметь в левоинвариантном базисе постоянные компоненты $\omega = \omega^{\text{A}}\omega_{0\text{A}}$.

Прямая проверка с использованием тождества (9.18) показывает, что значение внешней производной левоинвариантной 1-формы $d\omega$ на двух произвольных левоинвариантных векторных полях X, Y пропорционально значению 1-формы ω на коммутаторе этих полей:

$$d\omega(X, Y) = -\frac{1}{2}\omega([X, Y]). \tag{9.20}$$

Это тождество известно, как *формула Маурера–Картана.* Ее можно переписать для левоинвариантного базиса 1-форм:

$$d\omega^{\text{A}} = -\frac{1}{2}\omega^{\text{B}} \wedge \omega^{\text{C}} f_{\text{BC}}{}^{\text{A}}. \tag{9.21}$$

При рассмотрении главных расслоений нам понадобится рассматривать формы, заданные на некотором многообразии $\mathbb{M}$, со значениями в алгебре Ли $\mathfrak{g}$. Введем для таких форм понятие коммутатора. Пусть L_{A}, $\mathrm{A} = 1, \ldots, \mathrm{N}$, – базис алгебры Ли. Пусть A и B – соответственно r и s формы на $\mathbb{M}$ со значениями в алгебре Ли $\mathfrak{g}$. Тогда они имеют вид

$$A = A^{\mathrm{A}} L_{\mathrm{A}}, \quad B = B^{\mathrm{A}} L_{\mathrm{A}},$$

где $A^{\mathrm{A}} \in \Lambda_r(\mathbb{M})$ и $B^{\mathrm{A}} \in \Lambda_s(\mathbb{M})$ для всех значений индекса $\forall \mathrm{A} = 1, \ldots, \mathrm{N}$. Определим коммутатор заданных форм следующим равенством

$$[A, B] := A^{\mathrm{A}} \wedge B^{\mathrm{B}} [L_{\mathrm{A}}, L_{\mathrm{B}}] = A^{\mathrm{A}} \wedge B^{\mathrm{B}} f_{\mathrm{AB}}{}^{\mathrm{C}} L_{\mathrm{C}}. \tag{9.22}$$

Выражение в правой части равенства представляет собой $r + s$ форму на $\mathbb{M}$ со значениями в алгебре Ли $\mathfrak{g}$.

Если на многообразии $\mathbb{M}$ заданы три формы A, B и C степеней r, s и t, соответственно, со значениями в алгебре Ли $\mathfrak{g}$, то из тождеств Якоби вытекает равенство

$$(-1)^{rt}\big[[A, B], C\big] + (-1)^{rs}\big[[B, C], A\big] + (-1)^{st}\big[[C, A], B\big]. \tag{9.23}$$

Пример 9.2.2. Пусть A и B – 1-формы на $\mathbb{M}$ со значениями в алгебре Ли $\mathfrak{g}$ и $X, Y \in \mathcal{X}(\mathbb{M})$ – два векторных поля на $\mathbb{M}$. Тогда значение коммутатора форм на векторных полях равно

$$\begin{aligned}[A, B](X, Y) &= A^{\mathrm{A}} \wedge B^{\mathrm{A}}(X, Y)[L_{\mathrm{A}}, L_{\mathrm{B}}] = \\ &= \frac{1}{2}\big(A^{\mathrm{A}}(X) B^{\mathrm{B}}(Y) - A^{\mathrm{A}}(Y) B^{\mathrm{B}}(X)\big) = \frac{1}{2}[A(X), B(Y)] - \frac{1}{2}[A(Y), B(X)].\end{aligned}$$

В частности,

$$[A, A](X, Y) = [A(X), A(Y)]. \qquad \square$$

Если A и B – соответственно r и s формы со значениями в алгебре Ли $\mathfrak{g}$, то нетрудно доказать следующие формулы:

$$\begin{aligned}[A, B] &= (-1)^{rs+1}[B, A], \\ d[A, B] &= [dA, B] + (-1)^r [A, dB].\end{aligned}$$

В дальнейшем особую роль будут играть формы, заданные на группе Ли $\widetilde{\mathbb{G}}$, со значениями в ее алгебре Ли $\mathfrak{g}$. То есть в качестве многообразия $\mathbb{M}$ мы рассматриваем саму группу $\widetilde{\mathbb{G}}$, которую для отличия мы отметили знаком тильды. Другими словами, рассмотрим два экземпляра одной и той же группы Ли: $\widetilde{\mathbb{G}}$ и $\mathbb{G}$. Пусть $\omega^{*\mathrm{A}}$ – левоинвариантный базис кокасательного расслоения к $\widetilde{\mathbb{G}}$. Реализуем алгебру Ли $\mathfrak{g}$, как алгебру левоинвариантных векторных полей на $\mathbb{G}$ с базисом L_{A}.

Определение. Левоинвариантная 1-форма на группе Ли $\widetilde{\mathbb{G}}$ со значениями в алгебре Ли $\mathfrak{g}$,

$$\theta = \omega^{*\mathrm{A}} L_{\mathrm{A}}, \tag{9.24}$$

называется *канонической*. $\square$

Если $X(\tilde{a}) \in \mathcal{X}(\widetilde{\mathbb{G}})$ – векторное поле на $\widetilde{\mathbb{G}}$, то его можно разложить по левоинвариантному базису, $X = X^{\mathrm{A}}(\tilde{a}) L^*_{\mathrm{A}}$. Тогда значение канонической формы на этом поле равно

$$\theta(X)(\tilde{a}) = X^{\mathrm{A}}(\tilde{a}) L_{\mathrm{A}}.$$

То есть каждой точке $\tilde{a} \in \widetilde{\mathbb{G}}$ ставится в соответствие левоинвариантное векторное поле на $\mathbb{G}$. Эта форма будет использована при изучении связностей на главных расслоениях в разделе 14.1. Формулу Маурера–Картана (9.21) можно переписать для канонической формы

$$d\theta = -\frac{1}{2}[\theta, \theta], \tag{9.25}$$

где справа стоит коммутатор в алгебре Ли $\mathfrak{g}$ и внешние произведения 1-форм $\omega^{*\mathrm{A}}$.

Предложение 9.2.1. *Любая группа Ли является $\mathbb{G}$ является ориентируемым многообразием.*

Доказательство. Левоинвариантные 1-формы ω^{A} определены на всем групповом многообразии и линейно независимы. Поэтому N-форма $\omega^1 \wedge \ldots \wedge \omega^{\mathrm{N}}$ нигде не обращается в нуль. Поэтому, согласно теореме 11.4.3, любая группа Ли ориентируема. □

9.3 Действие группы справа

Все, сказанное относительно действия группы на себя слева, естественным образом переносится на действие группы справа. Ниже мы рассмотрим отличия, которые при этом возникают. Для простоты, мы рассмотрим локальную группу Ли, т.е. окрестность единицы группы.

Рассмотрим группу Ли $\mathbb{G}$, как группу преобразований, действующую справа:

$$\mathbb{G} \ni b \;\mapsto\; r_a(b) := ba \in \mathbb{G}.$$

Пусть

$$V_{\mathrm{B}}{}^{\mathrm{A}}(a, b) = \frac{\partial f^{\mathrm{A}}(a, b)}{\partial a^{\mathrm{B}}}.$$

Дифференцируя тождество $f^{\mathrm{A}}(a, 0) = a^{\mathrm{A}}$ по a^{B}, получаем тождество

$$V_{\mathrm{B}}{}^{\mathrm{A}}(a, 0) = \delta^{\mathrm{A}}_{\mathrm{B}},$$

которое нам понадобится в дальнейшем.

Аналогично случаю левого действия группы, построим правоинвариантный базис векторных полей

$$R_{\mathrm{A}}(a) = R_{\mathrm{A}}{}^{\mathrm{B}}(a)\partial_{\mathrm{B}}, \tag{9.26}$$

где

$$R_{\mathrm{A}}{}^{\mathrm{B}}(a) = V_{\mathrm{A}}{}^{\mathrm{B}}(0, a) = \left.\frac{\partial f^{\mathrm{B}}(b, a)}{\partial b^{\mathrm{A}}}\right|_{b=0}. \tag{9.27}$$

В этом базисе произвольное правоинвариантное векторное поле имеет постоянные компоненты. Как и для левоинвариантных векторных полей, $\det R_{\mathrm{A}}{}^{\mathrm{B}}(a) \neq 0$.

Как и случае левого действия группы, можно доказать, что правоинвариантные векторные поля образуют N-мерную алгебру Ли над полем вещественных чисел. При этом коммутатор элементов правоинвариантного базиса

$$[R_{\mathrm{A}}, R_{\mathrm{B}}] = -f_{\mathrm{AB}}{}^{\mathrm{C}} R_{\mathrm{C}} \tag{9.28}$$

отличается знаком структурных констант от коммутатора левоинвариантного базиса. Алгебры Ли лево- и правоинвариантных векторных полей изоморфны, поскольку переходят друг в друга после замены $R_{\mathrm{A}} \leftrightarrow -R_{\mathrm{A}}$.

Формула для коммутатора правоинвариантных векторных полей (9.28) справедлива, как легко видеть, глобально на всей группе Ли.

Из разложения функции композиции (9.6) следует разложение для компонент правоинвариантных векторных полей относительно координатного базиса

$$R_{\text{B}}{}^{\text{A}}(a) = \delta^{\text{A}}_{\text{B}} + a^{\text{C}}\hat{f}_{\text{CB}}{}^{\text{A}} + a^{\text{D}}a^{\text{C}}h_{\text{CDB}}{}^{\text{A}} + \cdots . \tag{9.29}$$

Из тождества $b = baa^{-1}$, записанного в касательном пространстве, следует

$$R^{-1}{}_{\text{B}}{}^{\text{A}}(a) = V_{\text{B}}{}^{\text{A}}(a, a^{-1}). \tag{9.30}$$

Рассмотрим функцию $F(a) \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{G})$ на группе Ли $\mathbb{G}$. Подействуем на точки многообразия бесконечно малым элементом $\epsilon \in \mathbb{G}$ справа. Тогда точка a перейдет в точку $a' = a + da$, где

$$da^{\text{A}} = f^{\text{A}}(a, \epsilon) - a^{\text{A}} = \epsilon^{\text{B}} L_{\text{B}}{}^{\text{A}}(a).$$

Поскольку для функции $F'(a') = F(a)$, то изменение формы функции будет равно:

$$\delta F(a) = F'(a) - F(a) = -\epsilon^{\text{A}} L_{\text{A}}{}^{\text{B}} \partial_{\text{B}} F(a).$$

Таким образом, левоинвариантные векторные поля, с точностью до знака, являются генераторами действия группы Ли справа. Аналогично показывается, что генераторами групповых преобразований слева являются правоинвариантные векторные поля.

Поскольку преобразования, вызванные действием группы слева и справа коммутируют, то отсюда следует, что лево- и правоинвариантные векторные поля коммутируют между собой,

$$[L_{\text{A}}, R_{\text{B}}] = 0. \tag{9.31}$$

Это равенство справедливо, конечно, глобально.

Из формулы для производной Ли от векторного поля (3.112) и равенства (9.31) следует, что производная Ли от правоинвариантного векторного поля вдоль левоинвариантного векторного поля равна нулю и наоборот.

В дальнейшем под алгеброй Ли $\mathfrak{g}$ группы Ли $\mathbb{G}$ всегда понимается множество левоинвариантных векторных полей, которые генерируют действие группы справа.

9.4 Присоединенное представление

Рассмотрим автоморфизм группы Ли,

$$\mathsf{ad}\,(a): \quad \mathbb{G} \ni \ b \mapsto \mathsf{ad}\,(a)b := aba^{-1} \in \mathbb{G}, \tag{9.32}$$

который сопоставляется каждому элементу группы $a \in \mathbb{G}$. Каждый автоморфизм группы Ли порождает автоморфизм ее алгебры Ли, потому что левоинвариантные векторные поля получены с помощью группового действия. Поэтому автоморфизм $\mathsf{ad}\,a$ порождает автоморфизм алгебры Ли $\mathfrak{g}$, который также обозначается $\mathsf{ad}\,a \in \mathbb{GL}(\text{N}, \mathbb{R})$.

Определение. Представление $a \to \mathsf{ad}\,a$, где

$$\mathsf{ad}\,(a): \quad \mathfrak{g} \ni X = X_0^{\text{A}} L_{\text{A}} \mapsto X' = X_0^{\text{A}} S_{\text{A}}{}^{\text{B}}(a) L_{\text{B}} \in \mathfrak{g}, \tag{9.33}$$

индуцированное групповым действием (9.32), называется *присоединенным представлением* группы Ли $\mathbb{G}$ в ее алгебре Ли $\mathfrak{g}$. □

Присоединенное представление каждому элементу группы $a \in \mathbb{G}$ ставит в соответствие $\mathrm{N} \times \mathrm{N}$ матрицу $S_{\mathrm{A}}{}^{\mathrm{B}}(a)$. Мы будем писать

$$\mathsf{ad}\,(a) = S_{\mathrm{A}}{}^{\mathrm{B}}(a).$$

Ясно, что единичному элементу группы соответствует единичная матрица

$$\mathsf{ad}\,(e) = S_{\mathrm{A}}{}^{\mathrm{B}}(e) = \delta^{\mathrm{B}}_{\mathrm{A}},$$

а обратному элементу группы – обратная матрица

$$\mathsf{ad}\,(a^{-1}) = S_{\mathrm{A}}{}^{\mathrm{B}}(a^{-1}) = S^{-1}{}_{\mathrm{A}}{}^{\mathrm{B}}(a).$$

В наших обозначениях матрица для произведения двух элементов группы равна произведению матриц для каждого элемента,

$$S_{\mathrm{A}}{}^{\mathrm{B}}(ab) = S_{\mathrm{A}}{}^{\mathrm{C}}(b) S_{\mathrm{C}}{}^{\mathrm{B}}(a),$$

взятых в обратном порядке.

Замечание. Для абелевых групп присоединенное представление всегда тривиально. □

Ядром отображения (9.32) является центр группы. Каждому элементу центра группы соответствует единичная матрица присоединенного представления.

Для локальных неабелевых групп Ли можно построить явный вид матриц присоединенного представления в терминах функции композиции. С этой целью рассмотрим действие преобразования (9.32) в касательном пространстве в последовательности $b \mapsto (ab)a^{-1}$:

$$X^{\mathrm{A}}(b) \to X^{\mathrm{C}}(b) U_{\mathrm{C}}{}^{\mathrm{B}}(a,b) V_{\mathrm{B}}{}^{\mathrm{A}}(f(a,b), a^{-1}).$$

Полагая $b = 0$ и учитывая (9.30), получаем

$$X^{\mathrm{A}}_0 \mapsto X^{\mathrm{B}}_0 L_{\mathrm{B}}{}^{\mathrm{C}}(a) R^{-1\,\mathrm{A}}_{\mathrm{C}}(a) := X^{\mathrm{B}}_0 S_{\mathrm{B}}{}^{\mathrm{A}}(a),$$

где введена матрица присоединенного представления $S_{\mathrm{B}}{}^{\mathrm{A}}(a) \in \mathbb{GL}(n,\mathbb{R})$, сопоставляемая каждому элементу $a \in \mathbb{G}$. Таким образом получаем явные выражение для матрицы присоединенного представления через производные от функции композиции:

$$S_{\mathrm{B}}{}^{\mathrm{A}}(a) = L_{\mathrm{B}}{}^{\mathrm{C}}(a) R^{-1\,\mathrm{A}}_{\mathrm{C}}(a) = R_{\mathrm{B}}{}^{\mathrm{C}}(a^{-1}) L^{-1\,\mathrm{A}}_{\mathrm{C}}(a^{-1}), \tag{9.34}$$

где последнее выражение получено в результате рассмотрения действия $\mathsf{ad}\,a$ в последовательности $a(ba^{-1})$. Из этого представления следует, что

$$S_{\mathrm{B}}{}^{\mathrm{A}}(a^{-1}) = S^{-1}{}_{\mathrm{B}}{}^{\mathrm{A}}(a).$$

Разложения (9.15) и (9.29) приводят к следующему разложению матрицы присоединенного представления вблизи начала координат

$$S_{\mathrm{B}}{}^{\mathrm{A}}(a) = \delta^{\mathrm{A}}_{\mathrm{B}} + a^{\mathrm{C}} f_{\mathrm{CB}}{}^{\mathrm{A}} + \dots . \tag{9.35}$$

Третье слагаемое ? Отсюда следует, что структурные константы, взятые с обратным знаком, можно рассматривать, как генераторы присоединенного представления: $L_{(\mathrm{A})\mathrm{B}}{}^{\mathrm{C}} = -f_{\mathrm{AB}}{}^{\mathrm{C}}$. При этом первый индекс A нумерует генераторы и, для отличия, взят

в скобки. Второй и третий индексы структурных констант B, C рассматриваются, как матричные. Тождества Якоби (9.9) переписываются в виде

$$[L_{(\mathrm{A})}, L_{(\mathrm{B})}]_{\mathrm{C}}{}^{\mathrm{D}} = f_{\mathrm{AB}}{}^{\mathrm{E}} L_{(\mathrm{E})\mathrm{C}}{}^{\mathrm{D}}, \tag{9.36}$$

где квадратные скобки обозначают коммутатор матриц.

Рассмотрим два последовательных автоморфизма группы Ли $\mathbb{G}$, соответствующих элементам b и a

$$c \;\mapsto\; bcb^{-1} \;\mapsto\; abcb^{-1}a^{-1} = (ab)c(ab)^{-1}.$$

Соответствующее преобразование в алгебре Ли $\mathfrak{g}$ задается матрицей присоединенного представления для произведения $f(a,b)$

$$S_{\mathrm{A}}{}^{\mathrm{B}}(f(a,b)) = S_{\mathrm{A}}{}^{\mathrm{C}}(b) S_{\mathrm{C}}{}^{\mathrm{B}}(a), \tag{9.37}$$

которая равна произведению матриц для каждого из элементов, но взятых с обратным знаком. Пусть $b \ll 1$. Разложив это соотношение в ряд с использованием формулы (9.35) и разложения для функции композиции

$$f^{\mathrm{A}}(a,b) = a^{\mathrm{A}} + b^{\mathrm{B}} L_{\mathrm{B}}{}^{\mathrm{A}}(a) + \ldots,$$

в первом порядке по b получим правило дифференцирования матрицы присоединенного представления

$$L_{\mathrm{C}} S_{\mathrm{A}}{}^{\mathrm{B}} = L_{\mathrm{C}}{}^{\mathrm{D}} \partial_{\mathrm{D}} S_{\mathrm{A}}{}^{\mathrm{B}} = f_{\mathrm{CA}}{}^{\mathrm{D}} S_{\mathrm{D}}{}^{\mathrm{B}}. \tag{9.38}$$

Из этого равенства с учетом тождества $L_{\mathrm{C}}(S_{\mathrm{A}}{}^{\mathrm{D}} S^{-1}{}_{\mathrm{D}}{}^{\mathrm{B}}) = 0$ получаем правило действия левоинвариантных векторных полей на обратные матрицы присоединенного представления

$$L_{\mathrm{C}} S^{-1}{}_{\mathrm{A}}{}^{\mathrm{B}} = -S^{-1}{}_{\mathrm{A}}{}^{\mathrm{D}} f_{\mathrm{CD}}{}^{\mathrm{B}}. \tag{9.39}$$

Аналогично, раскладывая соотношение (9.37) в ряд по $a \ll 1$, получим

$$R_{\mathrm{C}} S_{\mathrm{A}}{}^{\mathrm{B}} = R_{\mathrm{C}}{}^{\mathrm{D}} \partial_{\mathrm{D}} S_{\mathrm{A}}{}^{\mathrm{B}} = S_{\mathrm{A}}{}^{\mathrm{D}} f_{\mathrm{CD}}{}^{\mathrm{B}}. \tag{9.40}$$

С учетом равенства $R_{\mathrm{C}}(S_{\mathrm{A}}{}^{\mathrm{D}} S^{-1}{}_{\mathrm{D}}{}^{\mathrm{B}}) = 0$ это дает

$$R_{\mathrm{C}} S^{-1}{}_{\mathrm{A}}{}^{\mathrm{B}} = -f_{\mathrm{CA}}{}^{\mathrm{D}} S^{-1}{}_{\mathrm{D}}{}^{\mathrm{B}}.$$

Замечание. Полученные формулы дифференцирования матриц присоединенного представления (9.38) и (9.40) нековариантны, поскольку частная производная от тензора не является тензором. Однако при рассмотрении алгебр Ли левоинвариантные векторные поля имеют постоянные компоненты относительно левоинвариантного базиса и поэтому достаточно ограничиться аффинными преобразованиями координат с постоянными коэффициентами. В этом случае частные производные преобразуются по тензорным правилам. □

Предложение 9.4.1. *Структурные константы группы Ли $\mathbb{G}$ инвариантны относительно присоединенного действия группы,*

$$f_{\mathrm{AB}}{}^{\mathrm{C}} = S_{\mathrm{A}}{}^{\mathrm{D}} S_{\mathrm{B}}{}^{\mathrm{E}} f_{\mathrm{DE}}{}^{\mathrm{F}} S^{-1}{}_{\mathrm{F}}{}^{\mathrm{C}}. \tag{9.41}$$

Доказательство. Подействуем присоединенным представлением (9.32) на групповое многообразие $\mathbb{G}$. Тогда базис левоинвариантных векторных полей преобразуется в соответствии с присоединенным представлением

$$L_{\text{A}} \mapsto S_{\text{A}}{}^{\text{B}} L_{\text{B}}.$$

При этом коммутационные соотношения (9.14) сохранят свой вид, поскольку действие дифференциала отображения сохраняет коммутатор векторных полей. Следовательно, для структурных констант справедливо соотношение

$$S_{\text{A}}{}^{\text{D}} S_{\text{B}}{}^{\text{E}} f_{\text{DE}}{}^{\text{C}} = f_{\text{AB}}{}^{\text{D}} S_{\text{D}}{}^{\text{C}}.$$

Умножив это равенство справа на S^{-1} получим (9.41). □

9.5 Группы Ли как римановы пространства

На групповом многообразии $\mathbb{G}$ можно определить метрику, превратив тем самым группу Ли в (псевдо-) риманово пространство. Среди всех возможных метрик важную роль играют метрики, инвариантные относительно групповых преобразований. Эти метрики описываются следующим образом. Зададим в начале координат произвольную симметричную невырожденную матрицу θ_{AB} и разнесем ее по групповому многообразию с помощью действия группы слева или справа. В результате получим соответственно лево- и правоинвариантные метрики. Компоненты этих метрик в лево- и правоинвариантном базисе имеют тот же вид θ_{AB}, что и начале координат. В координатном базисе $g = dx^{\text{A}} \otimes dx^{\text{B}} g_{\text{AB}}$ и компоненты метрик нетривиально зависят от точки $a \in \mathbb{G}$,

$$\begin{aligned} g^L_{\text{AB}}(a) &= L^{-1}{}_{\text{A}}{}^{\text{C}}(a) L^{-1}{}_{\text{B}}{}^{\text{D}}(a) \theta_{\text{CD}}, \\ g^R_{\text{AB}}(a) &= R^{-1}{}_{\text{A}}{}^{\text{C}}(a) R^{-1}{}_{\text{B}}{}^{\text{D}}(a) \theta_{\text{CD}}. \end{aligned} \tag{9.42}$$

В общем случае лево- и правоинвариантные метрики различны и их компоненты в координатном базисе нетривиально зависят от точки группового многообразия.

Замечание. Для абелевых групп лево- и правоинвариантные метрики равны, т.к. совпадают действия группы слева с справа. □

Скалярное произведение левоинвариантных векторных полей: $X = X_0^{\text{A}} L_{\text{A}}$ и $Y = Y_0^{\text{A}} L_{\text{A}}$, определенное левоинвариантной метрикой, равно

$$g^L(X,Y) = X_0^{\text{A}} Y_0^{\text{B}} g^L(L_{\text{A}}, L_{\text{B}}) = X_0^{\text{A}} Y_0^{\text{B}} \theta_{\text{AB}}$$

и не зависит от точки группы Ли $\mathbb{G}$.

Условия левой и правой инвариантности метрик в инвариантном виде имеют следующий вид. Пусть $X, Y \in \mathcal{X}(\mathbb{G})$ – два векторных поля на группе Ли $\mathbb{G}$. Тогда для лево- и правоинвариантные метрики определены соотношениями

$$\begin{aligned} l_a^* g^L(X,Y) &= g^L(l_{a*}X, l_{a*}Y), \\ r_a^* g^R(X,Y) &= g^R(r_{a*}X, r_{a*}Y), \end{aligned}$$

где l_a^* и r_a^* – возвраты левого и правого действия группы.

Особую роль играют двусторонне инвариантные метрики $g^L = g^R$ на неабелевых группах Ли. Для таких метрик скалярное произведение левоинвариантных векторных полей инвариантно относительно действия группы справа. Двусторонне инвариантные метрики существуют далеко не на всех группах Ли. Условие двусторонней инвариантности немедленно следует, например, из (9.42),

$$\theta_{\text{AB}} = S_{\text{A}}{}^{\text{C}}(a) S_{\text{B}}{}^{\text{D}}(a) \theta_{\text{CD}}, \qquad \forall a \in \mathbb{G},$$

где $S_{\text{A}}{}^{\text{B}}$ – матрица присоединенного представления. Для малых a это уравнение сводится к условию

$$f_{\text{AB}}{}^{\text{D}} \theta_{\text{DC}} + f_{\text{AC}}{}^{\text{D}} \theta_{\text{DB}} = 0. \tag{9.43}$$

То есть, если двусторонне инвариантная метрика на группе Ли существует, то структурные константы со всеми опущенными индексами должны быть антисимметричны по всем трем индексам.

Замечание. Двусторонне инвариантные метрики на группе Ли играют ту же роль, что и метрика Лоренца в пространстве Минковского $\mathbb{R}^{1,n-1}$ или евклидова метрика в $\mathbb{R}^n$. □

Построим двусторонне инвариантную метрику на неабелевой группе Ли в том случае, когда это возможно.

Определение. Свертка структурных констант алгебры Ли

$$\eta_{\text{AB}} = f_{\text{AC}}{}^{\text{D}} f_{\text{BD}}{}^{\text{C}} = \mathsf{tr}\,(f_{\text{A}} f_{\text{B}}) \tag{9.44}$$

называется *формой Киллинга–Картана.* □

Здесь мы рассматриваем структурные константы $f_{\text{AC}}{}^{\text{D}}$ в виде набора матриц. При этом второй и третий индексы рассматриваются, как матричные, а первый – нумерует матрицы. Форма (9.44) двусторонне инвариантна, что следует из инвариантности структурных констант (9.41).

Предложение 9.5.1. *Для произвольной группы Ли $\mathbb{G}$ структурные константы со всеми опущенными индексами,*

$$f_{\text{ABC}} = f_{\text{AB}}{}^{\text{D}} \eta_{\text{DC}}$$

антисимметричны по всем трем индексам,

$$f_{[abc]} = 0.$$

Доказательство. Прямое следствие тождеств Якоби (9.9), которое сводится к прямой проверке. □

Таким образом, если форма Киллинга–Картана является невырожденной, то она задает двусторонне инвариантную метрику на группе Ли. Форма Киллинга–Картана является невырожденной не для всякой группы Ли. Напомним, что связная группа Ли называется полупростой, если она не имеет нетривиальных инвариантных связных абелевых подгрупп.

Теорема 9.5.1 (Э. Картан). *Форма Киллинга–Картана для связной группы Ли является невырожденной тогда и только тогда, когда группа Ли является полупростой.*

Полупростые группы не исчерпывают весь класс групп Ли, на которых можно задать двусторонне инвариантную метрику. Например, на абелевых группах любая невырожденная матрица в единице, разнесенная по групповому многообразию, задает двусторонне инвариантную метрику.

Пример 9.5.1. Двумерная абелева группа Ли изоморфна либо евклидовой плоскости $\mathbb{R}^2$, либо цилиндру, либо тору. Пусть x, y – декартовы координаты на плоскости. Тогда лево- и правоинвариантные векторные поля совпадают и равны

$$L_1 = R_1 = \partial_x, \qquad L_2 = R_2 = \partial_y.$$

Двусторонне инвариантная метрика на $\mathbb{R}^2$ получается путем разнесения произвольной симметричной невырожденной 2×2 матрицы θ_{AB}, $\text{A}, \text{B} = 1, 2$, заданной в начале координат, с помощью действия группы. В результате получаем двусторонне инвариантную метрику, которая в декартовых координатах имеет вид θ_{AB} для всех точек $\mathbb{R}^2$. Евклидова плоскость с такой метрикой является однородным, но не изотропным пространством. При $\theta_{\text{AB}} = \delta_{\text{AB}}$ евклидова плоскость становится также изотропной, т.е. инвариантной относительно действия группы вращений $\mathbb{O}(2, \mathbb{R})$. Цилиндр и тор в этом случае неинвариантны относительно вращений. □

Форма Киллинга–Картана (9.44) задает метрику на групповом многообразии полупростой группы Ли $\mathbb{G}$ либо в лево-, либо в правоинвариантном базисе. Для определенности будем считать, что метрика задана в левоинвариантном базисе. Тогда в координатном базисе она будет нетривиально зависеть от точки группового многообразия:

$$g_{\text{AB}}(a) = L^{-1}{}_{\text{A}}{}^{\text{C}}(a) L^{-1}{}_{\text{B}}{}^{\text{D}}(a) \eta_{\text{CD}}.$$

Двусторонняя инвариантность формы Киллинга–Картана приводит к существованию, по крайней мере, 2N векторов Киллинга L_{A} и R_{A}. Уравнения Киллинга в неголономном базисе (8.100) выполнены ввиду антисимметрии символов Кристоффеля (9.45) по первым двум индексам.

Вычислим геометрические характеристики группового многообразия неабелевой полупростой группы Ли, рассматривая его, как (псевдо-)риманово пространство с нулевым кручением и неметричностью. Вычисления можно проводить в любом базисе, но в данном случае удобнее рассматривать все характеристики многообразия в неголономном базисе, определяемом левоинвариантными векторными полями L_{A}, поскольку компоненты метрики в этом базисе постоянны. Соответствующие формулы для вычислений приведены в разделе 8.9.

Компоненты неголономности базиса определяются коммутатором левоинвариантных векторных полей (9.14) и совпадают со структурными константами

$$c_{\text{AB}}{}^{\text{C}} = f_{\text{AB}}{}^{\text{C}}.$$

Символы Кристоффеля в неголономном базисе, вычисленные по формуле (8.99), равны

$$\widetilde{\omega}_{\text{ABC}} = \frac{1}{2} f_{\text{ABC}}, \tag{9.45}$$

где знак тильды означает, что кручение и неметричность равны нулю. В рассматриваемом случае символы Кристоффеля антисимметричны по первым двум индексам ввиду неголономности используемого базиса. Соответствующий тензор кривизны также задается структурными константами

$$\widetilde{R}_{\text{ABC}}{}^{\text{D}} = \frac{1}{4} f_{\text{AB}}{}^{\text{E}} f_{\text{CE}}{}^{\text{D}}.$$

Отсюда следуют выражения для тензора Риччи и скалярной кривизны

$$\widetilde{R}_{\mathrm{AB}} = \frac{1}{4}\eta_{\mathrm{AB}}, \qquad \widetilde{R} = \frac{\mathrm{N}}{4},$$

где N – размерность полупростой группы Ли.

Покажем, что полупростая группа Ли с формой Киллинга–Картана в качестве метрики, представляет собой пространство постоянной кривизны. Пусть структурные константы f_{ABC} задают полностью антисимметричный тензор третьего ранга в левоинвариантном базисе. Тогда ковариантная производная этого тензора со связностью (9.45),

$$\nabla_{\mathrm{A}} f_{\mathrm{BCD}} = L_{\mathrm{A}} f_{\mathrm{BCD}} - \frac{1}{2} f_{\mathrm{AB}}{}^{\mathrm{E}} f_{\mathrm{ECD}} - \frac{1}{2} f_{\mathrm{AC}}{}^{\mathrm{E}} f_{\mathrm{BED}} - \frac{1}{2} f_{\mathrm{AD}}{}^{\mathrm{E}} f_{\mathrm{BCE}} = 0,$$

равна нулю в силу тождеств Бианки. Поскольку связность является метрической, а подъем и опускание индексов можно переставлять с оператором ковариантного дифференцирования, то ковариантная производная от тензора кривизны равна нулю,

$$\nabla_{\mathrm{A}} \widetilde{R}_{\mathrm{BCD}}{}^{\mathrm{E}} = 0.$$

Это и означает, что группа Ли как риманово пространство является пространством постоянной кривизны.

Тензор кривизны со всеми опущенными индексами в неголономном базисе имеет вид

$$\widetilde{R}_{\mathrm{ABCD}} = -\frac{1}{4} f_{\mathrm{AB}}{}^{\mathrm{E}} f_{\mathrm{CDE}}, \tag{9.46}$$

в котором явно прослеживаются все свойства симметрии относительно перестановки индексов. Отметим, что тензор кривизны (9.46) нельзя записать в виде (**??**) через метрику. Действительно, равенство

$$f_{\mathrm{AB}}{}^{\mathrm{E}} f_{\mathrm{CDE}} = C(\eta_{\mathrm{AC}}\eta_{\mathrm{BD}} - \eta_{\mathrm{AD}}\eta_{\mathrm{BC}}), \qquad C = \mathsf{const},$$

не может быть выполнено ни при каких значениях константы C. Для доказательства достаточно свернуть это равенство сначала с η^{BD}, а затем с $f^{\mathrm{CD}}{}_{\mathrm{F}}$, что приведет к противоречию.

9.6 Группы Ли как пространства Римана–Картана

В предыдущем разделе связность на групповом многообразии определялась по метрике при нулевом кручении и неметричности. Ниже мы рассмотрим другой способ определения связности, который во многих отношениях является более естественным для групп Ли. А именно, отождествим групповое действие справа с параллельным переносом. Это означает, что результат параллельного переноса вектора из точки a в точку c совпадает с дифференциалом группового преобразования $c = f(a, b)$ под действием элемента $b = a^{-1}c$.

Формализуем данное определение связности. В рассматриваемом случае правоинвариантные векторные поля можно рассматривать, как результат параллельного переноса векторов из начала координат по всему групповому многообразию. В левоинвариантном базисе правоинвариантное векторное поле имеет вид

$$X = X_0^{\mathrm{A}} R_{\mathrm{A}}{}^{\mathrm{B}}(a)\partial_{\mathrm{B}} = X_0^{\mathrm{A}} S_{\mathrm{A}}{}^{\mathrm{B}}(a^{-1}) L_{\mathrm{B}},$$

где мы воспользовались представлением (9.34) для матрицы присоединенного представления. Несложные вычисления показывают, что разница векторов в соседних точках равна

$$\delta X^{\mathrm{A}}(a) = X^{\mathrm{A}}(a+da) - X^{\mathrm{A}}(a) = -X^{\mathrm{C}} da^{\mathrm{B}} f_{\mathrm{BC}}{}^{\mathrm{A}}.$$

С другой стороны, при параллельном переносе компоненты вектора получают приращение, определяемое аффинной связностью:

$$\delta X^{\mathrm{A}} = -X^{\mathrm{C}} da^{\mathrm{B}} \omega_{\mathrm{BC}}{}^{\mathrm{A}}.$$

Отсюда следует явное выражение для компонент аффинной связности в левоинвариантном базисе

$$\omega_{\mathrm{AB}}{}^{\mathrm{C}} = f_{\mathrm{AB}}{}^{\mathrm{C}}. \tag{9.47}$$

В правоинвариантном базисе $\delta X^{\mathrm{A}} = 0$, и связность тождественно равна нулю. Связность (9.47) отличается от связности Леви-Чивита (9.45) множителем $1/2$. Соответствующие тензоры кривизны и кручения, вычисленные по формулам для неголономного базиса (8.96) и (8.97), равны

$$R_{\mathrm{ABC}}{}^{\mathrm{D}} = 0, \tag{9.48}$$

$$T_{\mathrm{AB}}{}^{\mathrm{C}} = f_{\mathrm{AB}}{}^{\mathrm{C}}. \tag{9.49}$$

Поскольку тензор кривизны тождественно равен нулю, то групповое пространство является пространством абсолютного параллелизма. Так и должно быть, потому что результат параллельного переноса вектора из точки a в точку $c = ab$ однозначно определяется начальной и конечной точкой и не зависит от пути, вдоль которого осуществляется параллельный перенос.

Компоненты связности (9.47) в левоинвариантном базисе определены независимо от метрики и для произвольных, не обязательно полупростых, групп. На полупростых группах Ли эта связность является метрической:

$$\nabla_{\mathrm{A}} \eta_{\mathrm{BC}} = -\omega_{\mathrm{AB}}{}^{\mathrm{D}} \eta_{\mathrm{DC}} - \omega_{\mathrm{AC}}{}^{\mathrm{D}} \eta_{\mathrm{BD}},$$

где η_{BC} – двусторонне инвариантная форма Киллинга–Картана. Это значит, что групповое многообразие полупростых групп Ли представляет собой пространство Римана–Картана.

Группа Ли, рассматриваемая как пространство Римана–Картана является пространством постоянной (нулевой) кривизны и постоянного кручения. Действительно, ковариантная производная от тензора кривизны, очевидно, равна нулю. Ковариантная производная от тензора кручения со связностью (9.47),

$$\nabla_{\mathrm{A}} T_{\mathrm{BC}}{}^{\mathrm{D}} = L_{\mathrm{A}} T_{\mathrm{BC}}{}^{\mathrm{D}} - f_{\mathrm{AB}}{}^{\mathrm{E}} T_{\mathrm{EC}}{}^{\mathrm{D}} - f_{\mathrm{AC}}{}^{\mathrm{E}} T_{\mathrm{BE}}{}^{\mathrm{D}} + f_{\mathrm{AE}}{}^{\mathrm{D}} T_{\mathrm{BC}}{}^{\mathrm{E}} = 0,$$

также равна нулю в силу тождеств Якоби.

Данное определение связности не зависит от задания метрики на групповом многообразии, т.к. связность была определена исключительно групповой операцией. Попостроению, интегральные кривые правоинвариантных векторных полей на группе Ли являются геодезическими линиями для этой связности. Действительно, правоинвариантное векторное поле является касательным к интегральной кривой и в то же время является результатом параллельного переноса со связностью (9.47).

Замечание. Для задания на группе Ли инвариантной аффинной связности общего вида можно задать в некоторой точке метрику, кручение и тензор неметричности, а затем все эти объекты разнести по групповому многообразию. □

9.7 Двумерная неабелева группа Ли

Проиллюстрируем общие свойства групп Ли на примере простейшей неабелевой группы Ли $\mathbb{G}$. Размерность этой группы минимальна и равна двум. Этот пример интересен, поскольку нетривиален и в то же время достаточно прост для явного построения всех геометрических конструкций.

Простейшая двумерная алгебра Ли $\mathfrak{g}$ с образующими $\{L_{\text{A}}\} = (L_x, L_y)$, $\text{A} = x, y$, задается коммутационными соотношениями:

$$\begin{aligned} &[L_x, L_x] = [L_y, L_y] = 0, \\ &[L_x, L_y] = \alpha L_y, \qquad \alpha \in \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{9.50}$$

При $\alpha = 0$ эта группа является абелевой. При $\alpha \neq 0$ растяжкой координат, которая соответствует преобразованию $L_x \to \alpha L_x$, можно обратить структурную константу в единицу, $\alpha = 1$. Группа, соответствующая этой алгебре является подгруппой группы Лоренца $\mathbb{SO}(1,2)$.

Предложение 9.7.1. *Алгебра Ли (9.50) является единственной двумерной неабелевой алгеброй Ли с точностью до изоморфизма.*

Доказательство. В общем случае нетривиальное коммутационное соотношение для неабелевой алгебры Ли определяется двумя отличными от нуля постоянными α и β:

$$[L_x, L_y] = \beta L_x + \alpha L_y.$$

Сдвигом

$$L_y \mapsto L_x + \frac{\alpha}{\beta} L_y$$

это коммутационное соотношение приводится к виду (9.50). □

Зададим эту алгебру двумя левоинвариантными векторными полями (генераторами действия группы справа) на евклидовой плоскости $\mathbb{R}^2$ в декартовых координатах x, y:

$$L_x = \partial_x, \qquad L_y = \mathsf{e}^{\alpha x}\partial_y. \tag{9.51}$$

Нетрудно проверить, что эти векторные поля действительно удовлетворяют алгебре (9.50). При $\alpha = 0$ группа Ли является абелевой и совпадает с группой трансляций плоскости. Поэтому ограничимся неабелевым случаем $\alpha > 0$. Структурные константы группы Ли равны

$$\begin{aligned} f_{xy}{}^{x} &= -f_{yx}{}^{x} = 0, \\ f_{xy}{}^{y} &= -f_{yx}{}^{y} = \alpha. \end{aligned}$$

Простые вычисления дают форму Киллинга–Картана (9.44)

$$\eta_{\text{AB}} = \begin{pmatrix} \alpha^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Эта форма вырождена, поскольку группа Ли $\mathbb{G}$ содержит инвариантную абелеву подгруппу с образующей L_y, и не является полупростой.

Постоим функцию композиции $f^{\text{A}}(a,b)$. Обозначим координаты элементов группы $a,b\in\mathbb{G}$ через $a=(x_a,y_a)$ и $b=(x_b,y_b)$. Тогда система дифференциальных уравнений на функцию композиции (9.16) примет вид

$$\frac{\partial f^x(a,b)}{\partial x_b}=1,\qquad \frac{\partial f^y(a,b)}{\partial x_b}=0,$$
$$\frac{\partial f^x(a,b)}{\partial y_b}=0,\qquad \frac{\partial f^y(a,b)}{\partial y_b}=\mathsf{e}^{\alpha(f^x-x_b)}.$$

Два уравнения на f^x с учетом начального условия $f^x(a,0)=x_a$ имеют единственное решение $f^x(a,b)=x_a+x_b$. Аналогично, оставшиеся уравнения определяют вторую компоненту функции композиции $f^y(a,b)=y_a+\mathsf{e}^{\alpha x_a}y_b$. Таким образом, дифференциальные уравнения (9.16) с начальными условиями $a^{\text{A}}=f^{\text{A}}(a,0)$ однозначно определили функцию композиции по левоинвариантным векторным полям L_{A}

$$\{f^{\text{A}}(a,b)\}=(x_a+x_b,y_a+\mathsf{e}^{\alpha x_a}y_b). \tag{9.52}$$

Поскольку функция композиции определена для всех $a,b\in\mathbb{R}^2$ и отображает $\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2$ на всю плоскость $\mathbb{R}^2$, то группа Ли $\mathbb{G}$, как многообразие, диффеоморфна евклидовой плоскости $\mathbb{R}^2$ и, следовательно, некомпактна.

Несложные вычисления показывают, что построенная функция композиции (9.52) действительно удовлетворяет всем групповым аксиомам (9.5) с обратным элементом:

$$a^{-1}=(-x_a,-\mathsf{e}^{-\alpha x_a}y_a).$$

Таким образом, мы построили неабелеву групповую структуру на евклидовой плоскости $\mathbb{R}^2$. Вспомним также, что плоскость $\mathbb{R}^2$ можно рассматривать, как абелеву группу Ли двумерных трансляций. Тем самым мы показали, что на одном и том же многообразии возможно задание различных групповых структур.

Знание функции композиции позволяет вычислить все объекты на групповом многообразии, которые задаются групповым действием. В частности, правоинвариантные векторные поля (9.26) имеют вид:

$$R_x=\partial_x+\alpha y\partial_y,\qquad R_y=\partial_y, \tag{9.53}$$

и удовлетворяют коммутационным соотношениям:

$$[R_x,R_x]=[R_y,R_y]=0$$
$$[R_x,R_y]=-\alpha R_y,$$

которые отличаются знаком от коммутационных соотношений алгебры Ли левоинвариантных векторных полей (9.50). Нетрудно также проверить, что лево- и правоинвариантные векторные поля коммутируют, $[L_{\text{A}},R_{\text{B}}]=0$.

Построим интегральные кривые левоинвариантных векторных полей. Произвольное левоинвариантное векторное поле задается двумя постоянными $X_0,Y_0\in\mathbb{R}$

$$L=X_0\partial_x+Y_0\,\mathsf{e}^{\alpha x}\partial_y.$$

Соответствующие интегральные кривые $(x(t),y(t))$ определяются системой уравнений

$$\dot x=X_0,$$
$$\dot y=Y_0\,\mathsf{e}^{\alpha x}.$$

При $X_0 \neq 0$, эти уравнения имеют общее решение, задающее интегральную кривую в параметрическом виде

$$x = X_0 t + x_0,$$
$$y = \frac{Y_0}{\alpha X_0}\, \mathsf{e}^{\alpha x_0}(\, \mathsf{e}^{\alpha X_0 t} - 1) + y_0,$$

где постоянные интегрирования x_0, y_0 являются координатами точки, через которую проходит интегральная кривая при $t = 0$. Отсюда следует соотношение, определяющее форму интегральной кривой

$$y = \frac{Y_0}{\alpha X_0}(\, \mathsf{e}^{\alpha x} - \, \mathsf{e}^{\alpha x_0}) + y_0.$$

При $X_0 = 0$ интегральные кривые параллельны оси y. Вид интегральных кривых, проходящих через начало координат под разными углами, которые определяются постоянными X_0, Y_0, показан на рис. 9.1

Рис. 9.1: Интегральные кривые для левоинвариантных векторных полей, проходящие через начало координат, $x_0 = 0$, $y_0 = 0$, под углом $\mathsf{arctg}\,(Y_0/X_0)$. fintct

Интегральные кривые определены для всех значений параметра $t \in \mathbb{R}$ и поэтому левоинвариантные векторные поля полны.

Зададим теперь геометрию, т.е. метрику и аффинную связность, на группе Ли $\mathbb{G}$. Конечно, интерес представляют те геометрические объекты, которые согласованы с групповой операцией. Начнем с метрики. Поскольку группа Ли $\mathbb{G}$ неабелева и не является полупростой, то на ней не существует двусторонне инвариантной метрики. Лучшее, что можно сделать, это построить право- или левоинвариантную метрику. С этой целью зададим матрицу θ_{AB} в начале координат и разнесем ее с помощью действия группы преобразований. Для правоинвариантной метрики в координатном базисе (9.42) имеем

$$g_{\text{AB}} = g^R_{\text{AB}}(a) = R^{-1\,\text{C}}_{\text{A}}(a) R^{-1\,\text{D}}_{\text{B}}(a)\theta_{\text{CD}}, \tag{9.54}$$

где матрица θ_{AB} симметрична и невырождена, а в остальном – совершенно произвольна. В частности, она может иметь лоренцеву сигнатуру, т.е. на группе Ли $\mathbb{G}$ можно построить как риманову, так и псевдориманову геометрию.

Рассмотрим случай, когда в начале координат задана единичная матрица, $\theta_{\text{AB}} = \delta_{\text{AB}}$. Тогда формула (9.54), в которой матрицы $R_{\text{A}}{}^{\text{B}}$ определены равенствами (9.53), задает следующую метрику в декартовых координатах на плоскости $\mathbb{R}^2$

$$g_{\text{AB}} = \begin{pmatrix} 1 + \alpha^2 y^2 & -\alpha y \\ -\alpha y & 1 \end{pmatrix}. \tag{9.55}$$

Эта метрика имеет единичный определитель, $\det g_{\text{AB}} = 1$, и ее обратная имеет вид

$$g^{\text{AB}} = \begin{pmatrix} 1 & \alpha y \\ \alpha y & 1 + \alpha^2 y^2 \end{pmatrix}.$$

Прямые вычисления дают следующие выражения для символов Кристоффеля:

$$\widetilde{\Gamma}_{xx}{}^{x} = -\alpha^3 y^2, \qquad \widetilde{\Gamma}_{xx}{}^{y} = -\alpha^2 y(1 + \alpha^2 y^2),$$
$$\widetilde{\Gamma}_{xy}{}^{x} = \widetilde{\Gamma}_{yx}{}^{x} = \alpha^2 y, \qquad \widetilde{\Gamma}_{xy}{}^{y} = \widetilde{\Gamma}_{yx}{}^{y} = \alpha^3 y^2,$$
$$\widetilde{\Gamma}_{yy}{}^{x} = -\alpha, \qquad \widetilde{\Gamma}_{yy}{}^{y} = -\alpha^2 y.$$

У соответствующего тензора кривизны со всеми опущенными индексами только одна компонента отлична от нуля:

$$\widetilde{R}_{xyxy} = \alpha^2,$$

что можно переписать в ковариантном виде

$$\widetilde{R}_{\text{ABCD}} = \alpha^2(g_{\text{AC}}g_{\text{BD}} - g_{\text{AD}}g_{\text{BC}}).$$

Тем самым групповое многообразие $\mathbb{G} \approx \mathbb{R}^2$ с метрикой (9.55) становится пространством постоянной кривизны (см. раздел **??**). Соответствующий тензор Риччи и скалярная кривизна нетривиальны:

$$\begin{aligned}
\widetilde{R}_{xx} &= \alpha^2(1 + \alpha^2 y^2),\\
\widetilde{R}_{xy} &= \widetilde{R}_{yx} = -\alpha^3 y,\\
\widetilde{R}_{yy} &= \alpha^2,\\
\widetilde{R} &= -2K = 2\alpha^2,
\end{aligned}$$

где $K = -\alpha^2$ – гауссова кривизна двумерной группы Ли $\mathbb{G}$. Это – поверхность постоянной отрицательной кривизны (одна компонента двуполостного гиперболоида), которая рассмотрена в разделе **??**.

9.8 Гомоморфизмы групп Ли

Определение. Отображение $f : \mathbb{G} \to \mathbb{H}$ называется *гомоморфизмом групп Ли*, если f гладко и в то же время является гомоморфизмом групп. Если, кроме того, f является диффеоморфизмом, то отображение f называется *изоморфизмом групп Ли*. Изоморфизм группы Ли на себя называется ее *автоморфизмом*. □

Можно доказать, что из непрерывности гомоморфизма $f : \mathbb{G} \to \mathbb{H}$ следует его гладкость [**?**].

Определение. Гомоморфизм $\rho : \mathbb{G} \to \mathbb{H}$ называется *представлением* группы Ли $\mathbb{G}$, если $\mathbb{H} = \mathsf{aut}(\mathbb{V})$ для некоторого векторного пространства $\mathbb{V}$, или $\mathbb{H} = \mathbb{GL}(n, \mathbb{C})$, или $\mathbb{H} = \mathbb{GL}(n, \mathbb{R})$. Если гомоморфизм $\rho : \mathbb{G} \to f(\mathbb{G}) \subset \mathbb{H}$ является изоморфизмом, то представление называется *точным*. Представление ρ группы Ли $\mathbb{G}$ в векторном пространстве $\mathbb{V}$ мы обозначаем парой $(\rho, \mathbb{V})$. □

Замечание. В определении представления во всех трех случаях каждому элементу группы $\mathbb{G}$ ставится в соответствие матрица. Если элементами матриц являются вещественные или комплексные числа, то говорят, соответственно, о *вещественном* или *комплексном* представлении. При этом все матрицы имеют отличный от нуля определитель, т.к. у каждого элемента группы должен быть обратный элемент. Следовательно, каждой матрице представления соответствует некоторый автоморфизм векторного пространства. Для точного представления группы образ $f(\mathbb{G}) \subset \mathbb{H}$ совсем не обязательно совпадает со всем $\mathbb{H}$. □

Определение. Пусть $\mathfrak{g}$ и $\mathfrak{h}$ – алгебры Ли. Тогда отображение $\varphi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ называется *гомоморфизмом алгебр Ли*, если оно линейно и сохраняет скобку Ли, т.е. $\varphi[X, Y] = [\varphi(X), \varphi(Y)] \in \mathfrak{h}$ для всех $X, Y \in \mathfrak{g}$. Если, кроме того, φ является взаимно однозначным отображением "на" (биекцией), то φ называется *изоморфизмом алгебр Ли*. Изоморфизм алгебры Ли на себя называется ее *автоморфизмом*. □

В определении гомоморфизма алгебр Ли мы не требуем гладкости отображения φ, т.к. алгебры Ли рассматриваются, как векторные пространства, а не многообразия. С другой стороны, на любом векторном пространстве можно ввести гладкую структуру многообразия, тогда из линейности отображения φ будет следовать его гладкость.

Определение. Гомоморфизм $\phi: \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ называется *представлением алгебры Ли* $\mathfrak{g}$, если $\mathfrak{h} = \mathsf{end}(\mathbb{V})$ для некоторого векторного пространства $\mathbb{V}$, или $\mathfrak{h} = \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$, или $\mathfrak{h} = \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$. Если гомоморфизм $\phi: \mathfrak{g} \to \varphi(\mathfrak{g}) \subset \mathfrak{h}$ является изоморфизмом, то представление называется *точным*. □

Замечание. Как и в случае представления группы каждый элемент представления алгебры является матрицей. Однако эти матрицы могут быть вырождены и, соответственно, задавать только эндоморфизм векторного пространства. □

Пусть $f: \mathbb{G} \to \mathbb{H}$ – гомоморфизм групп Ли. Так как под действием отображения f единица группы $\mathbb{G}$ переходит в единицу группы $\mathbb{H}$, то дифференциал отображения отображает касательные пространства к единицам групп:

$$f_*: \ \mathbb{T}_e(\mathbb{G}) \ \to \ \mathbb{T}_e(\mathbb{H}).$$

Замечание. Единицы разных групп мы обозначаем одним и тем же символом e, т.к. это не приводит к путанице. □

Поскольку касательные пространства к единицам изоморфны алгебрам Ли, то дифференциал отображения индуцирует отображение алгебр, которое мы также будем обозначать f_*. Таким образом,

$$f_*: \ \mathfrak{g} \ \to \ \mathfrak{h}, \tag{9.56}$$

где образом $f_*(X)$ для $X \in \mathfrak{g}$ является единственное левоинвариантное векторное поле на $\mathbb{H}$, такое, что

$$f_*(X)(e) = f_*(X(e)).$$

Предложение 9.8.1. *Пусть $\mathbb{G}$ и $\mathbb{H}$ – группы Ли с алгебрами Ли $\mathfrak{g}$ и $\mathfrak{h}$ соответственно, и пусть $f: \mathbb{G} \to \mathbb{H}$ – гомоморфизм групп Ли. Тогда отображение (9.56) является гомоморфизмом алгебр Ли.*

Доказательство. Дифференциал отображения линеен и сохраняет скобку Ли (3.65). □

Пусть $f: \mathbb{G} \to \mathbb{H}$ – гомоморфизм групп Ли. Тогда возврат отображения f^* отображает левоинвариантные 1-формы на $\mathbb{H}$ в левоинвариантные 1-формы на $\mathbb{G}$, как отображение сопряженного пространства к $\mathfrak{h}$ в сопряженное пространство к $\mathfrak{g}$.

Пример 9.8.1 (Обозначения). Запишем вектор из векторного пространства $\mathbb{V}$ в виде $X = X^i \boldsymbol{e}_i$, где $\boldsymbol{e}_i$, $i = 1, \ldots, \mathsf{dim}\,\mathbb{V}$, – некоторый базис. Если задано представление $(\rho, \mathbb{V})$ группы Ли $\mathbb{G}$, то мы пишем

$$\mathbb{G} \ni a: \ \ \mathbb{V} \ni X = X^i \boldsymbol{e}_i \mapsto X' = X^i S_i{}^j \boldsymbol{e}_j \in \mathbb{V}.$$

То есть каждому элементу группы $a \in \mathbb{G}$ соответствует матрица $S_i{}^j(a)$. По определению, все элементы матрицы гладко зависят от a. Мы пишем

$$\rho: \ \ \mathbb{G} \ni a \mapsto S_i{}^j(a) \in \mathsf{aut}\,\mathbb{V}.$$

Ясно, что единичному элементу группы соответствует единичная матрица,

$$S_i{}^j(e) = \delta_i^j,$$

а обратному элементу группы – обратная матрица,

$$S_i{}^j(a^{-1}) = S^{-1}{}_j^j.$$

Произведению двух элементов группы ab соответствует матрица

$$S_i{}^j(ab) = S_i{}^k(b) S_k{}^j(a),$$

которая равна произведению матриц для каждого элемента, взятых в обратном порядке. Порядок матриц является следствием принятого нами соглашения в теории групп преобразований, где элемент группы, по-определению, действует на точку многообразия справа (см. раздел 10.1).

Дифференциал отображения ρ_* отображает алгебры Ли:

$$\rho_* : \quad \mathfrak{g} \ni L_{\mathrm{A}} \mapsto L_{\mathrm{A}i}{}^j \in \mathsf{end}\,\mathbb{V}.$$

с матрицами представления $L_{\mathrm{A}i}{}^j$ генераторов L_{A}, которые удовлетворяют тем же коммутационным соотношениям, что и левоинвариантный базис векторных полей на группе Ли

$$[L_{\mathrm{A}}, L_{\mathrm{B}}]_i{}^j = f_{\mathrm{AB}}{}^{\mathrm{C}} L_{\mathrm{C}i}{}^j, \tag{9.57}$$

где $f_{\mathrm{AB}}{}^{\mathrm{C}}$ – структурные константы группы Ли $\mathbb{G}$, определенные в (9.14).

Можно доказать, что матрицы представления группы Ли $\mathbb{G}$ вблизи единицы группы в линейном приближении имеют вид

$$S_i{}^j(da) = \delta_i{}^j - da^{\mathrm{A}} L_{\mathrm{A}i}{}^j. \tag{9.58}$$

Найдем правила дифференцирования матриц представления. С одной стороны, используя (9.58), имеем

$$S_i{}^j\big(f(a, da)\big) = S_i{}^k(da) S_k{}^j(a) = \left(\delta_i^k - da^{\mathrm{A}} L_{\mathrm{A}i}{}^k\right) S_k{}^j(a). \tag{9.59}$$

С другой стороны, матрицы представления можно разложить в ряд Тейлора

$$S_i{}^j\big(f(a, da)\big) = S_i{}^j(a) + da^{\mathrm{A}} L_{\mathrm{A}} S_i{}^j, \tag{9.60}$$

где левоинвариантные векторные поля L_{A} действуют на матрицы представления, как дифференцирования, и мы воспользовались равенством

$$f^{\mathrm{A}}(a, da) \simeq a^{\mathrm{A}} + da^{\mathrm{B}} L_{\mathrm{B}}{}^{\mathrm{A}}.$$

Сравнивая формулы (9.59) и (9.60), получаем правило дифференцирования матриц представления

$$L_{\mathrm{A}} S_i{}^j = -L_{\mathrm{A}i}{}^k S_k{}^j. \tag{9.61}$$

Дифференцируя равенство $S^{-1}S = \mathbb{1}$, получаем правило дифференцирования обратных матриц представления

$$L_{\mathrm{A}} S^{-1}{}_i^j = S^{-1}{}_i^k L_{\mathrm{A}k}{}^j. \tag{9.62}$$

Каждому автоморфизму $\rho(a)$ векторного пространства $\mathbb{V}$ соответствует гомоморфизм алгебр $\rho_*(a)$. Поскольку гомоморфизм алгебр сохраняет скобку Ли, то матрицы представления генераторов группы инвариантны,

$$L_{\mathrm{A}i}{}^j = S^{-1}{}_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} S^{-1}{}_i^k L_{\mathrm{B}k}{}^l S_l{}^j. \quad \square \tag{9.63}$$

Продолжим общее рассмотрение.

Определение. Пара $(f, \mathbb{H})$ называется *подгруппой Ли* группы Ли $\mathbb{G}$, если выполнены следующие условия:
1) $\mathbb{H}$ – группа Ли;
2) $(f, \mathbb{H})$ – подмногообразие в $\mathbb{G}$;
3) $f: \mathbb{H} \to \mathbb{G}$ – групповой гомоморфизм.
Пара $(f, \mathbb{H})$ называется *замкнутой подгруппой Ли* в $\mathbb{G}$, если к тому же $f(\mathbb{H})$ – замкнутое подмногообразие в $\mathbb{G}$. □

Определение замкнутого подмногообразия было дано в разделе 3.10. Если группа Ли $\mathbb{G}$ связна и $\mathbb{H}$ не изоморфна $\mathbb{G}$, то размерность замкнутой подгруппы Ли всегда меньше размерности самой группы.

Определение. Подпространство $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ называется *подалгеброй Ли* алгебры Ли $\mathfrak{g}$, если для любых $X, Y \in \mathfrak{h}$ коммутатор $[X, Y]$ тоже лежит в $\mathfrak{h}$. Мы будем также употреблять краткую запись этого условия: $[\mathfrak{h}, \mathfrak{h}] \subset \mathfrak{h}$. □

Ясно, что любая подалгебра сама является алгеброй.

Пусть $(f, \mathbb{H})$ – подгруппа Ли в $\mathbb{G}$, и $\mathfrak{h}$ и $\mathfrak{g}$ – соответствующие алгебры. Тогда дифференциал отображения f_* задает изоморфизм $\mathfrak{h}$ с подалгеброй $f_*(\mathfrak{h})$ в алгебре $\mathfrak{g}$.

Гомоморфизмы групп можно описать следующим образом. Пусть $f: \mathbb{G} \to \mathbb{H}$ – сюръективное отображение. Если это отображение является взаимно однозначным, то мы имеем изоморфизм групп, $\mathbb{G} \simeq \mathbb{H}$. Если отображение f не является взаимно однозначным, то ядро этого отображения $\ker f$ представляет собой нормальную подгруппу в $\mathbb{G}$. Тогда фактор группа $\mathbb{G}/\ker f$ изоморфна $\mathbb{H}$. Если отображение f не является сюръективным, то группа $\mathbb{G}$ сюръективно отображается на какую то подгруппу $\mathbb{H}_1 \subset \mathbb{H}$. Если отображение $\mathbb{G}$ на $\mathbb{H}_1$ взаимно однозначно, то отображение f является мономорфизмом. В противном случае, $\mathbb{G}/\ker f \simeq \mathbb{H}_1$.

Продолжим общее обсуждение.

Теорема 9.8.1. *Пусть $\mathbb{G}$ – связная группа Ли, и $\mathbb{U}$ – некоторая окрестность единицы. Тогда*

$$\mathbb{G} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \mathbb{U}^k, \tag{9.64}$$

где множество элементов $\mathbb{U}^k$ состоит из всех возможных произведений k элементов из $\mathbb{U}$.

Доказательство. См., например, [**?**]. □

Замечание. Основываясь на теореме 9.8.1, иногда говорят, что произвольная окрестность единицы группы Ли (соответствующая локальная группа Ли) порождает всю связную компоненту единицы. Это не так. Знание локальной группы Ли недостаточно для построения всей связной компоненты единицы группы. Например, группы Ли $\mathbb{SO}(3)$ и $\mathbb{SU}(2)$ имеют одинаковые локальные группы Ли, однако не изоморфны. Дело в том, что в формуле (9.64) есть произведения большого числа элементов локальной группы Ли, которые лежат вне $\mathbb{U}$. То есть для построения связной компоненты единицы по формуле (9.64) необходимо знание правила умножения не только элементов локальной группы Ли, но и всех других элементов группы. □

Теорема 9.8.2. *Пусть $\mathbb{G}$ – группа Ли с алгеброй Ли $\mathfrak{g}$, и пусть $\tilde{\mathfrak{h}}$ – подалгебра в $\mathfrak{g}$. Тогда существует единственная связная односвязная ??? подгруппа Ли $(f, \mathbb{H})$ группы $\mathbb{G}$ с алгеброй $\mathfrak{h}$, такая, что $f_*(\mathfrak{h}) = \tilde{\mathfrak{h}}$.*

Доказательство. Основано на теореме Фробениуса [?]. Левоинвариантные векторные поля из подалгебры $\mathfrak{h}$, согласно определению, находятся в инволюции. Из теоремы Фробениуса следует, что в каждой точке группы они задают интегральные подмногообразия. Максимальное интегральное подмногообразие, проходящее через единицу группы, и есть подгруппа Ли $(f, \mathbb{H})$. При этом она обязательно является замкнутым множеством. □

Следствие. Существует взаимно однозначное соответствие между связными и односвязными ? подгруппами Ли группы Ли и подалгебрами ее алгебры Ли. □

Теорема 9.8.3. *Пусть $(f, \mathbb{H})$ – подгруппа Ли группы Ли $\mathbb{G}$. Тогда отображение f является регулярным вложением тогда и только тогда, когда $(f, \mathbb{H})$ – замкнутая подгруппа в $\mathbb{G}$.*

Доказательство. См., например, [?]. □

Теорема 9.8.4 (Адо). *Каждая алгебра Ли $\mathfrak{g}$ имеет точное (инъективное) представление в алгебру $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ для некоторого n.*

Следствие. Для каждой алгебры Ли $\mathfrak{g}$ существует группа Ли $\mathbb{G}$ (и, в частности, односвязная группа Ли) с данной алгеброй Ли. □

Замечание. Если у алгебры Ли $\mathfrak{g}$ нулевой центр (т.е. единственный элемент, коммутирующий со всеми элементами алгебры – это нуль), то точное представление можно получить из присоединенного. Для этого просто определяем отображение

$$\mathsf{ad} : \quad \mathfrak{g} \ni X \ \mapsto \ \mathsf{ad}_X \in \mathsf{end}\,\mathfrak{g}$$

по формуле $\mathsf{ad}_X(Y) = [X, Y], \forall Y \in \mathfrak{g}$. После этого проверяем, что это – гомоморфизм алгебр Ли. Если у $\mathfrak{g}$ нулевой центр, то гомоморфизм инъективен, и мы получаем точное представление алгебры Ли $\mathfrak{g}$ в $\mathsf{end}\,\mathfrak{g}$. □

9.9 Экспоненциальное отображение для групп Ли

Определение. Гомоморфизм $f : \mathbb{R} \to \mathbb{G}$ вещественной прямой, рассматриваемой как группа Ли по сложению, в группу Ли называется *однопараметрической подгруппой* группы Ли $\mathbb{G}$. □

Рассмотрим отображение соответствующих алгебр Ли. Элемент алгебры Ли $\mathfrak{r}$ вещественной прямой $t \in \mathbb{R}$ имеет вид $s\partial_t \in \mathfrak{r}$, где $s \in \mathbb{R}$ и ∂_t – базисный вектор касательного пространства к $\mathbb{R}$ в нуле. Пусть $\mathfrak{g}$ – алгебра Ли группы Ли $\mathbb{G}$, которую в данном случае удобнее отождествить с касательным пространством к единице группы. Рассмотрим произвольный элемент алгебры Ли $X \in \mathfrak{g}$. Тогда отображение

$$\mathfrak{r} \ni s\partial_t \mapsto sX \in \mathfrak{g}$$

является гомоморфизмом алгебры Ли $\mathfrak{r}$ в алгебру Ли $\mathfrak{g}$. Так как вещественная прямая односвязна, то по утверждению теоремы 9.11.11 существует единственная однопараметрическая подгруппа,

$$\mathsf{exp}_X : \quad \mathbb{R} \to \mathbb{G}, \tag{9.65}$$

такая, что

$$(\mathsf{exp}_X)_*(s\partial_t) = sX. \tag{9.66}$$

Определим *экспоненциальное отображение* алгебры Ли $\mathfrak{g}$ в группу Ли $\mathbb{G}$

$$\mathsf{exp} : \quad \mathfrak{g} \to \mathbb{G}, \tag{9.67}$$

полагая

$$\mathsf{exp}\,(X) = \mathsf{exp}_X(1).$$

Происхождение такой терминологии будет ясно из дальнейшего, когда будет показано, что для линейной группы $\mathbb{GL}(n,\mathbb{R})$ экспоненциальное отображение задается показательной функцией на матрице.

Рассмотрим экспоненциальное отображение (9.67) с точки зрения интегральных кривых для векторных полей, введенных в разделе 3.6.5. Обозначим координаты в окрестности единицы группы через a^{A}, $\mathrm{A} = 1, \ldots, \mathrm{N}$, такие, что единице группы $e \in \mathbb{G}$ соответствует начало координат. Тогда отображение (9.65) в координатах задается набором функций $a^{\mathrm{A}}(t)$, которые определяются системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{a}^{\mathrm{A}} = X^{\mathrm{A}}$$

с начальными условиями $a^{\mathrm{A}}(0) = 0$. Другими словами, отображение $t \mapsto \mathsf{exp}_X(t)$ является единственной однопараметрической подгруппой в $\mathbb{G}$ с касательным вектором $X(0)$ в нуле.

Свойства экспоненциального отображения даются следующей теоремой [?].

Теорема 9.9.1. *Рассмотрим произвольный элемент алгебры Ли $X \in \mathfrak{g}$ на группе Ли $\mathbb{G}$. Тогда*

1) $\mathsf{exp}\,(tX) = \mathsf{exp}_X(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}$;
2) $\mathsf{exp}\,[(t_1+t_2)X] = \mathsf{exp}\,(t_1X)\,\mathsf{exp}\,(t_2X), \quad \forall t_1, t_2 \in \mathbb{R}$;
3) $\mathsf{exp}\,(-tX) = [\mathsf{exp}\,(tX)]^{-1}, \quad \forall t \in \mathbb{R}$;
4) *отображение* $\mathsf{exp} : \mathfrak{g} \to \mathbb{G}$ *гладкое, и дифференциал отображения* $\mathsf{exp}_* : \mathbb{T}_0(\mathfrak{g}) \to \mathbb{T}_e(\mathbb{G})$ *– тождественное отображение (при обычных отождествлениях), так что* exp *задает диффеоморфизм окрестности нуля в алгебре* $\mathfrak{g}$ *на окрестность единицы в группе* $\mathbb{G}$;
5) *одномерное подмногообразие, полученное с помощью действия левых сдвигов* $l_a \circ \mathsf{exp}_X \in \mathbb{G}$, *– это единственная интегральная кривая левоинвариантного векторного поля* X, *проходящая при* $t = 0$ *через точку* $a \in \mathbb{G}$;
6) *однопараметрическая группа диффеоморфизмов* X_t, *порожденная левоинвариантным векторным полем* X, *задается правыми сдвигами*

$$X_t = r_{\mathsf{exp}_X(t)}.$$

Из свойства 5), в частности, следует, что все левоинвариантные векторные поля полны.

Замечание. Согласно теореме 3.6.3, векторное поле на компактном многообразии, не обращающееся в нуль, является полным. В то же время существует много примеров неполных векторных полей на некомпактных многообразиях. В случае групп Ли каждое левоинвариантное векторное поле полно, даже ясли группа Ли некомпактна. Правоинвариантные векторные поля также полны. □

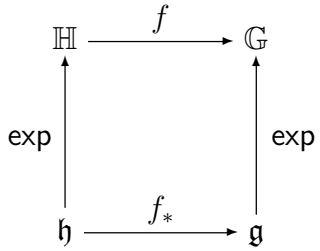
Для двух коммутирующих элементов алгебры Ли

$$[X, Y] = 0, \quad X, Y \in \mathfrak{g}$$

справедлива формула

$$\exp(X + Y) = \exp X \exp Y.$$

Теорема 9.9.2. *Пусть задан гомоморфизм групп Ли $f : \mathbb{H} \to \mathbb{G}$, тогда следующая диаграмма коммутативна*



Следствие. Любая однопараметрическая подгруппа в $\mathbb{G}$ имеет вид экспоненциального отображения $t \mapsto \exp_X(t)$ для некоторого $X \in \mathfrak{g}$. □

Если группа Ли $\mathbb{G}_0$ компактна и связна, то экспоненциальное отображение является сюрьективным, т.е. отображает алгебру Ли на все многообразие группы. Как показывают явные формулы для групп $\mathbb{SO}(3)$ и $\mathbb{SU}(2)$ (см. раздел **??**) экспоненциальное отображение не является взаимно однозначным: одному элементу группы Ли $\mathbb{G}_0$ в общем случае соответствует много различных элементов соответствующей алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Поскольку n-мерная алгебра Ли всегда представляет собой вещественное n-мерное пространство $\mathbb{R}^n$, то при экспоненциальном отображении возникает параметризация связной компоненты единицы компактной группы Ли $\mathbb{G}_0$ точками евклидова пространства $\mathbb{R}^n$ с некоторым отношением эквивалентности. А именно, мы отождествляем те точки евклидова пространства, которые отображаются в один и тот же элемент группы. Экспоненциальное отображение является взаимно однозначным только в некоторой окрестности единицы группы $e \in \mathbb{G}_0$.

Если связная группа Ли некомпактна, то экспоненциальное отображение не является сюрьективным. Пример приведен в [**?**].

9.10 Интегрирование на группах Ли

Рассмотрим группу Ли $\mathbb{G}$ размерности N. В разделе 9.2 было показано, что любая группа Ли является ориентируемым многообразием. Зафиксируем некоторую ориентацию на $\mathbb{G}$ и выберем ненулевую левоинвариантную дифференциальную N-форму ω на $\mathbb{G}$, согласованную с ориентацией. Для этого достаточно выбрать ненулевую N-форму правильной ориентации, например, в единице группы, и разнести ее по групповому многообразию с помощью действия группы слева. Напомним, что действие группы и слева, и справа сохраняет ориентацию выбранного базиса.

Пусть на группе Ли $\mathbb{G}$ задана скалярная функция f с компактным носителем. Положим

$$\int_{\mathbb{G}} f = \int_{\mathbb{G}} f\omega. \tag{9.68}$$

Этот интеграл зависит от формы ω, которая определена с точностью до постоянного положительного множителя. В случае компактных ??? групп Ли форму ω можно однозначно фиксировать с помощью дополнительного условия

$$\int_{\mathbb{G}} \omega = 1.$$

Интеграл от функции f, определенный с помощью равенства (9.68), является левоинвариантным. Это следует из следующей цепочки равенств

$$\int_{\mathbb{G}} f = \int_{\mathbb{G}} f\omega = \int_{\mathbb{G}} l_a^*(f\omega) = \int_{\mathbb{G}} (f \circ l_a)\omega = \int_{\mathbb{G}} f \circ l_a,$$

где l_a – левое действие произвольного элемента $a \in \mathbb{G}$.

Поставим вопрос о том, когда интеграл (9.68) является одновременно и правоинвариантным, т.е. выполнено равенство

$$\int_{\mathbb{G}} f = \int_{\mathbb{G}} f \circ r_a.$$

Форма $r_a^*(\omega)$ по-прежнему левоинвариантна, потому что левые и правые сдвиги коммутируют между собой. Следовательно, форма $r_a^*(\omega)$ отличается от ω только постоянным положительным множителем. Это значит, что на $\mathbb{G}$ существует положительная вещественная функция $\lambda(a) > 0$ такая, что

$$r_a^*(\omega) = \lambda(a)\omega.$$

Нетрудно проверить, что

$$\lambda(ab) = \lambda(a)\lambda(b).$$

Тем самым мы показали, что λ задает гомоморфизм группы Ли $\mathbb{G}$ в мультипликативную группу положительных чисел. Функция λ называется *модулярной функцией*. Поскольку групповое действие является диффеоморфизмом, то

$$\int_{\mathbb{G}} f\omega = \int_{\mathbb{G}} (f \circ r_a)\lambda(a)\omega.$$

Отсюда следует, что левоинвариантный интеграл (9.68) является также правоинвариантным тогда и только тогда, когда $\lambda(a) = 1$ для всех $a \in \mathbb{G}$. Группа Ли $\mathbb{G}$, для которой $\lambda(a) = 1$ называется *унимодулярной*. Заметим, что каждая компактная группа Ли является унимодулярной, т.к.

$$1 = \int_{\mathbb{G}} \omega = \lambda(a) \int_{\mathbb{G}} \omega = \lambda(a).$$

Следовательно, интеграл от функции по компактной группе Ли является одновременно и право-, и левоинвариантным.

Существование лево- или правоинвариантной меры на группе Ли, *меры Хаара*, возможно только для локально компактных групп Ли.

Типичное применение интеграла по компактной группе Ли состоит в следующем.

Рассмотрим представление $M : \mathbb{G} \to \mathsf{aut}(\mathbb{V})$ группы Ли $\mathbb{G}$ в группе автоморфизмов вещественного или комплексного векторного пространства $\mathbb{V}$, наделенного скалярным произведением. Представление M называется *унитарным* ($\mathbb{V}$ комплексное) или *ортогональным* ($\mathbb{V}$ вещественное), если для всех $u, v \in \mathbb{V}$ и всех $a \in \mathbb{G}$ выполнено равенство

$$(M(a)u, M(a)v) = (u, v). \tag{9.69}$$

Теорема 9.10.1. *Пусть $\mathbb{G}$ – компактная группа Ли, и $\mathbb{V}$ – комплексное (вещественное) векторное пространство. Тогда на $\mathbb{V}$ существует скалярное произведение, относительно которого представление M унитарно (ортогонально).*

Доказательство. Рассмотрим произвольное скалярной произведение $\langle , \rangle$ на $\mathbb{V}$. Определим новое скалярное произведение с помощью формулы

$$(u, v) = \int_{\mathbb{G}} \langle M(a)u, M(a)v \rangle,$$

где интегрирование ведется по $a \in \mathbb{G}$. Используя правую инвариантность интеграла, нетрудно убедиться в справедливости равенства (9.69). □

9.11 Некоторые общие свойства групп и алгебр Ли

Напомним, что алгеброй называется множество элементов, которое является кольцом (со сложением и умножением) и одновременно векторным пространством над некоторым полем (в рассматриваемом случае над полем действительных чисел). В алгебре Ли $\mathfrak{g}$ умножение задается коммутатором, и поэтому в общем случае она является некоммутативной алгеброй. Алгебра Ли называется *абелевой*, если $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = 0$, т.е. любые два элемента алгебры $\mathfrak{g}$ коммутируют. Если алгебра Ли рассматривается, как кольцо, то в нем отсутствует единица. Действительно, каждая алгебра Ли содержит нетривиальную абелеву подалгебру $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$. Например, все элементы вида $X = aX_0$, где $a \in \mathbb{R}$, которые пропорциональны некоторому фиксированному элементу $X_0 \in \mathfrak{g}$, образуют абелеву подалгебру. Поскольку $[\mathfrak{h}, \mathfrak{h}] = 0$, и нуль не является единицей по отношению к коммутатору: $[X, 0] = 0 \neq X$ для отличных от нуля элементов $X \in \mathfrak{h}$, то единица в подалгебре $\mathfrak{h}$ и, следовательно, во всей алгебре $\mathfrak{g}$ отсутствует. Нулевой элемент алгебры Ли $0 \in \mathfrak{g}$ является единичным элементом по отношению к сложению.

Пусть $\mathfrak{a} = \{A\}$ является левым идеалом в алгебре Ли $\mathfrak{g}$, т.е. $[\mathfrak{g}, \mathfrak{a}] \subset \mathfrak{a}$. Тогда все элементы вида $-A$ также лежат в $\mathfrak{a}$, т.к. элементы идеала должны быть подгруппой по отношению к сложению. Поскольку для левого идеала $[\mathfrak{g}, \mathfrak{a}] = -[\mathfrak{a}, \mathfrak{g}] \subset \mathfrak{a}$, то каждый левый идеал совпадает с правым и наоборот. Поэтому в алгебре Ли все идеалы являются двусторонними.

Из тождества Якоби следует, что коммутатор $[\mathfrak{a}, \mathfrak{b}]$ двух идеалов $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \subset \mathfrak{g}$ также является идеалом. Поскольку сама алгебра Ли $\mathfrak{g}$ является идеалом в себе самой, то формулы

$$\mathfrak{g}^{(1)} = \mathfrak{g}, \quad \mathfrak{g}^{(2)} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}], \quad \ldots, \quad \mathfrak{g}^{(k)} = [\mathfrak{g}^{(k-1)}, \mathfrak{g}^{(k-1)}], \quad \ldots$$

определяют в алгебре Ли $\mathfrak{g}$ невозрастающую цепочку идеалов

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^{(1)} \supset \mathfrak{g}^{(2)} \supset \ldots \supset \mathfrak{g}^{(k)} \supset \ldots$$

Определение. Алгебра Ли $\mathfrak{g}$ называется разрешимой, если существует такое число $k \geq 1$, что $\mathfrak{g}^{(k)} = 0$. □

Для любых двух идеалов $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{g}$ и $\mathfrak{b} \subset \mathfrak{g}$ их сумма $\mathfrak{a} + \mathfrak{b}$ также является идеалом в $\mathfrak{g}$. Из первой теоремы об изоморфизмах ??? следует, что фактор алгебра $(\mathfrak{a} + \mathfrak{b})/\mathfrak{b}$ изоморфна фактор алгебре $\mathfrak{a}/(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b})$ и поэтому разрешима, если идеал $\mathfrak{a}$ разрешим. Следовательно, если идеал $\mathfrak{b}$ также разрешим, то разрешим и идеал $\mathfrak{a} + \mathfrak{b}$. Таким образом, сумма $\mathfrak{a}+\mathfrak{b}$ двух разрешимых идеалов $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$ является разрешимым идеалом. Поэтому в любой конечномерной алгебре Ли $\mathfrak{g}$ существует наибольший разрешимый идеал $\mathfrak{r}$, который называется *радикалом*, содержащий все разрешимые идеалы: им является сумма всех разрешимых идеалов.

Определение. Алгебра Ли $\mathfrak{g}$ называется полупростой, если ее радикал тривиален $\mathfrak{r} = 0$. □

Теорема 9.11.1. *Пусть $\mathfrak{r}$ – радикал алгебры Ли $\mathfrak{g}$, тогда фактор алгебра Ли $\mathfrak{g}/\mathfrak{r}$ полупроста.*

Теорема 9.11.2 (Картан). *Для того, чтобы алгебра Ли $\mathfrak{g}$ была полупростой, необходимо и достаточно, чтобы она не содержала абелевых идеалов, отличных от 0.*

Определение. *Центром* алгебры Ли $\mathfrak{g}$ называется ее аннулятор, т.е. наибольшее подпространство $\mathfrak{z} \subset \mathfrak{g}$, для которого $[\mathfrak{z}, \mathfrak{g}] = 0$. □

Очевидно, что центр алгебры Ли $\mathfrak{g}$ является абелевым идеалом, и алгебра Ли $\mathfrak{g}$ абелева тогда и только тогда, когда ее центр совпадает со всей алгеброй $\mathfrak{z} = \mathfrak{g}$. Из теоремы 9.11.2 следует, что алгебра Ли является полупростой тогда и только тогда, когда ее центр равен нулю.

Две группы Ли $\mathbb{G}$ и $\mathbb{H}$ называются *локально изоморфными*, если некоторую окрестность единицы $\mathbb{U}$ группы Ли $\mathbb{G}$ можно диффеоморфно отобразить на некоторую окрестность единицы $\mathbb{V}$ группы Ли $\mathbb{H}$. Очевидно, что алгебры Ли локально изоморфных групп Ли изоморфны. Верно также и обратное утверждение

Теорема 9.11.3. *Две группы Ли локально изоморфны тогда и только тогда, когда их алгебры Ли изоморфны.*

Доказательство. См., например, [?]. □

Это означает, что с точностью до изоморфизма существует взаимно однозначное соответствие между алгебрами Ли и связными односвязными компонентами единиц групп Ли. Если отбросить условие односвязности, то взаимно однозначного соответствия нет.

Пример 9.11.1. Группы $\mathbb{SO}(3)$ и $\mathbb{SU}(2)$ имеют одинаковые алгебры Ли, но не изоморфны. Группа $\mathbb{SU}(2)$ является односвязной, а группа вращений $\mathbb{SO}(3)$ – нет. □

Сформулируем без доказательства несколько утверждений для групп и алгебр Ли.

Теорема 9.11.4. *Для того, чтобы подгруппа Ли $\mathbb{H}$ группы Ли $\mathbb{G}$ была инвариантной, необходимо и достаточно, чтобы ее алгебра Ли была идеалом в алгебре Ли группы $\mathbb{G}$.*

Введем понятие простой алгебры и группы Ли.

Определение. Алгебра Ли $\mathfrak{g}$ называется *простой*, если выполнены следующие два условия: алгебра $\mathfrak{g}$ неабелева, и единственные ее идеалы есть 0 и $\mathfrak{g}$.

Определение. Группа Ли $\mathbb{G}$ называется *простой*, если она неабелева и не имеет инвариантных подгрупп, отличных от единицы и всей группы.

Всякие простые алгебры и группы Ли являются также полупростыми. Обратное утверждение неверно, но справедливы следующие теоремы.

Теорема 9.11.5. *Полупростая алгебра Ли $\mathfrak{g}$ представима одним и только одним способом в виде прямой суммы конечного числа простых идеалов*

$$\mathfrak{g} = \bigoplus_{i=1}^{k} \mathfrak{s}_i$$

для некоторого k. При этом каждый идеал алгебры Ли $\mathfrak{g}$ является прямой суммой некоторых идеалов $\mathfrak{s}_i$.

Теорема 9.11.6. *Полупростая группа Ли $\mathbb{G}$ представима одним и только одним способом в виде прямого произведения конечного числа простых групп Ли*

$$\mathbb{G} = \bigotimes_{i=1}^{k} \mathbb{G}_i.$$

При этом каждая инвариантная подгруппа группы Ли $\mathbb{G}$ является прямым произведением некоторых подгрупп $\mathbb{G}_i$.

Введем важное понятие полупрямого произведения двух групп. Для этого нам понадобится несколько предварительных определений и утверждений. Напомним, что гомоморфное отображение группы (в том числе группы Ли) на себя называется автоморфизмом.

Пример 9.11.2. Рассмотрим группу $\mathbb{G}$ и произвольный элемент $b \in \mathbb{G}$. Тогда отображение

$$a \mapsto bab^{-1},$$

как легко проверить, задает автоморфизм. Такие автоморфизмы называются *внутренними.* Все другие виды автоморфизмов называются *внешними.* □

Теорема 9.11.7. *Множество автоморфизмов группы $\mathbb{G}$ само образуют группу, которая называется группой автоморфизмов группы $\mathbb{G}$ и обозначается* $\mathsf{aut}\,\mathbb{G}$.

Доказательство. Доказательство проводится простой проверкой групповых аксиом, причем единицей группы $\mathsf{aut}\,\mathbb{G}$ служит тождественное отображение $\mathbb{G} \to \mathbb{G}$. □

Поскольку внутренние автоморфизмы сами образуют группу, то они образуют подгруппу группы $\mathsf{aut}\,\mathbb{G}$. Если группа $\mathbb{G}$ допускает гомоморфное отображение на свою подгруппу $\mathbb{H} \subset \mathbb{G}$, то говорят, что она допускает *эндоморфизм.*

Теорема 9.11.8. *Ядром гомоморфного отображения $\mathbb{G}_1 \to \mathbb{G}_2$ всегда является инвариантная подгруппа $\mathbb{H}_1$ группы $\mathbb{G}_1$. При этом имеет место изоморфизм*

$$\frac{\mathbb{G}_1}{\mathbb{H}_1} \simeq \mathbb{G}_2.$$

Пусть $\mathbb{W}$ подгруппа центра группы $\mathbb{G}$. Как и центр группы, она всегда абелева. Пусть

$$\mathbb{H} = \frac{\mathbb{G}}{\mathbb{W}}.$$

В этом случае $\mathbb{G}$ называется *накрывающей* группой группы $\mathbb{H}$. В частном случае, группа $\mathbb{G}$ является накрывающей группой своей фактор группы по своему центру. Доказательство следующих трех теорем приведено в [**?**].

Теорема 9.11.9. *Каждая связная группа Ли $\mathbb{G}$ обладает универсальным накрывающим пространством $\widetilde{\mathbb{G}}$, которое само является группой Ли, причем накрывающее отображение – гомоморфизм групп Ли.*

Теорема 9.11.10. *Пусть $\mathbb{G}$ и $\mathbb{H}$ – связные группы Ли, и $f : \mathbb{G} \to \mathbb{H}$ – гомоморфизм. Отображение f является накрытием тогда и только тогда, когда дифференциал отображения $f_* : \mathbb{T}_e(\mathbb{G}) \to \mathbb{T}_e(\mathbb{H})$ является изоморфизмом касательных пространств к единицам групп.*

Теорема 9.11.11. *Пусть $\mathbb{G}$ и $\mathbb{H}$ – связные ? группы Ли с алгебрами Ли $\mathfrak{g}$ и $\mathfrak{h}$, и пусть группа Ли $\mathbb{G}$ является односвязной. Пусть $\varphi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ – гомоморфизм алгебр Ли. Тогда существует единственный гомоморфизм групп Ли $f : \mathbb{G} \to \mathbb{H}$, такой, что $f_* = \varphi$.*

Следствие. Если алгебры Ли односвязных групп Ли $\mathbb{G}$ и $\mathbb{H}$ изоморфны, то сами группы $\mathbb{G}$ и $\mathbb{H}$ изоморфны. □

В последней теореме важно, чтобы группы Ли были связны, т.к. в противном случае теорема не верна.

Теорема 9.11.12. *Для любой связной группы Ли $\mathbb{G}$ ее фундаментальная группа $\pi(\mathbb{G})$ лежит в центре универсальной накрывающей группы $\widetilde{\mathbb{G}}$.*

Теорема 9.11.13. *Существует взаимно однозначное соответствие между классами изоморфизма алгебр Ли и классами изоморфизма односвязных групп Ли.*

Прямое произведение групп (см. раздел 2.2), было определено для произвольных групп. Полупрямое произведение двух групп $\mathbb{G}$ и $\mathbb{H}$ определено только в том случае, когда $\mathbb{G}$ является группой автоморфизмов $\mathbb{H}$. Рассмотрим две группы $\mathbb{H}$ и $\mathbb{G} \subset \mathsf{aut}\,\mathbb{H}$. Обозначим их элементы через $a, b, \ldots$ и $\alpha, \beta, \ldots$ соответственно. Тогда *полупрямым произведением* групп $\mathbb{G}$ и $\mathbb{H}$ называются все возможные упорядоченные пары (α, a) со следующим законом композиции

$$(\alpha, a)(\beta, b) = (\alpha\beta, \beta(a)b),$$

где $\beta(a)$ – образ элемента a при автоморфизме β.

Пример 9.11.3. В физике важную роль играет группа Пуанкаре, рассмотренная в разделе **??**, равная полупрямому произведению группы Лоренца на группу сдвигов. При этом каждому элементу группы Лоренца соответствует вращение (автоморфизм) пространства Минковского. □

Теорема 9.11.14. *Если форма Киллинга–Картана невырождена и положительно определена, то соответствующая полупростая группа Ли является компактной.*

Если параллельный перенос отождествить с дифференциалом отображения, генерируемого векторным полем, то на связность необходимо наложить условие

$$R_{\alpha\beta\gamma}{}^{\delta} - 2\nabla_{\alpha}T_{\beta\gamma}{}^{\delta} + 2\nabla_{\beta}T_{\alpha\gamma}{}^{\delta} - 4T_{\alpha\beta}{}^{\epsilon}T_{\epsilon\gamma}{}^{\delta} - 4T_{\gamma\alpha}{}^{\epsilon}T_{\epsilon\beta}{}^{\delta} - 4T_{\beta\gamma}{}^{\epsilon}T_{\epsilon\alpha}{}^{\delta} = 0. \qquad (9.70)$$

9.12 Группа Ли $\mathbb{GL}(n,\mathbb{C})$

Удобным выбором независимых переменных в аффинной геометрии являются переменные Картана: репер и линейная или $\mathbb{GL}(n,\mathbb{R})$-связность (см. главу **??**). Модели математической физики, основанные на общей аффинной геометрии, изучены недостаточно хорошо из-за технических трудностей и пока не получили широкого распространения. Одной из причин этого является то обстоятельство, что группа общих линейных преобразований $\mathbb{GL}(n,\mathbb{R})$, действующая в касательном пространстве, не является полупростой, ее форма Киллинга–Картана, следовательно, вырождена, и возникают проблемы с построением инвариантов. В настоящем разделе мы приведем некоторые сведения из теории линейных групп Ли $\mathbb{GL}(n,\mathbb{C})$ преобразований комплексного n-мерного пространства $\mathbb{C}^n$ и их алгебр Ли $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})$, которые важны с точки зрения дифференциальной геометрии и физических приложений. Кроме того напомним, что при общих преобразованиях координат в касательных пространствах к точкам многообразия действует матрица Якоби (2.20), которая является элементом группы $\mathbb{GL}(n,\mathbb{R}) \subset \mathbb{GL}(n,\mathbb{C})$.

Сначала мы рассмотрим алгебры Ли, как более простые объекты, а затем перейдем к изучению соответствующих групп Ли.

9.12.1 Алгебра Ли $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})$

Обозначим множество всех квадратных $n \times n$ матриц с комплексными элементами через $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})$. Это обозначение обосновано в дальнейшем тем, что множество комплексных квадратных матриц можно рассматривать, как алгебру Ли группы $\mathbb{GL}(n,\mathbb{C})$. Множество матриц $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})$ с обычным умножением матриц на числа и сложением можно рассматривать как векторное пространство размерности n^2 над полем комплексных чисел (комплексная размерность) или как вещественное векторное пространство размерности $2n^2$ (вещественная размерность). Чтобы превратить это множество в алгебру необходимо ввести дополнительную бинарную операцию – умножение. Если в качестве умножения рассматривать обычное умножение матриц, то мы получим ассоциативную алгебру над полем комплексных чисел. Однако это не единственная возможность. В качестве алгебраической операции мы будем рассматривать коммутатор матриц, т.е. любым двум матрицам $X, Y \in \mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})$ мы ставим в соответствие их коммутатор

$$[X,Y] = XY - YX \ \in \mathfrak{gl}(n,\mathbb{C}).$$

Эта операция антисимметрична $[X,Y] = -[Y,X]$, и для нее выполняется тождество Якоби

$$[[X,Y],Z] + [[Y,Z],X] + [[Z,X],Y] = 0.$$

Тем самым множество всех матриц, включая вырожденные, становится алгеброй Ли $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})$. Эта алгебра неассоциативна, что следует из тождеств Якоби.

В дальнейшем мы всегда будем рассматривать множество комплексных $n \times n$ матриц, как алгебру Ли $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})$.

Множество матриц можно рассматривать, как множество операторов, действующих в комплексном векторном пространстве $\mathbb{V}$. Обозначим элементы векторного пространства через $\boldsymbol{x} = x^a \boldsymbol{e}_a \in \mathbb{V}$, где $\boldsymbol{e}_a$, $a = 1,\ldots,n$ – некоторый фиксированный базис, и $x^a \in \mathbb{C}$ – комплексные компоненты вектора. Комплексная размерность этого векторного пространства равна n, а вещественная – $2n$. При фиксированном базисе

векторное пространство $\mathbb{V}$ естественным образом отождествляется с комплексным евклидовым пространством $\mathbb{C}^n$ и вещественным евклидовым пространством удвоенной размерности $\mathbb{R}^{2n}$. Мы предполагаем, что топология $\mathbb{V}$ индуцируется взаимно однозначным отображением $\mathbb{V} \leftrightarrow \mathbb{R}^{2n}$.

Преобразование элементов векторного пространства $\mathbb{C}^n$ мы записываем в виде

$$x^a \to x^b X_b{}^a, \qquad X = \{X_b{}^a\} \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C}),$$

т.е. вектор-строка $\{x^a\}$ умножается справа на матрицу преобразований $X = \{X_b{}^a\}$. Такая запись вызвана принятыми ранее правилами: компоненты вектора мы нумеруем верхним индексом и придерживаемся правила записи индексов суммирования "с десяти до четырех".

Базис алгебры Ли $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$ можно выбрать из квадратных матриц $\boldsymbol{e}_a{}^b$, имеющих один ненулевой элемент, который равен единице и находится на a-той строке и в b-том столбце. Очевидно, что любую матрицу можно записать в виде

$$X = X_a{}^b \boldsymbol{e}_b{}^a \ \in \ \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C}), \qquad X_a{}^b \in \mathbb{C}.$$

Выбранный базис удовлетворяет соотношениям коммутации

$$[\boldsymbol{e}_a{}^b, \boldsymbol{e}_c{}^d] = \delta_c^b \boldsymbol{e}_a{}^d - \delta_a^d \boldsymbol{e}_c{}^b, \tag{9.71}$$

что проверяется непосредственной проверкой.

Рассмотренное представление естественным образом отождествляет алгебру Ли $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$ с комплексным евклидовым пространством $\mathbb{C}^{n^2}$ и вещественным евклидовым пространством $\mathbb{R}^{2n^2}$. Мы предполагаем, что топология алгебры Ли $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$ индуцирована вложением $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C}) \to \mathbb{R}^{2n^2}$.

Базис $\boldsymbol{e}_a{}^b$ алгебры Ли $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$ можно также представить в виде дифференциальных операторов

$$\boldsymbol{e}_a{}^b = -x^b \partial_a,$$

действующих на компоненты векторов из $\mathbb{V}$. Это представление определяет действие генераторов алгебры Ли $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$ на любую дифференцируемую функцию от декартовых координат точки $\mathbb{C}^n$.

Матрица A называется *невырожденной* или *регулярной*, если для нее существует обратная матрица A^{-1}, т.е. выполнено равенство $AA^{-1} = A^{-1}A = \mathbb{1}$. Для того, чтобы матрица A была регулярной необходимо и достаточно, чтобы ее определитель был отличен от нуля $\det A \neq 0$. Если эндоморфизм A векторного пространства $\mathbb{C}^n$ отображает $\mathbb{C}^n$ на себя, а не на какое-нибудь подпространство низшей размерности, то соответствующая матрица A регулярна, и существует обратный эндоморфизм A^{-1}. В этом случае эндоморфизм A является автоморфизмом.

Замечание. Пусть $A = \{A_a{}^b\}$ – квадратная $n \times n$ матрица, тогда для определителя справедливо разложение, в частности, по первой строке

$$\det A = \sum_\sigma A_1{}^{\sigma(1} \dots A_n{}^{n)} \operatorname{sgn} \sigma,$$

где сумма берется по всем перестановкам $\sigma(1, \dots, n)$. □

Представим соотношения коммутации (9.71) в виде

$$[\boldsymbol{e}_{\text{A}}, \boldsymbol{e}_{\text{B}}] = f_{\text{AB}}{}^{\text{C}} \boldsymbol{e}_{\text{C}},$$

где пару индексов мы для краткости обозначили одной буквой $\boldsymbol{e}_{\text{A}} = \boldsymbol{e}_a{}^b$, $\text{A} = 1,\ldots,n^2$. Тогда

$$f_{\text{AB}}{}^{\text{C}} = f_a{}^b{}_c{}^d{}_e{}^f = \delta^{fbd}_{ace} - \delta^{dfb}_{ace}.$$

Простые вычисления приводят к следующей форме Киллинга–Картана

$$\eta_{\text{AB}} = f_{\text{AC}}{}^{\text{D}} f_{\text{BD}}{}^{\text{C}} = \eta_a{}^b{}_c{}^d = 2\left(n\delta^{db}_{ac} - \delta^{bd}_{ac}\right).$$

Форма Киллинга–Картана задает инвариантное скалярное произведение в алгебре Ли $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})$:

$$(X,Y) = 2n\,\mathsf{tr}\,(XY) - 2\,\mathsf{tr}\,X\,\mathsf{tr}\,Y. \tag{9.72}$$

Инвариантность в данном случае означает независимость результата скалярного произведения от преобразования подобия:

$$(X',Y') = (X,Y),$$

где

$$X' = SXS^{-1}, \quad Y' = SYS^{-1}, \qquad S \in \mathbb{GL}(n,\mathbb{C}).$$

Скалярное произведение (9.72) вырождено. Действительно, поскольку $\mathsf{tr}\,\mathbb{1} = n$, то скалярное произведение всех матриц, кратных единичной матрице $E = a\mathbb{1}$, $a \in \mathbb{C}$, равно нулю со всеми матрицами из алгебры $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})$,

$$(E,X) = a(\mathbb{1},X) = 2an\,\mathsf{tr}\,X - 2an\,\mathsf{tr}\,X = 0, \qquad \forall X \in \mathfrak{gl}(n,\mathbb{C}).$$

Отсюда следует, что форма Киллинга–Картана вырождена $\mathsf{det}\,\eta_{\text{AB}} = 0$, и алгебра Ли $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})$ не является полупростой. Это значит, что на групповом многообразии группы Ли $\mathbb{GL}(n,\mathbb{C})$ не существует двусторонне инвариантной метрики и, следовательно, возникают серьезные проблемы с построением инвариантов.

Поскольку единичная матрица коммутирует со всеми матрицами, то множество матриц, кратных единице, $\mathbb{E} = \{E\}$ образует идеал в алгебре Ли $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})$. Его вещественная размерность равна двум, $\mathsf{dim}\,\mathbb{E} = 2$.

Алгебра Ли $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})$ содержит много подалгебр. Рассмотрим некоторые подалгебры, которые наиболее часто встречаются в приложениях. Нетрудно видеть, что множество всех квадратных вещественных $n \times n$ матриц также является алгеброй Ли, которую мы обозначим через $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$. Эта алгебра является подалгеброй в алгебре комплексных матриц $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{R}) \subset \mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})$. Базис $\boldsymbol{e}_a{}^b$ в $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$ можно выбрать таким же, как и в случае $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})$, только коэффициенты разложения теперь будут не комплексные, а действительные числа. Таким образом алгебра Ли $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$ естественным образом отождествляется с евклидовым пространством $\mathbb{R}^{n^2}$. Формы Киллинга–Картана для $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})$ и $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$ совпадают и, следовательно, алгебра Ли $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$ не является полупростой.

Максимальные полупростые подалгебры – это алгебры комплексных и вещественных матриц с нулевым следом:

$$\mathfrak{sl}(n,\mathbb{C}) = \{A \in \mathfrak{gl}(n,\mathbb{C}) : \ \mathsf{tr}\,A = 0\}, \tag{9.73}$$

$$\mathfrak{sl}(n,\mathbb{R}) = \{A \in \mathfrak{gl}(n,\mathbb{R}) : \ \mathsf{tr}\,A = 0\}. \tag{9.74}$$

Они имеют следующие вещественные размерности:

$$\mathsf{dim}\,\mathfrak{sl}(n,\mathbb{C}) = 2n^2 - 2, \qquad \mathsf{dim}\,\mathfrak{sl}(n,\mathbb{R}) = n^2 - 1.$$

Каждую матрицу можно представить в виде

$$X = \widetilde{X} + \frac{1}{n}\,\mathsf{tr}\,X\mathbb{1}, \quad \mathsf{tr}\,\widetilde{X} = 0,$$

выделив из нее след. Будем считать две матрицы X и Y эквивалентными, если равны их бесследовые части, $\widetilde{X} = \widetilde{Y}$. Такие матрицы связаны преобразованием

$$X = Y + \frac{1}{n}(\,\mathsf{tr}\,X - \,\mathsf{tr}\,Y)\mathbb{1}.$$

Поэтому

$$\mathfrak{sl}(n,\mathbb{C}) \simeq \frac{\mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})}{E}.$$

Чтобы доказать полупростоту этих подалгебр, вычислим форму Киллинга–Картана. Выберем базис в алгебрах Ли $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{C})$ и $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{R})$

$$\tilde{\boldsymbol{e}}_a{}^b = \boldsymbol{e}_a{}^b - \delta^b_a \boldsymbol{e}_n{}^n, \quad a,b = 1,\ldots,n, \qquad \text{(суммирования по } n \text{ нет)},$$

который удовлетворяет условию $\mathsf{tr}\,\tilde{\boldsymbol{e}}_a{}^b = 0$. Это соотношение определяет только n^2-1 базисных векторов, поскольку $\boldsymbol{e}_n{}^n = 0$. Коммутационные соотношения принимают вид

$$[\tilde{\boldsymbol{e}}_a{}^b, \tilde{\boldsymbol{e}}_c{}^d] = \delta^b_c \tilde{\boldsymbol{e}}_a{}^d - \delta^d_a \tilde{\boldsymbol{e}}_c{}^b - \delta^{bn}_{ac}\tilde{\boldsymbol{e}}_n{}^d + \delta^{bd}_{an}\tilde{\boldsymbol{e}}_c{}^n - \delta^{db}_{cn}\tilde{\boldsymbol{e}}_a{}^n + \delta^{dn}_{ca}\tilde{\boldsymbol{e}}_n{}^b.$$

Теперь нетрудно вычислить форму Киллинга–Картана

$$\eta_{\text{ав}} = \eta_a{}^b{}_c{}^d = 2n\left(\delta^{db}_{ac} + \delta^{bd}_{ac} - \delta^{bnd}_{acn} - \delta^{dnb}_{can}\right).$$

Отсюда следует, что, если хотя бы одна из пар индексов имеет вид $(a,b) = (n,n)$ или $(c,d) = (n,n)$, то

$$\eta_a{}^b{}_n{}^n = \eta_n{}^n{}_c{}^d = 0.$$

Форма Киллинга–Картана задает инвариантное скалярное произведение в алгебрах:

$$(X,Y) = 2n\,\mathsf{tr}\,(XY), \qquad X,Y \in \mathfrak{sl}(n,\mathbb{C}) \;\text{ или }\; X,Y \in \mathfrak{sl}(n,\mathbb{R}).$$

Эта форма Киллинга–Картана невырождена, и, значит, алгебры матриц с нулевым следом полупросты. Можно доказать более сильное утверждение.

Теорема 9.12.1. *Алгебра Ли $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{R})$ проста.*

Доказательство. □

Рассмотрим алгебраическое уравнение

$$\det\,(A - \lambda\mathbb{1}) = 0 \tag{9.75}$$

n-того порядка, которое называется *характеристическим* или *вековым* уравнением. Решения этого уравнения называются *собственными числами* матрицы $A \in \mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})$. Согласно основной теореме алгебры каждая матрица A имеет в точности n собственных чисел $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ с учетом их кратности. В общем случае собственные числа комплексны.

Матрицы A и A' называются *подобными* или *сопряженными* , если существует невырожденная матрица B такая, что $A' = BAB^{-1}$. Из уравнения (9.75) следует, что собственные числа подобных матриц совпадают.

Опишем экспоненциальное отображение матриц. Пусть $A \in \mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})$ – произвольная матрица с ограниченными элементами. Тогда ряд

$$\mathsf{e}^A = \mathsf{exp}\, A = \mathbb{1} + A + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!} + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}$$

всегда сходится, и притом равномерно, когда A остается в ограниченной области пространства $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})$. Этот ряд называется *экспоненциалом* матрицы A. Функция $\mathsf{exp}\, A$ определена и непрерывна на $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})$ и отображает $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})$ в себя.

Сформулируем некоторые свойства экспоненциала матрицы [?].

Предложение 9.12.1. *Пусть B – невырожденная $n \times n$ матрица. Тогда*

$$\mathsf{e}^{BAB^{-1}} = B\, \mathsf{e}^A B^{-1}.$$

Предложение 9.12.2. *Для произвольной матрицы $A \in \mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})$ существует такая невырожденная матрица B, что матрица BAB^{-1} является верхнетреугольной. Тогда матрица $\mathsf{e}^{BAB^{-1}}$ также является верхнетреугольной. При этом на диагонали матрицы BAB^{-1} стоят собственные числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ матрицы A, а на диагонали матрицы $\mathsf{e}^{BAB^{-1}}$ стоят собственные числа $\mathsf{e}^{\lambda_1}, \ldots, \mathsf{e}^{\lambda_n}$ матрицы e^A.*

Следствие. Для любой матрицы $A \in \mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})$ справедливо равенство

$$\mathsf{det}\,(\,\mathsf{exp}\, A) = \mathsf{exp}\,(\,\mathsf{tr}\, A) \quad \Leftrightarrow \quad \mathsf{det}\, B = \mathsf{exp}\,(\,\mathsf{tr}\ \mathsf{ln} B), \quad \square \tag{9.76}$$

где $B = \mathsf{e}^A$.

Отсюда следует, в частности, что $\mathsf{det}\,(\,\mathsf{exp}\, A) \neq 0$. То есть экспоненциал произвольной матрицы является невырожденной (регулярной) матрицей и, следовательно, принадлежит группе общих преобразований $\mathsf{exp}\, A \in \mathbb{GL}(n,\mathbb{C})$ (см. следующий раздел).

Предложение 9.12.3. *Если матрицы A, B коммутируют, то*

$$\mathsf{e}^{A+B} = \mathsf{e}^A\, \mathsf{e}^B.$$

Следствие. Экспоненциальное отображение $t \to \mathsf{e}^{tA}$, где $t \in \mathbb{R}$ и $A \in \mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})$ – фиксированная матрица, есть гладкое гомоморфное отображение аддитивной группы вещественных чисел в группу $\mathbb{GL}(n,\mathbb{C})$. $\square$

Касательным вектором к этому отображению в точке $t = 0$ является матрица A (достаточно почленно продифференцировать степенной ряд). Экспоненциальное отображение $\mathbb{R} \to \mathbb{GL}(n,\mathbb{C})$ является единственной однопараметрической подгруппой в $\mathbb{GL}(n,\mathbb{C})$ с касательным вектором A в нуле.

Приведем также несколько очевидных формул для экспоненциального отображения матриц

$$\begin{aligned} \mathsf{exp}\, A^T &= (\,\mathsf{exp}\, A)^T, \\ \mathsf{exp}\, A^* &= (\,\mathsf{exp}\, A)^*, \\ \mathsf{exp}\,(-A) &= (\,\mathsf{exp}\, A)^{-1}. \end{aligned}$$

Экспоненциальное отображение матриц аналогично экспоненциальному отображению, которое генерируется векторными полями (см. раздел 9.9). Оно задает отображение алгебры Ли $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})$ в группу Ли $\mathbb{GL}(n,\mathbb{C})$.

Предложение 9.12.4. *В алгебре* $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})$ *существует окрестность* $\mathbb{U}$ *нулевой матрицы* $0 \in \mathbb{U} \subset \mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})$, *которая удовлетворяет следующим условиям:*

1) при экспоненциальном отображении $A \mapsto \exp A$ *окрестность* $\mathbb{U}$ *непрерывно отображается на некоторую окрестность единичной матрицы* $\mathbb{1} \in \mathbb{GL}(n,\mathbb{C})$;

2) $|\operatorname{tr} A| < 2\pi$;

3) при $A \in \mathbb{U}$ *имеем также* $-A, A^T, A^* \in \mathbb{U}$.

При построении экспоненциального отображение поле комплексных чисел можно заменить на поле вещественных чисел. При этом конструкция не изменится, если собственные числа матрицы с вещественными элементами также вещественны. (В общем случае это, конечно, не так.)

Экспоненциальное отображение задает отображение множества эндоморфизмов векторного пространства в множество его автоморфизмов

$$\exp : \quad \operatorname{end}(\mathbb{V}) \to \operatorname{aut}(\mathbb{V}),$$

где $\mathbb{V}$ – произвольное векторное пространство над полем вещественных или комплексных чисел.

Можно доказать [**?**], что экспоненциальное отображение для группы $\mathbb{GL}(n,\mathbb{C})$ является сюръективным. В то же время для группы общих линейных преобразований над полем вещественных чисел $\mathbb{GL}(n,\mathbb{R})$ это не так.

Пример 9.12.1. Матрицу

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

нельзя представить в виде e^A ни для какой $A \in \mathfrak{gl}(2,\mathbb{R})$. □

9.12.2 Группа Ли $\mathbb{GL}(n,\mathbb{C})$

Группа *общих линейных* преобразований n-мерного векторного пространства над полем комплексных чисел $\mathbb{GL}(n,\mathbb{C})$ состоит из всех невырожденных квадратных $n \times n$ матриц с комплексными элементами и обычным правилом умножения. Единственное условие, которое накладывается на матрицы – это отличие от нуля их определителей, которое необходимо и достаточно для существования обратных матриц.

Множество всех, в том числе вырожденных, комплексных $n \times n$ матриц, как многообразие, представляет собой евклидово пространство $\mathbb{R}^{2n^2}$, т.к. параметризуется n^2 комплексными числами, на которые не наложено никаких ограничений. Поскольку определитель матрицы является непрерывной функцией от матрицы, то множество матриц с нулевым определителем представляет собой замкнутое подмножество в $\mathbb{R}^{2n^2}$, поскольку 0 является замкнутым подмножеством в $\mathbb{R}$. Поэтому множество невырожденных матриц $\mathbb{GL}(n,\mathbb{C})$ как дополнение замкнутого подмножества образует в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^{2n^2}$ открытое подмногообразие и, следовательно, имеет ту же размерность $2n^2$, что и евклидово пространство.

Нетрудно проверить, что групповая операция является гладкой, и, следовательно, группа $\mathbb{GL}(n,\mathbb{C})$ является группой Ли. Эта группа связна некомпактна, но локально компактна.

Аналогично, группа всех невырожденных вещественных $n \times n$ матриц, как многообразие, представляет собой открытое подмногообразие в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^{n^2}$ с гладкой групповой операцией. Эта группа Ли некомпактна, но локально компактна. В отличие от группы комплексных матриц $\mathbb{GL}(n,\mathbb{C})$, группа вещественных

матриц не является связной. Она состоит из двух связных компонент: матриц с положительным и отрицательным определителем. Множество матриц с положительным определителем $\mathbb{GL}_+(n,\mathbb{R})$ само является группой Ли и представляет собой связную компоненту единицы в $\mathbb{GL}(n,\mathbb{R})$.

Это различие легко понять. В комплексном случае матрицу A с вещественным положительным определителем, $\det A > 0$, можно непрерывно трансформировать в матрицу B с вещественным отрицательным определителем, $\det B < 0$, вдоль пути, целиком лежащим в $\mathbb{GL}(n,\mathbb{C})$ и состоящим из матриц с комплексным определителем. Здесь прослеживается связь с вещественной прямой и комплексной плоскостью. Если из вещественной прямой удалить точку 0, то она распадается на два несвязных многообразия. В то же время, удаление начала координат из комплексной плоскости оставляет ее связной.

Произвольную невырожденную матрицу $A = \{A_a{}^b\}$, $a, b, \ldots = 1, 2, \ldots, n$ можно представить в виде

$$A = a^{1/n} B, \qquad a = \det A,$$

где

$$\det B = 1.$$

Совокупность всех $n \times n$ квадратных матриц с комплексными элементами, определитель которых равен единице, является группой, которая называется группой *специальных линейных* преобразований n-мерного векторного пространства над полем комплексных чисел и обозначается $\mathbb{SL}(n,\mathbb{C})$. Очевидно, что $\mathbb{SL}(n,\mathbb{C}) \subset \mathbb{GL}(n,\mathbb{C})$. Это максимальная полупростая подгруппа группы $\mathbb{GL}(n,\mathbb{C})$. Можно доказать, что она является простой.

У группы общих преобразований $\mathbb{GL}(n,\mathbb{C})$ есть много других подгрупп. Определим некоторые из них, которые наиболее часто встречаются в приложениях.

Пример 9.12.2. Группа общих линейных преобразований $\mathbb{GL}(n,\mathbb{R})$ n-мерного векторного пространства над полем вещественных чисел при фиксированном базисе состоит из всех невырожденных $n \times n$ матриц с обычным правилом умножения. Эта группа является некомпактной, но локально компактной группой Ли размерности n^2. Она несвязна и состоит из двух компонент ???. Невырожденные матрицы с положительным определителем образуют связную компоненту единицы. Вторая компонента представляет собой ее смежный класс и состоит из матриц с отрицательным определителем. Алгебра Ли изоморфна алгебре вещественных $n \times n$ матриц $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$ с обычным правилом коммутирования. □

Пример 9.12.3. Группа специальных невырожденных матриц $\mathbb{SL}(n,\mathbb{R})$ состоит из всех вещественных $n \times n$ матриц с единичным определителем. Она является подгруппой группы общих линейных преобразований $\mathbb{SL}(n,\mathbb{R}) \subset \mathbb{GL}(n,\mathbb{R})$ и является связной некомпактной, но локально компактной группой Ли размерности $n^2 - 1$. Односвязность ??? Эта группа является максимальной полупростой подгруппой группы $\mathbb{GL}(n,\mathbb{R})$ (и простой).

Алгебра Ли $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{R})$ изоморфна алгебре матриц с нулевым следом. Вблизи единичной матрицы $\mathbb{1} \in \mathbb{SL}(n,\mathbb{R})$ элемент группы $S \in \mathbb{SL}(n,\mathbb{R})$ взаимно однозначно представляется экспоненциальным отображением элемента алгебры $A \in \mathfrak{sl}(n,\mathbb{R})$

$$S = \mathrm{e}^A, \qquad \mathrm{tr}\, A = 0.$$ □

Пример 9.12.4. Группа вещественных ортогональных $n \times n$ матриц $\mathbb{O}(n)$ состоит из матриц $S \in \mathbb{O}(n)$, удовлетворяющих условию ортогональности

$$SS^T = S^T S = 1,$$

где S^T обозначает транспонированную матрицу. След от этого равенства приводит к ограничению на матричные элементы $S_{ij}S^{ij} = n$. Это значит, что групповое многообразие является замкнутым подмножеством сферы $\mathbb{S}^{n^2-1} \subset \mathbb{R}^{n^2}$. Отсюда, по теореме Гейне–Бореля, следует компактность группы вращений. Группа $\mathbb{O}(n)$ является компактной группой Ли размерности $n(n-1)/2$ и состоит из двух компонент. Матрицы с единичным определителем образуют связную компоненту единицы $\mathbb{SO}(n)$ (собственные вращения). Вторую компоненту образует ее смежный класс, состоящий из несобственных ортогональных матриц с определителем, равным -1. Группа $\mathbb{SO}(n)$ не является односвязной.

Группа двумерных вращений $\mathbb{SO}(2)$ как многообразие представляет собой окружность $\mathbb{S}^1$. Ее фундаментальная группа изоморфна группе целых чисел $\mathbb{Z}$. Полная группа вращений $\mathbb{O}(2)$ состоит из двух несвязных компонент (см. раздел **??**). Как многообразие она представляет собой прямое произведение окружностей $\mathbb{O}(2) = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ с фундаментальной группой $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, где каждый из сомножителей действует на своей окружности.

Группа трехмерных вращений $\mathbb{SO}(3)$ является группой симметрии сферы $\mathbb{S}^2$, вложенной в трехмерное евклидово пространство $\mathbb{R}^3$. Каждое вращение можно параметризовать вектором $\vec{n}$, направленным вдоль оси вращения, длина которого равна углу поворота против часовой стрелки $|\vec{n}| \leq 2\pi$. Множество векторов поворота заполняет шар $\mathbb{B}^3_{2\pi} \subset \mathbb{R}^3$. При этом противоположные точки граничной сферы $\mathbb{S}^2$ необходимо отождествить, т.к. поворот на угол 2π совпадает с тождественным преобразованием. Таким образом как многообразие группа $\mathbb{SO}(3)$ представляет собой трехмерный шар с отождествленными противоположными точками граничной сферы. Фундаментальная группа группы $\mathbb{SO}(3)$ является группой второго порядка $\mathbb{Z}_2$. Полная группа трехмерных вращений $\mathbb{O}(3)$ как многообразие состоит из двух одинаковых несвязных компонент с фундаментальной группой $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$.

Группы вращений $\mathbb{SO}(n)$ при $n \geq 4$ являются группами симметрии сферы $\mathbb{S}^{n-1}$, вложенной в евклидово пространство $\mathbb{R}^n$. Их многообразия устроены гораздо сложнее. Можно доказать, что фундаментальные группы групп вращений $\mathbb{SO}(n)$ при всех $n \geq 3$ равны $\mathbb{Z}_2$. Полная группа вращений $\mathbb{O}(n)$ как многообразие состоит из двух несвязных компонент с фундаментальной группой $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$. ???

Алгебры Ли групп $\mathbb{O}(n)$ и $\mathbb{SO}(n)$ совпадают и изоморфны алгебре антисимметричных $n \times n$ матриц $\mathfrak{so}(n)$. Вблизи единицы $\mathbb{1} \in \mathbb{SO}(n)$ матрица вращений $S \in \mathbb{SO}(n)$ взаимно однозначно представляется в виде экспоненциала отображения некоторого элемента алгебры $A \in \mathfrak{so}(n)$

$$S = \mathsf{e}^A, \qquad A = -A^T. \qquad \square$$

Пример 9.12.5. Пусть в декартовых координатах евклидова пространства $\mathbb{R}^n$ задана метрика, которая представляет собой диагональную матрицу, у которой на диагонали стоят p положительных и q отрицательных единиц

$$\eta_{ab} = \mathsf{diag}\,(\underbrace{+\ldots+}_{p}\underbrace{-\ldots-}_{q}), \qquad p+q=n. \tag{9.77}$$

Для определенности мы считаем, что все положительные единицы идут вначале. Сигнатура этой метрики равна $p-q$. Матрицы преобразований евклидова пространства

$S_a{}^b$, сохраняющие метрику (9.77),

$$\eta_{ab} = S_a{}^c S_b{}^d \eta_{cd}, \tag{9.78}$$

образуют группу, которая называется группой вращений $\mathbb{O}(p,q)$. В частности, при $q=0$ группа $\mathbb{O}(n,0)=\mathbb{O}(n)$, а при $p=1$ имеем группу Лоренца $\mathbb{O}(1,n-1)$. Из определения (9.78) следует, что $\det S = \pm 1$. То есть группа вращений $\mathbb{O}(p,q)$ состоит по крайней мере из двух компонент: матриц с положительным и отрицательным определителем. Можно показать, что при $q \neq 0, n$ группа вращений $\mathbb{O}(p,q)$, как и группа Лоренца, состоит из четырех несвязных компонент и содержит три нетривиальные подгруппы. ??? При $q \neq 0, n$ группа вращений $\mathbb{O}(p,q)$ является некомпактной.

Группа вращений $\mathbb{O}(p,q)$ является группой симметрии пространств постоянной кривизны: гиперболоидов $\mathbb{H}$ размерности $\dim \mathbb{H} = n-1$, вложенных в псевдоевклидово пространство $\mathbb{R}^{p,q}$ уравнением

$$(x^1)^2 + \ldots + (x^p)^2 - (x^{p+1})^2 - \ldots - (x^n)^2 = \pm r^2, \qquad r = \text{const}.$$

Это утверждение является следствием определения (9.78). В зависимости от знака правой части мы получаем различные гиперболоиды, которые в общем случае состоят из нескольких несвязных компонент. □

Пример 9.12.6. Рассмотрим комплексное векторное пространство $\mathbb{C}^n$ с естественным базисом $\boldsymbol{e}_a$, $a = 1, \ldots, n$. Пусть $X = X^a \boldsymbol{e}_a$ и $Y = Y^a \boldsymbol{e}_a$ – два произвольных вектора из $\mathbb{C}^n$. Определим *эрмитово* скалярное произведение в комплексном векторном пространстве $\mathbb{C}^n$ следующим соотношением

$$(X,Y) = \bar{X}^a Y^b \delta_{ab}, \tag{9.79}$$

где черта обозначает комплексное сопряжение. Отсюда следует, что $(X,X) \geq 0$ и $(X,X)=0$ тогда и только тогда, когда $X=0$. Вещественное число

$$\|X\| = \sqrt{(X,X)}$$

называется *длиной* вектора $X \in \mathbb{C}^n$.

Группа унитарных матриц $\mathbb{U}(n)$ состоит из комплексных $n \times n$ матриц $U \in \mathbb{U}(n)$, которые сохраняют эрмитово скалярное произведение (9.79). В матричных обозначениях это условие записывается в виде *условия унитарности*

$$UU^* = U^*U = 1,$$

где звездочка обозначает эрмитово сопряжение (транспонирование и комплексное сопряжение всех элементов). Из условия унитарности следует, что определитель унитарной матрицы равен по модулю единице. Группа $\mathbb{U}(n)$ является связной группой Ли размерности $\dim \mathbb{U}(n) = n^2$. Так же как и группа вещественных ортогональных матриц эта группа компактна. Группа $\mathbb{U}(n)$ не является односвязной, и ее фундаментальная группа изоморфна группе целых чисел $\mathbb{Z}$ [**?**]. Как многообразие группа $\mathbb{U}(n)$ диффеоморфна прямому произведению окружности на группу специальных унитарных матриц (см. пример 9.12.7) $\mathbb{U}(n) \approx \mathbb{S}^1 \times \mathbb{SU}(n)$.

При $n=1$ имеем абелеву группу $\mathbb{U}(1)$, которая состоит из комплексных чисел, равных по модулю единице, с обычным правилом умножения комплексных чисел. Как многообразие эта группа представляет собой окружность $\mathbb{U}(1) \approx \mathbb{S}^1$. Легко построить изоморфизм групп $\mathbb{U}(1) \approx \mathbb{SO}(2)$.

Алгебра Ли группы $\mathfrak{u}(n)$ изоморфна алгебре антиэрмитовых $n\times n$ матриц. Вблизи единицы $\mathbb{1}\in\mathbb{SU}(n)$ произвольная унитарная матрица $U\in\mathbb{SU}(n)$ взаимно однозначно представляется в виде экспоненциала от некоторой антиэрмитовой матрицы $A\in\mathfrak{u}(n)$

$$U=\mathsf{e}^A,\qquad A=-A^*. \qquad \square$$

Множество эрмитовых матриц играет важную роль. Остановимся на этом более подробно. Матрица $A\in\mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})$ называется *эрмитовой*, если выполнено условие

$$A=A^*, \tag{9.80}$$

где звездочка обозначает эрмитово сопряжение (транспонирование и комплексное сопряжение). Множество эрмитовых матриц $A,B,\dots$ в отличии от множества антиэрмитовых матриц не образует подалгебры в $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})$, т.к.

$$[A,B]^*=[B,A]=-[A,B].$$

Заметим также, что отображение $A\to A^*$ не является автоморфизмом группы $\mathbb{GL}(n,\mathbb{C})$ и что эрмитовы матрицы не образуют в $\mathbb{GL}(n,\mathbb{C})$ подгруппы.

Сформулируем некоторые свойства эрмитовых матриц [**?**].

Предложение 9.12.5. *Если A – эрмитова матрица, то UAU^{-1} – снова эрмитова для любой унитарной матрицы $U\in\mathbb{U}(n)$. Далее, существует такая унитарная матрица U_0 (не единственная), что $U_0AU_0^{-1}$ является диагональной матрицей. Если матрица A вещественна, то матрицу U_0 можно выбрать ортогональной.*

Предложение 9.12.6. *Все собственные числа эрмитовой матрицы вещественны. Обратно ???*

Предложение 9.12.7. *Если A – эрмитова матрица, то в пространстве $\mathbb{C}^n$ существует ортонормальный базис, составленный из ее собственных векторов.*

Эрмитова матрица называется *положительно определенной*, если все ее собственные числа положительны.

Предложение 9.12.8. *Соответствие $A\to\mathsf{exp}\,A$ взаимно однозначно и гладко ??? отображает совокупность всех эрмитовых матриц на совокупность всех положительно определенных матриц. ???*

Пример 9.12.7. Группа специальных унитарных (Special Unitary) матриц $\mathbb{SU}(n)\subset\mathbb{U}(n)$, состоит из унитарных $n\times n$ матриц $U\in\mathbb{SU}(n)$ с единичным определителем

$$UU^*=U^*U=1,\qquad \mathsf{det}\,U=1.$$

Эта группа является связной компактной группой Ли размерности $\mathsf{dim}\,\mathbb{SU}(n)=n^2-1$. Она образует замкнутое подмножество в $\mathbb{U}(n)$. Группа $\mathbb{SU}(n)$ является также односвязной. Доказательство этого утверждения сложно, и интересующийся читатель может найти его в [**?**]. (с.239)

Группа $\mathbb{SU}(1)$ тривиальна и состоит из единственного элемента – единицы.

Алгебра Ли $\mathfrak{su}(n)$ изоморфна алгебре антиэрмитовых $n\times n$ матриц с нулевым следом. Вблизи единицы $\mathbb{1}\in\mathbb{SU}(n)$ каждая унитарная матрица с единичным определителем $U\in\mathbb{SU}(n)$ взаимно однозначно представляется экспоненциальным отображением элемента алгебры $A\in\mathfrak{su}(n)$

$$U=\mathsf{exp}\,A,\qquad A=-A^*,\quad \mathsf{tr}\,A=0. \qquad \square$$

Предложение 9.12.9. *Любая невырожденная матрица $A \in \mathbb{GL}(n,\mathbb{C})$ может быть записана, и притом лишь единственным способом, в виде произведения $A = UP$ или $A = PU$ унитарной матрицы $U \in \mathbb{U}(n)$ и положительно определенной матрицы P. Сомножители U и P являются непрерывными функциями A.*

Поскольку множество всех положительно определенных матриц гомеоморфно $\mathbb{R}^{n^2}$, то группа $\mathbb{GL}(n,\mathbb{C})$ гомеоморфна прямому произведению $\mathbb{GL}(n,\mathbb{C}) \approx \mathbb{U}(n) \times \mathbb{R}^{n^2}$.

Пример 9.12.8. Всякая компактная связная абелева группа Ли $\mathbb{G}$ размерности n изоморфна n-мерному тору $\mathbb{T}^n$. □

Пример 9.12.9. Независимое определение ???

Группа $\mathbb{SPIN}(n)$ является группой Ли размерности $n(n-1)/2$. Эта группа является связной и односвязной, и отображение $\mathbb{SPIN}(n) \to \mathbb{SO}(n)$ при $n \geq 3$ представляет собой двулистное универсальное накрытие. При малых n имеют место следующие изоморфизмы:

$$\begin{aligned}
&\mathbb{SPIN}(2) \approx \mathbb{U}(1) \approx \mathbb{SO}(2) \approx \mathbb{S}^1,\\
&\mathbb{SPIN}(3) \approx \mathbb{SU}(2) \approx \mathbb{SP}(1) \approx \mathbb{S}^3,\\
&\mathbb{SPIN}(4) \approx \mathbb{SPIN}(3) \times \mathbb{SPIN}(3) \approx \mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^3,\\
&\mathbb{SPIN}(5) \approx \mathbb{SP}(2),\\
&\mathbb{SPIN}(6) \approx \mathbb{SU}(4),
\end{aligned} \tag{9.81}$$

□

Пример 9.12.10. Построим универсальную накрывающую группу $\widetilde{\mathbb{SL}(2,\mathbb{R})}$ для группы $\mathbb{SL}(2,\mathbb{R})$. Это построение будет конструктивным, т.е. мы определим групповую операцию на связном и односвязном многообразии $\widetilde{\mathbb{SL}(2,\mathbb{R})}$, а затем построим гомоморфизм групп $\widetilde{\mathbb{SL}(2,\mathbb{R})} \to \mathbb{SL}(2,\mathbb{R})$ (см., например, [**?**]).

Рассмотрим трехмерное многообразие $\widetilde{\mathbb{SL}(2,\mathbb{R})} = \mathbb{R} \times \mathbb{D}$, которое представляет собой прямое произведение вещественной прямой $\mathbb{R}$ на единичный диск $\mathbb{D}$ плоскости комплексного переменного, состоящего из таких комплексных чисел z, что $|z| < 1$. Поскольку каждый из сомножителей является связным и односвязным многообразием, то и их произведение также связно и односвязно.

Функция

$$w = \frac{1+z}{1+\bar{z}}$$

осуществляет непрерывное отображение диска $\mathbb{D}$ на окружность $|w| = 1$ с выколотой точкой $w = -1$. Поэтому для любого числа $z \in \mathbb{D}$ существует единственное число t, $-\pi < t < \pi$, для которого

$$\mathsf{e}^{it} = \frac{1+z}{1+\bar{z}}.$$

Обозначим это число символом

$$t = \frac{1}{i}\,\mathsf{ln}\frac{1+z}{1+\bar{z}}.$$

Определим на многообразии $\widetilde{\mathbb{SL}(2,\mathbb{R})}$ умножение следующей формулой

$$(x,u)(y,v) = \left(x+y+t, \frac{u+\mathsf{e}^{2iy}v}{\mathsf{e}^{2iy}+u\bar{v}}\right), \qquad x,y \in \mathbb{R}, \quad u,v \in \mathbb{D}, \tag{9.82}$$

где

$$t = \frac{1}{2i} \ln \frac{1 + e^{-2iy} u\bar{v}}{1 + e^{2iy} \bar{u} v}.$$

Так как

$$|e^{2iy} + u\bar{v}|^2 - |u + e^{2iy} v|^2 = \left(1 - |u|^2\right)\left(1 - |v|^2\right) > 0,$$

то

$$\left| \frac{u + e^{2iy} v}{e^{2iy} + u\bar{v}} \right| < 1.$$

Поэтому формула (9.82) корректно определяет в $\widetilde{\mathbb{SL}(2,\mathbb{R})} = \mathbb{R} \times \mathbb{D}$ умножение.

Это умножение обладает единицей $(0,0)$, и для любого элемента (x,u) существует обратный элемент

$$(x,u)^{-1} = (-x, -e^{2ix} u).$$

Кроме того, прямые вычисления показывают, что умножение (9.82) ассоциативно. Это умножение гладко, и тем самым доказано, что многообразие $\widetilde{\mathbb{SL}(2,\mathbb{R})} = \mathbb{R} \times \mathbb{D}$ является группой Ли относительно умножения (9.82).

Центр этой группы состоит из таких элементов (x,u), для которых, в частности, равенство

$$\frac{u + e^{2iy} v}{e^{2iy} + u\bar{v}} = \frac{v + e^{2ix} u}{e^{2ix} + v\bar{u}} \tag{9.83}$$

выполнено для всех $y \in \mathbb{R}$ и $v \in \mathbb{D}$. В частности, при $v = 0$ должно выполняться равенство $u = e^{2iy} u$ для всех y. Это возможно только при $u = 0$. Тогда из (9.83) следует равенство $v = e^{2ix} v$, которое должно выполняться для всех v, что возможно только при $x = \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. Нетрудно проверить, что все элементы вида $(\pi n, 0)$ принадлежат центру группы $\widetilde{\mathbb{SL}(2,\mathbb{R})}$. Следовательно, центр группы $\widetilde{\mathbb{SL}(2,\mathbb{R})}$ бесконечен.

Теперь построим гомоморфизм $\widetilde{\mathbb{SL}(2,\mathbb{R})} \to \mathbb{SL}(2,\mathbb{R})$. Легко проверить, что матрица

$$A = \frac{1}{\sqrt{1 - |u|^2}} \begin{pmatrix} \cos x + |u| \cos(x + \varphi) & |u| \sin(x + \varphi) - \sin x \\ |u| \sin(x + \varphi) + \sin x & \cos x - |u| \cos(x + \varphi) \end{pmatrix}, \tag{9.84}$$

где $\varphi = \arg u$, имеет единичный определитель. Прямые вычисления позволяют проверить, что отображение $\widetilde{\mathbb{SL}(2,\mathbb{R})} \to \mathbb{SL}(2,\mathbb{R})$ определено корректно и является гомоморфизмом групп. Его ядро состоит из элементов вида $(2\pi n, 0)$ и, значит, дискретно. Поскольку размерности групп совпадают, то гомоморфизм $\widetilde{\mathbb{SL}(2,\mathbb{R})} \to \mathbb{SL}(2,\mathbb{R})$ является групповым накрытием. Таким образом мы построили универсальную накрывающую для группы $\mathbb{SL}(2,\mathbb{R})$:

$$\mathbb{SL}(2,\mathbb{R}) = \frac{\widetilde{\mathbb{SL}(2,\mathbb{R})}}{\mathbb{Z}},$$

где группа преобразований

$$\mathbb{Z}: \quad x \to x + 2\pi n$$

действует на прямой $\mathbb{R}$. С топологической точки зрения группа $\mathbb{SL}(2,\mathbb{R})$ является произведением окружности на диск

$$\mathbb{SL}(2,\mathbb{R}) = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{D}.$$

Группа специальных матриц $\mathbb{SL}(2,\mathbb{R})$ дважды накрывает группу Лоренца $\mathbb{SO}_+(1,2)$ (**??**). При этом одному лоренцеву вращению соответствует пара матриц (9.84), отличающихся знаком. Изменению знака матрицы A соответствует сдвиг координаты x на π. Поэтому

$$\mathbb{SO}_+(1,2) = \frac{\mathbb{SL}(2,\mathbb{R})}{\mathbb{Z}_2} = \frac{\widetilde{\mathbb{SL}(2,\mathbb{R})}}{\mathbb{Z}},$$

где группа преобразований

$$\mathbb{Z}: \qquad x \to x + \pi n.$$

Группа $\mathbb{Z}_2$ действует на окружности $\mathbb{S}^1$ путем отождествления противоположных точек и превращает окружность в проективное пространство $\mathbb{RP}^1$. Поскольку одномерное проективное пространство с топологической точки зрения является окружностью, то

$$\mathbb{SO}_+(1,2) = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{D}.$$

Предложенная конструкция универсальной накрывающей имеет следующее объяснение. Согласно теореме о полярном разложении матриц любая унимодулярная матрица $A \in \mathbb{SL}(2,\mathbb{R})$ единственным образом раскладывается в произведение $A = UP$ некоторой матрицы вращения U и некоторой положительно определенной унимодулярной матрицы P. Матрица U задается углом поворота x, а матрица P, имеющая вид

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix},$$

где $a > 0$ и $ac - b^2 = 1$, задается двумя числами $a > 0$ и $b \in \mathbb{R}$, т.е. комплексным числом $z = a + ib$, принадлежащим правой полуплоскости $a > 0$. Переходя с помощью дробно-линейного преобразования от правой полуплоскости к единичному кругу, мы получаем, следовательно, что каждая матрица $A \in \mathbb{SL}(2,\mathbb{R})$ однозначно характеризуется парой (x,u), где $x \in \mathbb{R}$ и $u \in \mathbb{D}$. При этом умножению матриц соответствует умножение пар, которое задается формулой (9.82). Чтобы получить теперь универсальную накрывающую $\widetilde{\mathbb{SL}(2,\mathbb{R})}$ достаточно считать координату x не углом, а точкой вещественной прямой $\mathbb{R}$. □

Глава 10

Группы преобразований

Теория групп имеет важные приложения в математической физике, и почти всегда группы появляются как группы преобразований чего либо. Это может быть группа преобразований пространства-времени, группа симметрий изотопического пространства (например, $\mathbb{SU}(3)$ симметрия в физике элементарных частиц), группа симметрий уравнений движения или что нибудь более экзотическое. В настоящем разделе мы рассмотрим группы преобразований $\mathbb{G}$ многообразия $\mathbb{M}$. В общем случае группа $\mathbb{G}$ может быть конечной, счетной или группой Ли. В основном мы будем рассматривать группы Ли преобразований, хотя многие определения и утверждения справедливы и для произвольных групп.

10.1 Действие групп преобразований

Пусть на многообразии $\mathbb{M}$ задано *правое* действие группы $\mathbb{G}$, т.е. задано отображение

$$\mathbb{M} \times \mathbb{G} \ni (x, a) \mapsto xa \in \mathbb{M}, \tag{10.1}$$

которое предполагается дифференцируемым.

Определение. Пара $(\mathbb{M}, \mathbb{G})$ называется *группой правых преобразований* многообразия $\mathbb{M}$, если действие группы $\mathbb{G}$ на $\mathbb{M}$ справа удовлетворяет следующим условиям:
1) при любом $a \in \mathbb{G}$ отображение $\mathbb{M} \ni x \mapsto xa \in \mathbb{M}$ является диффеоморфизмом,
2) $(xa)b = x(ab)$ для всех $x \in \mathbb{M}$ и $a, b \in \mathbb{G}$.
В этом случае многообразие $\mathbb{M}$ называется $\mathbb{G}$-*многообразием.*

Замечание. Если $\mathbb{G}$ – группа Ли, то отображение (10.1) предполагается дифференцируемым и, следовательно, непрерывным для всех $a \in \mathbb{G}$ и для всех $x \in \mathbb{M}$. Для каждой точки $x \in \mathbb{M}$ мы имеем дифференцируемое отображение $\mathbb{G} \to \mathbb{M}$. □

Замечание. Иногда в качестве $\mathbb{M}$ мы будем рассматривать многообразия с краем. Под дифференцируемой функцией f на $\mathbb{M}$ в таком случае мы понимаем наличие всех частных производных у f во всех внутренних точках и существование предела этих производных на крае $\partial\mathbb{M}$. □

Каждому элементу группы $a \in \mathbb{G}$ соответствует дифференцируемое отображение $\mathbb{M} \to \mathbb{M}$, заданное правилом $x \mapsto xa$. Поэтому группа преобразований определяет отображение $\mathbb{G} \to \mathsf{diff}\,(\mathbb{M})$ группы $\mathbb{G}$ в группу диффеоморфизмов многообразия $\mathsf{diff}\,(\mathbb{M})$.

Предложение 10.1.1. *Пара* $(\mathbb{M}, \mathbb{G})$ *является группой преобразований многообразия* $\mathbb{M}$ *тогда и только тогда, когда отображение* $\mathbb{G} \to \mathsf{diff}\,(\mathbb{M})$ *является гомоморфизмом групп и отображение (10.1) дифференцируемо.*

Доказательство. Условие 1) в определении группы преобразований означает, что преобразование $x \mapsto xa$ принадлежит группе $\mathsf{diff}\,(\mathbb{M})$. Групповая операция сохраняется при отображении в силу свойства 2). Осталось доказать, что единица $e \in \mathbb{G}$ отображается в тождественное преобразование многообразия $\mathbb{M}$. Действительно, отображение $x \mapsto xa$ является диффеоморфизмом и, следовательно, биекцией для всех $a \in \mathbb{G}$. В частности, для каждого $x \in \mathbb{M}$ найдется такая точка $y \in \mathbb{M}$, что $x = ye$. Умножив это уравнение справа на e, получаем равенство $xe = x$ для всех $x \in \mathbb{M}$. То есть единичный элемент группы не сдвигает ни одну точку многообразия. □

Аналогично определяется *левое* действие группы $\mathbb{G}$ на $\mathbb{M}$, т.е. отображение $\mathbb{G} \times \mathbb{M} \ni (a, x) \mapsto ax \in \mathbb{M}$.

В дальнейшем, если не оговорено противное, под *группой преобразований* многообразия будем понимать группу правых преобразований и будем говорить, что $\mathbb{G}$ действует на $\mathbb{M}$, подразумевая действие группы справа.

Пример 10.1.1. Если задано представление группы $\mathbb{G}$, то задана группа линейных преобразований $(\mathbb{V}, \mathbb{G})$ векторного пространства $\mathbb{V}$. □

Пример 10.1.2. Группа Ли является группой преобразований самой себя $\mathbb{G}\times\mathbb{G} \to \mathbb{G}$, которую можно рассматривать, как действующую слева или справа. □

Группа $\mathbb{G}$ действует на $\mathbb{M}$ *тривиально*, если равенство $xa = x$ выполнено для всех $x \in \mathbb{M}$ и всех $a \in \mathbb{G}$. В этом случае группа преобразований превращается в тривиальное главное расслоение $\mathbb{M}\times\mathbb{G} \xrightarrow{\pi} \mathbb{M}$ с естественной проекцией $\pi : (x, a) \mapsto x$.

Говорят, что $\mathbb{G}$ действует *эффективно* на $\mathbb{M}$, если из равенства $xa = x$ для всех $x \in \mathbb{M}$ следует, что $a = e$. Если для любой точки $x \in \mathbb{M}$ уравнение $xa = x$ имеет единственное решение $a = e$, то говорят, что группа преобразований действует *свободно*. Другими словами, действие группы $\mathbb{G}$ на $\mathbb{M}$ является эффективным, если любой элемент группы, отличный от единичного, перемещает хотя бы одну точку. Действие группы свободно, если любой элемент группы, отличный от единичного, перемещает все точки многообразия. Группа, действующая свободно, является эффективной. Обратное утверждение неверно, что показывает следующий

Пример 10.1.3. Группа вращений $\mathbb{SO}(3)$ трехмерного евклидова пространства $\mathbb{R}^3$ действует эффективно, но не свободно, т.к. начало координат остается неподвижным. □

Если действие группы преобразований свободно, то это значит, что для любой пары точек $x_1, x_2 \in \mathbb{M}$ либо не существует преобразования, связывающего эти точки, $x_2 = x_1 a$, либо элемент $a \in \mathbb{G}$ *единственен*.

Ядром $\mathbb{K}$ *группы преобразований* $(\mathbb{M}, \mathbb{G})$ называется множество элементов группы, которое действует тривиально на все точки многообразия,

$$\mathbb{K} := \{a \in \mathbb{G} : \ xa = x, \ \forall x \in \mathbb{M}\}.$$

Действие группы эффективно, если $\mathbb{K} = \{e\}$. Нетрудно проверить, что ядро группы преобразований является нормальной подгруппой в $\mathbb{G}$. Кроме того, эта подгруппа замкнута в $\mathbb{G}$. Действительно, отображение $\mathbb{G} \to \mathsf{diff}\,(\mathbb{M})$ непрерывно и ядро $\mathbb{K}$ отображается в единицу группы диффеоморфизмов $\mathsf{diff}\,(\mathbb{M})$. Поскольку единица замкнута

в $\mathsf{diff}\,(\mathbb{M})$, то ее прообраз $\mathbb{K}$ замкнут в $\mathbb{G}$ по критерию 1) теоремы 2.4.3. Ядро группы преобразований представляет собой то множество элементов группы, которое вообще не действует на многообразии $\mathbb{M}$. Поэтому действие группы $\mathbb{G}$ естественным образом сводится к действию фактор группы $\mathbb{G}/\mathbb{K}$, которая действует эффективно.

Пример 10.1.4. Рассмотрим присоединенное действие группы Ли на себя $\mathbb{G}\times\mathbb{G}\to\mathbb{G}$, заданное преобразованием $a\mapsto bab^{-1}$, для всех $a,b\in\mathbb{G}$. Ядром этого действия является центр группы $\mathbb{K}\subset\mathbb{G}$. Присоединенное действие группы Ли не является свободным, так как единичный элемент группы $e\in\mathbb{G}$ остается неподвижным, $aea^{-1}=e$, $\forall a\in\mathbb{G}$. Присоединенное действие фактор группы $\mathbb{G}/\mathbb{K}$ является эффективным. □

Определение. Пусть точка $x\in\mathbb{M}$ фиксирована. Множество точек

$$x\mathbb{G}:=\{xa\in\mathbb{M}:\ \forall a\in\mathbb{G}\}$$

называется *орбитой* точки x относительно действия группы $\mathbb{G}$. □

Используя групповые свойства, нетрудно проверить, что орбиты двух точек $x_1,x_2\in\mathbb{M}$ либо совпадают, либо не имеют общих точек. Орбитой произвольного подмножества $\mathbb{U}\subset\mathbb{M}$ будем называть объединение орбит всех точек из $\mathbb{U}$. Обозначим его $\mathbb{U}\mathbb{G}$.

Если группа $\mathbb{G}$ конечна, то орбита любой точки также конечна. Если группа преобразований счетна, то ее орбиты либо счетны, либо конечны.

Пример 10.1.5. Рассмотрим поворот евклидовой плоскости $\mathbb{R}^2$ на конечный угол θ. Начало координат неподвижно относительно вращений. Все остальные точки имеют нетривиальные орбиты, если угол поворота не кратен 2π. Пусть $\theta=2\pi k$, где $k\in\mathbb{R}$. Если число k рационально, $k=m/n$, где m и n – взаимно простые натуральные числа, то орбиты состоят из n точек. Если k – иррациональное число, то орбита произвольной точки $x\neq 0$ счетна и являются всюду плотным подмножеством на окружности, проходящей через точку x. □

Если задана группа Ли преобразований $(\mathbb{M},\mathbb{G})$, то орбита $x\mathbb{G}$ произвольной точки $x\in\mathbb{M}$ является подмногообразием в $\mathbb{M}$. Это следует из дифференцируемости отображения (10.1) для всех $x\in\mathbb{M}$ и групповых свойств $\mathbb{G}$. Размерность орбиты не превосходит размерности группы, $\mathsf{dim}\,(x\mathbb{G})\leq\mathsf{dim}\,\mathbb{G}$.

Пример 10.1.6. Рассмотри евклидово пространство $\mathbb{R}^n$ с декартовой системой координат x^α, $\alpha=1,\dots,n$. Пусть группа вещественных чисел $\mathbb{R}$ по сложению действует на $\mathbb{R}^n$, как трансляции вдоль первой оси,

$$\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}\ni\quad\big(\{x^1,x^2,\dots,x^n\},a\big)\mapsto\{x^1+a,x^2,\dots,x^n\}\quad\in\mathbb{R}^n.$$

Тогда орбитой произвольной точки $x\in\mathbb{R}^n$ является прямая, проходящая через x и параллельная оси x^1. □

Предложение 10.1.2. *Орбита $x\mathbb{G}$ произвольной точки $x\in\mathbb{M}$ является замкнутым подмногообразием в $\mathbb{M}$. Кроме того, если $\mathbb{G}$ – связная группа Ли, то орбита является связным подмногообразием.*

Доказательство. Подмножество $\mathbb{M}\backslash x$ открыто в $\mathbb{M}$. Поэтому объединение открытых подмножеств $(\mathbb{M}\setminus x)\mathbb{G}$ открыто в $\mathbb{M}$. Следовательно, орбита произвольной точки замкнута, как дополнение открытого подмножества, $x\mathbb{G}=\mathbb{M}\setminus\big((\mathbb{M}\setminus x)\mathbb{G}\big)$. Поскольку отображение (10.1) является непрерывным для всех x, то связность сохраняется. □

Определение. Обозначим через $\mathbb{M}/\mathbb{G}$ множество орбит $\breve{x} := x\mathbb{G}$ относительно действия группы $\mathbb{G}$ на $\mathbb{M}$. То есть $\breve{x}_1 = \breve{x}_2$ тогда и только тогда, когда точки x_1 и x_2 лежат на одной орбите: $x_2 = x_1 a$ для некоторого $a \in \mathbb{G}$. Пусть $\pi : \mathbb{M} \to \mathbb{M}/\mathbb{G}$ – проекция, сопоставляющая каждой точке $x \in \mathbb{M}$ ее орбиту $\breve{x}$. Тогда пространство орбит наделяется фактортопологией, т.е. множество $\mathbb{V} \in \mathbb{M}/\mathbb{G}$ является открытым тогда и только тогда, когда множество $\pi^{-1}(\mathbb{V})$ открыто в $\mathbb{M}$. Если $\mathbb{U} \subset \mathbb{M}$ – окрестность точки $x \in \mathbb{M}$, то множество орбит $\mathbb{V} = \mathbb{U}\mathbb{G}$ – окрестность точки $\breve{x} \in \mathbb{M}/\mathbb{G}$. Множество орбит $\mathbb{M}/\mathbb{G}$ называется *пространством орбит* многообразия $\mathbb{M}$ относительно действия группы $\mathbb{G}$ или *факторпространством*. □

Замечание. Хотя $\mathbb{M}$ и $\mathbb{G}$ – многообразия, пространство орбит с фактортопологией может оказаться весьма сложным. Оно, как покажут дальнейшие примеры, может не иметь структуры многообразия. В общем случае пространство орбит может не быть даже хаусдорфовым топологическим пространством. □

Определение. Действие группы $\mathbb{G}$ на многообразии $\mathbb{M}$ называется *транзитивным*, если для любых двух точек $x_1, x_2 \in \mathbb{M}$ найдется такой элемент $a \in \mathbb{G}$, что $x_1 a = x_2$. □

Если действие группы $\mathbb{G}$ на многообразии $\mathbb{M}$ транзитивно, то орбита произвольной точки $x \in \mathbb{M}$ совпадает со всем $\mathbb{M}$. Если на многообразии существует одна точка $x_0 \in \mathbb{M}$, которую можно преобразовать во все другие точки $\mathbb{M}$, то этого достаточно для того, чтобы действие группы $\mathbb{G}$ на $\mathbb{M}$ было транзитивным. Действительно, если $x_1 = x_0 a$ и $x_2 = x_0 b$, то $x_2 = x_1 a^{-1} b$.

Пример 10.1.7. Действие группы Ли $\mathbb{G}$ на себе является транзитивным и свободным. □

Пример 10.1.8. Пусть $\mathbb{G}$ – группа и $\mathbb{H}$ – ее нетривиальная подгруппа. Рассмотрим пространство правых смежных классов $\mathbb{G}/\mathbb{H}$, состоящее из элементов вида $\mathbb{H}a$, где $a \in \mathbb{G}$. Определим действие группы $\mathbb{G}$ в пространстве смежных классов $\mathbb{G}/\mathbb{H}$ соотношением

$$\mathbb{G}/\mathbb{H} \times \mathbb{G} \ni \quad \mathbb{H}a \times b \mapsto \mathbb{H}ab \quad \in \mathbb{G}/\mathbb{H}.$$

Это действие транзитивно для любых $\mathbb{G}$ и $\mathbb{H}$. Действие $\mathbb{G}$ на $\mathbb{G}/\mathbb{H}$ эффективно тогда и только тогда, когда $\mathbb{H}$ не содержит нормальных подгрупп. Действительно, если $\mathbb{H}$ – нормальная подгруппа, то для всех $h \in \mathbb{H}$ и $a \in \mathbb{G}$ выполнено равенство $(\mathbb{H}a)h = \mathbb{H}a$. Действие группы никогда не является свободным, т.к. $(\mathbb{H}e)h = \mathbb{H}e$ для всех $h \in \mathbb{H}$. □

В теории групп преобразований важную роль играет

Теорема 10.1.1. *Пусть $\mathbb{G}$ – группа Ли и $\mathbb{H}$ – ее замкнутая подгруппа. Тогда на фактор пространстве правых смежных классов $\mathbb{G}/\mathbb{H}$ существует единственная структура вещественно аналитического многообразия такая, что действие $\mathbb{G}$ на $\mathbb{G}/\mathbb{H}$ вещественно аналитично. В частности, проекция $\mathbb{G} \to \mathbb{G}/\mathbb{H}$ вещественно аналитична.*

Доказательство. См., например, в [**?**]. □

Определение. Точка $x \in \mathbb{M}$ называется *стационарной* или *неподвижной* относительно действия группы преобразований, если $xa = x$ для всех $a \in \mathbb{G}$. □

Если группа действует на многообразии свободно или транзитивно, то стационарные точки отсутствуют.

Пример 10.1.9. Представление группы $(\mathbb{V}, \mathbb{G})$ не может быть транзитивной или свободной группой преобразований, т.к. нулевой вектор из $\mathbb{V}$ является стационарной точкой. □

Определение. *Группой изотропии* $\mathbb{G}_x$ точки многообразия $x \in \mathbb{M}$ называется множество элементов группы $\mathbb{G}$, оставляющих точку x неподвижной,

$$\mathbb{G}_x := \{a \in \mathbb{G} : \ xa = x\}. \qquad \square$$

Нетрудно проверить, что это множество элементов образует группу. Группы изотропии $\mathbb{G}_{x_1}$ и $\mathbb{G}_{x_2}$ двух точек, лежащих на одной орбите, $x_2 a = x_1$, являются сопряженными подгруппами в $\mathbb{G}$:

$$\mathbb{G}_{x_2} = a^{-1}\mathbb{G}_{x_1} a.$$

Ядро $\mathbb{K}$ группы преобразований $(\mathbb{M}, \mathbb{G})$ связано с группами изотропии простым соотношением

$$\mathbb{K} = \bigcap_{x \in \mathbb{M}} \mathbb{G}_x,$$

где объединение берется по всем точкам $x \in \mathbb{M}$.

Из теоремы 10.1.1 следует, что пара $(\mathbb{G}/\mathbb{H}, \mathbb{G})$ является группой транзитивных преобразований. Представляет большой интерес обратное утверждение: если пара $(\mathbb{M}, \mathbb{G})$ – транзитивная группа преобразований, то она имеет вид $(\mathbb{G}/\mathbb{H}, \mathbb{G})$ для некоторой подгруппы $\mathbb{H} \subset \mathbb{G}$ и при некоторых дополнительных предположениях, которые мы уточним ниже. Для ясности сначала будет доказана теорема безотносительно топологии и дифференцируемой структуры, заданной на $\mathbb{M}$.

Теорема 10.1.2. *Пусть $\mathbb{G}$ – группа, которая действует транзитивно на некотором множестве $\mathbb{M}$. Тогда для каждой точки $x \in \mathbb{M}$ существует биекция правых смежных классов $\mathbb{G}/\mathbb{G}_x$ на множество $\mathbb{M}$, заданное отображением*

$$\mathbb{G}/\mathbb{G}_x \ni \mathbb{G}_x a \mapsto xa \in \mathbb{M}, \tag{10.2}$$

где $\mathbb{G}_x$ – группа изотропии точки x.

Доказательство. Отображение (10.2) определено для каждого представителя из правого смежного класса. Покажем сначала, что это отображение не зависит от выбора представителя. Пусть a и b – два представителя какого либо одного смежного класса. Тогда существует элемент $h \in \mathbb{G}_x$ такой, что $a = hb$ и поэтому $xa = xhb = xb$. То есть отображение (10.2) не зависит от выбора представителя смежного класса и, следовательно, хорошо определено.

Выберем по представителю из двух смежных классов $\mathbb{G}_x a$ и $\mathbb{G}_x b$ и подействуем на точку x. В результате получим точки $x_1 = xa$ и $x_2 = xb$. Эти точки совпадают тогда и только тогда, когда группа изотропии содержит элемент $ba^{-1} \in \mathbb{G}_x$. Это означает, что отображение (10.2) является взаимно однозначным.

Поскольку группа преобразований $(\mathbb{M}, \mathbb{G})$ является транзитивной, то отображение (10.2) является взаимно однозначным отображением на, т.е. биекцией. □

Следствие. Если группа преобразований $(\mathbb{M}, \mathbb{G})$ транзитивна и свободна, т.е. $\mathbb{G}_x = e$ для всех точек $x \in \mathbb{M}$, то отображение

$$\mathbb{G} \ni a \mapsto xa \in \mathbb{M}$$

является биекцией. □

Теперь разберемся с дифференцируемой структурой.

Предложение 10.1.3. *Пусть $(\mathbb{M}, \mathbb{G})$ – группа транзитивных преобразований. Выберем произвольную точку $x \in \mathbb{M}$. Тогда ее группа изотропии $\mathbb{G}_x$ является замкнутой подгруппой в $\mathbb{G}$.*

Доказательство. Поскольку группа преобразований транзитивна, то отображение $\mathbb{G} \ni a \mapsto xa \in \mathbb{M}$, определенное для каждого $x \in \mathbb{M}$, является сюрьективным и непрерывным. Точка x является замкнутым подмножеством в $\mathbb{M}$, и, в силу теоремы критерия 1) из теоремы 2.4.3, группа изотропии $\mathbb{G}_x$ замкнута в $\mathbb{G}$. □

Следствие. Группа изотропии $\mathbb{G}_x$ для всех $x \in \mathbb{M}$ является замкнутой подгруппой в $\mathbb{G}$ для произвольной группы Ли преобразований $(\mathbb{M}, \mathbb{G})$.

Доказательство. Каждая точка $x \in \mathbb{M}$ принадлежит орбите $x\mathbb{G}$, которая является подмногообразием в $\mathbb{M}$. На каждой орбите группа $\mathbb{G}$ действует транзитивно, и поэтому пара $(x\mathbb{G}, \mathbb{G})$ – транзитивная группа преобразований. Следовательно, группа изотропии $\mathbb{G}_x$ является замкнутой подгруппой в $\mathbb{G}$. □

Согласно теореме 10.1.1 на пространстве смежных классов $\mathbb{G}/\mathbb{G}_x$ существует единственная дифференцируемая структура. Поскольку отображение (10.2) является биекцией, то эту дифференцируемую структуру можно перенести на $\mathbb{M}$, превратив его тем самым в многообразие. Тогда отображение (10.2) становится диффеоморфизмом.

Таким образом, если группа преобразований $(\mathbb{M}, \mathbb{G})$ транзитивна, то многообразие $\mathbb{M}$ представляет собой фактор пространство $\mathbb{G}/\mathbb{G}_x$. При этом

$$\mathsf{dim}\,\mathbb{M} = \mathsf{dim}\,\mathbb{G} - \mathsf{dim}\,\mathbb{G}_x.$$

Отсюда следует, что размерность многообразия $\mathbb{M}$, на котором действует транзитивная группа преобразований, не может превышать размерность группы.

Определение. Произвольное множество $\mathbb{M}$, на котором группа преобразований $(\mathbb{M}, \mathbb{G})$ действует транзитивно называется *однородным пространством*. Если, вдобавок, действие группы эффективно, то это множество называется *главным однородным пространством* над $\mathbb{G}$. □

Пример 10.1.10. Пара $(\mathbb{G}/\mathbb{H}, \mathbb{G})$ (пример 10.1.8) является однородным пространством. Если подгруппа $\mathbb{H} \subset \mathbb{G}$ не содержит нормальных подгрупп, то пара $(\mathbb{G}/\mathbb{H}, \mathbb{G})$ – главное однородное пространство. □

10.2 Инфинитезимальные преобразования

Пусть задана группа преобразований $(\mathbb{M}, \mathbb{G})$, где $\mathbb{G}$ – группа Ли. Тогда имеет смысл говорить об инфинитезимальных преобразованиях, которые взаимно однозначно определяются векторными полями на $\mathbb{M}$ и $\mathbb{G}$. Ниже мы рассмотрим соотношения между алгебрами Ли векторных полей на $\mathbb{G}$ и $\mathbb{M}$.

Построим отображение $\mu: \ \mathfrak{g} \to \mathcal{X}(\mathbb{M})$ алгебры Ли $\mathfrak{g}$ группы Ли $\mathbb{G}$ (множества левоинвариантных векторных полей в $\mathcal{X}(\mathbb{M})$) в бесконечномерную алгебру Ли векторных полей $\mathcal{X}(\mathbb{M})$ на многообразии $\mathbb{M}$. Это можно сделать тремя эквивалентными способами.

1) Каждому элементу алгебры Ли $X \in \mathfrak{g}$ соответствует однопараметрическая подгруппа (см. раздел 9.9)

$$\mathsf{exp}_X: \quad \mathbb{R} \ni t \mapsto a(t) \in \mathbb{G},$$

где $a(t) := \mathsf{exp}_X(t)$ (экспоненциальное отображение) и $a(0) = e$ – единица группы. Тогда через каждую точку $x \in \mathbb{M}$ проходит единственная кривая $xa(t)$. Касательные векторы к этим кривым образуют векторное поле $X^*(x)$ на многообразии $\mathbb{M}$. Таким образом мы построили отображение μ алгебры Ли $\mathfrak{g}$ в алгебру векторных полей $\mathcal{X}(\mathbb{M})$:

$$\mu: \quad \mathfrak{g} \ni X \mapsto \mu(X) := X^* \in \mathcal{X}(\mathbb{M}).$$

2) Для каждой точки $x \in \mathbb{M}$ определим отображение $\mu_x: \ G \ni a \mapsto xa \in \mathbb{M}$. Тогда отображение μ определено соотношением

$$X^*(x) = \mu(X)|_x := (\mu_x)_* X_e, \tag{10.3}$$

где $(\mu_x)_*$ – дифференциал отображения μ_x, действующий на касательный вектор $X_e = X(e)$ к единице группы, который соответствует элементу алгебры Ли $X \in \mathfrak{g}$.

3) Каждое векторное поле взаимно однозначно определяется дифференцированием в алгебре функций. Поэтому рассмотрим гладкую функцию $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{M})$ и определим векторное поле соотношением

$$X^*(f) := \frac{d}{dt} f\big(xa(t)\big)\bigg|_{t=0}.$$

Поскольку произвольное левоинвариантное векторное поле X на группе Ли $\mathbb{G}$ полно, то полно также векторное поле X^* на $\mathbb{M}$. Это следует из определения, т.к. отображение μ определено для всех $t \in (-\infty, \infty)$.

Предложение 10.2.1. *Отображение μ есть гомоморфизм алгебр Ли. Если $\mathbb{G}$ действует эффективно на $\mathbb{M}$, то μ есть изоморфизм алгебры Ли $\mathfrak{g}$ и ее образа $\mu(\mathfrak{g}) \subset \mathcal{X}(\mathbb{M})$. Если $\mathbb{G}$ действует свободно на $\mathbb{M}$, то для каждого ненулевого элемента алгебры Ли $X \in \mathfrak{g}$, его образ $\mu(X) = X^*$ не обращается в нуль на $\mathbb{M}$.*

Доказательство. Поскольку дифференциал отображения – это линейная операция, то из определения (10.3) следует, что μ есть линейное отображение из $\mathfrak{g}$ в $\mathcal{X}(\mathbb{M})$. Доказательство того факта, что отображение μ сохраняет коммутатор векторных полей

$$[X^*, Y^*] = \mu[X, Y], \quad \text{где } \ X^*, Y^* \in \mathcal{X}(\mathbb{M}), \ X, Y \in \mathfrak{g},$$

технично и приведено, например, в [**?**].

Докажем второе утверждение предложения. Пусть $\mu(X) = 0$ всюду на $\mathbb{M}$. Это значит, что однопараметрическая группа действует тривиально на $\mathbb{M}$, т.е. $a(t) = e$ для всех t. Верно и обратное утверждение. Пусть теперь $X \in \ker \mu$, т.е. $\mu(X) = 0$. Это значит, что $a(t) = e$ для всех t. Отсюда следует, что ядро $\ker \mu$ тривиально, $\mu(X) = 0$. Поэтому отображение μ – изоморфизм.

Пусть $\mu(X) = 0$ в некоторой точке $x \in \mathbb{M}$. Тогда точка x неподвижна, $xa(t) = x$ для всех t. Обратно. Если точка x неподвижна, то $a(t) = e$ для всех t и, следовательно, $X = 0$. □

Это предложение является основой для рассмотрения главных расслоений со структурной группой Ли в следующем разделе.

Мы видим, что транзитивные группы преобразований устроены довольно просто. В этом случае многообразие $\mathbb{M}$ – это одна орбита, и фактор пространство $\mathbb{M}/\mathbb{G}$ состоит из одной точки. Если действие группы $\mathbb{G}$ на многообразии $\mathbb{M}$ не является транзитивным, то орбит может быть много. В общем случае пространство орбит устроено сложно, что показывает следующий

Пример 10.2.1. Стационарной точкой в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3$ относительно действия группы трехмерных вращений $\mathbb{SO}(3)$ является начало координат. Группа изотропии начала координат совпадает со всей группой, а группой изотропии любой другой точки является подгруппа двумерных вращений $\mathbb{SO}(2) \subset \mathbb{SO}(3)$ вокруг оси, проходящей через данную точку и начало координат. Пространство орбит представляет собой множество сфер $\mathbb{S}^2_r$, которое можно параметризовать их радиусом $r \in \mathbb{R}_+$, объединенное с началом координат $\{0\} \in \mathbb{R}^3$,

$$\mathbb{R}^3 \big/ \mathbb{SO}(3) = \mathbb{R}_+ \cup \{0\}.$$

То есть факторпространство представляет собой положительную полуось $\overline{\mathbb{R}}_+$, включая начало координат, и не является многообразием, т.к. не является открытым множеством (оно является многообразием с краем). □

Замечание. Если группа преобразований $(\mathbb{M}, \mathbb{G})$ не является транзитивной, то многообразие $\mathbb{M}$ представляет собой объединение орбит, на каждой из которых группа $\mathbb{G}$ действует транзитивно. Выберем точку x_i на каждой орбите и обозначим через $\mathbb{G}_i$ ее группу изотропии. Тогда существует диффеоморфизм каждой орбиты на фактор пространство $\mathbb{G}/\mathbb{G}_i$. Другими словами, каждая орбита является однородным пространством и на нем существует естественная дифференцируемая структура (теорема 10.1.1). Однако, это не значит, что орбита является подмногообразием в $\mathbb{M}$. Рассмотрим частный случай. Пусть L_A, $\text{A} = 1, \ldots, \dim \mathbb{G}$, – базис алгебры Ли. Если векторные поля $\mu(L_\text{A})$ линейно независимы в каждой точке, то они определяют инволютивное распределение на многообразии $\mathbb{M}$. Тогда, согласно теореме Фробениуса, каждая орбита с естественной дифференцируемой структурой является подмногообразием в $\mathbb{M}$. В общем случае, несмотря на изоморфизм отображения μ, векторные поля $\mu(L_\text{A})$ могут быть линейное зависимы. Это показывает пример 10.2.1, в котором орбиты двумерны (за исключением 0-мерного начала координат), а алгебра Ли $\mathfrak{so}(3)$ – трехмерна. Вопрос о том являются ли орбиты подмногообразиями в $\mathbb{M}$ и можно ли ввести на пространстве орбит (фактор пространстве $\mathbb{M}/\mathbb{G}$) дифференцируемую структуру сложен и выходит за рамки данной книги. □

В заключение настоящего раздела докажем утверждение, которое будет использовано при построении связностей в главном расслоении.

Предложение 10.2.2. *Пусть a есть диффеоморфизм многообразия $\mathbb{M}$,*

$$a: \quad \mathbb{M} \ni x \mapsto xa \in \mathbb{M}.$$

Если векторное поле X порождает однопараметрическую группу преобразований s_t, то векторное поле a_*X, где a_* – дифференциал отображения a, порождает однопараметрическую группу преобразований $a \circ s_t \circ a^{-1}$.

Доказательство. Ясно, что $a \circ s_t \circ a^{-1}$ есть однопараметрическая группа преобразований. Покажем, что эта группа преобразований индуцирует векторное поле a_*X. Пусть $x \in \mathbb{M}$ – произвольная точка и $y = a^{-1}(x)$. Так как отображение s_t индуцирует векторное поле X, то вектор $X_y \in \mathbb{T}_y(\mathbb{M})$ касается кривой $\gamma_1(t) = s_t(y)$ в точке $y = \gamma_1(0)$. Из этого следует, что вектор

$$(a_*X)_x = a_*X_y \in \mathbb{T}_x(\mathbb{M})$$

касается кривой $\gamma_2(t) = a \circ s_t(y) = a \circ s_t \circ a^{-1}(x)$. □

Замечание. В данном предложении преобразование a не обязано принадлежать какой либо группе. Это может быть произвольный фиксированный диффеоморфизм многообразия $\mathbb{M}$. □

Следствие. Векторное поле $X \in \mathcal{X}(\mathbb{M})$ инвариантно относительно диффеоморфизма $a: \mathbb{M} \to \mathbb{M}$, т.е. $a_*X = X$, тогда и только тогда, когда диффеоморфизм a перестановочен с однопараметрической группой преобразований s_t, порожденной векторным полем X.

10.3 Инвариантные структуры

Рассмотрим группу преобразований $(\mathbb{M}, \mathbb{G})$. Предположим, что на многообразии задана некоторая структура, например, тензорное поле. Возникает вопрос при каких условиях эта структура является инвариантной относительно данной группы преобразований ? Ответ на этот вопрос очень важен для приложений, поскольку часто мы ищем решения некоторой системы уравнений, обладающее определенной симметрией. Такие структуры называются $\mathbb{G}$-*инвариантными*.

Начнем с простейшего случая. Пусть на многообразии $\mathbb{M}$ задана скалярная функция $f(x)$. Назовем скалярную функцию $\mathbb{G}$-*инвариантной*, если

$$f(xa) = f(x). \tag{10.4}$$

В силу этого равенства скалярные функции постоянны на орбитах группах.

Пример 10.3.1. Сферически симметричные функции в трехмерном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3$ постоянны на сферах $\mathbb{S}^2$ с центром в начале координат. Эти функции в сферической системе координат зависят только от радиуса $f = f(r)$. □

Пример 10.3.2. Если группа преобразований $(\mathbb{M}, \mathbb{G})$ транзитивна, то $\mathbb{G}$-инвариантные функции на $\mathbb{M}$ постоянны. □

Рассмотрим более сложную ситуацию, когда на многообразии $\mathbb{M}$, на котором действует группа преобразований $(\mathbb{M}, \mathbb{G})$, задано поле $\varphi = \{\varphi^i(x)\}$, имеющее N компонент, $i = 1, \ldots, N$, которое преобразуются по некоторому представлению группы $\mathbb{G}$.

Это значит, что группа преобразований действует не только на точки многообразия, но одновременно и на компоненты φ^i по правилу

$$\begin{aligned} x &\mapsto x' = xa, \\ \varphi(x) &\mapsto \varphi'^i(x') = \varphi^j(x) S_j{}^i(a), \end{aligned} \tag{10.5}$$

где $S_j{}^i(a)$ – матрица представления, соответствующая элементу группы $a \in \mathbb{G}$. Поле $\varphi^i(x)$ называется $\mathbb{G}$-инвариантным, если выполнено условие

$$\varphi^i(xa) = \varphi^j(x) S_j{}^i(a). \tag{10.6}$$

В отличие от правила преобразования поля (10.5) в левой части этого равенства опущен штрих у поля, и поэтому условие $\mathbb{G}$-инвариантности представляет собой уравнение на поле $\varphi^i(x)$. В случае, если представление группы преобразований тривиально, $S_j{}^i(a) = \delta^i_j$ для всех $a \in \mathbb{G}$, мы имеем набор $\mathbb{G}$-инвариантных скалярных функций (10.4).

Условие $\mathbb{G}$-инвариантности можно переписать в эквивалентном виде

$$\varphi^i(x) = \varphi^j(xa^{-1}) S_j{}^i(a).$$

Пример 10.3.3. Рассмотрим сферически инвариантные векторные поля в трехмерном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3$. Нетрудно проверить, что векторное поле с компонентами

$$\varphi^i(x) = x^i f(r), \qquad i = 1, 2, 3,$$

заданными в декартовой системе координат $\{x^i\}$, где $f(r)$ – произвольная скалярная функция от радиуса, является сферически симметричным. Можно также доказать, что любое сферически симметричное векторное поле имеет такой вид для некоторой функции $f(r)$. Таким образом сферически симметричные векторные поля на $\mathbb{R}^3$ параметризуются одной скалярной функцией радиуса $f(r)$. В разделе **??** приведены также сферически симметричные тензоры второго ранга. □

Замечание. При исследовании моделей математической физики предположение о симметрии полей позволяет существенно уменьшить число независимых переменных и число аргументов. Это позволяет в ряде случаев найти явно точное решение уравнений Эйлера–Лагранжа. □

Замечание. При рассмотрении групп преобразований мы предполагаем, что преобразования многообразия $\mathbb{M}$ являются глобальными, т.е. элемент группы $a \in \mathbb{G}$ не зависит от точки многообразия $x \in \mathbb{M}$. При таких преобразованиях калибровочные поля преобразуются, как тензоры. Поэтому условие $\mathbb{G}$-инвариантности (10.6) можно распространить и на калибровочные поля. □

Рассмотрим общую ситуацию. Пусть задана группа преобразований $(\mathbb{M}, \mathbb{G})$. Каждому элементу группы $a \in \mathbb{G}$ соответствует диффеоморфизм $\mathbb{M} \xrightarrow{a} \mathbb{M}$, который мы обозначим той же буквой, что и элемент группы. У этого отображения существует дифференциал a_* и возврат отображения a^*. Возврат отображения обратим, так как a – диффеоморфизм. Пусть в точке $x \in \mathbb{M}$ задан тензор $T^r_s(x) \in \mathbb{T}^r_{s,x}(\mathbb{M})$ типа (r, s). Тогда его можно перенести из точки x в точку xa с помощью дифференциала отображения и возврата отображения, которые действуют соответственно на контравариантные и ковариантные индексы, $T(xa) = (a_*)^r (a^{*-1})^s T(x)$.

В координатах это отображение записывается следующим образом. Пусть $x = \{x^\alpha\}$ и $xa = \{y^\alpha\}$, $\alpha = 1, \ldots, \dim \mathbb{M}$, – координаты точек. Тогда

$$T_{\beta_1 \ldots \beta_s}{}^{\alpha_1 \ldots \alpha_r}(xa) = \frac{\partial x^{\gamma_1}}{\partial y^{\beta_1}} \cdots \frac{\partial x^{\gamma_s}}{\partial y^{\beta_s}} T_{\gamma_1 \ldots \gamma_s}{}^{\delta_1 \ldots \delta_r}(x) \frac{\partial y^{\alpha_1}}{\partial x^{\delta_1}} \cdots \frac{\partial y^{\alpha_r}}{\partial x^{\delta_r}},$$

где матрицы Якоби вычисляются в точке x.

Определение. Произвольное тензорное поле $T \in \mathcal{T}^r_s(\mathbb{M})$, заданное на многообразии $\mathbb{M}$, называется $\mathbb{G}$-*инвариантным*, если выполнено условие

$$T(xa) = (a_*)^r (a^{*-1})^s T(x) \tag{10.7}$$

для всех $x \in \mathbb{M}$ и $a \in \mathbb{G}$. □

Замечание. Это определение применимо как для счетных групп, так и для групп Ли. □

Поскольку действие группы преобразований транзитивно на каждой орбите, то тензорное поле на всей орбите однозначно задается его значением в некоторой точке x на данной орбите. Это не значит, что тензор в точке x можно задать произвольно, а затем разнести по орбите. Если группа изотропии $\mathbb{G}_x$ нетривиальна, то в соответствии с определением (10.7) тензор в точке x должен быть выбран симметричным относительно преобразований из $\mathbb{G}_x$.

В случае, когда $\mathbb{G}$ – группа Ли, условие (10.7) можно записать в дифференциальной форме. Генераторы группы Ли L_A, $\text{A} = 1, \ldots, \dim \mathbb{G}$, – это базис левоинвариантных векторных полей на $\mathbb{G}$. Им соответствуют векторные поля L^*_A на многообразии $\mathbb{M}$. Из определения производной Ли следует, что если тензорное поле является $\mathbb{G}$-инвариантным, то

$$\mathsf{L}_{L^*_\text{A}} T = 0$$

для всех A и $x \in \mathbb{M}$. Это – система дифференциальных уравнений на компоненты $\mathbb{G}$-инвариантного тензорного поля.

Замечание. В математической физике, как правило, ставится одна из двух задач. 1) По заданному тензорному полю определить его группу симметрии и 2) найти тензорное поле, обладающее определенной симметрией. □

В моделях гравитации важную роль играют однопараметрические группы преобразований, которые оставляют инвариантной метрику, заданную на многообразии $\mathbb{M}$. Этим группам преобразований соответствуют векторные поля, которые называются векторными полями Киллинга. Им будет посвящен отдельный раздел 16.

10.4 Отображения групп преобразований

Пусть задано две группы преобразований $(\mathbb{M}, \mathbb{G})$ и $(\mathbb{N}, \mathbb{G})$ двух многообразий $\mathbb{M}$ и $\mathbb{N}$ с одной и той же группой $\mathbb{G}$. В частном случае многообразия могут совпадать, $\mathbb{M} = \mathbb{N}$, но действия группы $\mathbb{G}$ на $\mathbb{M}$ можно задавать различными способами.

Пример 10.4.1. Можно рассматривать группу вращений плоскости $(\mathbb{R}^2, \mathbb{SO}(2))$ относительно произвольной точки $x \in \mathbb{R}^2$. □

Обозначим действие элемента группы $a \in \mathbb{G}$ на $\mathbb{M}$ и $\mathbb{N}$ соответственно через $a_{\mathbb{M}}$ и $a_{\mathbb{N}}$:

$$a_{\mathbb{M}} : \ \mathbb{M} \times \mathbb{G} \ni x, a \mapsto xa \in \mathbb{M},$$
$$a_{\mathbb{N}} : \ \mathbb{N} \times \mathbb{G} \ni y, a \mapsto ya \in \mathbb{N}.$$

Определение. Отображение $f : \ \mathbb{M} \to \mathbb{N}$ называется *эквивариантным*, если диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{M} \times \mathbb{G} & \xrightarrow{f \times \mathsf{id}} & \mathbb{N} \times \mathbb{G} \\ \Big\downarrow{\scriptstyle a_{\mathbb{M}}} & & \Big\downarrow{\scriptstyle a_{\mathbb{N}}}, \\ \mathbb{M} & \xrightarrow{\quad f \quad} & \mathbb{N} \end{array}$$

где id – тождественное отображение $\mathbb{G} \to \mathbb{G}$, коммутативна. То есть

$$f \circ a_{\mathbb{M}} = a_{\mathbb{N}} \circ f \quad \text{или} \quad f(xa) = f(x)a$$

для всех $a \in \mathbb{G}$ и $x \in \mathbb{M}$. □

Понятие эквивариантного отображения можно обобщить. Рассмотрим две группы преобразований $(\mathbb{M}, \mathbb{G})$ и $(\mathbb{N}, \mathbb{H})$. Пусть задан гомоморфизм групп $\rho : \ \mathbb{G} \to \mathbb{H}$ и дифференцируемое отображение многообразий $f : \ \mathbb{M} \to \mathbb{N}$.

Определение. Отображение $f \times \rho : \ \mathbb{M} \times \mathbb{G} \to \mathbb{N} \times \mathbb{H}$ называется *эквивариантным*, если диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{M} \times \mathbb{G} & \xrightarrow{f \times \rho} & \mathbb{N} \times \mathbb{H} \\ \Big\downarrow{\scriptstyle a_{\mathbb{M}}} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \rho(a)_{\mathbb{N}}} \\ \mathbb{M} & \xrightarrow{\quad f \quad} & \mathbb{N} \end{array}$$

коммутативна. То есть

$$f \circ a_{\mathbb{M}} = \rho(a)_{\mathbb{N}} \circ (f \times \rho) \quad \text{или} \quad f(xa) = f(x)\rho(a)$$

для всех $a \in \mathbb{G}$ и $x \in \mathbb{M}$. □

Пример 10.4.2. Важным физическим приложением указанной конструкции является понятие спинора. Рассмотрим две группы преобразований: группу вращений $\mathbb{SO}(3)$ трехмерного евклидова пространства $\mathbb{R}^3$ и группу $\mathbb{SU}(2)$ линейных преобразований двумерного комплексного пространства $\mathbb{C}^2$. Как известно, группа $\mathbb{SU}(2)$ два раза накрывает группу вращений $\mathbb{SO}(3)$. Обозначим соответствующий гомоморфизм $\rho : \ \mathbb{SU}(2) \to \mathbb{SO}(3)$. Тогда для спиноров имеем коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}^2 \times \mathbb{SU}(2) & \xrightarrow{f \times \rho} & \mathbb{R}^3 \times \mathbb{SO}(3) \\ \Big\downarrow{\scriptstyle a_{\mathbb{C}^2}} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \rho(a)_{\mathbb{R}^3}}, \\ \mathbb{C}^2 & \xrightarrow{\quad f \quad} & \mathbb{R}^3 \end{array}$$

где $a_{\mathbb{C}^2} = U$ – унитарная 2×2 матрица с единичным определителем линейных преобразований двумерного комплексного пространства $\mathbb{C}^2$, и $\rho(a)_{\mathbb{R}^3}$ – соответствующая 3×3 матрица вращений трехмерного евклидова пространства $\mathbb{R}^3$. Отображение f задается формулой $x^i = (\bar{\psi}\sigma^i\psi)$, где σ^i, $i = 1, 2, 3$, – матрицы Паули, $\psi = \begin{pmatrix} \psi^1 \\ \psi^2 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2$ – столбец из двух комплексных чисел (компоненты спинора) и $\bar{\psi} = (\psi_1^*, \psi_2^*)$ – строка из двух комплексно сопряженных чисел (компоненты сопряженного спинора). В физике принято называть матрицы U – спинорным представлением группы вращений $\mathbb{SO}(3)$. Строго говоря, соответствие

$$\mathbb{SO}(3) \ni \rho(a) \mapsto a \in \mathbb{SU}(2)$$

не является отображением и, следовательно, представлением, так как каждому вращению $\rho(a) \in \mathbb{SO}(3)$ соответствуют две унитарные матрицы $\pm a \in \mathbb{SU}(2)$, которые отличаются знаком. Поэтому спинорное представление называют двузначным представлением. □

Глава 11

Гомотопии и фундаментальная группа

11.1 Пути

Важным методом алгебраического анализа глобальной структуры многообразий является нахождение фундаментальной группы многообразия, которая строится на основе понятия *пути* или *кривой*. Определение кривой в евклидовом пространстве (2.8) дословно переносится на произвольное многообразие $\mathbb{M}$ размерности n.

Определение. *Путем* γ называется кусочно дифференцируемое отображение единичного отрезка $\bar{\mathbb{I}} = [0,1] \in \mathbb{R}$ в $\mathbb{M}$,

$$\gamma : \quad \mathbb{I} \ni t \mapsto x(t) \in \mathbb{M}, \tag{11.1}$$

где t – вещественный параметр вдоль кривой. Говорят, что путь соединяет *начало* пути $x(0)$ и его *конец* $x(1)$. Если начало и конец пути совпадают, $x(0) = x(1)$, то путь называют *замкнутым*. Замкнутый путь называют также *петлей*. Мы будем также писать $\gamma(t) = x(t)$. □

В координатах отображение (11.1) задается набором n кусочно дифференцируемых функций $x(t) = \{x^\alpha(t)\}$, $\alpha = 1, \ldots, n$, одной переменной $t \in \bar{\mathbb{I}}$.

Замечание. В общем случае кривая $\gamma(t)$ может иметь точки самопересечения, и тогда отображение γ не является взаимно однозначным отображением отрезка $\bar{\mathbb{I}}$ на его образ $\gamma(\bar{\mathbb{I}})$. □

Замечание. В алгебраической топологии, где в роли $\mathbb{M}$ выступает топологические пространства, от отображения (11.1) требуется только непрерывность. Для алгебраического анализа многообразий удобно рассматривать кусочно дифференцируемые пути, т.е. функции $x^\alpha(t)$ считать кусочно дифференцируемыми. Это удобно при умножении путей, которое будет введено позже. □

Замкнутую кривую в $\mathbb{M}$ можно рассматривать, как непрерывный образ окружности, т.к. при совпадении начала и конца можно отождествить концы единичного интервала $t \in \bar{\mathbb{I}}$. *Простой замкнутой* или *жордановой* кривой называется гомеоморфный образ окружности, т.е. замкнутая кривая без точек самопересечения. В общем случае простая замкнутая кривая может иметь изломы, т.е. от нее требуется только непрерывность. Жорданова кривая на евклидовой плоскости, состоящая из конечного числа прямолинейных отрезков, называется *жордановым* многоугольником.

Теорема 11.1.1 (**Теорема Жордана**). *Пусть* $\mathbb{S}$ *– простая замкнутая кривая на евклидовой плоскости* $\mathbb{R}^2$. *Тогда* $\mathbb{R}^2 \backslash \mathbb{S}$ *несвязно и состоит из двух компонент, общей границей которых является* $\mathbb{S}$. *В точности одна из этих компонент ограничена.*

Доказательство. Несмотря на интуитивную очевидность утверждения теоремы, ее доказательство сложно. Оно приведено, например, в [**?**]. □

В определении пути (11.1) область определения параметра вдоль пути фиксирована единичным отрезком. Этого можно не делать, считая, что параметр принимает значения на отрезке произвольной длины $[a, b] \subset \mathbb{R}$. В этом случае все пути можно разделить на классы эквивалентности. А именно, два пути $\gamma_1(t)$ и $\gamma_2(s)$ называются *эквивалентными*, если они связаны гладкой монотонной заменой параметра $s = s(t)$:

$$\gamma_1(t) = \gamma_2(s(t)), \qquad \frac{ds}{dt} > 0.$$

где $s(a) = 0$ и $s(b) = 1$. В частном случае, возможно преобразование параметра t внутри единичного отрезка, $a = 0$, $b = 1$. В дальнейшем под путем будем понимать класс эквивалентных путей, определенных с точностью до гладкой репараметризации

Замечание. Иногда понятие пути и кривой различают, понимая под путем отображение (11.1), а под кривой – образ пути $\gamma(\bar{\mathbb{I}})$ в многообразии $\mathbb{M}$. Как правило, мы этого не делаем и употребляем термины путь и кривая как синонимы. При изучении фундаментальных групп отображение (11.1) будем называть путем, как это принято в алгебраической топологии. □

Замечание. В математической физике под многообразием $\mathbb{M}$ часто понимается пространство-время, а под вещественным параметром t – время. Тогда путь $x(t) = \{x^\alpha(t)\}$ совпадает с траекторией точечной частицы. □

Пример 11.1.1. Простейшим примером пути является *тождественный* путь e_x в некоторой точке $x \in \mathbb{M}$, определенный равенством

$$e_x : \quad \bar{\mathbb{I}} \ni t \mapsto x \in \mathbb{M} \tag{11.2}$$

для всех t, где $x = \{x^\alpha = \mathsf{const}\} \in \mathbb{M}$ – произвольная фиксированная точка многообразия. □

При рассмотрении евклидова пространства $\mathbb{R}^n$ как топологического пространства в разделе 2.3.2 было введено понятие связности. Введем новое понятие связности, которое удобно, в частности, при рассмотрении фундаментальных групп.

Определение. Топологическое пространство $\mathbb{M}$ называется *линейно связным*, если для любых двух точек x_1, $x_2 \in \mathbb{M}$ найдется соединяющий их путь, целиком лежащий в $\mathbb{M}$. Топологическое пространство $\mathbb{M}$ называется *локально линейно связным*, если для любого $x \in \mathbb{M}$ всякая открытая окрестность точки x содержит линейно связную окрестность этой точки. □

Если какую либо фиксированную точку $x_0 \in \mathbb{M}$ можно соединить путем с любой другой точкой $x_1 \in \mathbb{M}$, то этого достаточно для линейной связности многообразия, потому что тогда две произвольные точки $x_1, x_2 \in \mathbb{M}$ можно соединить путем, проходящим через x_0.

Между просто связностью и линейной связностью топологических пространств имеется тесная связь, которая дается следующей теоремой.

Теорема 11.1.2. *Всякое линейно связное топологическое пространство связно.*

Доказательство. Зафиксируем точку $x_0 \in \mathbb{M}$. Тогда ее можно соединить некоторой кривой γ_x, целиком лежащей в $\mathbb{M}$, с произвольной точкой $x \in \mathbb{M}$, потому что $\mathbb{M}$ – линейно связно. Каждая кривая γ_x является связным подмножеством в $\mathbb{M}$. Тогда все пространство $\mathbb{M}$ является объединением, $\mathbb{M} = \bigcup_x \gamma_x$, и связно, как объединение связных подмножеств, имеющих непустое пересечение (теорема 2.3.14). □

Обратное утверждение теоремы 11.1.2 неверно. Приведем пример связного, но не линейно связного топологического пространства.

Пример 11.1.2 (Блоха и гребенка). Пусть подмножество комплексной плоскости $\mathbb{W} \subset \mathbb{C}$ является объединением двух множеств $\mathbb{W} = \mathbb{U} \bigcup \mathbb{V}$ (см. рис. 11.1), где

$$\begin{array}{rcll} \mathbb{U} & = & \{i\} & \text{– блоха} \\ \mathbb{V} & = & [0,1] \bigcup \{1/n + iy: \quad n \in \mathbb{N},\ 0 \le y \le 1\} & \text{– гребенка.} \end{array}$$

Будем считать, что топология $\mathbb{W}$ индуцирована вложением в комплексную плоскость

Рис. 11.1: Пример связного, но не линейно связного топологического пространства “блоха и гребенка”. fblokh

$\mathbb{C} \approx \mathbb{R}^2$. Прежде всего заметим, что множество $\mathbb{V}$ линейно связно как объединение линейно связных множеств (теорема **??**) и потому связно. Пусть $\mathbb{U}_\epsilon$ – ϵ-окрестность точки i, т.е. пересечение множества $\{z: \quad |z-i| < \epsilon\}$ с $\mathbb{W}$. Подмножество $\mathbb{U}$, состоящее их одной точки, принадлежит замыканию $\overline{\mathbb{V}}$, т.к. для любого $\epsilon > 0$, пересечение $\mathbb{U}_\epsilon \bigcap \mathbb{V}$ не пусто, поскольку для достаточно больших n точки $1/n + i \in \mathbb{V}$ лежат в ϵ-окрестности точки i (лемма 2.3.1). Отсюда вытекает, что связная компонента $\mathbb{V}$ содержит $\mathbb{U}$ и поэтому совпадает со всем $\mathbb{W}$.

Покажем теперь, что топологическое пространство $\mathbb{W}$ не является линейно связным, т.к. точку $i \in \mathbb{W}$ нельзя соединить путем с любой другой точкой из $\mathbb{W}$. Предположим, что существует путь с началом в точке $\gamma(0) = i$ и концом в некоторой точке $\gamma(1) \in \mathbb{V}$. Не ограничивая общности можно считать, что $\gamma(t) \neq i$ при $t > 0$. Из непрерывности отображения $\gamma(t)$ следует, что для любого положительного ϵ существует такое положительное число δ, что при $t < \delta$ выполняется неравенство $|\gamma(t) - i| < \epsilon$, т.е. путь лежит в ϵ-окрестности $\mathbb{U}_\epsilon$ точки i. Выберем конечное число $\epsilon < 1$ и некоторое значение параметра $0 < t_0 < \delta$. По предположению, $\gamma(t_0) \in \mathbb{V}$. Окрестность $\mathbb{U}_\epsilon$ многосвязна, т.к. состоит из самой точки i и объединения непересекающихся интервалов. Отрезок $[0, t_0]$ связен и из обсуждения в разделе 2.4 следует, что его невозможно непрерывно отобразить на многосвязную область таким образом, чтобы начало и конец отрезка лежали в разных компонентах. □

Замечание. В рассмотренном примере топологическое пространство $\mathbb{W}$ не является многообразием по двум причинам. Во-первых, окрестность точки i нельзя отобразить на интервал и, во вторых, множество $\mathbb{V}$ имеет точки самопересечения. □

Следующий пример показывает, что не всякое линейно связное топологическое пространство является локально линейно связным.

Пример 11.1.3 (Польская окружность). Рассмотрим подмножество на евклидовой плоскости $\mathbb{U} \subset \mathbb{R}^2$, которое имеет вид $\mathbb{U} = \mathbb{U}_1 \cup \mathbb{U}_2 \cup \mathbb{U}_3$, где

$$\begin{aligned}
\mathbb{U}_1 &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \quad x^2 + y^2 = 1, \quad y \geq 0\}, \\
\mathbb{U}_2 &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \quad -1 \leq x \leq 0, \quad y = 0\}, \\
\mathbb{U}_3 &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \quad 0 < x \leq 1, \quad y = \frac{1}{2} \sin \frac{\pi}{x}\},
\end{aligned}$$

с индуцированной топологией, см.рис.11.2. Это пространство линейно связно, однако начало координат $(0,0)$ имеет окрестность, не содержащую линейно связную окрестность. □

Следующие свойства справедливы для произвольных топологических пространств.

Предложение 11.1.1. *Образ линейно связного многообразия при непрерывном отображении линейно связен.*

Рис. 11.2: Пример линейно связного, но не локально линейного связного топологического пространства.

Следствие. Если $\mathbb{M}_1$ и $\mathbb{M}_2$ два гомеоморфных топологических пространства, то $\mathbb{M}_1$ линейно связно тогда и только тогда, когда $\mathbb{M}_2$ линейно связно. □

Предложение 11.1.2. *Многообразия $\mathbb{M}_1$ и $\mathbb{M}_2$ линейно связны тогда и только тогда, когда их прямое произведение $\mathbb{M}_1 \times \mathbb{M}_2$ линейно связно.*

Доказательства приведены, например, в [?].

Для многообразий понятие связности и линейной связности эквивалентны.

Теорема 11.1.3. *Многообразие $\mathbb{M}$ связно тогда и только тогда, когда $\mathbb{M}$ – линейно связно.*

Доказательство. Достаточность является утверждением теоремы 11.1.2.

Необходимость докажем от противного. Пусть $\mathbb{M}$ связное, но не линейно связное многообразие. Прежде всего заметим, что каждое многообразие можно покрыть счетным числом карт. Каждая карта является линейно связным подмножеством, потому что гомеоморфна $\mathbb{R}^n$. Если две карты пересекаются, то их объединение также линейно связно. Это значит, что многообразие можно представить в виде объединения не более, чем счетного числа непересекающихся подмножеств, $\mathbb{M} = \bigcup_i \mathbb{U}_i$, где каждое $\mathbb{U}_i$ линейно связно и $\mathbb{U}_i \cap \mathbb{U}_j = \emptyset$ при $i \neq j$. Поскольку $\mathbb{M}$ связно, то среди подмножеств $\mathbb{U}_i$ существует по крайней мере одно подмножество, пусть это будет $\mathbb{U}_i$, которое содержит предельную точку некоторого другого подмножества $\mathbb{U}_j$. Пусть точка $x_0 \in \mathbb{U}_i$ является предельной для подмножества $\mathbb{U}_j$. Это значит, что в $\mathbb{U}_j$ существует последовательность точек $\{x_k\} \in \mathbb{U}_j$, которая сходится к x_0. Поэтому, начиная с некоторого N, все точки последовательности x_k, $k >$ N, лежат в окрестности $\mathbb{U}_0 \ni x_0$. Следовательно, точку x_0 можно соединить кривой с x_k и подмножества $\mathbb{U}_i$ и $\mathbb{U}_j$ – линейно связны, что противоречит предположению. □

Пример 11.1.4. Евклидово пространство $\mathbb{R}^n$ линейно связно, т.к. любые две точки $x_0, x_1 \in \mathbb{R}^n$ можно соединить путем $\gamma(t) = x_0 + (x_1 - x_0)t$, который представляет собой прямолинейный отрезок. □

Нетрудно также доказать

Предложение 11.1.3. *Каждое многообразие* $\mathbb{M}$ *локально линейно связно.*

В общем случае многосвязное многообразие представляет собой набор компонент связности, каждая из которых является линейно связной.

Для полноты картины приведем достаточное условие линейной связности произвольного топологического пространства.

Предложение 11.1.4. *Если топологическое пространство* $\mathbb{M}$ *связно и локально линейно связно, то оно линейно связно.*

Доказательство. См., например, [**?**]. □

11.2 Гомотопия непрерывных отображений

На множестве непрерывных отображений двух топологических пространств $f:\ \mathbb{M}_1 \to \mathbb{M}_2$ и, в частности, многообразий можно ввести отношение эквивалентности – гомотопию. Понятие гомотопии является топологическим, потому что при его определении используется только непрерывность отображений.

Определение. Два непрерывных отображения

$$f_0, f_1:\quad \mathbb{M}_1 \ni x \mapsto f_0(x), f_1(x) \in \mathbb{M}_2$$

называются *гомотопными*, если существует непрерывное отображение

$$F:\quad \mathbb{M}_1 \times \mathbb{I} \ni x, t \mapsto F(x,t) \in \mathbb{M}_2$$

такое, что $F(x,0) = f_0(x)$ и $F(x,1) = f_1(x)$. При этом само отображение F называется *гомотопией* между f_0 и f_1:

$$F:\quad f_0 \sim f_1.$$

Гомотопия $F(x,t)$ называется также *деформацией* отображения f_1 в f_2. □

Другими словами, гомотопия позволяет непрерывно деформировать одно отображение в другое. Нетрудно проверить, что гомотопия является отношением эквивалентности на множестве всех отображений $\mathbb{M}_1 \to \mathbb{M}_2$. Отображения, гомотопные отображению f, образуют гомотопический класс отображений, который будем обозначать квадратными скобками $[f]$. Множество всех гомотопических классов отображений $\mathbb{M}_1 \to \mathbb{M}_2$ будем обозначать через $[\mathbb{M}_1; \mathbb{M}_2]$.

Гомотопию $F(x,t)$ можно представить себе следующим образом. Зафиксируем точку $x \in \mathbb{M}_1$ и будем менять параметр $t \in [0,1]$. Тогда мы получим траекторию точки x в пространстве $\mathbb{M}_2$. Тогда гомотопия $F(x,t)$ представляет собой семейство всех траекторий, зависящих от параметра $x \in \mathbb{M}_1$.

Пример 11.2.1. Любой путь $\gamma:\ \mathbb{I} \ni s \mapsto x(s) \in \mathbb{M}$ гомотопен постоянному пути e_{x_0} с началом и концом в точке $x_0 = x(0)$ посредством гомотопии

$$F:\quad \mathbb{I} \times \mathbb{I} \ni s, t \mapsto F(s,t) \in \mathbb{M},\quad \text{где}\quad F(s,t) = x\big((1-t)s\big).$$

В этой гомотопии конец пути меняется: он скользит вдоль кривой $\gamma(s)$, приближаясь к началу пути при $t \to 1$. При данном выше определении гомотопии, когда отображения f_0 и f_1 не обязаны совпадать ни в одной точке, все пути на связном многообразии гомотопны между собой. □

Понятие гомотопных отображений можно использовать для определения отношения эквивалентности самих топологических пространств.

Определение. Говорят, что пространства $\mathbb{M}_1$ и $\mathbb{M}_2$ имеют один и тот же *гомотопический тип*, если существуют непрерывные отображения $f : \mathbb{M}_1 \to \mathbb{M}_2$ и $g : \mathbb{M}_2 \to \mathbb{M}_1$ такие, что композиции этих отображений гомотопны тождественным отображениям:

$$g \circ f \sim \mathsf{id}_1 : \quad \mathbb{M}_1 \to \mathbb{M}_1, \qquad f \circ g \sim \mathsf{id}_2 : \quad \mathbb{M}_2 \to \mathbb{M}_2,$$

где $\mathsf{id}_{1,2}$ – тождественные отображения пространств $\mathbb{M}_1$ и $\mathbb{M}_2$. Отображения f и g называются в этом случае *гомотопическими эквивалентностями*. Говорят также, что пространства $\mathbb{M}_1$ и $\mathbb{M}_2$ в этом случае *гомотопически эквивалентны*. □

Это определение отличается от определения гомеоморфизма тем, что вместо знака равенства стоит знак гомотопической эквивалентности. Поэтому два гомеоморфных пространства имеют одинаковый гомотопический тип. Обратное утверждение неверно.

Пример 11.2.2. n-мерный шар $\mathbb{B}^n \in \mathbb{R}^n$ гомотопически эквивалентен точке $x \in \mathbb{B}^n$, но не гомеоморфен ей. □

В общем случае пространство, гомотопически эквивалентное точке, называется *стягиваемым*. Другими словами, пространство стягиваемо, если его можно непрерывно деформировать по себе в точку.

Пример 11.2.3. Нестягиваемыми пространствами являются n-мерная сфера $\mathbb{S}^n$ и тор $\mathbb{T}^n$. □

Пример 11.2.4. Евклидово пространство $\mathbb{R}^n$, а также любая выпуклая область $\mathbb{U} \subset \mathbb{R}^n$ гомотопически эквивалентна одной точке $x_0 \in \mathbb{U}$. Напомним, что область $\mathbb{U} \subset \mathbb{R}^n$ называется *выпуклой*, если наряду с произвольными точками $x_1, x_2 \in \mathbb{U}$ она содержит также и отрезок $x_1 + (x_2 - x_1)t$, их соединяющий. □

Пример 11.2.5. Евклидово пространство с выколотой точкой, $\mathbb{R}^n \setminus x_0$, гомотопически эквивалентно сфере $\mathbb{S}^{n-1}$, содержащей точку x_0 внутри. В частности, плоскость с выколотой точкой гомотопически эквивалентна окружности. □

Пример 11.2.6. Плоскость с двумя выколотыми точками $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^2$ гомотопически эквивалентна *букету окружностей*, изображенному на рис. 11.3. Букет окружностей представляет собой объединение двух окружностей, имеющих одну общую точку, и не является многообразием. □

Рис. 11.3: Букет двух окружностей fcirun

Пример 11.2.7. Гомотопически эквивалентными пространствами является тройка: цилиндр, лист Мебиуса и окружность. □

Из этих примеров видно, что гомотопически эквивалентные многообразия могут иметь разную размерность и ориентируемость. Многообразия могут быть также гомотопически эквивалентны топологическим пространствам, которые не являются многообразиями, как показывает пример плоскости с двумя выколотыми точками. Тем не менее некоторые топологические свойства являются общими для гомотопически эквивалентных пространств.

Предложение 11.2.1. *Если пространство $\mathbb{M}_1$ связно и имеет тот же гомотопический тип, что и $\mathbb{M}_2$, то пространство $\mathbb{M}_2$ также связно.*

Понятие гомотопии может быть использовано для доказательства нетривиальных утверждений.

Теорема 11.2.1 (О невозможности причесать ежа). *На четномерной сфере $\mathbb{S}^n$ нельзя задать непрерывное векторное поле, которое не обращается в нуль ни в одной точке.*

Доказательство. От противного. Рассмотрим сферу единичного радиуса

$$\mathbb{S}^n := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : \quad x^\alpha x_\alpha = 1, \quad \alpha = 1, \ldots, n+1\},$$

вложенную в евклидово пространство $\mathbb{R}^{n+1}$. Допустим, что на сфере задано непрерывное векторное поле X, не имеющее нулей. Тогда векторное поле $T = X/\sqrt{X^2}$ имеет единичную длину и поэтому задает непрерывное отображение сферы на себя $\mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$. Касательный вектор к сфере $T = \{T^\alpha(x)\}$ ортогонален радиус-вектору $\{x^\alpha\}$, т.е. $x^\alpha T_\alpha = 0$. При этом мы рассматриваем координаты точки на сфере и касательный вектор как векторы евклидова пространства $\mathbb{R}^{n+1}$. Тогда отображение

$$F(x,t): \qquad x^\alpha, t \mapsto x^\alpha \cos(\pi t) + T^\alpha \sin(\pi t)$$

задает гомотопию

$$F: \qquad \mathbb{S}^n \times \mathbb{I} \to \mathbb{S}^n.$$

Эта гомотопия переводит произвольную точку на сфере $\{x^\alpha\}$ в ее антиподальную точку с координатами $\{-x^\alpha\}$. Выберем ориентацию на сфере, согласованную с ориентацией евклидова пространства (**??**). Тогда объем сферы равен

$$V = \int_{\mathbb{S}^n} \upsilon \neq 0, \tag{11.3}$$

где форма объема на сфере υ получена сужением канонической формы объема евклидова пространства υ_0 на сферу $\mathbb{S}^n$:

$$\upsilon = \mathsf{i}_N \upsilon_0, \qquad \upsilon_0 = dx^1 \wedge dx^2 \wedge \ldots \wedge dx^{n+1}.$$

Здесь i_N – внутреннее умножение формы объема υ_0 на внешнюю нормаль к сфере N. Интеграл (11.3) задает непрерывное отображение $\Lambda^{n+1}(\mathbb{R}^{n+1}) \to \mathbb{R}$. При отображении $x^\alpha \to -x^\alpha$ объем сферы преобразуется по правилу

$$V \to (-1)^{n+1} V.$$

Поскольку изменение знака объема при гомотопии невозможно, т.к. она является непрерывным отображением, то для четных n приходим к противоречию. □

Замечание. На нечетномерной сфере непрерывные векторные поля, нигде не обращающиеся в нуль, существуют. А именно, можно доказать [**?**], что максимальное число линейно независимых нигде не обращающихся в нуль векторных полей на нечетномерной сфере $\mathbb{S}^{n-1}$ равно $2^c + 8d - 1$, где c и d – неотрицательные целые числа, которые определяются следующим образом. Поскольку n четно, то его единственным образом можно представить в виде $n = (2a-1)2^b$, $a, b \in \mathbb{N}$. Тогда $c = b \bmod 4$ и $d = (b - c)/4$. □

Рассмотренный выше пример гомотопных путей показывает, что определение гомотопии является грубым, т.к. гомотопические классы путей содержат слишком много элементов. Более тонкое деление на классы дает понятие отображений, гомотопных относительно некоторого подмножества $\mathbb{U} \subset \mathbb{M}_1$.

Определение. Два непрерывных отображения топологических пространств

$$f_0, f_1 : \quad \mathbb{M}_1 \to \mathbb{M}_2$$

называются *гомотопными относительно подмножества* $\mathbb{U} \subset \mathbb{M}_1$, если существует гомотопия

$$F : \quad \mathbb{M}_1 \times \mathbb{I} \to \mathbb{M}_2,$$

такая, что $F(x,t)$ не зависит от t при $x \in \mathbb{U}$. Мы пишем $f_0 \sim f_1 (\,\mathsf{rel}\mathbb{U})$. □

В частности, отображения f_0 и f_1 должны совпадать на подмножестве $\mathbb{U}$. Другими словами, при непрерывной деформации отображений допускается их изменение только на множестве $\mathbb{M} \setminus \mathbb{U}$. Соответствующая гомотопия называется *относительной гомотопией* и также определяет отношение эквивалентности на множестве непрерывных отображений топологических пространств, которое является более тонким.

Пример 11.2.8. Можно рассмотреть класс путей, гомотопных относительно начала $\gamma(0)$ и конца $\gamma(1)$ некоторого пути. Этот класс содержит все пути, которые имеют фиксированное начало и конец и которые можно непрерывно деформировать друг в друга по многообразию $\mathbb{M}$. Более того, как показывает пример тора, не все пути с одинаковым началом и концом можно непрерывно деформировать друг в друга, не выходя из многообразия $\mathbb{M}$. Если начало и конец пути отличаются, то пути негомотопны тождественному пути. Это говорит о том, что понятие относительной гомотопии более тонко, чем просто гомотопия. □

Понятие относительной гомотопии для путей будет использовано при определении фундаментальной группы многообразия.

11.3 Фундаментальная группа

Имеется два простых, но важных способа получения новых путей из старых. А именно, можно определить произведение путей, когда сначала проходится путь γ_1, а затем – путь γ_2, если такое возможно. Кроме того, можно определить *обратный* путь $\bar{\gamma}$, который проходится в обратном направлении.

Предложение 11.3.1. *1) Если начало второго пути γ_2 совпадает с концом первого пути γ_1, то можно определить произведение путей $\gamma_2 \circ \gamma_1$ следующей формулой:*

$$(\gamma_2 \circ \gamma_1)(t) = \begin{cases} \gamma_1(2t) & \textit{при} \quad 0 < t < \frac{1}{2}, \\ \gamma_2(2t-1) & \textit{при} \quad \frac{1}{2} < t < 1, \end{cases} \tag{11.4}$$

которое является путем в $\mathbb{M}$.

2) Для любого пути γ *можно определить путь* $\bar{\gamma}$*, получаемый как путь* γ*, проходимый в обратном направлении:*

$$\bar{\gamma}(t) = \gamma(1-t). \tag{11.5}$$

Эти операции похожи, но не являются групповыми операциями на множестве всех путей. Действительно, умножение путей определено только в том случае, если конец первого пути совпадает с началом второго. Кроме того, произведения $\bar{\gamma} \circ \gamma$ и $\gamma \circ \bar{\gamma}$ дают не тождественные, а замкнутые пути в началом и концом в точках $\gamma(0)$ и $\gamma(1)$ соответственно.

Разобьем все множество путей γ на классы эквивалентных путей $[\gamma]$, которые гомотопны относительно начала и конца пути. То есть каждый элемент $[\gamma]$ содержит все пути, которые можно непрерывно деформировать друг в друга при фиксированном начале и конце путей: $\gamma_1 \in [\gamma]$ тогда и только тогда, когда $\gamma_1 \sim \gamma(\mathsf{rel}\{0,1\})$. В классах эквивалентных путей также можно ввести умножение путей и обратный элемент, выбрав из каждого класса по представителю и воспользовавшись формулами (11.4) и (11.5). Нетрудно показать, что эти операции на множестве относительно гомотопных путей корректно определены, т.к. не зависят от выбора представителя в каждом классе. В этих классах произведения $[\bar{\gamma}] \circ [\gamma] = [e_{\gamma(0)}]$ и $[\gamma] \circ [\bar{\gamma}] = [e_{\gamma(1)}]$ дают классы путей, гомотопных тождественным путям. Однако умножение определено не для всех классов путей.

Ситуацию можно исправить и превратить некоторое подмножество всех путей на $\mathbb{M}$ в группу, если зафиксировать точку многообразия и ограничиться замкнутыми путями, имеющими начало и конец в данной точке.

Зафиксируем произвольную точку многообразия $x_0 \in \mathbb{M}$ и рассмотрим все замкнутые пути, имеющие начало и конец в данной точке. Множество этих путей обозначим через $\Omega(\mathbb{M}, x_0)$. При этом допускается, чтобы пути имели точки самопересечения. Поскольку начала и концы всех путей совпадают, то на этом множестве определена операция умножения (11.4). Для каждого пути определен также обратный путь (11.5). Множество $\Omega(\mathbb{M}, x_0)$ с введенной операцией умножения и обратного элемента группы не образует, потому что произведения двух различных путей на их обратные не совпадают, и, следовательно, невозможно ввести понятие единственного единичного элемента. Эту трудность можно обойти, если разбить множество путей $\Omega(\mathbb{M}, x_0)$ на классы путей, гомотопных относительно начала и конца, которые обозначим через $\pi(\mathbb{M}, x_0)$. Справедлива следующая теорема.

Теорема 11.3.1. *Гомотопические классы путей* $\pi(\mathbb{M}, x_0)$ *образуют группу относительно операции умножения путей, причем обратным элементом является гомотопический класс обратного пути, а единицей – гомотопический класс единичного пути* e_{x_0}.

Доказательство. Сводится к проверке корректности операций и групповых свойств. Детали можно найти, например, в [**?**]. □

Таким образом, для определения группы было сделано два шага. Во-первых, чтобы определить операцию умножения на всех элементах, множество всех путей было ограничено только замкнутыми путями, имеющими начало и конец в фиксированной точке многообразия. Во-вторых, для корректного определения единичного элемента мы перешли от умножения отдельных путей к умножению классов относительно гомотопных путей.

Определение. Группа $\pi(\mathbb{M}, x_0)$ называется *фундаментальной группой* топологического пространства и, следовательно, многообразия $\mathbb{M}$ в точке x_0. □

В этом определении используется фиксированная точка x_0. Для связных многообразий роль фиксированной точки не является существенной.

Теорема 11.3.2. *Пусть $\mathbb{M}$ – линейно связное пространство. Тогда для любых точек $x_0, x_1 \in \mathbb{M}$ фундаментальные группы $\pi(\mathbb{M}, x_0)$ и $\pi(\mathbb{M}, x_1)$ изоморфны.*

Доказательство. Пусть δ – путь из x_0 в x_1 и γ – произвольный замкнутый путь в точке x_0. Тогда $\delta \circ \gamma \circ \bar{\delta}$ – замкнутый путь в точке x_1. Поэтому между множествами замкнутых путей $\Omega(\mathbb{M}, x_0)$ и $\Omega(\mathbb{M}, x_1)$ устанавливается взаимно однозначное соответствие. Отсюда следует, что между фундаментальными группами существует биекция $f_\delta :\ \pi(\mathbb{M}, x_0) \to \pi(\mathbb{M}, x_1)$. Эта биекция – гомоморфизм групп, т.к.

$$f_\delta([\gamma_2] \circ [\gamma_1]) = [\delta] \circ [\gamma_2] \circ [\gamma_1] \circ \bar{\delta} = [\delta] \circ [\gamma_2] \circ \bar{\delta} \circ \delta \circ [\gamma_1] \circ \bar{\delta} = f_\delta([\gamma_2]) \circ f_\delta([\gamma_2]).$$

Обратное отображение f_δ^{-1} определяется обратным путем $\bar{\delta}$. □

В силу этой теоремы при обозначении фундаментальной группы фиксированную точку x_0 мы часто будем опускать, $\pi(\mathbb{M}, x_0) = \pi(\mathbb{M})$. Изоморфизм между фундаментальными группами f_δ определяется гомотопическим классом пути $[\delta]$ из x_0 в x_1. Поскольку нет естественного выбора такого класса путей, то естественного изоморфизма между группами не существует.

Пример 11.3.1. В евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$ при любом n произвольный замкнутый путь для любой отмеченной точки гомотопен тождественному пути в этой точке. Поэтому фундаментальная группа евклидова пространства тривиальна $\pi(\mathbb{R}^n) = e$. □

Определение. Топологическое пространство (многообразие) $\mathbb{M}$ называется *односвязным*, если его фундаментальная группа тривиальна $\pi(\mathbb{M}) = e$. □

Предложение 11.3.2. *Если $\mathbb{M}_1$ и $\mathbb{M}_2$ – односвязные многообразия, то их прямое произведение $\mathbb{M}_1 \times \mathbb{M}_2$ односвязно.*

Доказательство. Простая проверка. □

Пример 11.3.2. Фундаментальная группа окружности с отмеченной точкой изоморфна группе целых чисел по сложению, $\pi(\mathbb{S}^1, x_0) \simeq \mathbb{Z}$. При этом целое число равно количеству полных обходов окружности, причем положительные и отрицательные числа соответствуют обходам по и против часовой стрелки соответственно. Хотя изоморфизм фундаментальной группы окружности группе целых чисел интуитивно очевиден, доказательство громоздко. Его можно найти, например, в [**?**]. □

Пример 11.3.3. Фундаментальная группа цилиндра совпадает с фундаментальной группой окружности и равна группе целых чисел по сложению $\mathbb{Z}$. □

Нетрудно доказать, что при непрерывном отображении $f :\ \mathbb{M}_1 \to \mathbb{M}_2$ гомотопически эквивалентные пути $\gamma_1 \sim \gamma_2$ переходят в гомотопически эквивалентные пути $f\gamma_1 \sim f\gamma_2$ и что замкнутые пути переходят в замкнутые. При этом между фундаментальными группами возникает связь.

Теорема 11.3.3. *При непрерывном отображении* $f:\ \mathbb{M}_1 \to \mathbb{M}_2$ *фундаментальные группы испытывают гомоморфизм*

$$f_*:\quad \pi(\mathbb{M}_1, x) \to \pi(\mathbb{M}_2, f(x)),$$

где x *– произвольная точка из* $\mathbb{M}_1$*, который называется индуцированным и одинаков для всех отображений, гомотопных относительно точки* x*.*

Доказательство. См., например, [**?**]. □

Замечание. Если отображение двух пространств является гомеоморфизмом, то гомоморфизм фундаментальных групп становится изоморфизмом. □

Понятие фундаментальной группы позволяет осуществить переход от топологии пространств к алгебре и является одним из разделов алгебраической топологии. Этот переход позволяет использовать алгебраические методы при изучении топологических пространств и, следовательно, многообразий. При этом 1) каждому топологическому пространству с отмеченной точкой ставится в соответствие фундаментальная группа, 2) каждому непрерывному отображению пространств ставится в соответствие гомоморфизм групп, 3) тождественному отображению отвечает тождественный гомоморфизм, 4) гомеоморфизму отвечает изоморфизм, 5) композиции непрерывных отображений сопоставляется композиция гомоморфизмов.

Замечание. Отмеченные выше свойства 1) – 5) дают пример функтора из категории топологических пространств с отмеченной точкой и непрерывными отображениями, сохраняющими отмеченную точку, в категорию групп и их гомоморфизмов. □

Рассмотренные примеры окружности и цилиндра показывают, что изоморфизм фундаментальных групп не означает гомеоморфизма пространств. Однако, если фундаментальные группы не изоморфны, то соответствующие пространства заведомо не гомеоморфны.

Теорема 11.3.4. *Пусть* $f:\ \mathbb{M}_1 \to \mathbb{M}_2$ *– гомотопическая эквивалентность двух пространств, тогда индуцированное отображение* $f_*:\ \pi(\mathbb{M}_1, x) \to \pi(\mathbb{M}_2, f(x))$ *является изоморфизмом для любой точки* $x \in \mathbb{M}_1$*.*

Доказательство. См., например, [**?**]. □

Следствие. Стягиваемое пространство имеет тривиальную фундаментальную группу. □

Мы видим, что любое стягиваемое пространство является односвязным. Обратное утверждение неверно.

Пример 11.3.4. Шар $\mathbb{B}^n$, $n \geq 3$, с выколотой точкой является односвязным, но не стягиваемым многообразием. □

Теорема 11.3.5. *Пусть* $\mathbb{M}_1$ *и* $\mathbb{M}_2$ *– два линейно связных топологических пространства. Тогда фундаментальная группа произведения* $\mathbb{M}_1 \times \mathbb{M}_2$ *изоморфна произведению фундаментальных групп,* $\pi(\mathbb{M}_1 \times \mathbb{M}_2) \simeq \pi(\mathbb{M}_1) \times \pi(\mathbb{M}_2)$*.*

Доказательство. Доказательство заключается в явном построении изоморфизма. См., например, [**?**]. □

Следствие. Произведение $\mathbb{M}_1 \times \mathbb{M}_2$ двух односвязных пространств является односвязным. □

Пример 11.3.5. Фундаментальная группа тора $\mathbb{T}^n \approx \mathbb{S}^1 \times \ldots \times \mathbb{S}^1$ изоморфна произведению групп целых чисел, $\pi(\mathbb{T}^n) \simeq \underbrace{\mathbb{Z} \times \ldots \times \mathbb{Z}}_{n}$. □

11.4 Фундаментальная группа и ориентируемость

Все связные многообразия можно разделить на два класса: ориентируемые и неориентируемые. Напомним, что многообразие $\mathbb{M}$ называется ориентируемым (см. раздел 3), если его можно покрыть системой карт, $\mathbb{M} = \bigcup_i \mathbb{U}_i$, причем якобиан преобразования координат (2.21) во всех пересечениях $\mathbb{U}_i \cap \mathbb{U}_j$ положителен.

Рассмотрим класс многообразий, на которых можно задать репер $\{e_a\}$, $a = 1, \ldots, n$, т.е. n дифференцируемых векторных полей, которые линейно независимы в каждой точке многообразии $\mathbb{M}$, $\dim \mathbb{M} = n$. Отсюда, в частности, следует, что векторные поля $e_a(x)$ не могут обращаться в нуль ни в какой точке многообразия $\mathbb{M}$, т.к. в противном случае они были бы линейно зависимы в этой точке. Репер $\{e_a(x)\}$ образует базис для касательных векторных полей. Локально репер всегда существует. Однако его глобальное существование является сильным предположением, и далеко не каждое ориентируемое многообразие допускает существование репера.

Пример 11.4.1. Двумерная сфера $\mathbb{S}^2$ является ориентируемым многообразием, однако она не допускает существование репера, так как на ней не существует векторных полей, которые не обращаются в нуль (теорема 11.2.1). □

В локальной системе координат репер раскладывается по координатному базису, $e_a = e^\alpha{}_a \partial_\alpha$, $\det e^\alpha{}_a \neq 0$.

Если от отдельных реперов перейти к классам ориентирующих реперов, то можно дать новое эквивалентное определение ориентируемости многообразий. Пусть в точке $x \in \mathbb{M}$, $\dim \mathbb{M} = n$, задан *класс ориентации*, т.е. класс реперов $\{e_a\}$, $a = 1, \ldots, n$, связанных друг с другом линейным преобразованием с положительным определителем. Подробнее, два репера $\{e'_a(x)\}$ и $\{e_a(x)\}$ принадлежат одному классу ориентации, если они связаны преобразованием $e'_a = S_a{}^b e_b$, причем $\det S(x) > 0$. Если $\det S < 0$, то будем говорить, что в точке x реперы принадлежат классам противоположной ориентации. Таким образом, в каждой точке многообразия имеются два класса ориентации. Поскольку репер можно непрерывно смещать из точки x в близкие точки многообразия, то имеет смысл говорить о непрерывной зависимости классов ориентации от точки многообразия.

Определение. Если в каждой точке многообразия $\mathbb{M}$ существует класс ориентации реперов, который непрерывно зависит от точки многообразия, то многообразие $\mathbb{M}$ называется *ориентируемым*. □

Докажем эквивалентность нового определения и определения ориентируемости многообразий, которое было дано в разделе 3. Пусть многообразие ориентируемо и на нем существует координатное покрытие $\mathbb{M} = \bigcup_i \mathbb{U}_i$ такое, что якобиан преобразования координат положителен, $\det \partial_\alpha x^{\alpha'} > 0$, во всех областях пересечения карт. В каждой координатной окрестности выберем координатный репер $\{\partial_\alpha\}$. Множество этих реперов определяет класс ориентации, который непрерывно зависит от точки многообразия. Действительно, если точка принадлежит различным картам, то координатные реперы принадлежат одному классу ориентации. Обратно. Пусть существует класс ориентации реперов, непрерывно зависящий от точки многообразия. Выберем координатное покрытие многообразия, $\mathbb{M} = \bigcup_i \mathbb{U}_i$. Тогда в двух пересекающихся картах $\mathbb{U}_i$ и $\mathbb{U}_j$ можно выбрать координаты x^α и $x^{\alpha'}$ таким образом, что

$$e_a = e^\alpha{}_a \partial_\alpha = e^{\alpha'}{}_a \partial_{\alpha'}, \qquad \det e^\alpha{}_a > 0, \quad \det e^{\alpha'}{}_a > 0,$$

где $\{e_a\}$ – некоторый представитель заданного класса ориентации. Действительно, если в какой то системе координат $\det e^\alpha{}_a < 0$, то, переставив две произвольные координаты, получим $\det e^\alpha{}_a > 0$. Отсюда следует положительность якобиана преобразования координат в области пересечения карт,

$$J = \det \partial_\alpha x^{\alpha'} = \det \left(e^a{}_\alpha e^{\alpha'}{}_a\right) > 0. \tag{11.6}$$

Это справедливо для любого представителя из класса ориентации.

На произвольном многообразии, в том числе и неориентируемом, ориентацию можно переносить вдоль путей. Пусть на многообразии $\mathbb{M}$ задан кусочно дифференцируемый путь $\gamma(\bar{\mathbb{I}})$ и класс ориентации реперов $\{e_a\big(\gamma(\bar{\mathbb{I}})\big)\}$ во всех точках пути, который непрерывно зависит от точки пути. Тогда класс ориентации $\{e_a(1)\}$ в конечной точке $\gamma(1)$ называется *переносом класса ориентации* репера $\{e_a(0)\}$ из точки $x(0)$ в точку $x(1)$ вдоль пути γ.

Операция переноса ориентации вдоль путей обладает следующими свойствами.

1) Из любой точки $x \in \mathbb{M}$ ориентацию можно однозначно перенести во все близлежащие точки многообразия вдоль путей, целиком лежащих в пределах координатной окрестности точки x.

2) Для любого кусочно дифференцируемого пути перенос ориентации существует и не зависит от выбора репера вдоль пути. Существование очевидно, т.к. достаточно задать произвольным образом компоненты n линейно независимых векторов $\{e_a(t)\}$, как дифференцируемые функции одного переменного. Независимость от выбора репера доказывается просто. Пусть $\{e_a(t)\}$ и $\{e'_a(t)\}$ – два репера вдоль одной кривой $\gamma(t)$, имеющие одинаковую ориентацию при $t = 0$. Матрица перехода от одного репера к другому, $e'_a = S_a{}^b e_b$, невырождена, $\det S(t) \neq 0$ для всех $t \in \bar{\mathbb{I}}$. Поэтому, если в начальный момент $\det S(0) > 0$, то из непрерывности следует, что $\det S(t) > 0$ для всех $t \in \bar{\mathbb{I}}$.

3) Если два пути $\gamma_1(t)$ и $\gamma_2(t)$ гомотопны относительно начала и конца, то переносы класса ориентации вдоль этих путей совпадают. Действительно, для гомотопных путей существует непрерывное отображение $F(t,s) : \bar{\mathbb{I}} \times \bar{\mathbb{I}} \to \mathbb{M}$ такое, что $F(t,0) = \gamma_1(t)$ и $F(t,1) = \gamma_2(t)$. Пусть $\{e_a(t)\}$ – репер вдоль $\gamma_1(t)$. Перенесем каким либо непрерывным образом этот репер из каждой точки кривой γ_1 вдоль кривых $F(t,s)$ по второму аргументу s. Перенос ориентации в конечные точки не зависит от выбора репера $\{e_a(t)\}$ вдоль γ_1 в силу свойства 2). В результате получим некоторый репер вдоль второй кривой γ_2. Поскольку в начальной и конечной точке реперы по построению совпадают, то совпадают и переносы классов ориентации вдоль гомотопных путей.

Приведенные выше определения удобны для доказательства неориентируемости некоторых многообразий в силу следующей теоремы.

Теорема 11.4.1. *Связное многообразие ориентируемо тогда и только тогда, когда перенос класса ориентации репера вдоль любого замкнутого пути сохраняет ориентацию.*

Доказательство. Пусть многообразие $\mathbb{M}$ ориентируемо. Выберем координатное покрытие такое, чтобы якобиан преобразования координат был положителен, $\det \partial_\alpha x^{\alpha'} > 0$, во всех областях пересечения карт. Выберем произвольную точку $x_0 \in \mathbb{M}$ и зафиксируем какой либо репер, который принадлежал бы тому же классу ориентации, что и координатный базис, т.е. $\det \left(e^\alpha{}_a(x_0)\right) > 0$. Эту ориентацию можно перенести в любую точку многообразия, т.к. оно линейно связно. Результат переноса ориентации

не зависит от пути, потому что ориентацию можно переносить внутри произвольной карты, а при переходе от карты к карте принадлежность репера определенному классу ориентации сохраняется. В частности, принадлежность репера данному классу ориентации сохраняется при переносе ориентации вдоль произвольного замкнутого пути.

Обратно. Выберем произвольным образом репер в какой либо точке $x_0 \in \mathbb{M}$ и разнесем эту ориентацию во все другие точки $x \in \mathbb{M}$. Результат будет однозначен, т.к. перенос класса ориентации вдоль произвольного замкнутого пути сохраняет ориентацию. Таким образом в каждой точке $x \in \mathbb{M}$ определен класс ориентации $\{e_a(x)\}$. Пусть $\mathbb{U}_i$ – координатное покрытие многообразия $\mathbb{M}$. На каждой координатной окрестности можно выбрать систему координат такую, что $\det e^\alpha{}_a > 0$ для некоторого представителя из класса ориентации. Следовательно, из (11.6) следует, что якобиан преобразования координат во всех пересекающихся областях будет положителен. □

Из этой теоремы вытекает, что если можно указать замкнутый путь, вдоль которого не существует переноса класса ориентации репера, то многообразие является неориентируемым. В частности, неориентируемое многообразие не может быть односвязным. Действительно, любой замкнутый путь на односвязном многообразии можно непрерывно стянуть в точку. Поскольку замкнутые пути в достаточно малой окрестности произвольной точки сохраняют ориентацию, то из непрерывности следует, что на односвязном многообразии любой замкнутый путь сохраняет ориентацию. То есть каждая односвязная компонента многообразия всегда ориентируема. Неодносвязные многообразия могут быть как ориентируемыми, так и ориентируемыми.

Пример 11.4.2. Цилиндр и лист Мебиуса имеют изоморфные фундаментальные группы $\pi \simeq \mathbb{Z}$, однако являются соответственно ориентируемой и неориентируемой поверхностями. □

Пусть на многообразии $\mathbb{M}$ задан ориентирующий репер $\{e_a\}$ глобально. Рассмотрим этот репер в качестве базиса касательных векторных полей $X = X^a e_a \in \mathcal{X}(\mathbb{M})$. Зададим на $\mathbb{M}$ тривиальную линейную $\mathbb{GL}(n,\mathbb{R})$-связность: $\omega_{\alpha a}{}^b = 0$ в каждой карте. Это значит, что при параллельном переносе векторов их компоненты относительно выбранного репера не меняются. Тогда рассматриваемое многообразие будет пространством абсолютного параллелизма, т.к. тензор кривизны для тривиальной связности равен нулю, $R_{\alpha\beta a}{}^b = 0$. По этой причине, если на многообразии можно задать репер глобально, то оно называется *параллелизуемым*. В то же время тензор кручения для тривиальной связности в общем случае будет отличен от нуля. При этом тензор кручения для заданной нулевой связности однозначно определяется репером. Верно также и обратное утверждение: в пространстве абсолютного параллелизма, в котором тензор кривизны всюду равен нулю, $R_{\alpha\beta a}{}^b = 0$, всегда можно задать репер глобально. Для этого достаточно выбрать n линейно независимых векторов в касательном пространстве произвольной точки, а затем разнести их по всему многообразию, используя то свойство, что результат не зависит от пути параллельного переноса. Таким образом, мы доказали

Предложение 11.4.1. *Любое многообразие $\mathbb{M}$ параллелизуемо тогда и только тогда, когда оно допускает существование глобально определенного репера.*

Отсюда следует, что любое параллелизуемое многообразие является ориентируемым.

Пример 11.4.3. Любая группа Ли является параллелизуемым многообразием, если групповое умножение слева (справа) принять за определение параллельного переноса (см. раздел 9.6). Поэтому все группы Ли представляют собой ориентируемые многообразия. При этом левоинвариантные (правоинвариантные) векторные поля представляют собой глобально определенный репер. □

Обратное утверждение, что все ориентируемые многообразия являются параллелизуемыми, неверно, как показывает пример сферы 11.4.1.

Приведем критерий параллелизуемости многообразий.

Теорема 11.4.2. *Многообразие* $\mathbb{M}$ *является параллелизуемым тогда и только тогда, когда касательное расслоение диффеоморфно прямому произведению* $\mathbb{T}(\mathbb{M}) \approx \mathbb{M} \times \mathbb{R}^n$.

Доказательство. Проверяется тот факт, что глобально определенный репер устанавливает диффеоморфизм расслоений. □

Ориентируемость многообразий можно также определить с помощью дифференциальных форм, рассмотренных в разделе 4. Рассмотрим связное многообразие $\mathbb{M}$, $\mathsf{dim}\,\mathbb{M} = n$. Пространство дифференциальных форм максимальной степени $\Lambda^n(\mathbb{M})$ в каждой точке многообразия одномерно. Пусть $A, B \in \Lambda^n(\mathbb{M})$ и $A \neq 0$, $B \neq 0$ во всех точках $x \in \mathbb{M}$. Отношение $A = f(x)B$, где $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{M})$ и $f > 0$, задает отношение эквивалентности в пространстве n-форм, не обращающихся в нуль ни в одной точке многообразия. Это отношение определяет ровно два класса эквивалентности. Назовем *ориентацией* многообразия $\mathbb{M}$ соответствующий класс эквивалентности n-форм, если такой класс существует. Это определение ориентируемости эквивалентно приведенному выше в силу следующей теоремы.

Теорема 11.4.3. *Связное многообразие* $\mathbb{M}$, $\mathsf{dim}\,\mathbb{M} = n$, *ориентируемо тогда и только тогда, когда оно допускает непрерывную нигде не обращающуюся в нуль* n*-форму.*

Доказательство. Достаточность. Пусть на связном многообразии $\mathbb{M}$ ориентация задана с помощью n-формы A, которая не равна нулю ни в одной точке. Пусть $\{\mathbb{U}_i\}$ – локально конечное покрытие многообразия $\mathbb{M}$. Пусть x^α, $\alpha = 1, \ldots, n$ – система координат на некоторой области $\mathbb{U}_i$. Тогда n-форма $dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n$ не равна нулю ни в какой точке $\mathbb{U}_i$ и поэтому отличается от A на некоторый отличный от нуля множитель $f(x)$,

$$dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n = fA.$$

Если $f > 0$, то мы говорим, что система координат x^α согласована с ориентацией на $\mathbb{M}$. В противном случае, при $f < 0$, достаточно переставить две координаты для изменения знака n-формы. Обозначим координаты на области $\mathbb{U}_j$, которая пересекается с $\mathbb{U}_i$, через $x^{\alpha'}$. Эти координаты всегда можно выбрать так, чтобы они были согласованы с ориентацией A. Тогда n-форма $dx^{1'} \wedge \ldots \wedge dx^{n'}$ также отличается от формы A на некоторый положительный множитель $g(x) > 0$,

$$dx^{1'} \wedge \ldots \wedge dx^{n'} = gA.$$

Поскольку

$$dx^{1'} \wedge \ldots \wedge dx^{n'} = \mathsf{det}\left(\frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^\alpha}\right) dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n,$$

то якобиан соответствующего преобразования координат $x^\alpha \to x^{\alpha'}$ положителен,

$$\det\left(\frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^\alpha}\right) = gf^{-1} > 0.$$

Полученное выражение для якобиана преобразования координат корректно, что легко проверяется для пересечения трех карт.

Необходимость. Пусть f_i – разбиение единицы, подчиненное заданному счетному локально конечному покрытию $\{\mathbb{U}_i\}$ (теорема 3.2.3). Выберем координаты на каждой области $\mathbb{U}_i$ таким образом, чтобы все якобианы преобразований координат в областях пересечения были положительны. На каждой области $\mathbb{U}_i$ можно построить отличную от нуля n-форму $\omega_i = dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n$. Тогда n-форма $\sum_i f_i\omega_i$ определена на всем многообразии и отлична от нуля во всех точках. □

Замечание. В доказательстве теоремы использовано разбиение единицы, которое всегда существует, т.к. в определение многообразия мы включили счетность базы топологии. Если это требование исключено из определения, как это часто делается, то в условии теоремы необходимо дополнительно потребовать, например, паракомпактность многообразия. □

В роли формы не обращающейся в нуль может выступать форма объема (4.72). Если многообразие не допускает существования непрерывной невырожденной n-формы, то оно будет неориентируемым. Если на связном многообразии задана невырожденная n-форма, то мы говорим, что на многообразии задана ориентация. Если многообразие несвязно и состоит из нескольких компонент, то на каждой компоненте ориентацию можно задавать независимо, если такое возможно.

Отметим, что каждый репер e_a, заданный глобально, определяет невырожденную n-форму. Действительно, обозначим дуальный базис кокасательного пространства через e^a. Тогда форма объема

$$\upsilon = e^1 \wedge \ldots \wedge e^n$$

определена глобально и невырождена. Обратное утверждение неверно.

Пример 11.4.4. На двумерной сфере $\mathbb{S}^2$ существует форма объема, однако репер определить глобально нельзя, так как на ней не существует векторных полей, не обращающихся в нуль. □

Теорема 11.4.4. *Для любого неориентируемого многообразия $\mathbb{M}$ существует двулистное ориентируемое накрытие $p:\ \widetilde{\mathbb{M}} \to \mathbb{M}$.*

См., например, [**?**].

Пример 11.4.5. Сфера $\mathbb{S}^2$ ориентируема и является двулистным универсальным накрывающим пространством для проективной плоскости $\mathbb{RP}^2$, которая неориентируема.

Пример 11.4.6. Лист Мебиуса можно получить из цилиндра путем отождествления центрально симметричных точек, как показано на рис. 11.4. Это накрытие двулистно, но не является универсальным. Универсальные накрывающие цилиндра и листа Мебиуса совпадают – это плоскость $\mathbb{R}^2$. □

Рис. 11.4: Накрытие листа Мебиуса цилиндром. Отождествив центрально симметричные точки цилиндра, мы получим лист Мебиуса в виде полосы с отождествленными краевыми точками.

Обсудим более подробно связь неориентируемости многообразия с фундаментальной группой. Перенос ориентации с помощью репера показывает, что каждый гомотопический класс замкнутого пути с началом и концом в точке x_0 (т.е. элемент фундаментальной группы $\pi(\mathbb{M}, x_0)$) либо сохраняет, либо меняет ориентацию репера на противоположную. Это означает, что существует гомоморфизм σ фундаментальной группы в группу $\mathbb{Z}_2$,

$$\sigma : \quad \pi(\mathbb{M}, x_0) \to \mathbb{Z}_2 = \{\pm 1\}\,.$$

Другими словами, каждому замкнутому пути ставится в соответствие $+1$ или -1, в зависимости от того, сохраняется ориентация репера при переносе или меняется на противоположную. Если многообразие ориентируемо, то гомоморфизм σ тривиален. Для неориентируемых многообразий ввиду наличия путей, обращающих ориентацию, гомоморфизм σ нетривиален. Как следствие получаем, что фундаментальная группа неориентируемых многообразий не может быть тривиальной.

Пример 11.4.7. Фундаментальная группа листа Мебиуса совпадает с группой целых чисел, $\pi(\mathbb{M}) = \mathbb{Z}$, т.к. он стягивается к центральной окружности. При гомоморфизме σ все четные и нечетные числа отображаются соответственно в $+1$ и -1. □

Пример 11.4.8. Фундаментальная группа проективного пространства $\mathbb{RP}^n$ нетривиальна $\pi(\mathbb{RP}^n) = \mathbb{Z}_2$, и гомоморфизм σ является изоморфизмом для четных n. Для нечетных n гомоморфизм σ тривиален, т.к. проективные пространства нечетной размерности ориентируемы. Проективное пространство можно параметризовать точками шара, у которого отождествлены диаметрально противоположные точки граничной сферы (см. пример 3.1.7). Тогда диаметр шара будет замкнутым путем (образом окружности), который не стягивается в точку. В то же время, если при отображении окружности в проективное пространство диаметр проходится два раза, то такой образ окружности можно стянуть в точку, как показано на рис. 11.5. Аналогично стягивается в точку любой образ окружности, который проходит диаметр произвольное четное число раз. Это поясняет, почему фундаментальная группа проективного пространства равна $\mathbb{Z}_2$. □

Рис. 11.5: Непрерывная деформация образа окружности в проективном пространстве $\mathbb{RP}^2$, который проходит по диаметру два раза, в точку. Пунктиром показано отождествление противоположных точек граничной окружности.

Глава 12

Накрытия

Важным классом непрерывных отображений топологических пространств являются накрытия, которые представляют собой локальный гомеоморфизм.

12.1 Определения и примеры

Определение. Непрерывное отображение топологических пространств $p:\ \widetilde{\mathbb{M}} \to \mathbb{M}$ называется *накрытием*, если выполнены следующие условия:

1) p сюръективно;
2) для любого $x \in \mathbb{M}$ найдется открытая окрестность $\mathbb{U}_x$ точки x такая, что $p^{-1}(\mathbb{U}_x) = \bigcup_{j\in\mathcal{J}} \mathbb{U}_j$ для некоторого семейства открытых подмножеств $\mathbb{U}_j \subset \widetilde{\mathbb{M}}$, удовлетворяющих условиям $\mathbb{U}_j \bigcap \mathbb{U}_k = \emptyset$ при $j \neq k$ и сужение отображения $p|_{\mathbb{U}_j}:\ \mathbb{U}_j \to \mathbb{U}_x$ – гомеоморфизм для всех $j \in \mathcal{J}$.

Мы говорим также, что окрестность $\mathbb{U}_x$ *просто накрыта* отображением p. Топологическое пространство $\mathbb{M}$ называется *базой* накрытия, а $\widetilde{\mathbb{M}}$ – *накрывающим пространством*. Каждое множество $\mathbb{U}_j$ называется *листом* накрытия области $\mathbb{U}_x$. Если множество $\mathcal{J}$ содержит n элементов, то говорят об n-листном накрытии. Если топологическое пространство $\widetilde{\mathbb{M}}$ является односвязным, т.е. фундаментальная группа тривиальна, $\pi(\widetilde{\mathbb{M}}) = e$, то накрытие называется *универсальным*. □

Предложение 12.1.1. *Если база $\mathbb{M}$ накрытия $p:\ \widetilde{\mathbb{M}} \to \mathbb{M}$ линейно связна, то мощность множества $\mathcal{J}$ не зависит от точки $x \in \mathbb{M}$.*

Доказательство. См., например, [**?**]. □

Это утверждение говорит о том, что определение n-листного накрытия корректно, т.к. не зависит от точки $x \in \mathbb{M}$.

Замечание. Если $\widetilde{\mathbb{M}}$ и $\mathbb{M}$ являются не просто топологическими пространствами, а многообразиями, то вместо непрерывности отображения p мы требуем его дифференцируемость, а гомеоморфизм заменяем на диффеоморфизм областей $\mathbb{U}_j$ и $\mathbb{U}_x$ для всех $j \in \mathcal{J}$. Для многообразий $\mathsf{dim}\,\mathbb{U}_j = \mathsf{dim}\,\mathbb{U}_x$ для всех $j \in \mathcal{J}$, т.к. сужение отображения p на $\mathbb{U}_j$ – диффеоморфизм. Кроме того, каждое подмножество $\mathbb{U}_j$, по-определению, открыто в $\widetilde{\mathbb{M}}$. Это возможно только если $\mathsf{dim}\,\widetilde{\mathbb{M}} = \mathsf{dim}\,\mathbb{U}_j$. Таким образом, если $p:\ \widetilde{\mathbb{M}} \to \mathbb{M}$ накрытие многообразий, то необходимо, чтобы накрывающее многообразие и база имели одинаковую размерность, $\mathsf{dim}\,\widetilde{\mathbb{M}} = \mathsf{dim}\,\mathbb{M}$. Для многообразий отображение p является погружением. □

Пример 12.1.1. Всякий гомеоморфизм является однолистным накрытием. В этом случае у каждой области $\mathbb{U}_x$ имеется только один лист. □

Пример 12.1.2. Если $\widetilde{\mathbb{M}} = \mathbb{M} \times \mathbb{X}$ – топологическое произведение топологического пространства $\mathbb{M}$ на счетное множество $\mathbb{X}$, то естественная проекция $p: \mathbb{M} \times \mathbb{X} \to \mathbb{M}$ является накрытием. Число листов равно числу элементов множества $\mathbb{X}$. □

Пример 12.1.3. Отображение вещественной прямой в окружность,

$$p: \quad \mathbb{R} \ni t \mapsto \mathsf{e}^{2\pi i t} \in \mathbb{S}^1,$$

является накрытием с бесконечным числом листов. Это накрытие является универсальным. □

Пример 12.1.4. Пусть окружность $\mathbb{S}^1$ задана на комплексной плоскости $\mathbb{C}$ уравнением $|z| = 1$. Тогда отображение окружности в окружность,

$$p: \quad \mathbb{S}^1 \ni z \mapsto z^n \in \mathbb{S}^1, \qquad \forall n \in \mathbb{N},$$

является накрытием с n листами. Это же отображение является n-листным накрытием комплексной плоскости с выколотым началом координат $p: \mathbb{C}\setminus\{0\} \to \mathbb{C}\setminus\{0\}$. □

Пример 12.1.5. Отображение сферы в проективное пространство $p: \mathbb{S}^n \to \mathbb{RP}^n$, $n \geq 1$, получающееся отождествлением диаметрально противоположных точек, является двулистным накрытием. Это накрытие является универсальным. □

Пример 12.1.6. Пусть $\mathbb{G}$ – группа Ли и $\mathbb{H}$ – ее дискретная подгруппа. Тогда проекция $p: \mathbb{G} \to \mathbb{G}/\mathbb{H}$, где $\mathbb{G}/\mathbb{H}$ – пространство левых или правых смежных классов, является накрытием. Число листов равно числу элементов группы $\mathbb{H}$. □

Предложение 12.1.2. *Пусть $\mathbb{E}(\mathbb{M}, \pi, \mathbb{F})$ расслоение, определенное в разделе 3.4, типичным слоем $\mathbb{F}$ которого является 0-мерное многообразие. Тогда проекция $\pi: \mathbb{E} \to \mathbb{M}$ является накрытием. Наоборот, любое накрытие является расслоением $\widetilde{\mathbb{M}}(\mathbb{M}, p, \mathcal{J})$ с 0-мерным типичным слоем $\mathcal{J}$.* □

Доказательство. Определение накрытия и расслоения в случае 0-мерного типичного слоя совпадают, если записать $\pi^{-1}(\mathbb{U}_x) = \chi^{-1}(\mathbb{U}_x \times \mathbb{F}) = \bigcup_{j\in\mathcal{J}} \mathbb{U}_j$, где точки 0-мерного многообразия $j \in \mathcal{J} = \mathbb{F}$ нумеруют листы накрытия области $\mathbb{U}_x$. Второе условие в определении расслоения при 0-мерном слое выполняется автоматически, т.к. отображение $\pi \circ \chi^{-1}$ дифференцируемо, а это возможно только при проекции на первый сомножитель, $\pi \circ \chi^{-1}: \mathbb{U}_x \times \mathbb{F} \ni (y, f) \mapsto y \in \mathbb{M}$. □

Замечание. Если типичным слоем расслоения $\mathbb{E}(\mathbb{M}, \pi, \mathbb{F})$ является многообразие более высокой размерности, $\dim \mathbb{F} \geq 1$, то расслоение не является накрытием, потому что $\dim \pi^{-1}(\mathbb{U}_x) = \dim \mathbb{M} + \dim \mathbb{F} > \dim \mathbb{M}$. □

Следующее утверждение облегчает изучение накрытий за счет ограничения класса рассматриваемых баз.

Теорема 12.1.1. *Если пространство $\mathbb{M}$ – локально связно, то непрерывное отображение $p: \widetilde{\mathbb{M}} \to \mathbb{M}$ тогда и только тогда является накрытием, когда для каждой компоненты связности $\mathbb{U} \subset \mathbb{M}$ сужение отображения*

$$p|_{p^{-1}(\mathbb{U})}: \quad p^{-1}(\mathbb{U}) \to \mathbb{U}$$

является накрытием.

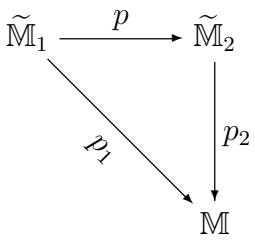
Доказательство. См., например, [**?**]. □

Поскольку все многообразия являются локально связными, то в дифференциальной геометрии мы можем ограничиться рассмотрением накрытий над связными базами $\mathbb{M}$. Поэтому в дальнейшем мы будем рассматривать только линейно связные и, следовательно, связные базы накрытий.

Из определения накрытия следует, что прообраз $p^{-1}(\mathbb{U}_x)$ является объединением непересекающихся открытых подмножеств $\mathbb{U}_j$, каждое из которых гомеоморфно $\mathbb{U}_x$. Если $\mathbb{U}_x$ связно, то каждое из подмножеств $\mathbb{U}_j$ также связно. Отсюда следует

Предложение 12.1.3. *Пусть $\mathbb{U}$ – открытое связное подмножество пространства $\mathbb{M}$, просто накрытое отображением $p: \widetilde{\mathbb{M}} \to \mathbb{M}$. Тогда p гомеоморфно отображает каждую компоненту связности множества $p^{-1}(\mathbb{U})$ на $\mathbb{U}$.*

Следствие. Рассмотрим два накрытия $p_1: \widetilde{\mathbb{M}}_1 \to \mathbb{M}$, $p_2: \widetilde{\mathbb{M}}_2 \to \mathbb{M}$ с одинаковыми базами и коммутативную диаграмму



где база $\mathbb{M}$ локально связна. Если p сюръективно, то оно также является накрытием. □

Теорема 12.1.2. *Пусть $p: \widetilde{\mathbb{M}} \to \mathbb{M}$ – накрытие. Тогда*

1) p – открытое отображение;

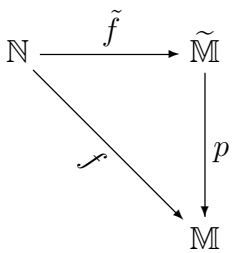
2) $\mathbb{M}$ имеет фактор топологию относительно p.

Доказательство. См., например, [**?**]. □

Если на базе накрытия $\mathbb{M}$ задан путь $\gamma: \bar{\mathbb{I}} \to \mathbb{M}$, то возникает вопрос, что представляет собой прообраз $p^{-1}\big(\gamma(\bar{\mathbb{I}})\big)$ при накрытии $p: \widetilde{\mathbb{M}} \to \mathbb{M}$? Для ответа введем новое понятие.

Пусть задано накрытие $p: \widetilde{\mathbb{M}} \to \mathbb{M}$ и непрерывное отображение некоторого пространства $\mathbb{N}$ в базу накрытия, $f: \mathbb{N} \to \mathbb{M}$. (Для путей в роли $\mathbb{N}$ выступает единичный отрезок $\bar{\mathbb{I}}$.)

Определение. *Поднятием* непрерывного отображения f называется непрерывное отображение $\tilde{f}: \mathbb{N} \to \widetilde{\mathbb{M}}$ такое, что $p \circ \tilde{f} = f$, т.е. диаграмма



коммутативна. □

Следующий результат показывает, что, если поднятие отображения f существует, то оно, по-существу, единственно.

Предложение 12.1.4. *Пусть $p:\ \widetilde{\mathbb{M}} \to \mathbb{M}$ – накрытие и $\tilde f, \tilde{\tilde f}:\ \mathbb{N} \to \widetilde{\mathbb{M}}$ – два поднятия отображения $f:\ \mathbb{N} \to \mathbb{M}$. Если $\mathbb{N}$ связно и поднятия совпадают $\tilde f(y) = \tilde{\tilde f}(y)$ хотя бы в одной точке $y \in \mathbb{N}$, то поднятия совпадают во всех точках, $\tilde f = \tilde{\tilde f}$.*

Доказательство. См., например, [**?**]. □

Теорема 12.1.3 (О накрывающей гомотопии для путей). *Пусть $p:\ \widetilde{\mathbb{M}} \to \mathbb{M}$ – накрытие. Тогда*

1) *для пути $\gamma:\ \bar{\mathbb{I}} \to \mathbb{M}$ и точки $\tilde x \in \widetilde{\mathbb{M}}$ такой, что $p(\tilde x) = \gamma(0)$ существует единственный путь $\tilde\gamma:\ \bar{\mathbb{I}} \to \widetilde{\mathbb{M}}$, который является поднятием, $p \circ \tilde\gamma = \gamma$, пути γ и для которого $\tilde\gamma(0) = \tilde x$;*
2) *для непрерывного отображения (гомотопии двух путей в базе) $F:\ \bar{\mathbb{I}}\times\bar{\mathbb{I}} \to \mathbb{M}$ и точки $\tilde x \in \widetilde{\mathbb{M}}$ такой, что $p(\tilde x) = F(0,0)$ существует единственное непрерывное отображение (гомотопия двух путей в накрывающем пространстве) $\widetilde F:\ \bar{\mathbb{I}} \times \bar{\mathbb{I}} \to \widetilde{\mathbb{M}}$, которое является поднятием, $p \circ \widetilde F = F$, отображения F и для которого $\widetilde F(0,0) = \tilde x$.*

Доказательство. Теорема доказывается путем явного построения отображений. Детали можно найти, например, в [**?**]. □

Следствие (Теорема о монодромии). Пусть $\gamma_1 \sim \gamma_2(\ \mathsf{rel}\{0,1\})$ – два пути в базе $\mathbb{M}$, гомотопные относительно начала и конца, и начальные точки их поднятий совпадают, $\tilde\gamma_0(0) = \tilde\gamma_1(0)$. Тогда конечные точки поднятий также совпадают, $\tilde\gamma_0(1) = \tilde\gamma_1(1)$. □

Напомним, что единица фундаментальной группы $\pi(\mathbb{M}, x_0)$ – это класс замкнутых путей с началом и концом в точке x_0, которые гомотопны тождественному пути e_{x_0}. Из теоремы о монодромии следует, что поднятия всех этих путей также замкнуты в накрывающем пространстве $\widetilde{\mathbb{M}}$. Следующая теорема говорит о том, что поднятие замкнутых путей, которые не стягиваются в точку x_0 будет незамкнутым.

Теорема 12.1.4. *Пусть $p:\ \widetilde{\mathbb{M}} \to \mathbb{M}$ – универсальное накрытие, т.е. накрывающее пространство $\widetilde{\mathbb{M}}$ – односвязно. Тогда существует взаимно однозначное соответствие между элементами фундаментальной группы $\pi\big(\mathbb{M}, p(\tilde x)\big)$ и множеством прообразов $p^{-1}\big(p(\tilde x)\big)$, где $\tilde x$ – произвольная точка $\widetilde{\mathbb{M}}$.*

Доказательство. Пусть $[\gamma] \in \pi\big(\mathbb{M}, p(\tilde x)\big)$ – класс гомотопных замкнутых путей на базе и $\tilde\gamma$ – поднятие какого либо представителя из данного класса. Определим отображение

$$\varphi:\quad \pi\big(\mathbb{M}, p(\tilde x)\big) \ni [\gamma] \mapsto \varphi([\gamma]) = \tilde\gamma(1) \in p^{-1}\big(p(\tilde x)\big).$$

Это отображение определено корректно согласно теореме о монодромии.

Теперь определим обратное отображение $\varphi^{-1}:\ p^{-1}\big(p(\tilde x)\big) \to \pi\big(\mathbb{M}, p(\tilde x)\big)$. Выбираем точку $\tilde x_1 \in p^{-1}\big(p(\tilde x)\big)$ и некоторый путь $\tilde\gamma$ из $\tilde x$ в $\tilde x_1$. Поскольку $\widetilde{\mathbb{M}}$ односвязно, то любые такие пути гомотопны. Поэтому класс замкнутых путей $[p \circ \tilde\gamma]$ – корректно определенный элемент фундаментальной группы $\pi\big(\mathbb{M}, p(\tilde x)\big)$. Легко проверить, что $\varphi \circ \varphi^{-1} = \varphi^{-1} \circ \varphi = e$, так что φ и φ^{-1} – биекции. □

Эта теорема дает возможность в некоторых случаях вычислить фундаментальную группу. Для этого надо найти универсальное накрытие $p:\ \widetilde{\mathbb{M}} \to \mathbb{M}$ и групповую структуру на прообразе $p^{-1}(x_0)$, где $x_0 \in \mathbb{M}$, так, чтобы биекция $\varphi:\ \pi(\mathbb{M}, x_0) \to p^{-1}(x_0)$ стала гомоморфизмом групп. Вообще говоря, сделать это сложно.

12.2 Фундаментальная группа пространства орбит

В настоящем разделе мы рассмотрим группы преобразований $(\widetilde{\mathbb{M}}, \mathbb{G})$ и приведем достаточные условия на группу преобразований, которые обеспечивают то, что проекция пространства $\widetilde{\mathbb{M}}$ в пространство орбит $\mathbb{M} = \widetilde{\mathbb{M}}/\mathbb{G}$ является накрытием. Обсудим связь группы преобразований $\mathbb{G}$ с фундаментальными группами базы $\mathbb{M} = \widetilde{\mathbb{M}}/\mathbb{G}$ и накрывающего пространства $\widetilde{\mathbb{M}}$. Кроме того, обсудим достаточные условия существования в пространстве орбит дифференцируемой структуры.

Замечание. Многие определения и теоремы настоящего раздела справедливы не только для многообразий, но и для произвольных топологических пространств. Поэтому мы будем употреблять термин топологическое пространство, имея в виду, что соответствующее утверждение верно и для многообразий. Там, где важна специфика дифференцируемой структуры, мы будем писать многообразие. □

Определение. Группа $\mathbb{G}$ действует на топологическом пространстве $\widetilde{\mathbb{M}}$ *собственно разрывно*, если выполнены следующие условия:

1) для любых двух точек $\tilde{x}_1$ и $\tilde{x}_2$ из $\widetilde{\mathbb{M}}$, не лежащих на одной орбите, существуют окрестности $\widetilde{\mathbb{U}}_1 \supset \tilde{x}_1$ и $\widetilde{\mathbb{U}}_2 \supset \tilde{x}_2$ такие, что $\widetilde{\mathbb{U}}_1\mathbb{G} \bigcap \widetilde{\mathbb{U}}_2 = \emptyset$,
2) группа изотропии $\mathbb{G}_{\tilde{x}}$ любой точки $\tilde{x} \in \widetilde{\mathbb{M}}$ конечна,
3) для каждой точки $\tilde{x}$ существует окрестность $\widetilde{\mathbb{U}}$, устойчивая относительно группы изотропии $\mathbb{G}_{\tilde{x}}$, $\widetilde{\mathbb{U}}\mathbb{G}_{\tilde{x}} = \widetilde{\mathbb{U}}$, и такая, что для всех $a \in \mathbb{G}$, не лежащих в $\mathbb{G}_{\tilde{x}}$, пересечение $\widetilde{\mathbb{U}}a \bigcap \widetilde{\mathbb{U}} = \emptyset$.

Предложение 12.2.1. *Если группа $\mathbb{G}$ действует на многообразии $\widetilde{\mathbb{M}}$ собственно разрывно, то она конечна или счетна.*

Доказательство. В силу условия 3) орбита произвольной точки является дискретным подмножеством многообразия. Поскольку множество таких точек на многообразии счетно, то, вместе с условием 2) это влечет счетность элементов группы $\mathbb{G}$. В частности, оно может быть конечно. □

Для доказательства следующей теоремы понадобится лемма, которая представляет и самостоятельный интерес.

Лемма 12.2.1. *Пусть $(\widetilde{\mathbb{M}}, \mathbb{G})$ – группа преобразований топологического пространства $\widetilde{\mathbb{M}}$ и фактор пространство $\mathbb{M} = \widetilde{\mathbb{M}}/\mathbb{G}$ снабжено фактор топологией. Тогда каноническая проекция $p: \widetilde{\mathbb{M}} \to \mathbb{M}$ является открытым отображением.*

Доказательство. Пусть $\widetilde{\mathbb{U}}$ открытое подмножество $\widetilde{\mathbb{M}}$. Тогда подмножество $p(\widetilde{\mathbb{U}})$ открыто в $\widetilde{\mathbb{M}}/\mathbb{G}$, т.к. оно снабжено фактор топологией. Прообраз этого подмножества можно представить в виде

$$p^{-1}\big(p(\widetilde{\mathbb{U}})\big) = \bigcup_{a\in\mathbb{G}} \widetilde{\mathbb{U}}a. \tag{12.1}$$

Поскольку отображение $\widetilde{\mathbb{U}} \to \widetilde{\mathbb{U}}a$ – гомеоморфизм для всех $a \in \mathbb{G}$, то $p^{-1}\big(p(\widetilde{\mathbb{U}})\big)$ открыто в $\widetilde{\mathbb{M}}$ как объединение открытых подмножеств. □

Теорема 12.2.1. *Пусть группа $\mathbb{G}$ действует в топологическом пространстве $\widetilde{\mathbb{M}}$ собственно разрывно и свободно, а пространство орбит $\widetilde{\mathbb{M}}/\mathbb{G}$ снабжено фактор топологией. Тогда каноническая проекция $p: \widetilde{\mathbb{M}} \to \widetilde{\mathbb{M}}/\mathbb{G}$ является накрытием.*

Доказательство. По построению отображение p сюръективно и непрерывно. По лемме 12.2.1 это отображение открыто. Пусть $\widetilde{\mathbb{U}}$ – окрестность точки $\tilde{x} \in \widetilde{\mathbb{M}}$, удовлетворяющая условию 3) в определении собственно разрывной группы преобразований. Так как p – открытое отображение, то $p(\widetilde{\mathbb{U}})$ – открытая окрестность орбиты $p(\tilde{x}) = \tilde{x}\mathbb{G}$ и ее прообраз имеет вид (12.1). Поскольку действие группы свободно, то все области $\widetilde{\mathbb{U}}a$, $a \in \mathbb{G}$, открыты в $\widetilde{\mathbb{M}}$ и не пересекаются. Сужение отображения на каждую подобласть $p|_{\widetilde{\mathbb{U}}a} : \widetilde{\mathbb{U}}a \to p(\widetilde{\mathbb{U}})$ является непрерывным открытым биективным отображением и, следовательно, гомеоморфизмом. □

Теперь обсудим связь между группой преобразований $(\widetilde{\mathbb{M}}, \mathbb{G})$, действующей собственно разрывно и свободно, и фундаментальной группой пространства орбит $\mathbb{M} = \widetilde{\mathbb{M}}/\mathbb{G}$, на котором определена фактор топология. Пусть $\tilde{x} \in \widetilde{\mathbb{M}}$ и $x = p(\tilde{x}) \in \widetilde{\mathbb{M}}/\mathbb{G}$. Заметим, что

$$p^{-1}(x) = \{\tilde{x}a \in \widetilde{\mathbb{M}} : \quad a \in \mathbb{G}\},$$

т.е. точки орбиты находятся во взаимно однозначном соответствии с элементами группы. Если класс относительно гомотопных путей принадлежит фундаментальной группе пространства орбит, $[\gamma] \in \pi(\widetilde{\mathbb{M}}/\mathbb{G}, x)$, то существует единственной понятие $\tilde{\gamma}$ пути γ с началом в точке $\tilde{x} \in \widetilde{\mathbb{M}}$ (теорема 12.1.3). Конец поднятого пути $\tilde{\gamma}(1) \in p^{-1}(x)$, и, поскольку группа преобразований действует свободно, то существует единственный элемент $a_{(\gamma)} \in \mathbb{G}$ такой, что $\tilde{\gamma}(1) = \tilde{x}a_{(\gamma)}$. Следовательно, определено отображение

$$\varphi : \quad \pi(\widetilde{\mathbb{M}}/\mathbb{G}, x) \ni [\gamma] \mapsto a_{(\gamma)} \in \mathbb{G}. \tag{12.2}$$

Теорема 12.2.2. *Отображение (12.2) является гомоморфизмом групп.*

Доказательство. Доказательство сводится к проверке равенства $\varphi([\gamma_1][\gamma_2]) = \varphi([\gamma_1])\varphi([\gamma_2])$. Детали можно найти, например, в [**?**]. □

Если фундаментальная группа накрывающего пространства нетривиальна, то ядро гомоморфизма также нетривиально.

Предложение 12.2.2. *Ядро гомоморфизма (12.2) совпадает с индуцированной подгруппой* $p_*\pi(\widetilde{\mathbb{M}}, \tilde{x}) \subset \pi(\widetilde{\mathbb{M}}/\mathbb{G}, x)$.

Доказательство. См., например, [**?**]. □

В частности, $p_*\pi(\widetilde{\mathbb{M}}, \tilde{x})$ – нормальная подгруппа в $\pi(\widetilde{\mathbb{M}}/\mathbb{G}, x)$, и поэтому определена фактор группа $\pi(\widetilde{\mathbb{M}}/\mathbb{G}, x)/p_*\pi(\widetilde{\mathbb{M}}, \tilde{x})$.

Теорема 12.2.3. *Группы* $\pi(\widetilde{\mathbb{M}}/\mathbb{G}, x)/p_*\pi(\widetilde{\mathbb{M}}, \tilde{x})$ *и* $\mathbb{G}$ *изоморфны.*

Доказательство. См., например, [**?**]. □

Следствие. Если топологическое пространство $\mathbb{M}$ односвязно, то $\pi(\widetilde{\mathbb{M}}/\mathbb{G}, x) \simeq \mathbb{G}$. □

Это следствие позволяет в ряде случаев найти фундаментальную группу многообразия.

Пример 12.2.1. Нетрудно проверить, что окружность $\mathbb{S}^1$ гомеоморфна пространству орбит $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$, где группа $\mathbb{Z}$ действует на $\mathbb{R}$ сдвигами на постоянное число. Действие группы $\mathbb{Z}$ на $\mathbb{R}$ свободно и собственно разрывно. Поскольку вещественная прямая $\mathbb{R}$ односвязна, то отображение $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ – универсальное накрытие. Следовательно $\pi(\mathbb{S}^1) \simeq \mathbb{Z}$. □

Пример 12.2.2. Тор является факторпространством, $\mathbb{T}^n \approx \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$. Поскольку отображение $p:\ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ – универсальное накрытие, то $\pi(\mathbb{T}^n) \simeq \mathbb{Z}^n$. □

Следующая теорема дает достаточное условие существования дифференцируемой структуры на пространстве орбит $\mathbb{M}/\mathbb{G}$.

Теорема 12.2.4. *Пусть группа преобразований $\mathbb{G}$ действует на многообразии $\widetilde{\mathbb{M}}$ собственно разрывно и свободно, тогда факторпространство $\widetilde{\mathbb{M}}/\mathbb{G}$ с фактор топологией имеет структуру дифференцируемого многообразия такую, что проекция $p:\ \widetilde{\mathbb{M}} \to \widetilde{\mathbb{M}}/\mathbb{G}$ дифференцируема.*

Доказательство. Условие 1) в определении собственно разрывной группы преобразований эквивалентно хаусдорфовости факторпространства $\widetilde{\mathbb{M}}/\mathbb{G}$. Действительно, окрестностью орбиты $x = \tilde{x}\mathbb{G}$ является множество орбит $\mathbb{U} = \widetilde{\mathbb{U}}\mathbb{G}$, где $\widetilde{\mathbb{U}}$ – окрестность точки $\tilde{x}$, а условие 1) можно переписать в виде $\widetilde{\mathbb{U}}_1\mathbb{G} \cap \widetilde{\mathbb{U}}_2\mathbb{G} = \emptyset$, т.к. орбиты либо не имеют общих точек, либо совпадают. Это и есть условие хаусдорфовости пространства орбит с фактортопологией.

В условиях теоремы группа $\mathbb{G}$ действует свободно и условие 2) в определении собственно разрывной группы преобразований выполняется автоматически, т.к. группа изотропии любой точки состоит только из одного элемента – единицы.

Пусть $\mathbb{U} = \widetilde{\mathbb{U}}\mathbb{G} \subset \widetilde{\mathbb{M}}/\mathbb{G}$ – достаточно малая окрестность орбиты $x \in \widetilde{\mathbb{M}}/\mathbb{G}$. Условие 3) вместе с условием 2) значит, что каждая точка x в пространстве орбит имеет окрестность $\mathbb{U}$ такую, что прообраз $\widetilde{\mathbb{U}} = p^{-1}(\mathbb{U})$ состоит не более, чем из счетного числа компонент, $\widetilde{\mathbb{U}} = \bigcup_i \widetilde{\mathbb{U}}_i$ и проекция p каждой связной компоненты $\widetilde{\mathbb{U}}_i$ на $\mathbb{U}$ есть гомеоморфизм, т.к. множество орбит можно параметризовать точками из какой либо окрестности $\mathbb{U}_i$. Зафиксируем связную компоненту $\widetilde{\mathbb{U}}_i$ в $p^{-1}(\mathbb{U})$. Тогда p – гомеоморфизм $\widetilde{\mathbb{U}}_i$ на $\mathbb{U}$ и существует обратное непрерывное отображение $p^{-1}:\ \mathbb{U} \to \widetilde{\mathbb{U}}_i$. Выбрав $\mathbb{U}$ достаточно малым, можно считать, что имеется допустимая карта $(\widetilde{\mathbb{U}}_i, \varphi)$, где $\varphi:\ \widetilde{\mathbb{U}}_i \to \mathbb{R}^n$, многообразия $\widetilde{\mathbb{M}}$. Теперь можно ввести дифференцируемую структуру в пространстве орбит, рассматривая $(\mathbb{U}, \psi)$, где $\psi = \varphi \circ p^{-1}$, как допустимую карту. □

Последняя теорема является достаточным, но не необходимым условием того, что пространство орбит является многообразием.

Пример 12.2.3. Рассмотрим вращения евклидовой плоскости на $\mathbb{R}^2$ вокруг начала координат на фиксированный угол $\alpha = 2\pi/n$, где $n = 2, 3, \ldots$. При этом мы отождествляем поворот на 2π с единичным элементом группы. Эта группа $\mathbb{G}$ абелева и состоит из n элементов. Действие группы является эффективным. Начало координат является неподвижной точкой и одной из орбит группы. Ее группа изотропии совпадает с $\mathbb{G}$. На остальной части плоскости $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ группа $\mathbb{G}$ действует свободно. Нетрудно проверить, что группа $\mathbb{G}$ действует на плоскость собственно разрывно. Пространство орбит $\mathbb{R}^2/\mathbb{G}$ представляет собой конус с углом дефицита $2\pi/n - 2\pi$ (знак минус означает, что угол вырезается, а не вставляется). Конус является гладким двумерным многообразием, т.е. пространство орбит допускает гладкую структуру, несмотря на то, что действие группы не является свободным. Вершина конуса – это "дефект" не многообразия, а вложения. В этом примере каноническая проекция $p:\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2/\mathbb{G}$ не является накрытием, так как прообраз $p^{-1}(\mathbb{U}_0)$ окрестности $\mathbb{U}_0 \subset \mathbb{R}^2/\mathbb{G}$, содержащей начало координат, состоит из одного связного листа, который не гомеоморфен самой окрестности (нет взаимной однозначности). Фундаментальные группы плоскости $\mathbb{R}^2$ и конуса $\mathbb{R}^2/\mathbb{G}$ тривиальны и совпадают. □

Если пара $(\widetilde{\mathbb{M}}, \mathbb{G})$ – группа преобразований, причем группа $\mathbb{G}$ действует на многообразии $\widetilde{\mathbb{M}}$ свободно и собственной разрывно, то одним из способов изучения фактор пространства $\widetilde{\mathbb{M}}/\mathbb{G}$ является построение фундаментальной области.

Определение. Подмножество $\mathbb{D} \subset \widetilde{\mathbb{M}}$ называется *фундаментальной областью* многообразия $\widetilde{\mathbb{M}}$ для группы преобразований $\mathbb{G}$, действующей свободно и собственно разрывно, если выполнены следующие условия:

1) $\mathbb{D}$ является замкнутым подмножеством в $\widetilde{\mathbb{M}}$;
2) орбита $\mathbb{D}\mathbb{G}$ совпадает со всем многообразием $\widetilde{\mathbb{M}}$;
3) покрытие $\widetilde{\mathbb{M}}$ множествами $\mathbb{D}a$, $a \in \mathbb{G}$, таково, что с достаточно малой окрестностью произвольной точки $\widetilde{\mathbb{M}}$ пересекается лишь конечное число множеств вида $\mathbb{D}a$;
4) образ множества всех внутренних точек фундаментальной области, $(\operatorname{int}\mathbb{D})a$, при действии любого преобразования $a \in \mathbb{G}$, отличного от единичного, не пересекается с множеством внутренних точек фундаментальной области, $(\operatorname{int}\mathbb{D})a \cap \operatorname{int}\mathbb{D} = \emptyset$. □

Фундаментальная область $\mathbb{D}$ всегда является многообразием с краем той же размерности, что и само $\widetilde{\mathbb{M}}$.

Пример 12.2.4. Группа трансляций $\mathbb{G}$ евклидовой плоскости $\mathbb{R}^2$ на всевозможные векторы с целочисленными компонентами

$$\mathbb{R}^2 \ni (x, y) \mapsto (x + m, y + n) \in \mathbb{R}^2, \qquad \forall m, n \in \mathbb{Z},$$

действует гладко, свободно и собственно разрывно. Фактор пространство $\mathbb{R}^2/\mathbb{G}$ представляет собой тор $\mathbb{T}^2$. В качестве фундаментальной области можно выбрать единичный квадрат

$$\mathbb{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ \ 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1\}.$$

Тор можно представить в виде квадрата на плоскости, у которого отождествлены противоположные стороны. □

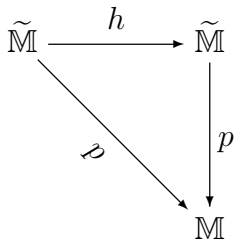
Из определения фундаментальной области следует, что отображение $\widetilde{\mathbb{M}} \to \operatorname{int}\mathbb{D}$ всегда представляет собой накрытие. Если фундаментальная область известна, то пространство орбит $\widetilde{\mathbb{M}}/\mathbb{G}$ получается из фундаментальной области путей склеивания граничных точек.

12.3 Группа скольжений и существование накрытий

В предыдущем разделе было показано, что отображение многообразия в пространство орбит для группы преобразований, действующей свободно и собственно разрывно, является накрытием. Теперь мы рассмотрим обратный вопрос о том, в каком случае заданное накрытие можно представить, в виде отображения накрывающего пространства в пространство орбит относительно действия некоторой группы преобразований и какова эта группа.

Введем новое понятие, которое дает возможность описать произвол, существующий при построении накрывающего пространства, если база задана.

Определение. *Группой скольжений* накрытия $p:\ \widetilde{\mathbb{M}} \to \mathbb{M}$ называется группа всех гомеоморфизмов $h:\ \widetilde{\mathbb{M}} \to \widetilde{\mathbb{M}}$, при которых $p \circ h = p$, т.е. диаграмма



коммутативна. Эта группа обозначается $\mathbb{G}(\widetilde{\mathbb{M}}, p, \mathbb{M})$. □

Теорема 12.3.1. *Если топологическое пространство $\widetilde{\mathbb{M}}$ связно и локально линейно связно, то действие группы скольжений $\mathbb{G}(\widetilde{\mathbb{M}}, p, \mathbb{M})$ на $\widetilde{\mathbb{M}}$ свободно и собственно разрывно.*

Доказательство. См., например, [**?**]. □

В частности, действие группы скольжений на связном многообразии $\widetilde{\mathbb{M}}$ является свободным и собственно разрывным. В этом случае группа скольжений $\mathbb{G}(\widetilde{\mathbb{M}}, p, \mathbb{M})$ конечна или счетна. Поэтому пара $\big(\widetilde{\mathbb{M}}, \mathbb{G}(\widetilde{\mathbb{M}}, p, \mathbb{M})\big)$ является группой преобразований.

Теорема 12.3.2. *Пусть $p:\ \widetilde{\mathbb{M}} \to \mathbb{M}$ – накрытие и накрывающее топологическое пространство $\widetilde{\mathbb{M}}$ связно и локально линейно связно. Если индуцированная группа $p_*\pi(\widetilde{\mathbb{M}}, \tilde{x})$ является нормальной подгруппой $\pi(\mathbb{M}, x)$, то база $\mathbb{M}$ гомеоморфна пространству орбит $\widetilde{\mathbb{M}}/\mathbb{G}(\widetilde{\mathbb{M}}, p, \mathbb{M})$.*

Доказательство. См., например, [**?**]. □

Следствие. Пусть пространство $\widetilde{\mathbb{M}}$ связно и локально линейно связно. Если $p_*\pi(\widetilde{\mathbb{M}}, \tilde{x})$ – нормальная подгруппа $\pi(\mathbb{M}, x)$, то $\pi(\mathbb{M}, x)/p_*\pi(\widetilde{\mathbb{M}}, \tilde{x}) \simeq \mathbb{G}(\widetilde{\mathbb{M}}, p, \mathbb{M})$. □

Доказательство. Прямое следствие теорем 12.3.2 и 12.2.3. □

Следствие. Если $\widetilde{\mathbb{M}}$ односвязно и локально линейно связно, то $\pi(\mathbb{M}, x) \simeq \mathbb{G}(\widetilde{\mathbb{M}}, p, \mathbb{M})$. □

По своей сути две предыдущие теоремы и следствия означают, что произвольное накрытие можно представить, как отображение многообразия $\widetilde{\mathbb{M}}$ в пространство орбит $\mathbb{M} = \widetilde{\mathbb{M}}/\mathbb{G}(\widetilde{\mathbb{M}}, p, \mathbb{M})$. При этом роль группы преобразований играет группа скольжений $\mathbb{G}(\widetilde{\mathbb{M}}, p, \mathbb{M})$. Если накрывающее пространство $\widetilde{\mathbb{M}}$ – многообразие, то действие группы скольжений сводится к перестановке листов накрытия.

Теперь обсудим вопрос о существовании универсального накрытия для заданной базы $\mathbb{M}$. Универсальное накрытие существует, если на топологическое пространство $\mathbb{M}$ наложен ряд условий. Чтобы не вводить новых понятий для их формулировки, мы ограничимся многообразиями, для которых эти условия выполняются.

Теорема 12.3.3. *Произвольное связное n-мерное многообразие $\mathbb{M}$ имеет универсальное накрытие $p:\ \widetilde{\mathbb{M}} \to \mathbb{M}$, где накрывающее пространство $\widetilde{\mathbb{M}}$ – также n-мерное многообразие. Универсальное накрывающее пространство определено с точностью до действия группы скольжений $\mathbb{G}(\widetilde{\mathbb{M}}, p, \mathbb{M})$, которая действует на $\widetilde{\mathbb{M}}$ свободно и собственно разрывно.*

Доказательство. См., например, [**?**]. □

Эта теорема очень важна, т.к. позволяет разделить задачу классификации многообразий на два этапа: сначала описать все односвязные многообразия, а затем найти все группы преобразований, действующие на них свободно и собственно разрывно. Эта задача решена для поверхностей. Для многообразий размерности три и выше вопрос остается открытым.

Глава 13

Главные и ассоциированные расслоения

Теория расслоений или расслоенных пространств играет важнейшую роль в современной математической физике. Достаточно отметить, что в основе общей теории относительности лежит расслоение реперов, которое является главным расслоением со структурной группой $\mathbb{GL}(n,\mathbb{R})$. В основе калибровочных моделей элементарных частиц лежит главное расслоение с полупростой структурной группой, которой обычно является некоторая подгруппа унитарной группы $\mathbb{U}(n)$. В настоящем разделе мы дадим определения и рассмотрим основные свойства главных и ассоциированных расслоений.

13.1 Главные расслоения

В дифференциальной геометрии важнейшую роль играют главные расслоения. Фактически, они лежат в основе многих геометрических конструкций.

Определение. *Главным расслоением* называется четверка $\mathbb{P}(\mathbb{M},\pi,\mathbb{G})$, где $\mathbb{P}$ и $\mathbb{M}$ – многообразия, $\mathbb{G}$ – группа Ли, $\pi:\ \mathbb{P}\to\mathbb{M}$ – отображение, которые удовлетворяют следующим условиям:

1) определено свободное дифференцируемое действие группы $\mathbb{G}$ на $\mathbb{P}$ справа:

$$\mathbb{P}\times\mathbb{G}\ni(p,a)\mapsto pa\in\mathbb{P}; \tag{13.1}$$

2) $\mathbb{M}$ есть факторпространство для $\mathbb{P}$ по отношению эквивалентности, индуцированному действием группы $\mathbb{G}$, и каноническая проекция $\pi:\ \mathbb{P}\to\mathbb{M}=\mathbb{P}/\mathbb{G}$ дифференцируема;

3) каждая точка $x\in\mathbb{M}$ имеет окрестность $\mathbb{U}_x$ такую, что существует диффеоморфизм

$$\chi:\ \pi^{-1}(\mathbb{U}_x)\ni p\mapsto\chi(p)=\big(\pi(p),\varphi(p)\big)\in\mathbb{U}_x\times\mathbb{G} \tag{13.2}$$

такой, что отображение $\varphi:\ \pi^{-1}(\mathbb{U}_x)\to\mathbb{G}$ удовлетворяет условию $\varphi(pa)=\big(\varphi(p)\big)a$ для всех $p\in\pi^{-1}(\mathbb{U}_x)$ и $a\in\mathbb{G}$ (локальная тривиальность).

Многообразие $\mathbb{P}$ называется *пространством расслоения*, $\mathbb{M}$ – *базой расслоения*, $\mathbb{G}$ – *структурной группой* и π – *проекцией*. □

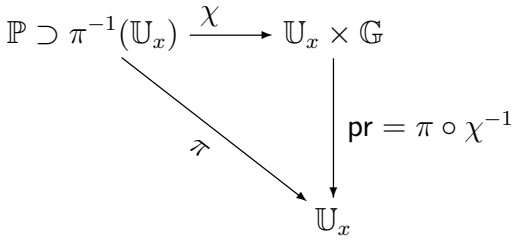
Поскольку отображение (13.2) является диффеоморфизмом, то

$$\mathsf{dim}\,\mathbb{P}=\ \mathsf{dim}\,\mathbb{M}+\ \mathsf{dim}\,\mathbb{G}.$$

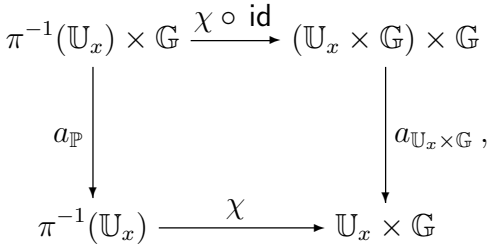
Замечание. Каждое главное расслоение является расслоением в смысле определения, данного в разделе 3.4. В дополнение к общему определению расслоения мы зафиксировали типичный слой, предположив, что им является группа Ли $\mathbb{G}$, и добавили действие этой группы на пространстве расслоения $\mathbb{P}$ так, чтобы оно было согласовано с проекцией. Дифференцируемая структура на $\mathbb{P}$ согласована с дифференцируемыми структурами на $\mathbb{M}$ и $\mathbb{G}$, поскольку отображение χ, по предположению, является диффеоморфизмом. На самом деле, можно было бы потребовать только непрерывность отображения χ, а затем с его помощью перенести дифференцируемую структуру с $\mathbb{M}$ и $\mathbb{G}$ на пространство расслоения $\mathbb{P}$. □

Замечание. Пара $(\mathbb{P}, \mathbb{G})$ является группой преобразований, определенной в разделе 10.1. Однако, не всякая группа преобразований есть главное расслоение. Напомним, что в общем случае пространство орбит $\mathbb{M}/\mathbb{G}$ группы преобразований $(\mathbb{M}, \mathbb{G})$ может оказаться нехаусдорфовым топологическим пространством и на нем нельзя ввести дифференцируемую структуру. □

Замечание. Условие локальной тривиальности главного расслоения можно изобразить в виде коммутативной диаграммы



где pr – естественная проекция прямого произведения $\mathbb{U}_x \times \mathbb{G} \xrightarrow{\mathsf{pr}} \mathbb{U}_x$ на первый сомножитель. Групповое действие на пространстве расслоения описывается эквивариантной диаграммой



где $a_{\mathbb{P}}$ и $a_{\mathbb{U}_x \times \mathbb{G}}$ обозначают действие элемента группы $a \in \mathbb{G}$ на пространстве расслоения и прямом произведении $\mathbb{M} \times \mathbb{G}$. □

Определение. Для каждой точки базы $x \in \mathbb{M}$ множество $\pi^{-1}(x)$ есть замкнутое подмногообразие в пространстве расслоения $\mathbb{P}$, которое называется *слоем* над x. *Сечением* или *глобальным сечением* главного расслоения $\mathbb{P}(\mathbb{M}, \pi, \mathbb{G})$ называется дифференцируемое отображение $\sigma : \mathbb{M} \to \mathbb{P}$ такое, что $\pi \circ \sigma = \mathsf{id}_{\mathbb{M}}$. Дифференцируемое отображение $\sigma : \mathbb{U} \to \mathbb{P}$, где $\mathbb{U} \subset \mathbb{M}$ – некоторая окрестность базы, называется *локальным сечением*, если $\pi \circ \sigma = \mathsf{id}_{\mathbb{U}}$. □

Каждый слой является орбитой $p\mathbb{G}$ какой либо точки $p \in \pi^{-1}(x)$. То, что каждый слой представляет собой замкнутое подмногообразие в $\mathbb{P}$ является следствием предложения 10.1.2. Поскольку действие группы Ли $\mathbb{G}$ в каждом слое свободно и транзитивно, то между точками слоя и структурной группы имеется взаимно однозначное

соответствие. То есть каждый слой $\pi^{-1}(x)$ диффеоморфен $\mathbb{G}$. Этот диффеоморфизм осуществляет функция φ в отображении (13.2) при фиксированном $x \in \mathbb{M}$.

При каждом фиксированном $p \in \mathbb{P}$ отображение (13.1) дифференцируемо. Поэтому каждой точке главного расслоения соответствует диффеоморфизм структурной группы на типичный слой в данной точке

$$p: \quad \mathbb{G} \to \pi^{-1}(x), \tag{13.3}$$

где $x = \pi(p)$. В дальнейшем мы иногда будем рассматривать точку p именно в этом смысле, как отображение.

Сечение σ, если оно существует, не может быть сюръективным отображением, т.к. размерность базы в общем случае меньше размерности расслоения. Для накрытий размерность базы совпадает с размерностью главного расслоения. Если накрытие многолистно, то сечение также не является сюръективным отображением. Сечение сюръективно в одном случае, когда структурная группа состоит из единственного элемента – единицы. Сужение проекции π на образ базы $\sigma(\mathbb{M})$ в $\mathbb{P}$ является дифференцируемым отображением, которое обратно к сечению σ. Поэтому пара $(\sigma, \mathbb{M})$ является подмногообразием в $\mathbb{P}$. Если $\dim \mathbb{G} \geq 1$, то это подмногообразие замкнуто в $\mathbb{P}$ (см. раздел 3.10).

Пример 13.1.1. Пусть $\mathbb{G}$ – группа Ли и $\mathbb{M}$ – многообразие. Определим действие группы $\mathbb{G}$ справа на прямом произведении $\mathbb{P} = \mathbb{M} \times \mathbb{G}$:

$$\mathbb{G} \ni b: \quad \mathbb{M} \times \mathbb{G} \ni (x, a) \mapsto (x, ab) \in \mathbb{M} \times \mathbb{G}.$$

Тогда четверка $\mathbb{P}(\mathbb{M}, \pi, \mathbb{G})$, где $\pi: \ \mathbb{M} \times \mathbb{G} \to \mathbb{M}$ – каноническая проекция, является главным расслоением, которое является тривиальным. Каждое тривиальное главное расслоение имеет глобальное сечение $\sigma: \ \mathbb{M} \to \mathbb{P}$, $\pi \circ \sigma = \mathsf{id}_{\mathbb{M}}$. Например, $\sigma: \ \mathbb{M} \ni x \mapsto (x, e) \in \mathbb{M} \times \mathbb{G}$. □

Пример 13.1.2. Расслоение реперов $\mathbb{L}(\mathbb{M}) = \mathbb{P}\big(\mathbb{M}, \pi, \mathbb{GL}(n, \mathbb{R})\big)$, рассмотренное в разделе 7, является главным расслоением со структурной группой $\mathbb{GL}(n, \mathbb{R})$. □

Пример 13.1.3. Пусть $\mathbb{G}$ – группа Ли и $\mathbb{H} \subset \mathbb{G}$ – ее замкнутая подгруппа. Согласно теореме 10.1.1 на пространстве правых смежных классов $\mathbb{H}a \in \mathbb{G}/\mathbb{H}$, где $a \in \mathbb{G}$, можно задать дифференцируемую структуру. Тогда $\mathbb{G}(\mathbb{G}/\mathbb{H}, \pi, \mathbb{H})$ – главное расслоение с базой $\mathbb{G}/\mathbb{H}$, структурной группой $\mathbb{H}$ и проекцией $\pi: \ \mathbb{G} \to \mathbb{G}/\mathbb{H}$. □

Пример 13.1.4. Накрытия $\widetilde{\mathbb{M}}\big(\mathbb{M}, \pi, \mathbb{G}(\widetilde{\mathbb{M}}, p, \mathbb{M})\big)$, рассмотренные в разделе 12, являются главными расслоениями с 0-мерной структурной группой Ли, которой является группа скольжений $\mathbb{G}(\widetilde{\mathbb{M}}, p, \mathbb{M})$. □

Пример 13.1.5. Множество вещественных чисел без нуля образует абелеву группу относительно умножения, которую мы обозначим $\mathbb{R}_0 = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Пусть эта группа действует в евклидовом пространстве без начала координат $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ посредством умножения декартовых координат

$$\mathbb{R}_0 \ni a: \quad (x^1, \ldots, x^n) \mapsto (ax^1, \ldots, ax^n).$$

Это действие дифференцируемо, свободно и транзитивно на орбитах. Поэтому $\mathbb{R}^n \setminus \{0\} \xrightarrow{\pi} \mathbb{RP}^{n-1}$ – главное расслоение со структурной группой $\mathbb{R}_0$, базой которого является вещественное проективное пространство $\mathbb{RP}^{n-1} = \big(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}\big)/\mathbb{R}_0$. □

Пример 13.1.6. Если в предыдущем примере группу $\mathbb{R}_0$ заменить на группу положительных чисел $\mathbb{R}_+$, то получим главное расслоение $\mathbb{R}^n\setminus\{0\} \xrightarrow{\pi} \mathbb{S}^{n-1}$ со структурной группой $\mathbb{R}_+$, базой которого является сфера $\mathbb{S}^{n-1} = \big(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}\big)/\mathbb{R}_+$. □

Пример 13.1.7. Пусть $\mathbb{C}_0 = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ – группа комплексных чисел по отношению к умножению, которая действует в n-мерном комплексном пространстве без начала координат $\mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ умножением,

$$\mathbb{C}_0 \ni a: \quad (z^1, \dots, z^n) \mapsto (az^1, \dots, az^n).$$

Тогда $\mathbb{C}^n \setminus \{0\} \xrightarrow{\pi} \mathbb{CP}^{n-1}$ – главное расслоение со структурной группой $\mathbb{C}_0$, базой которого является комплексное проективное пространство $\mathbb{CP}^{n-1} = \big(\mathbb{C}^n\setminus\{0\}\big)/\mathbb{C}_0$. □

Пример 13.1.8 (Расслоение Хопфа). Реализуем трехмерную сферу $\mathbb{S}^3$ в двумерном комплексном пространстве $\mathbb{C}^2$ с помощью вложения

$$|z^1|^2 + |z^2|^2 = 1, \qquad (z^1, z^2) \in \mathbb{C}^2. \tag{13.4}$$

Каждое уравнение $az^1 + bz^2 = 0$, где $(a, b) \in \mathbb{C}^2$ и по крайней мере одно из комплексных чисел a, b отлично от нуля, задает *комплексную прямую*, проходящую через начало координат. Обратно. Комплексная прямая определяет пару комплексных чисел $(a, b) \in \mathbb{C}^2$ с точностью до отношения эквивалентности $(a, b) \sim (a', b')$, если и только если $|a'| = \lambda|a|$, $|b'| = \lambda|b|$, $\lambda \in \mathbb{R}_+$, или $a' = a\,\mathsf{e}^{it}$, $b' = b\,\mathsf{e}^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$. Множество всех комплексных прямых, проходящих через начало координат, является одномерным комплексным проективным пространством $\mathbb{CP}^1$ и называется *комплексной проективной прямой*. Каждая комплексная прямая, проходящая через начало координат, пересекает трехмерную сферу $\mathbb{S}^3$ по большой окружности $\mathbb{S}^1$, называемой *окружностью Хопфа*, которая задается одной из двух систем уравнений:

$$|z^1|^2 = \frac{1}{1+|k|^2}, \quad z^2 = kz^1, \qquad k = -\frac{a}{b}, \quad b \neq 0,$$
$$|z^2|^2 = \frac{1}{1+|k|^2}, \quad z^1 = kz^2, \qquad k = -\frac{b}{a}, \quad a \neq 0.$$

Поскольку ровно одна окружность Хопфа проходит через каждую точку $\mathbb{S}^3$, эти окружности заполняют всю трехмерную сферу. При этом окружности Хопфа взаимно однозначно соответствуют комплексным прямым в $\mathbb{C}^2$, проходящим через начало координат. Две точки (z^1, z^2) и (z'^1, z'^2) лежат на одной окружности Хопфа тогда и только тогда, когда их координаты отличаются на фазовый множитель $z'^1 = z^1\,\mathsf{e}^{it}$, $z'^2 = z^2\,\mathsf{e}^{it}$. Выбрав подходящим образом параметр t, всегда можно добиться, например, чтобы $\mathsf{im}\, z^2 = 0$. Тогда каждой прямой, проходящей через начало координат, будет соответствовать одна и только одна точка на окружности Хопфа. Множество таких точек образует двумерную сферу $\mathbb{S}^2$, которая задается в $\mathbb{C}^2$ уравнением

$$(x^1)^2 + (y^1)^2 + (x^2)^2 = 1, \qquad y^2 = 0,$$

где $z^1 = x^1 + iy^1$, $z^2 = x^2 + iy^2$. Таким образом, комплексная проективная прямая диффеоморфна двумерной сфере, $\mathbb{CP}^1 \approx \mathbb{S}^2$. Соответствующая проекция $\mathbb{S}^3 \xrightarrow{\pi} \mathbb{S}^2$ определяет главное расслоение с базой $\mathbb{S}^2$ и типичным слоем $\mathbb{G} = \mathbb{S}^1$, которое называется *расслоением Хопфа*. Структурная группа действует на пространстве расслоения $\mathbb{S}^3$ умножением комплексных координат на e^{it}, $t \in [0, 2\pi]$.

Отображение $g_t : \mathbb{S}^3 \to \mathbb{S}^3$, $t \in \mathbb{R}$, задаваемое умножением комплексных координат в $\mathbb{C}^2$ на e^{it}, является изометрией для метрики, индуцированной вложением (13.4). Отсюда следует, что у трехмерной сферы $\mathbb{S}^3$ существуют изометрии, не имеющие выделенной оси: в каждой точке это движение выглядит точно так же, как и в любой другой. Это показывает, что трехмерная сфера $\mathbb{S}^3$ "более круглая", чем ее двумерный аналог $\mathbb{S}^2$. Однопараметрическая группа преобразований g_t называется *потоком Хопфа*.

Можно показать, что метрика проективной прямой $\mathbb{CP}^1 \approx \mathbb{S}^2$, индуцированная проекцией расслоения Хопфа $\pi : \mathbb{S}^3 \to \mathbb{S}^2$, является стандартной метрикой сферы.

На расслоение Хопфа можно взглянуть с другой точки зрения. Вспомним, что трехмерная сфера может быть оснащена групповой структурой, $\mathbb{S}^3 \approx \mathbb{SU}^2$. Двумерные унитарные матрицы с единичным определителем могут быть параметризованы двумя комплексными числами

$$U = \begin{pmatrix} z^1 & z^2 \\ -\bar{z}^2 & \bar{z}^1 \end{pmatrix} \in \mathbb{SU}(2),$$

где z^1 и z^2 лежат на сфере (13.4). Группа $\mathbb{SU}(2)$ содержит подгруппу $\mathbb{U}(1)$, которую можно реализовать в виде диагональных матриц

$$\begin{pmatrix} \mathsf{e}^{it} & 0 \\ 0 & \mathsf{e}^{-it} \end{pmatrix} \in \mathbb{U}(1).$$

Эта подгруппа не является нормальной. Рассмотрим множество правых смежных классов $\mathbb{SU}(2)/\mathbb{U}(1)$. Два элемента группы $U, U' \in \mathbb{SU}(2)$ принадлежат одному смежному классу тогда и только тогда, когда $z'^1 = z^1\,\mathsf{e}^{it}$ и $z'^2 = z^2\,\mathsf{e}^{it}$. Поэтому расслоение Хопфа можно представить в эквивалентном виде $\mathbb{SU}(2) \xrightarrow{\pi} \mathbb{M} = \mathbb{SU}(2)/\mathbb{U}(1)$.

Действия группы $\mathbb{SU}(2)$ слева и справа на сферу $\mathbb{S}^3$, которую мы отождествим с $\mathbb{SU}(2)$,

$$U \to a^{-1}Ub, \qquad a, b \in \mathbb{SU}(2)$$

коммутируют и являются изометриями. Тем самым мы имеем гомоморфизм $\mathbb{SU}(2) \times \mathbb{SU}(2) \to \mathbb{SO}(4)$, где $\mathbb{SO}(4)$ является группой движений евклидова пространства $\mathbb{R}^4 \approx \mathbb{C}^2$ и вложенной трехмерной сферы. При этом действие группы $\mathbb{SU}(2)$ слева и справа является транзитивным, а группой изотропии являются преобразования вида $\pm(1,1) \in \mathbb{SU}(2) \times \mathbb{SU}(2)$. Тем самым мы имеем сюръективный гомоморфизм с ядром $\mathbb{Z}_2$ или изоморфизм

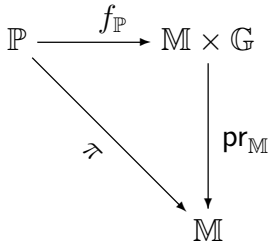
$$\mathbb{SO}(4) \simeq \frac{\mathbb{SU}(2) \times \mathbb{SU}(2)}{\mathbb{Z}_2}. \quad \square \tag{13.5}$$

В примере 13.1.1 мы отметили, что произвольное тривиальное расслоение имеет глобальное сечение. Справедливо и обратное утверждение.

Предложение 13.1.1. *Если главное расслоение $\mathbb{P}(\mathbb{M}, \pi, \mathbb{G})$ имеет глобальное сечение $\sigma : \mathbb{M} \to \mathbb{P}$, то оно изоморфно тривиальному, т.е. существует диффеоморфизм*

$$f_{\mathbb{P}} : \quad \mathbb{P} \ni p \mapsto \big(\pi(p), \varphi(p)\big) \in \mathbb{M} \times \mathbb{G} \tag{13.6}$$

такой, что следующая диаграмма коммутативна:



(13.7)

где $\mathsf{pr}_{\mathbb{M}}$ *– проекция на первый сомножитель, и справедливо равенство*

$$f_{\mathbb{P}}(pa) = \big(\pi(p), \varphi(p)a\big) \qquad \forall\ p \in \mathbb{P},\ a \in \mathbb{G}. \tag{13.8}$$

Доказательство. Пусть

$$\sigma : \quad \mathbb{M} \ni x \mapsto \sigma(x) \in \mathbb{P}, \qquad \pi \circ \sigma = \mathsf{id}_{\mathbb{M}},$$

– глобальное сечение главного расслоения. Для каждой точки слоя $p \in \pi^{-1}(x)$ определим единственный элемент группы $a \in \mathbb{G}$, для которого $p = \sigma(x)a(p)$. Таким образом определено отображение $p \mapsto f_{\mathbb{P}}(p) = \big(\pi(p), a(p)\big)$. Легко проверить, что это отображение удовлетворяет требуемым свойствам. □

Замечание. Изоморфизм расслоений будет определен позже в разделе 13.3. □

Следствие. Нетривиальные главные расслоения имеют только локальные сечения. □

Диаграмму (13.7) вместе с условием (13.8) можно изобразить в виде коммутативной диаграммы

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{P}\times\mathbb{G} & \xrightarrow{\ \chi\circ\mathsf{id}\ } & (\mathbb{M}\times\mathbb{G})\times\mathbb{G} \\ \Big\downarrow{\scriptstyle a_{\mathbb{P}}} & & \Big\downarrow{\scriptstyle a_{\mathbb{M}\times\mathbb{G}}}\ , \\ \mathbb{P} & \xrightarrow{\ \chi\ } & \mathbb{M}\times\mathbb{G} \end{array}$$

где $a_{\mathbb{P}}$ и $a_{\mathbb{M}\times\mathbb{G}}$ обозначает действие элемента $a \in \mathbb{G}$ соответственно на $\mathbb{P}$ и $\mathbb{M}\times\mathbb{G}$. Это означает, что отображение (13.6) является эквивариантным (см. раздел 10.4).

Определение. Главное расслоение $\mathbb{P}(\mathbb{M}, \pi, \mathbb{G})$ называется *тривиальным*, если оно изоморфно главному расслоению вида $\mathbb{M}\times\mathbb{G} \xrightarrow{\mathsf{pr}_{\mathbb{M}}} \mathbb{M}$. □

При рассмотрении многообразий в разделе 3.1 были введены функции склейки, с помощью которых осуществляется преобразование координат в двух пересекающихся картах. Обобщением этого понятия на случай главных расслоений являются функции перехода, которые вводятся следующим образом. В силу условия 3) на базе можно выбрать такое координатное покрытие, $\mathbb{M} = \bigcup_i \mathbb{U}_i$, что

$$\chi_i : \quad \pi^{-1}(\mathbb{U}_i) \ni p \mapsto \big(\pi(p), \varphi_i(p)\big) \in \mathbb{U}_i \times \mathbb{G},$$

причем $\varphi_i(pa) = \varphi_i(p)a$.

Пусть две карты пересекаются, $\mathbb{U}_i \cap \mathbb{U}_j \neq \emptyset$. Если $p \in \pi^{-1}(\mathbb{U}_i \cap \mathbb{U}_j)$, то

$$\varphi_j(pa)\big(\varphi_i(pa)\big)^{-1} = \varphi_j(p)\big(\varphi_i(p)\big)^{-1},$$

где φ_i рассматривается как отображение фиксированного слоя $\pi^{-1}\big(\pi(p)\big)$ в группу $\mathbb{G}$. Следовательно, отображение $\varphi_j(p)\big(\varphi_i(p)\big)^{-1}$ зависит только от точки базы $x = \pi(p)$. Поэтому определено отображение

$$a_{ji} : \quad \mathbb{U}_i \cap \mathbb{U}_j \ni x = \pi(p) \mapsto a_{ji}(x) = \varphi_j(p)\big(\varphi_i(p)\big)^{-1} \in \mathbb{G}. \tag{13.9}$$

Эти функции на $\mathbb{M}$ со значениями в $\mathbb{G}$ называются *функциями перехода* главного расслоения $\mathbb{P}(\mathbb{M}, \pi, \mathbb{G})$, соответствующими координатному покрытию $\mathbb{M} = \bigcup_i \mathbb{U}_i$.

Функции перехода показывают насколько в различных картах "сдвинуты" образы слоя в структурной группе над фиксированной точкой $x \in \mathbb{M}$.

Нетрудно проверить, что для трех пересекающихся карт выполнено равенство

$$a_{ki}(x) = a_{kj}(x)a_{ji}(x), \qquad x \in \mathbb{U}_i \cap \mathbb{U}_j \cap \mathbb{U}_k. \tag{13.10}$$

Пример 13.1.9. Пусть $\mathbb{M}$, $\dim \mathbb{M} = n$, – многообразие. Рассмотрим расслоение реперов $\mathbb{L}(\mathbb{M})$ (см. раздел 7). Пусть $\mathbb{U}_i$ и $\mathbb{U}_j$ – две пересекающиеся карты с координатами x^α и $x^{\alpha'}$, $\alpha, \alpha' = 1, \ldots, n$. Репер в этих картах имеет компоненты $e^\alpha{}_a \in \mathbb{GL}(n, \mathbb{R})$ и $e^{\alpha'}{}_a \in \mathbb{GL}(n, \mathbb{R})$, $a = 1, \ldots, n$, которые связаны между собой преобразованием

$$e^{\alpha'}{}_a = e^\alpha{}_a \partial_\alpha x^{\alpha'}.$$

Таким образом, функциями перехода для расслоения реперов являются матрицы Якоби преобразования координат. Эти матрицы, как легко проверить, удовлетворяют условию (13.10). □

Таким образом, для каждого главного расслоения можно однозначно построить семейство функций перехода, соответствующих заданному координатному покрытию базы, и эти функции перехода удовлетворяют равенству (13.10). Справедливо также обратное утверждение.

Теорема 13.1.1. *Пусть $\mathbb{M}$ – многообразие с координатным покрытием $\mathbb{M} = \bigcup_i \mathbb{U}_i$ и $\mathbb{G}$ – группа Ли. Если заданы отображения $a_{ji} : \mathbb{U}_i \cap \mathbb{U}_j \to \mathbb{G}$ для всех непустых пересечений $\mathbb{U}_i \cap \mathbb{U}_j$ такие, что выполнено условие (13.10) во всех областях пересечения трех карт, то существует единственное с точностью до изоморфизма главное расслоение $\mathbb{P}(\mathbb{M}, \pi, \mathbb{G})$ с функциями перехода a_{ji}.*

Доказательство. Проводится путем явного построения главного расслоения. См., например, [**?**]. □

В заключение настоящего раздела поясним соотношение между связностью пространства главного расслоения $\mathbb{P}$ и связностями базы $\mathbb{M}$ и структурной группы $\mathbb{G}$.

Предложение 13.1.2. *Если база $\mathbb{M}$ и структурная группа $\mathbb{G}$ главного расслоения $\mathbb{P}(\mathbb{M}, \pi, \mathbb{G})$ связны, то пространство расслоения $\mathbb{P}$ также связно.*

Доказательство. Пусть $\mathbb{M} = \bigcup_i \mathbb{U}_i$ покрытие базы открытыми множествами такое, что для каждого i существует тривиализация $\chi_i : \pi^{-1}(\mathbb{U}_i) \to \mathbb{U}_i \times \mathbb{G}$. Поскольку $\mathbb{U}_i$ и $\mathbb{G}$ связны, то $\pi^{-1}(\mathbb{U}_i)$ также связно. Поэтому $\mathbb{P}$ тоже связно, как объединение пересекающихся связных множеств. □

Это предложение дает достаточное, но не необходимое условие связности пространства главного расслоения.

Пример 13.1.10. Рассмотрим главное расслоение $\mathbb{S}^1(\mathbb{S}^1, \pi, \mathbb{Z}^2)$, базой которого является окружность, а структурной группой $\mathbb{Z}_2 = \{\pm 1\}$, см. пример 13.2.2. Структурная группа не является связной, однако пространство расслоения связно. □

13.2 Ассоциированные расслоения

Дать определение расслоения, ассоциированного с заданным главным расслоением, в нескольких предложениях довольно затруднительно. Ассоциированные расслоения, хотя и просты по своему содержанию, требуют некоторой конструкции, которую мы сейчас опишем.

Определение. Пусть $\mathbb{P}(\mathbb{M},\pi,\mathbb{G})$ – главное расслоение, и $(\mathbb{F},\mathbb{G})$ – группа преобразований, т.е. задано дифференцируемое отображение

$$\mathbb{F}\times\mathbb{G}\ni(v,a)\mapsto va\in\mathbb{F}. \tag{13.11}$$

Сейчас мы построим расслоение $\mathbb{E}(\mathbb{M},\pi_{\mathbb{E}},\mathbb{F},\mathbb{G},\mathbb{P})$, которое ассоциировано с главным расслоением $\mathbb{P}$, и типичным слоем которого является многообразие $\mathbb{F}$. Во-первых, определим действие группы $\mathbb{G}$ на прямом произведении многообразий $\mathbb{P}\times\mathbb{F}$ по формуле

$$\mathbb{G}\ni a:\quad \mathbb{P}\times\mathbb{F}\ni(p,v)\mapsto(pa,va)\in\mathbb{P}\times\mathbb{F}.$$

Факторпространство для $\mathbb{P}\times\mathbb{F}$ относительно такого действия группы обозначается $\mathbb{E}=\mathbb{P}\times_{\mathbb{G}}\mathbb{F}$. Немного позже мы введем на $\mathbb{E}$ дифференцируемую структуру, а пока $\mathbb{E}$ – всего лишь множество. Проекция π в главном расслоении $\mathbb{P}$ определяет отображение, которое мы обозначим той же буквой

$$\pi:\quad \mathbb{P}\times\mathbb{F}\ni(p,v)\mapsto x=\pi(p)\in\mathbb{M}.$$

Это отображение индуцирует отображение факторпространства,

$$\pi_{\mathbb{E}}:\quad \mathbb{E}\ni u\mapsto x=\pi_{\mathbb{E}}(u)=\pi(p)\in\mathbb{M},$$

где $u=(p\mathbb{G},v\mathbb{G})$ – орбита точки $(p,v)\in\mathbb{P}\times\mathbb{F}$, которое называется проекцией $\mathbb{E}$ на $\mathbb{M}$. Для каждой точки базы $x\in\mathbb{M}$ множество $\pi_{\mathbb{E}}^{-1}(x)$ называется слоем в $\mathbb{E}$ над x. Поскольку главное расслоение $\mathbb{P}$ локально тривиально, то каждая точка $x\in\mathbb{M}$ имеет окрестность $\mathbb{U}\subset\mathbb{M}$ такую, что прообраз $\pi^{-1}(\mathbb{U})$ диффеоморфен прямому произведению $\mathbb{U}\times\mathbb{G}$. Отождествляя $\pi^{-1}(\mathbb{U})$ с $\mathbb{U}\times\mathbb{G}$, мы видим, что действие структурной группы $\mathbb{G}$ на произведении $\pi^{-1}(\mathbb{U})\times\mathbb{F}$ задается отображением

$$\mathbb{G}\ni b:\quad \mathbb{U}\times\mathbb{G}\times\mathbb{F}\ni(x,a,v)\mapsto(x,ab,vb)\in\mathbb{U}\times\mathbb{G}\times\mathbb{F}.$$

При этом орбита произвольной точки $(p,v)\in\mathbb{P}\times\mathbb{F}$ имеет вид

$$(x,a\mathbb{G},v\mathbb{G})=(x,\mathbb{G},v\mathbb{G}),\qquad\forall\ a\in\mathbb{G},\ v\in\mathbb{F}.$$

На каждой орбите можно выбрать по одному представителю, соответствующему, например, единице группы $e\in\mathbb{G}$. Тогда множество орбит прямого произведения $\mathbb{U}\times\mathbb{G}$ будет параметризовано парой элементов (x,e,v), $x\in\mathbb{M}$, $v\in\mathbb{F}$. Отсюда следует, что диффеоморфизм $\pi^{-1}(\mathbb{U})\approx\mathbb{U}\times\mathbb{G}$ индуцирует изоморфизм $\pi_{\mathbb{E}}^{-1}(\mathbb{U})\approx\mathbb{U}\times\mathbb{F}$ (локальная тривиальность). Поэтому на множестве $\mathbb{E}$ можно ввести дифференцируемую структуру. А именно, мы потребуем, чтобы множество $\pi_{\mathbb{E}}^{-1}(\mathbb{U})$ было открытым подмногообразием в $\mathbb{E}$, диффеоморфным прямому произведению $\mathbb{U}\times\mathbb{F}$ относительно изоморфизма $\pi_{\mathbb{E}}^{-1}(\mathbb{U})\approx\mathbb{U}\times\mathbb{F}$. Таким образом построено отображение $\chi_{\mathbb{E}}:\ \pi_{\mathbb{E}}^{-1}(\mathbb{U})\to\mathbb{U}\times\mathbb{F}$, которое является диффеоморфизмом. При этом проекция $\pi_{\mathbb{E}}$ будет дифференцируемым отображением $\pi_{\mathbb{E}}:\ \mathbb{E}\to\mathbb{M}$. Назовем объект $\mathbb{E}(\mathbb{M},\pi_{\mathbb{E}},\mathbb{F},\mathbb{G},\mathbb{P})$ *расслоением* с базой $\mathbb{M}$, проекцией $\pi_{\mathbb{E}}$, типичным слоем $\mathbb{F}$, структурной группой $\mathbb{G}$, *ассоциированным* с главным расслоением $\mathbb{P}(\mathbb{M},\pi,\mathbb{G})$. □

Поскольку отображение $\chi_{\mathbb{E}}$ – диффеоморфизм, то

$$\mathsf{dim}\,\mathbb{E} = \mathsf{dim}\,\mathbb{M} + \mathsf{dim}\,\mathbb{F}.$$

Легко проверить, что расслоение, ассоциированное с главным расслоением, является расслоением в смысле определения, данного в разделе 3.4. В отличии от данного ранее определения на ассоциированном расслоении определено действие структурной группы $\mathbb{G}$ справа. Действительно, согласно построению у каждой точки базы $x \in \mathbb{M}$ существует окрестность $\mathbb{U}$ такая, что прообраз $\pi_{\mathbb{E}}^{-1}(\mathbb{U})$ диффеоморфен прямому произведению $\mathbb{U}\times\mathbb{F}$. Отождествляя $\pi_{\mathbb{E}}^{-1}(\mathbb{U})$ с $\mathbb{U}\times\mathbb{F}$, действие структурной группы справа задано равенством

$$\mathbb{G} \ni a: \quad \mathbb{U}\times\mathbb{F} \ni (x,v) \mapsto (x, va) \in \mathbb{U}\times\mathbb{F},$$

где произведение va было определено в самом начале (13.11). Таким образом, пара $(\mathbb{E},\mathbb{G})$ представляет собой группу преобразований. Структурная группа действует внутри каждого слоя и не перемешивает слои между собой.

В терминах представителей действие структурной группы на $\mathbb{E}$ описывается следующим образом. Если $(p,v) \in \mathbb{P}\times\mathbb{F}$ – представитель точки $u \in \mathbb{E}$, то представителем точки $ua \in \mathbb{E}$ является пара $(p, va) \in \mathbb{P}\times\mathbb{F}$.

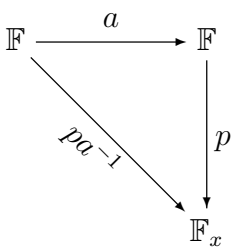
Замечание. В моделях математической физики наиболее распространенным примером типичного слоя $\mathbb{F}$ является векторное пространство, в котором задано представление структурной группы $\mathbb{G}$. В калибровочных моделях Янга–Миллса поля материи, которым соответствуют скалярные или спинорные поля в пространстве-времени, имеют дополнительный изотопический индекс. Этот индекс нумерует компоненты вектора в некотором векторном пространстве (типичном слое $\mathbb{F}$), в котором задано представление калибровочной группы (структурной группы $\mathbb{G}$). □

Замечание. В дальнейшем часть аргументов у ассоциированного расслоения $\mathbb{E}(\mathbb{M},\pi_{\mathbb{E}},\mathbb{F},\mathbb{G},\mathbb{P})$ мы, для краткости, будем опускать, оставляя лишь те, которые наиболее существенны в данный момент. □

Предложение 13.2.1. *Пусть $\mathbb{P}(\mathbb{M},\pi,\mathbb{G})$ – главное расслоение и $(\mathbb{F},\mathbb{G})$ – группа преобразований. Пусть $\mathbb{E}$ – расслоение, ассоциированное с $\mathbb{P}$. Для каждого $p \in \mathbb{P}$ и каждого $v \in \mathbb{F}$ обозначим через $p(v)$ образ элемента $(p,v) \in \mathbb{P}\times\mathbb{F}$ при действии естественной проекции $\mathbb{P}\times\mathbb{F} \to \mathbb{E}$. Тогда каждая точка $p \in \mathbb{P}$ определяет отображение типичного слоя $\mathbb{F}$ в слой $\mathbb{F}_x = \pi_{\mathbb{E}}^{-1}(x)$,*

$$p: \quad \mathbb{F} \ni v \mapsto p(v) \in \mathbb{F}_x, \tag{13.12}$$

где $x = \pi(p)$, и $(pa^{-1})(v) = p(va)$ для всех $p \in \mathbb{P}$, $a \in \mathbb{G}$ и $v \in \mathbb{F}$, т.е. диаграмма



коммутативна.

Доказательство. Следует прямо из определения, если учесть, что точки (pa, va) и (p, v) из произведения $\mathbb{P} \times \mathbb{F}$ проектируются в одну и ту же точку $\mathbb{E}$. □

Под изоморфизмом слоя $\mathbb{F}_x = \pi_{\mathbb{E}}^{-1}(x)$ на другой слой $\mathbb{F}_y = \pi_{\mathbb{E}}^{-1}(y)$, где $x, y \in \mathbb{M}$, мы понимаем диффеоморфизм, который представим в виде $q \circ p^{-1}$, где

$$\mathbb{F}_x \ni p: \ \mathbb{F} \to \mathbb{F}_x,$$
$$\mathbb{F}_y \ni q: \ \mathbb{F} \to \mathbb{F}_y.$$

В частности, автоморфизм слоя $\mathbb{F}_x$ – это отображение вида $q \circ p^{-1}$, где $p, q \in \mathbb{F}_x$. В этом случае $q = pa$ для некоторого $a \in \mathbb{G}$, так что любой автоморфизм слоя $\mathbb{F}_x$ представим в виде $p \circ a \circ p^{-1}$, где p – произвольная фиксированная точка в том же слое $\mathbb{F}_x$. Поэтому группа автоморфизмов каждого слоя $\mathbb{F}_x$ изоморфна структурной группе $\mathbb{G}$.

Опишем несколько примеров ассоциированных расслоений.

Пример 13.2.1. Рассмотрим группу преобразований $(\mathbb{G}, \mathbb{G})$, когда $\mathbb{G}$ действует на себе справа. Тогда ассоциированное расслоение изоморфно исходному главному расслоению, $\mathbb{E}(\mathbb{M}, \pi_{\mathbb{E}}, \mathbb{G}, \mathbb{G}, \mathbb{P}) \cong \mathbb{P}(\mathbb{M}, \pi, \mathbb{G})$. В общем случае они могут не совпадать, т.к. существует произвол в параметризации фактор пространства $\mathbb{E} = \mathbb{P} \times_{\mathbb{G}} \mathbb{F}$. Таким образом произвольное главное расслоение ассоциировано само с собой. Если пару $(\mathbb{G}, \mathbb{G})$ рассматривать, как группу преобразований, действующую слева, то ассоциированное расслоение также будет изоморфно главному расслоению $\mathbb{P}(\mathbb{M}, \pi, \mathbb{G})$, но структурная группа будет действовать на $\mathbb{P}$ слева. □

Пример 13.2.2 (Цилиндр, лист Мёбиуса, бутылка Клейна). Рассмотрим главное расслоение $\mathbb{S}^1(\mathbb{S}^1, \pi, \mathbb{Z}^2)$, где пространство расслоения реализовано в виде единичной окружности $\mathbb{S}^1$ на евклидовой плоскости $\mathbb{R}^2$ и структурная группа которого состоит из двух элементов $\mathbb{Z}_2 = \{1, -1\}$ с обычным умножением. Действие структурной группы $\mathbb{Z}_2$ на пространстве расслоения определено отражением относительно центра окружности,

$$\mathbb{Z}_2 \ni \pm 1: \quad \mathbb{S}^1 \ni x \mapsto \pm x \in \mathbb{S}^1, \qquad x = (x^1, x^2) \in \mathbb{R}^2.$$

База расслоения $\pi(\mathbb{S}^1) = \mathbb{S}^1$ также является окружностью. Конечно, это ни что иное, как двулистное накрытие окружности окружностью, рассмотренное в примере 12.1.4. Построенное главное расслоение $\mathbb{S}^1(\mathbb{S}^1, \pi, \mathbb{Z}_2)$ нетривиально. Построим для этого главного расслоения три ассоциированных расслоения (см. рис.13.1).

Рис. 13.1: Примеры ассоциированных расслоений. (a) Главное расслоение. (b) Цилиндр. (c) Лист Мёбиуса. (d) Бутылка Клейна.

1). Пусть группа $\mathbb{Z}_2$ действует на отрезок $\mathbb{F} = [-1, 1]$ тривиально,

$$\mathbb{Z}_2 \ni \pm 1: \quad [-1, 1] \ni v \mapsto v \in [-1, 1].$$

Тогда ассоциированное расслоение представляет собой *цилиндр*, который является прямым произведением $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{F}$.

2). Пусть группа $\mathbb{Z}_2$ действует на отрезок $\mathbb{F} = [-1, 1]$ нетривиально,

$$\mathbb{Z}_2 \ni \pm 1: \quad [-1, 1] \ni v \mapsto \pm v \in [-1, 1].$$

Тогда ассоциированное расслоение представляет собой *лист Мёбиуса*. Лист Мёбиуса является нетривиальным расслоением, т.к. не имеет вида прямого произведения $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{F}$.

3). Пусть группа $\mathbb{Z}_2$ действует на окружность $\mathbb{F} = \mathbb{S}^1$, отображая точки окружности относительно диаметра,

$$\mathbb{Z}_2 \ni \pm 1 : \quad \mathbb{S}^1 \ni \mathsf{e}^{iv} \mapsto \mathsf{e}^{\pm iv} \in \mathbb{S}^1,$$

где окружность $\mathbb{S}^1$ вложена в $\mathbb{R}^2$. Тогда ассоциированное расслоение представляет собой *бутылку Клейна*.

В первых двух примерах типичным слоем является многообразие с краем. Все три ассоциированных расслоения имеют глобальные сечения, несмотря но то, что во втором и третьем случаях ассоциированные расслоения не имеют вида прямого расслоения. На рисунках они показаны пунктирными линиями. □

Приведенные примеры показывают, что многие хорошо известные примеры многообразий можно рассматривать, как ассоциированные расслоения. Приведем еще два примера, которые играют важную роль в дифференциальной геометрии.

Пример 13.2.3 (Касательное расслоение). Рассмотрим расслоение реперов $\mathbb{L}(\mathbb{M})$, $\dim \mathbb{M} = n$, определенное в разделе 7. Оно состоит из упорядоченных наборов (реперов) $p = \{x, e_a\}$, $a = 1, \ldots, n$, где $x \in \mathbb{M}$ и $\{e_a\}$ – упорядоченный набор линейно независимых векторов касательного пространства, т.е. базис в $\mathbb{T}_x(\mathbb{M})$. При этом проекция определена отображением $\pi(p) = x \in \mathbb{M}$. Общая линейная группа $\mathbb{GL}(n, \mathbb{R})$ действует в $\mathbb{L}(\mathbb{M})$ справа так. Если $a = \{S_a{}^b\} \in \mathbb{GL}(n, \mathbb{R})$ и $p = \{x, e_a\}$ – репер, то преобразованный репер $pa = \{x, e'_a\}$ есть, по определению, репер, состоящий из векторов $e'_a = S_a{}^b e_b$. Мы записываем правое действие структурной группы как матричное умножение слева из-за принятого нами соглашения суммирования "с десяти до четырех". Отметим, что порядок записи является условным, $S_a{}^b e_b = e_b S_a{}^b$, так как суммирование проводится по одному нижнему и одному верхнему индексу. Группа $\mathbb{GL}(n, \mathbb{R})$ действует на расслоении реперов $\mathbb{L}(\mathbb{M})$ свободно и сохраняет слои, так как $\pi(p) = \pi(q)$, $p, q \in \mathbb{L}(\mathbb{M})$ тогда и только тогда, когда $p = qa$ для некоторого $a \in \mathbb{GL}(n, \mathbb{R})$.

Построим теперь ассоциированное расслоение. Пусть $\big(\mathbb{R}^n, \mathbb{GL}(n, \mathbb{R})\big)$ – группа преобразований. Группа $\mathbb{GL}(n, \mathbb{R})$, по определению, действует в $\mathbb{R}^n$ следующим образом. Пусть b_a, $a = 1, \ldots, n$, – некоторый базис в $\mathbb{R}^n$. Если $a = \{S_a{}^b\} \in \mathbb{GL}(n, \mathbb{R})$ – матрица преобразования, то $b_a a = S_a{}^b b_b \in \mathbb{R}^n$. Покажем, что ассоциированное расслоение $\mathbb{E}\big(\mathbb{M}, \pi_{\mathbb{E}}, \mathbb{R}^n, \mathbb{GL}(n, \mathbb{R}), \mathbb{L}\big)$ можно отождествить с касательным расслоением $\mathbb{T}(\mathbb{M})$, определенным в разделе 3.6.2. Базы расслоений совпадают, а слои изоморфны как векторные пространства одинаковой размерности. Покажем, что слои ассоциированного расслоения $\pi_{\mathbb{E}}^{-1}(x)$ для всех $x \in \mathbb{M}$ можно рассматривать, как касательные пространства $\mathbb{T}_x(\mathbb{M})$. Пусть $p = \{x, e_a\}$ – репер в точке $x \in \mathbb{M}$. Он же является точкой в главном расслоении $p \in \mathbb{L}(\mathbb{M})$. Согласно предложению 13.2.1, каждому реперу ставится в соответствие невырожденное линейное отображение. Выберем такой репер, что

$$p : \quad \mathbb{R}^n \ni b_a \mapsto e_a \in \pi_{\mathbb{E}}^{-1}(x).$$

С другой стороны, по определению, набор векторов $\{e_a\}$ образует базис касательного пространства $\mathbb{T}_x(\mathbb{M})$. Поэтому $\pi_{\mathbb{E}}^{-1}(x) = \mathbb{T}_x(\mathbb{M})$.

В компонентах это отождествление выглядит следующим образом. Произвольный касательный вектор $X \in \mathbb{T}_x(\mathbb{M})$ в точке $x \in \mathbb{M}$ можно разложить по координатному

базису и реперу $X = X^\alpha \partial_\alpha = X^a e_a$, где $e_a = e^\alpha{}_a \partial_\alpha$. Компоненты вектора X связаны линейным преобразованием $X^a = X^\alpha e_\alpha{}^a$, где $e_\alpha{}^a$ – компоненты обратного репера. Структурная группа $\mathbb{GL}(n,\mathbb{R})$ действует на латинские индексы, не меняя касательного вектора, $X = X^a e_a = X'^a e'_a$, где $X'^a = X^b S^{-1a}_b$ и $e'_a = S_a{}^b e_b$. При преобразовании координат преобразуются греческие индексы с помощью взаимно обратных матриц Якоби, $X = X^\alpha \partial_\alpha = X^{\alpha'} \partial_{\alpha'}$, где $X^{\alpha'} = X^\alpha \partial_\alpha x^{\alpha'}$ и $\partial_{\alpha'} = \partial_{\alpha'} x^\alpha \partial_\alpha$. В каждой точке $x \in \mathbb{M}$ матрицы Якоби также принадлежат общей линейной группе $\mathbb{GL}(n,\mathbb{R})$. □

Пример 13.2.4 (Тензорные расслоения). Пусть $\mathbb{T}^r_s$ – тензорное пространство типа (r,s) над векторным пространством $\mathbb{R}^n$. Общая группа линейных преобразований $\mathbb{GL}(n,\mathbb{R})$ действует в $\mathbb{T}^r_s$ обычным образом:

$$e_{a_1} \otimes \ldots \otimes e_{a_r} \otimes e^{b_1} \otimes \ldots \otimes e^{b_s} \mapsto S_{a_1}{}^{c_1} e_{c_1} \otimes \ldots \otimes S_{a_r}{}^{c_r} e_{c_r} \otimes e^{d_1} S^{-1b_1}_{d_1} \otimes \ldots \otimes e^{d_s} S^{-1b_s}_{d_s},$$

где e_a – базис в $\mathbb{R}^n$, e^a – базис в сопряженном пространстве $\mathbb{R}^{n*}$ и $\{S_a{}^b\} \in \mathbb{GL}(n,\mathbb{R})$. $a,b,... = 1,\ldots,n$. Расслоение $\mathbb{E}\big(\mathbb{M},\pi_\mathbb{E},\mathbb{T}^r_s,\mathbb{GL}(n,\mathbb{R}),\mathbb{L}\big)$, ассоциированное с расслоением реперов $\mathbb{L}(\mathbb{M})$, так же как и касательное расслоение отождествляется с тензорным расслоением $\mathbb{T}^r_s(\mathbb{M})$ типа (r,s), определенным в разделе 3.7. □

Вернемся к общему случаю. Пусть $\mathbb{P}(\mathbb{M},\pi,\mathbb{G})$ – главное расслоение, и $\mathbb{H}$ – замкнутая подгруппа в $\mathbb{G}$. Пара $(\mathbb{G}/\mathbb{H},\mathbb{G})$, где $\mathbb{G}/\mathbb{H}$ – пространство правых смежных классов, является группой преобразований. Поэтому определено ассоциированное расслоение $\mathbb{E}(\mathbb{M},\pi_\mathbb{E},\mathbb{G}/\mathbb{H},\mathbb{G},\mathbb{P})$ со стандартным слоем $\mathbb{G}/\mathbb{H}$. С другой стороны, группа $\mathbb{H}$, будучи подгруппой в структурной группе $\mathbb{G}$, действует на $\mathbb{P}$ справа. Поэтому определено фактор пространство $\mathbb{P}/\mathbb{H}$. Между построенными ассоциированным расслоением и фактор пространством существует связь.

Предложение 13.2.2. *Расслоение $\mathbb{E} = \mathbb{P} \times_\mathbb{G} (\mathbb{G}/\mathbb{H})$, ассоциированное с $\mathbb{P}(\mathbb{M},\pi,\mathbb{G})$, со стандартным слоем $\mathbb{G}/\mathbb{H}$ можно отождествить с $\mathbb{P}/\mathbb{H}$ так. Пусть $(p,\mathbb{H}a) \in \mathbb{P} \times (\mathbb{G}/\mathbb{H})$, где $a \in \mathbb{G}$, – представитель элемента ассоциированного расслоения $\mathbb{E}$. Отождествим его с элементом $pa \in \mathbb{P}$, который является представителем некоторого элемента из фактор пространства $\mathbb{P}/\mathbb{H}$.*

Доказательство. Каждый представитель однозначно определяет элемент соответствующего пространства. Поэтому отождествление представителей приводит к отождествлению точек ассоциированного расслоения $\mathbb{E}(\mathbb{M},\pi_\mathbb{E},\mathbb{G}/\mathbb{H},\mathbb{G},\mathbb{P})$ и фактор пространства $\mathbb{P}/\mathbb{H}$. Легко проверить, что это отождествление не зависит от выбора представителей. □

Следствие. Четверка $\mathbb{P}(\mathbb{E},\nu,\mathbb{H})$, где $\nu: \mathbb{P} \to \mathbb{P}/\mathbb{H}$ – естественная проекция, является главным расслоением, базой которого является ассоциированное расслоение $\mathbb{E}$, а структурной группой $\mathbb{H} \subset \mathbb{G}$.

Доказательство. Из предложения 13.2.2 следует, что фактор пространство $\mathbb{P}/\mathbb{H}$ является многообразием и поэтому может являться базой некоторого расслоения. Действие группы $\mathbb{H}$ на $\mathbb{P}$ не двигает точки базы $\mathbb{E}$ по построению. Локальная тривиальность $\mathbb{P}(\mathbb{E},\nu,\mathbb{H})$ следует из локальной тривиальности расслоений $\mathbb{E}(\mathbb{M},\pi_\mathbb{E},\mathbb{G}/\mathbb{H},\mathbb{G},\mathbb{P})$ и $\mathbb{G}(\mathbb{G}/\mathbb{H},\mathbb{H})$. Действительно, пусть $\mathbb{U}$ – окрестность в $\mathbb{M}$ такая, что $\pi^{-1}(\mathbb{U}) \approx \mathbb{U} \times (\mathbb{G}/\mathbb{H})$ и $\mathbb{V}$ – окрестность в $\mathbb{G}/\mathbb{H}$, для которой $\pi^{-1}_\mathbb{G}(\mathbb{V}) \approx \mathbb{V} \times \mathbb{H}$, где $\pi_\mathbb{G}: \mathbb{G} \to \mathbb{G}/\mathbb{H}$ – естественная проекция. Пусть $\mathbb{W}$ – открытое подмножество в $\pi^{-1}_\mathbb{E}(\mathbb{U}) \subset \mathbb{E}$, которое соответствует прямому произведению $\mathbb{U} \times \mathbb{V}$ при отождествлении $\pi^{-1}(\mathbb{U}) \approx \mathbb{U} \times (\mathbb{G}/\mathbb{H})$. Тогда $\nu^{-1}(\mathbb{W}) \approx \mathbb{W} \times \mathbb{H}$. □

Выпишем связь размерностей многообразий, которые участвовали в приведенной выше конструкции.

$$\begin{aligned}\dim \mathbb{P}(\mathbb{M},\mathbb{G}) &= \dim \mathbb{M} + \dim \mathbb{G},\\ \dim \mathbb{G} &= \dim \mathbb{G}/\mathbb{H} + \dim \mathbb{H},\\ \dim \mathbb{E} &= \dim \mathbb{M} + \dim \mathbb{G}/\mathbb{H},\\ \dim \mathbb{P}(\mathbb{E},\mathbb{H}) &= \dim \mathbb{M} + \dim \mathbb{G}/\mathbb{H} + \dim \mathbb{H} = \dim \mathbb{P}(\mathbb{M},\mathbb{G}).\end{aligned}$$

Теперь обсудим возможность продолжения сечения ассоциированного расслоения, которое задано на некотором подмножестве базы $\mathbb{N} \subset \mathbb{M}$. Для формулировки теоремы нам понадобится

Определение. Отображение $f : \mathbb{N} \to \mathbb{E}$ подмножества $\mathbb{N}$ многообразия $\mathbb{M}$ в многообразие $\mathbb{E}$ называется *дифференцируемым на* $\mathbb{N}$, если для каждой точки $x \in \mathbb{N}$ существует дифференцируемое отображение $f_x : \mathbb{U}_x \to \mathbb{E}$, где $\mathbb{U}_x \subset \mathbb{M}$ – некоторая окрестность точки $x \in \mathbb{M}$, такое, что $f_x = f$ на пересечении $\mathbb{U}_x \cap \mathbb{N}$. Если задано ассоциированное расслоение $\mathbb{E}(\mathbb{M}, \pi_{\mathbb{E}}, \mathbb{F}, \mathbb{G}, \mathbb{P})$ и некоторое подмножество базы $\mathbb{N} \subset \mathbb{M}$, то *сечением на* $\mathbb{N}$ называется дифференцируемое отображение $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{E}$ такое, что $\pi_{\mathbb{E}} \circ \sigma = \mathsf{id}_{\mathbb{M}}$. □

Замечание. В данном определении подмножество $\mathbb{N} \subset \mathbb{M}$ совсем необязательно является подмногообразием в $\mathbb{M}$. □

Пример 13.2.5. Пусть $f : \mathbb{U} \to \mathbb{E}$ – дифференцируемое отображение некоторой окрестности $\mathbb{U} \subset \mathbb{M}$ в $\mathbb{E}$. Тогда сужение $f|_{\mathbb{N}}$ на любое подмножество $\mathbb{N} \subset \mathbb{U}$ является дифференцируемым на $\mathbb{N}$. □

Теорема 13.2.1. *Пусть $\mathbb{E}(\mathbb{M}, \pi_{\mathbb{E}}, \mathbb{F}, \mathbb{G}, \mathbb{P})$ – ассоциированное расслоение такое, что типичный слой диффеоморфен евклидову пространству, $\mathbb{F} \approx \mathbb{R}^n$. Пусть $\mathbb{N}$ – замкнутое подмножество (возможно, пустое) в базе $\mathbb{M}$. Тогда любое сечение $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{E}$, определенное на $\mathbb{N}$, может быть продолжено до глобального сечения, определенного на всем $\mathbb{M}$. В частности, если подмножество $\mathbb{N}$ пусто, то на ассоциированном расслоении $\mathbb{E}$ с типичным слоем $\mathbb{F} \approx \mathbb{R}^n$ существует глобальное сечение $\sigma : \mathbb{M} \to \mathbb{E}$.*

Доказательство. Явно строится сечение, при этом используется паракомпактность многообразия. Детали можно найти, например, в [?]. □

Следствие. На любом многообразии $\mathbb{M}$ существует векторное поле, например, тождественно равное нулю. Более того, если векторное поле задано на произвольном замкнутом подмножестве $\mathbb{N} \subset \mathbb{M}$, то его всегда можно продолжить до векторного поля на всем многообразии $\mathbb{M}$. Замкнутость подмножества $\mathbb{N}$ существенна. Пример 3.6.5 показывает, что, если векторное поле задано на открытом подмножестве, то продолжение может не существовать. □

Замечание. Данная теорема показывает, что ассоциированные расслоения существенно отличаются от главных. Согласно предложению 13.1.1 главное расслоение $\mathbb{P}$ допускает глобальное сечение тогда и только тогда, когда оно тривиально. Если ассоциированное расслоение имеет вид прямого произведения, $\mathbb{E} = \mathbb{M} \times \mathbb{F}$, то оно, очевидно, также допускает глобальные сечения. Последняя теорема утверждает, что ассоциированное расслоение $\mathbb{E}$ имеет глобальные сечения даже если оно не имеет вида прямого произведения $\mathbb{M} \times \mathbb{F}$. Однако, взамен мы требуем, чтобы типичный слой был диффеоморфен евклидову пространству, $\mathbb{F} \approx \mathbb{R}^n$. □

Пример 13.2.6. Заменим единичный отрезок $[-1,1]$ для листа Мёбиуса из примера 13.2.2 на вещественную прямую $\mathbb{R}$. Тогда мы попадаем в условия теоремы 13.2.1, и, следовательно лист Мёбиуса бесконечной ширины имеет глобальное сечение. □

Определение. Ассоциированное расслоение $\mathbb{E}(\mathbb{M},\pi_{\mathbb{E}},\mathbb{F},\mathbb{G},\mathbb{P})$ называется *тривиальным*, если соответствующее главное расслоение $\mathbb{P}(\mathbb{M},\pi,\mathbb{G})$ тривиально. □

Из данного определения следует, что тривиальное ассоциированное расслоение всегда имеет вид прямого произведения, $\mathbb{E}\approx\mathbb{M}\times\mathbb{F}$, т.е. оно тривиально как расслоение. Обратное утверждение неверно.

Пример 13.2.7. Пусть $\mathbb{P}(\mathbb{M},\pi,\mathbb{G})$ – нетривиальное главное расслоение и $\mathbb{F}$ – произвольное многообразие, на котором структурная группа $\mathbb{G}$ действует тривиально. Тогда ассоциированное расслоение $\mathbb{E}(\mathbb{M},\pi_{\mathbb{E}},\mathbb{F},\mathbb{G},\mathbb{P})$ тривиально как расслоение, т.е. $\mathbb{E}\approx\mathbb{M}\times\mathbb{F}$, однако оно не является тривиальным ассоциированным расслоением. □

13.3 Отображение расслоений

Рассмотрим два главных расслоения $\mathbb{P}_1(\mathbb{M}_1,\pi_1,\mathbb{G}_1)$ и $\mathbb{P}_2(\mathbb{M}_2,\pi_2,\mathbb{G}_2)$. Оба расслоения являются группами преобразований $(\mathbb{P}_1,\mathbb{G}_1)$ и $(\mathbb{P}_2,\mathbb{G}_2)$. Поэтому при определении гомоморфизма расслоений используется понятие эквивариантного отображения, введенного в разделе 10.4.

Определение. *Гомоморфизмом* расслоений $f:\ \mathbb{P}_1(\mathbb{M}_1,\pi_1,\mathbb{G}_1)\to\mathbb{P}_2(\mathbb{M}_2,\pi_2,\mathbb{G}_2)$ называется эквивариантное отображение $f=f_{\mathbb{P}}\times f_{\mathbb{G}}$ (пара отображений),

$$f_{\mathbb{P}}:\ \mathbb{P}_1\to\mathbb{P}_2,$$
$$f_{\mathbb{G}}:\ \mathbb{G}_1\to\mathbb{G}_2,$$

где $f_{\mathbb{P}}$ – дифференцируемое отображение пространств расслоений и $f_{\mathbb{G}}$ – гомоморфизм структурных групп, таких, что $f_{\mathbb{P}}(pa)=f_{\mathbb{P}}(p)f_{\mathbb{G}}(a)$ для всех $p\in\mathbb{P}_1$ и $a\in\mathbb{G}_1$, т.е. диаграмма

$$\begin{array}{ccc}
\mathbb{P}_1\times\mathbb{G}_1 & \xrightarrow{f_{\mathbb{P}}\times f_{\mathbb{G}}} & \mathbb{P}_2\times\mathbb{G}_2 \\
\Big\downarrow a & & \Big\downarrow f_{\mathbb{G}}(a) \\
\mathbb{P}_1 & \xrightarrow{\quad f_{\mathbb{P}}\quad} & \mathbb{P}_2
\end{array}$$

коммутативна.

Расслоения $\mathbb{P}_1(\mathbb{M}_1,\pi_1,\mathbb{G}_1)$ и $\mathbb{P}_2(\mathbb{M}_2,\pi_2,\mathbb{G}_2)$ *изоморфны*, если $f_{\mathbb{P}}$ – диффеоморфизм пространств расслоений и $f_{\mathbb{G}}$ – изоморфизм структурных групп. Если $\mathbb{P}_1=\mathbb{P}_2=\mathbb{P}$, то изоморфизм расслоений называется *автоморфизмом* расслоения $\mathbb{P}$. □

Из приведенной диаграммы следует, что отображение $f_{\mathbb{P}}:\ \mathbb{P}_1\to\mathbb{P}_2$ отображает каждый слой $p\mathbb{G}_1\subset\mathbb{P}_1$ расслоения $\mathbb{P}_1$ в слой $f_{\mathbb{P}}(p)\mathbb{G}_2$ из $\mathbb{P}_2$ и поэтому индуцирует дифференцируемое отображение баз

$$f_{\mathbb{M}}:\ \ \mathbb{M}_1\ni\pi_1(p)\mapsto\pi_2\big(f_{\mathbb{P}}(p)\big)\in\mathbb{M}_2$$

Легко проверить, что это отображение не зависит от выбора точки в слое $p\in\pi_1^{-1}(x)$.

Если $f:\ \mathbb{P}_1\to\mathbb{P}_2$ – изоморфизм расслоений, то индуцированное отображение баз $f_{\mathbb{M}}$ является диффеоморфизмом и существует обратный изоморфизм $f^{-1}:\ \mathbb{P}_2\to\mathbb{P}_1$.

Пример 13.3.1 (Вертикальный автоморфизм). Пусть $a(x)$ – произвольная дифференцируемая функция на базе $\mathbb{M}$ со значениями в структурной группе $\mathbb{G}$. Умножим каждую точку главного расслоения $p \in \mathbb{P}(\mathbb{M}, \pi, \mathbb{G})$ на $a\big(\pi(p)\big)$, что соответствует повороту каждого слоя. В результате получим главное расслоение $\mathbb{P}'(\mathbb{M}, \pi, \mathbb{G})$, которое изоморфно исходному. Этот автоморфизм задается функциями:

$$f_{\mathbb{P}}: \ \mathbb{P} \ni p \mapsto pa\big(\pi(p)\big) \in \mathbb{P}'$$
$$f_{\mathbb{G}} = \mathsf{id}_{\mathbb{G}}: \ \mathbb{G} \ni b \mapsto b \in \mathbb{G}.$$

При этом отображение баз является тождественным преобразованием, $f_{\mathbb{M}} = \mathsf{id}$. □

Определение. Гомоморфизм расслоений называется *вложением* или *инъекцией*, если индуцированное отображение $f_{\mathbb{M}}: \ \mathbb{M}_1 \to \mathbb{M}_2$ есть вложение многообразий и $f_{\mathbb{G}}: \ \mathbb{G}_1 \to \mathbb{G}_2$ – мономорфизм (инъективный гомоморфизм). Отождествляя пространство первого расслоения $\mathbb{P}_1$ с его образом $f_{\mathbb{P}}(\mathbb{P}_1)$, $\mathbb{G}_1$ с $f_{\mathbb{G}}(\mathbb{G}_1)$ и $\mathbb{M}_1$ с $f_{\mathbb{M}}(\mathbb{M}_1)$, мы говорим, что $\mathbb{P}_1(\mathbb{M}_1, \pi_1, \mathbb{G}_1)$ есть *подрасслоение* для $\mathbb{P}_2(\mathbb{M}_2, \pi_2, \mathbb{G}_2)$. Если, кроме того, $\mathbb{M}_1 = \mathbb{M}_2 = \mathbb{M}$ и индуцированное отображение $f_{\mathbb{M}} = \mathsf{id}_{\mathbb{M}}$ есть тождественное отображение, то гомоморфизм расслоений $f: \ \mathbb{P}_1(\mathbb{M}, \pi_1, \mathbb{G}_1) \to \mathbb{P}_2(\mathbb{M}, \pi_2, \mathbb{G}_2)$ называется *редукцией* структурной группы $\mathbb{G}_2$ главного расслоения $\mathbb{P}_2(\mathbb{M}, \pi_2, \mathbb{G}_2)$ к подгруппе $\mathbb{G}_1$. Само расслоение $\mathbb{P}_1(\mathbb{M}, \pi_1, \mathbb{G}_1)$ называется *редуцированным расслоением*. Если задано главное расслоение $\mathbb{P}(\mathbb{M}, \pi, \mathbb{G})$ и подгруппа Ли $\mathbb{H}$ в $\mathbb{G}$, то мы говорим, что *структурная группа* $\mathbb{G}$ *редуцируема к* $\mathbb{H}$, если существует редуцированное главное расслоение $\mathbb{P}'(\mathbb{M}, \pi', \mathbb{H})$. Гомоморфизм $f: \ \mathbb{P} \to \mathbb{P}$ расслоения $\mathbb{P}$ на себя называется *автоморфизмом главного расслоения*, если $f_{\mathbb{P}}: \ \mathbb{P} \to \mathbb{P}$ – диффеоморфизм пространств расслоений и $f_{\mathbb{G}}: \ \mathbb{G} \to \mathbb{G}$ – автоморфизм структурных групп. □

Замечание. Поскольку при вложении главных расслоений $f_{\mathbb{M}}$ – вложение и $f_{\mathbb{G}}$ – мономорфизм, то

$$\mathsf{dim}\,\mathbb{M}_1 \leq \mathsf{dim}\,\mathbb{M}_2, \quad \text{и} \quad \mathsf{dim}\,\mathbb{G}_1 \leq \mathsf{dim}\,\mathbb{G}_2.$$

Мы не требуем, чтобы подгруппа $\mathbb{H}$ была замкнутой в $\mathbb{G}$. Эта общность необходима в теории связностей. □

Теорема 13.3.1. *Структурная группа $\mathbb{G}$ главного расслоения $\mathbb{P}(\mathbb{M}, \pi, \mathbb{G})$ редуцируема к подгруппе Ли $\mathbb{H}$ тогда и только тогда, когда существует координатное покрытие базы $\mathbb{M} = \bigcup_i \mathbb{U}_i$ такое, что все функции перехода a_{ji} принимают значение в $\mathbb{H}$.*

Доказательство. Доказательство проводится путем построения редуцированного расслоения. См., например, [?]. □

Приведем еще один критерий редуцируемости расслоений.

Теорема 13.3.2. *Структурная группа $\mathbb{G}$ главного расслоения $\mathbb{P}(\mathbb{M}, \pi, \mathbb{G})$ редуцируема к подгруппе $\mathbb{H}$ тогда и только тогда, когда ассоциированное расслоение $\mathbb{E}(\mathbb{M}, \pi_{\mathbb{E}}, \mathbb{G}/\mathbb{H}, \mathbb{G}, \mathbb{P}) = \mathbb{P}/\mathbb{H}$ (см. предложение 13.2.2) допускает глобальное сечение $\sigma: \ \mathbb{M} \to \mathbb{E}$. Между редуцированными главными расслоениями $\mathbb{Q}(\mathbb{M}, \pi, \mathbb{H})$ и сечениями σ существует естественное взаимно однозначное соответствие.*

Доказательство. См., например, [?]. □

Следствие. Структурная группа $\mathbb{G}$ главного расслоения $\mathbb{P}(\mathbb{M},\pi,\mathbb{G})$ редуцируема к единичному элементу $e\in\mathbb{G}$ тогда и только тогда, когда оно имеет глобальное сечение и, следовательно, тривиально, $\mathbb{P}\approx\mathbb{M}\times\mathbb{G}$.

Замечание. Если структурная группа состоит только из единичного элемента, то пространство редуцированного главного расслоения $\mathbb{P}'(\mathbb{M},\pi,e)$ естественным образом отождествляется с базой, $\mathbb{P}'=\mathbb{M}$. Поэтому существование отображения $f_{\mathbb{P}}:\ \mathbb{P}'=\mathbb{M}\to\mathbb{P}$ для редуцированного расслоения эквивалентно существованию глобального сечения для $\mathbb{P}(\mathbb{M},\pi,\mathbb{G})$. □

Теорема о существовании глобальных сечений на ассоциированном расслоении позволяет по новому доказать и взглянуть на существование римановой метрики на произвольном многообразии. Для формулировки результата нам понадобится дополнительное утверждение.

Из разложения Ивасавы [**?**] следует, что любая связная группа Ли диффеоморфна прямому произведению, $\mathbb{G}\approx\mathbb{H}\times\mathbb{R}^n$, где $\mathbb{H}$ – максимальная компактная подгруппа в $\mathbb{G}$ и $\mathbb{R}^n$ – евклидово пространство размерности $n=\mathsf{dim}\,\mathbb{G}-\mathsf{dim}\,\mathbb{H}$.

Предложение 13.3.1. *Пусть $\mathbb{P}(\mathbb{M},\pi,\mathbb{G})$ – главное расслоение со связной структурной группой Ли $\mathbb{G}$. Тогда структурная группа редуцируема к максимальной компактной подгруппе $\mathbb{H}\subset\mathbb{G}$.*

Доказательство. Рассмотрим ассоциированное расслоение $\mathbb{E}(\mathbb{M},\pi_{\mathbb{E}},\mathbb{G}/\mathbb{H},\mathbb{G},\mathbb{P})=\mathbb{P}/\mathbb{H}$, где $\mathbb{H}$ – максимальная компактная подгруппа в $\mathbb{G}$. Поскольку типичный слой $\mathbb{G}/\mathbb{H}$ диффеоморфен евклидову пространству (разложение Ивасавы), то, согласно теореме 13.2.1, ассоциированное расслоение допускает глобальное сечение. Поэтому из теоремы 13.3.2 вытекает, что структурная группа главного расслоения $\mathbb{P}(\mathbb{M},\pi,\mathbb{G})$ редуцируема к максимальной компактной подгруппе $\mathbb{H}$. □

Пример 13.3.2 (Существование римановой метрики). Пусть $\mathbb{L}(\mathbb{M})$ – расслоение линейных реперов над многообразием $\mathbb{M}$, $\mathsf{dim}\,\mathbb{M}=n$. Известно, что максимальной компактной подгруппой в группе общих линейных преобразований $\mathbb{GL}(n,\mathbb{R})$ является группа вращений $\mathbb{O}(n)$ размерности $\frac{1}{2}n(n-1)$. В силу разложения Ивасавы однородное пространство $\mathbb{GL}(n,\mathbb{R})/\mathbb{O}(n)$ диффеоморфно евклидову пространству $\mathbb{R}^d$ размерности

$$d=n^2-\frac{n(n-1)}{2}=\frac{n(n+1)}{2}.$$

Из теоремы 13.2.1 следует, что ассоциированное расслоение $\mathbb{E}=\mathbb{L}(\mathbb{M})/\mathbb{O}(n)$ со слоем $\mathbb{GL}(n,\mathbb{R})/\mathbb{O}(n)$ имеет глобальное сечение. Поэтому структурная группа $\mathbb{GL}(n,\mathbb{R})$ может быть редуцирована к группе вращений $\mathbb{O}(n)$ как следствие теоремы 13.3.2.

Пусть в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$ в декартовых координатах задано скалярное произведение $(\cdot,\cdot)$:

$$(\widetilde{X},\widetilde{Y})=\widetilde{X}^a\widetilde{Y}^b\delta_{ab},\qquad \widetilde{X},\widetilde{Y}\in\mathbb{R}^n,$$

где δ_{ab} – евклидова метрика (2.7). Это скалярное произведение инвариантно относительно вращений евклидова пространства $\mathbb{O}(n)$.

Покажем, что каждая редукция структурной группы $\mathbb{GL}(n,\mathbb{R})$ расслоения реперов $\mathbb{L}(\mathbb{M})$ порождает риманову метрику g на $\mathbb{M}$. Пусть $\mathbb{O}(\mathbb{M}):=\mathbb{O}\big(\mathbb{M},\pi,\mathbb{O}(n)\big)$ – редуцированное подрасслоение для расслоения реперов $\mathbb{L}(\mathbb{M})$. Типичный слой редуцированного расслоения состоит из реперов вида $p=\{x,S_a{}^be_b\}$, где $S_a{}^b\in\mathbb{O}(n)$ – произвольная матрица вращений. Если мы рассматриваем репер $p\in\mathbb{L}(\mathbb{M})$ как линейный изоморфизм из $\mathbb{R}^n$ на касательное пространство $\mathbb{T}_x(\mathbb{M})$, где $x=\pi(p)$, то каждый

репер из редуцированного расслоения $p \in \mathbb{O}(\mathbb{M})$ определяет скалярное произведение в касательном пространстве $\mathbb{T}_x(\mathbb{M})$ по формуле

$$g(X,Y) = (p^{-1}X, p^{-1}Y), \qquad X, Y \in \mathbb{T}_x(\mathbb{M}). \tag{13.13}$$

Инвариантность скалярного произведения $(\cdot,\cdot)$ относительно вращений $\mathbb{O}(n)$ влечет за собой независимость $g(X,Y)$ от выбора репера $p \in \mathbb{Q}$. Таким образом, мы доказали, что каждое многообразие допускает риманову метрику.

В компонентах определение (13.13) имеет хорошо знакомый вид

$$g(X,Y) = X^\alpha Y^\beta g_{\alpha\beta} = \widetilde{X}^a \widetilde{Y}^b \delta_{ab}, \qquad g_{\alpha\beta} = e_\alpha{}^a e_\beta{}^b \delta_{ab},$$

где $\widetilde{X}^a = X^\alpha e_\alpha{}^a$ и $\widetilde{Y}^a = Y^\alpha e_\alpha{}^a$. В таком виде скалярное произведение уже встречалось в разделе 8.9 (без знаков тильды).

Верно также обратное утверждение. Пусть на $\mathbb{M}$ задана риманова метрика g. Пусть $\mathbb{O}(\mathbb{M})$ – подмножество в расслоении реперов $\mathbb{L}(\mathbb{M})$, состоящее из реперов $p = \{x, e_a\}$, которые ортонормальны относительно g, т.е.

$$(e_a, e_b) = e^\alpha{}_a e^\beta{}_b g_{\alpha\beta} = \delta_{ab}.$$

Если репер $p \in \mathbb{L}(\mathbb{M})$ рассматривается как изоморфизм из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{T}_x(\mathbb{M})$, то p принадлежит редуцированному подрасслоению $\mathbb{O}(\mathbb{M})$ тогда и только тогда, когда $(\widetilde{X}, \widetilde{Y}) = g(p\widetilde{X}, p\widetilde{Y})$ для всех $\widetilde{X}, \widetilde{Y} \in \mathbb{R}^n$. Легко проверить, что $\mathbb{O}(\mathbb{M})$ образует редуцированное подрасслоение в $\mathbb{L}(\mathbb{M})$ над базой $\mathbb{M}$ со структурной группой $\mathbb{O}(n)$. Расслоение $\mathbb{O}(\mathbb{M})$ называется *расслоением ортонормальных реперов* над $\mathbb{M}$. Каждый элемент из $\mathbb{O}(\mathbb{M})$ есть *ортонормальный репер*.

Чтобы подчеркнуть принадлежность вектора евклидову пространству, в настоящем примере был использован знак тильды. Поскольку репер устанавливает изоморфизм $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{T}_x(\mathbb{M})$, то эти пространства мы отождествим и опустим знак тильды, считая, что X^α и X^a – это компоненты одного касательного вектора $X \in \mathbb{T}_x(\mathbb{M})$ относительно координатного базиса и репера. Чтобы их не путать, мы используем буквы греческого и латинского алфавитов. □

В рассмотренном примере мы не только доказали существование римановой метрики на произвольном многообразии, но и следующее утверждение.

Теорема 13.3.3. *Существует взаимно однозначное соответствие между римановыми метриками на многообразии $\mathbb{M}$ и редукциями структурной группы $\mathbb{GL}(n,\mathbb{R})$ расслоения реперов $\mathbb{L}(\mathbb{M})$ к группе вращений $\mathbb{O}(n)$*

В начале настоящего раздела мы установили, что гомоморфизм расслоений индуцирует дифференцируемое отображение баз расслоений. Теперь мы рассмотрим обратную задачу: в какой степени отображение некоторого многообразия в базу заданного расслоения может быть сопоставлено некоторому гомоморфизму расслоений ? Ответ на этот вопрос дает

Теорема 13.3.4. *Пусть дано главное расслоение $\mathbb{P}(\mathbb{M},\pi,\mathbb{G})$ и дифференцируемое отображение многообразий $f_\mathbb{N} : \mathbb{N} \to \mathbb{M}$. Тогда существует единственное с точностью до изоморфизма главное расслоение $\mathbb{Q}(\mathbb{N},\pi_\mathbb{Q},\mathbb{G})$ с гомоморфизмом $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{P}$, индуцирующим отображение баз $f_\mathbb{N} : \mathbb{N} \to \mathbb{M}$ и соответствующим тождественному автоморфизму структурной группы $\mathbb{G}$.*

Доказательство. В прямом произведении $\mathbb{N}\times\mathbb{P}$ рассмотрим подмножество $\mathbb{Q}$, состоящее из точек $(y,p)\in\mathbb{N}\times\mathbb{P}$ таких, что $f_{\mathbb{N}}(y)=\pi(p)$. Определим действие структурной группы $\mathbb{G}$ справа на построенном множестве $\mathbb{Q}$:

$$\mathbb{G}\ni a:\quad \mathbb{Q}\ni(y,p)\mapsto(y,p)a:=(y,pa)\in\mathbb{Q}.$$

Это отображение не зависит от точки слоя $\pi^{-1}\big(\pi(p)\big)$. Нетрудно проверить, что $\mathbb{G}$ действует свободно на $\mathbb{Q}$ и что множество $\mathbb{Q}$ представляет собой главное расслоение $\mathbb{Q}(\mathbb{N},\pi_{\mathbb{Q}},\mathbb{G})$ с базой $\mathbb{N}$, структурной группой $\mathbb{G}$ и проекцией $\pi_{\mathbb{Q}}:\ (y,p)\mapsto y$.

Единственность. Пусть $\mathbb{Q}'(\mathbb{N},\pi'_{\mathbb{Q}},\mathbb{G})$ – другое главное расслоение с базой $\mathbb{N}$ и структурной группой $\mathbb{G}$ и $f':\ \mathbb{Q}'\to\mathbb{P}$ – гомоморфизм, индуцирующий заданное отображение баз $f_{\mathbb{N}}:\ \mathbb{N}\to\mathbb{M}$ и соответствующий тождественному автоморфизму структурной группы $\mathbb{G}$. Определим отображение $\mathbb{Q}'$ на $\mathbb{Q}$

$$\tilde f:\quad \mathbb{Q}'\ni p'\mapsto\big(\pi'_{\mathbb{Q}}(p'),f'(p')\big)\in\mathbb{Q}.$$

Тогда отображение $\tilde f:\ \mathbb{Q}'\to\mathbb{Q}$ – изоморфизм расслоений, индуцирующий тождественное преобразование базы $\mathbb{N}$ и соответствующий тождественному автоморфизму структурной группы $\mathbb{G}$. □

Определение. Расслоение $\mathbb{Q}(\mathbb{N},\pi_{\mathbb{Q}},\mathbb{G})$ в утверждении теоремы 13.3.4 называется *расслоением, индуцированным отображением* $f_{\mathbb{N}}:\ \mathbb{N}\to\mathbb{M}$ *из главного расслоения* $\mathbb{P}(\mathbb{M},\pi,\mathbb{G})$, или просто *индуцированным расслоением*. Оно обозначается $f_{\mathbb{N}}^{-1}\mathbb{P}$. □

Замечание. Если отображение $f_{\mathbb{N}}$ является вложением, то главное расслоение $\mathbb{Q}(\mathbb{N},\pi_{\mathbb{Q}},\mathbb{G})$ есть подрасслоение для $\mathbb{P}(\mathbb{M},\pi,\mathbb{G})$. □

Пример 13.3.3. Рассмотрим главное расслоение $\mathbb{P}(\mathbb{M},\pi,\mathbb{G})$ и некоторую окрестность базы $\mathbb{U}\subset\mathbb{M}$ тогда $\mathbb{P}|_{\mathbb{U}}=\pi^{-1}(\mathbb{U})$ есть подрасслоение в $\mathbb{P}$. Оно же является индуцированным расслоением $f_{\mathbb{U}}^{-1}\mathbb{P}$, где $f:\ \mathbb{U}\to\mathbb{P}$ – вложение. □

Глава 14

Связности на главных и ассоциированных расслоениях

Теория связностей на расслоениях играет исключительно важную роль в моделях математической физики, т.к. позволяет определить ковариантную производную. В свою очередь ковариантная производная используется для записи ковариантных уравнений. В настоящем разделе мы определим связность на главном и ассоциированном расслоении. Покажем, что калибровочные поля Янга–Миллса представляют собой компоненты локальной формы связности. Кроме того, будет рассмотрена группа голономии, которая является одной из важнейших характеристик связности.

14.1 Связность на главном расслоении

Пусть задано главное расслоение $\mathbb{P}(\mathbb{M}, \pi, \mathbb{G})$ с базой $\mathbb{M}$, $\dim \mathbb{M} = n$, и структурной группой Ли $\mathbb{G}$, $\dim \mathbb{G} = \text{N}$. Пара $(\mathbb{P}, \mathbb{G})$ представляет собой группу преобразований. При этом группа Ли $\mathbb{G}$ действует на многообразии $\mathbb{P}$ свободно. Каждый слой $\pi^{-1}(x)$, где $x \in \mathbb{M}$, диффеоморфен структурной группе и ее действие на нем транзитивно. Из предложения 10.2.1 следует, что действие структурной группы $\mathbb{G}$ на $\mathbb{P}$ индуцирует гомоморфизм μ алгебры Ли $\mathfrak{g}$ в алгебру Ли векторных полей $\mathcal{X}(\mathbb{P})$. Этот гомоморфизм является мономорфизмом, т.к. действие группы свободно и, следовательно, эффективно.

Определение. Векторное поле $X^* = \mu(X) \in \mathcal{X}(\mathbb{P})$, где $X \in \mathfrak{g}$ – произвольный элемент алгебры Ли структурной группы Ли $\mathbb{G}$, называется *фундаментальным векторным полем, соответствующим* $X \in \mathfrak{g}$. □

Поскольку действие структурной группы на $\mathbb{P}$ отображает каждый слой в себя, то каждое фундаментальное векторное поле X^*_p касается слоя $\pi^{-1}\big(\pi(p)\big)$ в каждой точке $p \in \mathbb{P}$. Поскольку действие группы свободно, то по предложению 10.2.1 фундаментальные векторные поля нигде не обращаются в нуль. Так как размерность каждого слоя равна размерности алгебры Ли $\mathfrak{g}$, то отображение

$$\mathfrak{g} \ni X \mapsto X^*_p \in \mathbb{T}_p(\mathbb{P})$$

есть линейный мономорфизм алгебры Ли $\mathfrak{g}$ в касательное пространство в точке $p \in \mathbb{P}$ к слою, проходящему через p.

Определение. Образ алгебры Ли $\mathfrak{g}$ в касательном пространстве $\mathbb{T}_p(\mathbb{P})$ называется *вертикальным подпространством* в $\mathbb{T}_p(\mathbb{P})$ и обозначается $\mathbb{V}_p(\mathbb{P})$. □

Пусть $\{L_{\text{A}}\}$, $\text{A} = 1, \ldots, \text{N} = \dim \mathbb{G}$, – базис алгебры Ли $\mathfrak{g}$ с коммутационными соотношениями $[L_{\text{A}}, L_{\text{B}}] = f_{\text{AB}}{}^{\text{C}} L_{\text{C}}$, где $f_{\text{AB}}{}^{\text{C}}$ – структурные константы группы Ли $\mathbb{G}$. Тогда индуцированные фундаментальные векторные поля L^*_{A} удовлетворяют тем же коммутационным соотношениям, $[L^*_{\text{A}}, L^*_{\text{B}}] = f_{\text{AB}}{}^{\text{C}} L^*_{\text{C}}$. Множество фундаментальных векторных полей $\{L^*_{\text{A}}\}$ задает дифференцируемое инволютивное распределение вертикальных подпространств $p \mapsto \mathbb{V}_p(\mathbb{P})$ на пространстве главного расслоения $\mathbb{P}$ (см., раздел 3.11). Согласно теореме Фробениуса 3.11.1 через каждую точку $p \in \mathbb{P}$ проходит интегральное подмногообразие этого распределения. Это интегральное подмногообразие есть ни что иное, как слой $\pi^{-1}\big(\pi(p)\big)$.

Предложение 14.1.1. *Пусть X^* – фундаментальное векторное поле, соответствующее элементу алгебры Ли $X = X_0^{\text{A}} L_{\text{A}} \in \mathfrak{g}$, $X_0^{\text{A}} = \mathsf{const}$ для всех* A. *Тогда для каждого элемента группы $a \in \mathbb{G}$ векторное поле $r_{a*}X^*$, где r_{a*} – дифференциал отображения, индуцированного действием элемента a справа, является фундаментальным векторным полем, которое соответствует левоинвариантному векторному полю $\mathsf{ad}\,(a^{-1})X = X_0^{\text{B}} S^{-1}{}_{\text{B}}{}^{\text{A}}(a) L_{\text{A}} \in \mathfrak{g}$, где ad обозначает присоединенное представление $\mathbb{G}$ в $\mathfrak{g}$ и $S_{\text{A}}{}^{\text{A}}(a)$ – матрица присоединенного представления.*

Доказательство. Фундаментальное векторное поле X^* индуцируется однопараметрической группой преобразований $r_{b(t)}$, где $b(t) = \mathsf{exp}\,(tX)$. Векторное поле $r_{a*}X^*$ индуцируется однопараметрической группой преобразований $r_a \circ r_{b(t)} \circ r_{a^{-1}} = r_{a^{-1}b(t)a}$ по предложению 10.2.2. Утверждение предложения следует из того, что преобразования вида $a^{-1}b(t)a$ представляют собой однопараметрическую группу преобразований, порожденную элементом алгебры Ли $\mathsf{ad}\,(a^{-1})X \in \mathfrak{g}$. □

Пример 14.1.1 (Локальное рассмотрение). Чтобы прояснить абстрактное построение, которое было проведено выше, повторим его в компонентах. В настоящей главе мы будем возвращаться к этому примеру неоднократно. Пусть $\mathbb{U} \subset \mathbb{M}$ – окрестность базы, для которой определено отображение (13.2), с координатами x^α, $\alpha = 1, \ldots, n$. Используя диффеоморфизм $\chi : \pi^{-1}(\mathbb{U}) \to \mathbb{U} \times \widetilde{\mathbb{G}}$, мы отождествим подрасслоение $\mathbb{Q} = \pi^{-1}(\mathbb{U})$ с прямым произведением $\mathbb{U} \times \widetilde{\mathbb{G}}$. Мы отметили структурную группу в прямом произведении знаком тильды, потому что в дальнейшем нам будет необходимо различать точку главного расслоения и точку структурной группы. То есть $p = (x, a)$, где $x \in \mathbb{U}$, $a \in \widetilde{\mathbb{G}}$, для всех $p \in \mathbb{Q}$. Действие структурной группы $\mathbb{G}$ на $\mathbb{Q}$ имеет вид

$$\mathbb{G} \ni a : \quad \mathbb{Q} \ni p = (x, b) \mapsto pa = (x, ba) \in \mathbb{Q}.$$

Фактически, данный пример относится к произвольному тривиальному главному расслоению, база которого покрывается одной картой, $\mathbb{M} \approx \mathbb{R}^n$.

Любой элемент алгебры Ли $\mathfrak{g}$ (левоинвариантное векторное поле X на группе Ли $\mathbb{G}$) имеет постоянные компоненты X_0^{A} относительно левоинвариантного базиса, $X = X_0^{\text{A}} L_{\text{A}}$, где L_{A} – базис алгебры Ли $\mathfrak{g}$ (см. раздел 9.2). Базису алгебры Ли L_{A} соответствуют фундаментальные векторные поля L^*_{A} на главном расслоении, которые образуют базис вертикальных подпространств. Выберем базис касательных пространств $\mathbb{T}_p(\mathbb{Q})$ в виде $\{\partial_\alpha, L^*_{\text{A}}\}$. Тогда фундаментальное векторное поле, соответствующее произвольному элементу алгебры Ли $X \in \mathfrak{g}$, будет иметь только вертикальные компоненты, $X^* = X_0^{\text{A}} L^*_{\text{A}}$. Утверждение предложения 14.1.1 сводится к равенству

$$r_{a*}X^* = X_0^{\text{A}} S_{\text{A}}{}^{\text{B}}(a^{-1}) L^*_{\text{B}}, \tag{14.1}$$

где $S_{\text{A}}{}^{\text{B}}(a^{-1}) = S^{-1}{}_{\text{A}}{}^{\text{B}}(a)$ – матрица присоединенного представления для обратного элемента $a^{-1} \in \mathbb{G}$. Особенно просто это равенство проверяется вблизи единицы группы, где определена функция композиции. Пусть $X^*(e)$ – значение фундаментального векторного поля в единице группы. Тогда

$$r_{a*}\big(X^*(e)\big) = X_0^{\text{A}} R_{\text{A}}{}^{\text{B}}(a)\partial_{\text{B}}|_a = X_0^{\text{A}} R_{\text{A}}{}^{\text{B}}(a) L^{-1}{}_{\text{B}}{}^{\text{C}}(a) L^*_{\text{C}}(a) = X_0^{\text{A}} S_{\text{A}}{}^{\text{B}}(a^{-1}) L^*_{\text{B}}(a),$$

где матрицы $R_{\text{A}}{}^{\text{B}}$, $L_{\text{A}}{}^{\text{B}}$ и $S_{\text{A}}{}^{\text{B}}$ были определены в разделах 9.2–9.4.

Произвольное векторное поле $\widetilde{X} \in \mathcal{X}(\mathbb{Q})$ имеет вид

$$\widetilde{X} = \widetilde{X}^{\alpha}\partial_{\alpha} + \widetilde{X}^{\text{A}} L^*_{\text{A}}.$$

После правого действия группы r_a, оно преобразуется в новое векторное поле

$$r_{a*}\widetilde{X} = \widetilde{X}^{\alpha}\partial_{\alpha} + \widetilde{X}^{\text{B}} S^{-1}{}_{\text{B}}{}^{\text{A}}(a) L^*_{\text{A}}, \tag{14.2}$$

т.к. дифференциал отображения r_{a*} действует только на вертикальные компоненты по правилу (14.1). □

Продолжим общее построение.

Определение. *Связностью* Γ на главном расслоении $\mathbb{P}(\mathbb{M}, \pi, \mathbb{G})$ называется распределение

$$\Gamma: \quad \mathbb{P} \ni p \mapsto \mathbb{H}_p(\mathbb{P}) \subset \mathbb{T}_p(\mathbb{P}),$$

которое каждой точке $p \in \mathbb{P}$ ставит в соответствие подпространство $\mathbb{H}_p(\mathbb{P})$ в касательном пространстве $\mathbb{T}_p(\mathbb{P})$ такое, что

1) в каждой точке p касательное пространство $\mathbb{T}_p(\mathbb{P})$ разлагается в прямую сумму

$$\mathbb{T}_p(\mathbb{P}) = \mathbb{V}_p(\mathbb{P}) \oplus \mathbb{H}_p(\mathbb{P});$$

2) подпространства $\mathbb{H}_p(\mathbb{P})$ инвариантны относительно правого действия структурной группы

$$r_{a*}\mathbb{H}_p(\mathbb{P}) = \mathbb{H}_{pa}(\mathbb{P}); \tag{14.3}$$

3) $\mathbb{H}_p(\mathbb{P})$ зависит дифференцируемо от p.

Множество касательных векторов $\mathbb{H}_p(\mathbb{P})$ в точке $p \in \mathbb{P}$ называется *горизонтальным подпространством* в $\mathbb{T}_p(\mathbb{P})$. Вектор $\widetilde{X} \in \mathbb{T}_p(\mathbb{P})$ называется *вертикальным* или *горизонтальным*, если он лежит соответственно в $\mathbb{V}_p(\mathbb{P})$ или $\mathbb{H}_p(\mathbb{P})$. □

Из условия 1) следует, что каждый вектор $\widetilde{X} \in \mathbb{T}_p(\mathbb{P})$ может быть единственным образом представлен в виде суммы

$$\widetilde{X} = \mathsf{v}\widetilde{X} + \mathsf{h}\widetilde{X}, \qquad \mathsf{v}\widetilde{X} \in \mathbb{V}_p(\mathbb{P}),\ \mathsf{h}\widetilde{X} \in \mathbb{H}_p(\mathbb{P}),$$

где v и h – проекторы на соответствующие подпространства. Векторы $\mathsf{v}\widetilde{X}$ и $\mathsf{h}\widetilde{X}$ называются соответственно *вертикальной* и *горизонтальной* компонентами касательного вектора $\widetilde{X}$. Ясно, что

$$\mathsf{dim}\,\mathbb{V}_p(\mathbb{P}) = \mathsf{dim}\,\mathbb{G}, \quad \mathsf{dim}\,\mathbb{H}_p(\mathbb{P}) = \mathsf{dim}\,\mathbb{M}, \qquad \forall p \in \mathbb{M}.$$

Если главное расслоение тривиально, то у него существует глобальное сечение. В этом случае условие 2) означает, что связность достаточно задать на каком либо

сечении, а затем разнести по всему пространству расслоения $\mathbb{P}$ с помощью группового действия. В дальнейшем мы сформулируем предложение **??**, определяющее связность на главном расслоении общего вида через семейство локальных форм связности, которые заданы на координатном покрытии базы.

Условие 3) обозначает по определению, что, если $\widetilde{X}$ – дифференцируемое векторное поле на $\mathbb{P}$, то таковы же вертикальная и горизонтальная компоненты $\mathsf{v}\widetilde{X}$ и $\mathsf{h}\widetilde{X}$.

Пример 14.1.2. Накрытие $\widetilde{\mathbb{M}} \to \mathbb{M}$ (см. раздел 12) является главным расслоением с 0-мерной структурной группой. В этом случае вертикальные подпространства отсутствуют, а горизонтальное подпространство в точке $p \in \widetilde{\mathbb{M}}$ совпадает с касательным пространством $\mathbb{T}_p(\widetilde{\mathbb{M}})$. Это означает, что связность для накрытий единственна и распределение горизонтальных подпространств совпадает с касательны расслоением $\mathbb{T}(\widetilde{\mathbb{M}})$. □

Пусть на главном расслоении $\mathbb{P}(\mathbb{M}, \pi, \mathbb{G})$ задана связность Γ. Для того, чтобы конструктивно описать распределение горизонтальных подпространств построим на главном расслоении $\mathbb{P}$ 1-форму ω со значениями в алгебре Ли $\mathfrak{g}$, т.е. $\omega = \omega^{\text{A}} L_{\text{A}}$, $\omega^{\text{A}} \in \Lambda_1(\mathbb{P})$ для всех A. Как было отмечено в начале настоящего раздела, каждому элементу алгебры Ли $X \in \mathfrak{g}$ соответствует единственное фундаментальное векторное поле X^*. При этом отображение $X \mapsto X^*_p$ представляет собой линейный мономорфизм $\mathfrak{g}$ в $\mathbb{T}_p(\mathbb{P})$ для всех точек главного расслоения $p \in \mathbb{P}$.

Определение. Для каждого касательного вектора $\widetilde{X}_p \in \mathbb{T}_p(\mathbb{P})$ определим значение 1-формы $\omega(\widetilde{X}_p)$ на векторе $\widetilde{X}_p$, как единственный элемент алгебры Ли $X \in \mathfrak{g}$ такой, что фундаментальное векторное поле X^*_p в точке $p \in \mathbb{P}$ совпадает с вертикальной компонентой вектора, $X^*_p = \mathsf{v}\widetilde{X}_p$. 1-форма ω на $\mathbb{P}$ со значениями в алгебре Ли $\mathfrak{g}$ называется *формой связности* для заданной связности Γ на $\mathbb{P}(\mathbb{M}, \pi, \mathbb{G})$. □

По построению, $\omega(\widetilde{X}) = 0$ тогда и только тогда, когда векторное поле $\widetilde{X}$ горизонтально. В силу следующего предложения 1-форма ω взаимно однозначно определяет распределение горизонтальных подпространств и, следовательно, связность Γ на $\mathbb{P}$.

Предложение 14.1.2. *Форма связности ω на $\mathbb{P}(\mathbb{M}, \pi, \mathbb{G})$ имеет следующие свойства:*

1) $\omega(X^*) = X$ для всех $X \in \mathfrak{g}$;

2) $r_a^*\omega = \mathsf{ad}\,(a^{-1})\omega$, т.е.

$$(r_a^*\omega)(\widetilde{X}) = \mathsf{ad}\,(a^{-1})\omega(\widetilde{X}) = \omega(\widetilde{X})^{\text{B}} S^{-1}{}_{\text{B}}{}^{\text{A}}(a) L_{\text{A}}$$

для всех $a \in \mathbb{G}$ и каждого векторного поля $\widetilde{X}$ на $\mathbb{P}$.

Обратно. Если на главном расслоении $\mathbb{P}(\mathbb{M}, \pi, \mathbb{G})$ задана 1-форма ω со значениями в алгебре Ли $\mathfrak{g}$, удовлетворяющая условиям 1) и 2), то на $\mathbb{P}$ существует единственная связность Γ такая, что ее форма связности есть ω.

Доказательство. Пусть ω – форма связности на $\mathbb{P}(\mathbb{M}, \pi, \mathbb{G})$. Условие 1) следует немедленно из определения ω. Поскольку каждое векторное поле $\widetilde{X} \in \mathcal{X}(\mathbb{P})$ разлагается на вертикальную и горизонтальную составляющую, то достаточно проверить условие 2) для этих двух компонент. Если $\widetilde{X}$ горизонтально, то $r_{a*}\widetilde{X}$ также горизонтально для всех $a \in \mathbb{G}$, что следует из условия 2) в определении связности. Поэтому $(r_a^*\omega)_p(\widetilde{X}) = \omega_{pa}(r_{a*}\widetilde{X})$ и $\mathsf{ad}\,(a^{-1})\omega_p(\widetilde{X})$ одновременно обращаются в нуль. Если $\widetilde{X}$

вертикально, то его значение в точке $p \in \mathbb{P}$ определяется некоторым фундаментальным векторным полем, $\widetilde{X}_p = X^*_p$, для некоторого $X \in \mathfrak{g}$. Тогда из предложения 14.1.1 следует, что векторное поле $r_{a*}X^*$ соответствует элементу алгебры Ли $\mathsf{ad}\,(a^{-1})X \in \mathfrak{g}$. Поэтому

$$(r_a^*\omega)_p(X^*) = \omega_{pa}(r_{a*}X^*) = \mathsf{ad}\,(a^{-1})X = \mathsf{ad}\,(a^{-1})\big(\omega_p(X^*)\big).$$

Обратно. Пусть задана 1-форма ω, удовлетворяющая условиям 1) и 2). Определим распределение горизонтальных подпространств

$$\mathbb{H}_p(\mathbb{P}) := \{\widetilde{X} \in \mathbb{T}_p(\mathbb{P}) : \quad \omega(\widetilde{X}) = 0\} \qquad \forall p \in \mathbb{P}.$$

Теперь нетрудно проверить, что распределение $\Gamma : \; p \mapsto \mathbb{H}_p(\mathbb{P})$ является связностью, для которой ω – форма связности. □

Пусть на главной расслоении $\mathbb{P}(\mathbb{M}, \pi, \mathbb{G})$ задано две связности Γ_1 и Γ_2 с формами связности ω_1 и ω_2 соответственно. Нетрудно проверить, что 1-форма $(1-t)\omega_1 + t\omega_2$, $t \in [0,1]$, также задает некоторую связность на $\mathbb{P}$. Таким образом, любые две связности, заданные на одном главном расслоении, гомотопны.

Пример 14.1.3 (Локальное рассмотрение). Продолжим локальное построение, начатое в примере 14.1.1. У нас есть левоинвариантный базис $\{\partial_\alpha, L^*_{\text{A}}\}$ касательных пространств $\mathbb{T}_p(\mathbb{Q})$ к главному подрасслоению $\mathbb{Q}(\mathbb{U}, \pi, \mathbb{G}) \subset \mathbb{P}(\mathbb{M}, \pi, \mathbb{G})$. Обозначим дуальный к нему базис 1-форм на $\mathbb{Q}$ через $\{dx^\alpha, \omega^{*\text{A}}\}$. Теперь построим форму связности ω на $\mathbb{Q}$. Произвольную 1-форму на $\mathbb{Q}$ со значениями в алгебре Ли $\mathfrak{g}$ можно разложить по этому базису, $\omega = \big(dx^\alpha \omega_\alpha{}^{\text{A}} + \omega^{*\text{B}}\omega_{\text{B}}{}^{\text{A}}\big)L_{\text{A}}$, где $\omega_\alpha{}^{\text{A}}(x,a)$ и $\omega_{\text{B}}{}^{\text{A}}(x,a)$ – некоторые компоненты, зависящие от точки $(x,a) \in \mathbb{Q}$. Свойство 1) предложения 14.1.2 взаимно однозначно определяет компоненту $\omega_{\text{B}}{}^{\text{A}}$,

$$\omega(X^*) = X \quad \Leftrightarrow \quad \omega_{\text{B}}{}^{\text{A}}(x,a) = \delta^{\text{A}}_{\text{B}}.$$

Нетрудно проверить, что 1-форма $\omega^{*\text{A}}L_{\text{A}}$ удовлетворяет свойству 2) предложения 14.1.2. Действительно,

$$r_a^*(\omega^{*\text{A}}L_{\text{A}})(\widetilde{X}) = (\omega^{*\text{A}}L_{\text{A}})(r_{a*}\widetilde{X}) = \widetilde{X}^{\text{B}} S^{-1}{}_{\text{B}}{}^{\text{A}}(a) L_{\text{A}},$$

где мы учли действие дифференциала отображения на векторное поле (14.2). Отсюда следует, что форма $\omega^{*\text{A}}L_{\text{A}}$ действительно удовлетворяет условию 2),

$$r_a^*(\omega^{*\text{A}}L_{\text{A}}) = \omega^{*\text{B}} S^{-1}{}_{\text{B}}{}^{\text{A}}(a) L_{\text{A}}.$$

Проведя аналогичные вычисления, получаем, что 1-форма со значениями в алгебре Ли $dx^\alpha \omega_\alpha{}^{\text{A}} L_{\text{A}}$ удовлетворяет свойству 2) предложения 14.1.2 тогда и только тогда, когда ее компоненты имеют вид

$$\omega_\alpha{}^{\text{A}}(x,b) = \overset{\circ}{A}{}_\alpha{}^{\text{B}}(x) S^{-1}{}_{\text{B}}{}^{\text{A}}(b), \tag{14.4}$$

где $\overset{\circ}{A}{}_\alpha{}^{\text{B}}(x)$ – произвольные функции от $x \in \mathbb{U}$. Таким образом, форма связности на $\mathbb{Q}(\mathbb{U}, \pi, \mathbb{G}) = \mathbb{U} \times \widetilde{\mathbb{G}}$ имеет вид

$$\omega(x,a) = \big[dx^\alpha \omega_\alpha{}^{\text{A}}(x,a) + \omega^{*\text{A}}(a)\big] L_{\text{A}}, \tag{14.5}$$

где компоненты $\omega_\alpha{}^{\text{A}}$ определены равенством (14.4). Мы видим, что форма связности ω на главном расслоении $\mathbb{Q} = \mathbb{U} \times \widetilde{\mathbb{G}}$ параметризуется $n \times \text{N}$ произвольными функциями $\overset{\circ}{A}_\alpha{}^{\text{B}}(x)$ на координатной окрестности $\mathbb{U} \subset \mathbb{M}$. Функции $\overset{\circ}{A}_\alpha{}^{\text{B}}(x)$ определяют компоненты формы связности на *нулевом локальном сечении*

$$\sigma_0 : \quad \mathbb{U} \ni x \mapsto (x, e) \in \mathbb{U} \times \widetilde{\mathbb{G}}. \tag{14.6}$$

Вектор $\widetilde{X}_p = \widetilde{X}^\alpha_p \partial_\alpha + \widetilde{X}^{\text{A}}_p L^*_{\text{A}} \in \mathbb{T}_x(\mathbb{Q})$ горизонтален тогда и только тогда, когда выполнено равенство

$$\omega(\widetilde{X}_p) = \big(\widetilde{X}^\alpha_p \omega_\alpha{}^{\text{A}} + \widetilde{X}^{\text{A}}_p\big) L_{\text{A}} = 0,$$

где $\omega_\alpha{}^{\text{A}}$ имеет вид (14.4). Поэтому его вертикальная и горизонтальная составляющие равны

$$\begin{aligned} \mathsf{v}\widetilde{X}_p &= \Big(\widetilde{X}^{\text{A}}_p + \widetilde{X}^\alpha_p \omega_\alpha{}^{\text{A}}\Big) L^*_{\text{A}}, \\ \mathsf{h}\widetilde{X}_p &= \widetilde{X}^\alpha_p \partial_\alpha - \widetilde{X}^\alpha_p \omega_\alpha{}^{\text{A}} L^*_{\text{A}}. \end{aligned} \tag{14.7}$$

Перемешивание компонент $\widetilde{X}^\alpha_p$ и $\widetilde{X}^{\text{A}}_p$ связано с тем, что векторные поля ∂_α в общем случае не являются горизонтальными. Они горизонтальны тогда и только тогда, когда $\omega_\alpha{}^{\text{A}} = 0 \Leftrightarrow \overset{\circ}{A}_\alpha{}^{\text{A}} = 0$. □

Замечание. Из вида формы связности (14.5) следует, что она совпадает с канонической 1-формой θ на группе Ли (9.24), если база расслоения состоит из одной точки. В этом смысле форма связности ω на главном расслоении $\mathbb{P}$ является обобщением канонической 1-формы θ на группе Ли $\mathbb{G}$. □

Проекции $\pi : \mathbb{P} \to \mathbb{M}$ соответствует дифференциал отображения $\pi_* : \mathbb{T}_p(\mathbb{P}) \to \mathbb{T}_x(\mathbb{M})$, который линейно отображает касательное пространство к главному расслоению в каждой точке $p \in \mathbb{P}$ в касательное пространство к базе в точке $x = \pi(p) \in \mathbb{M}$. Ядром дифференциала проекции π_* является вертикальное подпространство $\mathbb{V}_p(\mathbb{P})$. Действительно, любой вертикальный вектор касается некоторой кривой, целиком лежащей в слое. При проекции вся кривая отображается в одну точку x. Поэтому каждый вертикальный вектор отображается в нулевой вектор из $\mathbb{T}_x(\mathbb{M})$. Поскольку дифференциал проекции – это сюръективный гомоморфизм, то отсюда следует, что отображение горизонтального подпространства $\pi_* : \mathbb{H}_p(\mathbb{P}) \to \mathbb{T}_x(\mathbb{M})$ является изоморфизмом.

Определение. *Горизонтальным лифтом* или *подъемом* (или просто *лифтом*) векторного поля X на базе $\mathbb{M}$ называется единственное векторное поле $\widetilde{X}$ на $\mathbb{P}$, которое горизонтально, $\widetilde{X}_p \in \mathbb{H}_p(\mathbb{P})$, и проектируется на X, т.е. $\pi_*(\widetilde{X}_p) = X_{\pi(p)}$ для всех $p \in \mathbb{P}$. □

Предложение 14.1.3. *Если на главном расслоении $\mathbb{P}(\mathbb{M}, \pi, \mathbb{G})$ задана связность Γ и на базе $\mathbb{M}$ задано векторное поле X, то существует единственный горизонтальный лифт $\widetilde{X}$ векторного поля X. Лифт $\widetilde{X}$ инвариантен относительно действия структурной группы, $r_{a*}\widetilde{X}_p = \widetilde{X}_{pa}$, для всех $a \in \mathbb{G}$. Обратно. Каждое горизонтальное векторное поле $\widetilde{X}$ на $\mathbb{P}$, инвариантное относительно действия структурной группы, является горизонтальным лифтом некоторого векторного поля X на базе $\mathbb{M}$.*

Доказательство. См., например, [**?**]. □

Предложение 14.1.4. *Пусть $\widetilde{X}$ и $\widetilde{Y}$ – горизонтальные лифты соответственно векторных полей X и Y, заданных на базе $\mathbb{M}$. Тогда:*

1) $\widetilde{X}+\widetilde{Y}$ – горизонтальный лифт векторного поля $X+Y$;

2) для каждой функции $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{M})$ произведение $\tilde{f}\widetilde{X}$ есть горизонтальный лифт для $fX \in \mathcal{X}(\mathbb{M})$, где функция $\tilde{f} \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{P})$ определена равенством $\tilde{f} = f \circ \pi$;

3) горизонтальная компонента коммутатора $[\widetilde{X},\widetilde{Y}]$ есть горизонтальный лифт коммутатора $[X,Y]$.

Доказательство. Первые два утверждения очевидны. Доказательство третьего просто,

$$\pi_*(\mathsf{h}[\widetilde{X},\widetilde{Y}]) = \pi_*([\widetilde{X},\widetilde{Y}]) = [X,Y]. \qquad \square$$

Пусть x^α, $\alpha = 1,\dots,\mathsf{dim}\,\mathbb{M}$ – система координат на некоторой окрестности базы $\mathbb{U} \subset \mathbb{M}$. Пусть D_α – горизонтальный лифт векторного поля ∂_α в $\pi^{-1}(\mathbb{U})$ для всех α. Тогда векторные поля $\{D_\alpha\}$ образуют локальный базис распределения $\Gamma:\ p \mapsto \mathbb{H}_p(\mathbb{P})$ в окрестности $\pi^{-1}(\mathbb{U}) \subset \mathbb{P}$.

Пример 14.1.4 (Локальное рассмотрение). Продолжим локальное построение, начатое в примере 14.1.1. Пусть $X(x) = X^\alpha_x \partial_\alpha$ – произвольное векторное поле на базе $\mathbb{M}$. Его горизонтальный лифт в $\mathbb{Q}$ имеет вид

$$\widetilde{X}_p = X^\alpha_x \partial_\alpha - X^\alpha_x \omega_\alpha{}^{\mathrm{A}} L^*_{\mathrm{A}}, \qquad x = \pi(p),$$

для всех $p \in \mathbb{Q}$. Вблизи единицы группы второе слагаемое имеет вид

$$X^\alpha_x \overset{\circ}{A}_\alpha{}^{\mathrm{A}} S^{-1}{}_{\mathrm{A}}{}^{\mathrm{B}} L^*_{\mathrm{B}} = X^\alpha_x \overset{\circ}{A}_\alpha{}^{\mathrm{A}} R^*_{\mathrm{A}},$$

где R^*_{A} правоинвариантные векторные поля на группе Ли $\widetilde{\mathbb{G}}$ и мы воспользовались выражением матрицы присоединенного представления через производные от функции композиции (9.34). Отсюда сразу следует, что горизонтальное векторное поле $\widetilde{X}$ инвариантно относительно действия структурной группы справа. Утверждения предложения 14.1.2 становятся тривиальными.

В частности, горизонтальный лифт координатного базиса ∂_α на $\mathbb{M}$ имеет вид

$$D_\alpha = \partial_\alpha - \omega_\alpha{}^{\mathrm{A}}(p) L^*_{\mathrm{A}} = \partial_\alpha - \overset{\circ}{A}_\alpha{}^{\mathrm{B}}(x) S^{-1}{}_{\mathrm{B}}{}^{\mathrm{A}}(a) L^*_{\mathrm{A}}$$

для всех точек $p = (x,a) \in \mathbb{P}$. $\square$

Теперь спустимся на базу и определим форму связности на $\mathbb{P}$ через семейство 1-форм на $\mathbb{M}$. Пусть $\mathbb{P}(\mathbb{M},\pi,\mathbb{G})$ – главное расслоение с формой связности ω. Пусть $\mathbb{U} \subset \mathbb{M}$ – некоторая координатная окрестность базы, на которой задано локальное сечение $\sigma:\ \mathbb{U} \to \mathbb{P}$. Тогда форма связности ω определяет на $\mathbb{U}$ 1-форму с помощью возврата отображения σ^*.

Определение. 1-форма $\omega_\sigma = \sigma^*\omega$ со значениями в алгебре Ли $\mathfrak{g}$ структурной группы, $\omega_\sigma = \omega^{\mathrm{A}}_\sigma L_{\mathrm{A}}$, $\omega^{\mathrm{A}}_\sigma \in \Lambda_1(\mathbb{U})$ называется *локальной формой связности* на $\mathbb{U} \subset \mathbb{M}$. В компонентах она имеет вид

$$\omega_\sigma = dx^\alpha A_\alpha{}^{\mathrm{A}} L_{\mathrm{A}}, \tag{14.8}$$

где $A_\alpha{}^{\mathrm{A}}(x)$ – некоторые функции на $\mathbb{U}$. $\square$

Напомним, что, по определению, $\omega_\sigma(X) = \omega(\sigma_* X)$ для всех векторных полей на базе $X \in \mathcal{X}(\mathbb{M})$, где σ^* и σ_* – возврат и дифференциал локального сечения.

Каждая форма связности ω на $\mathbb{P}$ однозначно определяет локальную форму связности ω_σ на $\mathbb{U} \subset \mathbb{M}$. Обратное, конечно, неверно, т.к. локальная форма связности ω_σ определена только на окрестности $\mathbb{U}$ и, вдобавок, зависит от сечения σ.

Пример 14.1.5 (Локальное рассмотрение). Рассмотрим зависимость локальной формы связности от сечения. Пусть на главном расслоении $\mathbb{Q} = \mathbb{U} \times \widetilde{\mathbb{G}}$ задано два произвольных сечения σ и σ'. Поскольку две точки одного слоя связаны некоторым групповым преобразованием, то σ' можно выразить через первое сечение, $\sigma'(x) = \sigma(x)a(x)$, где $a(x)$ – некоторая функция $\mathbb{U} \to \mathbb{G}$. Таким образом

$$\sigma :\ x \mapsto \big(x, b(x)\big) \quad \text{и} \quad \sigma' :\ x \mapsto \big(x, b(x)a(x)\big). \tag{14.9}$$

Рассмотрим случай, когда все элементы структурной группы Ли $\mathbb{G}$ находятся в окрестности единицы группы, соответствующей локальной группе Ли (см. раздел 9.1). То есть каждый элемент группы имеет координаты, $a = \{a^{\mathrm{A}}\} \in \mathbb{G}$, $\mathrm{A} = 1, \dots, \mathrm{N}$, и задана функция композиции $ba = f = \{f^{\mathrm{A}}(b, a)\}$. Тогда действие дифференциалов сечений на векторное поле $X = X^\alpha \partial_\alpha \in \mathcal{X}(\mathbb{M})$ имеет вид

$$\begin{aligned}
\sigma_* X &= X^\alpha \partial_\alpha + X^\alpha \partial_\alpha b^{\mathrm{A}} \partial_{\mathrm{A}} = X^\alpha \partial_\alpha + X^\alpha \partial_\alpha b^{\mathrm{A}} L^{-1}{}_{\mathrm{A}}{}^{\mathrm{B}}(b) L^*_{\mathrm{B}}(b), \\
\sigma'_* X &= X^\alpha \partial_\alpha + X^\alpha \partial_\alpha f^{\mathrm{A}} \partial_{\mathrm{A}} = X^\alpha \partial_\alpha + X^\alpha \partial_\alpha f^{\mathrm{A}} L^{-1}{}_{\mathrm{A}}{}^{\mathrm{B}}(f) L^*_{\mathrm{B}}(f),
\end{aligned}$$

где использован явный вид формы связности (14.5). Локальные формы связности ω_σ и $\omega_{\sigma'}$ являются 1-формами на $\mathbb{U}$ со значениями в алгебре Ли $\mathfrak{g}$. Поэтому они представимы в виде

$$\begin{aligned}
\omega_\sigma &= dx^\alpha A_\alpha{}^{\mathrm{A}}(x) L_{\mathrm{A}}, \\
\omega_{\sigma'} &= dx^\alpha A'_\alpha{}^{\mathrm{A}}(x) L_{\mathrm{A}},
\end{aligned} \tag{14.10}$$

где $A_\alpha{}^{\mathrm{A}}(x)$ и $A'_\alpha{}^{\mathrm{A}}(x)$ – компоненты этих форм (некоторые дифференцируемые функции от $x \in \mathbb{U}$). С другой стороны, по определению,

$$\begin{aligned}
\omega_\sigma(X) = \omega(\sigma_* X) &= X^\alpha \left[\overset{\circ}{A}_\alpha{}^{\mathrm{B}} S^{-1}{}_{\mathrm{B}}{}^{\mathrm{A}}(b) + \partial_\alpha b^{\mathrm{B}} L^{-1}{}_{\mathrm{B}}{}^{\mathrm{A}}(b) \right] L_{\mathrm{A}}, \\
\omega_{\sigma'}(X) = \omega(\sigma'_* X) &= X^\alpha \left[\overset{\circ}{A}_\alpha{}^{\mathrm{B}} S^{-1}{}_{\mathrm{B}}{}^{\mathrm{A}}(f) + \partial_\alpha f^{\mathrm{B}} L^{-1}{}_{\mathrm{B}}{}^{\mathrm{A}}(f) \right] L_{\mathrm{A}}.
\end{aligned} \tag{14.11}$$

Рассмотрим нулевое сечение $\sigma_0 = (x, e)$, где e – единица группы. Тогда

$$\omega_0 = dx^\alpha \overset{\circ}{A}_\alpha{}^{\mathrm{A}} L_{\mathrm{A}}.$$

То есть функции $\overset{\circ}{A}_\alpha{}^{\mathrm{A}}(x)$, параметризующие форму связности в (14.5), представляют собой компоненты локальной формы связности для нулевого сечения. Тогда компоненты локальной формы связности ω_σ связаны с компонентами локальной формы связности для нулевого сечения простым соотношением

$$A_\alpha{}^{\mathrm{A}} = \overset{\circ}{A}_\alpha{}^{\mathrm{B}} S^{-1}{}_{\mathrm{B}}{}^{\mathrm{A}}(b) + \partial_\alpha b^{\mathrm{B}} L^{-1}{}_{\mathrm{B}}{}^{\mathrm{A}}(b). \tag{14.12}$$

Сравнивая формулы (14.11), получим связь между компонентами локальных форм связности,

$$A'_\alpha{}^{\mathrm{A}} = A_\alpha{}^{\mathrm{B}} S^{-1}{}_{\mathrm{B}}{}^{\mathrm{A}}(a) + \partial_\alpha f^{\mathrm{B}} L^{-1}{}_{\mathrm{B}}{}^{\mathrm{A}}(f) - \partial_\alpha b^{\mathrm{B}} L^{-1}{}_{\mathrm{B}}{}^{\mathrm{C}}(b) S^{-1}{}_{\mathrm{C}}{}^{\mathrm{A}}(a), \tag{14.13}$$

где функция $a(x)$ связывает данные сечения $\sigma' = \sigma a = (x, f = ba)$.

Полученная связь компонент двух локальных форм связности (15.47), заданных на одной окрестности базы $\mathbb{U} \subset \mathbb{M}$ неудобна в приложениях, т.к. содержит координатные функции $a^{\mathrm{A}}(x)$, $b^{\mathrm{A}}(x)$, f^{A}, которые в явном виде можно задать в исключительно редких случаях. Чтобы обойти эту трудность выберем присоединенное представление алгебры Ли $\mathsf{ad}\,(\mathfrak{g})$. То есть вместо локальных 1-форм ω_σ со значениями в алгебре Ли $\mathfrak{g}$ будем рассматривать 1-формы связности со значениями в присоединенном представлении алгебры Ли $\mathsf{ad}\,(\mathfrak{g})$. Этому соответствует переход к матрицам

$$A_\alpha{}^{\mathrm{A}} \mapsto A_{\alpha\mathrm{B}}{}^{\mathrm{C}} := -A_\alpha{}^{\mathrm{A}} f_{\mathrm{AB}}{}^{\mathrm{C}},$$

где $f_{\mathrm{AB}}{}^{\mathrm{C}}$ – структурные константы группы Ли $\mathbb{G}$. Компоненты локальной формы связности в присоединенном представлении мы будем обозначать $A_\alpha = \{A_{\alpha\mathrm{B}}{}^{\mathrm{C}}\}$, опуская для краткости матричные индексы. Продифференцируем матрицу присоединенного представления $S_{\mathrm{A}}{}^{\mathrm{B}}(b)$,

$$\partial_\alpha S_{\mathrm{A}}{}^{\mathrm{B}} = \partial_\alpha b^{\mathrm{C}} \partial_{\mathrm{C}} S_{\mathrm{A}}{}^{\mathrm{B}} = \partial_\alpha b^{\mathrm{C}} L^{-1}{}_{\mathrm{C}}{}^{\mathrm{D}} f_{\mathrm{DA}}{}^{\mathrm{E}} S_{\mathrm{E}}{}^{\mathrm{B}},$$

где мы воспользовались формулой дифференцирования (9.38). Умножив это равенство справа на S^{-1}, получим

$$\partial_\alpha S_{\mathrm{A}}{}^{\mathrm{B}} S^{-1}{}_{\mathrm{B}}{}^{\mathrm{C}} = \partial_\alpha b^{\mathrm{B}} L^{-1}{}_{\mathrm{B}}{}^{\mathrm{D}} f_{\mathrm{DA}}{}^{\mathrm{C}}.$$

Тогда для компонент локальной формы связности (14.12) со значениями в присоединенном представлении алгебры Ли имеем

$$A_\alpha = S \overset{\circ}{A}_\alpha S^{-1} + \partial_\alpha S S^{-1}, \tag{14.14}$$

где мы опустили матричные индексы. Отсюда следует правило преобразования компонент локальной формы связности при переходе от одного сечения $\sigma :\ \big(x, b(x)\big)$ к другому $\sigma' :\ \big(x, b(x)a(x)\big)$,

$$A'_\alpha = S A_\alpha S^{-1} + \partial_\alpha S S^{-1}, \tag{14.15}$$

где $S = \{S_{\mathrm{A}}{}^{\mathrm{B}}(a)\}$ – матрица присоединенного представления. Это есть ни что иное, как хорошо известная формула калибровочного преобразования полей Янга–Миллса. Эта формула имеет явные преимущества по сравнению с (15.47), т.к. позволяет проводить вычисления с матрицами присоединенного представления, элементы которых зависят от точки базы $x \in \mathbb{M}$.

Вместо присоединенного можно рассматривать произвольное представление алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Если $L_{\mathrm{A}i}{}^j$ – матрицы, соответствующие левоинвариантным векторным полям L_{A}, и $A_{\alpha i}{}^j = A_\alpha{}^{\mathrm{A}} L_{\mathrm{A}i}{}^j$ – компоненты локальной формы связности в данном представлении, то формулы преобразования компонент при переходе между сечениями (14.15) сохраняются, если под S понимать матрицу соответствующего преобразования, $S = \{S_i{}^j(a)\}$. □

Функции $a(x)$ можно рассматривать как функции, задающие вертикальный автоморфизм главного расслоения $\mathbb{Q} = \mathbb{U} \times \widetilde{\mathbb{G}}$ (см. пример 13.3.1). Тогда формула (14.15) задает преобразование компонент локальной формы связности при вертикальном автоморфизме.

Отображение $\mathbb{U} \ni x \mapsto S_{\mathrm{A}}{}^{\mathrm{B}}(x) \in \mathsf{ad}\,(\mathfrak{g})$ сопоставляет каждой точке базы матрицу присоединенного представления структурной группы. В формуле (14.15) каждое

слагаемое определяет 1-форму на $\mathbb{U}$ и не зависит явно от функции композиции. Поэтому, несмотря на то, что формулы преобразования компонент локальной формы связности были получены в окрестности единицы группы, они справедливы для произвольных локальных сечений на $\mathbb{U} \subset \mathbb{M}$.

Чтобы установить связь рассмотренной конструкции с понятиями, которые широко используются в математической физике, дадим

Определение. *Калибровочным полем* или *полем Янга–Миллса* ${A_\alpha}^{\text{A}}(x)$ на координатной окрестности $\mathbb{U} \subset \mathbb{M}$ называются компоненты локальной формы связности (14.8). *Калибровочным преобразованием* называется переход между двумя локальными сечениями σ и σ' на $\mathbb{U}$ или, что эквивалентно, преобразование компонент локальной формы связности при вертикальном автоморфизме. Структурная группа $\mathbb{G}$ называется *калибровочной* группой. В электродинамике структурной группой является абелева группа $\mathbb{U}(1)$, а компоненты локальной формы связности $A_\alpha(x)$ на $\mathbb{U}$ называются *электромагнитным потенциалом*. □

Замечание. Форма связности ω на $\mathbb{P}$ определена инвариантным образом и ее компоненты ${\omega_\alpha}^{\text{A}}(p)$ в (14.5) являются тензорными полями на пространстве главного расслоения $\mathbb{P}$. Важное неоднородное слагаемое в калибровочном преобразовании (14.15) для компонент локальной формы связности ${A_\alpha}^{\text{A}}(x)$ возникает только при переходе к локальным сечениям. □

Как уже было отмечено, локальная форма связности ω_σ не определяет форму связности ω и, следовательно, связность Γ на главном расслоении $\mathbb{P}(\mathbb{M}, \pi, \mathbb{G})$. Однако, если задано координатное покрытие базы $\mathbb{M}$ и семейство локальных форм на каждой координатной окрестности, то это семейство однозначно определяет связность на $\mathbb{P}$. Опишем соответствующую конструкцию. Пусть задано координатное покрытие базы, $\mathbb{M} = \bigcup_i \mathbb{U}_i$, семейство изоморфизмов

$$\chi_i : \quad \pi^{-1}(\mathbb{U}_i) \to \mathbb{U}_i \times \mathbb{G}$$

и соответствующие функции перехода

$$a_{ji} : \quad \mathbb{U}_i \cap \mathbb{U}_j \to \mathbb{G}.$$

Это необходимо для однозначного определения главного расслоения в терминах функций перехода (теорема 13.1.1). На каждой окрестности $\mathbb{U}_i$ выберем сечение $\sigma_i : \mathbb{U}_i \to \mathbb{P}$, которое соответствует единичному элементу группы $e \in \mathbb{G}$, положив $\sigma_i(x) = \chi_i^{-1}(x, e)$. Пусть θ – (левоинвариантная $\mathfrak{g}$-значная) каноническая 1-форма на $\mathbb{G}$, которая определена в разделе 9.2.

Для каждого непустого пересечения $\mathbb{U}_i \cap \mathbb{U}_j$ определим $\mathfrak{g}$-значную 1-форму на $\mathbb{U}_i \cap \mathbb{U}_j$ с помощью возврата отображения a_{ji},

$$\theta_{ji} = a_{ji}^* \theta. \tag{14.16}$$

Для каждой окрестности $\mathbb{U}_i$ определим локальную форму связности на $\mathbb{U}_i$ с помощью возврата сечения σ_i,

$$\omega_i = \sigma_i^* \omega,$$

где ω – форма связности на $\mathbb{P}$. Тогда справедлива

Теорема 14.1.1. *Формы θ_{ji} и ω_i удовлетворяют условиям:*

$$\omega_j = \mathsf{ad}\,(a_{ji}^{-1})\omega_i + \theta_{ji}, \qquad \text{на} \;\; \mathbb{U}_i \cap \mathbb{U}_j. \tag{14.17}$$

Обратно. Для каждого семейства локальных форм связности $\{\omega_i\}$, заданных на координатном покрытии $\mathbb{M} = \bigcup_i \mathbb{U}_i$ и удовлетворяющих условиям (14.17) во всех пересечениях карт, существует единственная форма связности ω на $\mathbb{P}$, которая порождает семейство 1-форм $\{\omega_i\}$ вышеописанным образом.

Доказательство. См., например, [**?**]. □

Пример 14.1.6 (Локальное рассмотрение). Продолжим локальное рассмотрение, чтобы прояснить содержание последнего утверждения. Допустим, что мы находимся в окрестности единицы структурной группы. Тогда каноническая форма на группе Ли имеет вид $\theta = da^{\text{в}} L^{-1}{}_{\text{в}}{}^{\text{а}} L_{\text{а}}$, где $L_{\text{а}}$ – левоинвариантный базис алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Пусть в пересекающихся картах $\mathbb{U}_i$ и $\mathbb{U}_j$ заданы координаты x^α и $x^{\alpha'}$ соответственно. Пусть

$$X = X^\alpha \partial_\alpha = X^{\alpha'} \partial_{\alpha'} \in \mathcal{X}(\mathbb{U}_i \cap \mathbb{U}_j)$$

– касательный вектор к базе на пересечении окрестностей. Тогда дифференциал функций перехода отображает этот вектор в касательное пространство группы

$$a_{ji*} X = X^\alpha \partial_\alpha a_{ij}^{\text{а}} \partial_{\text{а}} = X^\alpha \partial_\alpha a_{ji}^{\text{в}} L^{-1}{}_{\text{в}}{}^{\text{а}} L_{\text{а}}.$$

Такая же формула имеет место в штрихованной системе координат. Поэтому $\mathfrak{g}$-значная 1-форма (14.16) имеет вид

$$\theta_{ji} = dx^\alpha \partial_\alpha a_{ji}^{\text{в}} L^{-1}{}_{\text{в}}{}^{\text{а}}(a_{ji}) L_{\text{а}} = dx^{\alpha'} \partial_{\alpha'} a_{ji}^{\text{в}} L^{-1}{}_{\text{в}}{}^{\text{а}}(a_{ji}) L_{\text{а}}.$$

Пусть

$$\omega_i = dx^\alpha A_\alpha{}^{\text{а}} L_{\text{а}} \quad \text{и} \quad \omega_j = dx^{\alpha'} A_{\alpha'}{}^{\text{а}} L_{\text{а}}$$

– локальные формы связности соответственно на $\mathbb{U}_i$ и $\mathbb{U}_j$. Тогда формула (14.17) дает

$$A_{\alpha'}{}^{\text{а}} = \partial_{\alpha'} x^\alpha \left[A_\alpha{}^{\text{в}} S^{-1}{}_{\text{в}}{}^{\text{а}}(a_{ji}) + \partial_\alpha a_{ji}^{\text{в}} L^{-1}{}_{\text{в}}{}^{\text{а}}(a_{ji}) \right]. \tag{14.18}$$

Это преобразование калибровочного поля отличается от описанного ранее (14.12) только множителем $\partial_{\alpha'} x^\alpha$, соответствующим преобразованию координат в пересечении $\mathbb{U}_i \cap \mathbb{U}_j$. □

Таким образом, для того, чтобы описать связность Γ на главном расслоении $\mathbb{P}(\mathbb{M}, \pi, \mathbb{G})$ в локальных терминах, необходимо задать координатное покрытие базы $\mathbb{M} = \bigcup_i \mathbb{U}_i$, функции перехода $a_{ji}(x)$ в каждом непустом пересечении $\mathbb{U}_i \cap \mathbb{U}_j$, которые удовлетворяют условию (13.10) в областях пересечения трех карт, и семейство калибровочных полей, заданных на каждой координатной окрестности, такое, что в областях пересечения выполнено условие (14.18).

Замечание. В квантовой теории поля обычно рассматривают тривиальные главные расслоения $\mathbb{P} = \mathbb{R}^{1,3} \times \mathbb{G}$, где $\mathbb{R}^{1,3}$ – четырехмерное пространство Минковского и $\mathbb{G}$ – калибровочная группа. В этом частном случае локальная форма связности $dx^\alpha A_\alpha{}^{\text{а}} L_{\text{а}}$, заданная на всем пространстве-времени $\mathbb{R}^{1,3}$, взаимно однозначно определяет форму связности ω и, следовательно, связность Γ на $\mathbb{P}$. □

В заключение данного раздела обсудим вопрос о существовании связностей. Пусть $\mathbb{P}(\mathbb{M},\pi,\mathbb{G})$ – главное расслоение и $\mathbb{N}\subset\mathbb{M}$ – некоторое подмножество базы. Мы говорим, что связность определена над $\mathbb{N}$, если в каждой точке $p\in\pi^{-1}(\mathbb{N})\subset\mathbb{P}$ из прообраза $\mathbb{N}$ определено горизонтальное подпространство $\mathbb{H}_p(\mathbb{P})$ таким образом, что выполнены первые два условия (прямая сумма и инвариантность относительно действия структурной группы) в определении связности и распределение $\mathbb{H}_p(\mathbb{P})$ дифференцируемо зависит от точки p в следующем смысле. Для каждой точки $x\in\mathbb{N}$ существует окрестность $\mathbb{U}\ni x$ и связность на $\pi^{-1}(\mathbb{U})$ такая, что ее сужение на $\pi^{-1}(x)$ совпадает с $\mathbb{H}_p(\mathbb{P})$ для всех точек слоя $p\in\pi^{-1}(x)$.

Теорема 14.1.2. *Пусть $\mathbb{P}(\mathbb{M},\pi,\mathbb{G})$ – главное расслоение и $\mathbb{N}$ – замкнутое подмножество (возможно, пустое) в базе $\mathbb{M}$. Любая связность, определенная над $\mathbb{N}$ может быть продолжена до связности на всем $\mathbb{P}$. В частности, любое главное расслоение $\mathbb{P}$ допускает связность.*

Доказательство. Доказательство проводится путем явного построения связности. При этом существенно используется паракомпактность многообразия. См., например, [**?**]. □

Пример 14.1.7. Рассмотрим главное расслоение $\mathbb{P}(\mathbb{M},\pi,e)$, структурная группа которого состоит из единственного элемента – единицы. Тогда на нем существует единственная связность. В этом случае вертикальные касательные пространства отсутствуют, а распределение горизонтальных пространств совпадает с касательным расслоением $\mathbb{T}(\mathbb{M})$. Форма связности и форма кривизны при этом тождественно равны нулю. □

Продолжение связности не является единственным.

Пример 14.1.8. Рассмотрим расслоение реперов $\mathbb{L}(\mathbb{R}^n)$ над евклидовым пространством $\mathbb{R}^n$. Поскольку $\mathbb{R}^n$ покрывается одной картой, то форма связности $\omega=dx^\alpha\omega_{\alpha a}{}^b\boldsymbol{e}_b{}^a$, где $\boldsymbol{e}_b{}^a$ – базис алгебры Ли $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$, взаимно однозначно определятся своими компонентами $\omega_{\alpha a}{}^b$ на $\mathbb{L}$. Чтобы их задать, достаточно задать компоненты локальной формы связности на каком либо сечении, а затем разнести их по всему пространству расслоения с помощью действия структурной группы. Если компоненты локальной формы связности $\omega_{\alpha a}{}^b(x)$ заданы на замкнутом подмножестве $\mathbb{N}\subset\mathbb{R}^n$ дифференцируемым образом, то их можно дифференцируемо продолжить на все евклидово пространство $\mathbb{R}^n$ многими способами. Тем самым мы определим связность на всем $\mathbb{L}(\mathbb{R}^n)$. □

14.2 Форма кривизны и структурное уравнение

Пусть задано главное расслоение $\mathbb{P}(\mathbb{M},\pi,\mathbb{G})$ со связностью $\Gamma:\ \mathbb{P}\ni p\mapsto\mathbb{H}_p\subset\mathbb{T}_p(\mathbb{P})$. Каждая связность Γ на $\mathbb{P}$ взаимно однозначно определяет $\mathfrak{g}$-значную 1-форму связности $\omega=\omega^{\mathrm{A}}L_{\mathrm{A}}$, где $\omega^{\mathrm{A}}\in\Lambda_1(\mathbb{P})$ для всех $\mathrm{A}=1,\ldots,\mathrm{N}$, которой мы поставим в соответствие единственную 2-форму кривизны $R=R^{\mathrm{A}}L_{\mathrm{A}}$, где $R^{\mathrm{A}}\in\Lambda_2(\mathbb{P})$ для всех A, со значениями в алгебре Ли $\mathfrak{g}$. Форма кривизны R является важнейшей характеристикой заданной связности Γ. Для ее определения нам понадобятся новые понятия.

Пусть задано представление ρ структурной группы Ли $\mathbb{G}$ в конечномерном векторном пространстве $\mathbb{V}$,

$$\rho:\ \ \mathbb{G}\ni a\mapsto\rho(a)\in\mathsf{aut}\,(\mathbb{V}).$$

При этом $\rho(ab)=\rho(a)\circ\rho(b)$ для всех $a,b\in\mathbb{G}$.

Определение. r-форма $\varphi \in \Lambda_r(\mathbb{P})$ на главном расслоении $\mathbb{P}$ со значениями в векторном пространстве $\mathbb{V}$ называется *псевдотензориальной r-формой типа* $(\rho, \mathbb{V})$, если выполнено условие

$$r_a^*\varphi|_p = \rho(a^{-1})\varphi|_{pa} \quad \forall a \in \mathbb{G},\ p \in \mathbb{P},$$

где r_a^* – возврат отображения $r_a:\ p \mapsto pa$. Псевдотензориальная r-форма φ называется *тензориальной* r-формой типа $(\rho, \mathbb{V})$, если она *горизонтальна*, т.е. $\varphi(\widetilde{X}_1, \ldots, \widetilde{X}_r) = 0$, как только один из касательных векторов $\widetilde{X}_i \in \mathcal{X}(\mathbb{P})$ вертикален. Под тензориальной 0-формой типа $(\rho, \mathbb{V})$ мы понимаем функцию $\varphi:\ \mathbb{P} \to \mathbb{V}$, удовлетворяющую условию $\varphi(p) = \rho(a^{-1})\varphi(pa)$ или, что эквивалентно, $\varphi(pa) = \rho(a)\varphi(p)$. □

Пример 14.2.1. В силу свойства 2) предложения 14.1.2 форма связности ω является псевдотензориальной 1-формой типа $(\mathsf{ad}, \mathfrak{g})$. Она не является тензориальной, т.к. не обращается в нуль на вертикальных векторных полях. Для краткости, будем говорить, что форма типа $(\mathsf{ad}, \mathfrak{g})$ является формой типа $\mathsf{ad}\,\mathbb{G}$. □

Пример 14.2.2. Пусть ρ_0 – тривиальное представление группы $\mathbb{G}$ в $\mathbb{V}$, т.е. $\rho_0(a)$ есть тождественное преобразование $\mathbb{V}$ для всех $a \in \mathbb{G}$. Тогда каждая тензориальная r-форма φ типа $(\rho_0, \mathbb{V})$ может быть взаимно однозначно представлена в виде $\varphi = \pi^*\varphi_{\mathbb{M}}$, где $\varphi_{\mathbb{M}}$ некоторая r-форма на базе $\mathbb{M}$ со значениями в $\mathbb{V}$. Для этого достаточно показать, что тензориальная форма φ однозначно определяет форму на базе $\varphi_{\mathbb{M}}$. Поскольку r-форма φ горизонтальна, то ее значения на произвольном наборе касательных векторных полей определяются только горизонтальными компонентами,

$$\varphi(\widetilde{X}_1, \ldots, \widetilde{X}_r) = \varphi(\mathsf{h}\widetilde{X}_1, \ldots, \mathsf{h}\widetilde{X}_r).$$

Так как r-форма φ правоинвариантна, то ее значения на правоинвариантных векторных полях не зависят от точки слоя $p \in \pi^{-1}(x)$. Поэтому r-форма φ взаимно однозначно определяет r-форму $\varphi_{\mathbb{M}}$ на базе следующим равенством

$$\varphi_{\mathbb{M}}(X_1, \ldots, X_r) = \varphi(\widetilde{X}_1, \ldots, \widetilde{X}_r),$$

где $\widetilde{X}_1, \ldots, \widetilde{X}_r$ – произвольный набор правоинвариантных векторных полей таких, что $X_i = \pi_*\widetilde{X}_i$ для всех $i = 1, \ldots, r$. □

Пример 14.2.3. Пусть $\mathbb{E}(\mathbb{M}, \pi_{\mathbb{E}}, \mathbb{V}, \mathbb{G}, \mathbb{P})$ – ассоциированное с $\mathbb{P}(\mathbb{M}, \pi, \mathbb{G})$ расслоение, типичным слоем которого является векторное пространство $\mathbb{V}$, в котором задано представление ρ структурной группы $\mathbb{G}$. Тогда тензориальную r-форму φ типа $(\rho, \mathbb{V})$ можно рассматривать как сопоставление каждой точке $x \in \mathbb{M}$ мультилинейного антисимметричного отображения

$$\tilde{\varphi}_x:\ \underbrace{\mathbb{T}_x(\mathbb{M}) \times \ldots \times \mathbb{T}_x}_{r} \to \pi_{\mathbb{E}}^{-1}(x) \tag{14.19}$$

с помощью равенства

$$\tilde{\varphi}_x(X_1, \ldots, X_r) = p\big(\varphi(\widetilde{X}_1, \ldots, \widetilde{X}_r)\big), \quad X_i \in \mathbb{T}_x(\mathbb{M}),$$

где p – любая точка слоя $\pi^{-1}(x)$ и $\widetilde{X}_i$ – произвольный касательный вектор в p, для которого $\pi_*\widetilde{X}_i = X_i$ для каждого i. Подробнее, $\varphi(\widetilde{X}_1, \ldots, \widetilde{X}_r)$ есть тогда элемент стандартного слоя $\mathbb{V}$, а p – линейное отображение из $\mathbb{V}$ на слой $\pi_{\mathbb{E}}^{-1}(x)$. Поэтому

$p\big(\varphi(\widetilde{X}_1,\dots,\widetilde{X}_r)\big)$ является элементом слоя $\pi_{\mathbb{E}}^{-1}(x)$. Нетрудно проверить, что этот элемент не зависит от выбора точки p и вектора $\widetilde{X}_i$ в слое $\pi^{-1}(x)$.

Обратно. Пусть задано мультилинейное антисимметричное отображение (14.19) для всех $x\in\mathbb{M}$. Тогда можно определить тензориальную r-форму типа $(\rho,\mathbb{V})$ на $\mathbb{P}$ следующим образом

$$\varphi(\widetilde{X}_1,\dots,\widetilde{X}_r)=p^{-1}\big(\tilde{\varphi}_x(\pi_*\widetilde{X}_1,\dots,\pi_*\widetilde{X}_r)\big),\qquad \widetilde{X}_i\in\mathbb{T}_p(\mathbb{P}),$$

где $x=\pi(p)$. В частности, тензориальная 0-форма типа $(\rho,\mathbb{V})$, т.е. функция $\varphi:\ \mathbb{P}\to\mathbb{V}$, удовлетворяющая условию $\varphi(pa)=\rho(a)\varphi(p)$, может быть отождествлена с сечением ассоциированного расслоения $\sigma_{\mathbb{E}}:\ \mathbb{M}\to\mathbb{E}$. Несколько специальных случаев данного примера будет использовано в дальнейшем. □

Продолжим обсуждение связности Γ на главном расслоении $\mathbb{P}(\mathbb{M},\pi,\mathbb{G})$. Пусть $\mathbb{V}_p(\mathbb{P})$ и $\mathbb{H}_p(\mathbb{P})$ – вертикальное и горизонтальное подпространства в $\mathbb{T}_p(\mathbb{P})$ и $\mathsf{h}:\ \mathbb{T}_p(\mathbb{P})\to\mathbb{H}_p(\mathbb{P})$ – проекция на горизонтальное подпространство. Введем новое понятие внешней ковариантной производной от псевдотензориальной r-формы, с помощью которой будет определена кривизна.

Предложение 14.2.1. *Пусть φ – псевдотензориальная r-форма на $\mathbb{P}$ типа $(\rho,\mathbb{V})$. Тогда:*

1) r-форма $\varphi\mathsf{h}$, определенная равенством

$$\varphi\mathsf{h}(\widetilde{X}_1,\dots,\widetilde{X}_r)=\varphi(\mathsf{h}\widetilde{X}_1,\dots,\mathsf{h}\widetilde{X}_r),\qquad \widetilde{X}_i\in\mathbb{T}_p(\mathbb{P}),\quad i=1,\dots,r,$$

есть тензориальная форма типа $(\rho,\mathbb{V})$;

2) $d\varphi$ есть псевдотензориальная $(r+1)$-форма типа $(\rho,\mathbb{V})$;

3) $(r+1)$-форма $D\varphi$, определенная как $D\varphi=(d\varphi)\mathsf{h}$, является тензориальной формой типа $(\rho,\mathbb{V})$.

Доказательство. Распределение горизонтальных векторных полей инвариантно относительно действия структурной группы, поэтому $r_a\circ\mathsf{h}=\mathsf{h}\circ r_a$. Отсюда следует, что $\varphi\mathsf{h}$ является псевдотензориальной r-формой типа $(\rho,\mathbb{V})$. Очевидно, что

$$\varphi\mathsf{h}(\widetilde{X}_1,\dots,\widetilde{X}_r)=0,$$

если один из касательных векторов $\widetilde{X}_i$ вертикален, и, следовательно, форма $\varphi\mathsf{h}$ горизонтальна. Второе утверждение следует из равенства $r_a^*\circ d=d\circ r_a^*$ для всех $a\in\mathbb{G}$ (4.44). Третье утверждение является прямым следствием двух первых. □

Определение. Форма $D\varphi=(d\varphi)\mathsf{h}$ называется *внешней ковариантной производной* от псевдотензориальной r-формы φ на $\mathbb{P}$. Оператор D называется *внешним ковариантным дифференцированием.* □

Пример 14.2.4 (Локальное рассмотрение). Выпишем ковариантную производную от тензориальной 0-формы на $\mathbb{Q}=\mathbb{U}\times\widetilde{\mathbb{G}}$ типа $(\rho,\mathbb{V})$ в компонентах. Пусть $\boldsymbol{e}_i$, $i=1,\dots,\mathsf{dim}\,\mathbb{V}$, – базис векторного пространства $\mathbb{V}$ и

$$\rho:\quad \mathbb{G}\ni a\mapsto S_i{}^j(a)\in\mathsf{aut}\,\mathbb{V}$$

– представление структурной группы. Пусть $L_{\mathrm{A}j}{}^i$ – представление генераторов (базиса) L_{A} структурной группы. Тогда справедливы формулы (9.62) и (9.63). Поскольку φ – тензориальная 0-форма типа $(\rho,\mathbb{V})$, то она имеет вид

$$\varphi(p)=\varphi^i(p)\boldsymbol{e}_i=\overset{\circ}{\varphi}{}^j(x)S^{-1}{}_j{}^i(b)\boldsymbol{e}_i,\qquad p=(x,b)\in\mathbb{Q},$$

где $\mathring{\varphi}(x,0)=\mathring{\varphi}^i(x)\boldsymbol{e}_i$ – значение этой функции на нулевом сечении $\sigma_0(x)=(x,0)\in\mathbb{P}$. Внешний дифференциал от компонент φ^i равен

$$d\varphi^i = dx^\alpha\partial_\alpha\mathring{\varphi}^j S^{-1}{}_j^i + db^{\text{A}}\mathring{\varphi}^j\partial_{\text{A}}S^{-1}{}_j^i = dx^\alpha\partial_\alpha\mathring{\varphi}^j S^{-1}{}_j^i + \omega^{*\text{A}}\mathring{\varphi}^j L^*_{\text{A}}S^{-1}{}_j^i = \\ = dx^\alpha\partial_\alpha\mathring{\varphi}^j S^{-1}{}_j^i + \omega^{*\text{A}}\mathring{\varphi}^j S^{-1}{}_j^k L_{\text{A}k}{}^i.$$

Поскольку горизонтальная составляющая вектора имеет вид (14.7), то значение внешней ковариантной производной на произвольном векторном поле $\widetilde{X}\in\mathbb{X}(\mathbb{P})$ равно

$$D\varphi^i(\widetilde{X}) = d\varphi^i(\mathsf{h}\widetilde{X}) = \widetilde{X}^\alpha\mathring{\nabla}_\alpha\mathring{\varphi}^j S^{-1}{}_j^i, \tag{14.20}$$

где

$$\mathring{\nabla}_\alpha\mathring{\varphi}^j = \partial_\alpha\mathring{\varphi}^j + \mathring{\varphi}^k\mathring{A}_{\alpha k}{}^j, \qquad \mathring{A}_{\alpha k}{}^j = -\mathring{A}_\alpha{}^{\text{A}}L_{\text{A}k}{}^j.$$

Теперь спустимся на базу $\mathbb{U}$. Рассмотрим два произвольных сечения

$$\sigma:\quad x\mapsto\big(x,b(x)\big), \qquad \text{и} \qquad \sigma':\quad x\mapsto\big(x,b(x)a(x)\big),$$

связанных калибровочным преобразованием, которое параметризуется функцией $a(x)$. Обозначим значение компонент $\varphi^i(p)$ на этих сечениях через

$$\varphi^i(x)=\varphi^i|_\sigma, \qquad \text{и} \qquad \varphi'^i(x)=\varphi^i|_{\sigma'}. \tag{14.21}$$

Эти функции на $\mathbb{U}$ связаны калибровочным преобразованием

$$\varphi'^i = \varphi^j S^{-1}{}_j^i(a), \qquad a=a(x). \tag{14.22}$$

Внешний ковариантный дифференциал $D\varphi$ после проектирования на базу с помощью возвратов отображений σ^* и σ'^* принимает вид

$$\begin{aligned}\sigma^*(D\varphi^i) &= dx^\alpha\nabla_\alpha\varphi^i,\\ \sigma'^*(D\varphi^i) &= dx^\alpha\nabla'_\alpha\varphi'^i,\end{aligned} \tag{14.23}$$

где

$$\begin{aligned}\nabla_\alpha\varphi^i &= \partial_\alpha\varphi^i + \varphi^j A_{\alpha j}{}^i,\\ \nabla'_\alpha\varphi'^i &= \partial_\alpha\varphi'^i + \varphi'^j A'_{\alpha j}{}^i.\end{aligned} \tag{14.24}$$

Выше мы ввели обозначения: $A_{\alpha j}{}^i=-A_\alpha{}^{\text{A}}L_{\text{A}j}{}^i$ и $A'_{\alpha j}{}^i=-A'_\alpha{}^{\text{A}}L_{\text{A}j}{}^i$, где $A_\alpha{}^{\text{A}}$ и $A'_\alpha{}^{\text{A}}$ – компоненты локальных форм связности (14.10). Нетрудно проверить, что при калибровочном преобразовании (14.22), (14.14) ковариантная производная ведет себя ковариантно

$$\nabla'_\alpha\varphi'^i = \nabla_\alpha\varphi^j S^{-1}{}_j^i. \tag{14.25}$$

Этого следовало ожидать, так как определение ковариантной производной было дано в инвариантном виде. Таким образом, мы видим, что инвариантное определение внешней ковариантной производной для тензориальной 0-формы типа $(\rho,\mathbb{V})$ совпадает с обычным определением ковариантной производной в теории калибровочных полей. В примере 14.2.3 было показано, что тензориальную 0-форму типа $(\rho,\mathbb{V})$ можно отождествить с сечением ассоциированного расслоения, типичным слоем которого является векторное пространство $\mathbb{V}$. Таким образом, формулы (14.24) определяют ковариантные производные от сечений $\sigma_{\mathbb{E}}:\ \mathbb{M}\to\mathbb{E}$ ассоциированного расслоения $\mathbb{E}(\mathbb{M},\pi_{\mathbb{E}},\mathbb{V},\mathbb{G},\mathbb{P})$. □

В примере 14.2.1 было отмечено, что форма связности ω на $\mathbb{P}$ есть псевдотензориальная 1-форма типа $\mathsf{ad}\,\mathbb{G}$. Используя предложение 14.2.1, дадим

Определение. Внешняя ковариантная производная $R = D\omega$ от формы связности ω является тензориальной 2-формой на $\mathbb{P}$ типа $\mathsf{ad}\,\mathbb{G}$ и называется *формой кривизны* для формы связности ω. Если L_{A} базис алгебры Ли, то $R = R^{\text{A}} L_{\text{A}}$, где $R^{\text{A}} \in \Lambda_2(\mathbb{P})$ для всех $\text{A} = 1, \ldots, \text{N}$. □

Теорема 14.2.1 (**Структурное уравнение**). *Пусть ω – форма связности на главном расслоении $\mathbb{P}(\mathbb{M}, \pi, \mathbb{G})$ и $R = D\omega$ – ее форма кривизны. Тогда*

$$d\omega(\widetilde{X}, \widetilde{Y}) = -\frac{1}{2}\Big[\omega(\widetilde{X}), \omega(\widetilde{Y})\Big] + R(\widetilde{X}, \widetilde{Y}) \tag{14.26}$$

для всех $\widetilde{X}, \widetilde{Y} \in \mathbb{T}_p(\mathbb{P})$ и $p \in \mathbb{P}$.

Доказательство. Каждый вектор в $\mathbb{T}_p(\mathbb{P})$ единственным образом разлагается в сумму вертикального и горизонтального векторов. Так как каждый член в (14.26) билинеен и антисимметричен по $\widetilde{X}$ и $\widetilde{Y}$, то достаточно проверить равенство (14.26) в трех случаях.

1) $\widetilde{X}_p$ и $\widetilde{Y}_p$ горизонтальны для всех $p \in \mathbb{P}$. В этом случае $\omega(\widetilde{X}) = \omega(\widetilde{Y}) = 0$ и равенство (14.26) сводится к определению формы кривизны R, т.к. $D\omega = d\omega$ для горизонтальных векторных полей.

2) $\widetilde{X}_p$ и $\widetilde{Y}_p$ вертикальны для всех $p \in \mathbb{P}$. В этом случае их значения в точке p соответствуют некоторым фундаментальным векторным полям, т.е. $\widetilde{X}_p = X^*_p$ и $\widetilde{Y}_p = Y^*_p$ для некоторых $X, Y \in \mathfrak{g}$. Из формулы (4.36) следует равенство

$$\begin{aligned} 2d\omega(X^*, Y^*) &= X^*\big(\omega(Y^*)\big) - Y^*\big(\omega(X^*)\big) - \omega\big([X^*, Y^*]\big) = \\ &= -[X, Y] = -[\omega(X^*), \omega(Y^*)], \end{aligned}$$

т.к. $\omega(X^*) = X$, $\omega(Y^*) = Y$ и $[X^*, Y^*] = [X, Y]^*$. Поскольку для фундаментальных векторных полей $R(X^*, Y^*) = 0$, то формула (14.26) в рассматриваемом случае имеет место.

3) $\widetilde{X}_p$ горизонтально, $\widetilde{Y}_p$ вертикально для всех $p \in \mathbb{P}$. Продолжим $\widetilde{X}_p \in \mathbb{H}_p(\mathbb{P})$ до горизонтального векторного поля $\widetilde{X}$ на $\mathbb{P}$. Это всегда возможно в силу следствия теоремы 13.2.1. Пусть $\widetilde{Y}_p = Y^*_p$ для некоторого $Y \in \mathfrak{g}$. В рассматриваемом случае правая часть равенства (14.26) равна нулю, поэтому достаточно доказать равенство $d\omega(\widetilde{X}, Y^*) = 0$. Из формулы (4.36) следует, что

$$2d\omega(\widetilde{X}, Y^*) = \widetilde{X}\big(\omega(Y^*)\big) - Y^*\big(\omega(\widetilde{X})\big) - \omega\big([\widetilde{X}, Y^*]\big) = -\omega\big([\widetilde{X}, Y^*]\big).$$

Теперь достаточно доказать

Лемма 14.2.1. *Пусть $\widetilde{X}$ – горизонтальное векторное поле и Y^* – фундаментальное векторное поле, соответствующее элементу алгебры $Y \in \mathfrak{g}$. Тогда коммутатор $[\widetilde{X}, Y^*]$ горизонтален.*

Доказательство. Фундаментальное векторное поле Y^* индуцировано действием $r_{a(t)}$, где $a(t)$ – 1-параметрическая подгруппа в $\mathbb{G}$, порожденная элементом алгебры

$Y \in \mathfrak{g}$ (экспоненциальное отображение). Поскольку коммутатор векторных полей совпадает с производной Ли, то из (3.113) следует

$$[\widetilde{X}, Y^*] = -\mathsf{L}_{Y^*}\widetilde{X} = -\lim_{t\to 0}\frac{\widetilde{X} - r_{a(t)*}\widetilde{X}}{t}.$$

Если векторное поле $\widetilde{X}$ горизонтально, то $r_{a(t)*}\widetilde{X}$ тоже горизонтально. Поэтому коммутатор $[\widetilde{X}, Y^*]$ горизонтален. □ □

Следствие. Если $\widetilde{X}$ и $\widetilde{Y}$ – горизонтальные векторные поля, то

$$\omega([\widetilde{X}, \widetilde{Y}]) = -2R(\widetilde{X}, \widetilde{Y}). \quad \square \tag{14.27}$$

Доказательство. Для горизонтальных векторных полей $\omega(\widetilde{X}) = \omega(\widetilde{Y}) = 0$ и

$$2d\omega(\widetilde{X}, \widetilde{Y}) = -\omega([\widetilde{X}, \widetilde{Y}])$$

как следствие (4.36). □

Структурное уравнение (14.26) называют также *структурным уравнением Картана* и часто для простоты записывают в виде

$$d\omega = -\frac{1}{2}[\omega, \omega] + R. \tag{14.28}$$

Приведем еще одну форму записи структурного уравнения. Пусть L_{A}, $\mathrm{A} = 1, \ldots, \mathrm{N}$, – базис алгебры Ли $\mathfrak{g}$ с коммутационными соотношениями

$$[L_{\mathrm{A}}, L_{\mathrm{B}}] = f_{\mathrm{AB}}{}^{\mathrm{C}} L_{\mathrm{C}},$$

где $f_{\mathrm{AB}}{}^{\mathrm{C}}$ – структурные константы алгебры. Тогда формы связности и кривизны можно разложить по базису, $\omega = \omega^{\mathrm{A}} L_{\mathrm{A}}$ и $R = R^{\mathrm{A}} L_{\mathrm{A}}$, и структурные уравнения принимают вид

$$d\omega^{\mathrm{A}} = -\frac{1}{2}\omega^{\mathrm{B}} \wedge \omega^{\mathrm{C}} f_{\mathrm{BC}}{}^{\mathrm{A}} + R^{\mathrm{A}}. \tag{14.29}$$

Замечание. Структурное уравнение (14.26) отличается от формулы Маурера–Картана для групп Ли (9.20) только слагаемым с кривизной. Для фундаментальных векторных полей $R(X^*, Y^*) = 0$ и формулы просто совпадают. □

Теперь спустимся на базу. Пусть задано локальное сечение $\sigma : \mathbb{U} \to \mathbb{P}$ на некоторой окрестности $\mathbb{U} \subset \mathbb{M}$.

Определение. 2-форма на $\mathbb{U}$ со значениями в алгебре Ли $\mathfrak{g}$, определенная возвратом сечения, $R_\sigma = \sigma^* R$, где R – форма кривизны на $\mathbb{P}(\mathbb{M}, \pi, \mathbb{G})$, называется *локальной формой кривизны* формы связности ω. В компонентах она имеет вид

$$R_\sigma = \frac{1}{2} dx^\alpha \wedge dx^\beta F_{\alpha\beta}{}^{\mathrm{A}} L_{\mathrm{A}}, \tag{14.30}$$

где $F^{\mathrm{A}} = \frac{1}{2} dx^\alpha \wedge dx^\beta F_{\alpha\beta}{}^{\mathrm{A}} \in \Lambda_2(\mathbb{U})$ для всех $\mathrm{A} = 1, \ldots, \mathrm{N}$. □

Пример 14.2.5 (**Локальное рассмотрение**). В настоящем примере мы выразим компоненты локальной формы кривизны через компоненты локальной формы связности. Чтобы это сделать, сначала определим компоненты формы кривизны на $\mathbb{Q} = \mathbb{U} \times \widetilde{\mathbb{G}}$ через компоненты формы связности. Внешняя производная от формы связности (14.5) имеет вид

$$\begin{aligned} d\omega &= \left[\frac{1}{2} dx^\alpha \wedge dx^\beta \left(\partial_\alpha \omega_\beta{}^{\mathrm{A}} - \partial_\beta \omega_\alpha{}^{\mathrm{A}}\right) - dx^\alpha \wedge db^{\mathrm{B}} \partial_{\mathrm{B}} \omega_\alpha{}^{\mathrm{A}} + d\omega^{*\mathrm{A}}\right] L_{\mathrm{A}} = \\ &= \left[\frac{1}{2} dx^\alpha \wedge dx^\beta \left(\partial_\alpha \omega_\beta{}^{\mathrm{A}} - \partial_\beta \omega_\alpha{}^{\mathrm{A}}\right) + dx^\alpha \wedge \omega^{*\mathrm{B}} \omega_\alpha{}^{\mathrm{C}} f_{\mathrm{BC}}{}^{\mathrm{A}} - \frac{1}{2} \omega^{*\mathrm{B}} \wedge \omega^{*\mathrm{C}} f_{\mathrm{BC}}{}^{\mathrm{A}}\right] L_{\mathrm{A}}, \end{aligned}$$

где $\omega_\alpha{}^{\mathrm{A}}(x,b) = \overset{\circ}{A}_\alpha{}^{\mathrm{B}}(x) S^{-1}{}_{\mathrm{B}}^{\mathrm{A}}(b)$. Кроме того мы воспользовались формулой Маурера–Картана (9.21) для структурной группы и правилом дифференцирования матрицы присоединенного представления (9.39). Теперь нетрудно вычислить значение формы кривизны на векторных полях

$$D\omega(\widetilde{X}, \widetilde{Y}) = d\omega(\mathsf{h}\widetilde{X}, \mathsf{h}\widetilde{Y}) = \widetilde{X}^\alpha \widetilde{Y}^\beta R_{\alpha\beta}{}^{\mathrm{A}} L_{\mathrm{A}},$$

где

$$R_{\alpha\beta}{}^{\mathrm{A}} = \partial_\alpha \omega_\beta{}^{\mathrm{A}} - \partial_\beta \omega_\alpha{}^{\mathrm{A}} - \omega_\alpha{}^{\mathrm{B}} \omega_\beta{}^{\mathrm{C}} f_{\mathrm{BC}}{}^{\mathrm{A}} \tag{14.31}$$

– компоненты формы кривизны. Эти компоненты можно выразить через компоненты, заданные на нулевом сечении

$$R_{\alpha\beta}{}^{\mathrm{A}}(x,a) = \overset{\circ}{F}_{\alpha\beta}{}^{\mathrm{B}}(x) S^{-1}{}_{\mathrm{B}}^{\mathrm{C}}(a),$$

где

$$\overset{\circ}{F}_{\alpha\beta}{}^{\mathrm{A}} = \partial_\alpha \overset{\circ}{A}_\beta{}^{\mathrm{A}} - \partial_\beta \overset{\circ}{A}_\alpha{}^{\mathrm{A}} - \overset{\circ}{A}_\alpha{}^{\mathrm{B}} \overset{\circ}{A}_\beta{}^{\mathrm{C}} f_{\mathrm{BC}}{}^{\mathrm{A}} \tag{14.32}$$

– компоненты тензора кривизны для нулевого сечения. Таким образом, форма кривизны имеет вид

$$R = \frac{1}{2} dx^\alpha \wedge dx^\beta R_{\alpha\beta}{}^{\mathrm{A}} L_{\mathrm{A}}. \tag{14.33}$$

Теперь спустимся на базу $\mathbb{U}$. Для сечений (14.21) получаем следующие выражения для локальных форм кривизны

$$\begin{aligned} R_\sigma = \sigma^* R &= \frac{1}{2} dx^\alpha \wedge dx^\beta F_{\alpha\beta}{}^{\mathrm{A}} L_{\mathrm{A}}, \\ R_{\sigma'} = \sigma'^* R &= \frac{1}{2} dx^\alpha \wedge dx^\beta F'_{\alpha\beta}{}^{\mathrm{A}} L_{\mathrm{A}}, \end{aligned}$$

где

$$F_{\alpha\beta}{}^{\mathrm{A}} = \partial_\alpha A_\beta{}^{\mathrm{A}} - \partial_\beta A_\alpha{}^{\mathrm{A}} - A_\alpha{}^{\mathrm{B}} A_\beta{}^{\mathrm{C}} f_{\mathrm{BC}}{}^{\mathrm{A}} \tag{14.34}$$

и такое же выражение для $F'_{\alpha\beta}{}^{\mathrm{A}}$ через штрихованные компоненты $A'_\alpha{}^{\mathrm{A}}$. Нетрудно проверить, что компоненты локальной формы кривизны преобразуются ковариантным образом,

$$F'_{\alpha\beta}{}^{\mathrm{A}} = F_{\alpha\beta}{}^{\mathrm{B}} S^{-1}{}_{\mathrm{B}}^{\mathrm{A}},$$

при калибровочном преобразовании (**??**).

Переходя к присоединенному представлению

$$F_{\alpha\beta}{}^{\mathrm{A}} \mapsto F_{\alpha\beta\mathrm{B}}{}^{\mathrm{C}} := -F_{\alpha\beta}{}^{\mathrm{A}} f_{\mathrm{AB}}{}^{\mathrm{C}},$$

получаем следующее выражение для локальной формы кривизны

$$F_{\alpha\beta\mathrm{A}}{}^{\mathrm{B}} = \partial_\alpha A_{\beta\mathrm{A}}{}^{\mathrm{B}} - \partial_\beta A_{\alpha\mathrm{A}}{}^{\mathrm{B}} - A_{\alpha\mathrm{A}}{}^{\mathrm{C}} A_{\beta\mathrm{C}}{}^{\mathrm{B}} + A_{\beta\mathrm{A}}{}^{\mathrm{C}} A_{\alpha\mathrm{C}}{}^{\mathrm{B}}. \tag{14.35}$$

Это выражение совпадает с выражением для локальной формы кривизны в аффинной геометрии (7.19), которое было получено ранее, после замены $A_{\alpha\mathrm{A}}{}^{\mathrm{B}} \mapsto \omega_{\alpha a}{}^{b}$. Тем самым мы показали, что аффинная связность, которая была введена ранее независимым образом, является частным случаем связности на главном расслоении общего вида. Опустив матричные индексы, выражение для компонент локальной формы кривизны (14.35) можно записать в виде

$$F_{\alpha\beta} = \partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha - [A_\alpha, A_\beta], \tag{14.36}$$

где мы для краткости опустили матричные индексы и квадратные скобки обозначают коммутатор матриц. При калибровочном преобразовании (14.15) компоненты локальной формы кривизны преобразуются ковариантно

$$F'_{\alpha\beta} = S F_{\alpha\beta} S^{-1},$$

как и следовало ожидать.

При проведении вычислений на пространстве главного расслоения $\mathbb{P}$, например, в моделях типа Калуцы–Клейна, в касательном расслоении $\mathbb{T}(\mathbb{P})$ удобно использовать базис $\{D_\alpha, L^*_{\mathrm{A}}\}$, состоящий из горизонтальных векторных полей

$$D_\alpha = \partial_\alpha - \omega_\alpha{}^{\mathrm{A}} L^*_{\mathrm{A}}, \tag{14.37}$$

и фундаментальных векторных полей L^*_{A}. Этот базис неголономен,

$$[D_\alpha, D_\beta] = -R_{\alpha\beta}{}^{\mathrm{A}} L^*_{\mathrm{A}}, \tag{14.38}$$

$$[D_\alpha, L^*_{\mathrm{A}}] = 0, \tag{14.39}$$

$$[L^*_{\mathrm{A}}, L^*_{\mathrm{B}}] = f_{\mathrm{AB}}{}^{\mathrm{C}} L^*_{\mathrm{C}}, \tag{14.40}$$

где $R_{\alpha\beta}{}^{\mathrm{A}}$ – компоненты формы кривизны (14.31). Второе коммутационное соотношение (14.39) является следствием инвариантности распределения горизонтальных подпространств относительно действия группы справа (напомним, что левоинвариантные векторные поля генерируют действие группы справа, а правоинвариантные – слева, раздел [?]). Заметим, что ковариантную производную $D\varphi$ от тензориальной 0-формы типа $(\rho, \mathbb{V})$ можно записать в виде

$$D\varphi = dx^\alpha (D_\alpha \varphi^i) \boldsymbol{e}_i,$$

где векторное поле D_α действует как дифференцирование. Это следует из определения (14.20). В приведенной формуле $\varphi^i = \varphi^i(x, a)$ в отличии от формул (14.24), где ковариантная производная берется от сечений $\varphi^i = \varphi^i\big(x, \sigma(x)\big)$. Кроме того, справедливо равенство

$$[D_\alpha, D_\beta]\varphi^i = \varphi^j R_{\alpha\beta j}{}^{i}, \tag{14.41}$$

где $R_{\alpha\beta j}{}^{i} = R_{\alpha\beta}{}^{\mathrm{A}} L_{\mathrm{A}j}{}^{i}$. Эта формула является аналогом формулы (8.81), полученной в аффинной геометрии. В аффинной геометрии в правой части стоит дополнительное слагаемое с тензором кручения. □

Для связи с моделями математической физики дадим

Определение. Компоненты локальной формы кривизны $F_{\alpha\beta}{}^{\mathrm{A}}$ называются *напряженностью калибровочного поля* или *напряженностью поля Янга–Миллса.* В электродинамике калибровочной группой является абелева группа $\mathbb{U}(1)$, а компоненты локальной формы кривизны $F_{\alpha\beta}$ называются *напряженностью электромагнитного поля.* □

Продолжим общее рассмотрение.

Теорема 14.2.2 (**Тождества Бианки**). *Пусть на главном расслоении $\mathbb{P}(\mathbb{M},\pi,\mathbb{G})$ задана форма кривизны ω. Тогда форма кривизны $R = D\omega$ удовлетворяет тождествам Бианки:*

$$DR = 0, \tag{14.42}$$

где D – внешняя ковариантная производная.

Доказательство. Из определения внешней ковариантной производной следует, что $DR(\widetilde{X},\widetilde{Y},\widetilde{Z}) = 0$, если хотя бы один из векторов $\widetilde{X},\widetilde{Y},\widetilde{Z}$ вертикален. Поэтому достаточно доказать, что $dR(\widetilde{X},\widetilde{Y},\widetilde{Z}) = 0$, когда все три вектора горизонтальны. Возьмем внешнюю производную от структурного уравнения (14.29)

$$0 = dd\omega^{\mathrm{A}} = -\frac{1}{2}d\omega^{\mathrm{B}}\wedge\omega^{\mathrm{C}} f_{\mathrm{BC}}{}^{\mathrm{A}} + \frac{1}{2}\omega^{\mathrm{B}}\wedge d\omega^{\mathrm{C}} f_{\mathrm{BC}}{}^{\mathrm{A}} + dR^{\mathrm{A}}.$$

Поскольку $\omega^{\mathrm{A}}(\widetilde{X}) = 0$, если вектор $\widetilde{X}$ горизонтален, то

$$dR^{\mathrm{A}}(\widetilde{X},\widetilde{Y},\widetilde{Z}) = 0$$

если все три вектора горизонтальны. □

Теорема 14.2.3. *Пусть ω – форма связности на главном расслоении $\mathbb{P}(\mathbb{M},\pi,\mathbb{G})$ и φ – произвольная тензориальная 1-форма типа* $\mathsf{ad}\,\mathbb{G}$. *Тогда*

$$D\varphi(\widetilde{X},\widetilde{Y}) = d\varphi(\widetilde{X},\widetilde{Y}) + \frac{1}{2}[\varphi(\widetilde{X}),\omega(\widetilde{Y})] + \frac{1}{2}[\omega(\widetilde{X}),\varphi(\widetilde{Y})]$$

для всех $\widetilde{X},\widetilde{Y}\in\mathbb{T}_p(\mathbb{P})$ и $p\in\mathbb{P}$.

Доказательство. Аналогично доказательству теоремы 14.2.1 о структурном уравнении. См., например, [**?**]. □

Пример 14.2.6 (**Локальное рассмотрение**). Запишем тождества Бианки в компонентах. Внешняя производная от компонент формы кривизны (14.33) имеет вид

$$\begin{aligned} dR^{\mathrm{A}} &= \frac{1}{2}dx^\alpha\wedge dx^\beta\wedge dx^\gamma\partial_\alpha R_{\beta\gamma}{}^{\mathrm{A}} + \frac{1}{2}dx^\alpha\wedge dx^\beta\wedge\omega^{*\mathrm{B}}L^*_{\mathrm{B}}R_{\alpha\beta}{}^{\mathrm{A}} = \\ &= \frac{1}{2}dx^\alpha\wedge dx^\beta\wedge dx^\gamma\partial_\alpha R_{\beta\gamma}{}^{\mathrm{A}} - \frac{1}{2}dx^\alpha\wedge dx^\beta\wedge\omega^{*\mathrm{B}}R_{\alpha\beta}{}^{\mathrm{C}} f_{\mathrm{BC}}{}^{\mathrm{A}}. \end{aligned}$$

Ее значения на горизонтальных векторных полях равно

$$dR^{\mathrm{A}}(\mathsf{h}\widetilde{X},\mathsf{h}\widetilde{Y},\mathsf{h}\widetilde{Z}) = 3\widetilde{X}^\alpha\widetilde{Y}^\beta\widetilde{Z}^\alpha D_{[\alpha}R_{\beta\gamma]}{}^{\mathrm{A}},$$

где квадратные скобки обозначают антисимметризацию по трем индексам, а

$$D_\alpha R_{\beta\gamma}{}^{\mathrm{A}} = \partial_\alpha R_{\beta\gamma}{}^{\mathrm{A}} + \omega_\alpha{}^{\mathrm{B}}R_{\beta\gamma}{}^{\mathrm{C}} f_{\mathrm{BC}}{}^{\mathrm{A}}.$$

Таким образом, тождества Бианки в компонентах имеют вид

$$D_\alpha R_{\beta\gamma}{}^{\mathrm{A}} + D_\beta R_{\gamma\alpha}{}^{\mathrm{A}} + D_\gamma R_{\alpha\beta}{}^{\mathrm{A}} = 0. \tag{14.43}$$

Если задано локальное сечение расслоения, то эти тождества можно спустить на базу, используя возврат отображения. Тогда тождества Бианки для компонент локальных форм кривизны и связности примут вид

$$D_\alpha F_{\beta\gamma}{}^{\mathrm{A}} + D_\beta F_{\gamma\alpha}{}^{\mathrm{A}} + D_\gamma F_{\alpha\beta}{}^{\mathrm{A}} = 0,$$

где

$$D_\alpha F_{\beta\gamma}{}^{\mathrm{A}} = \partial_\alpha F_{\beta\gamma}{}^{\mathrm{A}} + A_\alpha{}^{\mathrm{B}} F_{\beta\gamma}{}^{\mathrm{C}} f_{\mathrm{BC}}{}^{\mathrm{A}}$$

и напряженность $F_{\alpha\beta}{}^{\mathrm{A}}$ имеет вид (14.34). Именно в таком виде они, как правило, используются в приложениях. □

14.3 Параллельный перенос

Пусть на главном расслоении $\mathbb{P}(\mathbb{M}, \pi, \mathbb{G})$ задана связность $\Gamma: \ \mathbb{P} \ni p \mapsto \mathbb{H}_p \subset \mathbb{T}_p(\mathbb{P})$. Определим понятие параллельного переноса слоя $\pi^{-1}(x_0)$ над точкой базы $x_0 \in \mathbb{M}$ вдоль произвольной кусочно дифференцируемой кривой $\gamma: \ t \mapsto x(t) \in \mathbb{M}$, $t \in \bar{\mathbb{I}}$ с началом в точке x_0. Для наших целей достаточно рассматривать кусочно дифференцируемые кривые класса $\mathcal{C}^1$.

Определение. *Горизонтальной кривой* в $\mathbb{P}$ называется кусочно дифференцируемая кривая, все касательные векторы которой горизонтальны. *Горизонтальным лифтом* или *подъемом* (или просто *лифтом*) кривой γ, заданной на базе $\mathbb{M}$, называется горизонтальная кривая в $\mathbb{P}$,

$$\tilde{\gamma}: \quad \bar{\mathbb{I}} \ni t \mapsto p(t) \in \mathbb{P},$$

такая, что $\pi \circ \tilde{\gamma} = \gamma$. □

Понятие горизонтального лифта кривой соответствует понятию лифта векторного поля. Действительно, если $\widetilde{X} \in \mathcal{X}(\mathbb{P})$ – лифт дифференцируемого векторного поля X, заданного на базе $\mathbb{M}$, то интегральная кривая $\tilde{\gamma}$ векторного поля $\widetilde{X}$, проходящая через точку $p_0 \in \mathbb{P}$, есть горизонтальный лифт интегральной кривой γ поля X, проходящей через точку $x_0 = \pi(p_0)$.

Предложение 14.3.1. *Пусть $\gamma = x(t)$, $t \in \bar{\mathbb{I}}$, – кусочно дифференцируемая кривая класса $\mathcal{C}^1$ в $\mathbb{M}$ с началом в точке $x_0 \in \mathbb{M}$. Тогда для произвольной точки слоя $p_0 \in \pi^{-1}(x_0)$ существует единственный горизонтальный лифт $\tilde{\gamma} = p(t)$ кривой γ с началом в точке p_0.*

Доказательство. Состоит в явном построении лифта $\tilde{\gamma}$. См., например, [**?**]. □

Используя предложение 14.3.1, определим параллельное перенесение слоев следующим образом.

Определение. Пусть $\gamma = x(t)$ – кривая в $\mathbb{M}$ с началом и концом в точках x_0 и x_1. Пусть $\tilde{\gamma}$ – единственный горизонтальный лифт кривой γ, который начинается в точке p_0, находящейся в слое $\pi^{-1}(x_0)$. Лифт $\tilde{\gamma}$ имеет конечную точку $p_1 \in \mathbb{P}$ такую, что $\pi(p_1) = x_1$. Меняя начальную точку p_0 в слое $\pi^{-1}(x_0)$, мы получаем отображение слоя $\pi^{-1}(x_0)$ в слой $\pi^{-1}(x_1)$, которое переводит точку p_0 в p_1. Это отображение называется *параллельным переносом слоя* из точки x_0 в точку x_1 вдоль кривой γ. Параллельный перенос слоев обозначается той же буквой, что и кривая, $\gamma: \ \pi^{-1}(x_0) \to \pi^{-1}(x_1)$. □

Параллельный перенос слоев является изоморфизмом, что вытекает из следующего утверждения.

Предложение 14.3.2. *Параллельный перенос слоя* $\gamma : \pi^{-1}(x_0) \to \pi^{-1}(x_1)$ *вдоль любой кривой перестановочен с действием структурной группы* $\mathbb{G}$ *на* $\mathbb{P}$*:* $\gamma \circ r_a = r_a \circ \gamma$ *для всех* $a \in \mathbb{G}$*.*

Доказательство. Это следует из того, что правое действие структурной группы r_a отображает каждую горизонтальную кривую в горизонтальную, см. рис.14.1. □

Рис. 14.1: Параллельный перенос слоев вдоль кривой γ.

Параллельный перенос слоя вдоль кривой γ не зависит от выбора параметризации кривой. Кроме того, если слой переносится из точки x_0 в точку x_1 параллельно вдоль кривой γ, то он параллельно переносится вдоль этой же кривой из точки x_0 в любую промежуточную точку $x(t)$, $t \in \mathbb{I}$, на γ.

Замечание. Если точки x_0 и x_1 в базе $\mathbb{M}$ фиксированы, то в общем случае параллельный перенос слоя $\pi^{-1}(x_0)$ в слой $\pi^{-1}(x_1)$ зависит от кривой γ, соединяющей эти точки. Эта зависимость характеризуется формой кривизны R формы связности ω и будет обсуждаться в следующих разделах. □

При рассмотрении фундаментальной группы в разделе 11.3 мы определили произведение путей (кривых) $\gamma_2 \circ \gamma_1$ как последовательный проход вдоль путей γ_1 и γ_2 (11.4) и обратный путь $\bar{\gamma}$ как путь γ, проходимый в обратном направлении (11.5). Следующее предложение очевидно.

Предложение 14.3.3. *1) Если* γ_1 *– путь из* x_0 *в* x_1 *и* γ_2 *– путь из* x_1 *в* x_2*, то параллельный перенос слоя* $\pi^{-1}(x_0)$ *в слой* $\pi^{-1}(x_2)$ *вдоль произведения путей* $\gamma_2 \circ \gamma_1$ *равен произведению отображений слоев* $\gamma_2 \circ \gamma_1 : \pi^{-1}(x_0) \to \pi^{-1}(x_2)$*.*

2) Если $\bar{\gamma}$ *– обратный путь для пути* γ *из точки* x_0 *в точку* x_1*, то параллельный перенос слоя* $\pi^{-1}(x_1)$ *в слой* $\pi^{-1}(x_0)$ *вдоль пути* $\bar{\gamma}$ *является обратным отображением* $\bar{\gamma} = \gamma^{-1} : \pi^{-1}(x_1) \to \pi^{-1}(x_0)$*.*

14.4 Группы голономии

Пусть задано главное расслоение $\mathbb{P}(\mathbb{M}, \pi, \mathbb{G})$ со связностью Γ. Используя понятие параллельного переноса, определим группу голономии данной связности Γ.

Обозначим через $\Omega(\mathbb{M}, x)$ множество замкнутых кусочно дифференцируемых кривых (петель) на базе $\mathbb{M}$ с началом и концом в точке $x \in \mathbb{M}$. Подмножество, состоящее из путей, гомотопных постоянному пути в точке x, обозначим $\Omega_0(\mathbb{M}, x) \subset \Omega(\mathbb{M}, x)$. Произведение и обратный путь для всех путей из $\Omega(\mathbb{M}, x)$ были определены в разделе 11.3. В разделе 14.3 было показано, что параллельный перенос слоя $\pi^{-1}(x)$ вдоль замкнутого пути $\gamma \in \Omega(\mathbb{M}, x)$ есть изоморфизм слоя $\pi^{-1}(x)$ на себя. В общем случае этот изоморфизм будет нетривиален, т.к. после параллельного переноса вдоль замкнутого пути слой может повернуться. Множество всех таких изоморфизмов образует группу в силу предложения 14.3.3.

Определение. Группа, состоящая из изоморфизмов слоя $\pi^{-1}(x)$, которые соответствуют параллельным переносам данного слоя вдоль всех замкнутых кусочно дифференцируемых путей $\gamma \in \Omega(\mathbb{M}, x)$, называется *группой голономии* $\Phi(x)$ связности Γ в точке $x \in \mathbb{M}$. Подгруппа $\Phi_0(x) \subset \Phi(x)$, соответствующая параллельным переносам вдоль замкнутых путей, стягиваемых в точку, $\gamma \in \Omega_0(\mathbb{M}, x)$, называется *суженной группой голономии* связности Γ в точке $x \in \mathbb{M}$. □

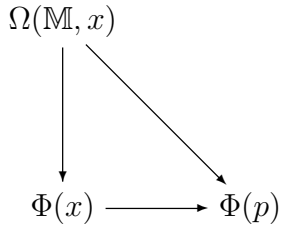
Группу голономии $\Phi(x)$ и суженную группу голономии $\Phi_0(x)$ можно считать подгруппами в структурной группе $\mathbb{G}$ следующим образом.

Определение. Зафиксируем некоторую точку слоя $p \in \pi^{-1}(x)$. После параллельного переноса слоя вдоль пути $\gamma \in \Omega(\mathbb{M}, x)$ эта точка отобразится в некоторую точку $\gamma(p) = pa \in \pi^{-1}(x)$. Если задан другой путь $\gamma' \in \Omega(\mathbb{M}, x)$, которому соответствует элемент $b \in \mathbb{G}$, то произведение путей $\gamma' \circ \gamma$ определяет элемент $ba \in \mathbb{G}$, поскольку

$$\gamma' \circ \gamma(p) = \gamma'(pa) = \big(\gamma'(p)\big)a = pba.$$

По предложению 14.3.3 множество элементов $a \in \mathbb{G}$, определенных всеми путями $\gamma \in \Omega(x)$, образует группу, которая называется *группой голономии* $\Phi(p)$ связности Γ в точке $p \in \mathbb{P}$. Замкнутым путям $\gamma \in \Omega_0(\mathbb{M}, x)$ соответствует *суженная группа голономии* $\Phi_0(p)$ в точке $p \in \mathbb{P}$. □

Замечание. $\Phi(x)$ есть группа изоморфизмов слоя $\pi^{-1}(x)$ на себя, а $\Phi(p)$ есть подгруппа в $\mathbb{G}$. Выше мы построили единственный изоморфизм из $\Phi(x)$ на $\Phi(p)$, который делает коммутативной следующую диаграмму:



□

Группу голономии $\Phi(p)$ можно определить другим образом. Введем на пространстве главного расслоения отношение эквивалентности $p \sim q$, где $p, q \in \mathbb{P}$, если точки p и q можно можно соединить горизонтальной кривой. При этом точки p и q не обязательно лежат в одном слое. Нетрудно проверить, что это действительно отношение эквивалентности. Тогда группа голономии $\Phi(p)$ совпадает с множеством тех элементов $a \in \mathbb{G}$, для которых $p \sim pa$. Легко проверить, что это множество элементов образует подгруппу в $\mathbb{G}$, т.к. $p \sim q$ влечет за собой $pa \sim qa$.

Предложение 14.4.1. *Пусть дано главное расслоение $\mathbb{P}(\mathbb{M}, \pi, \mathbb{G})$ со связностью Γ. Тогда:*

1) *Если $q = pa$, $a \in \mathbb{G}$, то $\Phi(q) = \mathsf{ad}\,(a^{-1})\Phi(p)$, т.е. группы голономии точек одного слоя $\Phi(q)$ и $\Phi(p)$ сопряжены в $\mathbb{G}$. Аналогично, $\Phi_0(q) = \mathsf{ad}\,(a^{-1})\Phi_0(p)$.*
2) *Если точки $p, q \in \mathbb{P}$ можно соединить горизонтальной кривой, т.е. $p \sim q$, то $\Phi(p) = \Phi(q)$ и $\Phi_0(p) = \Phi_0(q)$.*

Доказательство. 1). Пусть $b \in \Phi(p)$, т.е. $p \sim pb$. Тогда $pa \sim pba$ и, следовательно, $q \sim qa^{-1}ba$. Поэтому $\mathsf{ad}\,(a^{-1})b = a^{-1}ba \in \Phi(q)$. Отсюда вытекает, что $\Phi(q) = \mathsf{ad}\,(a^{-1})\Phi(p)$ и $\Phi_0(q) = \mathsf{ad}\,(a^{-1})\Phi_0(p)$.

2) Отношение $p \sim q$ влечет за собой $pb \sim qb$. Из транзитивности отношения эквивалентности $\sim$ следует, что $p \sim pb$ тогда и только тогда, когда $q \sim qb$, т.е. $b \in \Phi(p)$ тогда и только тогда, когда $b \in \Phi(q)$. Тем самым $\Phi(p) = \Phi(q)$. Чтобы доказать равенство $\Phi_0(p) = \Phi_0(q)$, допустим, что $\tilde{\delta}$ – горизонтальная кривая в $\mathbb{P}$ из p в q. Если $b \in \Phi_0(p)$, то существует горизонтальная кривая $\tilde{\gamma}$ в $\mathbb{P}$ из p в pb такая, что кривая в базе $\pi\tilde{\gamma}$ является замкнутым путем с началом и концом в точке $\pi(p)$, которая гомотопна постоянному пути в точке $\pi(p)$. Тогда композиция $(r_b\tilde{\delta}) \circ \tilde{\gamma} \circ \tilde{\delta}^{-1}$ есть горизонтальная кривая в $\mathbb{P}$ из q в qb и ее проекция на базу $\mathbb{M}$ есть замкнутый путь с началом и концом в точке $\pi(q)$, который гомотопен постоянному пути. Поэтому $b \in \Phi_0(q)$. □

Если база $\mathbb{M}$ связна, то для любой пары точек $p, q \in \mathbb{P}$ найдется элемент $a \in \mathbb{G}$ такой, что $q \sim pa$. Поэтому из предложения 14.4.1 следует, что группы голономии $\Phi(p)$ для всех точек $p \in \mathbb{P}$ сопряжены друг другу в $\mathbb{G}$ и поэтому изоморфны. По тем же причинам все суженные группы голономии $\Phi_0(p)$ также изоморфны друг другу.

Итак, мы определили группу голономии $\Phi(p)$, суженную группу голономии $\Phi_0(p)$ и показали, что с точностью до преобразования подобия они не зависят от точки расслоения $\mathbb{P}$. Теперь сформулируем несколько общих свойств групп голономий.

Теорема 14.4.1. *Пусть $\mathbb{P}(\mathbb{M}, \pi, \mathbb{G})$ – главное расслоение со связной базой $\mathbb{M}$. Пусть $\Phi(p)$ и $\Phi_0(p)$ – группа голономии и суженная группа голономии связности Γ в точке $p \in \mathbb{P}$. Тогда:*

1) $\Phi_0(p)$ есть связная подгруппа Ли в $\Phi(p)$;

2) $\Phi_0(p)$ есть нормальная подгруппа в $\Phi(p)$ и фактор группа $\Phi(p)/\Phi_0(p)$ счетна.

Доказательство. Используется паракомпактность базы $\mathbb{M}$. См., например, [?]. □

Следствие. Группа голономии $\Phi(p)$ является подгруппой Ли в структурной группе $\mathbb{G}$ с компонентой единицы $\Phi_0(p)$. В частности, $\dim \Phi(p) = \dim \Phi_0(p)$. □

При определении групп голономий мы не оговорили класс дифференцируемости рассматриваемых кусочно дифференцируемых кривых $\gamma \in \Omega(\mathbb{M}, x)$. Чем ниже класс дифференцируемости, тем больше множество кривых. Поэтому могло бы оказаться так, что группы голономии зависят от класса дифференцируемости кривых. Это оказывается не так. Пусть $\Omega^k(\mathbb{M}, x)$ – множество замкнутых кусочно дифференцируемых путей в $\mathbb{M}$ с началом и концом в точке $x \in \mathbb{M}$ класса $\mathcal{C}^k$. Обозначим соответствующую группу голономии через $\Phi^k(p)$. Очевидно, что $\Phi^1(p) \supset \Phi^2(p) \supset \ldots \supset \Phi^\infty(p)$. Верны также и обратные включения.

Теорема 14.4.2 (Номидзу, Одзеки). *Все группы голономии $\Phi^k(p)$, $1 \le k \le \infty$, совпадают.*

Доказательство. См. [?]. □

Следствие. Все суженные группы голономии $\Phi_0^k(p)$, $1 \le k \le \infty$, совпадают. □

Доказательство. Согласно теореме 14.4.1 суженная группа голономии $\Phi_0^k(p)$ есть связная компонента единицы группы $\Phi^k(p)$. □

Замечание. В случае, когда $\mathbb{P}(\mathbb{M}, \pi, \mathbb{G})$ является вещественно аналитическим главным расслоением с аналитической связностью Γ, можно определить группу голономии $\Phi^\omega(p)$, используя только кусочно аналитические кривые. Можно доказать, что $\Phi^\omega(p) = \Phi^1(p)$ и $\Phi_0^\omega(p) = \Phi_0^1(p)$ [?]. □

Поскольку группы голономии не зависят от класса дифференцируемости путей, то в дальнейшем мы не будем его указывать.

14.5 Петля Вильсона

Настоящий раздел посвящен одному из способов вычисления группы голономии. Пусть задано главное расслоение $\mathbb{P}(\mathbb{M},\pi,\mathbb{G})$ со связностью Г. Рассмотрим окрестность $\mathbb{U}\subset\mathbb{M}$ с координатами x^α, $\alpha=1,\dots,n$, содержащую точку базы $x_0\in\mathbb{M}$, и отождествим подрасслоение $\pi^{-1}(\mathbb{U})$ с прямым произведением $\mathbb{U}\times\mathbb{G}$. Тогда точка подрасслоения задается парой элементов $p=(x,a)\in\mathbb{U}\times\mathbb{G}$. Пусть $\gamma=x(t)$ – произвольная кривая в $\mathbb{U}$ с началом в точке x_0 и $\tilde\gamma=\big(x(t),a(t)\big)$ – ее единственный горизонтальный лифт с началом в точке $p_0=(x_0,a_0)$. При этом функция $a(t)$ определяет некоторую кривую в структурной группе $\mathbb{G}$ с началом в точке a_0. В инвариантном виде мы пишем

$$\tilde\gamma(t)=\mathring{\gamma}(t)\circ a(t),\tag{14.44}$$

где $\mathring{\gamma}(t)=\big(x(t),e\big)$ – опорная кривая в $\pi^{-1}(\mathbb{U})$, лежащая в нулевом сечении, для которой $\pi\big(\mathring{\gamma}\big)=\gamma$. При этом мы рассматриваем равенство (14.44) как уравнение на $a(t)$ при заданной кривой γ.

Касательный вектор к горизонтальной кривой $\tilde\gamma$ имеет вид $\dot{\tilde\gamma}=(\dot x,\dot a)$. Уравнение для $a(t)$ получается из условия горизонтальности. Рассмотрим окрестность единицы группы, где форма связности имеет вид (14.5). Горизонтальность касательного вектора к кривой записывается в виде равенства

$$\omega(\dot{\tilde\gamma})=(\dot x^\alpha\omega_\alpha{}^{\mathrm{A}}+\dot a^{\mathrm{B}}L^{-1}{}_{\mathrm{B}}{}^{\mathrm{A}})L_{\mathrm{A}}=0.$$

Отсюда следует система уравнений на $a^{\mathrm{A}}(t)$:

$$\dot x^\alpha\mathring{A}_\alpha{}^{\mathrm{B}}S^{-1}{}_{\mathrm{B}}{}^{\mathrm{A}}+\dot a^{\mathrm{B}}L^{-1}{}_{\mathrm{B}}{}^{\mathrm{A}}=0,\tag{14.45}$$

где $\mathring{A}_\alpha{}^{\mathrm{A}}(x)$ – компоненты локальной формы связности на нулевом сечении (поле Янга–Миллса) и $S_{\mathrm{B}}{}^{\mathrm{A}}(a)$ – матрица присоединенного представления, соответствующая элементу $a\in\mathbb{G}$.

Уравнение (14.45) неудобно для приложений, т.к. содержит матрицу $L_{\mathrm{B}}{}^{\mathrm{A}}(a)$, которая определена только в окрестности единицы группы. Чтобы устранить это неудобство, перейдем к какому либо представлению структурной группы

$$\rho:\quad \mathbb{G}\ni a\mapsto\{S^{-1}{}_j{}^i(a)\}\in\mathsf{aut}\,\mathbb{V},\qquad i,j=1,\dots,\mathsf{dim}\,\mathbb{V}.$$

Мы выбрали представление в виде обратных матриц, чтобы не менять общепринятого определения хронологического произведения, которое будет дано ниже. Теперь заметим, что

$$\dot S^{-1}{}_i{}^j=\dot a^{\mathrm{A}}\partial_{\mathrm{A}}S^{-1}{}_i{}^j=\dot a^{\mathrm{B}}L^{-1}{}_{\mathrm{B}}{}^{\mathrm{A}}L_{\mathrm{A}}S^{-1}{}_i{}^j=\dot a^{\mathrm{B}}L^{-1}{}_{\mathrm{B}}{}^{\mathrm{A}}S^{-1}{}_i{}^kL_{\mathrm{A}k}{}^j,$$

где $L_{\mathrm{A}i}{}^j$ – представление генераторов L_{A} алгебры Ли $\mathfrak{g}$, и мы воспользовались правилом дифференцирования матриц представления (9.61). Умножив уравнение (14.45) на $S^{-1}{}_i{}^kL_{\mathrm{A}k}{}^j$ и воспользовавшись инвариантностью генераторов $L_{\mathrm{A}i}{}^j$ (9.63), получаем уравнение на матрицу представления

$$\dot S^{-1}{}_i{}^j-\dot x^\alpha\mathring{A}_{\alpha i}{}^kS^{-1}{}_k{}^j=0,$$

где $\mathring{A}_{\alpha i}{}^j=-\mathring{A}_\alpha{}^{\mathrm{A}}L_{\mathrm{A}i}{}^j$. Это уравнение можно переписать в почти ковариантном виде

$$\dot x^\alpha\left(\partial_\alpha S^{-1}{}_i{}^j-\mathring{A}_{\alpha i}{}^kS^{-1}{}_k{}^j\right)=0.$$

Для ковариантности не хватает одного слагаемого с калибровочным полем для индекса j. Опустив, для краткости, матричные индексы, получаем уравнение

$$\dot{S}^{-1} = \dot{x}^\alpha \overset{\circ}{A}_\alpha S^{-1}, \tag{14.46}$$

которое можно записать в интегральном виде,

$$S^{-1}(t) = S_0^{-1} + \int_0^t ds\, \dot{x}^\alpha \overset{\circ}{A}_\alpha S^{-1} = S_0^{-1} + \int_{\gamma(0)}^{\gamma(t)} dx^\alpha \overset{\circ}{A}_\alpha S^{-1}.$$

где $S_0^{-1} = S^{-1}(a_0)$, точка обозначает дифференцирование по s и второй интеграл берется вдоль кривой γ от точки $\gamma(0)$ до точки $\gamma(t)$. Решение этого уравнения записывается в виде упорядоченной P-экспоненты

$$S^{-1}(t) = \mathsf{P}\,\mathsf{exp}\left(\int_0^t ds\, \dot{x}^\alpha \overset{\circ}{A}_\alpha\right) S_0^{-1}, \tag{14.47}$$

которая определена разложением в ряд

$$\mathsf{P}\,\mathsf{exp}\left(\int_0^t ds\, \dot{x}^\alpha \overset{\circ}{A}_\alpha\right) = 1 + \int_0^t ds\, \dot{x}^\alpha \overset{\circ}{A}_\alpha + \int_0^t ds_1 \int_0^{s_1} ds_2\, \dot{x}^{\alpha_1} \overset{\circ}{A}_{\alpha_1} \dot{x}^{\alpha_2} \overset{\circ}{A}_{\alpha_2} + \ldots, \tag{14.48}$$

где

$$\dot{x}^{\alpha_k} \overset{\circ}{A}_{\alpha_k} = \frac{dx^{\alpha_k}(s_k)}{ds_k} \overset{\circ}{A}_{\alpha_k}(s_k), \qquad \forall k = 1, 2, \ldots .$$

Напомним общее определение P-произведения.

Определение. Пусть задано семейство операторов $A(t)$, непрерывно зависящих от вещественного параметра t, тогда

$$\mathsf{P}[A(t_1)A(t_2)] = \begin{cases} A(t_1)A(t_2), & t_1 \geq t_2, \\ A(t_2)A(t_1), & t_1 < t_2 \end{cases} \tag{14.49}$$

называется P-*произведением* или *упорядоченным произведением* операторов $A(t_1)$ и $A(t_2)$. □

Если операторы для различных точек коммутируют, то P-произведение совпадает с обычным произведением.

Замечание. В квантовой теории поля роль параметра t часто играет время. Поэтому P-произведение называют также *хронологическим произведением.* □

Нетрудно проверить равенство

$$\int_0^t ds_1 \int_0^{s_1} ds_2 \ldots \int_0^{s_{k-1}} ds_k A(s_1)A(s_2)\ldots A(s_k) = \\ = \frac{1}{k!} \int_0^t ds_1 \int_0^t ds_2 \ldots \int_0^t ds_k \mathsf{P}[A(s_1)A(s_2)\ldots A(s_k)].$$

Поэтому разложение (14.48) имеет место.

Известно, что ряд (14.48) равномерно сходится в шаре произвольного радиуса.

Продолжим общее построение. Если представление структурной группы является точным, то матрица представления $S^{-1}(a)$ однозначно определяет элемент структурной группы $a = \rho^{-1}(S^{-1})$. В этом случае решение (14.47) определяет кривую $a(t)$ с началом в точке $a_0 \in \mathbb{G}$. Меняя точку a_0, мы получаем отображение

$$\pi^{-1}(x_0) \ni (x_0, a_0) \mapsto \big(x(t), a(t)\big) \in \pi^{-1}\big(x(t)\big), \qquad \forall a_0 \in \mathbb{G}. \tag{14.50}$$

Поскольку кривая $\tilde{\gamma}$ горизонтальна, то это отображение задает параллельный перенос слоя $\pi^{-1}(x_0)$ главного расслоения $\mathbb{P}$ вдоль пути $\gamma \in \mathbb{M}$.

Таким образом, решение (14.47) определяет параллельный перенос слоев (14.50) через компоненты связности $\overset{\circ}{A}_\alpha$ на опорном нулевом сечении. Отображение (14.50) можно построить для произвольного опорного сечения следующим образом. Пусть задано произвольное сечение $\sigma(x) = \big(x, b(x)\big)$. Тогда компоненты локальной формы связности для рассматриваемого представления на этом сечении имеют вид (14.14)

$$A_\alpha = S_b \overset{\circ}{A}_\alpha S_b^{-1} + \partial_\alpha S_b S_b^{-1}, \qquad S_b := S(b).$$

Для горизонтальной кривой $\tilde{\gamma}$ имеем

$$\tilde{\gamma} = \big(x(t), a(t)\big) = \big(x(t), b(t)c(t)\big), \tag{14.51}$$

где $c(t)$ – некоторая новая кривая в $\mathbb{G}$, связывающая кривую $\big(x(t), b(t)\big)$ на сечении σ с горизонтальной кривой $\tilde{\gamma}$. Поскольку $S_a^{-1} = S_b^{-1} S_c^{-1}$, то простые вычисления приводят (14.46) к уравнению

$$\dot{S}_c^{-1} = \dot{x}^\alpha A_\alpha S_c^{-1},$$

определяющему кривую $c(t)$ с начальным условием $c_0 = b_0^{-1} a_0$. Решение этого уравнения также дается упорядоченной экспонентой

$$S_c^{-1}(t) = \mathsf{P}\,\mathsf{exp}\left(\int_0^t ds\, \dot{x}^\alpha A_\alpha\right) S_{c(0)}^{-1}.$$

Эта формула также определяет параллельный перенос (14.50), что следует из (14.51).

Поскольку $S_0^{-1} = S_{b(0)}^{-1} S_{c(0)}^{-1}$, то простые вычисления приводят к следующему правилу преобразования упорядоченной экспоненты при изменении сечения $\sigma_0 \mapsto \sigma$

$$\mathsf{P}\,\mathsf{exp}\left(\int_0^t ds\, \dot{x}^\alpha \overset{\circ}{A}_\alpha\right) = S(b_0)\mathsf{P}\,\mathsf{exp}\left(\int_0^t ds\, \dot{x}^\alpha A_\alpha\right) S^{-1}(b_t). \tag{14.52}$$

Этот закон преобразования похож на тензорный, однако таковым не является, потому что слева и справа стоят матрицы преобразования, взятые в различных точках: в начале и конце пути.

Если задано два произвольных сечения (14.9) то имеет место аналогичная формула.

Рассмотрим замкнутый путь в базе $\gamma \in \Omega(\mathbb{U}, x_0)$. Поскольку мы ограничились координатной окрестностью $\mathbb{U}$, то все пути стягиваемы к точке x_0 (гомотопны постоянному пути в x_0). Для этих путей $S(1) = S(0)$ и P-экспонента при калибровочном преобразовании $\sigma_0 \mapsto \sigma$ преобразуется по тензорному закону

$$\mathsf{P}\,\mathsf{exp}\left(\oint_\gamma dx^\alpha \overset{\circ}{A}_\alpha\right) = S(b_0)\mathsf{P}\,\mathsf{exp}\left(\oint_\gamma dx^\alpha A_\alpha\right) S^{-1}(b_0). \tag{14.53}$$

При параллельном переносе слоя $\pi^{-1}(x_0)$ вдоль замкнутого пути γ точка $p_0 = (x_0, a_0)$ отобразится в точку $p_1 = (x_0, a_1)$. Пусть $a_0 = e$, тогда $S_0 = \mathbb{1}$. В этом случае

$$\hat{a} = \rho^{-1}\left[\mathsf{P}\,\mathsf{exp}\left(\oint_\gamma dx^\alpha \overset{\circ}{A}_\alpha\right)\right] \quad \in \Phi_0\big(\sigma_0(x_0)\big) \tag{14.54}$$

– элемент суженной группы голономии $\Phi_0\big(\sigma_0(x_0)\big)$. Он определяется калибровочным полем, соответствующим нулевому сечению σ_0, которое проходит через начальную точку кривой (x_0, e). Если $a_0 \neq e$, то элемент группы голономии имеет вид $a_0^{-1}a_1 \in \Phi_0(p_0)$ и равен

$$\rho^{-1}\left[S_0^{-1}\mathsf{P}\,\mathsf{exp}\left(\oint_\gamma dx^\alpha \overset{\circ}{A}_\alpha\right) S_0\right] = a_0^{-1}\hat{a}a_0 \quad \in \Phi_0\big(\sigma(x_0)\big).$$

То есть он сопряжен элементу $\hat{a}$ в соответствии с утверждением 1) предложения 14.4.1.

Поскольку P-экспонента для замкнутого пути при изменении сечения преобразуется по тензорному закону (14.53), то для произвольного сечения σ P-экспонента определяет элемент суженной группы голономии $\Phi_0\big(\sigma(x_0)\big)$,

$$\rho^{-1}\left[\mathsf{P}\,\mathsf{exp}\left(\oint_\gamma dx^\alpha A_\alpha\right)\right] \quad \in \Phi_0\big(\sigma(x_0)\big), \tag{14.55}$$

где A_α – калибровочное поле, соответствующее произвольному сечению, проходящему через точку $\sigma(x_0) \in \pi^{-1}(\mathbb{U})$. Таким образом, рассматривая все замкнутые пути $\gamma \in \mathbb{M}$ с началом в точке x_0, можно определить суженную группу голономии.

Определение. Рассмотрим след от P-экспоненты

$$W_\gamma[A] := \mathsf{tr}\left[\mathsf{P}\,\mathsf{exp}\left(\oint_\gamma dx^\alpha A_\alpha\right)\right]. \tag{14.56}$$

Этот объект инвариантен относительно калибровочных преобразований, что следует из равенства (14.53), и называется *петлей Вильсона.* □

Петля Вильсона играет важную роль в решеточной формулировке квантовых калибровочных моделей.

Полученное выражение для упорядоченной экспоненты (14.47) не зависит от выбора координат на $\mathbb{U} \subset \mathbb{M}$. Это значит, что понятие упорядоченной экспоненты, которое было получено в одной карте, без труда переносится на произвольные пути в $\mathbb{M}$, которые в общем случае не покрываются одной картой. Для этого весь путь надо разбить на отрезки, каждый из которых покрывается одной картой, и взять сумму интегралов вдоль каждого отрезка.

14.6 Отображение связностей

В разделе 13.3 мы изучили отображение расслоений. В частности, было определено вложение (инъекция) расслоений, редукция структурной группы, а также индуцированное расслоение. Ниже мы изучим вопрос о том, как ведут себя связности и соответствующие им группы голономий при отображении расслоений. В дальнейшем эти результаты будут использованы при изучении групп голономий.

Предложение 14.6.1. *Пусть* $f: \mathbb{P}_1(\mathbb{M}_1, \pi_1, \mathbb{G}_1) \to \mathbb{P}_2(\mathbb{M}_2, \pi_2, \mathbb{G}_2)$ *– гомоморфизм главных расслоений, состоящий из дифференцируемого отображения пространств расслоений* $f_{\mathbb{P}}: \mathbb{P}_1 \to \mathbb{P}_2$ *и гомоморфизма структурных групп* $f_{\mathbb{G}}: \mathbb{G}_1 \to \mathbb{G}_2$*, такой, что индуцированное отображение баз* $f_{\mathbb{M}}: \mathbb{M}_1 \to \mathbb{M}_2$ *есть диффеоморфизм. Пусть* Γ_1 *– связность на* $\mathbb{P}_1$ *с формой связности* ω_1 *и формой кривизны* R_1*. Тогда:*

1) *Существует единственная связность* Γ_2 *на* $\mathbb{P}_2$ *такая, что* $f_{\mathbb{P}}$ *отображает горизонтальные подпространства связности* Γ_1 *в горизонтальные подпространства связности* Γ_2*.*
2) *Если* ω_2 *и* R_2 *– формы связности и кривизны для* Γ_2*, то*

$$f_{\mathbb{P}}^*\omega_2 = f_{\mathfrak{g}}\omega_1 \quad \text{и} \quad f_{\mathbb{P}}^* R_2 = f_{\mathfrak{g}} R_1,$$

где правые части $f_{\mathfrak{g}}\omega_1$ *и* $f_{\mathfrak{g}}R_1$ *обозначают* $\mathfrak{g}_2$*-значные формы на* $\mathbb{P}_1$*, определенные соотношениями:*

$$(f_{\mathfrak{g}}\omega_1)(\widetilde{X}) = f_{\mathfrak{g}}\big(\omega_1(\widetilde{X})\big) \quad \text{и} \quad (f_{\mathfrak{g}}R_1)(\widetilde{X}, \widetilde{Y}) = f_{\mathfrak{g}}\big(R_1(\widetilde{X}, \widetilde{Y})\big) \quad \forall \widetilde{X}, \widetilde{Y} \in \mathcal{X}(\mathbb{P}_1),$$

где $f_{\mathfrak{g}} = f_{\mathbb{G}*}$ *– гомоморфизм алгебр Ли* $\mathfrak{g}_1 \to \mathfrak{g}_2$*, индуцированный отображением структурных групп* $f_{\mathbb{G}}: \mathbb{G}_1 \to \mathbb{G}_2$ *(дифференциал отображения* $f_{\mathbb{G}}$*).*
3) *Если* $p_2 = f_{\mathbb{P}}(p_1) \in \mathbb{P}_2$ *– образ точки* $p_1 \in \mathbb{P}_1$*, то* $f_{\mathbb{G}}$ *гомоморфно отображает группу голономии* $\Phi(p_1)$ *в точке* p_1 *на* $\Phi(p_2)$ *и ограниченную группу голономии* $\Phi_0(p_1)$ *на* $\Phi_0(p_2)$*.*

Доказательство. Проводится путем явного построения связности Γ_2 на $\mathbb{P}_2$. См., например, [**?**]. □

Определение. В ситуации, описанной в предложении 14.6.1, говорят, что f отображает связность Γ_1 в связность Γ_2. В частном случае, если $\mathbb{P}_1(\mathbb{M}_1, \pi_1, \mathbb{G}_1)$ – редуцированное подрасслоение в $\mathbb{P}_2(\mathbb{M}_2, \pi_2, \mathbb{G}_2)$, т.е. $f_{\mathbb{G}}$ – мономорфизм, $\mathbb{M}_1 = \mathbb{M}_2 = \mathbb{M}$ и $f_{\mathbb{M}} = \mathsf{id}_{\mathbb{M}}$, то говорят, что связность Γ_2 на $\mathbb{P}_2$ *редуцируема* к связности Γ_1 на $\mathbb{P}_1$. Автоморфизм f главного расслоения $\mathbb{P}(\mathbb{M}, \pi, \mathbb{G})$ называется *автоморфизмом связности* Γ на $\mathbb{P}$, если он отображает Γ в Γ. В этом случае говорят, что связность Γ *инвариантна* относительно f. □

Предложение 14.6.2. *Любая связность* Γ *на главном расслоении* $\mathbb{P}(\mathbb{M}, \pi, \mathbb{G})$ *инвариантна относительно вертикальных автоморфизмов (пример 13.3.1).* □

Доказательство. Прямое следствие свойства 2) в определении связности. □

Следствие. Пусть $\mathbb{Q}(\mathbb{M}, \pi, \mathbb{H})$ – подрасслоение в $\mathbb{P}(\mathbb{M}, \pi, \mathbb{G})$, где $\mathbb{H}$ – подгруппа Ли в $\mathbb{G}$. Пусть Γ - связность на $\mathbb{P}$ с формой связности ω. Тогда связность Γ на $\mathbb{P}$ редуцируема к связности Γ' на $\mathbb{Q}$ тогда и только тогда, когда сужение формы связности ω на $\mathbb{Q}$ является $\mathfrak{h}$-значным. Если связность Γ редуцируема к Γ', то группы голономии Φ и суженные группы голономии Φ_0 для $\mathbb{Q}$ и $\mathbb{P}$ изоморфны. □

Доказательство. Пусть Γ' – связность на $\mathbb{Q}$. Ее форма связности, по определению, $\mathfrak{h}$-значна и по предложению 14.6.1 продолжается единственным образом до связности Γ на $\mathbb{P}$. Обратно. Если связность Γ на $\mathbb{P}$ редуцируема к связности на $\mathbb{Q}$, то сужение ω на $\mathbb{Q}$ $\mathfrak{h}$-значно. Пусть связность Γ редуцируема к Γ'. Отождествим множество точек $\mathbb{Q}$ с его образом $f_{\mathbb{P}}(\mathbb{Q})$ в $\mathbb{P}$. Тогда любая горизонтальная кривая в $\mathbb{P}$ с началом в произвольной точке $p' \in f_{\mathbb{P}}(\mathbb{Q})$ будет целиком лежать в $f_{\mathbb{P}}(\mathbb{Q})$, т.к. сужение распределения горизонтальных подпространств в $\mathbb{P}$ на $\mathbb{Q}$ совпадает со связностью на

$\mathbb{Q}$. Поскольку группы голономии для всех точек $p \in \mathbb{P}$ изоморфны, то изоморфны также все группы голономии для $\mathbb{Q}$ и $\mathbb{P}$. □

Предложение 14.6.3. *Пусть $\mathbb{Q}(\mathbb{M}, \pi, \mathbb{H})$ – подрасслоение в главном расслоении $\mathbb{P}(\mathbb{M}, \pi, \mathbb{G})$, где $\mathbb{H}$ – подгруппа Ли в $\mathbb{G}$. Допустим, что алгебра Ли $\mathfrak{g}$ для $\mathbb{G}$ допускает подпространство $\mathfrak{m}$ такое, что $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{m}$ и $\mathsf{ad}\,(\mathbb{H})\mathfrak{m} = \mathfrak{m}$, где $\mathfrak{h}$ подалгебра Ли для $\mathbb{H}$. Тогда для каждой формы связности ω на $\mathbb{P}$ $\mathfrak{h}$-компонента ω' формы связности ω, суженная на $\mathbb{Q}$ является формой связности на $\mathbb{Q}$.*

Доказательство. См., например, [**?**]. □

Замечание. В силу следствия из предложения 14.6.1 форма связности ω' совпадает с ω на $\mathbb{Q}$. □

В предложении 14.6.1 мы рассматривали отображение связности Γ_1 на $\mathbb{P}_1$ в некоторую связность Γ_2 на $\mathbb{P}_2$. При определенных условиях справедливо также обратное утверждение, и связность с $\mathbb{P}_2$ можно перенести на $\mathbb{P}_1$.

Предложение 14.6.4. *Пусть $f : \mathbb{P}_1(\mathbb{M}_1, \pi_1, \mathbb{G}_1) \to \mathbb{P}_2(\mathbb{M}_2, \pi_2, \mathbb{G}_2)$ – гомоморфизм главных расслоений такой, что гомоморфизм структурных групп $f_{\mathbb{G}} : \mathbb{G}_1 \to \mathbb{G}_2$ является изоморфизмом. Пусть Γ_2 – связность на $\mathbb{P}_2$ с формой связности ω_2 и формой кривизны R_2. Тогда:*

1) *Существует единственная связность Γ_1 на $\mathbb{P}_1$ такая, что $f_{\mathbb{P}}$ отображает горизонтальные подпространства связности Γ_1 в горизонтальные подпространства связности Γ_2.*
2) *Если ω_1 и R_1 – формы связности и кривизны для Γ_1, то*

$$f^*_{\mathbb{P}}\omega_2 = f_{\mathfrak{g}}\omega_1 \quad \text{и} \quad f^*_{\mathbb{P}}R_2 = f_{\mathfrak{g}}R_1,$$

   где праве части определены в предложении 14.6.1.
3) *Если $p_2 = f_{\mathbb{P}}(p_1) \in \mathbb{P}_2$ – образ точки $p_1 \in \mathbb{P}_1$, то изоморфизм $f_{\mathbb{G}}$ гомоморфно отображает группу голономии $\Phi(p_1)$ в точке p_1 в $\Phi(p_2)$ и ограниченную группу голономии $\Phi_0(p_1)$ в $\Phi_0(p_2)$.*

Доказательство. Проводится путем явного построения связности Γ_1 на $\mathbb{P}_1$. См., например, [**?**]. □

Определение. В ситуации, описанной в предложении 14.6.4, говорят, что связность Γ_1 *индуцирована гомоморфизмом f* из связности Γ_2. □

Следствие. Если $f : \mathbb{P}_1 \to \mathbb{P}_2$ – такое отображение расслоений, что $\mathbb{G}_1 = \mathbb{G}_2$ и $f_{\mathbb{G}} = \mathsf{id}_{\mathbb{G}}$ – тождественный автоморфизм, то $\omega_1 = f^*_{\mathbb{P}}\omega_2$. В частности, для данного главного расслоения $\mathbb{P}(\mathbb{M}, \pi, \mathbb{G})$ и отображения $f_{\mathbb{N}} : \mathbb{N} \to \mathbb{M}$ каждая связность на $\mathbb{P}$ индуцирует связность на $f^{-1}_{\mathbb{N}}(\mathbb{P})$. В частности, если $\mathbb{U} \subset \mathbb{M}$ – открытое подмножество, то связность Γ на $\mathbb{P}(\mathbb{M}, \pi, \mathbb{G})$ индуцирует связность на индуцированном подрасслоении $\mathbb{P}|_{\mathbb{U}} = \pi^{-1}(\mathbb{U})$. □

Замечание. В предложении 14.6.1 связность Γ_2 на $\mathbb{P}_2$ строилась таким образом, что гомоморфное отображение групп голономий является сюръективным. В предложении 14.6.4 утверждается, что отображение групп голономий является только гомоморфизмом. □

14.7 Связность на ассоциированном расслоении

Пусть дано главное расслоение $\mathbb{P}(\mathbb{M},\pi,\mathbb{G})$ и ассоциированное с ним расслоение $\mathbb{E}(\mathbb{M},\pi_{\mathbb{E}},\mathbb{F},\mathbb{G},\mathbb{P})$ с типичным слоем $\mathbb{F}$ (см. раздел 13.2). Если на $\mathbb{P}$ задана связность, то она определяет связность на $\mathbb{E}$ следующим образом.

Определение. Пусть $u\in\mathbb{E}$ – произвольная точка ассоциированного расслоения. *Вертикальным подпространством* $\mathbb{V}_u(\mathbb{E})$ в касательном пространстве $\mathbb{T}_u(\mathbb{E})$ называется касательное пространство к слою $\pi_{\mathbb{E}}^{-1}\big(\pi_{\mathbb{E}}(u)\big)$, которое лежит в $\mathbb{T}_u(\mathbb{E})$. □

Чтобы определить горизонтальное подпространство, вспомним, что ассоциированное расслоение строилось с помощью естественной проекции на фактор пространство

$$\mathbb{P}\times\mathbb{F}\to\mathbb{E}=\mathbb{P}\times_{\mathbb{G}}\mathbb{F}.$$

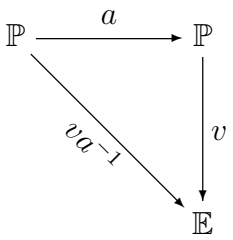
Выберем точку $(p,v)\in\mathbb{P}\times\mathbb{F}$, которая проектируется на $u\in\mathbb{E}$. Теперь зафиксируем точку типичного слоя $v\in\mathbb{F}$ и рассмотрим отображение

$$v:\ \mathbb{P}\ni p\mapsto v(p)=u\in\mathbb{E}, \tag{14.57}$$

отображающее точку $p\in\mathbb{P}$ в $v(p)\in\mathbb{E}$. То есть каждой точке типичного слоя v ставится в соответствие отображение (14.57), которое мы обозначаем той же буквой.

Замечание. В отличии от отображения $p:\ \mathbb{F}\to\mathbb{F}_x$, определенного ранее (13.12), это отображение в общем случае не является диффеоморфизмом, так как размерности главного и ассоциированного расслоения могут отличаться. Даже если размерности совпадают, $\dim\mathbb{G}=\dim\mathbb{F}$, то этого недостаточно для того, чтобы отображение (14.57) было диффеоморфизмом. Действительно, если v_0 – неподвижная точка группы преобразований, то отображение $v_0(p)$ переводит все точки слоя $\pi^{-1}(x)$ в одну фиксированную точку ассоциированного расслоения $u_0\in\pi_{\mathbb{E}}^{-1}(x)$. □

Поскольку точки (p,v) и (pa,va) из $\mathbb{P}\times\mathbb{F}$ проектируются в одну и ту же точку ассоциированного расслоения $u\in\mathbb{E}$, то $(va^{-1})(p)=v(pa)$, т.е. диаграмма



коммутативна. Используя построенное отображение, определим горизонтальные подпространства.

Определение. *Горизонтальным подпространством* в точке $u\in\mathbb{E}$ называется образ $\mathbb{H}_u(\mathbb{E})=v_*\big(\mathbb{H}_p(\mathbb{P})\big)$, где v_* – дифференциал отображения (14.57). □

Легко видеть, что подпространство $\mathbb{H}_u(\mathbb{E})$ не зависит от выбора точек $(p,v)\in\mathbb{P}\times\mathbb{F}$, которые проектируются в точку $u\in\mathbb{E}$. Действительно, поскольку $(va)(p)=v(pa^{-1})$, то $(va)_*=v_*\circ r_{a*}^{-1}$. Поэтому для точки (pa,va), которая проектируется в ту же точку $u\in\mathbb{E}$, что и (p,v), имеем

$$\mathbb{H}_u=(va)_*\mathbb{H}_{pa}=v_*\circ r_{a*}^{-1}\circ r_{a*}\mathbb{H}_p=v_*\mathbb{H}_p,$$

где мы использовали инвариантность (14.3) распределения горизонтальных подпространств на $\mathbb{P}$. В следующем примере мы докажем, что касательное пространство к ассоциированному расслоению представляет собой прямую сумму,

$$\mathbb{T}_u(\mathbb{E}) = \mathbb{V}_u(\mathbb{E}) \oplus \mathbb{H}_u(\mathbb{E}). \tag{14.58}$$

Этого достаточно для определения связности в ассоциированном расслоении, т.к. в определение связности на расслоении общего вида **??** инвариантность распределения горизонтальных подпространств относительно групповых преобразований не входит. Тем не менее построенная связность обладает дополнительным свойством, которое наследуется из главного расслоения: она инвариантна относительно действия группы справа. По построению, отображение (14.57) перестановочно с групповым действием. Поэтому перестановочны также дифференциалы этих отображений,

$$v_* \circ r_{a*} = r_{a*} \circ v_*.$$

Тогда из правой инвариантности связности на главном расслоении (14.3) следует инвариантность связности на ассоциированном расслоении

$$r_{a*}\mathbb{H}_u(\mathbb{E}) = \mathbb{H}_{ua}(\mathbb{E}). \tag{14.59}$$

Пример 14.7.1 (Локальное рассмотрение). Рассмотрим достаточно малую координатную окрестность на базе, $\mathbb{U} \subset \mathbb{M}$, с координатами x^α, $\alpha = 1, \dots, n$, такую, что выполнены условия локальной тривиализации расслоений, $\pi^{-1}(\mathbb{U}) \approx \mathbb{U} \times \mathbb{G}$ и $\pi_{\mathbb{E}}^{-1}(\mathbb{U}) \approx \mathbb{U} \times \mathbb{F}$. Отождествим $\pi^{-1}(\mathbb{U})$ с $\mathbb{U} \times \mathbb{G}$ и $\pi_{\mathbb{E}}^{-1}(\mathbb{U})$ с $\mathbb{U} \times \mathbb{F}$. Ограничим наше рассмотрение окрестностью единицы группы Ли, $\mathbb{U}_\mathbb{G} \subset \mathbb{G}$, где определены координаты a^{A}, $\mathrm{A} = 1, \dots, \mathrm{N}$, и функция композиции (см. раздел 9.1). Выберем также некоторую координатную окрестность в типичном слое, $\mathbb{U}_\mathbb{F} \subset \mathbb{F}$, где определены координаты v^i, $i = 1, \dots, \dim \mathbb{F}$, и задано отображение $v \mapsto va$ в координатной форме. Тогда точки расслоений будут иметь координаты $p = \{x^\alpha, a^{\mathrm{A}}\} \in \mathbb{P}$ и $u = \{x^\alpha, v^i\} \in \mathbb{E}$. По определению, векторы ∂_i касательны к слою $\pi_{\mathbb{E}}^{-1}(x)$ и, следовательно, образуют базис вертикальных подпространств $\mathbb{V}_u(\mathbb{E})$ для всех $u \in \mathbb{E}$. Пусть $v_0 = \{v_0^i\} \in \mathbb{U}_\mathbb{F}$ – фиксированная точка типичного слоя. Тогда соответствующее этой точке отображение (14.57) в координатах имеет вид

$$v_0 : \quad \mathbb{U} \times \mathbb{U}_\mathbb{G} \ni \{x^\alpha, a^{\mathrm{A}}\} \mapsto \{x^\alpha, v^i(v_0, a)\} \in \mathbb{U} \times \mathbb{U}_\mathbb{F},$$

где $v^i(v_0, a)$ – некоторая функция координат v_0^i и a^{A}. Пусть $D_\alpha = \partial_\alpha - \omega_\alpha{}^{\mathrm{A}} L^*_{\mathrm{A}}$, где $\omega_\alpha{}^{\mathrm{A}}$ есть компоненты формы связности (14.4), – базис горизонтальных подпространств $\mathbb{H}_p(\mathbb{P})$ в главном расслоении, который был построен ранее (14.37). Тогда он отображается в касательное пространство к ассоциированному расслоению,

$$v_{0*} : \quad \mathbb{H}_p(\mathbb{P}) \ni D_\alpha \mapsto \overline{D}_\alpha = \partial_\alpha - \omega_\alpha{}^{\mathrm{A}} L^*_{\mathrm{A}} v^i \partial_i \in \mathbb{H}_u(\mathbb{E}),$$

где L^*_{A} действует на $v^i(v_0, a)$ как дифференцирование по a. Конкретный вид функций $v^i(v_0, a)$ зависит от типичного слоя и действия на нем структурной группы. Независимо от вида функций $v^i(v_0, a)$ векторы $\overline{D}_\alpha$ линейно независимы, т.к. содержат ∂_α, и поэтому образуют базис горизонтального подпространства $\mathbb{H}_u(\mathbb{E})$. Таким образом совокупность векторов $\{\overline{D}_\alpha, \partial_i\}$ образует базис касательного пространства $\mathbb{T}_u(\mathbb{E})$, который соответствует разложению (14.58). Аналогичное построение можно выполнить

в окрестности произвольной точки ассоциированного расслоения $u \in \mathbb{E}$. Следовательно, разложение касательного пространства $\mathbb{T}_u(\mathbb{E})$ в прямую сумму (14.58) имеет место в общем случае.

Если типичный слой – это векторное пространство $\mathbb{V}$, на котором задано представление ρ (см., раздел 9.8), то

$$v^i(v_0, a) = v_0^j S^{-1}{}_j^i(a),$$

где $S_j{}^i(a)$ – матрица представления элемента $a \in \mathbb{G}$. В этом случае

$$\omega_\alpha{}^{\text{A}} L^*_{\text{A}} v^i = \omega_\alpha{}^{\text{A}} v_0^j S_j{}^k L_{\text{A}k}{}^i = -v^j \omega_{\alpha j}{}^i,$$

где введено обозначение $\omega_{\alpha j}{}^i = -\omega_\alpha{}^{\text{A}} L_{\text{A}j}{}^i$ и мы воспользовались правилом дифференцирования матриц представления (9.62). Тогда базис горизонтальных векторных полей на ассоциированном расслоении имеет вид

$$\overline{D}_\alpha = \partial_\alpha + v^j \omega_{\alpha j}{}^i \partial_i. \tag{14.60}$$

Этот базис инвариантен относительно действия структурной группы $\mathbb{G}$ на ассоциированном расслоении $\mathbb{E}$ справа. Действительно, действие элемента $b \in \mathbb{G}$ на базисный вектор (14.60) имеет вид

$$r_{b*}\overline{D}_\alpha = \partial_\alpha + v^i \omega_{\alpha i}{}^j(u) S^{-1}{}_j^k(b) \partial_k,$$

т.к. $v^i(v_0, ab) = v^j(v_0, a) S^{-1}{}_j^i(b)$. Поскольку $v^i(ub) = v^j(u) S^{-1}{}_j^i(b)$ и $\omega_\alpha{}^{\text{A}}(pb) = \omega_\alpha{}^{\text{B}} S^{-1}{}_{\text{B}}^{\text{A}}(b)$, то

$$r_{b*}\overline{D}_\alpha|_u = \overline{D}_\alpha|_{ub},$$

где мы воспользовались инвариантностью (9.63) матриц представления генераторов структурной группы. Это соответствует инвариантности распределения горизонтальных подпространств на ассоциированном расслоении (20.8). □

Определения горизонтального лифта и параллельного переноса для ассоциированных расслоений дословно повторяют определения, данные для главных расслоений.

Определение. Кривая $\bar{\gamma}$ в ассоциированном расслоении $\mathbb{E}$ называется *горизонтальной*, если касательный к ней вектор горизонтален в каждой точке. Если задана кривая γ в базе $\mathbb{M}$, то *горизонтальным лифтом* или просто *лифтом* этой кривой называется такая горизонтальная кривая $\bar{\gamma}$ в $\mathbb{E}$, что $\pi_{\mathbb{E}}(\bar{\gamma}) = \gamma$. □

Предложение 14.7.1. *Пусть $\gamma = x(t)$, $t \in \bar{\mathbb{I}}$, – кусочно дифференцируемая кривая класса $\mathcal{C}^1$ в $\mathbb{M}$ с началом в точке $x_0 \in \mathbb{M}$. Тогда для произвольной точки слоя $u_0 \in \pi_{\mathbb{E}}^{-1}(x_0)$ существует единственный горизонтальный лифт $\bar{\gamma} = u(t)$ кривой γ с началом в точке u_0.*

Доказательство. Сначала докажем существование горизонтального лифта. Выберем точку $(p_0, v_0) \in \mathbb{P} \times \mathbb{F}$ такую, что $p_0(v_0) = u_0$, где отображение p определено формулой (13.12). Согласно предложению 14.3.1 существует единственный горизонтальный лифт $\tilde{\gamma}$ кривой γ в главное расслоение $\mathbb{P}$ с началом в точке $p_0 \in \mathbb{P}$. Тогда кривая $\bar{\gamma} = \tilde{\gamma}(v_0)$ является горизонтальным лифтом кривой в базе γ в ассоциированное расслоение $\mathbb{E}$. Действительно, касательный вектор к кривой $\bar{\gamma}$ лежит в $\mathbb{H}_\gamma(\mathbb{E})$, что сразу следует из определения дифференциала отображения (3.63). Единственность горизонтального лифта следует из единственности решения системы линейных дифференциальных с заданными начальными условиями. □

Для формулировки следующего утверждения нам понадобится естественное

Определение. Локальное сечение ассоциированного расслоения $\sigma : \mathbb{U} \to \mathbb{E}$, определенное на открытом подмножестве $\mathbb{U} \subset \mathbb{M}$, называется *параллельным*, если образ $\sigma_* \mathbb{T}_x(\mathbb{M})$, где σ_* – дифференциал сечения, горизонтален при всех $x \in \mathbb{U}$, т.е. для любой кривой γ в $\mathbb{U}$, соединяющей точки x_0 и x_1, точка слоя $\sigma(x_0)$ при параллельном переносе слоя вдоль кривой γ переходит в точку $\sigma(x_1)$. □

В предложении 13.2.2 мы отождествили ассоциированное расслоение $\mathbb{E}(\mathbb{M}, \pi_{\mathbb{E}}, \mathbb{G}/\mathbb{H}, \mathbb{G}, \mathbb{P})$ с фактор пространством $\mathbb{P}/\mathbb{H}$. Затем в теореме 13.3.2 привели критерий редуцируемости структурной группы $\mathbb{G}$ главного расслоения $\mathbb{P}(\mathbb{M}, \pi, \mathbb{G})$ к подгруппе $\mathbb{H}$, который заключается в существовании глобального сечения σ ассоциированного расслоения $\mathbb{E}$. Кроме того, была установлена естественная взаимно однозначная связь между сечениями σ ассоциированного расслоения $\mathbb{E}$ и редуцированными главными расслоениями $\mathbb{Q}(\mathbb{M}, \pi, \mathbb{H})$. В примере 13.3.2 эта теорема была использована для доказательства существования римановой метрики на произвольном многообразии. Возникает вопрос о том, в каком случае связность, заданная на главном расслоении $\mathbb{P}$ редуцируема к связности на редуцированном расслоении $\mathbb{Q}$? Ответ дает следующее утверждение.

Предложение 14.7.2. *Пусть $\mathbb{P}(\mathbb{M}, \pi, \mathbb{G})$ – главное расслоение и $\mathbb{E}(\mathbb{M}, \pi_{\mathbb{E}}, \mathbb{G}/\mathbb{H}, \mathbb{G}, \mathbb{P})$ ассоциированное расслоение со стандартным слоем $\mathbb{G}/\mathbb{H}$, где $\mathbb{H}$ – замкнутая подгруппа в $\mathbb{G}$. Пусть $\sigma : \mathbb{M} \to \mathbb{E}$ – глобальное сечение ассоциированного расслоения и $\mathbb{Q}(\mathbb{M}, \pi, \mathbb{H})$ редуцированное подрасслоение в $\mathbb{P}(\mathbb{M}, \pi, \mathbb{G})$, соответствующее сечению σ. Связность Γ на $\mathbb{P}$ редуцируема к связности Γ' на $\mathbb{Q}$ тогда и только тогда, когда сечение σ параллельно относительно Γ.*

Доказательство. См., например, [**?**]. □

14.8 Свойства групп голономий

Продолжим изучение свойств групп голономий, которое было начато в разделе 14.4.

Теорема 14.8.1 (Теорема редукции). *Пусть $\mathbb{P}(\mathbb{M}, \pi, \mathbb{G})$ – главное расслоение со связностью Γ и p – произвольная точка в $\mathbb{P}$. Обозначим через $\mathbb{P}(p)$ множество точек в $\mathbb{P}$, которые можно соединить с точкой p горизонтальными кусочно дифференцируемыми кривыми. Тогда:*

1) $\mathbb{P}(p)$ – редуцированное расслоение со структурной группой $\Phi(p)$;

2) Связность Γ редуцируема к связности на $\mathbb{P}(p)$.

Доказательство. См., например, [**?**]. □

Эта теорема оправдывает следующее

Определение. Главное расслоение $\mathbb{P}(p)$, с базой $\mathbb{M}$, проекцией π и структурной группой $\Phi(p)$, состоящее из множества точек в главном расслоении $\mathbb{P}(\mathbb{M}, \pi, \mathbb{G})$, которые можно соединить с точкой p горизонтальными кусочно дифференцируемыми кривыми, называется *расслоением голономии* через p. □

Очевидно, что $\mathbb{P}(p) = \mathbb{P}(q)$ тогда и только тогда, когда точки p и q можно соединить горизонтальной кривой. В разделе 14.4 было введено отношение эквивалентности: $p \sim q$, если p и q можно соединить горизонтальной кривой. Поэтому для каждой

пары точек из главного расслоения $\mathbb{P}(\mathbb{M},\pi,\mathbb{G})$ либо $\mathbb{P}(p)=\mathbb{P}(q)$, либо $\mathbb{P}(p)\cap\mathbb{P}(q)=\emptyset$. Другими словами, главное расслоение $\mathbb{P}(\mathbb{M},\pi,\mathbb{G})$ разлагается в объединение,

$$\mathbb{P}(\mathbb{M},\pi,\mathbb{G})=\bigcup_{p\in\mathbb{P}}\mathbb{P}(p),$$

попарно непересекающихся расслоений голономии. Так как каждый элемент $a\in\mathbb{G}$ отображает каждую горизонтальную кривую в горизонтальную, то $r_a\mathbb{P}(p)=\mathbb{P}(pa)$ и отображение

$$r_a:\quad \mathbb{P}(p)\to\mathbb{P}(pa)$$

индуцирует изоморфизм расслоений $f=(f_{\mathbb{P}},f_{\mathbb{G}})$, где $f_{\mathbb{P}}=r_a$, с соответствующим изоморфизмом структурных групп:

$$f_{\mathbb{G}}=\mathsf{ad}\,(a^{-1}):\quad \Phi(p)\ni b\mapsto a^{-1}ba\in\Phi(pa),$$

т.к. группы голономии в различных точках сопряжены друг другу (предложение 14.4.1). Легко видеть, что для двух произвольных точек $p,q\in\mathbb{P}(\mathbb{M},\pi,\mathbb{G})$ существует такой элемент $a\in\mathbb{G}$, что $\mathbb{P}(p)=\mathbb{P}(qa)$. Поэтому все расслоения голономий $\mathbb{P}(p)$ изоморфны друг другу.

Теорема 14.8.2 (Амброз–Зингер). *Пусть $\mathbb{P}(\mathbb{M},\pi,\mathbb{G})$ – главное расслоение со связной базой $\mathbb{M}$. Пусть Γ – связность на $\mathbb{P}$ с формой кривизны R, $\Phi(p_0)$ – группа голономии в точке $p_0\in\mathbb{P}$ и $\mathbb{P}(p_0)$ – расслоение голономии через p_0. Тогда алгебра Ли группы голономии $\Phi(p_0)$ совпадает с подпространством в алгебре Ли $\mathfrak{g}$ структурной группы $\mathbb{G}$, порожденной всеми элементами вида $R_p(\widetilde{X},\widetilde{Y})$ для всех $p\in\mathbb{P}(p_0)$ и горизонтальных векторных полей $\widetilde{X},\widetilde{Y}$ в точке p.*

Доказательство. Используется паракомпактность $\mathbb{M}$ [**?**]. □

Теорема 14.8.3. *Пусть $\mathbb{P}(\mathbb{M},\pi,\mathbb{G})$ – главное расслоение со связным пространством расслоения $\mathbb{P}$. Если $\mathsf{dim}\,\mathbb{M}\geq 2$, то существует связность на $\mathbb{P}$ такая, что расслоения голономии $\mathbb{P}(p)$ для всех $p\in\mathbb{P}(\mathbb{M},\pi,\mathbb{G})$ совпадают с главным расслоением $\mathbb{P}(\mathbb{M},\pi,\mathbb{G})$.*

Доказательство. Явное построение связности. При этом используется паракомпактность $\mathbb{M}$ [**?**]. Для линейных связностей это утверждение было доказано в [**?**]. В общем случае доказательство дано в [**?**]. □

Следствие. Любая связная группа Ли $\mathbb{G}$ может быть реализована как группа голономии некоторой связности в тривиальном главном расслоении $\mathbb{P}=\mathbb{M}\times\mathbb{G}$, где $\mathbb{M}$ – произвольное дифференцируемое многообразие размерности $\mathsf{dim}\,\mathbb{M}\geq 2$. □

Доказательство. Выберем связную окрестность $\mathbb{U}\subset\mathbb{M}$. Тогда расслоение $\mathbb{U}\times\mathbb{G}$ связно и мы попадаем в зону деятельности теоремы 14.8.3. Связность с $\mathbb{U}\times\mathbb{G}$ продолжается на связность на $\mathbb{M}\times\mathbb{G}$ согласно предложению 14.6.1. □

14.9 Плоские связности

Рассмотрим тривиальное главное расслоение $\mathbb{P}=\mathbb{M}\times\mathbb{G}$. Для каждого элемента структурной группы $a\in\mathbb{G}$ множество $\mathbb{M}\times\{a\}$ есть подмногообразие в $\mathbb{P}$. В частности, $\mathbb{M}\times\{e\}$, где e – единица группы, есть редуцированное подрасслоение в $\mathbb{P}$.

Определение. *Канонической плоской связностью* на тривиальном главном расслоении $\mathbb{P} = \mathbb{M} \times \mathbb{G}$ называется распределение горизонтальных подпространств $\mathbb{H}_p(\mathbb{P})$, образованное касательными пространствами к $\mathbb{M} \times \{a\}$ для всех точек $p = (x, a) \in \mathbb{M} \times \mathbb{G}$. □

Предложение 14.9.1. *Связность* Γ *на тривиальном главном расслоении* $\mathbb{P} = \mathbb{M} \times \mathbb{G}$ *является канонической плоской тогда и только тогда, когда она редуцируема к единственной связности на* $\mathbb{M} \times \{e\}$.

Доказательство. Выберем нулевое сечение $\sigma_0 : \ x \mapsto (x, e)$. Это сечение является главным расслоением $\mathbb{P}(\mathbb{M}, \pi, e)$, на котором существует единственная связность. Эта связность взаимно однозначно определяет каноническую плоскую связность на $\mathbb{P} = \mathbb{M} \times \mathbb{G}$. □

Пусть θ – каноническая форма на группе Ли $\mathbb{G}$, определенная в разделе 9.2. Обозначим через $\mathsf{pr} : \ \mathbb{M} \times \mathbb{G} \to \mathbb{G}$ естественную проекцию и положим

$$\omega := \mathsf{pr}^*\theta = \omega^{*\mathrm{A}} L_{\mathrm{A}}. \tag{14.61}$$

Эта 1-форма является частным случаем формы связности (14.5) и определяет каноническую плоскую связность на $\mathbb{P}$. Формула Маурера–Картана для канонической 1-формы (9.25) влечет, что каноническая плоская связность имеет нулевую кривизну, так как

$$d\omega = d(\,\mathsf{pr}^*\theta) = \,\mathsf{pr}^*(d\theta) = \,\mathsf{pr}^*\left(-\frac{1}{2}[\theta,\theta]\right) = -\frac{1}{2}[\,\mathsf{pr}^*\theta,\,\mathsf{pr}^*\theta] = -\frac{1}{2}[\omega,\omega].$$

Сравнивая полученное равенство со структурным уравнением (14.26), заключаем, что форма кривизны канонической плоской связности тождественно равна нулю, $R = 0$.

Теперь рассмотрим случай произвольного главного расслоения. Дадим общее

Определение. Связность Γ на главном расслоении $\mathbb{P}(\mathbb{M}, \pi, \mathbb{G})$ называется *плоской*, если каждая точка базы $x \in \mathbb{M}$ имеет окрестность $\mathbb{U}$ такую, что индуцированная связность на $\mathbb{P}|_{\mathbb{U}} = \pi^{-1}(\mathbb{U})$ изоморфна канонической плоской связности на $\mathbb{U} \times \mathbb{G}$. Другими словами, существует изоморфизм $\chi : \ \pi^{-1}(\mathbb{U}) \to \mathbb{U} \times \mathbb{G}$, отображающий горизонтальное подпространство в каждой точке $p \in \pi^{-1}(\mathbb{U})$ в горизонтальное подпространство канонической плоской связности на $\mathbb{U} \times \mathbb{G}$ в точке $\chi(p)$. □

Предложение 14.9.2. *Пусть задано главное расслоение* $\mathbb{P}(\mathbb{M}, \pi, \mathbb{G})$. *Тогда плоская связность на* $\mathbb{P}$ *существует и единственна с точностью до изоморфизма.*

Доказательство. Если задано главное расслоение, то определен атлас на базе $\mathbb{M} = \bigcup_i \mathbb{U}_i$ и семейство функций перехода (13.9), которые по теореме 13.1.1 с точностью до изоморфизма определяют главное расслоение. Выбрав координатное покрытие базы достаточно малым, можно считать, что все координатные окрестности $\mathbb{U}_i$ соответствуют окрестностям, входящим в определение плоской связности. Согласно предложению **??** для однозначного задания связности на $\mathbb{P}$ достаточно задать семейство локальных форм связности на каком либо атласе базы. Это означает, что плоская связность на произвольном главном расслоении $\mathbb{P}(\mathbb{M}, \pi, \mathbb{G})$ существует и единственна с точностью до изоморфизма. □

Теорема 14.9.1. *Связность* Γ *на главном расслоении* $\mathbb{P}(\mathbb{M},\pi,\mathbb{G})$ *является плоской тогда и только тогда, когда ее форма кривизны равна нулю,* $R=0$.

Доказательство. Необходимость очевидна. Обратно. Допустим, что форма кривизны равна нулю. Пусть $\mathbb{U}$ – односвязная окрестность точки $x\in\mathbb{P}$ и рассмотрим индуцированную связность на $\mathbb{P}|_{\mathbb{U}}=\pi^{-1}(\mathbb{U})$. По теоремам 14.4.1 и Амброза–Зингера 14.8.2 группа голономии индуцированной связности на $\mathbb{P}|_{\mathbb{U}}$ состоит только из единицы. Применяя теорему редукции 14.8.1, мы видим, что индуцированная связность на $\mathbb{P}|_{\mathbb{U}}$ изоморфна канонической плоской связности на $\mathbb{U}\times\mathbb{G}$. □

Следствие. Любая связность Γ на главном расслоении $\mathbb{P}(\mathbb{M},\pi,\mathbb{G})$ с одномерной базой $\mathbb{M}$ является плоской. □

Доказательство. Любая 2-форма на одномерном многообразии равна нулю. Отсюда следует, что все локальные формы кривизны тоже равны нулю. Так как форма кривизны имеет только горизонтальные составляющие, то она также обращается в нуль. □

Следствие. Пусть Γ – связность на главном расслоении $\mathbb{P}(\mathbb{M},\pi,\mathbb{G})$ такая, что ее форма кривизны равна нулю, $R=0$. Если база $\mathbb{M}$ односвязна, то главное расслоение $\mathbb{P}$ изоморфно тривиальному расслоению $\mathbb{M}\times\mathbb{G}$ и связность Γ изоморфна канонической плоской связности на $\mathbb{M}\times\mathbb{G}$. □

Доказательство. Группа голономии в рассматриваемом случае состоит из единственного элемента – единицы. Поэтому расслоение голономии $\mathbb{P}(p)$ пересекает каждый слой ровно в одной точке. Следовательно, каждое расслоение голономии задает глобальное сечение, и поэтому главное расслоение тривиально. При этом горизонтальные подпространства касательны к расслоению голономии. Пусть $q\in\mathbb{P}(p)$ – произвольная точка расслоения голономии через p и $\sigma_0=(x,e)$ – нулевое сечение главного расслоения $\mathbb{P}=\mathbb{M}\times\mathbb{G}$. Тогда для каждой точки базы $x\in\mathbb{M}$ существует единственный элемент $a(x)\in\mathbb{G}$ такой, что $\sigma_0=qa$, где $x=\pi(q)$. При этом вертикальный автоморфизм $p\mapsto pa$ переводит связность Γ на $\mathbb{P}=\mathbb{M}\times\mathbb{G}$ в каноническую плоскую связность. □

Если форма кривизны равна нулю, то распределение горизонтальных векторных полей находится в инволюции. Это сразу следует из (14.38), т.к. векторы D_α образуют базис распределения горизонтальных векторных полей. Согласно теореме Фробениуса для плоской связности через каждую точку p главного расслоения $\mathbb{P}(\mathbb{M},\pi,\mathbb{G})$ проходит интегральное подмногообразие. Все касательные векторы к интегральным подмногообразиям горизонтальны и интегральное подмногообразие, проходящее через точку p, совпадает с расслоением голономии $\mathbb{P}(p)$ через p.

Пример 14.9.1 (Локальное рассмотрение). Пусть $\mathbb{Q}=\mathbb{U}\times\mathbb{G}$ – тривиальное главное расслоение, база $\mathbb{U}$ которого покрыта одной картой. Общий вид связности на $\mathbb{Q}$ был найден ранее (14.5). Сравнение этого выражения с (14.61) показывает, что связность $\mathbb{Q}$ является канонической плоской тогда и только тогда, когда часть ее компонент, описывающих произвол в выборе связности на нулевом сечении, обращаются в нуль, $\overset{\circ}{A}_\alpha{}^{\text{A}}(x)=0$. Из равенства (14.12) следует, что компоненты локальной формы канонической плоской связности для произвольного сечения $\sigma:\ x\mapsto\big(x,b(x)\big)$ имеют вид

$$A_\alpha{}^{\text{A}}(x)=\partial_\alpha b^{\text{B}}L^{-1}{}_{\text{B}}{}^{\text{A}}(b).$$

После перехода к какому либо представлению структурной группы

$$\rho : \quad \mathbb{G} \ni a \mapsto \{S_i{}^j(a)\} \in \mathsf{aut}\,\mathbb{V},$$

для компонент локальной формы плоской связности имеем (14.14)

$$A_\alpha = \partial_\alpha S S^{-1}, \tag{14.62}$$

где мы для простоты опустили матричные индексы.

Определение. Калибровочное поле A_α, заданное равенством (14.62) на координатной окрестности U, называется *чистой калибровкой.* □

Теперь рассмотрим случай, когда база $\mathbb{M}$ главного расслоения не является односвязной. Пусть Γ – связность на главном расслоении $\mathbb{P}(\mathbb{M}, \pi, \mathbb{G})$ со связной базой $\mathbb{M}$. Выберем произвольную точку $p_0 \in \mathbb{P}(\mathbb{M}, \pi, \mathbb{G})$ и обозначим через $\widetilde{\mathbb{M}} = \mathbb{P}(p_0)$ расслоение голономии через p_0. Тогда $\widetilde{\mathbb{M}}\big(\mathbb{M}, \pi, \Phi(p_0)\big)$ есть главное расслоение над $\mathbb{M}$ со структурной группой $\Phi(p_0)$. Так как суженная группа голономии $\Phi_0(p_0)$ для плоской связности всегда тривиальна, то по теоремам 14.4.1 и Амброза–Зингера 14.8.2 группа голономии $\Phi(p_0)$ при неодносвязной базе дискретна. Поэтому отображение $\pi : \widetilde{\mathbb{M}} \to \mathbb{M}$ является накрытием со связным накрывающим пространством.

Пусть $x_0 = \pi(p_0) \in \mathbb{M}$. Каждая замкнутая кривая в базе $\mathbb{M}$, исходящая из x_0, при помощи параллельного переноса слоев вдоль нее определяет некоторый элемент группы голономии $\Phi(p_0)$. Поскольку суженная группа голономии тривиальна, то любые две замкнутые и гомотопные относительно начала кривые, представляющие один и тот же элемент фундаментальной группы $\pi(\mathbb{M}, x_0)$, порождают один и тот же элемент из $\Phi(p_0)$. Таким образом мы получаем сюрьективное отображение фундаментальной группы $\pi(\mathbb{M}, p_0)$ на группу голономии $\Phi(p_0)$. Легко видеть, что это отображение является гомоморфизмом групп. Пусть $\mathbb{H}$ – нормальная подгруппа в $\Phi(p_0)$ и положим $\mathbb{M}' = \widetilde{\mathbb{M}}/\mathbb{H}$. Тогда $\mathbb{M}'$ – главное расслоение над $\mathbb{M}$ со структурной группой $\Phi(p_0)/\mathbb{H}$. В частности, отображение $\pi : \mathbb{M}' \to \mathbb{M}$ – накрытие. Пусть $\mathbb{P}'(\mathbb{M}', \pi, \mathbb{G})$ – главное расслоение, индуцированное из $\mathbb{P}(\mathbb{M}, \pi, \mathbb{G})$ накрывающей проекцией $f_{\mathbb{M}} = \pi : \mathbb{M}' \to \mathbb{M}$. Пусть $f : \mathbb{P}'(\mathbb{M}', \pi, \mathbb{G}) \to \mathbb{P}(\mathbb{M}, \pi, \mathbb{G})$ – естественный гомоморфизм главных расслоений, см. теорему 13.3.4, тогда справедливо

Предложение 14.9.3. *Существует единственная связность Γ' на главном расслоении $\mathbb{P}'(\mathbb{M}', \pi, \mathbb{G})$, которая отображается на связность Γ на $\mathbb{P}(\mathbb{M}, \pi, \mathbb{G})$ гомоморфизмом $f : \mathbb{P}' \to \mathbb{P}$. Связность Γ' плоская. Если точка $p'_0 \in \mathbb{P}'$ такова, что $f_{\mathbb{M}}(p'_0) = p_0$, то группа голономии $\Phi(p'_0)$ для связности Γ' изоморфно отображается на $\mathbb{H}$ гомоморфизмом $f_{\mathbb{G}}$.*

Доказательство. См., например, [**?**]. □

В данном утверждении всегда можно выбрать в качестве нормальной подгруппы единицу группы голономии $e \in \Phi(p_0)$.

Следствие. Пусть $\widetilde{\mathbb{P}}(\widetilde{\mathbb{M}}, \pi, \mathbb{G})$ – главное расслоение, индуцированное из $\mathbb{P}(\mathbb{M}, \pi, \mathbb{G})$ накрывающей проекцией $f_{\mathbb{M}} = \pi : \widetilde{\mathbb{M}} \to \mathbb{M}$. Тогда существует единственная связность $\widetilde{\Gamma}$ на главном расслоении $\widetilde{\mathbb{P}}(\widetilde{\mathbb{M}}, \pi, \mathbb{G})$, которая отображается на связность Γ на $\mathbb{P}(\mathbb{M}, \pi, \mathbb{G})$ гомоморфизмом $f : \widetilde{\mathbb{P}} \to \mathbb{P}$. Связность $\widetilde{\Gamma}$ плоская, и соответствующая ей группа голономии тривиальна.

Пример 14.9.2 (Top). Изучим главные расслоения $\mathbb{P}\big(\mathbb{S}^1,\pi,\mathbb{U}(1)\big)$, базой которых является окружность $\mathbb{S}^1$, а структурной группой – одномерная унитарная группа $\mathbb{U}(1)$, которая диффеоморфна окружности, $\mathbb{U}(1)\approx\mathbb{S}^1$. Тривиальное главное расслоение имеет вид $\mathbb{P}=\mathbb{S}^1\times\mathbb{U}(1)$. Топологически это главное расслоение представляет собой двумерный тор, $\mathbb{P}\approx\mathbb{T}^2$. Точки расслоения параметризуются точками в комплексном пространстве

$$\mathbb{S}^1\times\mathbb{U}(1)=\{(\,\mathsf{e}^{ix},\,\mathsf{e}^{ia})\in\mathbb{C}^2:\quad x\in[0,2\pi],\ a\in[0,2\pi]\},$$

где вещественные числа x и a параметризуют соответственно точки базы и слоя. При этом точки $x=0$ и $x=2\pi$, а также $a=0$ и $a=2\pi$ отождествляются. Таким образом, точка тривиального главного расслоения задается парой вещественных чисел (x,a). Если $\mathsf{e}^{ib}\in\mathbb{U}(1)$ – элемент структурной группы, то его действие на $\mathbb{P}$ имеет вид

$$\mathsf{e}^{ib}:\quad \mathbb{P}\ni p=(\,\mathsf{e}^{ix},\,\mathsf{e}^{ia})\mapsto p\,\mathsf{e}^{ib}=(\,\mathsf{e}^{ix},\,\mathsf{e}^{i(a+b)})\in\mathbb{P}.$$

Рассмотрим стрелку, зависящую от вещественного параметра k,

$$f_k:\quad \mathbb{T}^2\ni(\,\mathsf{e}^{ix},\,\mathsf{e}^{ia})\mapsto(\,\mathsf{e}^{ix},\,\mathsf{e}^{i(a+kx)})\in\mathbb{T}^2,\qquad k\in\mathbb{R}. \tag{14.63}$$

Если $x\neq 2\pi$, то эта стрелка отображает тор в тор. При этом образующая окружность тора, которой является слой $\pi^{-1}(x)$, по мере движения вдоль направляющей окружности (базы) поворачивается на угол kx. При нецелых k отображение (14.63) не является непрерывным. При целых k стрелка, определенная формулой (14.63), задает непрерывное отображение.

Теперь построим нетривиальное главное расслоение $\mathbb{P}\big(\mathbb{S}^1,\pi,\mathbb{U}(1)\big)$ с базой $\mathbb{S}^1$ и структурной группой $\mathbb{U}(1)$. При всех k точки $(\,\mathsf{e}^{ix},\,\mathsf{e}^{i(a+kx)})$ параметризуют собой тор $\mathbb{P}=\mathbb{T}^2$. Действие элемента структурной группы $\mathsf{e}^{ib}\in\mathbb{U}(1)$ на точки тора определим умножением

$$\mathsf{e}^{ib}:\quad \mathbb{T}^2\ni p=(\,\mathsf{e}^{ix},\,\mathsf{e}^{i(a+kx)})\mapsto p\,\mathsf{e}^{ib}=(\,\mathsf{e}^{ix},\,\mathsf{e}^{i(a+kx+b)})\in\mathbb{T}^2.$$

Определим также проекцию

$$\pi:\quad \mathbb{T}^2\ni(\,\mathsf{e}^{ix},\,\mathsf{e}^{i(a+kx)})\mapsto\,\mathsf{e}^{ix}\in\mathbb{S}^1.$$

Действие структурной группы $\mathbb{U}(1)$ на $\mathbb{T}^2$ является свободным, и база $\mathbb{S}^1$ представляет собой факторпространство для $\mathbb{P}$ по отношению эквивалентности, индуцированному действием структурной группы. Ясно, что все отображения являются гладкими. Таким образом, $\mathbb{P}\big(\mathbb{S}^1,\pi,\mathbb{U}(1)\big)$ – это гладкое главное расслоение. Единственная функция перехода a_{ij} (13.9), которая задается при отождествлении $x\sim x+2\pi$, равна $\mathsf{e}^{i2\pi k}\in\mathbb{U}(1)$. При этом число $2\pi k$ – это полный угол поворота образующей окружности при обходе вдоль направляющей окружности. Если число k является целым, то функция перехода равна единице, и главное расслоение является тривиальным. При этом стрелка (14.63) задает отображение $f_{\mathbb{P}}$ пространств главных расслоений и представляет собой изоморфизм расслоений $f_k:\ \mathbb{S}^1\times\mathbb{U}(1)\to\mathbb{P}$. Если $k\in(0,1)$, то стрелка (14.63) не является отображением, т.к. для точки $(1,\,\mathsf{e}^{ia})\in\mathbb{S}^1\times\mathbb{U}(1)$ не существует единственного образа. Поэтому расслоение $\mathbb{P}\big(\mathbb{S}^1,\pi,\mathbb{U}(1)\big)$ нетривиально.

Таким образом мы построили множество неизоморфных главных расслоений $\mathbb{P}\big(\mathbb{S}^1,\pi,\mathbb{U}(1)\big)$, которые параметризуются вещественным числом $k\in[0,1)$ и функциями перехода $\mathsf{e}^{i2\pi k}$. При $k=0$ главное расслоение тривиально. Все главные расслоения как многообразия диффеоморфны двумерному тору, $\mathbb{P}\approx\mathbb{T}^2$ для всех k, однако как главные

расслоения при разных $k \in [0,1)$ они неизоморфны. Для k и $k+n$, где $n \in \mathbb{Z}$ – произвольное целое число, главные расслоения изоморфны.

На самом деле построены все возможные неизоморфные главные расслоения с базой $\mathbb{S}^1$ и структурной группой $\mathbb{U}(1)$. Действительно, в общем случае база $\mathbb{S}^1$ покрывается двумя картами, например, $x \in (0,2\pi)$ и $x \in (-\pi,\pi)$. Эти карты пересекаются по двум областям $(-\pi,0)$ и $(0,\pi)$. Мы вправе выбрать функции перехода на одной из этих областей пересечения тождественными. Пусть это будет область $(0,\pi)$. Тогда главное расслоение с точностью до изоморфизма будет определяться функциями перехода в области $(-\pi,0)$. Поскольку отображение $\mathbb{S}^1 \ni 1 \mapsto \mathsf{e}^{i2\pi k} \in \mathbb{U}(1)$ при $k \in [0,1)$ исчерпывает все возможные отображения точки окружности $\mathbb{S}^1$ в группу $\mathbb{U}(1)$, то с точностью до изоморфизма построены все главные расслоения $\mathbb{P}\big(\mathbb{S}^1,\pi,\mathbb{U}(1)\big)$.

При определении стрелки (14.63) мы выбрали для простоты линейную функцию kx от координаты базы. Это не является существенным ограничением. Если выбрать произвольную дифференцируемую функцию $f(x)$, $x \in [0,2\pi]$, с периодическими производными, то функция перехода будет иметь вид $\mathsf{exp}\,\big[i\big(f(2\pi)-f(0)\big)\big]$. Полученное главное расслоение будет связано с одним из построенных ранее расслоений вертикальным изоморфизмом, задаваемым функцией $\mathsf{exp}\,\big[i\big(f(x)-kx\big)\big] \in \mathbb{U}(1)$.

Теперь опишем связности на главных расслоениях $\mathbb{P}\big(\mathbb{S}^1,\pi,\mathbb{U}(1)\big)$. Поскольку база одномерна, то согласно следствию из теоремы 14.9.1 все связности являются плоскими. Сначала рассмотрим тривиальное главное расслоение $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{U}(1)$. Выберем в качестве координат на тривиальном главном расслоении пару чисел (x,a), $x \in (0,2\pi)$, $a \in (-\pi,\pi)$. Эти координаты покрывают весь тор за исключением двух окружностей $x=0$ и $a=\pi$. Можно аккуратно ввести координатное покрытие на торе с функциями склейки. Мы этого делать не будем, чтобы не загромождать формулы несущественными деталями, которые всегда можно восстановить. Тогда каноническая плоская связность на $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{U}(1)$ задается распределением одномерных подпространств, ставящих каждой точке расслоения $p=(x,a)$ горизонтальный вектор $\partial_x \in \mathbb{T}\big(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{U}(1)\big)$. Интегральными кривыми этого распределения являются окружности $(\,\mathsf{e}^{ix},\,\mathsf{e}^{ia})$, где $x \in (0,2\pi)$, а значение a фиксировано. При целых k распределение задается векторами $(\partial_x, k\partial_a) \in \mathbb{T}(\mathbb{P})$, где $\{\partial_x,\partial_a\}$ – координатный базис в касательном расслоении.

Пусть теперь главное расслоение $\mathbb{P}\big(\mathbb{S}^1,\pi,\mathbb{U}(1)\big)$ нетривиально. Это значит, что задано значение функции перехода $\mathsf{e}^{i2\pi k}$, которое определяет k с точностью до произвольного целого числа. Согласно определению, мы выбираем координатную окрестность некоторой точки $p \in \mathbb{P}$. Пусть это будет та же окрестность, что и в случае тривиального главного расслоения, $\mathbb{U} \ni (x,a)$, где $x \in (0,2\pi)$, $a \in (-\pi,\pi)$. Тогда $\pi^{-1}(\mathbb{U})$ – это множество точек $(\,\mathsf{e}^{ix},\,\mathsf{e}^{i(a+kx+nx)})$, где $n \in \mathbb{Z}$ – произвольное целое число. Изоморфизм $\chi:\ \pi^{-1}(\mathbb{U}) \to \mathbb{S}^1 \times \mathbb{U}(1)$ задается вертикальным изоморфизмом $\mathsf{e}^{-i(kx+nx)\in\mathbb{U}(1)}$. Поэтому плоская связность на $\mathbb{P}$ задается распределением горизонтальных векторных полей $\big(\partial_x,(k+n)\partial_a\big) \in \mathbb{T}(\mathbb{P})$. Эта связность, очевидно, единственна с точностью до изоморфизма главных расслоений, определяемым целым числом n.

Чтобы проиллюстрировать предложение 14.9.3, вычислим группы голономий построенных главных расслоений. Группа голономии тривиального главного расслоения $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{U}(1)$ состоит из единственного элемента – единицы. Для нетривиальных главных расслоений возможны два случая. В качестве опорной точки выберем точку $p_0=(x=0,a=0)$. Если петля стягиваема к точке p_0, то соответствующий элемент группы голономии равен единице. Нетривиальность группы голономии $\Phi(p_0)$ обязана своим происхождением неодносвязности базы $\mathbb{S}^1$. Пусть число $k \in (0,1)$, параметризующее главные расслоения, фиксировано. Тогда при параллельном переносе слоя вокруг окружности он повернется на угол $2\pi k$. Если обойти базу два раза, то угол

поворота составит $4\pi k$ и т.д.

Первый случай. Число k рационально, $k = m/n$, где $m, n \in \mathbb{N}$ – натуральные числа, не имеющие общего делителя. Тогда, совершив n обходов вокруг базы, мы получим тождественное преобразование слоя. Следовательно, группа голономии в этом случае является циклической группой $\mathbb{Z}_n$. Фундаментальная группа окружности есть $\pi(\mathbb{S}^1) = \mathbb{Z}$ и мы имеем гомоморфизм $\pi(\mathbb{Z}^1) \to \mathbb{Z}_p = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, где $n\mathbb{Z}$ – подгруппа целых чисел, кратных n. Расслоение голономии $\widetilde{\mathbb{M}} = \mathbb{P}(p_0)$ определяет в рассматриваемом случае n-листное (не универсальное) накрытие окружности $f_{\mathbb{M}} : \widetilde{\mathbb{M}} \to \mathbb{S}^1$ (пример 12.1.4). Если в качестве нормальной подгруппы выбрать единицу, то индуцированная связность единственна, главное расслоение $\mathbb{P}\big(\widetilde{\mathbb{M}}, \pi, \mathbb{U}(1)\big)$ тривиально и группа голономии состоит из одного элемента – единицы.

Второй случай. Число k иррационально, что соответствует всюду плотной обмотке тора (пример 3.10.2). В этом случае группа голономии состоит из чисел, кратных k, $\Phi(p_0) = k\mathbb{Z}$, и мы имеем естественный гомоморфизм фундаментальной группы $\pi(\mathbb{S}^1) = \mathbb{Z} \to k\mathbb{Z}$. Расслоение голономии $\mathbb{P}(p_0) = \widetilde{\mathbb{M}}$ определяет универсальное накрытие окружности $f_{\mathbb{M}} : \widetilde{\mathbb{M}} = \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1$. В группе целых чисел много нормальных подгрупп. Выберем, например, подгруппу $\mathbb{H} = n\mathbb{Z}$, где n – произвольное натуральное число. Пусть $\mathbb{M}' = \widetilde{\mathbb{M}}/\mathbb{H}$, тогда отображение $\mathbb{M}' \to \mathbb{M}$ является n-листным накрытием, главное расслоение $\mathbb{P}'\big(\mathbb{M}', \pi, \mathbb{U}(1)\big)$ из предложения 14.9.3 нетривиально и группа голономии $\Phi(p'_0)$ изоморфна $\mathbb{H}$. □

14.10 Локальные и инфинитезимальные группы голономии

Группа голономии $\Phi(p)$ в точке $p \in \mathbb{P}(\mathbb{M}, \pi, \mathbb{G})$, которая является важнейшей глобальной характеристикой связности, была определена при помощи множества всех замкнутых путей в базе $\Omega\big(\mathbb{M}, \pi(p)\big)$. Это крайне неудобно для практических вычислений, так как зачастую структура многообразия $\mathbb{M}$ просто неизвестна. Возникает вопрос, можно ли каким либо образом вычислить группу голономии, исходя из локальных характеристик связности? В некоторых случаях суженная группа голономии $\Phi_0(p)$ действительно определяется локальными свойствами связности. В настоящем разделе мы опишем два подхода к этой проблеме, которые основаны на понятиях локальной и инфинитезимальной групп голономии.

Начнем рассмотрение с локальной группы голономии. Пусть на главном расслоении $\mathbb{P}(\mathbb{M}, \pi, \mathbb{G})$ со связной базой $\mathbb{M}$ задана связность Γ. Для каждого связного и односвязного открытого подмножества базы $\mathbb{U} \subset \mathbb{M}$ обозначим через $\Gamma_{\mathbb{U}}$ связность на $\mathbb{P}|_{\mathbb{U}} = \pi^{-1}(\mathbb{U})$, которая индуцирована из связности Γ. В силу следствия из предложения 14.6.4 связность $\Gamma_{\mathbb{U}}$ существует и единственна – это сужение связности Γ на $\pi^{-1}(\mathbb{U})$. Для каждой точки $p \in \pi^{-1}(\mathbb{U})$ обозначим через $\Phi_0(p, \mathbb{U})$ и $\mathbb{P}(p, \mathbb{U})$ суженную группу голономии с опорной точкой p и расслоение голономии через точку p для связности $\Gamma_{\mathbb{U}}$ соответственно. Расслоение голономии $\mathbb{P}(p, \mathbb{U})$ состоит из тех точек $q \in \pi^{-1}(\mathbb{U})$, которые можно соединить с точкой p горизонтальной кривой, целиком лежащей в $\pi^{-1}(\mathbb{U})$.

Рассмотрим две окрестности $\mathbb{U}_2 \subset \mathbb{U}_1$, которые содержат точку $x = \pi(p)$. Тогда всякая замкнутая петля, целиком лежащая в $\mathbb{U}_2$, будет также петлей в $\mathbb{U}_1$. Поэтому справедливо включение

$$\Phi_0(p, \mathbb{U}_2) \subset \Phi_0(p, \mathbb{U}_1).$$

Как подгруппа суженной группы голономии $\Phi_0(p)$ группа $\Phi_0(p,\mathbb{U}_1)$ однозначно определяется своей алгеброй Ли. Поэтому из равенства размерностей $\dim\Phi_0(p,\mathbb{U}_2) = \dim\Phi(p,\mathbb{U}_1)$ следует совпадение групп голономии $\Phi_0(p,\mathbb{U}_2) = \Phi_0(p,\mathbb{U}_1)$. Это наблюдение приводит к следующему понятию.

Определение. *Локальной группой голономии* $\Phi_{\mathrm{loc}}(p)$ в точке p называется пересечение

$$\Phi_{\mathrm{loc}}(p) = \bigcap_{\mathbb{U}} \Phi_0(p,\mathbb{U}) \tag{14.64}$$

по всем связным и односвязным открытым окрестностям $\mathbb{U}$ точки $x=\pi(p)$. □

Замечание. В настоящем разделе мы будем рассматривать только связные и односвязные открытые окрестности точек. Поэтому в дальнейшем, для краткости, мы будем говорить просто окрестности. □

Пусть $\{\mathbb{U}_k\}$, $k=1,2,\ldots,$ – последовательность окрестностей, сходящихся к точке x, т.е. $\mathbb{U}_k \supset \overline{\mathbb{U}}_{k+1}$ и $\bigcap_{k=1}^{\infty}\mathbb{U}_k = \{x\}$. Тогда, очевидно, имеют место включения

$$\Phi_0(p,\mathbb{U}_1) \supset \Phi_0(p,\mathbb{U}_2) \supset \Phi_0(p,\mathbb{U}_3) \supset \ldots$$

Поскольку для каждой окрестности $\mathbb{U}$ точки x существует целое число $k_{\mathbb{U}}$ такое, что $\mathbb{U}_k \subset \mathbb{U}$ для всех $k > k_{\mathbb{U}}$, то локальная группа голономии представима в виде

$$\Phi_{\mathrm{loc}}(p) = \bigcap_{k=1}^{\infty} \Phi_0(p,\mathbb{U}_k).$$

Так как каждая суженная группа голономии $\Phi_0(p,\mathbb{U}_k)$ есть связная подгруппа Ли в $\mathbb{G}$ (теорема 14.4.1), то отсюда следует, что размерность суженной группы голономии $\dim\Phi_0(p,\mathbb{U}_k)$ постоянна для достаточно больших k. Поэтому для больших значений k справедливо равенство $\Phi_{\mathrm{loc}}(p) = \Phi_0(p,\mathbb{U}_k)$.

Замечание. Конечно, суженная группа голономии $\Phi_0(p,x)$ для "окрестности", состоящей из одной точки x, состоит ровно из одного элемента – единицы, и ее размерность равна нулю. Допустим, что параметр k в последовательности $\{\mathbb{U}_k\}$ непрерывен. Это может быть, например, радиус шара в $\mathbb{R}^n$, на который можно отобразить окрестность $\mathbb{U}_k$. Тогда функция $\dim\Phi_0(p,\mathbb{U}_k)$ от k принимает значения в целых числах и не может быть непрерывной, если суженная группа голономии $\Phi_0(p)$ для всего главного расслоения нетривиальна. В дальнейшем мы увидим, что при определенных условиях локальная группа голономии $\Phi_{\mathrm{loc}}(p)$ совпадает с суженной группой $\Phi_0(p)$. □

Предложение 14.10.1. *Локальные группы голономии имеют следующие свойства:*

1) *локальная группа голономии $\Phi_{\mathrm{loc}}(p)$ есть связная подгруппа Ли в $\mathbb{G}$, содержащаяся в суженной группе голономии $\Phi_0(p)$;*
2) *каждая точка $x=\pi(p)$ имеет окрестность $\mathbb{U}$ такую, что $\Phi_{\mathrm{loc}}(p) = \Phi_0(p,\mathbb{V})$ для любой окрестности $\mathbb{V} \ni x$, содержащейся в $\mathbb{U}$;*
3) *если $\mathbb{U}$ – окрестность точки $x=\pi(p)$, о которой говорится в свойстве 2), то $\Phi_{\mathrm{loc}}(p) \supset \Phi_{\mathrm{loc}}(q)$ для всех точек $q \in \mathbb{P}(p,\mathbb{U})$;*
4) *для каждого $a \in \mathbb{G}$ имеем*

$$\Phi_{\mathrm{loc}}(pa) = \mathrm{ad}\,(a^{-1})\Phi_{\mathrm{loc}}(p);$$

5) *для каждого целого m множество точек базы*

$$\{\pi(p) = x \in \mathbb{M} : \ \dim\Phi_{\mathrm{loc}}(p) \le m\}$$

открыто в $\mathbb{M}$.

Доказательство. Свойства 1)–4) очевидны. Докажем свойство 5). Из свойства 4) следует, что функция $\dim \Phi_{\mathrm{loc}}(p)$ постоянна на каждом слое и поэтому ее можно рассматривать как функцию на базе $\mathbb{M}$, принимающую целые значения. Из свойств 3) и 4) вытекает, что

$$\dim \Phi_{\mathrm{loc}}(q) \leq \dim \Phi_{\mathrm{loc}}(p),$$

для всех точек $q \in \pi^{-1}(\mathbb{U})$. Отсюда вытекает свойство 5). □

Теорема 14.10.1. *Пусть $\mathfrak{g}_0(p)$ и $\mathfrak{g}_{\mathrm{loc}}(p)$ – алгебры Ли для групп голономий $\Phi_0(p)$ и $\Phi_{\mathrm{loc}}(p)$ соответственно. Тогда $\Phi_0(p)$ и $\mathfrak{g}_0(p)$ порождаются соответственно всеми $\Phi_{\mathrm{loc}}(q)$ и $\mathfrak{g}_{\mathrm{loc}}(q)$ для всех точек $q \in \mathbb{P}(p)$.*

Доказательство. См., например, [?]. □

Теорема 14.10.2. *Если $\dim \Phi_{\mathrm{loc}}(p)$ постоянна на главном расслоении $\mathbb{P}(\mathbb{M}, \pi, \mathbb{G})$, то локальная и суженная группы голономии совпадают, $\Phi_{\mathrm{loc}}(p) = \Phi_0(p)$, для всех $p \in \mathbb{P}$.*

Доказательство. По свойству 3) предложения 14.10.1 каждая точка $x = \pi(p)$ имеет окрестность $\mathbb{U}$ такую, что $\Phi_{\mathrm{loc}}(p) \supset \Phi_{\mathrm{loc}}(q)$ для каждой точки q из расслоения голономии $\mathbb{P}(p, \mathbb{U})$. Так как $\dim \Phi_{\mathrm{loc}}(p) = \dim \Phi_{\mathrm{loc}}(q)$, то сами группы голономии в различных точках совпадают, $\Phi_{\mathrm{loc}}(p) = \Phi_{\mathrm{loc}}(q)$. Отсюда следует, что если $q \in \mathbb{P}(p)$, то $\Phi_{\mathrm{loc}}(p) = \Phi_{\mathrm{loc}}(q)$ для всех $p \in \mathbb{P}(\mathbb{M}, \pi, \mathbb{G})$. По теореме 14.10.1 имеем $\Phi_0(p) = \Phi_{\mathrm{loc}}(p)$. □

Теперь перейдем к определению инфинитезимальной группы голономии и изучим ее связь с локальной группой голономии. Инфинитезимальная группа голономии может быть определена только для гладких $\mathcal{C}^\infty$ главных расслоений $\mathbb{P}(\mathbb{M}, \pi, \mathbb{G})$ с гладкой $\mathcal{C}^\infty$ связностью Γ. В дальнейшем мы будем считать, что условие гладкости выполнено.

Инфинитезимальная группа голономии в точке главного расслоения $p \in \mathbb{P}(\mathbb{M}, \pi, \mathbb{G})$ определяется при помощи формы кривизны R связности Γ, заданной на $\mathbb{P}$. Сначала определим индуктивно семейство подпространств $\mathfrak{m}_k(p)$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, в алгебре Ли $\mathfrak{g}$ структурной группы $\mathbb{G}$. Пусть $\mathfrak{m}_0(p)$ подпространство в $\mathfrak{g}$, порожденное всеми элементами вида $R_p(X, Y)$, где X, Y – произвольные горизонтальные векторы в точке $p \in \mathbb{P}$. Рассмотрим $\mathfrak{g}$-значную функцию на $\mathbb{P}$ вида

$$f_k = Z_k \cdots Z_1\big(R(X, Y)\big), \tag{14.65}$$

где $X, Y, Z_1, \ldots, Z_k$ – произвольные горизонтальные векторные поля на $\mathbb{P}$ и векторы $Z_1, \ldots, Z_k$ действуют на $R(X, Y)$ как дифференцирования. Пусть $\mathfrak{m}_k(p)$ – подпространство в алгебре Ли $\mathfrak{g}$, порожденное подпространством $\mathfrak{m}_{k-1}$ и значениями в точке p всех функций f_k вида (14.65). Положим

$$\mathfrak{g}_{\mathrm{inf}}(p) = \bigcup_{k=0}^{\infty} \mathfrak{m}_k(p). \tag{14.66}$$

Предложение 14.10.2. *Подпространство $\mathfrak{g}_{\mathrm{inf}}(p)$ в $\mathfrak{g}$ есть подалгебра Ли в алгебре Ли $\mathfrak{g}_{\mathrm{loc}}(p)$ локальной группы голономии.*

Доказательство. См. [?]. □

Это предложение позволяет ввести новое понятие.

Определение. Связная подгруппа Ли $\Phi_{\rm inf}(p)$ в структурной группе $\mathbb{G}$, порожденная подалгеброй $\mathfrak{g}_{\rm inf}(p)$ называется *инфинитезимальной группой голономии* связности Γ в точке $p \in \mathbb{P}(\mathbb{M}, \pi, \mathbb{G})$. □

Предложение 14.10.3. *Инфинитезимальная группа голономии* $\Phi_{\rm inf}(p)$ *имеет следующие свойства:*

1) $\Phi_{\rm inf}(p)$ *является связной подгруппой Ли локальной группы голономии* $\Phi_{\rm loc}(p)$*;*

2) $\Phi_{\rm inf}(pa) = \mathsf{ad}\,(a^{-1})\Phi_{\rm inf}(p)$ *и* $\mathfrak{g}_{\rm inf}(pa) = \mathsf{ad}\,(a^{-1})\mathfrak{g}_{\rm inf}(p)$*;*

3) для каждого целого m *множество точек базы*

$$\{\pi(p) = x \in \mathbb{M} : \quad \mathsf{dim}\,\Phi_{\rm inf}(p) \geq m\} \tag{14.67}$$

открыто в $\mathbb{M}$*;*

4) если $\Phi_{\rm inf}(p) = \Phi_{\rm loc}(p)$ *в точке* p*, то существует окрестность* $\mathbb{U}$ *точки* $x = \pi(p)$ *такая, что*

$$\Phi_{\rm inf}(q) = \Phi_{\rm loc}(q) = \Phi_{\rm inf}(p) = \Phi_{\rm loc}(p)$$

для всех $q \in \mathbb{U}$*.*

Доказательство. Свойство 1) следует из предложения 14.10.2.

Свойство 2) вытекает из интуитивно понятного равенства

$$\mathfrak{m}_k(pa) = \mathsf{ad}\,(a^{-1})\mathfrak{m}_k(p), \qquad \forall k.$$

Детали доказательства приведены в [**?**].

3). Размерность инфинитезимальной группы голономии $\mathsf{dim}\,\Phi_{\rm inf}(p)$ в силу свойства 2) можно рассматривать как функцию на $\mathbb{M}$ со значениями в целых числах. Если значения конечного числа функций f_k вида (14.65) линейно независимы в точке p, то они таковы и в любой точке из некоторой окрестности точки p. Поэтому, если свойство (14.67) выполнено в точке x, то оно имеет место и в некоторой окрестности x.

4). Допустим, что $\Phi_{\rm inf}(p) = \Phi_{\rm loc}(p)$. Из свойства 3) предложения 14.10 и свойства 5) предложения 14.10.1 следует, что точка $x = \pi(p)$ имеет окрестность $\mathbb{U}$ такую, что

$$\mathsf{dim}\,\Phi_{\rm inf}(q) \geq \mathsf{dim}\,\Phi_{\rm inf}(p) \quad \text{и} \quad \mathsf{dim}\,\Phi_{\rm loc}(q) \leq \mathsf{dim}\,\Phi_{\rm loc}(p), \qquad \forall q \in \pi^{-1}(\mathbb{U}).$$

С другой стороны, $\Phi_{\rm loc}(q) \supset \Phi_{\rm inf}(q)$ для каждого $q \in \pi^{-1}(\mathbb{U})$. Отсюда

$$\mathsf{dim}\,\Phi_{\rm loc}(q) = \mathsf{dim}\,\Phi_{\rm inf}(q) = \mathsf{dim}\,\Phi_{\rm loc}(p) = \mathsf{dim}\,\Phi_{\rm inf}(p)$$

и, следовательно, $\Phi_{\rm loc}(q) = \Phi_{\rm inf}(q)$ для каждого $q \in \pi^{-1}(\mathbb{U})$. Применяя теорему 14.10.2 к индуцированному расслоению $\mathbb{P}|_{\mathbb{U}}$, видим, что $\Phi_0(p, \mathbb{U}) = \Phi_{\rm loc}(p)$ и $\Phi_0(q, \mathbb{U}) = \Phi_{\rm loc}(q)$. Если $q \in \mathbb{P}(p, \mathbb{U})$, то $\Phi_0(p, \mathbb{U}) = \Phi_0(q, \mathbb{U})$. Поэтому $\Phi_{\rm loc}(p) = \Phi_{\rm loc}(q)$. □

Теорема 14.10.3. *Если размерность инфинитезимальной группы голономии* $\mathsf{dim}\,\Phi_{\rm inf}(q)$ *постоянна в некоторой окрестности точки* $p \in \mathbb{P}(\mathbb{M}, \pi, \mathbb{G})$*, то локальная и инфинитезимальная группы голономий в точке* p *совпадают,* $\Phi_{\rm loc}(p) = \Phi_{\rm inf}(p)$*.*

Доказательство. См. [**?**] □

Следствие. Если размерность инфинитезимальной группы голономии $\mathsf{dim}\,\Phi_{\rm inf}(p)$ постоянна на всем главном расслоении $\mathbb{P}(\mathbb{M}, \pi, \mathbb{G})$, то

$$\Phi_0(p) = \Phi_{\rm loc}(p) = \Phi_{\rm inf}(p) \tag{14.68}$$

для всех $p \in \mathbb{P}$. □

Доказательство. Вытекает из теорем 14.10.2 и 14.10.3. □

Теорема 14.10.4. *Для вещественно аналитической связности* Γ *на вещественно аналитическом главном расслоении* $\mathbb{P}(\mathbb{M}, \pi, \mathbb{G})$ *следующие группы голономии равны*

$$\Phi_0(p) = \Phi_{\mathrm{loc}}(p) = \Phi_{\mathrm{inf}}(p)$$

для всех $p \in \mathbb{P}$.

Доказательство. См. [?]. □

Равенство групп голономий (14.68) позволяет вычислить суженную группу голономии $\Phi_0(p)$. Действительно, алгебра Ли инфинитезимальной группы голономии (14.66) порождена всеми функциями вида (14.65). Пусть x^α, $\alpha = 1, \ldots, n$, – система координат в окрестности $\mathbb{U}$ точки $x = \pi(p)$ и $\sigma : \mathbb{U} \to \mathbb{P}$ – локальное сечение. Тогда алгебра инфинитезимальной группы голономии порождается значениями компонент локальной формы кривизны $F_{\alpha\beta}{}^{\mathrm{A}}$ и всех ее ковариантных производных:

$$F_{\alpha\beta}{}^{\mathrm{A}}, \quad \nabla_{\gamma_1} F_{\alpha\beta}{}^{\mathrm{A}}, \quad \nabla_{\gamma_2}\nabla_{\gamma_1} F_{\alpha\beta}{}^{\mathrm{A}}, \quad \ldots$$

Ясно, что подпространство $\mathfrak{m}_0 \subset \mathfrak{g}$ порождено всеми компонентами тензора кривизны $F_{\alpha\beta}{}^{\mathrm{A}}$, подпространство $\mathfrak{m}_1 \subset \mathfrak{g}$ – всеми компонентами тензора кривизны $F_{\alpha\beta}{}^{\mathrm{A}}$ и их первых ковариантных производных $\nabla_{\gamma_1} F_{\alpha\beta}{}^{\mathrm{A}}$ и так далее. Таким образом, при заданной связности на главном расслоении, инфинитезимальная группа голономии позволяет в принципе вычислить суженную группу голономии. Конечно, после этого необходимо проверить, что условие следствия выполнено.

14.11 Инвариантные связности

Прежде чем рассматривать инвариантные связности общего вида, мы опишем важный частный случай.

Теорема 14.11.1. *Пусть* $\mathbb{G}$ *– связная группа Ли, и* $\mathbb{H}$ *– ее замкнутая подгруппа Ли. Пусть* $\mathfrak{g}$ *и* $\mathfrak{h}$ *– алгебры Ли для* $\mathbb{G}$ *и* $\mathbb{H}$ *соответственно.*

1) *Если существует линейное подпространство* $\mathfrak{m}$ *в* $\mathfrak{g}$ *такое, что* $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{m}$ *и* $\mathsf{ad}\,(\mathbb{H})\mathfrak{m} = \mathfrak{m}$*, то* $\mathfrak{h}$*-компонента* ω *канонической 1-формы* θ *в* $\mathbb{G}$ *определяет связность на главном расслоении* $\mathbb{G}(\mathbb{G}/\mathbb{H}, \pi, \mathbb{H})$*, инвариантную относительно действия левых сдвигов из* $\mathbb{G}$*.*
2) *Обратно, любая связность на главном расслоении* $\mathbb{G}(\mathbb{G}/\mathbb{H}, \pi, \mathbb{H})$*, инвариантная относительно действия левых сдвигов из* $\mathbb{G}$ *(если она существует), определяет разложение* $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{m}$ *и может быть получена так, как это описано в пункте 1).*
3) *Форма кривизны* R *инвариантной связности, определенная формой* ω *из пункта 1), равна*

$$R(X, Y) = -\frac{1}{2}[X, Y]_{\mathfrak{h}},$$

где $X, Y \in \mathfrak{m}$ *– произвольные левоинвариантные векторные поля на* $\mathbb{G}$ *из* $\mathfrak{m}$ *и в правой части равенства взята* $\mathfrak{h}$*-компонента коммутатора.*
4) *Пусть* $\mathfrak{g}(e)$ *– алгебра Ли группы голономии* $\Phi(e)$ *в единице* e *группы Ли* $\mathbb{G}$ *для инвариантной связности, определенной в пункте 1). Тогда* $\mathfrak{g}(e)$ *порождается всеми элементами вида* $[X, Y]_{\mathfrak{h}}$*, где* $X, Y \in \mathfrak{m}$*.*

Доказательство. 1). Пусть Z^* – фундаментальное векторное поле, соответствующее элементу подалгебры $Z \in \mathfrak{h}$. Из определения канонической 1-формы (см. раздел 9.2) следует, что $\omega(Z^*) = \theta(Z^*) = Z$. Пусть $\theta_{\mathfrak{m}}$ есть $\mathfrak{m}$-компонента канонической формы θ. Для любого $a \in \mathbb{H}$ и $X \in \mathbb{T}_p(\mathbb{G})$ имеем

$$\theta(r_{a*}X) = \omega(r_{a*}X) + \theta_{\mathfrak{m}}(r_{a*}X),$$
$$\mathsf{ad}\,(a^{-1})\theta(X) = \mathsf{ad}\,(a^{-1})\omega(X) + \mathsf{ad}\,(a^{-1})\theta_{\mathfrak{m}}(X).$$

Левые части этих равенств совпадают. Поскольку по условию теоремы $\mathsf{ad}\,(a^{-1})\mathfrak{m} = \mathfrak{m}$, то сравнение $\mathfrak{h}$-компонент правых частей приводит к равенству

$$\omega(r_{a*}X) = \mathsf{ad}\,(a^{-1})\omega(X),$$

т.е. 1-форма ω определяет связность на $\mathbb{G}$. Эта связность инвариантна относительно действия группы слева по построению.

2). Пусть ω – форма связности на главном расслоении $\mathbb{G}(\mathbb{G}/\mathbb{H}, \pi, \mathbb{H})$, инвариантная относительно действия левых сдвигов из $\mathbb{G}$. Пусть $X \in \mathfrak{m}$ – множество левоинвариантных векторных полей на $\mathbb{G}$ таких, что $\omega(X) = 0$. Тогда алгебра Ли на $\mathbb{G}$ разлагается в прямую сумму, $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{m}$.

3). Левоинвариантное векторное поле горизонтально тогда и только тогда, когда оно лежит в $\mathfrak{m}$. Поэтому утверждение 3) следует из равенства (14.27).

4). Пусть $\mathfrak{g}_1$ – подпространство в $\mathfrak{g}$, порожденное множеством элементов вида $R_e(X, Y)$, где $X, Y \in \mathfrak{m}$. Пусть $\mathfrak{g}_2$ – подпространство в $\mathfrak{g}$, порожденное множеством элементов $R_a(X, Y)$, где $X, Y \in \mathfrak{m}$ для всех $a \in \mathbb{G}$. Тогда по теореме Амброза–Зингера $\mathfrak{g}_1 \subset \mathfrak{g}(e) \subset \mathfrak{g}_2$. С другой стороны, $\mathfrak{g}_1 = \mathfrak{g}_2$, т.к. $R_a(X, Y) = R_e(X, Y)$ для любых $X, Y \in \mathfrak{m}$ и $a \in \mathbb{G}$. Теперь 4) следует из 3). □

Замечание. Линейное подпространство алгебры Ли $\mathfrak{m} \subset \mathfrak{g}$ представляет собой распределение горизонтальных векторных полей на $\mathbb{G}$, т.е. связность Γ на главном расслоении $\mathbb{G}(\mathbb{G}/\mathbb{H}, \pi, \mathbb{H})$, инвариантную относительно действия группы слева. В общем случае $\mathfrak{m} \subset \mathfrak{g}$ является только линейным подпространством, а не подалгеброй. □

Замечание. Утверждение 1) теоремы 14.11.1 можно рассматривать как частный случай предложения 14.6.3. Пусть $\mathbb{P} = (\mathbb{G}/\mathbb{H}) \times \mathbb{G}$ – тривиальное главное расслоение над базой $\mathbb{G}/\mathbb{H}$ со структурной группой $\mathbb{G}$. Вложим расслоение $\mathbb{G}(\mathbb{G}/\mathbb{H}, \pi, \mathbb{H})$ в $\mathbb{P}$ при помощи отображения

$$f(a) = \big(\pi(a), a\big), \qquad a \in \mathbb{G},$$

где $\pi : \mathbb{G} \to \mathbb{G}/\mathbb{H}$ – естественная проекция. Пусть ϕ – форма связности, определяющая каноническую плоскую связность на $\mathbb{P}$. Ее $\mathfrak{h}$-компонента, суженная на подрасслоение $\mathbb{G}(\mathbb{G}/\mathbb{H}, \pi, \mathbb{H})$, по предложению 14.6.3 определяет связность и совпадает с формой связности ω в утверждении 1). □

Возвращаясь к общему случаю, сначала докажем предложение, которое является основой для многих приложений.

Предложение 14.11.1. *Пусть s_t – однопараметрическая группа автоморфизмов главного расслоения $\mathbb{P}(\mathbb{M}, \pi, \mathbb{G})$ и $\widetilde{X}$ – векторное поле на $\mathbb{P}$, индуцированное s_t. Пусть Γ – связность на $\mathbb{P}$, инвариантная относительно действия s_t. Для произвольной точки главного расслоения $p_0 \in \mathbb{P}$ определим четыре кривые p_t, x_t, $\tilde{x}_t$ и a_t следующим образом:*

$$p_t = s_t(p_0) \in \mathbb{P}, \qquad x_t = \pi(p_t) \in \mathbb{M},$$

$\tilde{x}_t$ есть горизонтальный лифт x_t такой, что $\tilde{x}_0 = p_0$ и

$$p_t = \tilde{x}_t a_t, \qquad a_t \in \mathbb{G}. \tag{14.69}$$

Тогда a_t является однопараметрической подгруппой в структурной группе $\mathbb{G}$, порожденной элементом $X = \omega_{p_0}(\widetilde{X})$, где ω – форма связности для Γ.

Доказательство. Поскольку

$$\dot{p}_t = r_{a_t *}\dot{\tilde{x}}_t + \tilde{x}_{t*}\dot{a}_t,$$

то

$$\omega(\dot{p}_t) = \mathsf{ad}\,(a_t^{-1})\omega(\dot{\tilde{x}}_t) + a_{t*}^{-1}\dot{a}_t,$$

где $\tilde{x}_{t*}$ и a_{t*} – дифференциалы отображений $\tilde{x}_t : \mathbb{G} \to \pi^{-1}(x_t)$ и $a_t : \mathbb{G} \to \mathbb{G}$ соответственно. Первое слагаемое в правой части равно нулю, т.к. кривая $\tilde{x}_t$ горизонтальна. Следовательно, $\omega(\dot{p}_t) = a_{t*}^{-1}\dot{a}_t$. С другой стороны, $\dot{p}_t = s_{t*}\widetilde{X}_{p_0}$, где s_{t*} – дифференциал отображения $s_t : \mathbb{P} \to \mathbb{P}$, и поэтому $\omega(\dot{p}_t) = \omega(\widetilde{X}_{p_0}) = X$, т.к. форма связности инвариантна относительно однопараметрической группы преобразований s_t. Отсюда следует равенство $X = a_{t*}^{-1}\dot{a}_t$. □

Определение. Кривая a_t в структурной группе Ли $\mathbb{G}$ из условия предложения 14.11.1 называется *разверткой* кривой p_t в главном расслоении $\mathbb{P}(\mathbb{M}, \pi, \mathbb{G})$. □

Замечание. В этом определении кривая p_t может быть произвольной кривой в главном расслоении $\mathbb{P}(\mathbb{M}, \pi, \mathbb{G})$, не обязательно связанной с группой симметрии связности. □

Определение. Пусть $\mathbb{K}$ – группа Ли автоморфизмов главного расслоения $\mathbb{P}(\mathbb{M}, \pi, \mathbb{G})$ с алгеброй Ли $\mathfrak{k}$. Выберем в главном расслоении опорную точку $p_0 \in \mathbb{P}$. Каждый элемент из $\mathbb{K}$ индуцирует некоторое преобразование базы при помощи проекции. Множество $\mathbb{J}$ всех элементов из $\mathbb{K}$, которые оставляют неподвижной точку $x_0 = \pi(p_0)$, образуют замкнутую подгруппу в $\mathbb{K}$, которая называется *подгруппой изотропии* в $\mathbb{K}$ для точки $x_0 \in \mathbb{M}$. Определим гомоморфизм групп Ли

$$\lambda : \quad \mathbb{J} \ni j \mapsto \lambda(j) = a \in \mathbb{G} \tag{14.70}$$

следующим образом. Каждый автоморфизм $j \in \mathbb{J}$ переводит p_0 в точку $j(p_0)$, которая принадлежит тому же слою $\pi^{-1}\big(\pi(p_0)\big)$, т.к. точка x_0 неподвижна. Следовательно, $j(p_0) = p_0 a$ для некоторого $a \in \mathbb{G}$. Положим $\lambda(j) = a$. Тогда для двух элементов подгруппы изотропии, $j_1, j_2 \in \mathbb{J}$, имеем

$$p_0\lambda(j_1 j_2) = (j_1 j_2)(p_0) = j_1\big(p_0\lambda(j_2)\big) = \big(j_1(p_0)\big)\lambda(j_2) = p_0\lambda(j_1)\lambda(j_2).$$

Тем самым $\lambda(j_1 j_2) = \lambda(j_1)\lambda(j_2)$ и, следовательно, построенное отображение является гомоморфизмом групп. Нетрудно проверить, что отображение $\lambda : \mathbb{J} \to \mathbb{G}$ дифференцируемо. Гомоморфизм групп λ индуцирует гомоморфизм алгебр Ли,

$$\lambda : \quad \mathfrak{j} \to \mathfrak{g},$$

который мы обозначили той же буквой. □

Замечание. Отображение (14.70) зависит от выбора опорной точки $p_0 \in \mathbb{P}$. В настоящем разделе мы будем считать, что опорная точка p_0 выбрана и зафиксирована. □

Предложение 14.11.2. *Пусть* $\mathbb{K}$ *– группа Ли автоморфизмов главного расслоения* $\mathbb{P}(\mathbb{M},\pi,\mathbb{G})$ *с алгеброй Ли* $\mathfrak{k}$ *и* Γ *– связность на* $\mathbb{P}$ *с формой связности* ω *и формой кривизны* R*, инвариантная относительно автоморфизмов* $\mathbb{K}$*. Пусть* $\mathbb{J}\subset\mathbb{K}$ *– подгруппа изотропии в* $\mathbb{K}$ *для точки* $x_0=\pi(p_0)$ *с алгеброй Ли* $\mathfrak{j}$*. Определим линейное отображение*

$$\Lambda:\quad \mathfrak{k}\ni X\mapsto\Lambda(X)=\omega_{p_0}(\widetilde{X})\in\mathfrak{g},$$

где $\widetilde{X}$ *– векторное поле на* $\mathbb{P}$*, индуцированное полем* X*. Тогда:*

1) $\Lambda(X)=\lambda(X)$*,* $\forall X\in\mathfrak{j}$*;*

2) $\Lambda\big(\mathsf{ad}\,(j)X\big)=\mathsf{ad}\,\big(\lambda(j)\big)\Lambda(X)$*,* $\forall j\in\mathbb{J}$ *и* $\forall X\in\mathfrak{k}$*, где* $\mathsf{ad}\,(j)$ *обозначает присоединенное представление подгруппы изотропии* $\mathbb{J}$ *в* $\mathfrak{k}$ *и* $\mathsf{ad}\,\big(\lambda(j)\big)$ *– присоединенное представление структурной группы* $\mathbb{G}$ *в* $\mathfrak{g}$*;*

3) $2R_{p_0}(\widetilde{X},\widetilde{Y})=[\Lambda(X),\Lambda(Y)]-\Lambda\big([X,Y]\big),\qquad\forall X,Y\in\mathfrak{k}.$

Доказательство. См., например, [**?**]. □

Замечание. Геометрический смысл отображения Λ дается предложением 14.11.1. $\Lambda(X)$ – это тот элемент алгебры Ли $\mathfrak{g}$, который порождает однопараметрическую подгруппу a_t в структурной группе $\mathbb{G}$, определенную равенством (14.69). □

Замечание. Отображение Λ в предложении 14.11.2 является только линейным. В общем случае оно не является гомоморфизмом алгебр Ли. □

Определение. Группа автоморфизмов $\mathbb{K}$ действует на главном расслоении $\mathbb{P}(\mathbb{M},\pi,\mathbb{G})$ *слой-транзитивно*, если для любых двух слоев из $\mathbb{P}$ существует элемент в $\mathbb{K}$, отображающий один слой в другой, т.е. если действие $\mathbb{K}$ на базе $\mathbb{M}$ транзитивно. □

Предложение 14.11.3. *Если* $\mathbb{J}$ *– подгруппа изотропии для слой-транзитивной группы автоморфизмов* $\mathbb{K}$ *в точке* $x_0=\pi(p_0)$*, то база* $\mathbb{M}$ *является однородным пространством,* $\mathbb{M}\approx\mathbb{K}/\mathbb{J}$*.*

Доказательство. Вытекает из теоремы 10.1.2. □

Описание $\mathbb{K}$-инвариантных связностей на главном расслоении в случае слой-транзитивного действия групп автоморфизмов дает

Теорема 14.11.2. *Если связная группа Ли* $\mathbb{K}$ *является слой-транзитивной группой автоморфизмов главного расслоения* $\mathbb{P}(\mathbb{M},\pi,\mathbb{G})$ *и если* $\mathbb{J}$ *– подгруппа изотропии в* $\mathbb{K}$ *для точки* $x_0=\pi(p_0)$*, то существует взаимно однозначное соответствие между множеством* $\mathbb{K}$*-инвариантных связностей на* $\mathbb{P}$ *и множеством линейных отображений* $\Lambda:\ \mathfrak{k}\to\mathfrak{g}$*, которые удовлетворяют условиям 1) и 2) предложения 14.11.2. Соответствие задается следующим образом:*

$$\Lambda:\quad \mathfrak{k}\ni X\mapsto\Lambda(X)=\omega_{p_0}(\widetilde{X})\in\mathfrak{g},$$

где $\widetilde{X}$ *– векторное поле на* $\mathbb{P}$*, индуцированное полем* X*.*

Доказательство. См. [**?**]. □

Замечание. Из предложения **??** следует, что связность на главном расслоении $\mathbb{P}(\mathbb{M},\pi,\mathbb{G})$ однозначно определяется заданием семейства локальных форм связности на произвольном покрытии базы $\mathbb{M}$. Это происходит потому что при помощи действия структурной группы распределение горизонтальных подпространств с локальных сечений

можно разнести на все пространство главного расслоения $\mathbb{P}$. Если известно, что связность инвариантна также относительно слой-транзитивных автоморфизмов $\mathbb{K}$, то локальную форму связности достаточно задать в одной точке базы $\mathbb{M}$. Действительно, при помощи автоморфизмов $\mathbb{K}$ она разносится по всей базе $\mathbb{M}$, а затем, действуя структурной группой, ее можно разнести по всему пространству расслоения $\mathbb{P}$.

Если группа автоморфизмов $\mathbb{K}$ не является слой-транзитивной, тогда в задании инвариантной связности появляется значительный произвол. В этом случае форму связности можно определить на каждой орбите действия группы $\mathbb{K}$ на $\mathbb{P}$. Для этого достаточно задать ее в какой либо одной точке на каждой орбите и при помощи $\mathbb{K}$ разнести ее по орбитам и, наконец, по всему пространству главного расслоения $\mathbb{P}$, действуя структурной группой $\mathbb{G}$. После этого необходимо проверить дифференцируемость полученного распределения горизонтальных подпространств. □

Если группа автоморфизмов $\mathbb{K}$ действует на $\mathbb{P}(\mathbb{M},\pi,\mathbb{G})$ слой-транзитивно, то форма кривизны R, которая является тензориальной формой типа $\mathsf{ad}\,\mathbb{G}$, инвариантная относительно $\mathbb{K}$, полностью определяется своими значениями в опорной точке $R_{p_0}(\widetilde{X},\widetilde{Y})$, где $\widetilde{X}$ и $\widetilde{Y}$ – векторные поля на $\mathbb{P}$, индуцированные элементами $X,Y\in\mathfrak{k}$ алгебры Ли группы автоморфизмов $\mathbb{K}$. В этом случае утверждение 3) предложения 14.11.2 выражает форму кривизны $R_{p_0}(\widetilde{X},\widetilde{Y})$ в терминах Λ.

Из предложения 14.11.2 и теорем 14.9.1 и 14.11.2 получаем

Следствие. $\mathbb{K}$-инвариантная связность на главном расслоении $\mathbb{P}(\mathbb{M},\pi,\mathbb{G})$, определенная отображением Λ, является плоской тогда и только тогда, когда отображение $\Lambda:\ \mathfrak{k}\to\mathfrak{g}$ есть гомоморфизм алгебр Ли. □

Теорема 14.11.3. *Допустим, что в теореме 14.11.2 алгебра Ли $\mathfrak{k}$ содержит линейное подпространство $\mathfrak{m}$ такое, что $\mathfrak{k}=\mathfrak{j}\oplus\mathfrak{m}$ и $\mathsf{ad}\,(\mathbb{J})\mathfrak{m}=\mathfrak{m}$, где $\mathsf{ad}\,(\mathbb{J})$ – присоединенное представление $\mathbb{J}$ в $\mathfrak{k}$. Тогда:*

1) Существует взаимно однозначное соответствие между множеством $\mathbb{K}$-инвариантных связностей на главном расслоении $\mathbb{P}(\mathbb{M},\pi,\mathbb{G})$ и множеством линейных отображений $\Lambda_{\mathfrak{m}}:\ \mathfrak{m}\to\mathfrak{g}$ таких, что

$$\Lambda_{\mathfrak{m}}\big(\mathsf{ad}\,(j)X\big)=\mathsf{ad}\,\big(\lambda(j)\big)\Lambda_{\mathfrak{m}}(X),\qquad\forall X\in\mathfrak{m}\ \text{и}\ \forall j\in\mathbb{J};$$

соответствие задается теоремой 14.11.2 следующим образом

$$\Lambda(X)=\begin{cases}\lambda(X), & \text{если}\ \ X\in\mathfrak{j},\\ \Lambda_{\mathfrak{m}}(X), & \text{если}\ \ X\in\mathfrak{m}.\end{cases}$$

2) Форма кривизны R для $\mathbb{K}$-инвариантной связности, определяемой при помощи отображения $\Lambda_{\mathfrak{m}}$, удовлетворяет следующему равенству

$$2R_{p_0}(\widetilde{X},\widetilde{Y})=[\Lambda_{\mathfrak{m}}(X),\Lambda_{\mathfrak{m}}(Y)]-\Lambda_{\mathfrak{m}}\big([X,Y]_{\mathfrak{m}}\big)-\lambda\big([X,Y]_{\mathfrak{j}}\big),\qquad\forall X,Y\in\mathfrak{m},$$

где $[X,Y]_{\mathfrak{m}}$ и $[X,Y]_{\mathfrak{j}}$ обозначают соответственно $\mathfrak{m}$- и $\mathfrak{j}$-компоненту коммутатора $[X,Y]\in\mathfrak{k}$.

Доказательство. Пусть $\Lambda:\ \mathfrak{k}\to\mathfrak{g}$ – линейное отображение, удовлетворяющее утверждениям 1) и 2) предложения 14.11.2. Пусть $\Lambda_{\mathfrak{m}}$ – сужение отображения Λ на $\mathfrak{m}$. Нетрудно проверить, что отображение $\Lambda\to\Lambda_{\mathfrak{m}}$ является взаимно однозначным и согласно теореме 14.11.2 дает желаемое соответствие. Утверждение 2) следует из 3) предложения 14.11.2. □

Определение. В теореме 14.11.3 $\mathbb{K}$-инвариантная связность на главном расслоении $\mathbb{P}(\mathbb{M}, \pi, \mathbb{G})$, определяемая условием $\Lambda_{\mathfrak{m}} = 0$ называется *канонической инвариантной связностью* относительно разложения $\mathfrak{g} = \mathfrak{j} \oplus \mathfrak{m}$. □

Следующая теорема определяет алгебру Ли группы голономии $\mathbb{K}$-инвариантной связности.

Теорема 14.11.4. *В предположениях и обозначениях теоремы 14.11.2 алгебра Ли $\mathfrak{g}(p_0)$ группы голономии $\Phi(p_0)$ для $\mathbb{K}$-инвариантной связности, определяемой при помощи линейного отображения $\Lambda : \mathfrak{k} \to \mathfrak{g}$, задается суммой*

$$\mathfrak{m}_0 + [\Lambda(\mathfrak{k}), \mathfrak{m}_0] + \big[\Lambda(\mathfrak{k}), [\Lambda(\mathfrak{k}), \mathfrak{m}_0]\big] + \ldots,$$

где $\mathfrak{m}_0$ – линейное подпространство в $\mathfrak{g}$, порожденное множеством

$$\{[\Lambda(X), \Lambda(Y)] - \Lambda([X, Y])\}, \qquad \forall X, Y \in \mathfrak{k}.$$

Доказательство. См., например, [**?**]. □

Замечание. Утверждения 1) и 3) теоремы 14.11.1 следуют из теоремы 14.11.3, если в качестве главного расслоения $\mathbb{P}(\mathbb{M}, \pi, \mathbb{G})$ выбрать $\mathbb{G}(\mathbb{G}/\mathbb{H}, \pi, \mathbb{H})$ и положить $\mathbb{K} = \mathbb{G}$. Тогда инвариантная связность из теоремы 14.11.1 является канонической инвариантной связностью. Утверждение 4) теоремы 14.11.1 следует из теоремы 14.11.4. □

Глава 15

Приложения в квантовой механике

В настоящей главе рассмотрены некоторые приложения дифференциальной геометрии в квантовой механике. Нетривиальные геометрические структуры, а речь идет о нетривиальной связности на главном расслоении, часто возникают при решении уравнений математической физики. Будет показано, как возникает нетривиальная связность на главном расслоении со структурной группой $\mathbb{U}(1)$ или $\mathbb{U}(\mathrm{N})$ в нерелятивистской квантовой механике при решении уравнения Шредингера. Удивительно не столько то, что главное расслоение возникает естественным образом, а то, что предсказанные эффекты были подтверждены экспериментально.

Сначала мы дадим геометрическую интерпретацию нерелятивистской квантовой механике в конечномерном случае. Будет показано, что гамильтониан квантовой системы задает компоненты локальной формы связности на главном расслоении, а уравнение Шредингера определяет параллельный перенос слоев. При этом базой является одномерное многообразие, соответствующее времени, а структурной группой – унитарная группа $\mathbb{U}(\mathrm{N})$, где N – размерность гильбертова пространства состояний квантовомеханической системы. Решение квантовомеханической задачи не зависит от выбора базиса в гильбертовом пространстве, и его выбирают из соображений удобства. Использование базиса, состоящего из собственных векторов гамильтониана, позволяет упростить доказательство адиабатической теоремы и сделать его более прозрачным. Доказательство приведено как для невырожденных, так и для вырожденных состояний. Чтобы сделать доказательство теоремы максимально простым и выделить наиболее существенные моменты, мы предполагаем, что уровни энергии не пересекаются.

В качестве приложения адиабатической теоремы рассмотрена фаза Берри. В заключительном разделе рассмотрен эффект Ааронова–Бома, который, хотя и не имеет прямого отношения к адиабатической теореме, с геометрической точки зрения аналогичен фазе Берри. Эффект Ааронова–Бома [?] и фаза Берри [?] привлекают большое внимание теоретиков и экспериментаторов в течении многих лет. Интерес вызван двумя обстоятельствами. Во-первых, в обоих случаях при решении уравнения Шредингера естественным образом возникает $\mathbb{U}(1)$-связность. Во-вторых, в теории калибровочных полей распространено мнение, что к наблюдаемым эффектам может приводить нетривиальная напряженность поля, а не сами потенциалы, которые не являются калибровочно инвариантными. Вопреки этому мнению Ааронов и Бом и Берри показали, что интеграл от калибровочного поля вдоль замкнутой кривой может привести к наблюдаемым эффектам. Эти выводы вскоре были подтверждены экспериментально.

Понятие фазы Берри было обобщено на неабелев случай, соответствующий вы-

рожденным уровням энергии гамильтониана, Вилчеком и Зи [?]. В этом случае при решении уравнения Шредингера естественным образом возникают неабелевы калибровочные поля.

Во всех перечисленных выше случаях к наблюдаемым эффектам приводят элементы группы голономии (см. раздел 14.4) соответствующих связностей, которые являются калибровочно инвариантными объектами. Показано, что главное расслоение может быть тривиальным, но связность, которая на нем возникает, в общем случае имеет нетривиальную группу голономии и приводит к наблюдаемым эффектам. Отсюда следует, что фаза Берри и эффект Аароно́ва–Бома имеют геометрическую природу.

15.1 Адиабатическая теорема

Адиабатическая теорема [?] занимает одно из центральных мест в нерелятивистской квантовой механике, т.к. позволяет находить приближенное решение уравнения Шредингера при медленном изменении гамильтониана во времени. Первоначально она была доказана для дискретного (возможно, бесконечного) спектра гамильтониана при некоторых ограничениях на возможное пересечение уровней энергии [?]. Доказательство для невырожденных уровней энергии приведено, например, в [?]. Различным вариантам адиабатической теоремы посвящено большое количество статей, ссылки на которые можно найти в [?]. Доказательства адиабатической теоремы довольно сложны.

В нерелятивистской квантовой механике состояние системы описывается вектором гильбертова пространства (*волновой функцией*) $\psi(t) \in \mathbb{H}$, который зависит от времени t и некоторого набора других переменных, который определяется рассматриваемой задачей. Эволюция квантовой системы во времени описывается *уравнением Шредингера* [?, ?]

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = H\psi, \tag{15.1}$$

где H – самосопряженный линейный оператор, действующий в гильбертовом пространстве $\mathbb{H}$, который называется *гамильтонианом* системы, и $\hbar$ – постоянная Планка.

Для уравнения Шредингера, как правило, ставится задача Коши с начальным условием

$$\psi(0) = \psi_0, \tag{15.2}$$

где $\psi_0 \in \mathbb{H}$ – некоторый нормированный на единицу вектор гильбертова пространства.

В дальнейшем, для простоты, положим $\hbar = 1$ и обозначим частную производную по времени точкой $\dot{\psi} = \partial_t\psi$.

Предположим, для простоты, что гильбертово пространство представляет собой конечномерное комплексное пространство $\mathbb{H} = \mathbb{C}^{\mathrm{N}}$ комплексной размерности $\dim\mathbb{H} = \mathrm{N}$. В гильбертовом пространстве задано скалярное произведение, которое обозначим круглыми скобками,

$$\mathbb{H}\times\mathbb{H} \ni \ \psi,\phi \mapsto (\psi,\phi) \ \in \mathbb{C}.$$

По определению, скалярное произведение линейно по первому аргументу ψ и выполнено равенство: $(\psi,\phi)^\dagger = (\phi,\psi)$, где символ $\dagger$ обозначает комплексное сопряжение. Квадрат вектора гильбертова пространства (ψ,ψ) является вещественным числом,

при этом мы требуем, чтобы квадратичная форма (ψ, ψ) была строго положительно определена, т.е. $(\psi, \psi) \geq 0$, причем $(\psi, \psi) = 0$ тогда и только тогда, когда $\psi = 0$. Тогда скалярное произведение определяет норму вектора гильбертова пространства:

$$\|\psi\| = \sqrt{(\psi, \psi)}.$$

Поскольку уравнение Шредингера линейно по ψ, а гамильтониан самосопряжен, то норма произвольного решения уравнений Шредингера сохраняется во времени. Отсюда следует, что векторы состояния можно нормировать. Обычно предполагается, что векторы состояния нормированы на единицу,

$$\|\psi\| = 1. \tag{15.3}$$

Нормировка вектора состояния не устраняет полностью произвол в выборе вектора гильбертова пространства, т.к. остается произвол в выборе постоянного фазового множителя.

Замечание. Мы используем символ † для обозначения эрмитова сопряжения матриц, т.е. транспонирования матрицы и комплексного сопряжения всех элементов. В частном случае, когда матрица состоит из одного элемента, эрмитово сопряжение совпадает с комплексным. □

Пусть в гильбертовом пространстве $\mathbb{H}$ выбран некоторый базис e_k, $k = 1, \ldots, \mathrm{N}$. Тогда гамильтониан квантовомеханической системы задается эрмитовой $\mathrm{N}\times\mathrm{N}$-матрицей, а вектор состояния $\psi = \psi^k e_k$ – строкой из N компонент,

$$\psi = (\psi^1, \ldots, \psi^{\mathrm{N}}),$$

где $\psi^1, \ldots, \psi^{\mathrm{N}}$ – комплекснозначные компоненты вектора. Если базис гильбертова пространства ортонормирован,

$$(e_k, e_l) = \delta_{kl},$$

то скалярное произведение задается равенством

$$(\psi, \phi) = \psi\phi^\dagger = \psi^1\phi_1^\dagger + \ldots + \psi^{\mathrm{N}}\phi_{\mathrm{N}}^\dagger.$$

Рассмотрим задачу Коши (15.1), (15.2) в общем случае, когда гамильтониан системы зависит от времени $H = H(t)$. Для решения этой задачи необходимо выбрать базис в гильбертовом пространстве $\mathbb{H}$. Конечно, решение задачи от выбора базиса не зависит, и его выбирают из соображений удобства. Рассмотрим два случая.

Пусть базис $e_k \in \mathbb{H}$, $k = 1, \ldots, \mathrm{N}$, ортонормирован и фиксирован, $\dot{e}_k = 0$. Произвольный вектор можно разложить по этому базису $\psi = \psi^k e_k$. При этом гамильтониан задается эрмитовой $\mathrm{N} \times \mathrm{N}$-матрицей $H_l{}^k$, а задача Коши для уравнения Шредингера в компонентах примет вид системы обыкновенных дифференциальных уравнений с некоторыми начальными условиями:

$$\begin{aligned} i\dot{\psi}^k &= \psi^l H_l{}^k, \\ \psi^k(0) &= \psi_0^k. \end{aligned} \tag{15.4}$$

Замечание. Мы записываем действие гамильтониана в конечномерном случае справа, чтобы согласовать наши обозначения с обозначениями, принятыми в дифференциальной геометрии. Напомним, что в дифференциальной геометрии для векторного

поля в координатном базисе принята запись $X = X^\alpha \partial_\alpha$. (Суммирование с десяти до четырех по циферблату часов.) Альтернативная запись $X = \partial_\alpha X^\alpha$ используется для обозначения дивергенции векторного поля. Преобразование координат мы записываем в виде

$$X = X^\alpha \partial_\alpha = X^\alpha \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x^\beta}{\partial x^{\alpha'}} \partial_\beta.$$

То есть действие матрицы преобразования координат записывается справа. С другой стороны, действие операторов в квантовой механике общепринято записывать слева. Поэтому, если мы хотим использовать единообразные обозначения, то необходимо чем то пожертвовать. В конечномерном случае мы будем записывать матрицу, задающую линейный оператор, справа. Это вопрос соглашения, и к нему легко привыкнуть. □

Рассмотрим теперь другой ортонормированный базис b_k, который может зависеть от времени, $b_k = b_k(t)$. Такой базис может оказаться более удобным для решения некоторых задач. Вектор гильбертова пространства ψ можно разложить также по этому базису $\psi = \psi'^k b_k$. Тогда задача Коши (15.4) будет выглядеть по другому:

$$\begin{aligned} i\dot{\psi}'^k &= \psi'^l H'^k_l, \\ \psi'^k(0) &= \psi'^k_0, \end{aligned} \tag{15.5}$$

где H'^k_l – компоненты гамильтониана относительно нового базиса, которые будут определены ниже. Поскольку базисы ортонормированы, то они связаны между собой некоторым унитарным преобразованием

$$b_k = S_k{}^l e_l, \qquad S \in \mathbb{U}(\mathrm{N}), \tag{15.6}$$

которое в общем случае зависит от времени, $S = S(t)$. При этом компоненты вектора гильбертова пространства преобразуются с помощью обратной матрицы

$$\psi'^k = \psi^l S^{-1}{}^k_l.$$

Отсюда следует выражение для компонент начального вектора гильбертова пространства $\psi'^k_0 = \psi^l_0 S^{-1}{}^k_l(0)$. Переписав уравнение Шредингера (15.4) в базисе b_k, получим компоненты гамильтониана относительно нового базиса

$$H' = SHS^{-1} + iS\dot{S}^{-1} = SHS^{-1} - i\dot{S}S^{-1}, \tag{15.7}$$

где мы, для краткости, опустили матричные индексы. Мы видим, что компоненты гамильтониана преобразуются также, как компоненты локальной формы $\mathbb{U}(\mathrm{N})$-связности.

Теперь можно дать геометрическую интерпретацию нерелятивистской квантовой механике. Пусть время пробегает всю вещественную прямую, $t \in \mathbb{R}$. Тогда мы имеем главное расслоение $\mathbb{P}\big(\mathbb{R}, \pi, \mathbb{U}(\mathrm{N})\big) \approx \mathbb{R} \times \mathbb{U}(\mathrm{N})$ с базой $\mathbb{R}$, типичным слоем $\mathbb{U}(\mathrm{N})$ и проекцией $\pi : \ \mathbb{P} \to \mathbb{R}$ (см. раздел 13.1). Это расслоение тривиально, т.к. базой является вещественная прямая. Гамильтониан квантовой системы задает компоненты локальной формы $\mathbb{U}(\mathrm{N})$-связности (1-форма на $\mathbb{R}$ со значениями в алгебре Ли):

$$A_t = \{iH_l{}^k\} \in \mathfrak{u}(\mathrm{N}).$$

Вектор гильбертова пространства $\psi \in \mathbb{H}$ – это сечение ассоциированного расслоения $\mathbb{E}\big(\mathbb{R}, \pi_{\mathbb{E}}, \mathbb{H}, \mathbb{U}(\mathrm{N}), \mathbb{P}\big)$, типичным слоем которого является гильбертово пространство $\mathbb{H}$. Уравнение Шредингера имеет вид равенства нулю ковариантной производной,

$$\nabla_t \psi = \dot{\psi} + \psi A_t = 0,$$

т.е. задает параллельный перенос вектора гильбертова пространства. При изменении сечения компоненты связности преобразуются по-правилу

$$A'_t = S A_t S^{-1} + \dot{S} S^{-1},$$

как и положено компонентам локальной формы связности (14.15). Кривизна этой связности равна нулю, поскольку база одномерна.

Решение задачи Коши для уравнения Шредингера (15.1), (15.2) не зависит от выбора базиса. Поэтому его выбирают из соображений удобства.

Пример 15.1.1. Пусть в фиксированном базисе e_k вектор гильбертова пространства имеет вид $\psi^k = \psi_0^l U_l{}^k$, где унитарная матрица $U_l{}^k(t)$ задает оператор эволюции квантовой системы, который, по-определению, удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$i\dot{U} = UH,$$

с начальным условием $U_l{}^k(0) = \delta_l^k$. Тогда нетрудно проверить, что оператор эволюции задает переход к такому базису гильбертова пространства $b_k = U^{-1}{}_k^l e_l$, в котором гамильтониан равен нулю, $H' = 0$. Следовательно, вектор гильбертова пространства, описывающий эволюцию квантовой системы, в этом базисе имеет постоянные компоненты ψ_0^k, которые определяются начальным состоянием. □

Замечание. При преобразовании базиса, которое зависит от времени, эрмитова матрица, соответствующая гамильтониану, испытывает калибровочное преобразование (20.61). При этом преобразовании в общем случае собственные значения матрицы меняются. Рассмотренный пример показывает, что если гамильтониан, заданный в постоянном базисе, имел некоторый спектр, то после перехода к новому базису, заданному оператором эволюции, гамильтониан H' обращается в нуль, и имеет только нулевые собственные значения. В квантовой механике уравнение Шредингера обычно задают, определив гамильтониан в постоянном базисе, исходя из физических соображений. Затем, если это удобнее, можно перейти к новому базису, зависящему от времени. □

Перейдем к определению адиабатического предела и описанию базиса $b_k(t)$, который будет использован при доказательстве адиабатической теоремы. Адиабатическая теорема справедлива для гамильтонианов, которые медленно меняются со временем. А именно, мы предполагаем, что гамильтониан достаточно гладко зависит от вещественного параметра $\nu = \epsilon t$, где $\epsilon > 0$, который меняется на конечном отрезке, $\nu \in [0, \nu_0]$. Тогда медленное изменение гамильтониана означает, что параметр ν меняется на конечную величину при малых ϵ и больших временах t.

Определение. Двойной предел в решении задачи Коши для уравнения Шредингера (15.1) и (15.2) на отрезке $[0, t]$

$$\epsilon \to 0, \quad t \to \infty, \quad \text{при условии} \ \ \epsilon t = \nu = \mathsf{const}. \tag{15.8}$$

называется *адиабатическим*. □

При исследовании адиабатического предела время t в уравнении Шредингера удобно заменить на параметр ν:

$$i\epsilon\frac{\partial\psi}{\partial\nu} = \psi H(\nu). \tag{15.9}$$

Вектор состояния $\psi(\nu,\epsilon)$ в таком случае зависит также от параметра ϵ, а адиабатический предел соответствует простому пределу $\epsilon \to 0$ при фиксированных ν.

Асимптотическое решение уравнения вида (15.9) в общем случае построено в [**?**, **?**].

Для доказательства адиабатической теоремы нам понадобится специальный базис $b_k(\nu)$, зависящий от ν. Пусть исходный гамильтониан $H(\nu)$ квантовой системы задан в некотором фиксированном базисе e_k. Тогда существует унитарная матрица $S(\nu)$, которая диагонализирует гамильтониан,

$$SH(\nu)S^{-1} = H_{\text{D}}(\nu) = \mathsf{diag}\left(E_1(\nu),\dots,E_{\text{N}}(\nu)\right), \tag{15.10}$$

где $E_1 \le E_2 \le \ldots \le E_{\text{N}}$ – уровни энергии собственных состояний гамильтониана H, которые будем считать упорядоченными. Пусть b_k – собственные векторы исходного гамильтониана,

$$b_k H = E_k b_k, \tag{15.11}$$

для всех ν. Как известно, строками матрицы преобразования ${S_k}^l$, где индекс k фиксирован и $l = 1,\dots,\text{N}$, являются компоненты собственных векторов $b_k = {b_k}^l e_l$ гамильтониана H: ${S_k}^l = {b_k}^l$. То есть гамильтониан $H(\nu)$ в базисе b_k диагонален. Унитарная матрица S определена неоднозначно, и произвол в ее выборе в дальнейшем рассмотрении будет использован.

Мы допускаем, что часть уровней энергии может быть вырождена. Обозначим через Υ_n множество индексов, для которых $E_j(\nu) = E_n(\nu)$ при $j \in \Upsilon_n$. Конечно, в качестве индекса n можно выбрать любой индекс, принадлежащий Υ_n. Если уровень E_n невырожден, то множество индексов состоит из одного элемента $\Upsilon_n = \{n\}$. Мы докажем адиабатическую теорему в случае, когда множество индексов Υ_n для всех n не меняется со временем, т.е. уровни энергии не пересекаются.

Мы предполагаем, что гамильтониан H, уровни энергии $E_1,\dots,E_{\text{N}}$ и матрица преобразования S достаточное число раз дифференцируемы по ν на конечном отрезке $[0,\nu_0]$.

Для доказательства адиабатической теоремы нам понадобится следующее утверждение.

Лемма 15.1.1. *Существует унитарная матрица S в (15.10) такая, что выполнено условие*

$$\left(\frac{dS}{d\nu}S^{-1}\right)_k^{\ j} = 0, \qquad \forall k \in \Upsilon_j. \tag{15.12}$$

Доказательство. Рассмотрим два случая. Пусть уровень энергии E_k невырожден. Матрица преобразования S определена с точностью до умножения каждой строки на фазовый множитель ${S_k}^j \to {S_k}^j\,\mathsf{e}^{i\alpha_k(\nu)}$ для всех $j = 1,\dots,\text{N}$. Это соответствует произволу в выборе фазового множителя у собственного вектора состояния (15.11). Пусть фазовый множитель удовлетворяет уравнению

$$\frac{d\alpha_k}{d\nu} = i\sum_{j=1}^{\text{N}}\frac{d{S_k}^j}{d\nu}{S^{-1}}_j^{\,k},$$

где суммирование по k в правой части отсутствует. Тогда нетрудно проверить, что после преобразования для любого решения этого уравнения выполнено равенство

$$\left(\frac{dS}{d\nu}S^{-1}\right)_k^k = 0. \tag{15.13}$$

Это можно проделать для всех невырожденных уровней одновременно, выбрав подходящим образом фазы $\alpha_k(\nu)$.

Теперь предположим, что все уровни энергии вырождены, $E_1 = \ldots = E_{\mathrm{N}}$. Тогда матрица S определена с точностью до унитарного преобразования

$$S \to WS, \quad W(\nu) \in \mathbb{U}(\mathrm{N}).$$

Пусть матрица W удовлетворяет уравнению

$$\frac{dW}{d\nu} + W\frac{dS}{d\nu}S^{-1} = 0,$$

которое всегда имеет решение. Тогда после преобразования для любого решения будет выполнено равенство (15.12) для всех j, k.

Если вырождена только часть уровней, то соответствующее унитарное преобразование необходимо проделать только с этими уровнями. Таким образом, равенство (15.12) будет выполнено для всех уровней с $E_j = E_k$. □

Доказательство адиабатической теоремы будет проведено в ортонормированном базисе (15.6), где матрица S выбрана таким образом, как описано в лемме. Этот базис состоит из собственных векторов исходного гамильтониана и гамильтониан $H(\nu)$ в нем диагонален (15.10). Компоненты вектора состояния в базисе b_k, как и ранее, пометим штрихом, $\psi = \psi'^k b_k$. Поскольку гамильтониан H в этом базисе диагонален, то квадрат модуля k-той компоненты вектора состояния

$$|(\psi, b_k)|^2 = |\psi'^k|^2,$$

где круглые скобки обозначают скалярное произведение в $\mathbb{H}$, равен вероятности обнаружить квантовую систему в состоянии E_k.

Для формулировки теоремы нам понадобится функция

$$\triangle E_n(\nu) = \min_{j,\sigma} |E_j(\sigma) - E_n(\sigma)|, \quad \forall \sigma \in [0, \nu],$$

где минимум $|E_j - E_n|$ берется по всем j, для которых $E_j \neq E_n$, и всем $\sigma \in [0, \nu]$. Поскольку уровни энергии не пересекаются, то для каждого значения параметра ν функция $\triangle E_n(\nu)$ конечна и равна минимальному расстоянию от уровня энергии E_n до остальных уровней энергии.

Теорема 15.1.1 (Адиабатическая теорема). *Пусть гамильтониан $H = H(\nu)$, его собственные состояния $b_k(\nu)$ и уровни энергии $E_k(\nu)$ достаточное число раз дифференцируемы по ν на отрезке $\nu \in [0, \nu_0]$. Предположим, что число вырожденных собственных состояний постоянно во времени. Пусть $\psi_{(n)}(\nu, \epsilon)$ – решение уравнения Шредингера, которое в начальный момент времени совпадает с собственным состоянием $b_n(0)$ гамильтониана $H(0)$, соответствующем уровню энергии $E_n(0)$. Тогда в адиабатическом пределе (15.8) справедлива следующая оценка нормы*

$$1 - \sum_{j \in \Upsilon_n} |(\psi_{(n)}, b_j)|^2 = \frac{\mathsf{O}(\epsilon^2)}{\triangle E_n^2(\nu)}, \quad \forall \nu \in [0, \nu_0]. \tag{15.14}$$

То есть в процессе эволюции квантовая система будет оставаться в собственном состоянии гамильтониана $H(\nu)$, соответствующем уровню энергии $E_n(\nu)$, с точностью порядка ϵ^2.

Доказательство. Будем решать задачу Коши (15.5) в базисе (15.6). Гамильтониан, который входит в уравнение Шредингера, в этом базисе диагонален с точностью до линейных членов по ϵ,

$$H' = H_{\text{D}} - i\epsilon \frac{dS}{d\nu} S^{-1}.$$

Пусть матрица S выбрана таким образом, как описано в лемме 15.1.1. Предположим, что в начальный момент времени система находится в собственном состоянии гамильтониана H_{D} и, следовательно, в собственном состоянии исходного гамильтониана $H = S^{-1} H_{\text{D}} S$. Это значит, что начальное условие в базисе b_k имеет вид

$$\psi_{(n)}(0,\epsilon) = b_n(0) = (\underbrace{0,\dots,0}_{n-1},1,0\dots,0).$$

Любое решение уравнения Шредингера представимо в виде

$$\psi_{(n)}(\nu,\epsilon) = \phi_{(n)}(\nu,\epsilon)\,\mathsf{exp}\left(-\frac{i}{\epsilon}\int_0^\nu d\sigma H_{\text{D}}(\sigma)\right). \tag{15.15}$$

Тогда для вектора $\phi_{(n)}$ получаем уравнение

$$\frac{d\phi_{(n)}}{d\nu} = -\phi_{(n)}\,\mathsf{exp}\left(-\frac{i}{\epsilon}\int_0^\nu d\sigma H_{\text{D}}\right)\frac{dS}{d\nu}S^{-1}\,\mathsf{exp}\left(\frac{i}{\epsilon}\int_0^\nu d\sigma H_{\text{D}}\right),$$

Полученное уравнение вместе с начальным условием перепишем в виде интегрального уравнения

$$\phi_{(n)}(\nu,\epsilon) = \psi'_{(n)}(0) - \int_0^\nu d\sigma \phi_{(n)}\,\mathsf{exp}\left(-\frac{i}{\epsilon}\int_0^\sigma d\lambda H_{\text{D}}\right)\frac{dS}{d\sigma}S^{-1}\,\mathsf{exp}\left(\frac{i}{\epsilon}\int_0^\sigma d\lambda H_{\text{D}}\right). \tag{15.16}$$

При $\epsilon \to 0$ подынтегральное выражение содержит быстро осциллирующий множитель и его легко оценить. Рассмотрим модуль компоненты решения $\psi'^{j}_{(n)}$, которая соответствует собственному состоянию гамильтониана H с энергией E_j, где $E_j \neq E_n$,

$$\left|\psi'^{j}_{(n)}\right| = \left|\phi^j_{(n)}\right| = \left|\sum_{k=1}^{\text{N}}\int_0^\nu d\sigma\,\mathsf{exp}\left(\frac{i}{\epsilon}\int_0^\sigma d\lambda(E_j-E_k)\right)\phi^k_{(n)}\left(\frac{dS}{d\nu}S^{-1}\right)_k{}^j\right|. \tag{15.17}$$

В сумме справа слагаемые с $E_k = E_j$ вклада не дают в силу равенства (15.12). При $E_k \neq E_j$ каждое слагаемое проинтегрируем по частям:

$$\begin{aligned}\frac{\epsilon}{i(E_j-E_k)}\,\mathsf{exp}\left(\frac{i}{\epsilon}\int_0^\sigma d\lambda(E_j-E_k)\right)\phi^k_{(n)}\left(\frac{dS}{d\nu}S^{-1}\right)_k{}^j\Bigg|_0^\nu - \\ -\frac{\epsilon}{i}\int_0^\nu d\sigma\,\mathsf{exp}\left(\frac{i}{\epsilon}\int_0^\sigma d\lambda(E_j-E_k)\right)\frac{1}{E_j-E_k}\frac{d}{d\sigma}\left[\phi^k_{(n)}\left(\frac{dS}{d\nu}S^{-1}\right)_k{}^j\right].\end{aligned} \tag{15.18}$$

По предположению подынтегральное выражение во втором слагаемом является дифференцируемой функцией и его снова можно проинтегрировать по частям. В результате получим, что оно имеет порядок ϵ^2, и им можно пренебречь. Модуль первого слагаемого, очевидно, ограничен. Таким образом получаем оценку

$$\left|\psi'^{j}_{(n)}(\nu,\epsilon)\right| = \frac{\mathsf{O}(\epsilon)}{\mathsf{min}\left|E_j(\sigma)-E_k(\sigma)\right|}, \quad \forall j \notin \Upsilon_n. \tag{15.19}$$

где минимум берется по всем k, для которых $E_k \neq E_j$ и всем $\sigma \in [0, \nu]$.

Теперь снова вернемся к выражению (15.18). Из оценки (15.19) вытекает, что $|\phi^k_{(n)}|$ для всех k при $E_k \neq E_n$ имеет порядок не ниже ϵ. Поэтому в сумме (15.17) все слагаемые с индексом $k \notin \Upsilon_n$ дают вклад не ниже ϵ^2 и ими можно пренебречь. Поэтому оценку (15.19) можно улучшить

$$\left|\psi'^j_{(n)}(\nu)\right| = \frac{\mathsf{O}(\epsilon)}{\mathsf{min}\left|E_j(\sigma) - E_n(\sigma)\right|}, \qquad \forall j \notin \Upsilon_n,$$

где минимум берется только по $\sigma \in [0, \nu]$.

Норма произвольного решения сохраняется во времени и равна единице. Следовательно,

$$1 - \sum_{j \in \Upsilon_n} |\psi'^j_{(n)}(\nu, \epsilon)|^2 = \sum_{j \notin \Upsilon_n} |\psi'^j_{(n)}(\nu, \epsilon)|^2.$$

Поскольку число уровней конечно, то отсюда вытекает оценка (15.14). □

Замечание. В теореме функция $\triangle E_n(\nu)$ для каждого ν равна константе и ее можно включить в $\mathsf{O}(\epsilon^2)$. Тем не менее мы выделили множитель $\triangle E_n$ с тем, чтобы показать, что предположение о том, что уровни энергии не пересекаются, является существенным. При пересечении уровней энергии знаменатель в (15.14) обращается в нуль и доказательство не проходит. В этом случае требуются дополнительные предположения о степени касания уровней энергии и дополнительное исследование. В своей оригинальной статье [?] Борн и Фок рассмотрели случай, когда спектр гамильтониана дискретен, но может быть неограничен. Неявно ими было сделано предположение о невырожденности спектра почти для всех моментов времени. Кроме того, допускалась возможность определенного пересечения уровней энергии с течением времени. Мы рассмотрели более простой конечномерный случай, когда уровни энергии не пересекаются. Это позволило упростить доказательство и выявить наиболее существенные моменты. Оценка (15.14) согласуется с оценкой, приведенной в [?]. □

Адиабатическая теорема утверждает, что, если в начальный момент времени система находилась в собственном состоянии гамильтониана, соответствующем уровню энергии $E_n(0)$, и этот уровень невырожден, то в адиабатическом пределе она будет оставаться в собственном состоянии $E_n(\nu)$ с точностью порядка ϵ^2 при конечных значениях параметра ν. Если уровень энергии E_n вырожден, то система будет находиться в одном из собственных состояний E_j, где $j \in \Upsilon_n$, с той же точностью. В следующем разделе мы увидим, что оценка (15.14) неулучшаема, а в процессе эволюции система может оказаться в любом из вырожденных состояний E_j, $j \in \Upsilon_n$, с вероятностью порядка единицы. Эти утверждения, естественно, не зависят от выбора базиса, который использовался при доказательстве адиабатической теоремы.

Рассмотрим теперь, как выглядит в адиабатическом пределе решение задачи Коши (15.4) в фиксированном базисе в невырожденном случае. Пусть $\varphi(\nu)$ – собственная функция гамильтониана $H(\nu)$, отвечающая невырожденному собственному значению энергии $E(\nu)$,

$$\varphi H = E\varphi, \qquad \forall \nu \in [0, \nu_0].$$

Эти собственные функции определены с точностью до фазового множителя, который может зависеть от ν. Пусть в начальный момент времени система находилась в собственном состоянии $\psi_0 = \varphi(0)$. В адиабатическом приближении она будет находиться в собственном состоянии, соответствующем энергии $E(\nu)$. Поскольку собственное состояние невырождено, то решение задачи Коши (15.4) может отличаться от φ не

более, чем на фазовый множитель. Поэтому будем искать решение в виде $\psi = \mathsf{e}^{i\Theta}\varphi$, где $\Theta(t)$ – неизвестная функция времени. Тогда из уравнения Шредингера следует уравнение на фазу

$$\dot{\Theta} = i(\dot{\varphi}, \varphi) - E. \tag{15.20}$$

Поскольку в начальный момент времени $\Theta(0) = 0$, то фаза имеет вид

$$\Theta(t) = i\int_0^t ds(\dot{\varphi}, \varphi) - \int_0^t dsE(\epsilon s) = i\int_0^\nu d\sigma \left(\frac{d\varphi}{d\nu}, \varphi\right) - \int_0^t dsE(\epsilon s). \tag{15.21}$$

Покажем, что фазу собственной функции φ всегда можно выбрать таким образом, что будет выполнено равенство

$$\left(\frac{d\varphi}{d\nu}, \varphi\right) = 0, \tag{15.22}$$

если $\nu \in [0, \infty)$. Действительно, пусть $\varphi = \mathsf{e}^{i\beta}\chi$, где функция $\beta(\nu)$ удовлетворяет уравнению

$$i\frac{d\beta}{d\nu} = \left(\frac{d\varphi}{d\nu}, \varphi\right) \tag{15.23}$$

с некоторым начальным условием, например, $\beta(0) = 0$. Тогда нетрудно проверить, что для новых собственных функций выполнено равенство $(d\chi/d\nu, \chi) = 0$. Поскольку уравнение (15.23) всегда имеет решение на полупрямой, то собственные функции φ гамильтониана всегда можно выбрать таким образом, что будет выполнено равенство (15.22).

Однако уравнение (15.23) может не иметь решения на окружности $\mathbb{S}^1$. Будем считать, что на окружности $\nu \in [0, 2\pi]$. Тогда необходимым условием существования решения является равенство

$$i\int_0^{2\pi} d\nu \left(\frac{d\varphi}{d\nu}, \varphi\right) = 2\pi m, \qquad m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots .$$

Ясно, что это условие в общем случае не выполняется. Поэтому уравнение (15.23) может не иметь решения на окружности. В этом случае первое слагаемое в выражении для фазы (15.21) устранить нельзя. По сути дела это и есть фаза Берри.

Решение задачи Коши на окружности $\nu \in \mathbb{S}^1$ означает наличие машины времени. Эти решения можно отбросить как нефизические. Однако Берри предложил другую схему рассуждений, которая будет рассмотрена в разделе 15.2.1.

15.1.1 Двухуровневая система

В настоящем разделе в качестве примера мы рассмотрим двухуровневую квантово-механическую систему, для которой уравнение Шредингера решается явно. Будет показано, что оценка, данная в адиабатической теореме является неулучшаемой.

Чтобы упростить задачу, поступим следующим образом. Вместо того, чтобы задать исходный гамильтониан в фиксированном базисе, а затем его диагонализировать, мы зададим диагональную матрицу $H_{\text{д}}$ и унитарную матрицу S. Пусть диагонализированный гамильтониан имеет вид

$$H_{\text{д}} = \begin{pmatrix} E_1(\nu) & 0 \\ 0 & E_2(\nu) \end{pmatrix},$$

где $E_{1,2}(\nu)$ – некоторые заданные функции. Унитарную матрицу S в (15.10) выберем в виде

$$S = \begin{pmatrix} \cos\frac{\omega}{2} & i\sin\frac{\omega}{2} \\ i\sin\frac{\omega}{2} & \cos\frac{\omega}{2} \end{pmatrix},$$

где $\omega(\nu) \in \mathbb{R}$ – также некоторая заданная функция. Следовательно, исходный гамильтониан задачи имеет вид

$$H = S^{-1}H_{\text{D}}S = \begin{pmatrix} E_1\cos^2\frac{\omega}{2} + E_2\sin^2\frac{\omega}{2} & -\frac{i}{2}(E_2 - E_1)\sin\omega \\ \frac{i}{2}(E_2 - E_1)\sin\omega & E_1\sin^2\frac{\omega}{2} + E_2\cos^2\frac{\omega}{2} \end{pmatrix}$$

и зависит от трех, пока произвольных, функций от параметра ν, которые предполагаются достаточно гладкими.

Будем решать уравнение Шредингера в базисе (15.6), в котором гамильтониан имеет вид (20.61). Простые вычисления приводят к гамильтониану

$$H' = \begin{pmatrix} E_1(\nu) & \frac{\dot\omega}{2} \\ \frac{\dot\omega}{2} & E_2(\nu) \end{pmatrix},$$

где точка обозначает дифференцирование по времени t. Ищем решение уравнения Шредингера (15.5) в виде строки

$$\psi' = \left(\exp\left(-i\int_0^t dsE_1\right)\phi,\, \exp\left(-i\int_0^t dsE_2\right)\chi \right),$$

где $\phi(t)$ и $\chi(t)$ – неизвестные функции. Подстановка в уравнение Шредингера приводит к системе уравнений для компонент:

$$\begin{aligned} i\dot\phi &= \frac{\dot\omega}{2}\exp\left(-i\int_0^t ds(E_2 - E_1)\right)\chi, \\ i\dot\chi &= \frac{\dot\omega}{2}\exp\left(i\int_0^t ds(E_2 - E_1)\right)\phi. \end{aligned} \tag{15.24}$$

При $\dot\omega \neq 0$ из первого уравнения следует равенство

$$\chi = \frac{2i}{\dot\omega}\exp\left(i\int_0^t ds(E_2 - E_1)\right)\dot\phi. \tag{15.25}$$

Продифференцируем это равенство по времени и подставим во второе уравнение. В результате получим уравнение второго порядка для ϕ:

$$\ddot\phi + \left(i(E_2 - E_1) - \frac{\ddot\omega}{\dot\omega}\right)\dot\phi + \left(\frac{\dot\omega}{2}\right)^2\phi = 0. \tag{15.26}$$

Для того, чтобы решить это уравнение в явном виде зафиксируем произвольные функции, которые входят в задачу:

$$\begin{aligned} E_1 &= E_1^{(0)} + \epsilon t, \quad & E_{1(0)} &= \text{const}, \\ E_2 &= E_2^{(0)} + \epsilon t, \quad & E_{2(0)} &= \text{const}, \\ \omega &= 2\epsilon t. \end{aligned} \tag{15.27}$$

Тогда уравнение (15.26) примет простой вид

$$\ddot{\phi} + 2i\triangle E\dot{\phi} + \epsilon^2\phi = 0, \tag{15.28}$$

где $\triangle E = E_2^{(0)} - E_1^{(0)}$ – расстояние между уровнями энергии. Общее решение этого уравнения имеет вид

$$\phi = \mathsf{e}^{-i\triangle Et}\left(C_1\,\mathsf{e}^{i\sqrt{\triangle E^2+\epsilon^2}\,t} + C_2\,\mathsf{e}^{-i\sqrt{\triangle E^2+\epsilon^2}\,t}\right),$$

где $C_{1,2}$ – постоянные интегрирования. Компонента χ определяется по формуле (15.25). Предположим, что в начальный момент времени система находилась в состоянии E_1, т.е.

$$\phi(0) = 1, \qquad \chi(0) = 0. \tag{15.29}$$

Простые вычисления дают решение задачи Коши для системы уравнений (15.24):

$$\begin{aligned}
\phi &= \mathsf{e}^{-i\triangle Et}\left[\cos\left(\sqrt{\triangle E^2+\epsilon^2}\,t\right) + \frac{i\triangle E}{\sqrt{\triangle E^2+\epsilon^2}}\sin\left(\sqrt{\triangle E^2+\epsilon^2}\,t\right)\right],\\
\chi &= \mathsf{e}^{i\triangle Et}\left[-\frac{i\epsilon}{\sqrt{\triangle E^2+\epsilon^2}}\sin\left(\sqrt{\triangle E^2+\epsilon^2}\,t\right)\right].
\end{aligned} \tag{15.30}$$

Выпишем также компоненты соответствующего вектора состояния

$$\begin{aligned}
\psi'^1 &= \mathsf{e}^{-i\left(\frac{\nu^2}{2\epsilon}+E_1^{(0)}\frac{\nu}{\epsilon}-\triangle E\frac{\nu}{\epsilon}\right)}\left[\cos\left(\sqrt{\triangle E^2+\epsilon^2}\,\frac{\nu}{\epsilon}\right) + \frac{i\triangle E}{\sqrt{\triangle E^2+\epsilon^2}}\sin\left(\sqrt{\triangle E^2+\epsilon^2}\,\frac{\nu}{\epsilon}\right)\right],\\
\psi'^2 &= \mathsf{e}^{-i\left(\frac{\nu^2}{2\epsilon}+E_2^{(0)}\frac{\nu}{\epsilon}+\triangle E\frac{\nu}{\epsilon}\right)}\left[-\frac{i\epsilon}{\sqrt{\triangle E^2+\epsilon^2}}\sin\left(\sqrt{\triangle E^2+\epsilon^2}\,\frac{\nu}{\epsilon}\right)\right],
\end{aligned} \tag{15.31}$$

где мы перешли от t, ϵ к переменным ν, ϵ. Отсюда следует, что адиабатический предел для самого вектора состояний неопределен, т.к. его фаза стремится к бесконечности. Однако оценку квадрата модуля компонент можно дать. Для решения (15.31) следует оценка

$$1 - |\psi'^1(\nu)|^2 = \frac{\mathsf{O}(\epsilon^2)}{(\triangle E)^2}, \qquad |\psi'^2(\nu)|^2 = \frac{\mathsf{O}(\epsilon^2)}{(\triangle E)^2},$$

которая совпадает с оценкой в адиабатической теореме. Отсюда следует, что данная оценка неулучшаема.

Теперь рассмотрим случай вырожденных состояний, $E_1 = E_2$, при заданных ранее функциях (15.27). В этом случае уравнение (15.28) сводится к уравнению для свободного осциллятора:

$$\ddot{\phi} + \epsilon^2\phi = 0,$$

и легко интегрируется. Выпишем соответствующее решение задачи Коши (15.29) для компонент вектора состояния:

$$\begin{aligned}
\psi'^1 &= \mathsf{e}^{-i\left(\frac{\nu^2}{2\epsilon}-E_1^{(0)}\frac{\nu}{\epsilon}\right)}\cos\nu,\\
\psi'^2 &= -i\,\mathsf{e}^{-i\left(\frac{\nu^2}{2\epsilon}-E_1^{(0)}\frac{\nu}{\epsilon}\right)}\sin\nu.
\end{aligned}$$

Мы снова видим, что адиабатический предел у вектора состояния отсутствует. Однако квадраты модулей компонент хорошо определены:

$$|\psi'^1|^2 = \cos^2\nu, \qquad |\psi'^2|^2 = \sin^2\nu.$$

Отсюда следует, что по мере увеличения параметра ν вектор состояния ψ' осциллирует между вырожденными состояниями. Это показывает, что, если в начальный момент времени система находится в одном из вырожденных состояний, то в процессе эволюции она может оказаться в любом из вырожденных состояний.

В настоящее время адиабатическая теорема доказана для гамильтонианов с бесконечным дискретным спектром. Кроме того адиабатическая теорема справедлива для изолированных уровней, энергия которых отделена от остального спектра, который может быть как дискретным, так и непрерывным [?].

15.2 Фаза Берри

Перейдем к задаче, которую рассмотрел М. Берри [?], в ее простейшем варианте.

Пусть гильбертово пространство конечномерно и гамильтониан $H = H(\lambda)$ дифференцируемо зависит от точки некоторого многообразия $\lambda \in \mathbb{M}$ размерности $\dim \mathbb{M} = n$. Если на $\mathbb{M}$ выбрать координатную окрестность $\mathbb{U} \subset \mathbb{M}$, то гамильтониан будет зависеть от n параметров λ^k, $k = 1, \dots, n$, (координат точки λ). Будем считать, что положение точки λ на $\mathbb{M}$ зависит от времени t некоторым наперед заданным образом, т.е. гамильтониан зависит от точки некоторой кривой $\lambda(t)$, $t \in [0, t_0]$. Мы будем решать уравнение Шредингера в адиабатическом приближении, т.е. величина t_0 должна быть достаточно велика. Предположим также, что гамильтониан зависит от времени только через точку $\lambda(t) \in \mathbb{M}$.

15.2.1 Абелев случай: невырожденное состояние

Рассмотрим задачу на собственные значения

$$\phi H = E\phi, \qquad E = \text{const},$$

где $\phi \in \mathbb{H}$ при всех $\lambda \in \mathbb{M}$. Предположим, что существует невырожденное собственное значение энергии E и соответствующее собственное состояние ϕ, которые достаточно гладко зависят от $\lambda \in \mathbb{M}$. Не ограничивая общности, предположим, что собственная функция ϕ нормирована на единицу, $(\phi, \phi) = 1$. Тогда она единственна с точностью до умножения на фазовый множитель, который может зависеть от λ. Зафиксируем этот фазовый множитель каким либо образом.

Теперь будем решать задачу Коши для уравнения Шредингера (15.1) с начальным условием

$$\psi|_{t=0} = \phi_0, \tag{15.32}$$

где $\phi_0 = \phi\big(\lambda(0)\big)$. В адиабатическом приближении квантовая система в процессе эволюции будет оставаться в собственном состоянии, соответствующем уровню энергии $E(\lambda)$. Поэтому ищем решение в виде

$$\psi = e^{i\Theta}\phi,$$

где $\Theta = \Theta(t)$ – некоторая неизвестная функция от времени. Тогда из уравнения Шредингера следует уравнение на фазу (15.20) с начальным условием $\Theta|_{t=0} = 0$. Поскольку $\dot{\phi} = \dot{\lambda}^k \partial_k \phi$, то решение задачи Коши для уравнения (15.20) имеет вид

$$\Theta = \int_0^t dt \dot{\lambda}^k A_k - \int_0^t ds E(s) = \int_{\lambda(0)}^{\lambda(t)} d\lambda^k A_k - \int_0^t ds E(s), \tag{15.33}$$

где введено обозначение

$$A_k(\lambda) = i(\phi, \partial_k \phi) \tag{15.34}$$

и интеграл по λ берется вдоль кривой $\lambda(t)$.

Таким образом, интеграл (15.33) в адиабатическом приближении дает решение задачи Коши для уравнения Шредингера (15.1) с начальным условием (15.32). Первое слагаемое в (15.33) называется *геометрической фазой* или *фазой Берри*, а второе – *динамической фазой*.

Заметим, что компоненты (15.34) вещественны вследствие нормировки волновой функции. Действительно, дифференцируя условие нормировки $(\phi, \phi) = 1$, получаем равенство

$$(\partial_k \phi, \phi) + (\phi, \partial_k \phi) = (\phi, \partial_k \phi)^\dagger + (\phi, \partial_k \phi) = 0.$$

Отсюда вытекает вещественность компонент (15.34) и, следовательно, фазы Берри.

Теперь рассмотрим множество замкнутых кривых $\gamma \in \Omega(\mathbb{M}, \lambda_0)$ на многообразии параметров $\mathbb{M}$ с началом и концом в точке $\lambda_0 \in \mathbb{M}$. Тогда для полного изменения фазы волновой функции получаем ответ

$$\Theta = \Theta_{\text{в}} - \int_0^{t_0} dt E,$$

где

$$\Theta_{\text{в}} = \oint_\gamma d\lambda^k A_k. \tag{15.35}$$

Заметим, что выражение для фазы Берри не зависит от параметризации кривой $\gamma(t)$. Это значит, что переход к адиабатическому пределу в уравнении Шредингера влияет на фазу Берри только через компоненты локальной формы связности (15.34).

В таком виде можно дать геометрическую интерпретацию фазе Берри $\Theta_{\text{в}}$, которая определяется первым слагаемым в полученном выражении. А именно, мы имеем главное расслоение $\mathbb{P}\big(\mathbb{M}, \pi, \mathbb{U}(1)\big)$, базой которого является многообразие параметров $\lambda \in \mathbb{M}$, а структурной группой – группа $\mathbb{U}(1)$ (фаза вектора состояния $\mathsf{e}^{i\Theta}$). Вектор гильбертова пространства $\phi \in \mathbb{H}$ представляет собой локальное сечение ассоциированного расслоения $\mathbb{E}\big(\mathbb{M}, \pi_{\mathbb{E}}, \mathbb{H}, \mathbb{U}(1), \mathbb{P}\big)$, типичным слоем которого является гильбертово пространство $\mathbb{H}$.

Рассмотрим изменение локального сечения ассоциированного расслоения, которое вызвано умножением вектора гильбертова пространства на фазовый множитель (вертикальный автоморфизм),

$$\phi' = \mathsf{e}^{ia} \phi,$$

где $a = a(\lambda) \in \mathcal{C}^2(\mathbb{M})$ – произвольная дважды дифференцируемая функция. Тогда компоненты (15.34) преобразуются по-правилу

$$A'_k = A_k - \partial_k a.$$

Сравнивая это правило с преобразованием компонент локальной формы связности, заключаем, что поля $A_k(\lambda)$ можно интерпретировать, как компоненты локальной

формы связности для группы $\mathbb{U}(1)$. Другими словами, $A_k(\lambda)$ – это калибровочное поле для одномерной унитарной группы $\mathbb{U}(1)$. Если база ассоциированного расслоения $\mathbb{E}\big(\mathbb{M}, \pi_{\mathbb{E}}, \mathbb{H}, \mathbb{U}(1), \mathbb{P}\big)$ покрыта некоторым семейством карт, $\mathbb{M} = \cup_j \mathbb{U}_j$, то множество сечений, заданных в каждой координатной окрестности $\mathbb{U}_j$, определяет семейство локальных форм связности на главном расслоении $\mathbb{P}\big(\mathbb{M}, \pi, \mathbb{U}(1)\big)$. Семейство локальных форм связности $d\lambda^k A_k$ определяет единственную с точностью до изоморфизма связность на $\mathbb{P}$ (теорема 14.1.1).

Вспомним выражение для элемента группы голономии в виде упорядоченной P-экспоненты (14.54). В рассматриваемом случае группа $\mathbb{U}(1)$ абелева и P-экспонента совпадает с обычной экспонентой. Поэтому фаза Берри (15.35) определяет элемент $\mathsf{e}^{i\Theta_{\text{в}}}$ группы голономии $\Phi(\lambda_0, e) \subset \mathbb{U}(1)$ главного расслоения в точке $(\lambda_0, e) \in \mathbb{P}$, соответствующей нулевому сечению $\mathbb{M} \ni \lambda \mapsto (\lambda, e) \in \mathbb{P}$, где $\lambda_0 = \lambda(0)$ и e – единица структурной группы $\mathbb{U}(1)$. Сечение является нулевым, поскольку в начальный момент времени фаза Берри равна нулю, $\Theta_{\text{в}}|_{t=0} = 0$. Локальная форма связности $d\lambda^k A_k$ также соответствует нулевому сечению.

Если база $\mathbb{M}$ односвязна, то выражение для фазы Берри (15.35) можно переписать в виде поверхностного интеграла от компонент локальной формы кривизны. Используя формулу Стокса, получаем следующее выражение

$$\Theta_{\text{в}} = \frac{1}{2} \iint_S d\lambda^k \wedge d\lambda^l F_{kl}, \tag{15.36}$$

где S – поверхность в $\mathbb{M}$ с границей $\lambda \in \Omega(\mathbb{M}, \lambda_0)$ и $F_{kl} = \partial_k A_l - \partial_l A_k$ – компоненты локальной формы кривизны (напряженности калибровочного поля). Если база $\mathbb{M}$ не является односвязной, то выражение для фазы Берри в виде поверхностного интеграла (15.36) имеет место только для тех замкнутых путей, которые стягиваются в точку.

15.2.2 Частица со спином $1/2$ в магнитном поле

В качестве примера вычислим фазу Берри для частицы со спином $1/2$, находящейся во внешнем однородном магнитном поле. В нерелятивистской квантовой механике частица со спином $1/2$ описывается двухкомпонентной волновой функцией

$$\psi = (\psi_+, \psi_-).$$

Будем считать, что она находится в пространстве $\mathbb{R}^3$ с заданным однородным магнитным полем. Пусть напряженность магнитного поля $H^k(t)$, $k = 1, 2, 3$, не зависит от точки пространства, но меняется со временем t некоторым заданным образом. Кроме того, для простоты, пренебрежем кинетической энергией частицы и будем считать, что другие поля отсутствуют. В этом случае гильбертово пространство $\mathbb{H}$ двумерно, и гамильтониан частицы состоит из одного слагаемого – взаимодействия магнитного момента частицы с внешним магнитным полем (см., например, [**?**, **?**]),

$$H = -\mu H^k \sigma_k^{\text{т}},$$

где $\sigma_k^{\text{т}}$ – транспонированные матрицы Паули (поскольку в наших обозначениях они действуют справа) и μ – магнетон (размерная постоянная, равная отношению магнитного момента частицы к ее спину). Чтобы привести гамильтониан к виду, который был рассмотрен ранее, ведем новые переменные $\lambda^k = -\mu H^k$. Тогда гамильтониан примет вид

$$H = \lambda^k \sigma_k^{\text{т}} = \begin{pmatrix} \lambda^3 & \lambda^+ \\ \lambda^- & -\lambda^3 \end{pmatrix}, \tag{15.37}$$

где $\lambda^{\pm} = \lambda^1 \pm i\lambda^2$.

Собственные значения гамильтониана (15.37) находятся из уравнения

$$\mathsf{det}\,(H - E\mathbb{1}) = 0,$$

которое имеет два вещественных решения

$$E_{\pm} = \pm|\lambda|, \tag{15.38}$$

где

$$|\lambda| = \sqrt{(\lambda^1)^2 + (\lambda^2)^2 + (\lambda^3)^2}$$

– длина вектора $\lambda = \{\lambda^k\} \in \mathbb{R}^3$. Нетрудно проверить, что уравнение на собственные функции,

$$\phi_{\pm} H = E_{\pm}\phi_{\pm},$$

имеет два решения

$$\phi_{\pm} = \frac{1}{\sqrt{2|\lambda|}} \left(\pm \frac{\lambda^-}{\sqrt{|\lambda| \mp \lambda^3}}, \sqrt{|\lambda| \mp \lambda^3} \right). \tag{15.39}$$

В полученном выражении множитель выбран таким образом, что собственные функции нормированы на единицу,

$$(\phi_{\pm}, \phi_{\pm}) = 1.$$

Таким образом, гамильтониан (15.37) частицы со спином $1/2$, находящейся во внешнем однородном магнитном поле, имеет два невырожденных собственных состояния (15.39), соответствующих уровням энергии (15.38).

Для дальнейших вычислений в пространстве параметров $\lambda \in \mathbb{R}^3$ удобно ввести сферические координаты $|\lambda|, \theta, \varphi$:

$$\begin{aligned} \lambda^1 &= |\lambda| \sin\theta \cos\varphi, \\ \lambda^2 &= |\lambda| \sin\theta \cos\varphi, \\ \lambda^3 &= |\lambda| \cos\theta. \end{aligned}$$

Тогда собственные функции примут вид

$$\phi_+ = \left(\cos\frac{\theta}{2}\, \mathsf{e}^{-i\varphi},\, \sin\frac{\theta}{2} \right), \qquad \phi_- = \left(-\sin\frac{\theta}{2}\, \mathsf{e}^{-i\varphi},\, \cos\frac{\theta}{2} \right).$$

Замечание. Собственные функции гамильтониана в сферической системе координат не определены при $\theta = 0, \pi$. Это – координатная сингулярность, присущая сферической системе координат. В декартовой системе координат собственные функции (15.39) никакой сингулярности не имеют. □

Допустим, что экспериментатор, наблюдающий за частицей, достаточно гладко меняет однородное магнитное со временем. То есть параметры $\lambda^k(t)$, от которых зависит гамильтониан, достаточно гладко зависят от времени. Предположим также, что в начальный момент времени $t = 0$ частица находилась в состоянии ϕ_+. Соответствующее решение уравнения Шредингера (15.1) в адиабатическом приближении имеет вид

$$\psi = \mathsf{e}^{i\Theta}\phi_+,$$

где фаза Θ удовлетворяет уравнению (15.20). Нетрудно вычислить компоненты локальной формы связности $A_k = i(\phi_+, \partial_k \phi_+)$ для собственного состояния ϕ_+,

$$A_{|\lambda|} = 0, \qquad A_\theta = 0, \qquad A_\varphi = \cos^2\frac{\theta}{2}.$$

Соответствующая локальная форма кривизны имеет только две отличные от нуля компоненты:

$$F_{\theta\varphi} = -F_{\varphi\theta} = -\frac{1}{2}\sin\theta.$$

Теперь вычислим фазу Берри для замкнутой кривой в пространстве параметров $\gamma = \{\lambda^k(t)\} \in \mathbb{M}$,

$$\begin{aligned}\Theta_{\text{в}} &= \oint_\gamma d\lambda^k A_k = \frac{1}{2}\iint_S d\lambda^k \wedge d\lambda^l F_{kl} = \\ &= \iint_S d\theta \wedge d\varphi F_{\theta\varphi} = -\frac{1}{2}\iint_S d\theta \wedge d\varphi \sin\theta = -\frac{1}{2}\Omega(\gamma),\end{aligned} \tag{15.40}$$

где S – поверхность в $\mathbb{R}^3$ с границей γ и $\Omega(\gamma)$ – телесный угол, который занимает поверхность S, если смотреть из начала координат.

Если в начальный момент времени частица находилась в состоянии ϕ_-, то вычисления проводятся аналогично. В этом случае

$$A_{|\lambda|} = 0, \qquad A_\theta = 0, \qquad A_\varphi = \sin^2\frac{\theta}{2},$$

и компоненты локальной формы кривизны отличаются знаком,

$$F_{\theta\varphi} = -F_{\varphi\theta} = \frac{1}{2}\sin\theta.$$

Следовательно, фаза Берри также отличается только знаком.

Таким образом, если в начальный момент времени частица находилась в одном из состояний $\phi_\pm$, то после изменения однородного магнитного поля вдоль замкнутой кривой $\gamma(t)$, ее волновая функция изменится на фазовый множитель, геометрическая часть которого равна

$$\Theta_{\text{в}\pm} = \mp\frac{1}{2}\Omega(\gamma), \tag{15.41}$$

где $\Omega(\gamma)$ – телесный угол, под которым виден замкнутый контур $\gamma(t)$ из начала координат. Этот результат имеет место в адиабатическом приближении, когда параметры $\gamma(t)$ медленно меняются со временем.

Выражение для фазы Берри (15.41) было подтверждено экспериментально [**?**] для рассеяния поляризованных нейтронов в спиральном магнитном поле.

В рассмотренном примере однородное магнитное поле может иметь произвольное направление и величину. Следовательно, база $\mathbb{M}$ главного расслоения $\mathbb{P}\big(\mathbb{M}, \pi, \mathbb{U}(1)\big)$ совпадает с евклидовым пространством, $\mathbb{M} = \mathbb{R}^3$. Поэтому главное расслоение $\mathbb{P}$ тривиально, $\mathbb{P} \approx \mathbb{R}^3 \times \mathbb{U}(1)$. Отсюда следует, что фаза Берри является не топологическим понятием, а геометрическим, т.к. топология главного расслоения тривиальна. Она обязана своим происхождением нетривиальной связности, которая определяется сечениями ассоциированного расслоения.

15.2.3 Неабелев случай: вырожденное состояние

Понятие фазы Берри было обобщено на случай, когда уровни энергии гамильтониана вырождены [?]. В этом случае при решении уравнения Шредингера возникает главное расслоение $\mathbb{P}\big(\mathbb{M},\pi,\mathbb{U}(r)\big)$ со структурной группой $\mathbb{U}(r)$, где r – количество независимых собственных функций, соответствующих вырожденному уровню энергии E. Опишем эту конструкцию подробно.

Предположим, что гамильтониан квантовой системы зависит от точки некоторого многообразия $\lambda(t)\in\mathbb{M}$, как и ранее. Пусть E – вырожденное собственное значение гамильтониана H, которому соответствуют r независимых собственных функций ϕ^a, $a=1,\dots,r$,

$$\phi^a H = E\phi^a$$

для всех моментов времени. Мы предполагаем, что $E(\lambda)$ и $\phi^a(\lambda)$ являются достаточно гладкими функциями от точки многообразия λ, и число собственных функций r не меняется со временем.

Собственные функции можно выбрать ортонормированными,

$$(\phi^a,\phi_b)=\delta^a_b,$$

где δ^a_b – символ Кронекера. Будем искать решение задачи Коши ψ^a для уравнения Шредингера (15.1) с начальным условием

$$\psi^a(0)=\psi^a_0=\phi^a\big(\lambda(0)\big).$$

То есть в начальный момент времени система находится в одном из собственных состояний ϕ^a. В адиабатическом приближении решение ψ^a для всех моментов времени является собственной функцией гамильтониана $H(\lambda)$, соответствующей значению энергии $E(\lambda)$. Поэтому его можно разложить по собственным функциям вырожденного состояния

$$\psi^a=\phi^b U^{-1}{}^a_b, \tag{15.42}$$

где $U(\lambda)\in\mathbb{U}(r)$ – некоторая унитарная матрица, которая достаточно гладко зависит от точки $\lambda\in\mathbb{M}$.

Унитарность матрицы U обусловлена следующим обстоятельством. Рассмотрим решения ψ^a для всех значений индекса $a=1,\dots,r$. Дифференцируя скалярное произведение (ψ^a,ψ_b) по времени и используя уравнение Шредингера, получаем уравнение

$$\frac{d}{dt}(\psi^a,\psi_b)=-i(\psi^a H,\psi_b)+i(\psi^a,H\psi_b)=0.$$

Последнее равенство следует из самосопряженности гамильтониана. Отсюда следует, что, если в начальный момент времени векторы $\psi^a_0=\phi^a\big(\lambda(0)\big)$ ортонормированы, то соответствующие решения уравнения Шредингера останутся таковыми и во все последующие моменты времени. Поэтому матрица U в разложении (15.42) унитарна.

Для искомого решения (15.42) уравнение Шредингера сводится к уравнению

$$i\phi^c\dot U^{-1}{}^b_c+i\dot\phi^c U^{-1}{}^b_c=\phi^c H U^{-1}{}^b_c.$$

Возьмем скалярное произведение левой и правой части с ϕ_a. В результате получаем уравнение на унитарную матрицу

$$\dot U^{-1}{}^b_a=\dot\lambda^k A_{ka}{}^c U^{-1}{}^b_c-iEU^{-1}{}^b_a, \tag{15.43}$$

где введено обозначение

$$A_{ka}{}^{c} = -(\partial_k \phi^c, \phi_a). \tag{15.44}$$

Из условия ортонормированности собственных функций ϕ^a следует антиунитарность компонент $A_{ka}{}^{b}$ для всех $k = 1, \ldots, n$, если индексы a, b рассматриваются, как матричные. Действительно, дифференцируя условие ортонормированности $(\phi^b, \phi_a) = \delta^b_a$, получаем равенство

$$(\partial_k \phi^b, \phi_a) + (\phi^b, \partial_k \phi_a) = (\phi^a, \partial_k \phi_b)^\dagger + (\phi^b, \partial_k \phi_a) = 0.$$

То есть матрицы A_k антиунитарны и поэтому принадлежат алгебре Ли $\mathfrak{u}(r)$. Следовательно, матрицы A_k определяют 1-формы в некоторой окрестности $\mathbb{U} \subset \mathbb{M}$ со значениями в алгебре Ли, как и компоненты локальной формы связности.

Начальное условие для унитарной матрицы имеет вид

$$U^{-1}{}^{b}_{a}|_{t=0} = \delta^b_a.$$

Решение задачи Коши для уравнения (15.43) можно записать в виде упорядоченного P-произведения

$$\begin{aligned} U^{-1}(t) &= \mathsf{P}\,\mathsf{exp}\left(\int_0^t ds \dot{\lambda}^k(s) A_k(s) - i\int_0^t ds E(s)\right), \\ &= \mathsf{P}\,\mathsf{exp}\left(\int_{\lambda(0)}^{\lambda(t)} d\lambda^k A_k\right) \times \mathsf{exp}\left(-i\int_0^t ds E(s)\right), \end{aligned} \tag{15.45}$$

где мы, для краткости, опустили матричные индексы.

Первый сомножитель является обобщением фазы Берри на случай вырожденных состояний, а второй сомножитель – это динамическая фаза. Динамическая фаза имеет тот же вид, что и в случае невырожденного состояния.

Первый сомножитель в решении (15.45) представляет собой унитарную матрицу Вилчека–Зи

$$U^{-1}_{\mathrm{wz}} = \mathsf{P}\,\mathsf{exp}\left(\int_{\lambda(0)}^{\lambda(t)} d\lambda^k A_k\right), \tag{15.46}$$

которой можно дать следующую геометрическую интерпретацию. Мы имеем главное расслоение $\mathbb{P}\big(\mathbb{M}, \pi, \mathbb{U}(r)\big)$ со структурной группой $\mathbb{U}(r)$ (преобразование (15.42)). Набор собственных функций ϕ^a представляет собой сечение ассоциированного расслоения $\mathbb{E}\big(\mathbb{M}, \pi_{\mathbb{E}}, \mathbb{H}^r, \mathbb{U}(r), \mathbb{P}\big)$, типичным слоем которого является тензорное произведение гильбертовых пространств

$$\mathbb{H}^r = \underbrace{\mathbb{H} \otimes \ldots \otimes \mathbb{H}}_{r}.$$

При вертикальном автоморфизме, который задан унитарной матрицей $U(\lambda) \in \mathbb{U}(r)$,

$$\phi'^a = \phi^b U^{-1}{}^{a}_{b}, \qquad \phi'_a = U_a{}^b \phi_b,$$

поля (15.44) преобразуются по правилу

$$A'_k = U A_k U^{-1} + \partial_k U U^{-1}, \tag{15.47}$$

где мы опустили матричные индексы. Отсюда следует, что поля A_k можно интерпретировать, как компоненты локальной формы связности или поля Янга–Миллса.

Совокупность этих компонент, заданная на координатном покрытии базы $\mathbb{M}$, однозначно задает связность на главном расслоении $\mathbb{P}\big(\mathbb{M},\pi,\mathbb{U}(r)\big)$.

Если путь замкнут, $\gamma\in\Omega(\mathbb{M},\lambda_0)$, то унитарная матрица Вилчека–Зи (15.46) представляет собой элемент группы голономии $\mathbb{U}_{\rm wz}^{-1}\in\Phi(\lambda_0,e)$, в точке $(\lambda_0,e)\in\mathbb{P}$, соответствующей нулевому сечению $\mathbb{M}\ni\lambda\mapsto(\lambda,e)\in\mathbb{P}$, где $\lambda_0=\lambda(0)$ и e – единица структурной группы $\mathbb{U}(r)$.

Таким образом, в случае вырожденного уровня энергии гамильтониана возникает главное расслоение $\mathbb{P}\big(\mathbb{M},\pi,\mathbb{U}(r)\big)$. В рассматриваемом случае базой $\mathbb{M}$ является многообразие параметров $\lambda\in\mathbb{M}$, от точки которого зависит гамильтониан. Мы предполагаем, что это многообразие конечномерно. Структурной группой является унитарная группа $\mathbb{U}(r)$, которая также конечномерна. Связность на главном расслоении определяется сечениями ассоциированного расслоения $\mathbb{E}\big(\mathbb{M},\pi_{\mathbb{E}},\mathbb{H}^r,\mathbb{U}(r),\mathbb{P}\big)$. В общем случае типичным слоем ассоциированного расслоения может быть бесконечномерное гильбертово пространство $\mathbb{H}^r$. В настоящей монографии мы не рассматриваем бесконечномерных многообразий и расслоений, чтобы избежать возникающих при этом трудностей [**?**]. Однако в данном случае все, что нужно, это формула преобразования компонент локальной формы связности (15.47), которую легко проверить в каждом конкретном случае. Если база $\mathbb{M}$ не покрывается одной картой, то состояние квантовой системы задается семейством локальных сечений на координатном покрытии базы. Оно определяет семейство локальных форм связности (15.44). В свою очередь семейство локальных форм связности однозначно с точностью до изоморфизма определяет связность на главном расслоении $\mathbb{P}\big(\mathbb{M},\pi,\mathbb{U}(r)\big)$.

Опять мы видим, что главные и ассоциированные расслоения могут быть тривиальными или нет, это зависит от рассматриваемой задачи. Связность на главном расслоении $\mathbb{P}\big(\mathbb{M},\pi,\mathbb{U}(r)\big)$ может быть нетривиальна и приводить к нетривиальной матрице Вилчека–Зи (15.46), которая описывает параллельный перенос слоев вдоль пути на базе $\lambda(t)\in\mathbb{M}$, даже для тривиальных расслоений. Это говорит о ее геометрическом, а не топологическом происхождении. Для замкнутых путей $\gamma\in\Omega(\mathbb{M},\lambda_0)$ с началом и концом в точке $\lambda_0\in\mathbb{M}$ матрица Вилчека–Зи определяет элемент группы голономии $\mathbb{U}_{\rm wz}\in\Phi(\lambda_0,e)\subset\mathbb{U}(r)$.

При рассмотрении фазы Берри и матрицы Вилчека–Зи мы, для простоты, предположили, что гильбертово пространство квантовой системы конечномерно. Это предположение можно существенно ослабить. Полученные формулы справедливы для всех уровней, для которых справедлива адиабатическая теорема. То есть это должен быть изолированный уровень, энергия которого отделена от остального спектра.

15.3 Эффект Ааронова–Бома

Другой пример возникновения нетривиальной связности на тривиальном главном расслоении $\mathbb{P}\big(\mathbb{R}^4,\pi,\mathbb{U}(1)\big)\approx\mathbb{R}^4\times\mathbb{U}(1)$ в нерелятивистской квантовой механике дает эффект Ааронова–Бома [**?**]. В этом случае в отличии от фазы Берри в качестве базы $\mathbb{M}$ главного расслоения выступает не пространство параметров, а пространство-время $\mathbb{R}^4$, в котором частица движется. Эффект Ааронова–Бома не связан с адиабатической теоремой, и обсуждается только с геометрической точки зрения.

Рассмотрим уравнение Шредингера (15.1), в котором гамильтониан описывает движение точечной частицы массы m в трехмерном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3$ с

декартовыми координатами x^μ, $\mu = 1, 2, 3$,

$$H_0 = -\frac{\eta^{\mu\nu} p_\mu p_\nu}{2m} + U = -\frac{\hbar^2}{2m}\triangle + U, \tag{15.48}$$

где $p_\mu = i\hbar\partial_\mu$ – оператор импульса частицы, $\eta_{\mu\nu} = \mathsf{diag}\,(- - -)$ – отрицательно определенная пространственная метрика, $\triangle = \partial_1^2 + \partial_2^2 + \partial_3^2$ – оператор Лапласа и $U(x)$ – потенциальная энергия частицы, которая не зависит от времени.

Четырехмерный оператор импульса имеет вид $p_\alpha = i\hbar\partial_\alpha$, $\alpha = 0, 1, 2, 3$. При этом нулевая компонента 4-импульса $p_0 = i\hbar\partial_0 = i\hbar\partial_t$ имеет физический смысл оператора энергии частицы.

Если частица взаимодействует с электромагнитным полем, то это взаимодействие описывается с помощью минимальной подстановки для всех четырех компонент импульса

$$p_\alpha \quad \mapsto \quad i\hbar\partial_\alpha - \frac{e}{c}A_\alpha, \tag{15.49}$$

где e – заряд частицы, c – скорость света и A_α – потенциал электромагнитного поля (компоненты локальной формы $\mathbb{U}(1)$-связности). При этом нулевая компонента, разделенная на скорость света, A_0/c, имеет физический смысл потенциала электрического поля, а пространственные компоненты A_μ – ковекторного потенциала магнитного поля. Таким образом, точечная частица, находящаяся в электромагнитном поле, описывается уравнением Шредингера

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = \left[\frac{\hbar^2}{2m}\eta^{\mu\nu}\left(\partial_\mu + i\frac{e}{\hbar c}A_\mu\right)\left(\partial_\nu + i\frac{e}{\hbar c}A_\nu\right) + \frac{e}{c}A_0\right]\psi + U\psi. \tag{15.50}$$

Здесь мы вернулись к стандартным обозначениям квантовой механики, когда гамильтониан действует на вектор гильбертова пространства слева, поскольку он содержит производные.

В дальнейшем, для простоты, положим $\hbar = 1$ и $c = 1$.

С геометрической точки зрения минимальная подстановка (15.49) с точностью до постоянных совпадает с заменой частной производной на ковариантную:

$$\partial_\alpha \quad \mapsto \quad \partial_\alpha + ieA_\alpha.$$

Посмотрим на уравнение Шредингера (15.50) с геометрической точки зрения. Оно решается во всем пространстве, $\psi = \psi(t, x)$, поэтому базой расслоения является четырехмерное евклидово пространство, $(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 = \mathbb{R}^4$. При этом $\mathbb{R}^4$ рассматривается просто как четырехмерное многообразие без какой либо четырехмерной метрики. При желании метрику можно ввести, однако ее наличие никак не влияет на структуру главного расслоения и связности. Метрика $\eta_{\mu\nu}$ определена только на пространственных сечениях $t = \mathsf{const}$, поскольку она входит в уравнение Шредингера. Волновая функция $\psi(t, x)$ представляет собой сечение ассоциированного расслоения $\mathbb{E}\big(\mathbb{R}^4, \pi_\mathbb{E}, \mathbb{C}, \mathbb{U}(1), \mathbb{P}\big)$, типичным слоем которого является комплексная плоскость $\mathbb{C}$ и которое ассоциировано с некоторым главным расслоением $\mathbb{P}\big(\mathbb{R}^4, \pi, \mathbb{U}(1)\big)$. Это главное расслоение всегда тривиально, $\mathbb{P} \approx \mathbb{R}^4 \times \mathbb{U}(1)$, т.к. базой является евклидово пространство. На этом главном расслоении задана локальная форма $\mathbb{U}(1)$-связности, которая определяется электромагнитным потенциалом $A_\alpha(t, x)$. Мы рассматриваем не все множество сечений ассоциированного расслоения, а лишь подмножество, состоящее из тех дифференцируемых функций $\psi(t, x)$, которые в каждый момент времени t принадлежат гильбертову пространству квадратично интегрируемых функций $\mathbb{H} = \mathcal{L}_2(\mathbb{R}^3)$ на пространственных сечениях $\mathbb{R}^3$.

Рассмотрим два случая.

15.3.1 Электрический потенциал

Предположим, что магнитный потенциал равен нулю, $A_\mu = 0$, $\mu = 1, 2, 3$. Запишем уравнение Шредингера в виде

$$i\dot{\psi} = (H_0 + eA_0)\psi, \tag{15.51}$$

где H_0 – гамильтониан системы в отсутствии электрического потенциала (15.48). Предположим также, что электрический потенциал зависит только от времени, $A_0 = A_0(t)$. Будем искать решение уравнения Шредингера (15.51) в виде $\psi = \mathsf{e}^{-i\Theta}\phi$, где ϕ – решение свободного уравнения Шредингера,

$$i\dot{\phi} = H_0\phi, \tag{15.52}$$

и $\Theta = \Theta(t)$ – некоторая фаза, не зависящая от точки пространства. Подстановка $\psi = \mathsf{e}^{-i\Theta}\phi$ в исходное уравнение Шредингера (15.51) приводит к уравнению на фазу

$$\dot{\Theta} = eA_0,$$

где мы сократили общий фазовый множитель $\mathsf{e}^{-i\Theta}$ и ϕ. Это можно сделать, т.к. уравнение Шредингера должно выполняться для всех t и x. Решение полученного уравнения имеет вид

$$\Theta(t) = \Theta_0 + e\int_0^t ds A_0(s), \tag{15.53}$$

где Θ_0 – значение фазы волновой функции в начальный момент времени.

Ааронов и Бом предложили следующий эксперимент, схема которого показана на рис.15.1. Пучок электронов делится на два пучка, которые пропускаются через две металлические трубки, на которые подается различный потенциал. Затем пучки собираются и на экране наблюдается интерференционная картина. Электрический потенциал, который подается на трубки, зависит от времени. Предполагается, что он равен нулю, пока оба пучка не окажутся в своих трубках. Затем он возрастает до некоторых значений, которые отличаются внутри каждой трубки, и снова падает до нуля перед выходом пучков из трубок. Таким образом, пучки находятся в поле A_0 только внутри трубок. Интерференционная картина зависит от разности фаз электронов в пучках, которую можно приближенно оценить следующим образом.

Рис. 15.1: Пучок электронов делится на два пучка, которые пропускаются через две металлические трубки, имеющие разные потенциалы. Затем пучки вновь собираются и наблюдается интерференционная картина, которая зависит от разности фаз электронов в разных пучках.

Предположим, что электрон описывается волновой функцией $\psi(t, x)$, которая удовлетворяет уравнению Шредингера (15.51) во всем пространстве-времени $\mathbb{R}^4$. Мы считаем, что в каждый момент времени носитель волновой функции отличен от нуля в небольшой окрестности пространства вблизи траектории частиц. Только в этом случае вообще можно говорить о траектории частицы. В частности, при прохождении электрона сквозь металлическую трубку предполагается, что носитель волновой функции целиком лежит внутри трубки. Математически это можно описать, введя в уравнение Шредингера (15.51) соответствующий потенциал. Этот гипотетический

потенциал не меняет пространство-время, т.е. базу главного расслоения, а только обеспечивает движение электронов по заданной траектории. Изменение фазы электрона в верхнем пучке оценим следующим образом. Поскольку потенциал электрического поля однороден внутри трубки и носитель волновой функции целиком содержится внутри трубки, то можно считать, что фаза волновой функции определяется интегралом (15.53). Если принять, что в момент расщепления пучка $t = 0$, то фаза волновой функции электрона в верхнем пучке при достижении экрана изменится на величину, задаваемую интегралом

$$\Theta_1 = e \int_0^{t_0} dt A_0^{(1)}(t),$$

где $A_0^{(1)}(t)$ – потенциал электрического поля в момент времени t, т.е. в той точке пространства, где в момент времени t находится электрон из верхнего пучка. Аналогично, изменение фазы волновой функции электрона из нижнего пучка равно

$$\Theta_2 = e \int_0^{t_0} dt A_0^{(2)}(t),$$

где $A_0^{(2)}$ – потенциал электрического поля вдоль нижней траектории. Ясно, что разность фаз электронов в верхнем и нижнем пучке, $\Theta_{\text{АВ}} = \Theta_2 - \Theta_1$, можно записать в виде интеграла

$$\Theta_{\text{АВ}} = e \oint_\gamma dt A_0(t). \tag{15.54}$$

вдоль замкнутого контура γ в пространстве-времени, когда сначала проходится нижняя половина контура, изображенного на рис.15.1, а затем – верхняя половина в обратную сторону. На рис.15.1 показана проекция контура γ на пространственную плоскость.

Вернемся к геометрической интерпретации. Разность фаз электронов дается интегралом (15.54), который однозначно определяется контуром γ и заданным на нем потенциалом A_0. Электрический потенциал A_0 представляет собой временну́ю компоненту локальной формы $\mathbb{U}(1)$-связности на главном расслоении $\mathbb{P}\big(\mathbb{R}^4, \pi, \mathbb{U}(1)\big)$. Поэтому разность фаз (15.54) определяет элемент группы голономии $\mathsf{e}^{i\Theta_{\text{АВ}}} \in \Phi\big((t_0, x_0), e\big) \subset \mathbb{U}(1)$ в точке $(t_0 = 0, x_0)$, где x_0 – точка пространства, в которой пучок расщепляется. База главного расслоения $\mathbb{P}$ имеет тривиальную топологию. Поэтому контур γ всегда можно стянуть в точку. При этом металлические трубки остаются на месте, а контур их непрерывно пересекает. При стягивании контура фаза Аароновa–Бома $\Theta_{\text{АВ}}$ стремится к нулю, а соответствующий элемент группы голономии – к единице $e \in \mathbb{U}(1)$. Это хорошо известно, т.к. группа голономии является подгруппой Ли в структурной группе. Заметим, что стягивание контура никакого отношения к эксперименту не имеет, где наблюдается определенный элемент группы голономии, соответствующий начальному расположению контура.

Предлагаемая геометрическая конструкция не является единственной. Поскольку мы предполагаем, что носитель волновой функции сосредоточен в небольшой окрестности траектории, то можно построить много главных расслоений $\mathbb{P}'\big(\mathbb{M}, \pi, \mathbb{U}(1)\big)$ с различными базами $\mathbb{M}$. Для этого достаточно взять расслоение $\mathbb{P}\big(\mathbb{R}^4, \pi, \mathbb{U}(1)\big)$ с определенной на нем связностью и сузить базу путем выкалывания произвольного числа и произвольно расположенных прямых в пространстве $\mathbb{R}^3$, которые перпендикулярны плоскости рисунка 15.1 и не лежат на контуре γ. В результате база $\mathbb{M}$ перестанет

быть односвязным многообразием. Данная процедура представляется неестественной. Более того, она приводит к существенному усложнению задачи, т.к. исходное уравнение Шредингера (15.50) в таком случае необходимо решать на топологически нетривиальном многообразии.

В заключение данного раздела рассмотрим преобразование компоненты локальной формы $\mathbb{U}(1)$-связности при изменении сечения. Из уравнения Шредингера (15.51) следует, что при вертикальном автоморфизме

$$\psi' = \mathsf{e}^{ia}\psi,$$

где $a = a(t)$ – дифференцируемая функция времени, компонента локальной формы $\mathbb{U}(1)$ связности преобразуется по правилу

$$eA_0' = eA_0 + \dot{a},$$

как и подобает компонентам локальной формы $\mathbb{U}(1)$-связности.

Таким образом, в основе эффекта Аронова–Бома, так же как и для фазы Берри, лежит не топология, а нетривиальная геометрия, т.е. связность с нетривиальной группой голономии. При этом топология пространства может быть как тривиальной, так и нетривиальной.

15.3.2 Магнитный потенциал

Рассмотрим теперь случай, когда потенциал электрического поля равен нулю, $A_0 = 0$. Предположим, что ковекторный потенциал магнитного поля зависит только от пространственных координат x^μ и не завит от времени t (статическое поле). Тогда уравнение Шредингера примет вид

$$\begin{aligned} i\dot{\psi} &= \frac{1}{2m}\eta^{\mu\nu}(\partial_\mu + ieA_\mu)(\partial_\nu + ieA_\nu)\psi + U\psi \\ &= \frac{1}{2m}\eta^{\mu\nu}(\partial^2_{\mu\nu}\psi + 2ieA_\mu\partial_\nu\psi + ie\partial_\mu A_\nu\psi - e^2A_\mu A_\nu\psi) + U\psi. \end{aligned} \tag{15.55}$$

Пусть ϕ – решение уравнения Шредингера в отсутствии потенциала магнитного поля (15.52). Тогда нетрудно проверить, что функция

$$\psi = \mathsf{e}^{-i\Theta}\phi,$$

где фаза Θ удовлетворяет уравнению

$$\partial_\mu\Theta = eA_\mu \tag{15.56}$$

является решением исходного уравнения Шредингера (15.55).

Аронов и Бом предложили эксперимент для определения фазы Θ, схема которого показана на рис.15.2. В этом эксперименте пучок электронов делится на два пучка, которые огибают бесконечно длинный соленоид с постоянным магнитным потоком Φ, который перпендикулярен плоскости рисунка, с разных сторон. Затем пучки собираются вместе и на экране наблюдается интерференционная картина, которая зависит от разности фаз электронов в разных пучках.

Для оценки разности фаз электронов сделаем те же предположения, что и в случае электрического поля. А именно, будем считать, что уравнение Шредингера без магнитного потенциала имеет решение с носителем, который сосредоточен в малой

окрестности траектории электрона. Мы предполагаем, что это можно осуществить путем введения в уравнение (15.52) соответствующего потенциала. Этот потенциал не меняет топологию пространства-времени, а только обеспечивает движение электронов вдоль заданной траектории. Тогда для фазы решения уравнения Шредингера с магнитным потенциалом справедливы уравнения (15.56). Поскольку магнитное поле вне соленоида равно нулю, $\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$, то условия интегрируемости для системы уравнений (15.56) выполнены. Поэтому разность фаз можно представить в виде контурного интеграла

$$\Theta_{\text{АВ}} = e \oint_\gamma dx^\mu A_\mu, \tag{15.57}$$

где γ – замкнутый контур в четырехмерном пространстве времени, который охватывает соленоид. Отметим, что слагаемое $dx^0 A_0$ в подынтегральном выражении равно нулю, т.к. $A_0 = 0$ по-предположению. Этот интеграл не зависит от выбора контура, охватывающего соленоид, т.к. магнитное поле вне соленоида равно нулю, $\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu = 0$.

Рис. 15.2: Пучок электронов делится на два пучка, которые огибают тонкий соленоид с разных сторон. Затем пучки вновь собираются и наблюдается интерференционная картина, которая зависит от разности фаз электронов в разных пучках.

Фазу Аронова–Бома, используя формулу Стокса, можно записать в виде поверхностного интеграла

$$\Theta_{\text{АВ}} = \frac{1}{2} e \iint_S dx^\mu \wedge dx^\nu F_{\mu\nu} = e\Phi, \tag{15.58}$$

где $F_{\mu\nu}$ – напряженность магнитного поля (компоненты локальной 2-формы кривизны) и Φ – полный поток магнитного поля через соленоид. Заметим, что для применения формулы Стокса, необходимо считать, что магнитное поле определено в пространстве $\mathbb{R}^3$ всюду, включая сам соленоид.

Геометрическая интерпретация рассмотренного эффекта Аронова–Бома состоит в следующем. Мы имеем то же самое главное расслоение, что и в случае электрического потенциала, $\mathbb{P}\big(\mathbb{R}^4, \pi, \mathbb{U}(1)\big)$, базой которого является четырехмерное евклидово пространство, $(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 = \mathbb{R}^4$, в котором движутся пучки электронов, а структурной группой – унитарная группа $\mathbb{U}(1)$ (фазовый множитель $\mathsf{e}^{i\Theta}$ волновой функции). Однако связность на нем другая: отличны от нуля только пространственные компоненты локальной формы связности A_μ, $\mu = 1, 2, 3$. Разность фаз Аронова–Бома (15.57) однозначно определяется контуром γ (тем же, что и в случае электрического потенциала) и значениями компонент связности A_μ на нем. При записи контурного интеграла в виде поверхностного (15.58) предполагается, что связность задана на всем пространстве-времени $\mathbb{R}^4$. Тем самым, мы рассматриваем соленоид конечного радиуса, чтобы избежать сингулярностей.

Таким образом, главное расслоение тривиально, а фаза Аронова–Бома $\Theta_{\text{АВ}}$, зависящая от связности и контура, однозначно определяет элемент группы голономии. При стягивании контура в точку соответствующий элемент группы голономии стремится к единице $e \in \mathbb{U}(1)$, как и должно быть. При этом мы предполагаем, что контур свободно проходит через соленоид.

Волновая функция электрона, как и в случае электрического потенциала, является сечением ассоциированного расслоения $\mathbb{E}\big(\mathbb{R}^4, \pi_{\mathbb{E}}, \mathbb{C}, \mathbb{U}(1), \mathbb{P}\big)$, базой которого

является евклидово пространство $\mathbb{R}^4$, а структурной группой – унитарная группа $\mathbb{U}(1)$. При вертикальном автоморфизме

$$\psi' = \mathsf{e}^{ia}\psi,$$

где $a = a(x)$ – дифференцируемая функция пространственных координат x^μ, $\mu = 1, 2, 3$, потенциал магнитного поля преобразуется по-правилу

$$eA'_\mu = eA_\mu - \partial_\mu a.$$

Это следует из уравнения Шредингера (15.55). Таким образом, компоненты потенциала магнитного поля действительно ведут себя, как компоненты локальной формы связности.

Поскольку разность фаз электронов (15.57) определяется значениями компонент локальной формы связности только вблизи контура интегрирования, то базу тривиального главного расслоения $\mathbb{P}\big(\mathbb{R}^4, \pi, \mathbb{U}(1)\big)$ можно сузить, не меняя ответа. Например, можно удалить область пространства-времени, лежащую внутри контура γ и содержащую соленоид. Тогда база расслоения перестанет быть односвязной. По этой причине эффект Ааронова–Бома часто называют топологическим. Как было показано выше, это совершенно необязательно. Достаточно считать, что магнитное поле отлично от нуля в ограниченной области на плоскости рис.15.2 внутри контура интегрирования. Если считать, что базой расслоения является евклидово пространство $\mathbb{R}^4$ с выколотым соленоидом $\mathbb{M}$, то это создает дополнительные трудности, т.к. уравнение Шредингера надо решать на соответствующем неодносвязном многообразии. Кроме того, формулу Стокса в этом случае применить нельзя. Таким образом, эффект Ааронова–Бома, вызванный магнитным потенциалом, также следует рассматривать как геометрический, а не топологический.

Эффект Ааронова–Бома как с электрическим, так и с магнитным потенциалом привлек большое внимание физиков по следующей причине. Согласно современным представлениям в калибровочных моделях наблюдаемыми величинами являются только калибровочно инвариантные функции. С этой точки зрения потенциал электромагнитного поля A_α, $\alpha = 0, 1, 2, 3$, сам по себе ненаблюдаем, т.к. не является калибровочно инвариантным. В рассмотренных примерах пучки электронов не подвергаются действию электромагнитных сил, поскольку напряженности электрического и магнитного поля в областях, через которые пролетают электроны, равны нулю. Поэтому, казалось бы, разность фаз в пучках электронов должна быть равна нулю. Однако из уравнения Шредингера следует, что это не так. Следует отметить, что наблюдаемым является не сам потенциал электромагнитного поля, а интеграл от него по замкнутому контуру, который определяет элемент группы голономии $\mathbb{U}(1)$-связности, который является инвариантным объектом.

Вскоре после публикации статьи, эффект Ааронова–Бома был подтвержден экспериментально. Эффект, вызванный магнитным потенциалом наблюдался в экспериментах [?, ?, ?].

Глава 16

Векторные поля Киллинга

В разделе 10.3 были рассмотрены геометрические структуры на многообразии, которые инвариантны относительно действия некоторой группы преобразований. Вопрос ставился так. Пусть задана группа преобразований, и требуется найти такие структуры, которые инвариантны относительно этих преобразований. Обратная задача нахождения группы преобразований, которую допускает заданная геометрическая структура также очень важна.

Изучение преобразований, которые сохраняют метрику пространства-времени играет исключительно важную роль в математической физике. Достаточно сказать, что с такими преобразованиями связаны наиболее важные законы сохранения. В настоящей главе мы дадим определение векторных полей Киллинга, которые являются генераторами локальных симметрий метрики, а также изучим некоторые из их свойств.

16.1 Изометрии и инфинитезимальные изометрии

Рассмотрим n-мерное (псевдо-)риманово многообразие $(\mathbb{M}, g)$ с метрикой $g(x) = g_{\alpha\beta}(x) dx^\alpha \otimes dx^\beta$, $\alpha, \beta = 0, 1, \ldots, n-1$ и соответствующей связностью Леви-Чивиты Γ.

Определение. Диффеоморфизм

$$\imath : \quad \mathbb{M} \ni x \mapsto x' = \imath(x) \in \mathbb{M}$$

называется *изометрией* или *движением* многообразия $\mathbb{M}$, если он сохраняет метрику,

$$g(x) = \imath^* g(x'), \tag{16.1}$$

где $\imath^*$ – возврат отображения $\imath$. □

Замечание. В настоящей главе, для простоты, мы не будем использовать знак тильды для обозначения компонент связности Леви–Чивиты, т.к. аффинная связность общего вида с кручением и неметричностью использоваться не будет. □

Из условия инвариантности метрики (16.1) следует инвариантность скалярного произведения векторов. Пусть $X, Y \in \mathbb{T}_x(\mathbb{M})$ – два произвольных вектора из касательного пространства в точке $x \in \mathbb{M}$. Тогда справедливо равенство

$$g(X, Y)|_x = \imath^* g(\imath_* X, \imath_* Y)|_{\imath(x)} = g(\imath_* X, \imath_* Y)|_{\imath(x)}.$$

Поскольку изометрия сохраняет метрику, то она сохраняет также связность Леви-Чивиты, соответствующий тензор кривизны, экстремали и, вообще, все геометрические объекты, которые определяются только метрикой.

Запишем отображение (16.1) в координатах. Пусть обе точки x и x' принадлежат одной координатной окрестности и имеют, соответственно, координаты x^α и x'^α. Тогда изометрия $\imath$ в координатах запишется в виде условия

$$g_{\alpha\beta}(x) = \frac{\partial x'^\gamma}{\partial x^\alpha}\frac{\partial x'^\delta}{\partial x^\beta} g_{\gamma\delta}(x'), \tag{16.2}$$

связывающего компоненты метрики в различных точках многообразия. Это условие по виду совпадает с правилом преобразования компонент метрики при преобразовании координат (5.4). Разница заключается в следующем. При преобразовании координат мы считаем, что одной и той же точке $x \in \mathbb{M}$ соответствует два набора координат $\{x^\alpha\}$ и $\{x^{\alpha'} = x'^\alpha\}$ в двух различных системах координат. При рассмотрении изометрий x и x' – это две различные точки одного и того же многообразия $\mathbb{M}$.

Предложение 16.1.1. *Множество всех изометрий данного (псевдо-)риманова многообразия* $(\mathbb{M}, g)$ *является группой, которую обозначим* $\mathbb{I}(\mathbb{M})$.

Доказательство. Две последовательных изометрии также являются изометрией. Тождественное отображение многообразия $\mathbb{M}$ является изометрией и представляет собой единицу группы. У каждого диффеоморфизма $\imath$ есть обратной диффеоморфизм $\imath^{-1}$, который является обратной изометрией. □

Если метрика на многообразии задана, т.е. определены значения ее компонент во всех точках x, то соотношение (16.2) представляет собой уравнение на функции $x'(x)$, которые определяют изометрию. В общем случае это уравнение не имеет решений и у соответствующего (псевдо-)риманова многообразия нет никаких нетривиальных изометрий. В этом случае группа изометрий состоит из одного единичного элемента. Чем шире группа изометрий, тем уже класс соответствующих (псевдо-)римановых многообразий.

Пример 16.1.1. Евклидово пространство $\mathbb{R}^n$ с евклидовой метрикой $\delta_{\alpha\beta}$ допускает группу изометрий, которая состоит из преобразований неоднородной группы вращений $\mathbb{IO}(n,\mathbb{R})$, $\mathsf{dim}\,\mathbb{IO}(n,\mathbb{R}) = \frac{1}{2}n(n+1)$, состоящей из вращений, сдвигов и отражений. □

Группа изометрий $\imath$ может быть дискретной или группой Ли.

Определение. Если группа изометрий $\mathbb{I}(\mathbb{M})$ является группой Ли, то имеет смысл говорить об инфинитезимальных преобразованиях (см. раздел 10.2). В этом случае мы говорим об *инфинитезимальных изометриях*. Каждая инфинитезимальная изометрия генерируется некоторым достаточно гладким векторным полем, которое называется векторным *полем Киллинга*. □

Замечание. Дискретные изометрии (псевдо-)риманова многообразия, например, отражения, не генерируются никакими векторными полями. □

Запишем условие инвариантности метрики относительно инфинитезимальной группы изометрий в координатах. В разделе 3.6.5 было показано, что каждое векторное поле генерирует однопараметрическую группу преобразований, которая называется экспоненциальным отображением. Формально условие инвариантности метрики записывается в виде равенства нулю производной Ли вдоль векторного поля Киллинга $K = K^\alpha \partial_\alpha$ от метрики [?]

$$\mathsf{L}_K g = 0. \tag{16.3}$$

Используя явное выражение для производной Ли (3.111), это уравнение в локальной системе координат принимает вид

$$\nabla_\alpha K_\beta + \nabla_\beta K_\alpha = 0, \tag{16.4}$$

где $K_\alpha = K^\beta g_{\beta\alpha}$, а ковариантная производная

$$\nabla_\alpha K_\beta = \partial_\alpha K_\beta - \Gamma_{\alpha\beta}{}^\gamma K_\gamma$$

строится по символам Кристоффеля $\Gamma_{\alpha\beta}{}^\gamma$.

Определение. Уравнение (16.4) называется *уравнением Киллинга*, а интегральные кривые полей Киллинга называются *траекториями Киллинга*. Если $K = K^\alpha \partial_\alpha$ – векторное поле Киллинга, то ему соответствует 1-форма $K = dx^\alpha K_\alpha$, где $K_\alpha = K^\beta g_{\beta\alpha}$, которая называется *формой Киллинга*, и для которой мы сохранили то же обозначение. □

Траектории Киллинга $\{x^\alpha(t)\} \in \mathbb{M}$, где $t \in \mathbb{R}$, определяются системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{x}^\alpha = K^\alpha.$$

Если траектория Киллинга при $t = 0$ проходит через точку $p = \{p^\alpha\} \in \mathbb{M}$, то при малых t она имеет вид

$$x^\alpha(t) = p^\alpha + tK^\alpha(p) + \mathsf{o}(t). \tag{16.5}$$

Если в некоторой точке векторное поле Киллинга равно нулю, то эта точка остается неподвижной, т.е. является стационарной точкой группы изометрий. Поскольку изометрии определены для всего многообразия $\mathbb{M}$ и образуют группу, то векторные поля Киллинга обязаны быть полными, т.е. параметр t должен меняться на всей вещественной прямой $\mathbb{R}$.

Если для (псевдо-)риманова многообразия $(\mathbb{M}, g)$ известно векторное поле Киллинга, то оно определяет не только инфинитезимальные изометрии, но и всю однопараметрическую группу диффеоморфизмов. Для этого нужно найти интегральные кривые x(t), проходящие, через все точки многообразия $p \in \mathbb{M}$. Если $x(0) = p$, то каждому значению $t \in \mathbb{R}$ соответствует диффеоморфизм

$$\imath : \quad \mathbb{M} \ni p \mapsto x(t) \in \mathbb{M}.$$

Уравнения для векторных полей Киллинга в ковариантной форме (16.4) можно переписать в частных производных,

$$\partial_\alpha K_\beta + \partial_\beta K_\alpha - 2\Gamma_{\alpha\beta}{}^\gamma K_\gamma = 0.$$

В моделях математической физики часто ставится задача нахождения векторов Киллинга для заданной метрики на многообразии. Для решения этой задачи бывает удобнее использовать контравариантные компоненты векторов Киллинга, для которых уравнение Киллинга принимает вид

$$g_{\alpha\gamma}\partial_\beta K^\gamma + g_{\beta\gamma}\partial_\alpha K^\gamma + K^\gamma \partial_\gamma g_{\alpha\beta} = 0. \tag{16.6}$$

Полученное уравнение линейно по компонентам метрики и компонентам векторов Киллинга. Отсюда сразу следует, что две метрики, которые отличаются постоянным множителем, имеют один и тот же набор векторов Киллинга. Кроме того, векторное поле Киллинга определено с точностью до умножения на произвольную постоянную, отличную от нуля. В частности, если K^α – векторное поле Киллинга, то и $-K^\alpha$ также является полем Киллинга. Также любая линейная комбинация полей Киллинга является полем Киллинга.

Замечание. Векторные поля Киллинга не выдерживает умножения на функцию. Поэтому они не образуют $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{M})$-модуль в отличие от множества всех векторных полей $\mathcal{X}(\mathbb{M}$. □

Предложение 16.1.2. *Пусть (псевдо-)риманово многообразие $(\mathbb{M}, g)$ имеет $k < \dim \mathbb{M}$ отличных от нуля коммутирующих между собой и линейно независимых векторных полей Киллинга K_i, $i = 1, \ldots, k$. Тогда существует такая система координат, в которой все компоненты метрики не зависят от k координат, соответствующих траекториям Киллинга.*

Доказательство. В разделе 3.6.5 была построена специальная система координат, связанная с произвольным векторным полем, отличным от нуля. Применительно к векторным полям Киллинга K_i это означает, что существует такая система координат $(x^1, \ldots, x^n)$, в которой каждое поле Киллинга имеет только одну постоянную компоненту, $K_i = \partial_i$. В этой системе координат уравнение (16.6) для каждого поля Киллинга принимает особенно простой вид

$$\partial_i g_{\alpha\beta} = 0, \qquad i = 1, \ldots, k.$$

Это значит, что все компоненты метрики не зависят от координат x^i. В этой системе координат траектории Киллинга определяются уравнениями

$$\dot{x}^i = 1, \quad \dot{x}^\mu = 0, \qquad \mu = 1, \ldots, i-1, i+1, \ldots, n.$$

Отсюда следует, что координатными линиями x^i являются траектории Киллинга. □

Если риманово многообразие $(\mathbb{M}, g)$ имеет два или более некоммутирующих векторных полей Киллинга, то это отнюдь не означает, что существует такая система координат, в которой компоненты метрики не зависят от двух или более координат.

Пример 16.1.2. Рассмотрим двумерную сферу $\mathbb{S}^2 \hookrightarrow \mathbb{R}^3$. Пусть метрика g на сфере индуцирована вложением. Риманово пространство $(\mathbb{S}^2, g)$ имеет три векторных поля Киллинга, соответствующих $\mathbb{SO}(3)$ вращениям евклидова пространства $\mathbb{R}^3$. Легко понять, что на сфере не существует локальной системы координат, в которой компоненты метрики не зависели бы от двух координат. Действительно, это означает, что в данной системе координат компоненты метрики постоянны, и, следовательно, кривизна равна нулю. Но это невозможно, поскольку кривизна сферы постоянна. □

В общей теории относительности мы предполагаем, что пространство-время является псевдоримановым многообразием с метрикой лоренцевой сигнатуры. Используя понятие векторного поля Киллинга, можно дать инвариантное

Определение. Пространство-время или его область называются *статическими*, если на них существует времениподобное векторное поле Киллинга. □

Рис. 16.1: Двумерная поверхность, вложенная в трехмерное евклидово пространство. Нижняя часть поверхности является плоской.

Векторные поля Киллинга определены глобально и удовлетворяют уравнениям Киллинга на всем $\mathbb{M}$. В то же время уравнения Киллинга – это локальный объект, в том смысле, что они определены в каждой окрестности и могут иметь решение только на некотором подмногообразии $\mathbb{U} \subset \mathbb{M}$. Поэтому, если уравнения Киллинга решены в некоторой области, то нельзя утверждать, что найдены векторные поля Киллинга. Для этого необходим анализ всего многообразия $\mathbb{M}$ в целом.

Пример 16.1.3. Рассмотрим гладкую замкнутую двумерную поверхность $\mathbb{M}$, вложенную в трехмерное евклидово пространство $\mathbb{R}^3$, как показано на рис.16.1. Отличительной особенностью этой поверхности является то, что ее нижняя часть является плоской. Пусть метрика на $\mathbb{M}$ индуцирована вложением $\mathbb{M} \hookrightarrow \mathbb{R}^3$. Тогда уравнения Киллинга в нижней части поверхности легко интегрируются, как и на евклидовой плоскости. Однако найденные решения не будут в общем случае какими либо векторными полями Киллинга для $\mathbb{M}$. Действительно, верхняя часть поверхности, может быть искривлена так, что уравнения Киллинга на ней вообще не имеют решений. Следовательно, поверхность $\mathbb{M}$ не имеет векторных полей Киллинга, несмотря на то, что на части поверхности уравнения Киллинга имеют решения. □

Группа изометрий $\mathbb{I}(\mathbb{M})$ является группой преобразований многообразия $\mathbb{M}$, которая действует слева или справа, в зависимости от нашего соглашения. Эта группа преобразований может иметь подгруппу $\mathbb{H} \subset \mathbb{I}(\mathbb{M})$, действующую на $\mathbb{M}$ свободно и собственно разрывно. Тогда фактор пространство $\mathbb{M}/\mathbb{H}$ является многообразием. Более того, на нем можно определить метрику, поскольку $\mathbb{H}$ – изометрия. Таким образом, фактор пространство $\mathbb{M}/\mathbb{H}$ превращается в (псевдо-)риманово многообразие. Поскольку каждое векторное поля Киллинга на $\mathbb{M}$ при факторизации переходит в некоторое поле Киллинга на $\mathbb{M}/\mathbb{H}$ и линейная независимость полей Киллинга при этом сохраняется, то группа изометрий фактор пространства $\mathbb{M}/\mathbb{H}$ совпадает с $\mathbb{I}(\mathbb{M})$.

16.2 Однородные и изотропные многообразия

С каждым полем Киллинга как и с произвольным векторным полем связана однопараметрическая группа преобразований, которая в данном случае сохраняет метрику. Произвольная линейная комбинация векторов Киллинга ввиду линейности уравнения Киллинга (16.4) снова дает вектор Киллинга. То есть поля Киллинга образуют векторное пространство над полем вещественных чисел. В этом векторном пространстве можно ввести билинейную операцию. Простые вычисления показывают, что коммутатор двух векторных полей Киллинга K_1 и K_2 снова дает поле Киллинга:

$$\mathsf{L}_{[K_1,K_2]}g = \mathsf{L}_{K_1} \circ \mathsf{L}_{K_2}g - \mathsf{L}_{K_2} \circ \mathsf{L}_{K_1}g = 0,$$

Отсюда следует, что векторные поля Киллинга образуют алгебру Ли $\mathfrak{i}(\mathbb{M})$ над полем вещественных чисел, которая является подалгеброй алгебры Ли множества всех векторных полей, $\mathfrak{i}(\mathbb{M}) \subset \mathcal{X}(\mathbb{M})$. Эта алгебра является алгеброй Ли группы изометрий $\mathbb{I}(\mathbb{M})$.

Уравнения Киллинга (16.4) накладывают сильные ограничения на векторные поля Киллинга, которые мы сейчас обсудим. Воспользовавшись тождеством для коммутатора ковариантных производных (8.82), получаем

$$\nabla_\alpha \nabla_\beta K_\gamma - \nabla_\beta \nabla_\alpha K_\gamma = -R_{\alpha\beta\gamma}{}^{\delta} K_\delta. \tag{16.7}$$

Теперь воспользуемся тождеством (8.75) для тензора кривизны и уравнениями Киллинга (16.4). В результате получим тождество для векторных полей Киллинга:

$$\nabla_\alpha \nabla_\beta K_\gamma + \nabla_\beta \nabla_\gamma K_\alpha + \nabla_\gamma \nabla_\alpha K_\beta = 0,$$

где слагаемые отличаются циклической перестановкой индексов. Это равенство позволяет переписать уравнение (16.7) в виде

$$\nabla_\gamma \nabla_\alpha K_\beta = R_{\alpha\beta\gamma}{}^{\delta} K_\delta. \tag{16.8}$$

Полученное равенство является следствием уравнений Киллинга, но не эквивалентно им. Оно позволяет сделать важные выводы. Предположим, что компоненты вектора Киллинга бесконечно дифференцируемы в некоторой точке многообразия $p \in \mathbb{M}$ и разлагаются в ряд Тейлора, который сходится в некоторой окрестности $\mathbb{U}_p$. Допустим, что в точке $p \in \mathbb{M}$ нам известны компоненты формы Киллинга $K_\alpha(p)$ и их первых производных $\partial_\beta K_\alpha(p)$. Тогда соотношения (16.8) позволяют вычислить все вторые производные от компонент формы Киллинга $\partial^2_{\beta\gamma} K_\alpha$. Теперь возьмем ковариантную производную от равенства (16.8) и получим некоторое соотношение, линейное по третьим производным. Из него можно найти все третьи производные от вектора Киллинга и т.д. до бесконечности. Важно отметить, что все соотношения линейны по компонентам формы Киллинга и их производным. Это значит, что в окрестности $\mathbb{U}_p$ компоненты векторного поля Киллинга имеют вид

$$K_\alpha(x) = A_\alpha{}^{\beta}(x,p) K_\beta(p) + B_\alpha{}^{\beta\gamma}(x,p) \left[\partial_\beta K_\gamma(p) - \partial_\beta K_\alpha(p)\right], \tag{16.9}$$

где $A_\alpha{}^{\beta}(x,p)$ и $B_\alpha{}^{\beta\gamma}(x,p)$ – некоторые функции. Антисимметрия последнего слагаемого по индексам β, γ связана с тем, что симметризованная частная производная выражается через компоненты формы Киллинга в силу уравнения Киллинга (16.4). Таким образом, компоненты формы Киллинга в окрестности $\mathbb{U}_p$ являются линейными функциями от компонент формы Киллинга в точке p и ее внешней производной в той же точке.

Пусть векторные поля Киллинга гладкие на $\mathbb{M}$ и их компоненты разлагаются в ряды Тейлора в окрестности каждой точки $p \in \mathbb{M}$. Обозначим через $\mathbb{U}_p$ окрестность точки p, в которой разложение (16.9) справедливо и обратимо, т.е. аргументы x и p можно поменять местами для некоторых новых матриц A и B. Рассмотрим точку q, которая лежит вне $\mathbb{U}_p$. Для этой точки также справедливо обратимое разложение вида (16.9) в некоторой окрестности $\mathbb{U}_q$. Предположим, что точка q лежит достаточно близко к $\mathbb{U}_p$ так, что окрестности пересекаются, $\mathbb{U}_p \cap \mathbb{U}_q \neq \emptyset$. Тогда для всех точек из пересечения $x \in \mathbb{U}_p \cap \mathbb{U}_q$ справедливо разложение (16.9) по компонентам форм Киллинга $K(p)$ и $K(q)$ и их внешним производным. Отсюда следует, что компоненты формы Киллинга и ее внешней производной в точке q линейно выражаются через

компоненты формы Киллинга и ее внешней производной в точке p. Таким образом, разложение (16.9) справедливо также в объединении $\mathbb{U}_p \cup \mathbb{U}_q$. Это построение можно продолжить на все многообразие $\mathbb{M}$. Поэтому разложение (16.9) справедливо для всех точек $x \in \mathbb{M}$.

Теперь предположим, что (псевдо-)риманово многообразие $(\mathbb{M}, g)$ имеет несколько векторных полей Киллинга K_i, $i = 1, \ldots, \mathrm{N}$. Тогда для каждого векторного поля Киллинга справедливо разложение (16.9)

$$K_{i\alpha}(x) = A_\alpha{}^\beta(x,p) K_{i\beta}(p) + B_\alpha{}^{\beta\gamma}(x,p)\left[\partial_\beta K_{i\gamma}(p) - \partial_\gamma K_{i\beta}(p)\right], \qquad i = 1, \ldots, \mathrm{N}, \quad (16.10)$$

с теми же функциями $A_\alpha{}^\beta(x,p)$ и $B_\alpha{}^{\beta\gamma}(x,p)$. Эти функции одинаковы для всех полей Киллинга, потому что соотношения (16.8) линейны по компонентам векторов Киллинга и их производным. Они полностью определяются метрикой, тензором кривизны и их ковариантными производными. В полученном разложении точка $p \in \mathbb{M}$ произвольна, но фиксирована, а точка $x \in \mathbb{M}$ пробегает все многообразие.

Соотношение (16.8) представляет собой систему уравнений в частных производных на компоненты формы Киллинга, у которого есть нетривиальные условия разрешимости. Одно из этих условий в ковариантной форме имеет вид

$$[\nabla_\gamma \nabla_\delta]\, \nabla_\alpha K_\beta = -R_{\gamma\delta\alpha}{}^\epsilon \nabla_\epsilon K_\beta - R_{\gamma\delta\beta}{}^\epsilon \nabla_\alpha K_\epsilon,$$

где квадратные скобки обозначают коммутатор ковариантных производных. Подстановка в левую часть этого уравнения исходного выражения для вторых производных от формы Киллинга (16.8) после несложных алгебраических преобразований дает

$$\left(R_{\alpha\beta\gamma}{}^\epsilon \delta^\zeta_\delta - R_{\alpha\beta\delta}{}^\epsilon \delta^\zeta_\gamma + R_{\gamma\delta\alpha}{}^\epsilon \delta^\zeta_\beta - R_{\gamma\delta\beta}{}^\epsilon \delta^\zeta_\alpha\right) \nabla_\zeta K_\epsilon = \left(\nabla_\gamma R_{\alpha\beta\delta}{}^\epsilon - \nabla_\delta R_{\alpha\beta\gamma}{}^\epsilon\right) K_\epsilon. \quad (16.11)$$

Если кривизна нетривиальна, то это уравнение дает некоторые линейные соотношения между компонентами формы Киллинга K_α и их ковариантными производными $\nabla_\beta K_\alpha$. Наоборот, если существует некоторая информация в формах Киллинга, то полученное уравнение может определить структуру тензора кривизны. В теореме 16.2.1, которая сформулирована ниже, соотношение (16.11) будет использовано для доказательства того, что однородное и изотропное многообразие является пространством постоянной кривизны.

Перейдем к определениям.

Определение. (Псевдо-)риманово многообразие $(\mathbb{M}, g)$ размерности $\dim \mathbb{M} = n$ называется *однородным в точке* $p \in \mathbb{M}$, если существуют инфинитезимальные изометрии, которые переводят эту точку в любую другую точку из некоторой окрестности $\mathbb{U}_p$. Другими словами, метрика должна допускать такие векторные поля Киллинга, которые в точке p имеют все возможные направления. Поскольку векторы Киллинга образуют линейное пространство, то в сопряженном пространстве достаточно существования такого набора из n форм Киллинга $K^{(\gamma)} = dx^\alpha K_\alpha{}^{(\gamma)}(x,p)$, где индекс γ в скобках нумерует формы Киллинга, что выполнены условия:

$$K_\alpha{}^{(\gamma)}(p,p) = \delta^\gamma_\alpha. \quad (16.12)$$

Если (псевдо-)риманово многообразие $(\mathbb{M}, g)$ однородно в каждой своей точке, то оно называется *однородным*.

(Псевдо-)риманово многообразие $(\mathbb{M}, g)$ называется *изотропным в точке* $p \in \mathbb{M}$, если существуют такие инфинитезимальные изометрии с формами Киллинга $K(x)$,

которые оставляют эту точку на месте, т.е. $K(p) = 0$, и для которых внешняя производная $dK(p)$ в точке p принимает любое значение в пространстве 2-форм $\Lambda_2(\mathbb{M})|_p$ в точке p. Для этого достаточно существования такого набора из $\frac{1}{2}n(n-1)$ форм Киллинга $K^{[\gamma\delta]} = -K^{[\delta\gamma]} = dx^\alpha K_\alpha{}^{[\gamma\delta]}(x,p)$, где индексы γ, δ нумеруют формы Киллинга, что выполнены условия:

$$\begin{gathered} K_\alpha{}^{[\gamma\delta]}(p,p) = 0, \\ \left.\frac{\partial K_\beta{}^{[\gamma\delta]}(x,p)}{\partial x^\alpha}\right|_{x=p} = \delta^{\gamma\delta}_{\alpha\beta} - \delta^{\delta\gamma}_{\alpha\beta}. \end{gathered} \tag{16.13}$$

Если (псевдо-)риманово многообразие $(\mathbb{M}, g)$ изотропно в каждой своей точке, то оно называется *изотропным.* □

В силу непрерывности, наборы форм $K^{(\gamma)}$ и $K^{[\gamma\delta]}$ линейно независимы в некоторой окрестности точки p.

Предложение 16.2.1. *Любое изотропное (псевдо-)риманово многообразие* $(\mathbb{M}, g)$ *является также однородным.*

Доказательство. Если многообразие изотропно, то формы Киллинга $K^{[\gamma,\delta]}(x,p)$ и $K^{[\gamma,\delta]}(x,p+dp)$ удовлетворяют условиям (16.13) в близких точках p и $p+dp$ соответственно. Любая их линейная комбинация будет формой Киллинга и, следовательно, производная

$$\frac{\partial K^{[\gamma\delta]}(x,p)}{\partial p^\alpha}$$

также будет формой Киллинга. Вычислим производную по x этой формы Киллинга в точке p. Из первого условия в (16.13) следует равенство

$$\frac{\partial}{\partial p^\alpha} K_\beta{}^{[\gamma\delta]}(p,p) = \left.\frac{\partial K_\beta{}^{[\gamma\delta]}(x,p)}{\partial x^\alpha}\right|_{x=p} + \left.\frac{\partial K_\beta{}^{[\gamma\delta]}(x,p)}{\partial p^\alpha}\right|_{x=p} = 0.$$

Откуда, с учетом второго условия в (16.13), получаем

$$\left.\frac{\partial K_\beta{}^{[\gamma\delta]}(x,p)}{\partial p^\alpha}\right|_{x=p} = -\delta^{\gamma\delta}_{\alpha\beta} + \delta^{\delta\gamma}_{\alpha\beta}.$$

Отсюда следует, что из форм Киллинга $K^{[\gamma\delta]}$ можно построить форму Киллинга, которая в точке p принимает любое заданное значение $dx^\alpha a_\alpha$, где $a_\alpha \in \mathbb{R}$. Для этого достаточно положить

$$K_\alpha = \frac{a_\gamma}{n-1} \frac{\partial K_\alpha{}^{[\gamma\delta]}(x,p)}{\partial p^\delta}.$$

Выбрав соответствующим образом постоянные a_γ, получим набор форм Киллинга, который удовлетворяет условиям (16.12). □

Теорема 16.2.1. *Алгебра Ли* $\mathsf{i}(\mathbb{M})$ *инфинитезимальных изометрий связного (псевдо-)риманова многообразия* $\mathbb{M}$ *имеет размерность не более, чем* $\frac{1}{2}n(n+1)$, *где* $n = \dim \mathbb{M}$. *Если размерность максимальна,* $\dim \mathsf{i}(\mathbb{M}) = \frac{1}{2}n(n+1)$, *то* $\mathbb{M}$ *есть пространство постоянной кривизны.*

Доказательство. Размерность алгебры Ли $\mathsf{i}(\mathbb{M})$ равна максимальному числу линейно независимых векторных полей Киллинга на многообразии $\mathbb{M}$. Из равенства (16.10) следует, что число независимых векторных полей Киллинга N не может превышать числа независимых компонент формы $\{K_\alpha(p)\}$ и ее внешней производной $\{\partial_\beta K_\alpha(p) - \partial_\alpha K_\beta(p)\}$ в фиксированной точке $p \in \mathbb{M}$. Число независимых компонент любой 1-формы в фиксированной точке не превосходит n, а число независимых компонент внешней производной не может превышать $\frac{1}{2}n(n-1)$. Поэтому справедливо следующее ограничение на размерность алгебры Ли векторных полей Киллинга:

$$\dim \mathsf{i}(\mathbb{M}) \leq n + \frac{1}{2}n(n-1) = \frac{1}{2}n(n+1).$$

Это доказывает первое утверждение теоремы.

Однородные и изотропные многообразия имеют максимальное число $\frac{1}{2}n(n+1)$ векторных полей Киллинга и, в силу разложения (16.10), определяют все возможные векторы Киллинга на многообразии $\mathbb{M}$. Следовательно, если некоторое многообразие имеет максимальное число независимых полей Киллинга, то оно с необходимостью должно быть однородным и изотропным.

Теперь докажем, что любое однородное и изотропное пространство является пространством постоянной кривизны. Если пространство однородно и изотропно, то для каждой точки $x \in \mathbb{M}$ найдутся такие формы Киллинга, для которых $K_\alpha(x) = 0$, а $\nabla_\beta K_\alpha(x)$ является произвольной антисимметричной матрицей. Отсюда следует, что антисимметризованный коэффициент при $\nabla_\zeta K_\epsilon$ в уравнении (16.11) должен быть равен нулю, что приводит к равенству

$$R_{\alpha\beta\gamma}{}^{\epsilon}\delta^{\zeta}_{\delta} - R_{\alpha\beta\delta}{}^{\epsilon}\delta^{\zeta}_{\gamma} + R_{\gamma\delta\alpha}{}^{\epsilon}\delta^{\zeta}_{\beta} - R_{\gamma\delta\beta}{}^{\epsilon}\delta^{\zeta}_{\alpha} = R_{\alpha\beta\gamma}{}^{\zeta}\delta^{\epsilon}_{\delta} - R_{\alpha\beta\delta}{}^{\zeta}\delta^{\epsilon}_{\gamma} + R_{\gamma\delta\alpha}{}^{\zeta}\delta^{\epsilon}_{\beta} - R_{\gamma\delta\beta}{}^{\zeta}\delta^{\epsilon}_{\alpha}. \quad (16.14)$$

Ранее было доказано (доказательство предложения 16.2.1), что для произвольной точки $x \in \mathbb{M}$ существуют также такие формы Киллинга, которые принимают в этой точке произвольные значения. Следовательно, из уравнений (16.11) и (16.14) вытекает равенство

$$\nabla_\gamma R_{\alpha\beta\delta}{}^{\epsilon} = \nabla_\delta R_{\alpha\beta\gamma}{}^{\epsilon}. \quad (16.15)$$

Теперь свернем уравнение (16.14) по индексам δ, ζ и опустим верхний индекс. В результате получим выражение тензора кривизны через тензор Риччи и метрику:

$$(n-1)R_{\alpha\beta\gamma\delta} = R_{\beta\delta}g_{\alpha\gamma} - R_{\alpha\delta}g_{\beta\gamma}. \quad (16.16)$$

Правая часть этой формулы должна быть антисимметрична по индексам δ, γ. Поэтому возникает дополнительное ограничение

$$R_{\beta\delta}g_{\alpha\gamma} - R_{\alpha\delta}g_{\beta\gamma} = -R_{\beta\gamma}g_{\alpha\delta} + R_{\alpha\gamma}g_{\beta\delta}.$$

Свертка полученного равенства по индексам β, γ дает связь между тензором Риччи и скалярной кривизной:

$$R_{\alpha\delta} = \frac{1}{n}Rg_{\alpha\delta}. \quad (16.17)$$

Подстановка этого выражения в (16.16) приводит к следующему выражению для тензора кривизны

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta} = \frac{R}{n(n-1)}\left(g_{\alpha\gamma}g_{\beta\delta} - g_{\alpha\delta}g_{\beta\gamma}\right). \quad (16.18)$$

Теперь осталось доказать, что скалярная кривизна R однородного и изотропного пространства постоянна. Для этой цели используем свернутые тождества Бианки

$$2\nabla_\beta R_\alpha{}^\beta - \nabla_\alpha R = 0.$$

Подставляя в это тождество выражение для тензора Риччи (16.17), получаем условие

$$\left(\frac{2}{n} - 1\right)\partial_\alpha R = 0.$$

При $n \geq 3$ отсюда следует $R = \mathsf{const}$.

Случай $n = 2$ требует особого рассмотрения. Свертка равенства (16.15) по индексам β, ϵ дает

$$\nabla_\gamma R_{\alpha\delta} - \nabla_\delta R_{\alpha\gamma} = 0.$$

дальнейшая свертка с $g^{\alpha\delta}$ с учетом уравнения (16.17) приводит к условию $\partial_\gamma R = 0$, т.е. $R = \mathsf{const}$ и при $n = 2$.

Таким образом, скалярная кривизна в выражении для полного тензора кривизны (16.18) равна константе, $R = \mathsf{const}$, и максимально симметричное (псевдо-)риманово многообразие является пространством постоянной кривизны. □

Замечание. Если тензор кривизны имеет вид (16.18), где $R = \mathsf{const}$, то соответствующее многообразие является пространством постоянной кривизны, т.к. ковариантная производная от метрики в римановой геометрии равна нулю, $\nabla_\epsilon R_{\alpha\beta\gamma\delta} = 0$. Обратное, вообще говоря, неверно. У пространства постоянной кривизны тензор кривизны не обязательно имеет вид (16.18). Примером является полупростая группа Ли (см. раздел 9.5). Отсюда следует, что не всякое пространство постоянной кривизны является максимально симметричным. □

Пример 16.2.1. Рассмотрим евклидово пространство $\mathbb{R}^n$, на котором задана метрика нулевой кривизны, т.е. $R_{\alpha\beta\gamma\delta} = 0$. Ясно, что это пространство постоянной нулевой кривизны. Тогда в $\mathbb{R}^n$ существует такая система координат x^α, $\alpha = 1, \ldots, n$ в которой все компоненты метрики постоянны. В этой системе координат символы Кристоффеля равны нулю и уравнение для векторов Киллинга (16.8) принимает простой вид:

$$\partial^2_{\beta\gamma} K_\alpha = 0.$$

Общее решение этого уравнения имеет вид

$$K_\alpha(x) = a_\alpha + b_{\alpha\beta} x^\beta,$$

где a_α и $b_{\alpha\beta}$ – некоторые постоянные. Из уравнения Киллинга (16.4) следует, что это выражение задает форму Киллинга тогда и только тогда, когда матрица $b_{\alpha\beta}$ антисимметрична, т.е. $b_{\alpha\beta} = -b_{\beta\alpha}$. Следовательно, можно задать $\frac{1}{2}n(n+1)$ линейно независимых форм Киллинга:

$$K_\alpha{}^{(\gamma)}(x) = \delta^\gamma_\alpha,$$
$$K_\alpha{}^{[\gamma\delta]}(x) = \delta^\delta_\alpha x^\gamma - \delta^\gamma_\alpha x^\delta.$$

Тогда произвольная форма Киллинга выражается в виде линейной комбинации

$$K_\alpha = a_\gamma K_\alpha{}^{(g)} + \frac{1}{2} b_{\delta\gamma} K_\alpha{}^{[\gamma\delta]}.$$

В полученном выражении n векторов Киллинга $K^{(\gamma)}$ генерируют трансляции в $\mathbb{R}^n$ вдоль осей координат, а $\frac{1}{2}n(n-1)$ векторов $K^{[\gamma\delta]}$ – вращения вокруг начала координат. Таким образом, метрика пространства нулевой кривизны допускает максимальное число $\frac{1}{2}n(n+1)$ векторов Киллинга и поэтому является однородным и изотропным пространством.

Известно, что линейным преобразованием координат x^α метрику можно преобразовать к диагональному виду, когда на диагонали будут стоять ± 1, в зависимости от сигнатуры исходной метрики. Если метрика риманова, то после преобразования координат, она примет стандартный вид $g_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta}$. Эта метрика инвариантна относительно неоднородной группы вращений $\mathbb{IO}(n)$. □

16.3 Свойства векторных полей Киллинга

Векторные поля Киллинга обладают рядом замечательных свойств. Начнем с простейших.

Предложение 16.3.1. *Длина вектора Киллинга остается постоянной вдоль траектории Киллинга:*

$$K^\alpha \partial_\alpha K^2 = 0. \tag{16.19}$$

Доказательство. Свернем уравнения Киллинга (16.4) с $K^\alpha K^\beta$:

$$2K^\alpha K^\beta \nabla_\alpha K_\beta = K^\alpha \nabla_\alpha K^2 = 0.$$ □

Следствие. Если векторные поля Киллинга существуют на лоренцевом многообразии, то они имеют определенную ориентацию: времениподобную, светоподобную или пространственноподобную. □

Сравним траектории Киллинга с экстремалями [**?**].

Предложение 16.3.2. *Пусть $(\mathbb{M}, g)$ – (псевдо-)риманово многообразие с векторным полем Киллинга K. Траектории Киллинга являются экстремалями тогда и только тогда, когда их длина постоянна на $\mathbb{M}$, $K^2 = \mathsf{const}$.*

Доказательство. Рассмотрим траектории Киллинга $x^\alpha(t)$, которые определяются системой уравнений

$$\dot{x}^\alpha = K^\alpha. \tag{16.20}$$

Дифференцируя эти уравнения по параметру t, получим

$$\ddot{x}^\alpha = \partial_\beta K^\alpha \dot{x}^\beta = (\nabla_\beta K^\alpha - \Gamma_{\beta\gamma}{}^\alpha K^\gamma)\dot{x}^\beta.$$

С учетом уравнения (16.20) получим

$$\ddot{x}^\alpha = K^\beta \nabla_\beta K^\alpha - \Gamma_{\beta\gamma}{}^\alpha \dot{x}^\beta \dot{x}^\gamma. \tag{16.21}$$

Уравнения Киллинга позволяют переписать первое слагаемое в виде

$$K^\beta \nabla_\beta K^\alpha = -\frac{1}{2} g^{\alpha\beta} \partial_\beta K^2.$$

Тогда уравнения (16.21) примут вид

$$\ddot{x}^\alpha = -\frac{1}{2} g^{\alpha\beta} \partial_\beta K^2 - \Gamma_{\beta\gamma}{}^\alpha \dot{x}^\beta \dot{x}^\gamma.$$

□

Доказанное утверждение показывает, что далеко не каждая траектория Киллинга является экстремалью.

Пример 16.3.1. Рассмотрим евклидову плоскость $\mathbb{R}^2$ с евклидовой метрикой. Эта метрика инвариантна относительно трехпараметрической неоднородной группы вращений $\mathbb{IO}(2)$. Обозначим декартовы и полярные координаты на плоскости соответственно x, y и r, φ. Тогда векторные поля Киллинга имеют вид $K_1 = \partial_\varphi$ для вращений и $K_2 = \partial_x$, $K_3 = \partial_y$ для сдвигов. Квадраты длин векторов Киллинга равны:

$$K_1^2 = r^2, \qquad K_2^2 = K_3^2 = 1.$$

Векторы Киллинга K_2 и K_3 имеют постоянную длину, их траекториями Киллинга являются прямые линии, которые являются экстремалями. Это согласуется с предложением 16.3.2. Траекториями Киллинга для вращений K_1 являются концентрические окружности с центром в начале координат. Длина вектора Киллинга K_1 постоянна на траекториях в соответствии с предложением 16.3.1, однако непостоянна на всей плоскости $\mathbb{R}^2$. Соответствующие траектории Киллинга – окружности – не являются экстремалями. □

Пример 16.3.2. Рассмотри полупростую группу Ли $\mathbb{G}$, как (псевдо-)риманово пространство с формой Киллинга–Картана в качестве метрики (см. раздел 9.5). Это пространство постоянной кривизны. Левоинвариантные векторные поля генерируют групповые преобразования справа, а правоинвариантные – слева. Групповые преобразования слева и справа сохраняют метрику, и, следовательно, лево- и правоинвариантные векторные поля являются полями Киллинга. Длина этих полей Киллинга равна ± 1. Поэтому соответствующие траектории Киллинга являются экстремалями. □

Свертывая уравнения Киллинга (16.4) с метрикой, получаем, что дивергенция поля Киллинга равна нулю

$$\nabla_\alpha K^\alpha = 0. \tag{16.22}$$

Ковариантная производная ∇^β со связностью Леви–Чивита от уравнения Киллинга (16.4) с учетом уравнения (8.82) для перестановки ковариантных производных и уравнения (16.22) приводит к уравнению

$$\triangle K_\alpha = R_{\alpha\beta} K^\beta, \tag{16.23}$$

$\triangle = \nabla^\beta \nabla_\beta$ – оператор Лапласа–Бельтрами на многообразии $\mathbb{M}$. Для пространства постоянной кривизны тензор Риччи выражается через скалярную кривизну (16.17), и уравнение (16.23) принимает вид

$$\triangle K_\alpha = \frac{R}{n} K_\alpha, \qquad R = \mathsf{const}.$$

То есть каждая компонента формы Киллинга является собственным вектором оператора Лапласа–Бельтрами.

Предложение 16.3.3. *Пусть $X, Y \in \mathcal{X}(\mathbb{M})$ – два произвольных векторных векторных поля на (псевдо-)римановом многообразии $(\mathbb{M}, g)$ и K – векторное поле Киллинга. Тогда справедливо равенство*

$$g\big((\mathsf{L}_K - \nabla_K)X, Y\big) + g\big(X, (\mathsf{L}_K - \nabla_K)Y\big) = 0,$$

где $\mathsf{L}_K X = [K, X]$ – производная Ли и $\nabla_K X = K^\alpha(\partial_\alpha X^\beta + \Gamma_{\alpha\gamma}{}^\beta X^\gamma)\partial_\beta$ – ковариантная производная векторного поля X вдоль поля Киллинга K.

Доказательство. Прямая проверка с учетом явного выражения для символов Кристоффеля (8.22) и уравнения Киллинга (16.4). □

16.4 Лоренц-инвариантные метрики

Рассмотрим (псевдо-)риманово многообразие $(\mathbb{M}, g)$, которое допускает векторное поле Киллинга K. Пусть на этом многообразии заданы дополнительно какие либо тензорные поля. Тогда представляет интерес задача отыскания таких полей, которые также инвариантны относительно преобразований изометрии. Допустим, например, что на $\mathbb{M}$ задана функция $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{M})$. Эта функция инвариантна относительно инфинитезимальных преобразований, генерируемых векторным полем Киллинга K, если производная Ли равна нулю:

$$\mathsf{L}_K f = K^\alpha \partial_\alpha f = 0, \tag{16.24}$$

т.е. если производная f вдоль векторного поля K равна нулю.

Для произвольного тензорного поля T условие инвариантности имеет имеет вид

$$\mathsf{L}_K T = 0 \tag{16.25}$$

В качестве примера рассмотрим пространство Минковского $\mathbb{R}^{1,n-1}$ произвольной размерности n. В нем задана метрика Лоренца $\eta_{\alpha\beta}$ в декартовой системе координат x^α. Эта метрика инвариантна относительно преобразований Лоренца (см. раздел **??**). Соответствующие векторные поля Киллинга имеют вид

$$K_{\epsilon\delta} = \frac{1}{2}\left(x_\delta \partial_\epsilon - x_\epsilon \partial_\delta\right) = \frac{1}{2}\left(x_\delta \delta^\gamma_\epsilon - x_\epsilon \delta^\gamma_\delta\right)\partial_\gamma, \tag{16.26}$$

где индексы ϵ, δ нумеруют $n(n-1)/2$ векторов Киллинга и $x_\alpha = x^\beta \eta_{\beta\alpha}$. Пусть в пространстве Минковского $\mathbb{R}^{1,n-1}$ задана вторая метрика $g_{\alpha\beta}$. Поставим следующую задачу: найти все метрики $g_{\alpha\beta}$, инвариантные относительно действия группы Лоренца $\mathbb{SO}(1, n-1)$.

Уравнения (16.6) для векторных полей Киллинга (16.26) принимают вид

$$g_{\alpha\epsilon}\eta_{\beta\delta} - g_{\alpha\delta}\eta_{\beta\epsilon} + g_{\beta\epsilon}\eta_{\alpha\delta} - g_{\beta\delta}\eta_{\alpha\epsilon} + x_\delta \partial_\epsilon g_{\alpha\beta} - x_\epsilon \partial_\delta g_{\alpha\beta} = 0. \tag{16.27}$$

При преобразованиях Лоренца компоненты метрики $g_{\alpha\beta}$ ведут себя как компоненты ковариантного тензора второго ранга. Их необходимо построить из метрики Лоренца $\eta_{\alpha\beta}$ и векторов $\{y^\alpha\}$. Единственная возможность – это метрика вида

$$g_{\alpha\beta} = A\eta_{\alpha\beta} + Bx^\alpha x^\beta,$$

где A и B – некоторые функции на $\mathbb{R}^{1,n-1}$. Подстановка этой метрики в уравнение Киллинга (16.27) ограничивает вид функций A и B. Можно доказать, что они могут быть произвольными функциями от одной переменной

$$s = x^\alpha x^\beta \eta_{\alpha\beta},$$

которая инвариантна относительно преобразований Лоренца. Таким образом, метрика, инвариантная относительно преобразований Лоренца, параметризуется двумя произвольными функциями $A(s)$ и $B(s)$. Ее удобно записать в несколько другом виде

$$g_{\alpha\beta} = f(s)\Pi^{\mathrm{T}}_{\alpha\beta} + g(s)\Pi^{\mathrm{L}}_{\alpha\beta} = f\eta_{\alpha\beta} + (g-f)\frac{x_\alpha x_\beta}{s}, \tag{16.28}$$

где $\Pi^{\text{т}}$ и $\Pi^{\text{л}}$ – проекционные операторы:

$$\Pi^{\text{т}}_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} - \frac{x_\alpha x_\beta}{s},$$
$$\Pi^{\text{л}}_{\alpha\beta} = \frac{x_\alpha x_\beta}{s}.$$

На произвольные функции $f(s)$ и $g(s)$ наложено только одно условие $f(0) - g(0) = 0$, которое необходимо, чтобы метрика была определена при $s = 0$.

Здесь и до конца настоящего раздела, если не оговорено противное, для подъема и опускания индексов будет использоваться метрика Минковского.

Лоренц инвариантная метрика вида (16.28) при $f = g$ рассматривалась В. А. Фоком [**?**]. Метрике (16.28) соответствует инвариантный интервал

$$ds^2 = f dx_\alpha dx^\alpha + (g - f)\frac{(x_\alpha dx^\alpha)^2}{s}.$$

Метрический тензор (16.28) имеет одинаковый вид во всех системах координат, связанных между собой преобразованиями Лоренца. Однако его вид меняется при сдвигах $x^\alpha \to x^\alpha + a^\alpha$, поскольку метрика явно зависит от координат, и начало системы отсчета выделено.

Используя представление (**??**) для определителя суммы двух матриц и полагая

$$A_{\alpha\beta} = f\eta_{\alpha\beta}, \qquad B_{\alpha\beta} = (g - f)\frac{x_\alpha x_\beta}{s},$$

можно вычислить определитель метрики (16.28). В результате получим

$$\det g_{\alpha\beta} = (-f)^{n-1} g. \tag{16.29}$$

Таким образом лоренц инвариантная метрика вырождена тогда и только тогда, когда $fg = 0$. Мы будем предполагать, что функции f и g являются достаточно гладкими, и $f > 0$ и $g \neq 0$.

При $g > 0$ метрике (16.28) можно поставить в соответствие репер

$$e_\alpha{}^a = \sqrt{f}\delta^a_\alpha + (\sqrt{g} - \sqrt{f})\frac{x_\alpha x^a}{s}. \tag{16.30}$$

Он инвариантен относительно одновременного действия группы Лоренца на греческие и латинские индексы.

Нетрудно проверить следующие свойства проекционных операторов

$$\Pi^{\text{т}\alpha\beta} x_\beta = 0, \qquad \Pi^{\text{т}\,\alpha}_\alpha = n - 1, \qquad \partial_\alpha \Pi^{\text{т}}_{\beta\gamma} = -\frac{\Pi^{\text{т}}_{\alpha\beta} x_\gamma + \Pi^{\text{т}}_{\alpha\gamma} x_\beta}{s},$$
$$\Pi^{\text{л}\alpha\beta} x_\beta = x^\alpha, \qquad \Pi^{\text{л}\,\alpha}_\alpha = 1, \qquad \partial_\alpha \Pi^{\text{л}}_{\beta\gamma} = \frac{\Pi^{\text{т}}_{\alpha\beta} x_\gamma + \Pi^{\text{т}}_{\alpha\gamma} x_\beta}{s},$$

которые будут использоваться при проведении вычислений.

Несложные вычисления приводят к следующему выражению для символов Кристоффеля, соответствующих метрике (16.28),

$$\Gamma_{\alpha\beta\gamma} = f'(x_\alpha \Pi^{\text{т}}_{\beta\gamma} + x_\beta \Pi^{\text{т}}_{\alpha\gamma} - x_\gamma \Pi^{\text{т}}_{\alpha\beta}) + g'(x_\alpha \Pi^{\text{л}}_{\beta\gamma} + x_\beta \Pi^{\text{л}}_{\alpha\gamma} - x_\gamma \Pi^{\text{л}}_{\alpha\beta}) + \frac{g - f}{s} x_\gamma \Pi^{\text{т}}_{\alpha\beta},$$
$$\Gamma_{\alpha\beta}{}^\gamma = \frac{f'}{f}(x_\alpha \Pi^{\text{т}\gamma}_\beta + x_\beta \Pi^{\text{т}\gamma}_\alpha) + \frac{g'}{g}(x_\alpha \Pi^{\text{л}\gamma}_\beta + x_\beta \Pi^{\text{л}\gamma}_\alpha - x^\gamma \Pi^{\text{л}}_{\alpha\beta}) + \frac{g - f - f's}{sg} x^\gamma \Pi^{\text{т}}_{\alpha\beta}, \tag{16.31}$$

где штрих обозначает дифференцирование по аргументу s. Для подъема индекса в последнем выражении использовалась обратная метрика

$$g^{\alpha\beta} = \frac{1}{f}\Pi^{\mathrm{T}\alpha\beta} + \frac{1}{g}\Pi^{\mathrm{L}\alpha\beta}. \tag{16.32}$$

Тензор кривизны для метрики (16.28) имеет вид

$$\begin{aligned} R_{\alpha\beta\gamma}{}^{\delta} &= \Pi^{\mathrm{T}}_{\alpha\gamma}\Pi^{\mathrm{T}\delta}_{\beta}\left[\frac{(f+f's)^2}{sfg} - \frac{1}{s}\right] \\ &+ \Pi^{\mathrm{L}}_{\alpha\gamma}\Pi^{\mathrm{T}\delta}_{\beta}\left[2\left(\frac{f+f's}{f}\right)' + \left(\frac{f'}{f} - \frac{g'}{g}\right)\frac{f+f's}{f}\right] \\ &+ \Pi^{\mathrm{L}\,\delta}_{\alpha}\Pi^{\mathrm{T}}_{\beta\gamma}\left[-2\left(\frac{f+f's}{g}\right)' + \left(\frac{f'}{f} - \frac{g'}{g}\right)\frac{f+f's}{g}\right] - (\alpha \leftrightarrow \beta). \end{aligned} \tag{16.33}$$

Свернув это выражение по индексам β и δ, получим тензор Риччи

$$\begin{aligned} R_{\alpha\beta} &= \Pi^{\mathrm{T}}_{\alpha\beta}\left[\frac{n-2}{s}\left(\frac{(f+f's)^2}{fg} - 1\right) + 2\frac{(f+f's)'}{g} - \left(\frac{f'}{f} + \frac{g'}{g}\right)\frac{f+f's}{g}\right] \\ &+ \Pi^{\mathrm{L}}_{\alpha\beta}(n-1)\left[2\frac{(f+f's)'}{f} - \left(\frac{f'}{f} + \frac{g'}{g}\right)\frac{f+f's}{f}\right]. \end{aligned} \tag{16.34}$$

Дальнейшая свертка с обратной метрикой (16.32) дает скалярную кривизну

$$R = (n-1)\left[\frac{n-2}{fs}\left(\frac{(f+f's)^2}{fg} - 1\right) + 4\frac{(f+f's)'}{fg} - 2\left(\frac{f'}{f} + \frac{g'}{g}\right)\frac{f+f's}{fg}\right] \tag{16.35}$$

Как было отмечено ранее, пространства постоянной кривизны, определяемые уравнением (**??**), автоматически удовлетворяют вакуумным уравнениям Эйнштейна с космологической постоянной. Решим эти уравнения для лоренц инвариантной метрики (16.28). Для этого опустим последний индекс у тензора кривизны (16.33) с помощью метрики (16.28)

$$\begin{aligned} R_{\alpha\beta\gamma\delta} &= \Pi^{\mathrm{T}}_{\alpha\gamma}\Pi^{\mathrm{T}}_{\beta\delta}\frac{1}{s}\left[\frac{(f+f's)^2}{g} - f\right] \\ &+ (\Pi^{\mathrm{L}}_{\alpha\gamma}\Pi^{\mathrm{T}}_{\beta\delta} - \Pi^{\mathrm{L}}_{\alpha\delta}\Pi^{\mathrm{T}}_{\beta\gamma})\left[2(f+f's)' - \left(\frac{f'}{f} + \frac{g'}{g}\right)(f+f's)\right] - (\alpha \leftrightarrow \beta) \end{aligned} \tag{16.36}$$

и подставим в уравнение (**??**). В результате получим систему дифференциальных уравнений на функции f и g

$$\frac{(f+f's)^2}{sg} - \frac{f}{s} = -\frac{2K}{n(n-1)}f^2, \tag{16.37}$$

$$2(f+f's)' - \left(\frac{f'}{f} + \frac{g'}{g}\right)(f+f's) = -\frac{2K}{n(n-1)}fg. \tag{16.38}$$

Из первого уравнения получаем решение для g

$$g = \frac{(f+f's)^2}{f\left(1 - \frac{2K}{n(n-1)}fs\right)}. \tag{16.39}$$

Поскольку для невырожденности метрики необходимо, чтобы $g \neq 0$, то при $s \neq 0$ функция f должна удовлетворять неравенству

$$f \neq \frac{n(n-1)}{2Ks}, \qquad s \neq 0. \tag{16.40}$$

Подстановка этого выражения во второе уравнение (16.38) приводит к тождеству. Таким образом мы доказали следующее утверждение.

Теорема 16.4.1. *Лоренц инвариантная метрика*

$$g_{\alpha\beta} = f\Pi^{\mathrm{T}}_{\alpha\beta} + \frac{(f+f's)^2}{f\left(1-\frac{2K}{n(n-1)}fs\right)}\Pi^{\mathrm{L}}_{\alpha\beta}, \tag{16.41}$$

где $f(s)$ – произвольная положительная функция, удовлетворяющая условию (16.40), является метрикой пространства постоянной кривизны. Обратно. Метрику пространства постоянной кривизны можно записать в лоренц инвариантном виде (16.41) для некоторой функции $f(s)$.

Доказательство. Нам осталось доказать, что произвольную метрику пространства постоянной кривизны можно привести к лоренц инвариантному виду (16.28). Чтобы ответить на этот вопрос, запишем метрику (16.41) в более известной форме. С этой целью зафиксируем функцию f, положив $f = g$. Это равенство с учетом (16.39) сводится к уравнению

$$f'^2 s + 2f'f + \frac{2K}{n(n-1)}f^3 = 0,$$

общее решение которого имеет вид

$$f = \frac{C}{(C+\frac{K}{2n(n-1)}s)^2}, \qquad C = \mathsf{const}.$$

Постоянная интегрирования убирается растяжкой координат. Поэтому без ограничения общности положим $C = 1$. В результате получим метрику постоянной кривизны

$$g_{\alpha\beta} = \frac{\eta_{\alpha\beta}}{(1+\frac{K}{2n(n-1)}s)^2}. \tag{16.42}$$

То, что метрику пространства постоянной кривизны можно привести к такому виду – хорошо известный факт. Доказательство этого утверждения нетривиально (см., например, [**?**]). □

Замечание. Проведенные вычисления просто переносятся на случай метрики в евклидовом пространстве, которая инвариантна относительно $\mathbb{SO}(n)$-вращений. Для этого во всех формулах метрику Лоренца $\eta_{\alpha\beta}$ нужно заменить на евклидову метрику $\delta_{\alpha\beta}$. □

Поскольку предел функции $(g-f)/s$ равен

$$\mathsf{lim}_{\,s\to 0}\frac{g-f}{s} = 2f' + \frac{2K}{n(n-1)}f^2,$$

то выражение для метрики (16.41) определено и при $s = 0$.

Решим вакуумные уравнения Эйнштейна с космологической постоянной

$$R_{\alpha\beta} = \Lambda g_{\alpha\beta}$$

для лоренц инвариантной метрики. Поскольку число этих уравнений меньше, чем число уравнений в условии постоянства кривизны (**??**), то можно было бы ожидать, что они допускают решения не только с постоянной кривизной. Однако для лоренц инвариантных метрик классы решений совпадают. Действительно, подстановка тензора Риччи (16.34) в уравнения Эйнштейна дает

$$\frac{n-2}{s}\left[\frac{(f+f's)^2}{fg}-1\right]+2\frac{(f+f's)'}{g}-\left(\frac{f'}{f}+\frac{g'}{g}\right)\frac{f+f's}{g}=\Lambda f, \tag{16.43}$$

$$(n-1)\left[2\frac{(f+f's)'}{f}-\left(\frac{f'}{f}+\frac{g'}{g}\right)\frac{f+f's}{f}\right]=\Lambda g. \tag{16.44}$$

Второе уравнение при

$$\Lambda = -\frac{2K}{n}$$

совпадает с уравнением (16.38). Линейная комбинация (16.43)$/f-$(16.44)$/g$ эквивалентна уравнению (16.37).

Таким образом мы доказали, что все лоренц инвариантные решения вакуумных уравнений Эйнштейна с космологической постоянной исчерпываются пространствами постоянной кривизны.

В последнее время многие авторы понятие векторного поля Киллинга понимают в более широком смысле: как симметрию не метрики, а других тензорных полей.

Пример 16.4.1. Рассмотрим "векторное поле Киллинга" на плоскости, которое в декартовой системе координат u, v имеет вид

$$K = u\partial_u + av\partial_v, \qquad a = \mathsf{const} \neq 0.$$

Тогда уравнение Киллинга (16.24) для функции $f(u, v)$ принимает вид

$$Kf = 0. \tag{16.45}$$

Любое решение этого уравнения имеет вид $f = f(\xi)$, где

$$\xi = \frac{(av)^{1/a}}{u}.$$

Это значит, что решения уравнения (16.45) по существу являются функциями одной переменной ξ. Если функция f одновременно удовлетворяет некоторому уравнению в частных производных на поверхности, то его решения, зависящие от переменной ξ называются *автомодельными*. Для таких решений уравнение в частных производных сводится к обыкновенному дифференциальному уравнению относительно ξ, что существенно упрощает задачу. □

Глава 17

Геодезические и экстремали

Пусть на многообразии $\mathbb{M}$ задана аффинная геометрия, т.е. метрика g и аффинная связность Γ. Тогда можно построить два типа выделенных кривых: геодезические и экстремали. Геодезические линии определяются только связностью как линии, касательный вектор к которым остается касательным при параллельном переносе. Экстремали, напротив, определяются только метрикой как линии экстремальной длины. Поскольку метрика и связность являются независимыми геометрическими объектами, то в общем случае геодезические линии и экстремали различны. В частном случае (псевдо-)римановой геометрии, когда связностью является связность Леви–Чивиты, геодезические и экстремали совпадают.

В настоящей главе мы рассмотрим оба типа кривых, т.к. они играют важную роль в моделях математической физики. Достаточно сказать, что одним из постулатов общей теории относительности является предположение о том, что свободные точечные частицы, подверженные действию только гравитационных сил, движутся по экстремалям. Кроме того, понятие полноты многообразий связано также с экстремалями.

17.1 Геодезические

В аффинной геометрии $(\mathbb{M}, g, \Gamma)$ существует выделенное семейство линий, которые называются геодезическими. Рассмотрим произвольную кривую $\gamma = x(t) = \{x^\alpha(t)\}$, где $-\infty \leq t_1 < t < t_2 \leq \infty$, на многообразии $\mathbb{M}$. Вектор скорости кривой, $u(t) = \{u^\alpha(t) := \dot{x}^\alpha(t)\}$, как всегда, предполагается отличным от нуля.

Определение. *Геодезической* линией на многообразии $\mathbb{M}$ называется кривая $x(t)$ класса $\mathcal{C}^2([t_1, t_2])$, касательный вектор к которой остается касательным при параллельном переносе вдоль нее. □

Замечание. В определении геодезической линии присутствует только аффинная связность. Поэтому понятие геодезической линии никакого отношения к метрике не имеет, которой может вообще не быть на многообразии. □

Получим уравнения, которым должны удовлетворять координатные функции $x^\alpha(t)$ для того, чтобы кривая γ была геодезической. Выберем произвольный отличный от нуля вектор X_0, который касается кривой γ в некоторой точке $x(t_0)$, и разнесем его вдоль всей кривой с помощью параллельного переноса. В результате получим векторное поле $X\big(x(t)\big)$, определенное на кривой γ. Множество векторных полей,

определенных на кривой γ, будем обозначать $\mathcal{X}(\mathbb{M},\gamma)$. Из определения геодезической следует, что это векторное поле всюду касается γ и, следовательно, пропорционально векторному полю скорости: $X^\alpha(t) = f(t)u^\alpha(t)$, где f – некоторая отличная от нуля функция на γ. Изменим параметризацию кривой $t \mapsto s(t)$. Тогда условие параллельности примет вид

$$X^\alpha = f\frac{ds}{dt}\frac{dx^\alpha}{ds}. \tag{17.1}$$

Выберем новый параметр вдоль геодезической таким образом, чтобы было выполнено уравнение

$$\frac{ds}{dt} = \frac{1}{f},$$

которое всегда имеет решение, поскольку $f \neq 0$. Таким образом, на геодезической линии существует такая параметризация, что вектор скорости u при параллельном переносе остается вектором скорости. В дальнейшем мы предполагаем, что параметр t вдоль геодезической выбран таким образом, что $f = 1$. Если вектор скорости геодезической при параллельном переносе остается касательным, то ковариантная производная от него вдоль геодезической равна нулю (8.28):

$$\nabla_u u = u^\alpha(\partial_\alpha u^\beta + \Gamma_{\alpha\gamma}{}^\beta u^\gamma)\partial_\beta = 0. \tag{17.2}$$

Поскольку $d/dt = u^\alpha\partial_\alpha$, то это уравнение в компонентах принимает вид

$$\ddot{x}^\alpha = -\Gamma_{\beta\gamma}{}^\alpha \dot{x}^\beta \dot{x}^\gamma. \tag{17.3}$$

Таким образом, мы получили критерий того, что кривая $x(t)$ является геодезической.

Предложение 17.1.1. *Кривая $x(t)$ на многообразии $\mathbb{M}$ с заданной аффинной связностью Γ является геодезической тогда и только тогда, когда ее координатные функции $x^\alpha(t)$ удовлетворяют системе уравнений (17.3).*

Замечание. В уравнение (17.2) входит частная производная $\partial_\alpha u^\beta$ от вектора скорости. Эта производная неопределена, т.к. векторное поле скорости $u^\beta\big(x(t)\big)$ задано только вдоль кривой γ. Тем не менее в уравнение входит производная по направлению $u^\alpha\partial_\alpha u^\beta = \ddot{x}^\alpha$, которая имеет смысл. Это значит, что, для определения частной производной $\partial_\alpha u^\beta$, векторное поле скорости можно продолжить в некоторую окрестность кривой γ произвольным дифференцируемым образом, а конечный ответ от такого продолжения не зависит. Подобный трюк будет часто встречаться в дальнейшем. □

Определение. Векторное поле $a(t)$, определенное вдоль произвольной кривой $x(t)$ на многообразии $\mathbb{M}$ с заданной связностью Γ,

$$a := \nabla_u u = \left(\ddot{x}^\alpha + \Gamma_{\beta\gamma}{}^\alpha \dot{x}^\beta \dot{x}^\gamma\right)\partial_\alpha, \tag{17.4}$$

называется *ускорением* кривой. □

Сравнивая ускорение кривой с уравнением для геодезической, получаем, что кривая будет геодезической тогда и только тогда, когда ее ускорение равно нулю.

Ускорение кривой, так же как и скорость, является векторным полем вдоль кривой, $u, a \in \mathcal{X}(\mathbb{M},\gamma)$, и зависит от ее параметризации. При выводе уравнений геодезической линии (17.3) была выбрана специальная параметризация кривой γ.

Определение. Параметр t, по которому проводится дифференцирование в системе обыкновенных дифференциальных уравнений (17.3), определяющих геодезическую линию, называется *каноническим* или *аффинным*. □

Поскольку уравнение (17.1) имеет тензорную форму, то канонический параметр не зависит от выбора системы координат на $\mathbb{M}$.

Предложение 17.1.2. *Канонический параметр вдоль геодезической определен с точностью до аффинного преобразования*

$$t \mapsto s = at + b, \qquad a = \mathsf{const} \neq 0, \qquad b = \mathsf{const}.$$

Доказательство. Рассмотрим вопрос как меняется уравнение для геодезических при произвольной замене канонического параметра. При другой параметризации геодезической $x^\alpha(s)$, где $s = s(t)$, $ds/dt \neq 0$, уравнение (17.3) изменится:

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 \frac{d^2x^\alpha}{ds^2} + \frac{d^2s}{dt^2}\frac{dx^\alpha}{ds} = -\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 \Gamma_{\beta\gamma}{}^\alpha \frac{dx^\beta}{ds}\frac{dx^\gamma}{ds}. \tag{17.5}$$

Отсюда следует, что форма уравнений (17.3) не изменится тогда и только тогда, когда $d^2s/dt^2 = 0$, т.е. замена параметра является аффинной. □

Пример 17.1.1. В пространстве Минковского $\mathbb{R}^{1,3}$ точечная частица движется по некоторой мировой линии $x(t)$. Если в качестве параметра вдоль траектории выбрано время $t = x^0$, то скорость и ускорение кривой совпадают со скоростью и ускорением частицы. Если частица свободна, т.е. на нее не действуют никакие силы и, следовательно, ее ускорение равно нулю, то траекторией частицы будет одна из геодезических линий. Поскольку связность в $\mathbb{R}^{1,3}$ в декартовой системе координат имеет равные нулю компоненты, то уравнения (17.3) сводятся к уравнениям

$$\ddot{x}^\alpha = 0,$$

которые определяют прямые линии. Таким образом, в пространстве Минковского $\mathbb{R}^{1,3}$ прямые и только они являются геодезическими. Это значит, что свободная частица в пространстве Минковского равномерно движется вдоль прямой линии. □

Геодезическая линия в аффинной геометрии обобщает понятие прямой в (псевдо-)евклидовом пространстве, сохраняя то свойство, что касательный вектор остается касательным при параллельном переносе.

Пример 17.1.2. В пространствах абсолютного параллелизма, для которых тензор кривизны равен нулю $R_{\alpha\beta\gamma}{}^\delta = 0$, локально существует система координат, в которой симметричная часть аффинной связности равна нулю $\Gamma_{\{\alpha\beta\}}{}^\gamma = 0$ (см., раздел 8.7). Поскольку геодезические линии (17.3) определяются только симметричной частью аффинной связности, то в этой системе координат геодезические являются прямыми линиями. В частности, если на группе Ли задана каноническая связность, т.е. параллельный перенос отождествлен с групповым действием справа, то такая система координат локально существует. Заметим, что в правоинвариантном базисе на группе Ли компоненты связности равны нулю, однако он не является голономным и не определяет ту систему координат, о которой идет речь. □

Для двух параметризаций $x^\alpha(t)$ и $x^\alpha(s)$ одной геодезической справедливо равенство

$$\frac{d^2s}{dt^2} = \frac{ds}{dt}\frac{dx^\beta}{ds}\partial_\beta\left(\frac{ds}{dt}\right),$$

и уравнение (17.5) переписывается в эквивалентной форме

$$\begin{aligned}\frac{d^2x^\alpha}{ds^2} &= -\Gamma_{\beta\gamma}{}^\alpha\frac{dx^\beta}{ds}\frac{dx^\gamma}{ds} - \frac{dx^\alpha}{ds}\frac{dx^\beta}{ds}\partial_\beta \ln\left|\frac{ds}{dt}\right| \\ &= -\Gamma_{\beta\gamma}{}^\alpha\frac{dx^\beta}{ds}\frac{dx^\gamma}{ds} - \frac{1}{2}\left(\delta^\alpha_\beta\partial_\gamma \ln\left|\frac{ds}{dt}\right| + \delta^\alpha_\gamma\partial_\beta \ln\left|\frac{ds}{dt}\right|\right)\frac{dx^\beta}{ds}\frac{dx^\gamma}{ds}. \qquad (17.6)\end{aligned}$$

Будем говорить, что две геодезические линии $x^\alpha(t)$ и $x^\alpha(s)$ для различных связностей $\Gamma_{1\alpha\beta}{}^\gamma$ и $\Gamma_{2\alpha\beta}{}^\gamma$ на одном и том же многообразии $\mathbb{M}$ имеют одинаковую форму, если множества точек, через которые проходят геодезические линии, совпадают. Тогда из уравнения (17.6) следует критерий совпадения формы геодезических для двух аффинных связностей.

Теорема 17.1.1. *Для того, чтобы форма геодезических $x^\alpha(t)$ и $x^\alpha(s)$ для двух аффинных связностей $\Gamma_{1\alpha\beta}{}^\gamma$ и $\Gamma_{2\alpha\beta}{}^\gamma$ на многообразии $\mathbb{M}$ совпадала, необходимо и достаточно, чтобы симметричные части этих связностей были связаны соотношением*

$$\Gamma_{2\{\alpha\beta\}}{}^\gamma = \Gamma_{1\{\alpha\beta\}}{}^\gamma + \frac{1}{2}\left(\delta^\gamma_\beta\partial_\alpha\varphi + \delta^\gamma_\alpha\partial_\beta\varphi\right), \qquad (17.7)$$

где $\varphi = \varphi(x)$ – некоторая скалярная функция, определяющая связь канонических параметров для каждой геодезической линии

$$\frac{ds}{dt} = e^\varphi. \qquad (17.8)$$

Пусть задан диффеоморфизм многообразий

$$f: \quad \mathbb{M} \to \mathbb{N}$$

такой, что аффинная связность на $\mathbb{M}$ отображается в аффинную связность на $\mathbb{N}$. Тогда диффеоморфизм f отображает геодезическую линию в геодезическую, поскольку определение геодезической линии инвариантно (не зависит от системы координат).

Рис. 17.1: Точки a и b на плоскости с конической сингулярностью и положительным углом дефицита нельзя соединить геодезической.

Уравнения для геодезических (17.3) – это система нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка. Поэтому при достаточно гладких компонентах связности для однозначного решения задачи Коши необходимо задать начальную точку $\{x^\alpha(0)\}$ и вектор скорости $\{\dot{x}^\alpha(0)\}$. Геометрически это означает, что через данную точку многообразия в данном направлении проходит одна и только одна геодезическая.

Предложение 17.1.3. *Если аффинная связность Γ на многообразии $\mathbb{M}$ гладкая, то геодезические линии также являются гладкими $\mathcal{C}^\infty$ кривыми.*

Доказательство. Продифференцируем уравнение геодезических (17.3) по каноническому параметру. Правая часть полученного равенства зависит от компонент связности и их первых производных, а также от компонент вектора скорости и их первой производной. Поэтому правая часть определена и непрерывна. Следовательно третья производная от координатных функций $x^\alpha(t)$ существует и непрерывна. Дальнейшее дифференцирование приводит к гладкости геодезических. □

Для геодезической линии можно также поставить краевую задачу: найти геодезическую, соединяющую две фиксированные точки многообразия, которое предполагается линейно связным. Эта задача разрешима в малом, т.е. любые две достаточно близкие точки можно соединить геодезической и притом только одной. Для удаленных точек эта задача может не иметь решения или иметь несколько решений.

Определение. (Псевдо-)риманово многообразие $\mathbb{M}$ называется *геодезически выпуклым*, если любые две его точки могут быть соединены геодезической.

Пример 17.1.3. Рассмотрим плоскость с конической сингулярностью и положительным углом дефицита $\mathbb{M} = \mathbb{U} \cup \mathbb{V}$, где $\mathbb{U}$ – область, изометричная евклидовой плоскости $\mathbb{R}^2$ с выколотой полупрямой, и $\mathbb{V}$ – клин евклидовой плоскости, который вставлен, рис.17.1. Тогда на ней существуют точки, которые нельзя соединить геодезической. Действительно, все геодезические, проходящие через точку p, соединяют ее со всеми точками евклидовой плоскости $\mathbb{R}^2$, до того, как клин был вставлен. Поскольку при диффеоморфизме ($\mathbb{R}^2 \setminus \overline{\mathbb{R}}_+$ на $\mathbb{U}$) геодезическая переходит в геодезическую и их число сохраняется, то точку a нельзя соединить геодезической ни с какой точкой q, лежащей на клине $\mathbb{V}$, который вставлен со стороны, противоположной конической сингулярности. Это многообразие не является геодезически выпуклым. □

Пример 17.1.4. Рассмотрим сферу, вложенную в евклидово пространство, $\mathbb{S}^2 \hookrightarrow \mathbb{R}^3$. Пусть метрика на сфере индуцирована вложением и на ней задана связность Леви–Чивиты. Тогда любые две точки на сфере $\mathbb{S}^2$, не являющиеся диаметрально противоположными, можно соединить двумя разными геодезическими (две дуги большой окружности, проходящей через эти точки). Диаметрально противоположные точки соединяются бесконечным числом геодезических. Сфера $\mathbb{S}^2$ является геодезически выпуклым многообразием. □

Введем важное понятие полноты геодезической по каноническому параметру t, В силу однозначного разрешения задачи Коши, через каждую точку многообразия в заданном направлении проходит одна геодезическая. Это значит, что геодезическую линию, если она заканчивается в некоторой точке $q \in \mathbb{M}$, всегда можно продолжить. Действительно, если при конечном значении канонического параметра геодезическая попадает в точку q, то продолжим ее, склеив с геодезической, выходящей из точки q в том же направлении.

Определение. Геодезическая в $\mathbb{M}$ называется *полной*, если ее можно продолжить в обе стороны до бесконечного значения канонического параметра, $t \in (-\infty, \infty)$. □

Замечание. Поскольку канонический параметр определен с точностью до аффинного преобразования и не зависит от выбора системы координат, то данное определение корректно. □

Геодезическую линию можно рассматривать как интегральную кривую векторного поля скорости $u := \{\dot{x}^\alpha\}$. Тогда полнота геодезической означает полноту векторного поля u.

Пусть на многообразии $\mathbb{M}$ задана не только аффинная связность Γ, но и метрика g. Тогда компоненты аффинной связности можно выразить через метрику, кручение и неметричность (8.15). Хотя в уравнение для геодезических входит только симметричная часть связности, тем не менее оно нетривиально зависит от кручения и

неметричности. Действительно, из формулы (8.15) следует, что симметричная часть аффинной связности имеет вид

$$\begin{aligned}\Gamma_{\{\beta\gamma\}}{}^{\alpha} &= \frac{1}{2}(\Gamma_{\beta\gamma}{}^{\alpha} + \Gamma_{\gamma\beta}{}^{\alpha}) \\ &= \widetilde{\Gamma}_{\beta\gamma}{}^{\alpha} + \frac{1}{2}(T^{\alpha}{}_{\beta\gamma} + T^{\alpha}{}_{\gamma\beta}) + \frac{1}{2}(Q_{\beta\gamma}{}^{\alpha} + Q_{\gamma\beta}{}^{\alpha} - Q^{\alpha}{}_{\beta\gamma}),\end{aligned} \tag{17.9}$$

где $\widetilde{\Gamma}_{\beta\gamma}{}^{\alpha}$ – символы Кристоффеля. Ясно, что две связности, имеющие одинаковую симметричную часть определяют одно и то же семейство геодезических.

Рассмотрим два вектора X и Y, которые параллельно переносятся вдоль геодезической γ.

Предложение 17.1.4. *Зависимость скалярного произведения (X, Y) двух векторов, которые параллельно переносятся вдоль γ, от точки геодезической определяется только тензором неметричности:*

$$\partial_u(X, Y) = \nabla_u(X^{\alpha}Y^{\beta}g_{\alpha\beta}) = -u^{\gamma}X^{\alpha}Y^{\beta}Q_{\gamma\alpha\beta}. \tag{17.10}$$

Отсюда следует, что в римановой геометрии и геометрии Римана–Картана, где $Q = 0$, скалярное произведение двух векторов при параллельном переносе вдоль геодезической сохраняется. В частности, квадрат вектора скорости геодезической постоянен вдоль нее.

Доказательство. Следует из определения тензора неметричности (8.14). □

Замечание. Это утверждение верно и для произвольной кривой (предложение 8.4.1). Скалярное произведение двух векторных полей, полученных в результате параллельного переноса двух векторов вдоль произвольной кривой γ в римановой геометрии и геометрии Римана–Картана, не зависит от точки кривой. □

Следствие. Если неметричность лоренцева многообразия $\mathbb{M}$ равна нулю, то квадрат вектора скорости постоянен вдоль геодезических, и их можно разделить на три класса: времениподобные, пространственноподобные и светоподобные (изотропные). При этом тип геодезической не может меняться от точки к точке. □

В заключение настоящего раздела получим уравнение девиации геодезических. Пусть на многообразии $\mathbb{M}$ задана произвольная кривая $\sigma = y(s)$, $s \in [s_1, s_2]$ и отличное от нуля векторное поле $X(s) \in \mathcal{X}(\mathbb{M}, \sigma)$, определенное вдоль этой кривой и которое нигде не касается кривой σ. Рассмотрим семейство геодезических $\gamma_s = x(t, s)$, проходящих через каждую точку кривой σ в направлении $X(s)$:

$$x(0, s) = y(s), \qquad \dot{x}(0, s) = X(s),$$

где точка, как и раньше, обозначает дифференцирование по каноническому параметру t. Если кривая $y(s)$ и векторное поле $X(s)$ достаточно гладкие, то множество точек $x(t, s)$ образует двумерное подмногообразие (поверхность) Σ в $\mathbb{M}$ при достаточно малых t. При этом параметры t, s можно выбрать в качестве координат на Σ. Этим координатам соответствуют векторные поля

$$u := \partial_t = \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial t}\partial_{\alpha}, \qquad Y := \partial_s = \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial s}\partial_{\alpha},$$

которые коммутируют между собой, $[u, Y] = 0$. После замены в коммутаторе частных производных на ковариантные, получим равенство

$$u^\beta \nabla_\beta Y^\alpha = Y^\beta \nabla_\beta u^\alpha + u^\beta Y^\gamma T_{\beta\gamma}{}^\alpha, \tag{17.11}$$

где $T_{\beta\gamma}{}^\alpha = \Gamma_{\beta\gamma}{}^\alpha - \Gamma_{\gamma\beta}{}^\alpha$ – тензор кручения.

Определение. Векторное поле $Y \in \mathcal{X}(\mathbb{M}, \Sigma)$ называется *вектором девиации* геодезических. Векторные поля с компонентами:

$$V^\alpha = u^\beta \nabla_\beta Y^\alpha, \tag{17.12}$$
$$A^\alpha = u^\beta \nabla_\beta V^\alpha, \tag{17.13}$$

называются соответственно *скоростью* и *ускорением девиации* близких геодезических. □

Векторное поле девиации определяет расположение близких геодезических на поверхности Σ, а векторные поля скорости и ускорения девиации характеризуют, как меняются расположение геодезических при движении вдоль геодезической.

Предложение 17.1.5. *Ускорение девиации геодезических определяется тензором кривизны и кручения:*

$$A^\alpha = u^\gamma u^\delta Y^\beta R_{\gamma\beta\delta}{}^\alpha + u^\gamma u^\delta \nabla_\delta \left(Y^\beta T_{\gamma\beta}{}^\alpha \right). \tag{17.14}$$

Доказательство. Прямая проверка:

$$\begin{aligned}
&u^\gamma \nabla_\gamma (u^\beta \nabla_\beta Y^\alpha) = u^\gamma \nabla_\gamma (Y^\beta \nabla_\beta u^\alpha + u^\beta Y^\delta T_{\beta\delta}{}^\alpha) = \\
&= u^\gamma \nabla_\gamma Y^\beta \nabla_\beta u^\alpha + u^\gamma Y^\beta \nabla_\gamma \nabla_\beta u^\alpha + u^\beta u^\gamma \nabla_\gamma (Y^\delta T_{\beta\delta}{}^\alpha) = \\
&= u^\gamma \nabla_\gamma Y^\beta \nabla_\beta u^\alpha + u^\gamma Y^\beta \nabla_\beta \nabla_\gamma u^\alpha + u^\gamma u^\delta Y^\beta R_{\gamma\beta\delta}{}^\alpha - u^\gamma Y^\beta T_{\gamma\beta}{}^\delta \nabla_\delta u^\alpha + u^\beta u^\gamma \nabla_\gamma (Y^\delta T_{\beta\delta}{}^\alpha) = \\
&= Y^\gamma \nabla_\gamma (u^\beta \nabla_\beta u^\alpha) + u^\gamma u^\delta Y^\beta R_{\gamma\beta\delta}{}^\alpha + u^\beta u^\gamma \nabla_\gamma (Y^\delta T_{\beta\delta}{}^\alpha) = \\
&= u^\gamma u^\delta Y^\beta R_{\gamma\beta\delta}{}^\alpha + u^\beta u^\gamma \nabla_\gamma (Y^\delta T_{\beta\delta}{}^\alpha),
\end{aligned}$$

где мы учли равенство (17.11), уравнения геодезических (17.2) и выражение коммутатора ковариантных производных через тензоры кривизны и кручения (8.81). □

В (псевдо-)римановой геометрии уравнение (17.14) упрощается

$$A^\alpha = u^\gamma u^\delta Y^\beta \widetilde{R}_{\gamma\beta\delta}{}^\alpha. \tag{17.15}$$

В литературе по общей теории относительности оно известно, как *уравнение девиации геодезических*. Это уравнение можно переписать в виде

$$\nabla_u^2 Y^\alpha + u^\delta u^\beta Y^\gamma \widetilde{R}_{\gamma\delta\beta}{}^\alpha = 0.$$

Оно совпадает с равенством нулю второй вариации действия для экстремалей (17.32), которое будет получено позже.

17.2 Экстремали

Другим выделенным типом кривых в аффинной геометрии $(\mathbb{M}, g, \Gamma)$ являются экстремали, которые определяются как линии экстремальной длины. Рассмотрим произвольную достаточно гладкую кривую $\gamma = x(t) \in \mathbb{M}$, $t \in [t_1, t_2]$. Предположим, что квадрат вектора скорости кривой, $u^\alpha := \dot{x}^\alpha(t)$, всюду отличен от нуля, $u^2 := u^\alpha u^\beta g_{\alpha\beta} \neq 0$.

Замечание. Для римановой метрики это условие автоматически выполняется, поскольку вектор скорости предполагается отличным от нуля. Если метрика не является знакоопределенной, то это условие нетривиально. Например, для лоренцевой метрики это условие равносильно тому, что мы рассматриваем либо времени-, либо пространственноподобные кривые. □

Пусть кривая соединяет две точки $p = \{x^\alpha(t_1)\}$ и $q = \{x^\alpha(t_2)\}$. Тогда длина этой кривой задается интегралом

$$S = \int_p^q ds, \qquad ds = dt\sqrt{|g_{\alpha\beta}\dot{x}^\alpha\dot{x}^\beta|} = dt\sqrt{|u^2|}. \tag{17.16}$$

Этот функционал инвариантен относительно общих преобразований координат x^α и произвольной перепараметризации кривой $t \to \tau(t)$.

Определение. *Экстремалью*, соединяющей две точки (псевдо-)риманова многообразия $p, q \in \mathbb{M}$, если она существует, называется неизотропная кривая γ класса $\mathcal{C}^2([t_1, t_2])$, для которой функционал (17.16) принимает экстремальное значение. □

Замечание. Экстремали в римановом пространстве обобщают понятие прямой в евклидовом пространстве, сохраняя свойство быть линиями минимальной (экстремальной) длины, соединяющей две точки. □

Пример 17.2.1. Не любые две точки линейно связного многообразия $p, q \in \mathbb{M}$, на котором задана риманова метрика, можно соединить кривой наименьшей длины. Рассмотрим кольцо на евклидовой плоскости $\mathbb{R}^2$, рис.17.2. Это – риманово некомпактное связное неодносвязное двумерное многообразие. Если отрезок, соединяющий точки p и q, пересекает вырезанную дырку, то эти точки нельзя соединить кривой наименьшей длины. Действительно, для любой кривой γ, соединяющей точки p и q, всегда найдется кривая γ' меньшей длины. Построение ясно из рисунка. □

Замечание. Если метрика на многообразии $\mathbb{M}$ не является знакоопределенной, то существуют изотропные кривые, для которых функционал длины (17.16) равен нулю и данное выше определение экстремалей не проходит. Определение изотропных экстремалей будет дано ниже. □

Найдем уравнения, которым должны удовлетворять координатные функции $x^\alpha(t)$ для того, чтобы кривая $x(t)$ была экстремалью. Пусть экстремаль соединяет две точки p и q многообразия. Выберем такую карту на многообразии, которая целиком содержит данную экстремаль. Для этого достаточно взять объединение всех достаточно малых шаров, центры которых лежат на экстремали. Пусть в этой карте экстремаль и ее вариация задаются набором функций $x^\alpha(t)$ и $\delta x^\alpha(t)$. Мы предполагаем, что вариации кривой в конечных точках $p, q \in \mathbb{M}$ равны нулю, $\delta x^\alpha(p) = \delta x^\alpha(q) = 0$,

и поэтому вкладом граничных членов при интегрировании по частям можно пренебречь. Вариация длины кривой (17.16) с точностью до знака имеет вид

$$\delta S = \int \frac{dt}{2\sqrt{|u^2|}} \left[2\delta(\dot{x}^\alpha)\dot{x}^\beta g_{\alpha\beta} + \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta \delta g_{\alpha\beta} \right].$$

Проинтегрируем первое слагаемое по частям и воспользуемся равенством

$$\delta g_{\beta\gamma} = \partial_\alpha g_{\beta\gamma} \delta x^\alpha.$$

Тогда вариация длины кривой принимает вид

$$\delta S = -\int dt \left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\dot{x}^\beta g_{\alpha\beta}}{\sqrt{|u^2|}} \right) - \frac{1}{2\sqrt{|u^2|}} \dot{x}^\beta \dot{x}^\gamma \partial_\alpha g_{\beta\gamma} \right] \delta x^\alpha.$$

Поскольку

$$ds = \sqrt{|u|^2}dt, \quad \text{и} \quad \dot{x}^\alpha = \sqrt{|u^2|}\frac{dx^\alpha}{ds},$$

то вариацию длины кривой можно переписать в виде

$$\delta S = -\int ds \left(\frac{d^2x^\alpha}{ds^2} + \widetilde{\Gamma}_{\gamma\delta}{}^{\beta} \frac{dx^\gamma}{ds}\frac{dx^\delta}{ds} \right) g_{\alpha\beta}\delta x^\alpha,$$

где $\widetilde{\Gamma}_{\beta\gamma}{}^{\alpha}$ – символы Кристоффеля (8.22). Фактически, на этом этапе мы воспользовались инвариантностью интеграла (17.16) относительно перепараметризации кривой, выбрав длину кривой в качестве параметра, $t \to s$. Параметр s вдоль экстремали называется *каноническим*. В дальнейшем канонический параметр мы будем обозначать буквой t. Таким образом, мы доказали следующее утверждение.

Теорема 17.2.1. *Для того, чтобы кривая $x(t)$ была экстремалью, необходимо и достаточно, чтобы координатные функции $x^\alpha(t)$ удовлетворяли системе обыкновенных дифференциальных уравнений*

$$\ddot{x}^\alpha = -\widetilde{\Gamma}_{\beta\gamma}{}^{\alpha}\dot{x}^\beta\dot{x}^\gamma, \tag{17.17}$$

где точка обозначает дифференцирование по каноническому параметру t.

Замечание. Параметр t, по которому проводится дифференцирование в уравнении (17.17) также, как и для геодезических, называется каноническим или аффинным. Он определен с точностью до аффинного преобразования. Таким образом, канонический параметр в общем случае не равен, а пропорционален длине экстремали. □

Пример 17.2.2. Пусть в некоторой области $\mathbb{U} \subset \mathbb{M}$ (псевдо-)риманова многообразия существует такая система координат, в которой метрика имеет постоянные компоненты. Тогда в этой области символы Кристоффеля равны нулю и, следовательно, уравнения (17.17) принимают вид $\ddot{x}^\alpha = 0$. Поэтому прямые и только они являются экстремалями в рассматриваемой области $\mathbb{U}$. □

Мы получили критерий того, что неизотропная кривая является экстремалью. При выводе уравнений (17.17) из вариационного принципа для действия (17.16) существенно используется условие $u^2 \neq 0$, которое исключает изотропные (светоподобные) экстремали. Поэтому изотропные экстремали определим не с помощью функционала длины, а непосредственно уравнениями (17.17). Для любой изотропной кривой $u^2 = 0$ и интеграл (17.16) равен нулю. В то же время уравнения (17.17) имеют смысл.

Определение. *Изотропной экстремалью* называется изотропная кривая γ класса $\mathcal{C}^2([t_1, t_2])$, которая задана функциями $x^\alpha(t)$, удовлетворяющими системе обыкновенных дифференциальных уравнений (17.17). □

Это определение корректно, т.к. квадрат вектора скорости экстремали постоянен. При этом не всякая изотропная кривая является экстремалью.

Пример 17.2.3. В четырехмерном пространстве Минковского $\mathbb{R}^{1,3}$ любая изотропная кривая имеет вид (**??**). В то же время экстремалями являются прямые линии и только они. Следовательно, не всякая изотропная кривая является экстремалью. Отметим, что в двумерном пространстве-времени любая изотропная кривая является экстремалью, что нетрудно доказать в изотермических координатах (конформной калибровке). □

Определения изотропных и неизотропных экстремалей можно объединить.

Рис. 17.2. Точки p и q нельзя соединить экстремалью.

Определение. Кривая γ класса $\mathcal{C}^2([t_1, t_2])$ называется *экстремалью*, если она задается функциями $x^\alpha(t)$, удовлетворяющими системе дифференциальных уравнений (17.17). Другими словами, экстремалью на (псевдо-)римановом многообразии $(\mathbb{M}, g)$ называется геодезическая для связности Леви-Чивиты. □

Замечание. Мы начали с другого определения экстремалей, т.к. в последнем определении теряется основное свойство неизотропных экстремалей реализовывать экстремумы функционала длины (17.16). □

Уравнение для экстремалей (17.17) можно переписать в явно ковариантном виде

$$\dot{x}^\beta \widetilde{\nabla}_\beta \dot{x}^\alpha = 0.$$

Это просто уравнение (17.2) для связности Леви–Чивиты. Опустив в этом уравнении индекс α и расписав ковариантную производную, получим альтернативную форму уравнения для экстремалей

$$\frac{\partial}{\partial t}(g_{\alpha\beta}\dot{x}^\beta) - \frac{1}{2}\partial_\alpha g_{\beta\gamma}\dot{x}^\beta\dot{x}^\gamma = 0. \tag{17.18}$$

Уравнения (17.17) определяются только метрикой, поскольку функционал длины не зависит от аффинной связности. Тем самым экстремали не зависят от того заданы ли на многообразии $\mathbb{M}$ тензоры кручения и неметричности или нет. Сравнение уравнений (17.17) с уравнением для геодезических (17.3) показывает, что экстремали являются геодезическими линиями по отношению к параллельному переносу, определяемому символами Кристоффеля. Это означает, что все свойства геодезических справедливы также и для экстремалей. В частности, канонический параметр вдоль экстремали инвариантен относительно преобразования координат. При произвольной параметризации уравнение для экстремалей имеет вид (17.5).

Из предложения 17.1.3 следует, что если метрика g на многообразии является гладкой функцией, то экстремали являются гладкими кривыми класса $\mathcal{C}^\infty$.

Через произвольную точку $x \in \mathbb{M}$ в направлении X^α проходит одна и только одна экстремаль, поскольку она определяется системой обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка (17.17). Это значит что любую экстремаль, которая заканчивается в некоторой точке $q \in \mathbb{M}$ можно продолжить. Действительно, если она заканчивается в точке $q \in \mathbb{M}$ при значении канонического параметра t_2, то существует единственная экстремаль, проходящая через q и имеющая тот же касательный вектор.

Определение. Экстремаль γ в $\mathbb{M}$ называется *полной*, если ее можно продолжить до бесконечного значения канонического параметра в обе стороны, $t \in (-\infty, \infty)$. □

Замечание. При продолжении экстремали возможны два случая. Во-первых, она может оказаться полной и иметь бесконечную длину. К полным экстремалям мы относим также и замкнутые экстремали, которые имеют конечную длину. Хотя их длина конечна, но канонический параметр продолжается до бесконечности, что соответствует бесконечному числу проходов вдоль экстремали. Во-вторых, при конечном значении канонического параметра экстремаль может попасть в такую точку многообразия, в которой один из геометрических инвариантов, например, скалярная кривизна, неопределен. Эта точка является сингулярной, и продолжение экстремали через нее не имеет смысла. □

Очевидно, что в (псевдо-)римановой геометрии экстремали и геодезические совпадают, поскольку совпадают уравнения (17.3) и (17.17) при $\Gamma_{\alpha\beta}{}^\gamma = \widetilde{\Gamma}_{\alpha\beta}{}^\gamma$. В общем случае экстремали и геодезические не совпадают и их поведение должно исследоваться отдельно. Критерий совпадения экстремалей и геодезических дает следующая

Теорема 17.2.2. *В аффинной геометрии* $(\mathbb{M}, g, \Gamma)$ *экстремали и геодезические совпадают тогда и только тогда, когда кручение и неметричность удовлетворяют соотношению*

$$\frac{1}{2}(T_{\alpha\beta\gamma} - T_{\gamma\alpha\beta}) = Q_{\alpha\beta\gamma}. \tag{17.19}$$

Доказательство. Экстремали и геодезические совпадают если и только если симметричная часть компонент связности равна символам Кристоффеля, $\Gamma_{\{\beta\gamma\}}{}^\alpha = \widetilde{\Gamma}_{\beta\gamma}{}^\alpha$. Тогда из (17.9) следует соотношение между тензором кручения и неметричностью:

$$T_{\alpha\beta\gamma} - T_{\gamma\alpha\beta} = -Q_{\beta\gamma\alpha} - Q_{\gamma\alpha\beta} + Q_{\alpha\beta\gamma}. \tag{17.20}$$

Сделав циклическую перестановку индексов $\alpha\beta\gamma \mapsto \beta\gamma\alpha$ и сложив полученное уравнение с (17.20) получим (17.19). Обратно. Подстановка тензора неметричности (17.19) в уравнение (17.20), как легко проверить, приводит к тождеству. □

Следствие. В геометрии Римана–Картана, где $Q = 0$, экстремали и геодезические совпадают тогда и только тогда, когда тензор кручения с опущенным индексом антисимметричен по всем трем индексам, $T_{\alpha\beta\gamma} = T_{[\alpha\beta\gamma]}$.

17.3 Интегрирование уравнений для экстремалей и геодезических

Уравнения для экстремалей и геодезических в ряде случаев имеют первые интегралы, наличие которых существенно упрощает их исследование. Начнем с универсального закона сохранения. Из сравнения уравнений (17.17) и (17.3) следует, что

экстремаль является геодезической линией для связности, определяемой символами Кристоффеля. Поскольку при параллельном переносе и в римановой геометрии, и в геометрии Римана–Картана длины векторов не меняется, то отсюда сразу следует, что длина вектора скорости $u = \{\dot{u}^\alpha\}$ вдоль экстремалей и геодезических постоянна.

Предложение 17.3.1. *В геометрии Римана–Картана и (псевдо-)римановой геометрии для уравнений геодезических (17.3) и экстремалей (17.17) существует первый интеграл*

$$C_0 = u^2 := \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta g_{\alpha\beta} = \mathsf{const}, \tag{17.21}$$

квадратичный по первым производным (скоростям).

Доказательство. Следствие предложения 17.1.4. Можно доказать и формально, продифференцировав уравнение (17.21) по каноническому параметру и воспользовавшись уравнением для геодезических или экстремалей. □

Рассмотрим как меняется квадрат длины касательного вектора $C_0(t) = \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta g_{\alpha\beta}$ вдоль геодезической линии в аффинной геометрии общего вида. Дифференцируя это соотношение по каноническому параметру и используя уравнение для геодезических, получим

$$\frac{du^2}{dt} = \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta \dot{x}^\gamma Q_{\alpha\beta\gamma}. \tag{17.22}$$

Отсюда следует, что $C_0 = \mathsf{const}$ при нулевом тензоре неметричности. В геометрии Римана–Картана–Вейля уравнение (17.22) принимает вид

$$\frac{du^2}{dt} = \dot{x}^\alpha W_\alpha C_0(t). \tag{17.23}$$

Первый интеграл (17.21) имеет кинематический характер и существует для любой экстремали и геодезической в (псевдо-)римановой геометрии и геометрии Римана–Картана. Если метрика имеет лоренцеву сигнатуру, то экстремали и геодезические можно разделить на три класса: времениподобные, $C_0 > 0$, изотропные или светоподобные, $C_0 = 0$, и пространственноподобные, $C_0 < 0$. Поскольку канонический параметр определен с точностью до аффинных преобразований, то для времениподобных и пространственноподобных экстремалей его всегда можно выбрать таким образом, что $C_0 = \pm 1$. В этом случае для времениподобных экстремалей канонический параметр называется *собственным временем*, а для пространственноподобных – *длиной* экстремали.

Замечание. Отметим, что, если некоторая кривая, не обязательно экстремаль или геодезическая, имеет определенный тип, то вдоль нее параметр всегда можно выбрать таким образом, что будет выполнено условие (17.21). Для изотропных кривых равенство (17.21), очевидно, выполняется. Допустим, что кривая имеет определенный тип в некоторой области, т.е. $C_0(t) \neq 0$. Тогда, вводя новый параметр $s(t)$, получим

$$C_0(t) = \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta g_{\alpha\beta},$$

где точка обозначает дифференцирование по s. Уравнение

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{|C_0|}$$

всегда имеет решение. Поэтому условие (17.21) будет выполнено относительно нового параметра s. □

Существование других первых интегралов связано с инфинитезимальными симметриями метрики, которые определяются векторными полями Киллинга.

Предложение 17.3.2. *Если метрика на многообразии имеет один или несколько векторов Киллинга $K_i = \{K_i^\alpha\}$, $i = 1, \ldots, m$, то для каждого вектора Киллинга имеется свой интеграл движения и для экстремалей, и для геодезических*

$$C_i = K_i^\alpha \dot{x}^\beta g_{\alpha\beta} = \mathsf{const}, \qquad i = 1, \ldots, m, \tag{17.24}$$

который линеен по компонентам скорости.

Доказательство. Дифференцируем соотношения (17.24) по каноническому параметру и используем уравнения (17.3) или (17.17). □

17.4 Вторая вариация уравнений для экстремалей

Допустим, что метрика положительно определена, т.е. многообразие риманово. Экстремали на (псевдо-)римановом многообразии $(\mathbb{M}, g)$ определяются действием (17.16). Тогда любая экстремаль удовлетворяет уравнениям Эйлера–Лагранжа (17.17). Это свойство является необходимым условием для того, чтобы экстремаль была линией наименьшей или наибольшей длины. Для того, чтобы найти достаточное условие реализации минимума или максимума функционалов (17.16) или (17.36) необходимо исследовать вторую вариацию функционала.

Напомним общее определение второй вариации. Пусть задана достаточно гладкая кривая $\gamma = \{x^\alpha(t)\} \in \mathbb{M}$, где $t \in [t_1, t_2]$, соединяющая две фиксированные точки многообразия $p = \gamma(t_1)$ и $q = \gamma(t_2)$. Рассмотрим функционал

$$S[\gamma] = \int_\gamma dt L(x, \dot{x}). \tag{17.25}$$

Допустим, что заданы два произвольных векторных поля $X, Y \in \mathcal{X}(\mathbb{M}, \gamma)$, которые определены на кривой γ и равны нулю в точках p и q. Обозначим через λ и μ два вещественных параметра.

Определение. Назовем *первой вариацией* функционала (17.25) частную производную

$$\frac{\partial}{\partial\lambda} S[\gamma + \lambda X]\Big|_{\lambda=0} = \int_\gamma dt \frac{\delta S}{\delta x^\alpha} X^\alpha, \tag{17.26}$$

Частная производная

$$G_\gamma[X, Y] = G_\gamma[Y, X] = \frac{\partial^2}{\partial\lambda\partial\mu} S_\gamma[\gamma + \lambda X + \mu Y]\Big|_{\lambda=0,\ \mu=0} \tag{17.27}$$

называется *второй вариацией* функционала (17.25). □

Поскольку векторное поле X произвольно, то равенство нулю первой вариации эквивалентно уравнениям Эйлера–Лагранжа, которые мы записываем в виде

$$\frac{\delta S}{\delta x^\alpha} = \frac{\partial L}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\alpha}\right) = 0. \tag{17.28}$$

Предложение 17.4.1. *Если кривая $\gamma = \{x^\alpha(t)\}$ удовлетворяет уравнениям Эйлера–Лагранжа (17.28), то вторая вариация функционала (17.25) имеет вид*

$$G_\gamma[X,Y] = -\int_{t_1}^{t_2} dt\, \left(J_{\alpha\beta}X^\beta\right) Y^\alpha, \tag{17.29}$$

где

$$J_{\alpha\beta}X^\beta = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial^2 L}{\partial\dot{x}^\alpha\partial\dot{x}^\beta}\dot{X}^\beta + \frac{\partial^2 L}{\partial\dot{x}^\alpha\partial x^\beta}X^\beta\right) - \frac{\partial^2 L}{\partial x^\alpha\partial\dot{x}^\beta}\dot{X}^\beta - \frac{\partial^2 L}{\partial x^\alpha\partial x^\beta}X^\beta. \tag{17.30}$$

Доказательство. Прямые вычисления с учетом выражения для первой вариации

$$G_\gamma[X,Y] = \frac{\partial}{\partial\mu}\int dt\left(\frac{\partial L}{\partial x^\beta}X^\beta + \frac{\partial L}{\partial\dot{x}^\beta}\dot{X}^\beta\right)\Big|_{\mu=0} =$$
$$= \int dt\left(\frac{\partial^2 L}{\partial x^\alpha\partial x^\beta}X^\beta Y^\alpha + \frac{\partial^2 L}{\partial\dot{x}^\alpha\partial x^\beta}X^\beta\dot{Y}^\alpha + \frac{\partial^2 L}{\partial x^\alpha\partial\dot{x}^\beta}\dot{X}^\beta Y^\alpha + \frac{\partial^2 L}{\partial\dot{x}^\alpha\partial\dot{x}^\beta}\dot{X}^\beta\dot{Y}^\alpha\right).$$

После интегрирования по частям двух слагаемых, пропорциональных $\dot{Y}^\alpha$, получаем (17.30). □

Определение. Линейный оператор $J = \{J^\alpha{}_\beta := g^{\alpha\gamma}J_{\gamma\beta}\}$,

$$J: \quad \mathcal{X}(\mathbb{M},\gamma) \to \mathcal{X}(\mathbb{M},\gamma),$$

который действует на векторные поля X, определенные вдоль кривой γ, по правилу (17.30), называется *оператором Якоби.* □

Теперь применим формулу (17.29) для вычисления второй вариации действия для экстремалей. Во-первых, отметим, что действие для экстремалей в виде (17.16) не является единственным. Рассмотрим действие

$$S = \int_\gamma dt\frac{1}{2}g_{\alpha\beta}\dot{x}^\alpha\dot{x}^\beta, \tag{17.31}$$

Предложение 17.4.2. *Действие (17.31) имеет тот же набор экстремалей, что и действие (17.16).*

Доказательство. Вариация действия (17.31) по $x^\alpha(t)$ приводит к уравнениям (17.17). □

В отличие от действия (17.16) функционал (17.31) не инвариантен относительно перепараметризации кривой. Это значит, что параметр t в действии (17.31) является каноническим.

Пусть $\gamma = \{x^\alpha(t)\}$, $t \in [t_1, t_2]$, – экстремаль и $u = \{\dot{x}^\alpha\}$ – вектор скорости экстремали.

Теорема 17.4.1. *Вторая вариация действия для экстремалей (17.31) имеет вид*

$$G_\gamma(X,Y) = -\int_{t_1}^{t_2} dt\left(\nabla_u^2 Y^\alpha + u^\delta u^\beta Y^\gamma \widetilde{R}_{\gamma\delta\beta}{}^\alpha\right) X_\alpha, \tag{17.32}$$

где

$$\begin{aligned}
\nabla_u Y^\alpha &= u^\beta \left(\partial_\beta Y^\alpha + \widetilde{\Gamma}_{\beta\gamma}{}^\alpha Y^\gamma\right) = \dot{Y}^\alpha + u^\beta \widetilde{\Gamma}_{\beta\gamma}{}^\alpha Y^\gamma, \\
\nabla_u^2 Y^\alpha &= u^\delta \nabla_\delta \left(\dot{Y}^\alpha + u^\beta \widetilde{\Gamma}_{\beta\gamma}{}^\alpha Y^\gamma\right) = \\
&= \ddot{Y}^\alpha + 2u^\beta \widetilde{\Gamma}_{\beta\gamma}{}^\alpha \dot{Y}^\gamma + u^\delta u^\epsilon Y^\gamma \left(\partial_\delta \widetilde{\Gamma}_{\epsilon\gamma}{}^\alpha - \widetilde{\Gamma}_{\delta\epsilon}{}^\beta \widetilde{\Gamma}_{\gamma\beta}{}^\alpha + \widetilde{\Gamma}_{\delta\gamma}{}^\beta \widetilde{\Gamma}_{\epsilon\beta}{}^\alpha\right)
\end{aligned} \tag{17.33}$$

– ковариантные производные вдоль вектора скорости и $\widetilde{R}_{\gamma\delta\beta}{}^\alpha$ *– тензор кривизны.*

Доказательство. Первая вариация действия (17.31) имеет вид

$$\left.\frac{\partial S[\gamma + \lambda X]}{\partial \lambda}\right|_{\lambda=0} = -\int_{t_1}^{t_2} dt \left(\ddot{x}^\alpha + \widetilde{\Gamma}_{\beta\gamma}{}^\alpha \dot{x}^\beta \dot{x}^\gamma\right) X_\alpha.$$

Поэтому

$$\begin{aligned}
&G_\gamma(X,Y) = \\
&= -\frac{\partial}{\partial\mu} \int_{t_1}^{t_2} dt \left(\ddot{x}^\alpha + \mu \ddot{Y}^\alpha + \widetilde{\Gamma}_{\beta\gamma}{}^\alpha \dot{x}^\beta \dot{x}^\gamma + 2\mu \widetilde{\Gamma}_{\beta\gamma}{}^\alpha \dot{x}^\beta \dot{Y}^\gamma + \mu \partial_\epsilon \widetilde{\Gamma}_{\gamma\delta}{}^\alpha \dot{x}^\beta \dot{x}^\gamma Y^\epsilon\right) X_\alpha = \\
&= -\int_{t_1}^{t_2} dt \left(\ddot{Y}^\alpha + 2\widetilde{\Gamma}_{\beta\gamma}{}^\alpha \dot{x}^\beta \dot{Y}^\gamma + \partial_\epsilon \widetilde{\Gamma}_{\gamma\delta}{}^\alpha \dot{x}^\beta \dot{x}^\gamma Y^\epsilon\right),
\end{aligned}$$

где мы оставили только линейные по μ слагаемые и учли, что вклад производной $\partial X_\alpha/\partial\mu$ равен нулю при выполнении уравнений для экстремалей $\nabla_u \dot{x}^\alpha = 0$. Исключив из полученного выражения производные $\ddot{Y}^\alpha$ и $\dot{Y}^\alpha$ с помощью второго из соотношений (17.33), получим (17.32). □

Ясно, что билинейная форма (17.32) симметрична, $G_\gamma(X,Y) = G_\gamma(Y,X)$, т.к. ковариантное дифференцирование можно перекинуть на вектор X, а тензор кривизны симметричен относительно перестановки пар индексов: $\widetilde{R}_{\alpha\beta\gamma\delta} = \widetilde{R}_{\gamma\delta\alpha\beta}$ (8.76).

Предположим, что метрика $g_{\alpha\beta}$ риманова. Тогда условие минимальности экстремали γ, соединяющей точки p и q, состоит в том, что квадратичная форма $G_\gamma(X,X)$ положительно определена для всех векторных полей, определенных на экстремали γ и обращающихся в нуль на ее концах.

Определение. Векторное поле X, которое определено на экстремали γ, соединяющей точки p и q, называется *якобиевым*, если оно удовлетворяет *уравнению Якоби*

$$J^\alpha{}_\beta X^\beta = 0, \tag{17.34}$$

где J – оператор Якоби (17.30), и обращается в нуль на концах p и q. Точки p и q называются *сопряженными* вдоль экстремали γ, если существует ненулевое якобиево поле X вдоль γ. □

Для действия (17.31) уравнение Якоби принимает вид

$$\nabla_u^2 X^\alpha + u^\delta u^\beta X^\gamma \widetilde{R}_{\gamma\delta\beta}{}^\alpha = 0. \tag{17.35}$$

Предложение 17.4.3. *Билинейная форма* $G_\gamma(X,Y)$ *невырождена тогда и только тогда, когда концевые точки* p *и* q *экстремали* γ *не сопряжены вдоль* γ.

Доказательство. Пусть X и Y произвольные векторные поля вдоль γ, которые обращаются в нуль в концевых точках. Напомним, что билинейная форма $G_\gamma(X,Y)$ называется невырожденной, если не существует такого векторного поля X, что $G_\gamma(X,Y) = 0$ для всех Y. Если поле X якобиево, то $G_\gamma(X,Y) = 0$ при любом Y.

Обратно. Допустим, что для вектора X выполнено уравнение $G_\gamma(X,Y) = 0$ для всех Y. Положим $Y = f(t)JX$, где функция $f(t)$ неотрицательна и обращается в нуль на концах экстремали. Тогда из выражения для второй вариации (17.29) имеем

$$G_\gamma(X,Y) = -\int_{t_1}^{t_2} dt\, fg(JX,JX) = 0.$$

Отсюда следует, что $JX = 0$. Поэтому концы сопряжены. □

Теперь сформулируем необходимое условие минимальности экстремали.

Теорема 17.4.2. *Если экстремаль γ, соединяющая точки p и q, содержит внутри себя пару сопряженных точек p' и q', то она не является минимальной.*

Доказательство. См., например, [**?**]. □

Теорема 17.4.3. *Для достаточно малых отрезков $l = [t_1, t_2]$ экстремали задают минимум функционала (17.31). Поэтому каждая экстремаль является кратчайшей линией в классе дважды дифференцируемых кривых, соединяющих достаточно близкие точки p и q.*

Доказательство. Экстремаль γ реализует минимум функционала (17.31), если форма $G_\gamma(X,X)$ положительна для всех ненулевых векторных полей $X \in \mathcal{X}(\mathbb{M},\gamma)$, которые обращаются в нуль на концах p и q. Из формулы для второй вариации (17.32) следует, что

$$\begin{aligned} G_\gamma(X,X) &= -\int_p^q dt \left[(\nabla_u^2 X, X) - u^\alpha X^\beta u^\gamma X^\delta \widetilde{R}_{\alpha\beta\gamma\delta}\right] \\ &= \int_p^q dt \left[(\nabla_u X, \nabla_u X) + u^\alpha X^\beta u^\gamma X^\delta \widetilde{R}_{\alpha\beta\gamma\delta}\right], \end{aligned}$$

где мы проинтегрировали первое слагаемое по частям с учетом равенств $X(p) = X(q) = 0$. Можно доказать, что для достаточно коротких экстремалей справедлива оценка

$$\left|\int_p^q dt\, u^\alpha X^\beta u^\gamma X^\delta \widetilde{R}_{\alpha\beta\gamma\delta}\right| = \mathsf{O}(l) \int_p^q dt (\nabla_u X, \nabla_u X)$$

при $l \to 0$. Поскольку квадратичная форма $(\nabla_u X, \nabla_u X)$ положительна, то для достаточно коротких экстремалей положительна и форма $G_\gamma(X,X)$. □

17.5 Уравнение Гамильтона–Якоби для экстремалей

Уравнения для экстремалей $\gamma = x(t)$ вытекают из вариационного принципа для действия (17.16). Важным обстоятельством является то, что уравнения для экстремалей

являются уравнениями Эйлера–Лагранжа также и для другого действия (17.31). А именно, рассмотрим действие

$$S_{\rm m} = \int_a^b dt L_{\rm m}, \qquad L_{\rm m} = -\frac{1}{2} m g_{\alpha\beta} \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta, \tag{17.36}$$

где точка обозначает дифференцирование по каноническому параметру t и $m = \mathsf{const}$ – постоянная, имеющая физический смысл массы точечной частицы. Это действие совпадает с (17.31) при $m = -1$. Действие (17.36) приводит к уравнениям для экстремалей, в которых переменная t уже является каноническим параметром. Это согласуется с тем обстоятельством, что рассмотренное действие инвариантно относительно общих преобразований координат и сдвигов параметра t. Для сравнения напомним, что исходное действие для экстремалей (17.16) инвариантно относительно произвольных преобразований параметра t вдоль экстремали.

Действие (17.36) имеет простой физический смысл. Предположим, что метрика имеет лоренцеву сигнатуру и зафиксируем временну́ю калибровку (**??**)

$$g_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & g_{\mu\nu} \end{pmatrix}, \qquad \mathsf{sign}\, g_{\mu\nu} = (- \ldots -). \tag{17.37}$$

Символы Кристоффеля для этой метрики были вычислены ранее (**??**). Предположим также, что пространственная часть метрики $g_{\mu\nu}$ не зависит от времени x^0. Тогда уравнения для экстремалей расщепляются:

$$\ddot{x}^0 = 0, \tag{17.38}$$

$$\ddot{x}^\mu = -\widetilde{\Gamma}_{\nu\rho}{}^{\mu} \dot{x}^\nu \dot{x}^\rho. \tag{17.39}$$

Из первого уравнения следует, что, не ограничивая общности, канонический параметр t можно отождествить с временем $x^0 = ct$, где $c = \mathsf{const}$ – скорость света. Тогда лагранжиан (17.36) имеет прямой физический смысл – с точностью до аддитивной постоянной это кинетическая энергия точечной частицы, которая движется в римановом пространстве со статической метрикой $g_{\mu\nu}(x)$. Несмотря на то, что потенциальная энергия частицы равна нулю, ее траекториями уже не будут прямые линии, если метрика нетривиально зависит от точки пространства.

Вернемся к исходному действию (17.36) до фиксирования временно́й калибровки. Переформулируем эту лагранжеву систему на гамильтоновом языке, рассматривая канонический параметр t в качестве параметра эволюции. Под временем мы подразумеваем координату x^0 и, соответственно, предполагаем, что $g_{00} > 0$. Кроме этого мы предполагаем, что все сечения постоянного времени $x^0 = \mathsf{const}$ пространственноподобны. Импульс, сопряженный координатам x^α, и гамильтониан системы равны

$$\begin{aligned} p_\alpha &= \frac{\partial L_{\rm m}}{\partial \dot{x}^\alpha} = -m g_{\alpha\beta} \dot{x}^\beta, \\ H_{\rm m} &= -\frac{1}{2m} g^{\alpha\beta} p_\alpha p_\beta. \end{aligned} \tag{17.40}$$

Для действия (17.36) связи на канонические переменные отсутствуют, т.к. метрика рассматривается как внешнее поле и варьирование по ней не проводится. Соответствующие уравнения Гамильтона (уравнения движения) имеют вид

$$\dot{x}^\alpha = [x^\alpha, H_{\rm m}] = -\frac{1}{m} g^{\alpha\beta} p_\beta, \tag{17.41}$$

$$\dot{p}_\alpha = [p_\alpha, H_{\rm m}] = \frac{1}{2m} \partial_\alpha g^{\beta\gamma} p_\beta p_\gamma. \tag{17.42}$$

Дифференцируя первое из этих уравнений по каноническому параметру и исключая импульсы p_α и производные $\dot{p}_\alpha$ с помощью уравнений движения, нетрудно проверить, что система уравнений (17.41), (17.42) эквивалентна системе уравнений для экстремалей (17.17). Тем самым мы переписали уравнения для экстремалей в виде канонической системы уравнений движения.

Ранее было доказано, что длина касательного вектора к экстремали постоянна (17.21). В гамильтоновом форме это утверждение имеет вид

$$C_0 = \frac{1}{m^2} g^{\alpha\beta} p_\alpha p_\beta = \mathsf{const}. \tag{17.43}$$

По своей физической сути это есть закон сохранения энергии точечной частицы. В данном случае только кинетической, т.к. потенциальная энергия тождественно равна нулю.

В дальнейшем нам понадобятся гамильтоновы уравнения для нулевых экстремалей, где в качестве параметра эволюции выбрано время x^0, а не канонический параметр t. Они получаются следующим образом. Для нулевых экстремалей интеграл движения (17.43) принимает вид

$$g^{00} p_0^2 + 2 g^{0\mu} p_0 p_\mu + g^{\mu\nu} p_\mu p_\nu = 0.$$

Это квадратное уравнение решается относительно p_0

$$p_0 = N^\mu p_\mu \pm N\hat{p}, \qquad \hat{p} = \sqrt{-\hat{g}^{\mu\nu} p_\mu p_\nu}, \tag{17.44}$$

где $N = 1/\sqrt{g^{00}} \neq 0$ и $N^\mu = \hat{g}^{\mu\nu} g_{0\nu}$ – функции хода и сдвига, используемые в АДМ параметризации метрики (**??**), а $\hat{g}^{\mu\nu}$ – метрика, обратная к пространственной метрике $g_{\mu\nu}$. Если частица движется, то $p_\mu \neq 0$ и $\hat{p} \neq 0$. Тогда из уравнения (17.41) находим производную координаты x^0 по каноническому параметру

$$\dot{x}^0 = \mp \frac{\hat{p}}{mN}.$$

Отсюда следует, что выбор знака в (17.44) соответствует выбору взаимной ориентации канонического параметра t и времени x^0. После этого канонические уравнения (17.41), (17.42) можно записать в виде системы уравнений движения только для пространственных координат и импульсов

$$\begin{aligned} \partial_0 x^\mu &= \frac{\dot{x}^\mu}{\dot{x}^0} = -N^\mu \pm \frac{N \hat{g}^{\mu\nu} p_\nu}{\hat{p}}, \\ \partial_0 p_\mu &= \frac{\dot{p}_\mu}{\dot{x}^0} = \partial_\mu N^\nu p_\nu \pm \partial_\mu N \hat{p} \mp \frac{N \partial_\mu \hat{g}^{\nu\rho} p_\nu p_\rho}{2\hat{p}}. \end{aligned} \tag{17.45}$$

Таким образом, из системы канонических уравнений (17.41), (17.42) для нулевых экстремалей мы исключили в явном виде канонический параметр t и нулевую компоненту импульса p_0.

Предложение 17.5.1. *Система уравнений для пространственных компонент канонически сопряженных переменных x^μ и p_μ (17.45) является гамильтоновой. При этом эволюция системы уравнений рассматривается по отношению к времени x^0, а гамильтонианом является выражение для p_0 (17.44).*

Доказательство. Прямое сравнение уравнений

$$\partial_0 x^\mu = [x^\mu, p_0],$$
$$\partial_0 p_\mu = [p_\mu, p_0].$$ □

Число гамильтоновых уравнений движения, определяющих экстремаль, сократилось с $2n$ в (17.41), (17.42) до $2n-2$ в (17.45). Это достигнуто за счет использования интеграла движения (17.43) и выбора специального параметра эволюции x^0.

Продолжим анализ гамильтоновой формы уравнений для экстремалей. Функция действия $S_{\mathrm{m}}(x,t)$ (20.31) удовлетворяет уравнению Гамильтона–Якоби (20.33)

$$\frac{\partial S_{\mathrm{m}}}{\partial t} - \frac{1}{2m} g^{\alpha\beta} \frac{\partial S_{\mathrm{m}}}{\partial x^\alpha} \frac{\partial S_{\mathrm{m}}}{\partial x^\beta} = 0. \tag{17.46}$$

Поскольку гамильтониан (17.40) не зависит от параметра t явно, то функция действия имеет вид

$$S_{\mathrm{m}}(x^\alpha, t) = \frac{mC_0}{2} t + W_{\mathrm{m}}(x^\alpha), \qquad C_0 = \mathsf{const},$$

где укороченная функция действия W_{m} удовлетворяет укороченному уравнению Гамильтона–Якоби

$$g^{\alpha\beta} \frac{\partial W_{\mathrm{m}}}{\partial x^\alpha} \frac{\partial W_{\mathrm{m}}}{\partial x^\beta} = m^2 C_0. \tag{17.47}$$

Так как $p_\alpha = \partial W_{\mathrm{m}}/\partial x^\alpha$, то постоянная C_0 равна длине касательного вектора к экстремали

$$g_{\alpha\beta} \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta = \frac{1}{m^2} g^{\alpha\beta} p_\alpha p_\beta = C_0.$$

Отметим, что для экстремалей нулевой длины $C_0 = 0$, и укороченное действие совпадает с полным $W_{\mathrm{m}} = S_{\mathrm{m}}$.

17.6 Волновое уравнение

Пусть задано многообразие $\mathbb{M}$, $\mathsf{dim}\,\mathbb{M} = n$, с метрикой лоренцевой сигнатуры, $\mathsf{sign}\, g_{\alpha\beta} = (+ - \ldots -)$. Рассмотрим волновое уравнение для скалярного поля $\varphi(x) \in \mathcal{C}^2(\mathbb{M})$:

$$g^{\alpha\beta} \widetilde{\nabla}_\alpha \widetilde{\nabla}_\beta \varphi = g^{\alpha\beta} \partial_\alpha \partial_\beta \varphi - g^{\alpha\beta} \widetilde{\Gamma}_{\alpha\beta}{}^\gamma \partial_\gamma \varphi = 0, \tag{17.48}$$

или, эквивалентно,

$$\frac{1}{\sqrt{|g|}} \partial_\alpha \left(\sqrt{|g|} g^{\alpha\beta} \partial_\beta \varphi \right) = 0, \qquad g = \mathsf{det}\, g_{\alpha\beta},$$

где мы воспользовались тождеством (8.61). Это – линейное дифференциальное уравнение в частных производных второго порядка с переменными коэффициентами гиперболического типа, т.к. метрика имеет лоренцеву сигнатуру. Важным понятием в теории дифференциальных уравнений является характеристика (или характеристическая поверхность), которая для дифференциальных уравнений второго порядка определяется квадратичной формой $\sqrt{|g|} g^{\alpha\beta}$, задающей вторые производные от неизвестной функции $\varphi(x)$. В рассматриваемом случае квадратичная форма вторых производных задается обратной метрикой $g^{\alpha\beta}$.

Определение. *Характеристикой* гиперболического дифференциального уравнения второго порядка (17.48) называется $\mathcal{C}^1$ гиперповерхность в многообразии $\mathbb{M}$, которая задается уравнением

$$W(x) = 0, \tag{17.49}$$

где функция W на поверхности $W = 0$ удовлетворяет условию

$$g^{\alpha\beta}\partial_\alpha W \partial_\beta W\big|_{W=0} = 0. \tag{17.50}$$

При этом требуется, чтобы по крайней мере одна из частных производных $\partial_\alpha W$ была отлична от нуля на гиперповерхности (17.49). □

Отметим, что в определении характеристики важна гиперболичность, т.к. при положительно или отрицательно определенной метрике уравнение (17.50) не имеет вещественных решений. Это условие для характеристики совпадает с укороченным уравнением Гамильтона–Якоби для экстремалей (17.47) при $C_0 = 0$. Это значит, что характеристика соответствует укороченной функции действия для экстремалей нулевой длины. Напомним, что для экстремалей нулевой длины укороченная и полная функции действия совпадают. Однако условие (17.50) является более слабым, т.к. мы требуем выполнения (17.50) только на характеристике, а не во всем пространстве-времени.

Из определения характеристик следует, что они являются изотропными гиперповерхностями, рассмотренными в разделе **??**. Метрика, индуцированная на таких поверхностях, по-определению, вырождена, и все нормальные векторы изотропны (теорема **??**).

Характеристики обладают следующим важным свойством. Допустим, что каждая гиперповерхность $W(x) - y^0 = 0$, где $-\epsilon < y^0 < \epsilon$, $\epsilon > 0$, есть характеристика уравнения (17.48). Другими словами, мы требуем, чтобы уравнение характеристик (17.50) выполнялось не только на самой характеристике, но и в некоторой ее окрестности. Поскольку на каждой характеристике по крайней мере одна из частных производных $\partial_\alpha W$ отлична от нуля, то это семейство заполняет некоторую достаточно малую область, через каждую точку которой проходит одна и только одна характеристика. Тогда можно перейти в новую систему координат $x^\alpha \to y^\alpha(x)$, где $y^0 = W$. При этом обратная метрика преобразуется по тензорному закону

$$g^{\alpha\beta}(y) = \frac{\partial y^\alpha}{\partial x^\gamma}\frac{\partial y^\beta}{\partial x^\delta} g^{\gamma\delta}(x).$$

Отсюда следует, что в новой системе координат $g^{00} = 0$. Это обстоятельство имеет важное следствие. Рассмотрим задачу Коши для волнового уравнения (17.48) в новой системе координат. Пусть на характеристике заданы начальные условия

$$\varphi|_{y^0=0} = \varphi_0, \qquad \partial_0\varphi|_{y^0=0} = \varphi_1,$$

где φ_0 и φ_1 – достаточно гладкие функции от "пространственных" координат $\{y^\mu\} = (y^1, \ldots, y^{n-1})$. По начальным данным на характеристике при $y^0 = 0$ можно вычислить все частные производные по "пространственным" координатам $\partial_\mu\varphi, \partial^2_{\mu\nu}\varphi, \ldots$ и все частные производные с одной производной по "времени" $\partial^2_{0\mu}\varphi, \partial^3_{0\mu\nu}\varphi, \ldots$. Для определения эволюции скалярного поля необходимо знать вторые производные по "времени" $\partial^2_{00}\varphi$. Если задача Коши корректно поставлена, то вторые производные

по "времени" находятся из волнового уравнения. На характеристике это не так, поскольку $g^{00} = 0$. Вместо определения второй производной $\partial^2_{00}\varphi$ волновое уравнение накладывает ограничение (связь) на возможный выбор начальных условий:

$$g^{0\mu}\partial_\mu\varphi_1 - g^{\alpha\beta}\widetilde{\Gamma}_{\alpha\beta}{}^0\varphi_1 - g^{\alpha\beta}\widetilde{\Gamma}_{\alpha\beta}{}^\mu\partial_\mu\varphi_0 = 0.$$

Для нахождения вторых производных $\partial^2_{00}\varphi$ волновое уравнение нужно продифференцировать по y^0. Однако после этой процедуры вторые производные не будут определены однозначно. Таким образом, при постановке задачи Коши на характеристике, во-первых, начальные данные нельзя задавать произвольно, и, во-вторых, волновое уравнение не определяет эволюцию поля единственным образом. Тем самым задача Коши на характеристике не допускает корректную постановку. Выше мы взяли слова "пространственный" и "время" в кавычки, т.к. характеристика является изотропной поверхностью и не может быть пространственноподобной, а координата y^0 светоподобна и не может играть роль времени.

Поскольку вторые производные от неизвестной функции по одну сторону характеристики не определяются уравнением (17.48) и значениями функции φ по другую сторону от характеристики, то они могут иметь разрывы. Это значит, что решения уравнения (17.48) могут иметь разрывы производных, которые распространяются в пространстве вдоль характеристик.

Для корректной постановки задачи Коши для волнового уравнения (17.48) на многообразии с метрикой лоренцевой сигнатуры по x^0 координаты выбираются таким образом, что $g^{00} > 0$, а сечение $x^0 = 0$ – пространственноподобным. Поскольку пространственноподобное сечение не может быть изотропным, то оно не может быть также характеристикой. Оно не может также касаться характеристики, потому что в этом случае один из касательных векторов был бы изотропным, что противоречит отрицательной определенности метрики, индуцированной на гиперповерхности.

Замечание. В разделе 5.2 мы определили время x^0 как такую координату, что касательное векторное поле ∂_0 является времениподобным. Это соответствует условию $g_{00} > 0$. Отметим, что условия $g_{00} > 0$ и $g^{00} > 0$ неэквивалентны. □

Уравнение характеристик (17.50) представляет собой нелинейное дифференциальное уравнение в частных производных первого порядка. В общем случае оно очень сложно и, как правило, имеет решения с особыми точками. Характеристика, например, может быть не гладкой поверхностью.

Относительно частной производной по времени $\partial_0 W$ уравнение характеристик является алгебраическим квадратным уравнением, и имеет не более двух вещественных корней. Допустим, что метрика имеет лоренцеву сигнатуру и $g_{00} > 0$, тогда оно имеет два вещественных корня разных знаков

$$\partial_0 W = N^\mu\partial_\mu W \pm N\sqrt{-\hat{g}^{\mu\nu}\partial_\mu W\partial_\nu W}, \tag{17.51}$$

где использована АДМ параметризаций метрики (**??**). Здесь мы предполагаем, что все сечения $x^0 = \mathsf{const}$ являются пространственноподобными и, следовательно, метрика $g_{\mu\nu}$ и ее обратная $\hat{g}^{\mu\nu}$ отрицательно определены. Обозначим $p_\mu = \partial_\mu W$. Введем функцию Гамильтона в фазовом пространстве $\{x^\mu, p_\mu\}$ (см. главу 20)

$$H(x^0, x^\mu, p_\mu) = -N^\mu p_\mu \mp N\sqrt{-\hat{g}^{\mu\nu}p_\mu p_\nu}, \tag{17.52}$$

где зависимость от координат x^0 и x^μ входит через метрику $g^{\alpha\beta} = g^{\alpha\beta}(x^0, x^\mu)$, и время x^0 рассматривается в качестве параметра эволюции.

Определение. Траектории $x^\mu(x^0)$ в конфигурационном пространстве, соответствующем гамильтониану (17.52), называются *бихарактеристиками* волнового уравнения (17.48). □

Предложение 17.6.1. *Бихарактеристики волнового уравнения (17.48) совпадают с нулевыми экстремалями для метрики $g_{\alpha\beta}$.*

Доказательство. Следствие предложения 17.5.1. □

Единственное отличие бихарактеристик и нулевых экстремалей сводится к тому, что экстремали определяются в параметрическом виде $x^\alpha(t)$, а бихарактеристики задаются в виде явной зависимости координат $x^\mu(x^0)$.

Гамильтониан (17.52) совпадает с временно́й компонентой импульса (17.44). Функция $W(x^0, x^\mu)$, определяющая характеристику, является действием для бихарактеристик.

Замечание. Характеристики и бихарактеристики имеют физическую интерпретацию. Из теории дифференциальных уравнений известно, что если в момент времени x^0 в точке $\boldsymbol{x}$ произошло некоторое возмущение решения φ волнового уравнения (17.48), то оно будет распространяться в виде волны. При этом сечения $x^0 = \mathsf{const}$ соответствующей характеристической поверхности (характеристического коноида с вершиной в точке $\{x^0, \boldsymbol{x}\}$) являются фронтом волны в момент времени x^0, а бихарактеристики – это лучи, вдоль которых распространяется волна. □

Предложение 17.6.2. *Если бихарактеристика касается характеристики в некоторой точке, то она целиком лежит на этой характеристике.*

Доказательство. Для нулевых экстремалей лагранжиан можно выбрать в виде

$$L = \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta$$

и равен нулю $L = 0$. Следовательно, функция действия $S(x,t)$ и укороченная функция действия $W = S + Et$ равны нулю, т.к. для нулевых экстремалей $E = 0$. Тем самым для бихарактеристик $W = 0$ и они целиком лежат на какой-либо из характеристик. □

17.7 Приближение эйконала

Посмотрим на волновое уравнение (17.48) с другой точки зрения. Любое решение волнового уравнения (17.48) можно представить в виде[1]

$$\varphi = A\, \mathsf{e}^{iW/\hbar}, \tag{17.53}$$

где $A(x) \neq 0$ и $W(x)$ – амплитуда и фаза волны. Тогда волновое уравнение примет вид

$$g^{\alpha\beta}\frac{\partial^2_{\alpha\beta}A}{A} + \frac{1}{\hbar}2ig^{\alpha\beta}\frac{\partial_\alpha A}{A}\partial_\beta W + \frac{1}{\hbar}ig^{\alpha\beta}\partial^2_{\alpha\beta}W - \\ - \frac{1}{\hbar^2}g^{\alpha\beta}\partial_\alpha W \partial_\beta W - g^{\alpha\beta}\Gamma_{\alpha\beta}{}^\gamma\left(\frac{\partial_\gamma A}{A} + \frac{1}{\hbar}i\partial_\gamma W\right) = 0.$$

[1] В этом представлении $\hbar \in \mathbb{R}$ рассматривается, как вещественный параметр. Обозначение продиктовано аналогией с квантовой механикой, где $\hbar$ – это постоянная Планка.

Тогда в пределе $\hbar \to 0$ волновое уравнение сводится к уравнению на фазу

$$g^{\alpha\beta}\partial_\alpha W \partial_\beta W = 0. \tag{17.54}$$

Оно совпадает с уравнением для характеристик (17.50), однако должно выполняться во всем пространстве-времени.

Определение. Для волновых решений предел $\hbar \to 0$ означает, что относительное изменение амплитуды мало, по сравнению с изменением фазы. Этот предел называют *приближением эйконала*. Фазу $W(x)$ называют *эйконалом*, а уравнение (17.54) – *уравнением эйконала*. В электродинамике это приближение называют также приближением *геометрической оптики*. Для плоских волн оно соответствует высоким частотам излучения и маленьким длинам волн. □

Параметр $\hbar$ был введен с единственной целью – определить эйкональное приближение. Поэтому в дальнейшем, для краткости, мы включим его в определение фазы $W/\hbar \to W$.

Пример 17.7.1. Рассмотрим волновое уравнение в трехмерном пространстве-времени Минковского $\mathbb{R}^{1,2}$ в декартовой системе координат $\{x^\alpha\} = \{x^0, x^1, x^2\}$

$$\partial_0^2\varphi - \partial_1^2\varphi + \partial_2^2\varphi = 0.$$

В данном примере трехмерное пространство Минковского выбрано для наглядности. Все следующие формулы естественным образом переносятся на пространство Минковского произвольной размерности $\mathbb{R}^{1,n-1}$.

Уравнение характеристик имеет вид

$$\big((\partial_0 W)^2 - (\partial_1 W)^2 - (\partial_2 W)^2\big)\big|_{W=0} = 0. \tag{17.55}$$

Это уравнение допускает два семейства характеристик (изотропные поверхности в примере **??**).

Первое семейство характеристик

$$W = (x^0 - x_0^0)^2 - (x^1 - x_0^1)^2 - (x^2 - x_0^2)^2 = 0,$$

где $x_0 = \{x_0^0, x_0^1, x_0^2\}$ – три произвольных вещественных параметра (координаты точки x_0). Нетрудно проверить, что

$$(\partial_0 W)^2 - (\partial_1 W)^2 - (\partial_2 W)^2 = 4W.$$

Это значит, что уравнение характеристик (17.55) выполняется только на характеристиках, а не во всем пространстве-времени. Для каждой точки x_0 характеристики первого семейства состоят из двух конусов (прошлого, $x^0 < x_0^0$, и будущего, $x^0 > x_0^0$) с общей вершиной в точке x_0, как показано на рис. 17.3,*a*.

Рис. 17.3: Характеристиками первого семейства являются конусы с вершинами в произвольной точке x_0 (a). Характеристиками второго семейства являются плоскости, касательные к конусам (b).

Второе семейство характеристик

$$W = x^0 + k_\mu x^\mu - C, \qquad \mu = 1, 2$$

параметризуется единичным вектором в пространстве $|\boldsymbol{k}| = \sqrt{k_1^2 + k_2^2} = 1$ и постоянной C. В этом случае уравнение характеристик выполняется во всем пространстве, а не только на поверхности $W = 0$. Характеристики второго семейства параметризуются двумя параметрами, и представляют собой плоскости, перпендикулярные ковектору $(1, k_1, k_2)$ нулевой длины и пересекающие плоскость $x^0 = 0$ по прямой $k_\mu x^\mu = C$. Эти характеристики касаются характеристик первого семейства (конусов).

Напомним, что нулевыми экстремалями в пространстве Минковского являются прямые и только они с нулевым касательным вектором. Мы видим, что если произвольная нулевая экстремаль (или бихарактеристика) в некоторой точке касается характеристики, то она целиком принадлежит этой характеристике. Кроме того, через каждую регулярную точку характеристики (исключение составляют вершины конусов первого семейства) проходит одна и только одна нулевая экстремаль. Поэтому нулевые экстремали полностью заметают характеристические поверхности. Отметим, что одна и та же нулевая экстремаль может принадлежать разным характеристическим конусам.

Из уравнения для характеристик (17.55) можно найти производную по времени

$$\partial_0 W = \pm\sqrt{(\partial_1 W)^2 + (\partial_2 W)^2}.$$

Отсюда следует выражение для гамильтониана, определяющего бихарактеристики (траектории)

$$H = \pm\sqrt{p_1^2 + p_2^2} = \pm\hat{p}.$$

Уравнения движения для бихарактеристик имеют вид

$$\begin{aligned} &\dot{x}^\mu = \pm\frac{p^\mu}{\hat{p}}, \\ &\dot{p}_\mu = 0, \qquad \Rightarrow \quad p_\mu = \mathsf{const}, \end{aligned}$$

где точка обозначает дифференцирование по времени $t = x^0$. Отсюда следует, что импульс бихарактеристик постоянен, а траектории – это прямые $x^\mu = \pm n^\mu t + x_0^\mu$, проходящие через все точки пространства $x_0 \in \mathbb{R}^2$ во всех возможных направлениях $n^\mu = p^\mu/\hat{p}$. Поскольку пространственный вектор n^μ имеет единичную длину, то бихарактеристики в пространстве-времени совпадают с нулевыми экстремалями.

В пространстве Минковского уравнение (17.48) допускает решение в виде плоской волны

$$\varphi = A_0\, \mathsf{e}^{ik_\alpha x^\alpha} = A_0\, \mathsf{e}^{i(\omega t - \boldsymbol{kx})}, \qquad A_0 = \mathsf{const} \neq 0,$$

где $\boldsymbol{kx} = -k_\mu x^\mu$. Сравнение этого выражения с (17.53) дает выражения для *частоты* ω и *волнового вектора* $\boldsymbol{k}$ (в рассматриваемом примере мы, для краткости, полагаем $\hbar = 1$)

$$\omega = k_0 = \partial_0 W, \qquad \boldsymbol{k} = \{\partial_1 W, \partial_2 W\}$$

Тогда волновое уравнение (17.50) сводится к соотношению между частотой и волновым вектором

$$g^{\alpha\beta} k_\alpha k_\beta = \omega^2 - \boldsymbol{k}^2 = 0,$$

где $\boldsymbol{k}^2 = -g^{\mu\nu} k_\mu k_\nu$. Для плоской волны в пространстве Минковского эйконал $W(x) = x^\alpha k_\alpha$ является линейной функцией от координат, а частота и волновой вектор постоянны. □

В рассмотренном примере плоских волн зависимость эйконала от координат была линейной. В общем случае эта зависимость является более сложной. Тогда частота и волновой вектор определяются соотношениями

$$\omega = \partial_0 W, \qquad k_\mu = \partial_\mu W, \tag{17.56}$$

и зависят от точки пространства-времени. Уравнение эйконала (17.54) определяет зависимость частоты от волнового вектора

$$g^{00}\omega^2 + 2g^{0\mu}\omega k_\mu + g^{\mu\nu}k_\mu k_\nu = 0.$$

Эта зависимость называется *дисперсией*, а производная

$$v_{\mathrm{g}}^\mu = \frac{\partial\omega}{\partial k_\mu}$$

называется *групповой скоростью*. Сравнение уравнения, определяющего дисперсию, с (17.51) показывает, что частота ω и волновой вектор k_μ по сути дела совпадают, соответственно, с гамильтонианом и импульсами бихарактеристик волнового уравнения.

17.8 Гармонические координаты

Для исследования волнового уравнения (17.48) на многообразии $\mathbb{M}$, $\dim\mathbb{M} = n$, с метрикой лоренцевой сигнатуры $g_{\alpha\beta}$ удобно использовать гармонические координаты. Как отмечалось в разделе 2.5 функции перехода к новой системе координат являются скалярными полями на $\mathbb{M}$. Поэтому рассмотрим волновое уравнение (17.48) и допустим, что в некоторой области $\mathbb{U} \subset \mathbb{M}$ оно имеет n функционально независимых решений. Пронумеруем эти решения φ^{A}, $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \ldots = 0, 1, \ldots, n-1$. Тогда в области $\mathbb{U}$ решения волнового уравнения задают систему координат $x^{\mathrm{A}} = \varphi^{\mathrm{A}}$, которая называется *гармонической*.

Замечание. Эта система координат была введена Т. де Дондером [**?**] и К. Ланцосом [**?**] и получила физическую интерпретацию в работах В. А. Фока [**?**, **?**]. □

Гармоническая система координат обладает следующим важным свойством.

Предложение 17.8.1. *Система координат является гармонической тогда и только тогда, когда выполнены условия*

$$\partial_{\mathrm{A}}(\sqrt{|g|}g^{\mathrm{AB}}) = 0 \quad\Leftrightarrow\quad \Xi^{\mathrm{C}} = g^{\mathrm{AB}}\Gamma_{\mathrm{AB}}{}^{\mathrm{C}} = 0, \tag{17.57}$$

где $g = \det g_{\mathrm{AB}}$.

Доказательство. Справедливо тождество

$$\partial_\alpha\left[\det\left(\frac{\partial x}{\partial\varphi}\right)\frac{\partial\varphi^{\mathrm{A}}}{\partial x^\beta}\right]\frac{\partial x^\alpha}{\partial\varphi^{\mathrm{A}}} = 0,$$

где $\partial x/\partial\varphi$ – обратная матрица Якоби преобразования координат (2.20). Это тождество доказывается прямым дифференцированием с учетом правила дифференцирования определителя матрицы (**??**). С учетом доказанного равенства и правила

преобразования координат имеем

$$\partial_{\mathrm{A}}(\sqrt{|g|}g^{\mathrm{AB}}) = \frac{\partial x^\gamma}{\partial \varphi^{\mathrm{A}}}\partial_\gamma\left[\sqrt{|\overset{\circ}{g}|}\,\det\left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}\right)\frac{\partial \varphi^{\mathrm{A}}}{\partial x^\alpha}\frac{\partial \varphi^{\mathrm{B}}}{\partial x^\beta}g^{\alpha\beta}\right] =$$

$$= \det\left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}\right)\partial_\alpha\left(\sqrt{|\overset{\circ}{g}|}g^{\alpha\beta}\partial_\beta\varphi^{\mathrm{B}}\right) = 0,$$

где $\overset{\circ}{g} = \det g_{\alpha\beta}$. Таким образом, из гармоничности координат следует первое равенство (17.57) и наоборот. Эквивалентность равенств (17.57) между собой проверяется прямой проверкой. □

Уравнения на метрику (17.57) называются *условиями гармоничности*. В дальнейшем будем, как обычно, обозначать гармоническую систему координат снова греческими буквами x^α, предполагая, что условия гармоничности (17.57) выполнены. В гармонической системе координат оператор Лапласа–Бельтрами, действующий на функцию f, принимает простой вид

$$\triangle f = g^{\alpha\beta}\partial^2_{\alpha\beta}f \tag{17.58}$$

и не содержит первых частных производных $\partial_\alpha f$.

Пример 17.8.1. В пространстве-времени Минковского $\mathbb{R}^{1,n-1}$ декартова система координат является гармонической. □

Допустим, что на произвольном лоренцевом многообразии $\mathbb{M}$, которое топологически совпадает с $\mathbb{R}^{1,n-1}$, выбрана гармоническая система координат x^α. Тогда произвольная линейная комбинация координат удовлетворяет волновому уравнению (17.58). Можно доказать, что все гармонические системы координат на $\mathbb{M}$, которые являются асимптотически декартовыми, связаны между собой преобразованиями Лоренца [**?**]. В. А. Фок придавал гармоническим системам координат в общей теории относительности физический смысл, считая, что на произвольном лоренцевом многообразии $\mathbb{M}$ они выделены и играют ту же роль, что и декартовы координаты в пространстве-времени Минковского.

В переменных Картана условие гармоничности (17.57) имеет простой вид

$$\tilde{\omega}^a = g^{\alpha\beta}\partial_\alpha e_\beta{}^a = 0.$$

17.9 Нормальные, геодезические или римановы координаты

Нормальные координаты, которые называются также геодезическими или римановыми играют большую роль при изучении свойств метрики и связности, а также в приложениях в математической физике. Сначала мы введем эту систему координат с помощью рядов, что является более наглядным и важным для приложений. Затем дадим определение с помощью экспоненциального отображения и сформулируем ряд утверждений, связанных с полнотой римановых многообразий.

17.9.1 Нормальные координаты. Локальное рассмотрение.

Пусть на многообразии $\mathbb{M}$ задана аффинная геометрия $(\mathbb{M}, g, \Gamma)$. В настоящем разделе мы предполагаем, что все геометрические объекты (в частности метрика и связность) являются вещественно аналитическими, т.е. их компоненты в окрестности каждой точки $x_0 \in \mathbb{M}$, т.е. представимы в виде сходящихся степенных рядов. Мы рассмотрим специальную систему координат в окрестности точки x_0, которая является аналогом декартовой системы координат в евклидовом пространстве и имеет многочисленные приложения. В литературе эта система координат встречается под разными названиями: геодезические, римановы или нормальные координаты, и обычно строится в (псевдо-)римановом пространстве. Мы построим такую систему координат в более общем случае произвольной аффинной геометрии.

Сначала мы рассмотрим геодезические линии вблизи точки x_0. Пусть на многообразии задана кривая $x(t)$, проходящая через точку x_0 в заданном направлении,

$$x^\alpha(0) = x_0^\alpha, \qquad \dot{x}^\alpha(0) = \dot{x}_0^\alpha. \tag{17.59}$$

Для того, чтобы кривая была геодезической, функции $x^\alpha(t)$ должны удовлетворять уравнениям для геодезических (17.3) с начальными условиями (17.59). При достаточно малых t будем искать решение уравнений для геодезических в виде степенного ряда

$$x^\alpha = x_0^\alpha + \dot{x}_0^\alpha t + \frac{1}{2}\ddot{x}_0^\alpha t^2 + \frac{1}{3!}\dddot{x}_0^\alpha\, t^3 + \dots \tag{17.60}$$

Первые два члена определяются начальными условиями (17.59), а все последующие – уравнениями (17.3). В нулевом порядке по t из уравнений для геодезических следует

$$\ddot{x}_0^\alpha = -\overset{\circ}{\Gamma}_{\beta\gamma}{}^\alpha \dot{x}_0^\beta \dot{x}_0^\gamma, \qquad \text{где } \overset{\circ}{\Gamma}_{\beta\gamma}{}^\alpha = \Gamma_{\beta\gamma}{}^\alpha(x_0).$$

Первый порядок уравнений по t определяет кубический член разложения в (17.60)

$$\dddot{x}_0^\alpha = (-\partial_\delta \overset{\circ}{\Gamma}_{\beta\gamma}{}^\alpha + 2\overset{\circ}{\Gamma}_{\beta\gamma}{}^\epsilon \overset{\circ}{\Gamma}_{\{\delta\epsilon\}}{}^\alpha)\dot{x}_0^\beta \dot{x}_0^\gamma \dot{x}_0^\delta,$$

где, для краткости, мы допускаем некоторую вольность в обозначениях:

$$\partial_\delta \overset{\circ}{\Gamma}_{\beta\gamma}{}^\alpha = \partial_\delta \Gamma_{\beta\gamma}{}^\alpha|_{x=x_0}\,,$$

и фигурные скобки обозначают симметризацию по индексам.

Следовательно, решение задачи Коши для геодезических в третьем порядке по t имеет вид

$$\begin{aligned} x^\alpha = x_0^\alpha + \dot{x}_0^\alpha t - \frac{1}{2}\overset{\circ}{\Gamma}_{0\beta\gamma}{}^\alpha \dot{x}_0^\beta \dot{x}_0^\gamma t^2 \\ - \frac{1}{6}(\partial_\delta \overset{\circ}{\Gamma}_{\beta\gamma}{}^\alpha - 2\overset{\circ}{\Gamma}_{\beta\gamma}{}^\epsilon \overset{\circ}{\Gamma}_{\{\delta\epsilon\}}{}^\alpha)\dot{x}_0^\beta \dot{x}_0^\gamma \dot{x}_0^\delta t^3 + \dots . \end{aligned} \tag{17.61}$$

Коэффициенты при более высоких степенях t^k, $k \geq 4$ пропорциональны $(\dot{x}_0)^k t^k$ с коэффициентами, зависящими от аффинной связности и их частных производных вплоть до $k-2$ порядка, вычисленными в точке x_0. Интервал сходимости ряда (17.61) определяется начальными данными и компонентами аффинной связности. Мы, конечно, предполагаем, что он больше нуля.

Перейдем к определению нормальных координат в окрестности $\mathbb{U}_0 \subset \mathbb{M}$ точки x_0. Пусть $\mathbb{M}$ – многообразие с заданной аффинной связностью без кручения, т.е.

$\Gamma_{\beta\gamma}{}^{\alpha} = \Gamma_{\gamma\beta}{}^{\alpha}$. Перепишем закон преобразования компонент аффинной связности (8.5) в виде

$$\Gamma_{\beta'\gamma'}{}^{\alpha'} = \partial_{\beta'}x^{\beta}\partial_{\gamma'}x^{\gamma}(\Gamma_{\beta\gamma}{}^{\alpha}\partial_{\alpha}x^{\alpha'} - \partial^2_{\beta\gamma}x^{\alpha'}).$$

Совершим преобразование координат, которое задается квадратичным полиномом с постоянными коэффициентами

$$x^{\alpha'} = B_{\alpha}{}^{\alpha'}(x^{\alpha} - x_0^{\alpha}) + \frac{1}{2}\overset{\circ}{\Gamma}_{\beta\gamma}{}^{\alpha}B_{\alpha}{}^{\alpha'}(x^{\beta} - x_0^{\beta})(x^{\gamma} - x_0^{\gamma}), \tag{17.62}$$

где $B_{\alpha}{}^{\alpha'}$ – произвольная невырожденная матрица. Тогда в новой системе координат компоненты аффинной связности будут равны

$$\Gamma_{\beta'\gamma'}{}^{\alpha'} = \partial_{\beta'}x^{\beta}\partial_{\gamma'}x^{\gamma}\left[\Gamma_{\beta\gamma}{}^{\alpha}\left(B_{\alpha}{}^{\alpha'} + \overset{\circ}{\Gamma}_{\alpha\delta}{}^{\epsilon}B_{\epsilon}{}^{\alpha'}(x^{\delta} - x_0^{\delta})\right) - \overset{\circ}{\Gamma}_{\beta\gamma}{}^{\alpha}B_{\alpha}{}^{\alpha'}\right].$$

Отсюда следует, что в точке x_0 компоненты аффинной связности без кручения обращаются в нуль.

Замечание. Конечно, если бы связность обладала кручением, то, поскольку кручение является тензором, его нельзя обратить в нуль никаким преобразованием координат даже в одной точке. □

Выше мы доказали, что для произвольной аффинной связности в произвольной заданной точке x_0 всегда можно обратить в нуль симметричную часть связности. Для этого достаточно выбрать соответствующим образом только квадратичные члены в функциях преобразований координат (17.62). Данная система координат существует в окрестности произвольной точки $x_0 \in \mathbb{M}$ и определена неоднозначно. Во-первых, матрица $B_{\alpha}{}^{\alpha'}$ в (17.62) является невырожденной, а в остальном произвольна. Во-вторых, к правилу преобразования координат (17.62) можно добавить произвольные слагаемые третьей и более высокой степени по $(x - x_0)$. Этот произвол в выборе системы координат можно использовать для дальнейшей специализации системы координат.

Геометрический смысл построенной системы координат состоит в том, что в достаточно малой окрестности точки x_0 свойства многообразия близки к свойствам аффинного пространства, т.к. при параллельном переносе компоненты тензоров в линейном приближении по вектору смещения не меняются. Как и декартовы координаты в евклидовом пространстве, данные координаты в точке x_0 определены, в частности, с точностью до линейных преобразований.

Можно доказать, что симметричную часть компонент аффинной связности можно обратить в нуль не только в фиксированной точке, но и вдоль произвольной кривой γ на многообразии $\mathbb{M}$ [**?**]. Соответствующая система координат называется *геодезической вдоль кривой* $\gamma \in \mathbb{M}$.

Оставшийся произвол в выборе системы координат можно использовать для дальнейшей специализации геометрических объектов. Воспользуемся свободой добавления высших степеней $(x - x_0)^k$, $k \geq 3$, в закон преобразования координат (17.62) и покажем, что в произвольной точке $x_0 \in \mathbb{M}$ можно обратить в нуль не только симметричные части самих компонент аффинной связности, но и все их полностью симметризованные частные производные.

Теорема 17.9.1. *Если компоненты аффинной связности вещественно аналитичны, то в окрестности произвольной точки* $x_0 \in \mathbb{M}$ *существует такая система*

координат, что выполнены равенства

$$\overset{\circ}{\Gamma}_{\{\gamma_1\gamma_2\}}{}^{\alpha} = 0, \qquad \partial_{\{\gamma_3}\overset{\circ}{\Gamma}_{\gamma_1\gamma_2\}}{}^{\alpha} = 0, \qquad \ldots \qquad \partial^{k-2}_{\{\gamma_3\ldots\gamma_k}\overset{\circ}{\Gamma}_{\gamma_1\gamma_2\}}{}^{\alpha} = 0, \tag{17.63}$$

где фигурные скобки обозначают симметризацию по всем индексам, заключенным между ними.

Доказательство. Перепишем закон преобразования компонент аффинной связности (6.31) в виде

$$\Gamma_{\beta'\gamma'}{}^{\alpha'} A_{\alpha'}{}^{\alpha} = A_{\beta'}{}^{\beta} A_{\gamma'}{}^{\gamma} \Gamma_{\beta\gamma}{}^{\alpha} + \partial_{\beta'} A_{\gamma'}{}^{\alpha}, \tag{17.64}$$

где матрица $A_{\alpha'}{}^{\alpha}(x) = J^{-1}{}^{\alpha}_{\alpha'} = \partial_{\alpha'} x^{\alpha}$ является обратным якобианом преобразования координат. Дифференцирование этого соотношения по $x^{\delta'}$ приводит к равенству

$$\begin{aligned} \partial_{\delta'}\Gamma_{\beta'\gamma'}{}^{\alpha'} A_{\alpha'}{}^{\alpha} + \Gamma_{\beta'\gamma'}{}^{\alpha'} \partial_{\delta'} A_{\alpha'}{}^{\alpha} = {} & \partial_{\delta'} A_{\beta'}{}^{\beta} A_{\gamma'}{}^{\gamma} \Gamma_{\beta\gamma}{}^{\alpha} + A_{\beta'}{}^{\beta} \partial_{\delta'} A_{\gamma'}{}^{\gamma} \Gamma_{\beta\gamma}{}^{\alpha} \\ & + A_{\beta'}{}^{\beta} A_{\gamma'}{}^{\gamma} \partial_{\delta'} \Gamma_{\beta\gamma}{}^{\alpha} + \partial^2_{\delta'\beta'} A_{\gamma'}{}^{\alpha}. \end{aligned} \tag{17.65}$$

Последовательное дифференцирование этого соотношения приводит к равенствам, содержащим старшие производные от компонент аффинной связности и обратной матрицы Якоби $A_{\alpha'}{}^{\alpha}$. Рассматривая эти тождества в точке x^0, мы докажем возможность выбора системы координат, в которой выполнены равенства (17.63), по теории возмущений.

Совершим преобразование координат $x^{\alpha} = x^{\alpha}(y)$, которое вблизи точки $x_0 \in \mathbb{M}$ задается степенным рядом

$$x^{\alpha} = x^{\alpha}_0 + \left.\frac{\partial x^{\alpha}}{\partial y^{\gamma}}\right|_0 y^{\gamma} + \frac{1}{2} \left.\frac{\partial^2 x^{\alpha}}{\partial y^{\gamma_1} \partial y^{\gamma_2}}\right|_0 y^{\gamma_1} y^{\gamma_2} + \ldots \tag{17.66}$$

Здесь для новой системы координат мы используем букву y, чтобы избежать штрихов у индексов. Выберем первые три члена разложения в виде

$$\begin{aligned} \left.\frac{\partial x^{\alpha}}{\partial y^{\gamma}}\right|_0 &= \delta^{\alpha}_{\gamma}, \\ \left.\frac{\partial^2 x^{\alpha}}{\partial y^{\gamma_1} \partial y^{\gamma_2}}\right|_0 &= -\overset{\circ}{\Gamma}_{\{\gamma_1\gamma_2\}}{}^{\alpha}, \\ \left.\frac{\partial^3 x^{\alpha}}{\partial y^{\gamma_1} \partial y^{\gamma_2} \partial y^{\gamma_3}}\right|_0 &= 2\overset{\circ}{\Gamma}_{\{\gamma_1\gamma_2}{}^{\delta}\overset{\circ}{\Gamma}_{\delta\gamma_3\}}{}^{\alpha} - \partial_{\{\gamma_3}\overset{\circ}{\Gamma}_{\gamma_1\gamma_2\}}{}^{\alpha}. \end{aligned}$$

Тогда из уравнений (17.64), (17.65) следует, что в новой системе координат

$$\overset{\circ}{\Gamma}_{\{\gamma_1\gamma_2\}}{}^{\alpha} = 0, \qquad \partial_{\{\gamma_3}\overset{\circ}{\Gamma}_{\gamma_1\gamma_2\}}{}^{\alpha} = 0.$$

Выбор квадратичного члена ряда (17.66) уже был использован ранее. Выбор кубического члена разложения позволил обратить в нуль симметризованную первую частную производную аффинной связности в той же точке.

В дифференциальные тождества, получаемые последовательным дифференцированием (17.64), максимальная степень производной от обратной матрицы Якоби $A_{\alpha'}{}^{\alpha}$ всегда входит линейно и на единицу превышает максимальную степень производной от компонент аффинной связности. Это значит, что коэффициенты ряда (17.66) всегда можно подобрать таким образом, чтобы обратить в нуль все симметризованные частные производные от коэффициентов аффинной связности (17.63). В этом нет ничего удивительного, т.к. члены ряда (17.66), начиная с квадратичного, находятся во взаимно однозначном соответствии с условиями на аффинную связность (17.63). □

Нетрудно проверить, что ряд (17.66), определяющий преобразование координат, в точности совпадает с рядом (17.61), определяющим геодезические линии, если положить $y^\alpha = \dot{x}_0^\alpha t$. Это означает, что в новой системе координат прямые линии $y^\alpha = X_0^\alpha t$, где $t \in \mathbb{R}$, и X_0^α – произвольные числа, из которых по-крайней мере одно отлично от нуля, являются геодезическими линиями на $\mathbb{M}$. В этом месте прослеживается аналогия с декартовой системой координат в евклидовом пространстве: геодезические являются прямыми линиями.

Построенная система координат является нормальной системой координат в окрестности $\mathbb{U}_0$ точки $x_0 \in \mathbb{M}$, определяется только симметричной частью компонент аффинной связностью и никак от метрики не зависит. При этом у нас остался произвол в выборе первых двух членов разложения функций преобразования координат (17.66). Слагаемое нулевого порядка определим так, чтобы точка x_0 отображается в начало координат $y_0 = (0, \ldots, 0)$. Слагаемое первого порядка по y^α можно использовать для фиксирования значения метрики в начале координат. Очевидно, что его всегда можно подобрать таким образом, чтобы метрика в точке x_0 была диагональной

$$\overset{\circ}{g}_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta}. \tag{17.67}$$

Таким образом мы однозначно фиксировали все члены разложения функций преобразования координат (17.66). Это доказывает следующее утверждение.

Теорема 17.9.2. *Пусть в окрестности произвольной точки $x_0 \in \mathbb{M}$ многообразия, на котором задана аффинная геометрия, метрика и связность заданы вещественно аналитическими функциями. Тогда существует такая система координат y^α, что точка x_0 соответствует началу координат, а также выполнены равенства (17.63) и (17.67). Такая система координат определена однозначно.*

Замечание. В доказательстве теоремы нигде не использовалась сигнатура метрики. Поэтому сформулированная теорема справедлива как для римановых, так и для псевдоримановых метрик. □

Определение. Система координат y^α в теореме 17.9.2 называется *нормальной*, *геодезической* или *римановой*. □

Предложение 17.9.1. *Система координат y^α в некоторой окрестности начала координат является нормальной тогда и только тогда, когда выполнены условия:*

$$\Gamma_{\beta\gamma}{}^\alpha(y) y^\beta y^\gamma = 0 \quad \text{и} \quad g_{\alpha\beta}(0) = \eta_{\alpha\beta}. \tag{17.68}$$

Доказательство. В нормальной системе координат геодезическая линия, проходящая через точку x_0 в направлении u_0, является прямой и задается параметрически в виде

$$y^\alpha(t) = u_0^\alpha t. \tag{17.69}$$

Подстановка этого выражения в уравнение для геодезических линий (17.3) дает

$$u_0^\alpha u_0^\beta \Gamma_{\alpha\beta}{}^\gamma = 0.$$

Умножив это уравнение на t^2, получим (17.68).

Обратно. Пусть выполнено уравнение (17.68). Разложим компоненты связности в ряд Тейлора вблизи начала координат. Тогда уравнение (17.68) эквивалентно цепочке равенств (17.63). Затем разложим уравнение геодезических и сами геодезические в ряды Тейлора по t. Приравняв нулю коэффициенты при одинаковых степенях t, получаем, что прямые линии и только они являются геодезическими линиями, проходящими через начало координат. □

Замечание. Сравнение первого условия в (17.68) со вторым условием в (17.57) показывает, что нормальные координаты не являются гармоническими. □

Нормальная система координат обладает рядом замечательных свойств. В частности, в окрестности начала координат произвольное тензорное поле можно представить в виде ряда, коэффициенты которого зависят от ковариантных производных этого поля и тензоров кривизны, кручения и их ковариантных производных, вычисленных в точке x_0. Доказательство этого утверждения проводится конструктивно, путем явного построения соответствующего разложения.

Для доказательства нам понадобится предварительный результат.

Лемма 17.9.1. *Пусть связность* Γ *на* $\mathbb{M}$ *вещественно аналитична. Тогда в окрестности начала нормальной системы координат все производные*

$$\partial^{k-1}_{\{\gamma_1\dots\gamma_{k-1}}\overset{\circ}{\Gamma}_{\gamma_k\}\alpha}{}^{\beta}, \tag{17.70}$$

где, в отличие от (17.63), симметризация проводится только по части нижних индексов, выражаются через тензоры кривизны, кручения и их ковариантные производные.

Доказательство. Лемма доказывается прямыми, но громоздкими вычислениями. Поэтому мы ограничимся только первыми двумя слагаемыми.

Используя свойства (17.63), нетрудно доказать равенства

$$\begin{aligned}
\partial_{\{\gamma_1}\overset{\circ}{\Gamma}_{\gamma_2\}\alpha}{}^{\beta} &= \frac{1}{3}\left(\partial_{\{\gamma_1}\overset{\circ}{\Gamma}_{\alpha\gamma_2\}}{}^{\beta} - \partial_{\alpha}\overset{\circ}{\Gamma}_{\{\gamma_1\gamma_2\}}{}^{\beta} + 2\partial_{\{\gamma_1}\overset{\circ}{T}_{\gamma_2\}\alpha}{}^{\beta}\right),\\
\partial^2_{\{\gamma_1\gamma_2}\overset{\circ}{\Gamma}_{\gamma_3\}\alpha}{}^{\beta} &= \frac{1}{3}\left(\partial^2_{\{\gamma_1\gamma_2}\overset{\circ}{\Gamma}_{\alpha\gamma_3\}}{}^{\beta} - \partial^2_{\alpha\{\gamma_1}\overset{\circ}{\Gamma}_{\gamma_2\gamma_3\}}{}^{\beta} + 2\partial^2_{\{\gamma_1\gamma_2}\overset{\circ}{T}_{\gamma_3\}\alpha}{}^{\beta}\right).
\end{aligned} \tag{17.71}$$

Здесь и в дальнейшем фигурные скобки обозначают симметризацию *только* по индексам γ.

В точке x_0 аффинная связность полностью определяется тензором кручения

$$\overset{\circ}{\Gamma}_{\gamma\alpha}{}^{\beta} = \frac{1}{2}\overset{\circ}{T}_{\gamma\alpha}{}^{\beta}. \tag{17.72}$$

Далее, прямые вычисления приводят к следующим равенствам

$$\begin{aligned}
\overset{\circ}{R}_{\alpha\{\gamma_1\gamma_2\}}{}^{\beta} &= \partial_{\alpha}\overset{\circ}{\Gamma}_{\{\gamma_1\gamma_2\}}{}^{\beta} - \partial_{\{\gamma_1}\overset{\circ}{\Gamma}_{\alpha\gamma_2\}}{}^{\delta} - \frac{1}{4}\overset{\circ}{T}_{\alpha\{\gamma_1}{}^{\delta}\overset{\circ}{T}_{\gamma_2\}\delta}{}^{\beta},\\
\nabla_{\{\gamma_1}\overset{\circ}{R}_{\alpha\gamma_2\gamma_3\}}{}^{\beta} &= \partial^2_{\alpha\{\gamma_1}\overset{\circ}{\Gamma}_{\gamma_2\gamma_3\}}{}^{\beta} - \partial^2_{\{\gamma_1\gamma_2}\overset{\circ}{\Gamma}_{\alpha\gamma_3\}}{}^{\beta} + \frac{2}{3}\overset{\circ}{R}_{\alpha\{\gamma_1\gamma_2}{}^{\delta}\overset{\circ}{T}_{\gamma_3\}\delta}{}^{\beta} + \frac{2}{3}\overset{\circ}{T}_{\alpha\{\gamma_1}{}^{\delta}\overset{\circ}{R}_{\delta\gamma_2\gamma_3\}}{}^{\beta}\\
&\quad + \frac{1}{6}\nabla_{\{\gamma_1}\overset{\circ}{T}_{\gamma_2\alpha}{}^{\delta}\overset{\circ}{T}_{\gamma_3\}\delta}{}^{\beta} - \frac{1}{3}\overset{\circ}{T}_{\alpha\{\gamma_1}{}^{\delta}\nabla_{\gamma_2}\overset{\circ}{T}_{\gamma_3\}\delta}{}^{\beta},\\
\nabla_{\{\gamma_1}\overset{\circ}{T}_{\gamma_2\}\alpha}{}^{\beta} &= \partial_{\{\gamma_1}\overset{\circ}{T}_{\gamma_2\}\alpha}{}^{\beta},\\
\nabla_{\{\gamma_1}\nabla_{\gamma_2}\overset{\circ}{T}_{\gamma_3\}\alpha}{}^{\beta} &= \partial^2_{\{\gamma_1\gamma_2}\overset{\circ}{T}_{\gamma_3\}\alpha}{}^{\beta} + \frac{1}{6}\overset{\circ}{R}_{\alpha\{\gamma_1\gamma_2}{}^{\delta}\overset{\circ}{T}_{\gamma_3\}\delta}{}^{\beta} + \frac{1}{6}\overset{\circ}{T}_{\alpha\{\gamma_1}{}^{\delta}\overset{\circ}{R}_{\delta\gamma_2\gamma_3\}}{}^{\beta}\\
&\quad + \frac{1}{6}\nabla_{\{\gamma_1}\overset{\circ}{T}_{\gamma_2\alpha}{}^{\delta}\overset{\circ}{T}_{\gamma_3\}\delta}{}^{\gamma} + \frac{1}{6}\overset{\circ}{T}_{\alpha\{\gamma_1}{}^{\delta}\nabla_{\gamma_2}\overset{\circ}{T}_{\gamma_3\}\delta}{}^{\beta}.
\end{aligned}$$

Используя полученные формулы, правые части (17.71) можно записать в ковариантном виде

$$\partial_{\{\gamma_1}\Gamma_{\gamma_2\}\alpha}{}^{\beta} = \frac{1}{3}\left(-\overset{\circ}{R}_{\alpha\{\gamma_1\gamma_2\}}{}^{\beta} + 2\nabla_{\{\gamma_1}\overset{\circ}{T}_{\gamma_2\}\alpha}{}^{\beta} - \frac{1}{4}\overset{\circ}{T}_{\alpha\{\gamma_1}{}^{\delta}\overset{\circ}{T}_{\gamma_2\}\delta}{}^{\beta}\right), \tag{17.73}$$

$$\begin{aligned}\partial^2_{\{\gamma_1\gamma_2}\overset{\circ}{\Gamma}_{\gamma_3\}\alpha}{}^{\beta} = \frac{1}{3}\Bigg(&-\nabla_{\{\gamma_1}\overset{\circ}{R}_{\alpha\gamma_2\gamma_3\}}{}^{\beta} + \frac{1}{3}\overset{\circ}{R}_{\alpha\{\gamma_1\gamma_2}{}^{\delta}\overset{\circ}{T}_{\gamma_3\}\delta}{}^{\beta} + \frac{1}{3}\overset{\circ}{T}_{\alpha\{\gamma_1}{}^{\delta}\overset{\circ}{R}_{\delta\gamma_2\gamma_3\}}{}^{\beta}\\ &+2\nabla_{\{\gamma_1}\nabla_{\gamma_2}\overset{\circ}{T}_{\gamma_3\}\alpha}{}^{\beta} - \frac{1}{6}\nabla_{\{\gamma_1}\overset{\circ}{T}_{\gamma_2\alpha}{}^{\delta}\overset{\circ}{T}_{\gamma_3\}\delta}{}^{\beta} - \frac{2}{3}\overset{\circ}{T}_{\alpha\{\gamma_1}{}^{\delta}\nabla_{\gamma_2}\overset{\circ}{T}_{\gamma_3\}\delta}{}^{\beta}\Bigg),\end{aligned} \tag{17.74}$$

где, напомним, симметризация проводится только по индексам γ. Аналогичным образом все частные производные от связности вида (17.70) можно выразить через ковариантные объекты. □

Теперь можно доказать утверждение о разложении произвольного тензорного поля в окрестности начала нормальной системы координат в ряд Тейлора. Для определенности рассмотрим произвольный ковариантный тензор второго ранга $A_{\alpha\beta}$ в нормальных координатах и разложим его в ряд Тейлора вблизи начала координат:

$$A_{\alpha\beta}(y) = \overset{\circ}{A}_{\alpha\beta} + \partial_\gamma\overset{\circ}{A}_{\alpha\beta}\,y^\gamma + \frac{1}{2}\partial^2_{\gamma_1\gamma_2}\overset{\circ}{A}_{\alpha\beta}\,y^{\gamma_1}y^{\gamma_2} + \dots \tag{17.75}$$

Эта процедура явно нековариантна, потому что координаты y^γ не являются компонентами вектора, и коэффициенты этого ряда также нековариантны. Основным достоинством нормальных координат является то, что все коэффициенты этого ряда тем не менее можно выразить через ковариантные величины. Для этого необходимо выразить все частные производные через ковариантные и выразить компоненты аффинной связности в начале координат через тензор кривизны, кручения и их ковариантные производные. Начнем с первой производной

$$\begin{aligned}\partial_\gamma\overset{\circ}{A}_{\alpha\beta} &= \nabla_\gamma\overset{\circ}{A}_{\alpha\beta} + \overset{\circ}{\Gamma}_{\gamma\alpha}{}^{\delta}\overset{\circ}{A}_{\delta\beta} + \overset{\circ}{\Gamma}_{\gamma\beta}{}^{\delta}\overset{\circ}{A}_{\alpha\delta}\\ &= \nabla_\gamma\overset{\circ}{A}_{\alpha\beta} + \frac{1}{2}\overset{\circ}{T}_{\gamma\alpha}{}^{\delta}\overset{\circ}{A}_{\delta\beta} + \frac{1}{2}\overset{\circ}{T}_{\gamma\beta}{}^{\delta}\overset{\circ}{A}_{\alpha\delta},\end{aligned}$$

где мы воспользовались формулами (17.72). Прямые, но более громоздкие выкладки позволяют представить вторые частные производные также в ковариантном виде:

$$\begin{aligned}\partial^2_{\gamma_1\gamma_2}\overset{\circ}{A}_{\alpha\beta} = {}&\nabla_{\{\gamma_1}\nabla_{\gamma_2\}}\overset{\circ}{A}_{\alpha\beta} + \overset{\circ}{T}_{\{\gamma_1\alpha}{}^{\delta}\nabla_{\gamma_2\}}\overset{\circ}{A}_{\delta\beta} + \overset{\circ}{T}_{\{\gamma_1\beta}{}^{\delta}\nabla_{\gamma_2\}}\overset{\circ}{A}_{\alpha\delta} + \frac{1}{2}\overset{\circ}{T}_{\{\gamma_1\alpha}{}^{\delta}\overset{\circ}{T}_{\gamma_2\}}{}^{\epsilon}\overset{\circ}{A}_{\delta\epsilon}\\ &+\frac{1}{3}\left(-\overset{\circ}{R}_{\alpha\{\gamma_1\gamma_2\}}{}^{\delta} + 2\nabla_{\{\gamma_1}\overset{\circ}{T}_{\gamma_2\}\alpha}{}^{\delta} - \overset{\circ}{T}_{\alpha\{\gamma_1}{}^{\epsilon}\overset{\circ}{T}_{\gamma_2\}\epsilon}{}^{\delta}\right)\overset{\circ}{A}_{\delta\beta}\\ &+\frac{1}{3}\left(-\overset{\circ}{R}_{\beta\{\gamma_1\gamma_2\}}{}^{\delta} + 2\nabla_{\{\gamma_1}\overset{\circ}{T}_{\gamma_2\}\beta}{}^{\delta} - \overset{\circ}{T}_{\beta\{\gamma_1}{}^{\epsilon}\overset{\circ}{T}_{\gamma_2\}\epsilon}{}^{\delta}\right)\overset{\circ}{A}_{\alpha\delta}.\end{aligned}$$

Эту процедуру можно продолжить вплоть до произвольного порядка. Однако уже в третьем порядке формулы настолько громоздки, что нет смысла их приводить в явном виде.

Аналогичное представление справедливо для тензорного поля произвольного ранга и типа.

Теорема 17.9.3. *Компоненты произвольного вещественно аналитического тензорного поля в некоторой окрестности начала нормальной системы координат представимы в виде ряда Тейлора, коэффициенты которого определяются ковариантными производными компонент данного тензорного поля, а также тензором кривизны, тензором кручения и их ковариантными производными, взятыми в начале координат.*

17.9.2 Нормальные координаты в (псевдо-)римановом пространстве

Основное достоинство нормальных координат заключается в том, что вещественно аналитические тензорные поля в окрестности $\mathbb{U}_0 \subset \mathbb{M}$ произвольной точки $x_0 \in \mathbb{M}$ представляются в виде ряда Тейлора, коэффициенты которого задаются только ковариантными объектами: ковариантными производными данного тензорного поля, а также тензорами кривизны и кручения и их ковариантными производными. В предыдущем разделе были явно вычислены первые два члена этого ряда для ковариантного тензора второго ранга. Эти члены содержат много слагаемых с тензором кручения. Поэтому в (псевдо-)римановой геометрии, где кручение тождественно равно нулю, формулы упрощаются, и можно продвинуться значительно дальше в вычислениях.

Кроме того, если на многообразии $\mathbb{M}$ задана аффинная геометрия $(\mathbb{M}, g, \Gamma)$, то в качестве определяющего пучка кривых, проходящих через точку $x_0 \in \mathbb{M}$ можно выбрать не геодезические линии, а экстремали, которые определяются исключительно метрикой. Это также дает основание рассмотреть нормальные координаты в (псевдо-)римановой геометрии более подробно.

Два слова об обозначениях. Мы часто используем знак тильды для геометрических объектов в (псевдо-)римановой геометрии. Поскольку значок окружности над символом уже используется для обозначения геометрических объектов, рассматриваемых в точке x_0, то, чтобы не загромождать обозначений, знак тильды в настоящем разделе мы опустим.

В (псевдо-)римановой геометрии в нормальных координатах $\overset{\circ}{\Gamma}_{\alpha\beta}{}^{\gamma} = 0$, и ковариантная производная произвольного тензора в этой точке совпадает с частной производной. При этом в выражении для тензора кривизны пропадают квадратичные слагаемые по связности:

$$\overset{\circ}{R}_{\alpha\beta\gamma}{}^{\delta} = \partial_\alpha \overset{\circ}{\Gamma}_{\beta\gamma}{}^{\delta} - \partial_\beta \overset{\circ}{\Gamma}_{\alpha\gamma}{}^{\delta}$$

или

$$\overset{\circ}{R}_{\alpha\beta\gamma\delta} = \frac{1}{2}(\partial^2_{\alpha\gamma}\overset{\circ}{g}_{\beta\delta} - \partial^2_{\alpha\delta}\overset{\circ}{g}_{\beta\gamma} - \partial^2_{\beta\gamma}\overset{\circ}{g}_{\alpha\delta} + \partial^2_{\beta\delta}\overset{\circ}{g}_{\alpha\gamma}).$$

Вычисления, аналогичные тем, что привели к формулам (17.73), (17.74), в (псевдо-)римановой геометрии дают

$$\begin{aligned}
\partial_{\{\gamma_1}\overset{\circ}{\Gamma}_{\gamma_2\}\alpha}{}^{\beta} &= -\frac{1}{3}\overset{\circ}{R}_{\alpha\{\gamma_1\gamma_2\}}{}^{\beta},\\
\partial^2_{\{\gamma_1\gamma_2}\overset{\circ}{\Gamma}_{\gamma_3\}\alpha}{}^{\beta} &= -\frac{1}{2}\nabla_{\{\gamma_1}\overset{\circ}{R}_{\alpha\gamma_2\gamma_3\}}{}^{\beta},\\
\partial^3_{\{\gamma_1\gamma_2\gamma_3}\overset{\circ}{\Gamma}_{\gamma_4\}\alpha}{}^{\beta} &= -\frac{3}{5}\nabla_{\{\gamma_1}\nabla_{\gamma_2}\overset{\circ}{R}_{\alpha\gamma_3\gamma_4\}}{}^{\beta} - \frac{2}{15}\overset{\circ}{R}_{\alpha\{\gamma_1\gamma_2}{}^{\delta}\overset{\circ}{R}_{\delta\gamma_3\gamma_4\}}{}^{\beta},
\end{aligned} \tag{17.76}$$

где симметризация проводится только по индексам γ. Здесь мы дополнительно вычислили третью симметризованную производную от связности.

Разложим ковариантный тензор $A_{\alpha_1\ldots\alpha_s}$ произвольного ранга s в в окрестности точки x_0 в ряд по нормальным координатам:

$$A_{\alpha_1\ldots\alpha_s} = \overset{\circ}{A}_{\alpha_1\ldots\alpha_s} + \partial_\gamma \overset{\circ}{A}_{\alpha_1\ldots\alpha_s}\, y^\gamma + \frac{1}{2}\partial^2_{\gamma_1\gamma_2}\overset{\circ}{A}_{\alpha_1\ldots\alpha_s}\, y^{\gamma_1}y^{\gamma_2} + \ldots,$$

где $x_0 = \{y^\alpha = 0\}$. Преобразовав частные производные в ковариантные и исключив слагаемые со связностью с помощью формул (17.76), получим следующий ряд

$$\begin{aligned} A_{\alpha_1\ldots\alpha_s} &= \overset{\circ}{A}_{\alpha_1\ldots\alpha_s} + \nabla_\gamma \overset{\circ}{A}_{\alpha_1\ldots\alpha_s} y^\gamma \\ &+ \frac{1}{2!}\left(\nabla_{\gamma_1}\nabla_{\gamma_2}\overset{\circ}{A}_{\alpha_1\ldots\alpha_s} - \frac{1}{3}\sum_{k=1}^{s}\overset{\circ}{R}_{\alpha_k\gamma_1\gamma_2}{}^{\beta_k}\overset{\circ}{A}_{\alpha_1\ldots\beta_k\ldots\alpha_s}\right) y^{\gamma_1}y^{\gamma_2} \\ &+ \frac{1}{3!}\left(\nabla_{\gamma_1}\nabla_{\gamma_2}\nabla_{\gamma_3}\overset{\circ}{A}_{\alpha_1\ldots\alpha_s} - \sum_{k=1}^{s}\overset{\circ}{R}_{\alpha_k\gamma_1\gamma_2}{}^{\beta_k}\nabla_{\gamma_3}\overset{\circ}{A}_{\alpha_1\ldots\beta_k\ldots\alpha_s}\right. \\ &\qquad \left. -\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{s}\nabla_{\gamma_1}\overset{\circ}{R}_{\alpha_k\gamma_2\gamma_3}{}^{\beta_k}\overset{\circ}{A}_{\alpha_1\ldots\beta_k\ldots\alpha_s}\right) y^{\gamma_1}y^{\gamma_2}y^{\gamma_3} + \ldots \end{aligned} \tag{17.77}$$

Под знаком суммы подразумевается суммирование по немому индексу β_k, который стоит на k-том месте в $\overset{\circ}{A}_{\alpha_1\ldots\beta_k\ldots\alpha_s}$. Симметризацию по индексам γ можно не указывать, т.к. происходит свертка с симметричным произведением $y^{\gamma_1}\ldots y^{\gamma_k}$.

Аналогичные ряды можно построить для тензоров, содержащих произвольные наборы ковариантных и контравариантных индексов. Во всех случаях коэффициенты ряда вплоть до любого порядка могут быть выражены только через ковариантные объекты в точке x_0.

Нормальные координаты особенно удобны при анализе (псевдо-)римановой метрики. В этом случае возникает дополнительное упрощение, поскольку все ковариантные производные от метрики тождественно равны нулю. Несложные вычисления показывают, что ряд (17.77) для метрики в нормальных координатах принимает вид

$$\begin{aligned} g_{\alpha\beta} &= \eta_{\alpha\beta} - \frac{1}{3}\overset{\circ}{R}_{\alpha\gamma_1\gamma_2\beta}\, y^{\gamma_1}y^{\gamma_2} - \frac{1}{3!}\nabla_{\gamma_1}\overset{\circ}{R}_{\alpha\gamma_2\gamma_3\beta}\, y^{\gamma_1}y^{\gamma_2}y^{\gamma_3} \\ &+ \frac{1}{5!}\left(-6\nabla_{\gamma_1}\nabla_{\gamma_2}\overset{\circ}{R}_{\alpha\gamma_3\gamma_4\beta} + \frac{16}{3}\overset{\circ}{R}_{\alpha\gamma_1\gamma_2}{}^{\delta}\overset{\circ}{R}_{\delta\gamma_3\gamma_4\beta}\right) y^{\gamma_1}y^{\gamma_2}y^{\gamma_3}y^{\gamma_4} + \ldots, \end{aligned} \tag{17.78}$$

где мы также вычислили слагаемое четвертого порядка.

17.9.3 (Псевдо-)римановы пространства постоянной кривизны

Выражение для метрики в нормальных координатах (17.78) принимает особенно простой вид для пространств постоянной кривизны, которые определяются равенством $\nabla_\epsilon R_{\alpha\beta\gamma}{}^{\delta} = 0$.

Предложение 17.9.2. *В пространстве постоянной кривизны (псевдо-)риманова метрика в окрестности произвольной точки $x_0 \in \mathbb{M}$ в нормальных координатах y^α имеет вид*

$$g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k 2^{2k+2}}{(2k+2)!}V_\alpha{}^{\epsilon_1}V_{\epsilon_1}{}^{\epsilon_2}\ldots V_{\epsilon_{k-1}}{}^{\epsilon_k}\eta_{\epsilon_k\beta}, \tag{17.79}$$

где

$$V_{\epsilon_{k-1}}{}^{\epsilon_k} = \overset{\circ}{R}_{\epsilon_{k-1}\gamma_1\gamma_2}{}^{\epsilon_k} y^{\gamma_1} y^{\gamma_2}, \qquad \epsilon_0 = \alpha.$$

Доказательство. Сначала проверяем, что первые два члена суммы действительно совпадают с (17.78) для пространств постоянной кривизны. Далее доказательство проводится по индукции. □

Ряд для метрики (17.79) можно просуммировать для пространств постоянной кривизны специального вида (**??**). В этом случае в начале координат справедливо равенство

$$\overset{\circ}{R}_{\alpha\beta\gamma\delta} = -\frac{2K}{n(n-1)}(\eta_{\alpha\gamma}\eta_{\beta\delta} - \eta_{\alpha\delta}\eta_{\beta\gamma}), \qquad n = \mathsf{dim}\,\mathbb{M}, \quad K = \mathsf{const}. \tag{17.80}$$

Тогда матрица $V_\alpha{}^\beta$ пропорциональна проекционному оператору:

$$V_\alpha{}^\beta = as\left(\delta_\alpha^\beta - \frac{y_\alpha y^\beta}{s}\right),$$

где

$$a = \frac{2K}{n(n-1)}, \qquad s = y^\alpha y_\alpha, \qquad y_\alpha = y^\beta \eta_{\alpha\beta},$$

и ряд для метрики принимает вид

$$g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} + \frac{1}{2}\left(\eta_{\alpha\beta} - \frac{y_\alpha y_\beta}{s}\right)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2^{2k+2}}{(2k+2)!}(-as)^k. \tag{17.81}$$

Это выражение для метрики определено и для $s = 0$, т.к. ряд начинается с линейного по s члена. Теперь ряд можно просуммировать, что приводит к следующему выражению для метрики

$$g_{\alpha\beta} = f(s)\Pi^{\mathrm{T}}_{\alpha\beta} + \Pi^{\mathrm{L}}_{\alpha\beta} = f\eta_{\alpha\beta} + (1-f)\frac{y_\alpha y_\beta}{s}, \tag{17.82}$$

где метрика представлена в виде суммы проекционных операторов

$$\Pi^{\mathrm{T}}_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} - \frac{y_\alpha y_\beta}{s}, \qquad \Pi^{\mathrm{L}}_{\alpha\beta} = \frac{y_\alpha y_\beta}{s},$$

а функция $f(s)$ определена рядом

$$f(s) := \sum_{k=0}^{\infty}\frac{2^{2k+2}}{(2k+2)!}(-as)^k, \tag{17.83}$$

который сходится на всей комплексной плоскости s. Тем самым доказано следующее утверждение.

Теорема 17.9.4. *Пусть на многообразии задана (псевдо-)риманова метрика g класса $\mathcal{C}^2$ такая, что многообразие является пространством постоянной кривизны специального вида:*

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta} = -\frac{2K}{n(n-1)}(g_{\alpha\gamma}g_{\beta\delta} - g_{\alpha\delta}g_{\beta\gamma}). \tag{17.84}$$

Тогда метрика g на $\mathbb{M}$ вещественно аналитична.

Доказательство. Прямая проверка показывает, что вещественно аналитическая метрика (17.82), (17.83) описывает многообразие постоянной кривизны (17.84). Единственность метрики следует из единственности решения задачи Коши для уравнений геодезических. □

Ряд (17.83) можно просуммировать. Для псевдоримановых пространств положительной кривизны $K > 0, a > 0$, и функция $f(s)$ имеет вид

$$f(s) = \begin{cases} \dfrac{\sin^2\sqrt{as}}{as}, & s > 0, \\ 1, & s = 0, \\ -\dfrac{\operatorname{sh}^2\sqrt{-as}}{as}, & s < 0. \end{cases} \tag{17.85}$$

Функция $f(s)$, как нетрудно проверить, аналитична. Напомним, что $\sin ix = i \operatorname{sh} x$.

Для псевдоримановых пространств отрицательной кривизны $K < 0, a < 0$ имеем

$$f(s) = \begin{cases} -\dfrac{\operatorname{sh}^2\sqrt{-as}}{as}, & s > 0, \\ 1, & s = 0, \\ \dfrac{\sin^2\sqrt{as}}{as}, & s < 0. \end{cases} \tag{17.86}$$

Отметим, что на световом конусе, $s = 0$, метрика в обоих случаях совпадает с метрикой Минковского.

Если кривизна псевдориманова пространства постоянной кривизны равна нулю, $K = 0$, то $f = 1$.

Для римановых пространств постоянной кривизны всегда $s > 0$, и

$$f(s) = \begin{cases} \dfrac{\sin^2\sqrt{as}}{as}, & K > 0, \\ 1, & K = 0, \\ -\dfrac{\operatorname{sh}^2\sqrt{-as}}{as}, & K < 0. \end{cases} \tag{17.87}$$

Тот факт, что функция $f(s)$ действительно приводит к ряду (17.81) проверяется прямой проверкой. Не зная функции $f(s)$, ряд (17.81) можно просуммировать следующим образом. Представление (17.81) задает тензорную структуру метрики. В разделе 16.4 для метрики более общего вида, которая параметризуется двумя произвольными функциями $f(s)$ и $g(s)$, были вычислены символы Кристоффеля и тензор кривизны. Рассматриваемому случаю соответствует условие

$$g = \frac{(f + f's)^2}{f - afs} = 1,$$

где штрих обозначает дифференцирование по s. Последнее равенство задает обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка на $f(s)$. Это уравнение легко решается после подстановки

$$U = fs \tag{17.88}$$

Постоянная интегрирования находится из условия $U(0) = 0$ (ограниченность метрики).

Рассмотрим римановы пространства постоянной кривизны, для которых $g_{\alpha\beta}(0) = \delta_{\alpha\beta}$. Метрика (17.82) принимает особенно простой вид в сферической системе координат евклидова пространства $\mathbb{R}^n$. В сферических координатах $s = y^\alpha y^\beta \delta_{\alpha\beta} = r^2$, где r – радиальная координата, и справедливы тождества

$$\Pi^{\text{L}}_{\alpha\beta} dy^\alpha dy^\beta = dr^2, \qquad \Pi^{\text{T}}_{\alpha\beta} dy^\alpha dy^\beta = r^2 d\Omega,$$

где $d\Omega$ – элемент телесного угла в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$. Таким образом метрику пространств постоянной кривизны в нормальных координатах можно записать в виде

$$ds^2 = dr^2 + r^2 f d\Omega. \tag{17.89}$$

Проанализируем пространство $\mathbb{R}^n$ с метрикой (17.89) подробнее. Объем сферы радиуса r равен (**??**) в $\mathbb{R}^n$ с метрикой (17.89) равен

$$S^{n-1}_r = \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(\frac{n}{2})} (r^2 f)^{(n-1)/2}.$$

Мы видим, что нули функции $f(r^2) = 0$ определяют те сферы в $\mathbb{R}^n$, которые на самом деле являются точками пространства постоянной кривизны.

Нормальные координаты для многообразий постоянной кривизны определены для всех $\{y^\alpha\} \in \mathbb{R}^n$. При этом все геодезические, проходящие через точку x_0, полны, т.к. канонический параметр пробегает всю вещественную прямую $t \in (-\infty, \infty)$.

Проведенное рассмотрение доказывает

Теорема 17.9.5. *Нормальные координаты на (псевдо-)римановом многообразии $\mathbb{M}$ постоянной кривизны вида (17.84) в каждой точке $x_0 \in \mathbb{M}$ задают гладкое сюръективное отображение*

$$\mathbb{R}^n \to \mathbb{M}. \tag{17.90}$$

Для римановых пространств нулевой кривизны нормальные координаты совпадают с декартовыми.

Замечание. В дальнейшем мы увидим, что отображение (17.90) не является накрытием. □

В общем случае отображение (17.90) не является взаимно однозначным. Поэтому в области определения нормальных координат $\mathbb{R}^n$ можно задать отношение эквивалентности, отождествив те точки, которые отображаются на одну и ту же точку из $\mathbb{M}$. Таким образом пространство постоянной кривизны вида (17.84) можно рассматривать как евклидово пространство $\mathbb{R}^n$, в котором задано некоторое отношение эквивалентности между точками.

Пример 17.9.1. Рассмотрим двумерную сферу $\mathbb{S}^2 \hookrightarrow \mathbb{R}^3$ единичного радиуса в качестве пространства постоянной положительной кривизны. В этом случае $K = 1, a = 1, n = 2$. Функция $f(r^2)$ в полярных координатах на плоскости $\mathbb{R}^2$ имеет вид

$$f = \frac{\sin^2 r}{r^2}.$$

Это соответствует метрике

$$ds^2 = dr^2 + \sin^2 r d\varphi^2.$$

Длина окружности на плоскости $\mathbb{R}^2$ радиуса r с центром в начале координат равна

$$L = \int_0^{2\pi} d\varphi \,\mathsf{sin}\, r = 2\pi \,\mathsf{sin}\, r.$$

Отсюда следует, что окружности радиусов $r = \pi k$, $k = 1, 2, \ldots$ отображаются в одну точку сферы. При этом плоскость $\mathbb{R}^2$ бесконечное число раз "накрывает" сферу $\mathbb{S}^2$. Если условиться, что начало координат соответствует южному полюсу сферы, то при отображении $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{S}^2$ все окружности радиуса $r = 2\pi k$, $k = 0, 1, \ldots$, соответствуют южному полюсу, а все окружности радиуса $r = \pi + 2\pi k$ – северному. В рассматриваемом случае между точками евклидовой плоскости возникает отношение эквивалентности

$$y^\alpha \sim y^\alpha + \frac{y^\alpha}{r} 2\pi k, \qquad k = 0, 1, \ldots . \qquad \square$$

Нормальные координаты были определены таким образом, что геодезические линии в них совпадают с прямыми. В (псевдо-)римановом пространстве экстремали совпадают с геодезическими и поэтому также являются прямыми. Проверим это для пространств постоянной кривизны, которые были рассмотрены выше. Уравнения для экстремалей, определяемых метрикой (17.82) можно проинтегрировать. Из выражения для символов Кристоффеля (16.31), которые в рассматриваемом случае имеют вид

$$\Gamma_{\alpha\beta}{}^\gamma = \frac{f'}{f}\left(y_\alpha \Pi_\beta^{\mathrm{T}\gamma} + y_\beta \Pi_\alpha^{\mathrm{T}\gamma}\right) + \frac{1 - f - f's}{s} y^\gamma \Pi^{\mathrm{T}}_{\alpha\beta}, \tag{17.91}$$

следуют уравнения для экстремалей (17.17)

$$\ddot{y}^\alpha = -2\frac{f'}{f}\dot{y}^\alpha y_\beta \dot{y}^\beta + 2\frac{f'}{f} y^\alpha \frac{(y_\beta \dot{y}^\beta)^2}{s} + \frac{1 - f - f's}{s^2} y^\alpha (y_\beta \dot{y}^\beta)^2 - \frac{1 - f - f's}{s} y^\alpha (\dot{y}_\beta \dot{y}^\beta). \tag{17.92}$$

Эти уравнения имеют интеграл (17.21)

$$C_0 = \dot{y}^\alpha \dot{y}^\beta g_{\alpha\beta} = \dot{y}_\alpha \dot{y}^\alpha f - \frac{(y_\alpha \dot{y}^\alpha)^2}{s}(f - 1) = \mathsf{const}.$$

Прямая проверка показывает, что все прямые линии, проходящие через начало координат,

$$y^\alpha = v^\alpha t, \qquad v^\alpha = \mathsf{const}, \quad t \in \mathbb{R},$$

являются экстремалями. Эти экстремали, очевидно, полны. Отметим, что символы Кристоффеля (17.91) равны нулю только в начале координат. В близких точках они отличны от нуля, и среди экстремалей прямыми являются только те, которые проходят через начало координат.

Уравнения для экстремалей (17.92) можно проинтегрировать и в общем случае. То есть найти те экстремали, которые не проходят через начало координат. Для этой цели рассмотрим зависимость $s = y^\alpha y^\beta \eta_{\alpha\beta}$ от t. Учитывая равенства

$$\dot{s} = 2y_\alpha \dot{y}^\alpha,$$
$$\ddot{s} = 2y_\alpha \ddot{y}^\alpha + 2\dot{y}_\alpha \dot{y}^\alpha,$$

из уравнений для экстремалей получаем обыкновенное уравнение на $s(t)$:

$$\ddot{s} = \left(\frac{1}{2s} - \frac{U'}{2U}\right)\dot{s}^2 + \frac{2C_0 U' s}{U},$$

где функция $U(s)$ определена равенством (17.88)

$$U(s) = \frac{\sin^2\sqrt{as}}{a}.$$

Рассмотрим случай $C_0 a > 0$. Введя новую переменную $z^2 = as$, при $as > 0$, и растянув канонический параметр $t \to t/\sqrt{C_0 a}$, приходим к уравнению

$$\ddot{z} = (1 - \dot{z}^2)\operatorname{ctg} z,$$

которое можно явно проинтегрировать. Общее решение этого уравнения имеет вид

$$\cos\sqrt{as} = \sqrt{1 - \frac{1}{C_1}}\sin(t + t_0), \qquad C_1 = \text{const} > 1, \quad t_0 = \text{const},$$

Аналогично можно рассмотреть все остальные случаи.

Таким образом для пространств постоянной кривизны специального вида (17.80) в нормальных координатах можно найти и проанализировать поведение всех экстремалей. В дальнейшем мы рассмотрим эту задачу в ряде конкретных случаев.

17.9.4 Нормальные координаты и экспоненциальное отображение

Пусть задана связность Γ на многообразии $\mathbb{M}$ и $\gamma = x(t)$ – геодезическая. Если t – канонический параметр вдоль геодезической, то координатные функции $\{x^\alpha(t)\}$ удовлетворяют системе уравнений (17.3). Зафиксируем канонический параметр t каким либо образом и начальную точку $x_0 = x(0)$. Тогда касательный вектор $u_0 := \dot{x}_0 \in \mathbb{T}_0(\mathbb{M})$ к геодезической в точке x_0 определен однозначно. Верно также обратное утверждение. Если задана точка $x_0 \in \mathbb{M}$ и касательный вектор $u_0 \in \mathbb{T}_0(\mathbb{M})$, то существует единственная геодезическая, проходящая через x_0 с начальным вектором u_0, при этом канонический параметр определен однозначно. Таким образом каждая геодезическая однозначно определена парой (x_0, u_0).

В разделе 3.6.5 было определено экспоненциальное отображение для гладких полных векторных полей на многообразии. Геодезическая линия $x(t)$ является интегральной кривой для векторного поля скорости $u(t) := \dot{x}(t)$. Тогда для полных геодезических определено экспоненциальное отображение

$$\exp tu_0 : \quad x_0 \mapsto x(t), \tag{17.93}$$

которое отображает начальную точку x_0 в точку $x(t)$. Если вектор скорости u_0 принимает все возможные направления в касательном пространстве $\mathbb{T}_0(\mathbb{M})$, то экспоненциальное отображение (17.93) можно рассматривать, как отображение касательного пространства в многообразие

$$\exp tu_0 : \quad \mathbb{T}_0(\mathbb{M}) \ni tu_0 \mapsto x(t) \in \mathbb{M}, \tag{17.94}$$

для которого мы сохраним прежнее обозначение.

Замечание. В разделе 3.6.5 экспоненциальное отображение было определено для каждого полного векторного поля. При этом вопрос о том, каким образом данное векторное поле задано, не рассматривался. Если векторное поле одно, то экспоненциальное отображение нельзя рассматривать, как отображение касательного пространства (17.94), т.к. в точке x_0 имеется только один вектор. В рассматриваемом

случае ситуация другая. На многообразии $\mathbb{M}$ задана связность Γ, которая определяет все множество геодезических. Для фиксированной точки x_0 мы рассматриваем множество геодезических, проходящих через данную точку во всех возможных направлениях. То есть вектор скорости u_0 в (17.94) принимает все возможные направления. Следовательно, экспоненциальное отображение можно рассматривать, как отображение касательного пространства. □

По построению, каждая прямая в касательном пространстве $\mathbb{T}_0(\mathbb{M})$, проходящая через начало координат, отображается в соответствующую геодезическую. Ясно, что такое отображение можно построить для каждой точки $x_0 \in \mathbb{M}$.

Если геодезическая неполна, то экспоненциальное отображение (17.94) определено только для некоторого интервала значений канонического параметра $-\epsilon_1 < t < \epsilon_2$, где $\epsilon_{1,2} > 0$. В результате экспоненциальное отображение будет определено в некоторой окрестности начала координат касательного пространства. Если связность на $\mathbb{M}$ класса $\mathcal{C}^\infty$, то экспоненциальное отображение будет того же класса гладкости $\mathcal{C}^\infty$. Поскольку дифференциал экспоненциального отображения в точке x_0 невырожден, то существует окрестность $\mathbb{U}_0 \ni x_0$, такая, что экспоненциальное отображение (17.94) является диффеоморфизмом $\mathbb{U}_0 \to \mathbb{V}_0 \subset \mathbb{T}_0(\mathbb{M})$, где $\mathbb{V}_0$ – некоторая окрестность касательного пространства, содержащая начало координат. Выберем координатный репер $\{\partial_\alpha\}$ в точке x_0 и предположим, что векторы скорости принимают значение на единичной сфере

$$\sum_{\alpha=1}^{n} (u_0^\alpha)^2 = 1.$$

Теперь отождествим касательное пространство $\mathbb{T}_0(\mathbb{M})$ с евклидовым пространством $\mathbb{R}^n$ естественным образом, отождествив координаты касательного вектора $\{tu_0^\alpha\}$ с декартовыми координатами точки $\{y^\alpha\}$ в $\mathbb{R}^n$. В результате получим координатную систему, определенную на $\mathbb{U}_0$.

Определение. Система координат в окрестности $\mathbb{U}_0 \subset \mathbb{M}$ точки x_0, определенная экспоненциальным отображением (17.94),

$$\varphi: \quad \mathbb{M} \supset \mathbb{U}_0 \ni \{x^\alpha(t)\} \mapsto \{y^\alpha := tu_0^\alpha\} \in \mathbb{V}_0 \subset \mathbb{R}^n,$$

называется *нормальной*. □

Замечание. Подчеркнем, что нормальная система координат определена исключительно связностью, а не метрикой, которой вообще может не быть на многообразии. □

Если на многообразии $\mathbb{M}$ помимо связности Γ задана также метрика g, то исходную систему координат x^α в окрестности точки x_0 можно всегда выбрать таким образом, что координатный базис ∂_α будем ортонормальным в данной точке x_0, т.е. $g_{\alpha\beta}(x_0) = \eta_{\alpha\beta}$. Мы всегда предполагаем, что для нормальной системы координат при наличии метрики данное условие выполнено.

Теорема 17.9.6 (Уайтхед). *Пусть y^α – нормальная система координат в окрестности точки $x_0 \in \mathbb{M}$. Определим окрестность $\mathbb{U}_0(\rho)$ точки x_0 равенством $\sum_\alpha (y^\alpha)^2 < \rho^2$. Тогда существует положительное число r такое, что если $0 < \rho < r$, то:*

1) *окрестность $\mathbb{U}_0(\rho)$ является геодезически выпуклой, т.е. любые две точки из $\mathbb{U}_0(\rho)$ можно соединить геодезической, целиком лежащей в $\mathbb{U}_0(\rho)$;*
2) *каждая точка из $\mathbb{U}_0(\rho)$ имеет нормальную координатную окрестность, содержащую $\mathbb{U}_0(\rho)$.*

Доказательство. См. [?]. □

Замечание. Данная теорема справедлива для произвольных достаточно гладких связностей, независимо от того задана ли на многообразии метрика или нет. □

17.10 Полнота римановых многообразий

Пусть задано риманово многообразие $(\mathbb{M}, g)$. В настоящем разделе положительная определенность метрики существенна, и мы будем ее предполагать.

Определение. Рассмотрим две произвольные точки многообразия $p, q \in \mathbb{M}$. *Расстоянием* между этими точками называется нижняя грань интегралов

$$l(p,q) = \inf \int_p^q ds, \qquad ds = \sqrt{\dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta g_{\alpha\beta}} \tag{17.95}$$

по всем кусочно дифференцируемым кривым класса $\mathcal{C}^1$, соединяющим эти точки. □

Функция расстояния определяет отображение

$$l: \quad \mathbb{M} \times \mathbb{M} \ni (p,q) \mapsto l(p,q) \in \mathbb{R}_+.$$

Нетрудно проверить, что все свойства топологической метрики, рассмотренной в разделе (2.3.2) выполнены и, следовательно, функция $l(p,q)$ задает топологическую метрику на $\mathbb{M}$.

Определение. Множество точек

$$\mathbb{B}_r(p) = \{x \in \mathbb{M}: \quad l(x,p) < r\} \tag{17.96}$$

называется *шаром* радиуса r с центром в точке $p \in \mathbb{M}$. □

Предложение 17.10.1. *Функция расстояния (17.95) непрерывна и семейство метрических шаров для всех $p \in \mathbb{M}$ и $r \in \mathbb{R}_+$ образует базу исходной топологии многообразия.*

Доказательство. Следует из непрерывной зависимости интеграла от пределов интегрирования. □

Для связностей Леви–Чивиты на римановых пространствах справедлива

Теорема 17.10.1 (Майерс, Стинрод). *Пусть $(\mathbb{M}_1, g_1)$ и $(\mathbb{M}_2, g_2)$ – римановы многообразия. Пусть l_1 и l_2 – функции расстояния на $\mathbb{M}_1$ и $\mathbb{M}_2$ соответственно. Если задано отображение $f: \mathbb{M}_1 \to \mathbb{M}_2$ (которое не предполагается непрерывным или дифференцируемым), такое, что $l_1(p,q) = l_2\big(f(p), f(q)\big)$ для всех $p, q \in \mathbb{M}_1$, то f есть диффеоморфизм из $\mathbb{M}_1$ на $\mathbb{M}_2$, который отображает метрику g_1 в g_2.*

В частности, каждое отображение f из $\mathbb{M}$ на себя, сохраняющее функцию расстояния l, есть изометрия, т.е. отображение f сохраняет метрику g.

Доказательство. См. [?]. □

Напомним, что топологическое пространство $\mathbb{M}$ и, в частности, многообразие, называется метрически полным, если любая фундаментальная последовательность в $\mathbb{M}$ сходится к некоторой точке из $\mathbb{M}$.

С другой стороны, в разделе 17.2 мы определили экстремали как линии, для которых первая вариация интеграла (17.95) равна нулю. Экстремали являются одновременно геодезическими линиями для связности Леви–Чивиты. Эта связность является полной, если любую экстремаль можно продолжить в обе стороны до бесконечных значений канонического параметра. В этом случае мы говорим, что риманово многообразие полно.

Таким образом было введено два понятия полноты многообразия: метрическая полнота и полнота связности Леви–Чивиты. Оба эти понятия определяются одним геометрическим объектом – римановой метрикой и поэтому между ними существует тесная связь, которую мы здесь рассмотрим.

Теорема 17.10.2 (Хопф, Ринов). *Для связного риманова многообразия следующие условия эквивалентны:*

1) $(\mathbb{M}, g)$ *– полное риманово многообразие;*
2) $(\mathbb{M}, l)$ *– полное метрическое пространство;*
3) каждый замкнутый метрический шар $\overline{\mathbb{B}}_r(p)$ *в* $\mathbb{M}$ *компактен;*
4) для каждой точки $x_0 \in \mathbb{M}$ *экспоненциальное отображение (17.94) определено на всем касательном пространстве* $\mathbb{T}_0(\mathbb{M})$.

Доказательство. См. [**?**]. □

Теорема 17.10.3. *Если* $\mathbb{M}$ *– связное полное риманово многообразие, то* $\mathbb{M}$ *геодезически выпукло, т.е. любые две точки* $p, q \in \mathbb{M}$ *можно соединить минимизирующей экстремалью.*

Доказательство. См., например, [**?**]. □

Следствие. Если все геодезические, исходящие из любой выбранной точки p связного риманова многообразия полны, то $(\mathbb{M}, l)$ – геодезически и метрически полно.

Доказательство. См., например, [**?**]. □

Следствие. Каждое компактное риманово многообразие $(\mathbb{M}, g)$ метрически полно.

Доказательство. Следствие импликации 3) → 1) в теореме 17.10.2. □

Определение. Риманово пространство $(\mathbb{M}, g)$ называется *однородным*, если группа изометрий действует на $\mathbb{M}$ транзитивно. □

Теорема 17.10.4. *Каждое однородное риманово многообразие* $(\mathbb{M}, g)$ *полно.*

Доказательство. Пусть x – точка однородного риманова пространства $(\mathbb{M}, g)$. Тогда существует положительное число $r >$ такое, что для каждого единичного вектора $u \in \mathbb{T}_x(\mathbb{M})$ геодезическая $\exp tu$ определена для каждого $|t| \leq r$. Пусть $\gamma = x(t)$, $0 \leq t \leq s$, – произвольная геодезическая в $\mathbb{M}$ с каноническим параметром t. Покажем, что эта геодезическая γ может быть продолжена до геодезической, определенной, определенное при $0 \leq t \leq s + r$. Пусть $\imath$ – изометрия многообразия $\mathbb{M}$, которая отображает точку x в $x(s)$. Тогда дифференциал обратной изометрии $\imath_*^{-1}$ отображает касательный вектор $\dot{x}(s)$ в u

$$u = \imath_*^{-1}\dot{x}(s).$$

Поскольку $\exp tu$ есть геодезическая, проходящая через точку x, то $\imath(\exp tu)$ – геодезическая, проходящая через $x(s)$. Положим

$$x(s+t) := \imath(\exp tu) \quad \text{для} \quad 0 \le t \le r.$$

Тогда кривая $\gamma = x(t)$ при $0 \le t \le s + r$ является продолжением геодезической. □

Замечание. Доказанная теорема следует также из того общего факта, что каждое локально компактное метрическое однородное пространство полно. □

Теорема 17.10.5. *Пусть $\widetilde{\mathbb{M}}$ и $\mathbb{M}$ – связные римановы многообразия одинаковой размерности. Допустим, что существует изометрическое погружение $p : \widetilde{\mathbb{M}} \to \mathbb{M}$. Тогда:*

1) Если $\widetilde{\mathbb{M}}$ полно, то отображение $p : \widetilde{\mathbb{M}} \to \mathbb{M}$ является накрытием и $\mathbb{M}$ полно.

2) Обратно, если $p : \widetilde{\mathbb{M}} \to \mathbb{M}$ – накрытие и $\mathbb{M}$ полно, то $\widetilde{\mathbb{M}}$ также полно.

Доказательство. См., например, [**?**]. □

Следствие. Пусть $\widetilde{\mathbb{M}}$ и $\mathbb{M}$ – связные многообразия одинаковой размерности и $p : \widetilde{\mathbb{M}} \to \mathbb{M}$ – погружение. Тогда, если многообразие $\widetilde{\mathbb{M}}$ компактно, то $\mathbb{M}$ также компактно, а p – накрывающее отображение.

Доказательство. Возьмем любую риманову метрику g на $\mathbb{M}$. Тогда p^*g – единственная метрика на $\widetilde{\mathbb{M}}$ такая, что p – изометрическое погружение. Поскольку $\widetilde{\mathbb{M}}$ компактно, то, по следствию 17.10, оно полно. Тогда из теоремы 17.10.5 следует, что p – накрывающее отображение и отсюда $\mathbb{M}$ компактно. □

Замечание. В предыдущих теореме и следствии требование одинаковой размерности многообразий $\widetilde{\mathbb{M}}$ и $\mathbb{M}$ является излишним, т.к. погружение возможно только для многообразий одинаковой размерности. □

Определение. Говорят, что связное риманово пространство *непродолжаемо*, если его нельзя изометрически вложить в другое связное риманово пространство как собственное открытое подмногообразие. □

Теорема 17.10.5 показывает, что каждое полное связное риманово многообразие непродолжаемо. Обратное утверждение неверно.

Пример 17.10.1. Пусть $\mathbb{M}$ есть евклидова плоскость с выколотым началом координат, а $\widetilde{\mathbb{M}}$ – его универсальное накрывающее пространство. Как открытое подмногообразие евклидовой плоскости $\mathbb{M}$ имеет естественную евклидову метрику, которая, очевидно неполна. На универсальной накрывающей $\widetilde{\mathbb{M}}$ также задана естественная евклидова метрика. Риманово многообразие $\widetilde{\mathbb{M}}$ неполно по теореме 17.10.5. Может быть доказано, что $\widetilde{\mathbb{M}}$ непродолжаемо. Таким образом, неполное связное риманово многообразие в общем случае может быть непродолжаемо. □

Следствие. Пусть $\mathbb{G}$ – группа изометрий связного риманова многообразия $(\mathbb{M}, g)$. Если орбита $x\mathbb{G}$ точки $x \in \mathbb{M}$ содержит открытое подмножество из $\mathbb{M}$, то орбита $x\mathbb{G}$ совпадает со всем $\mathbb{M}$. Тем самым риманово многообразие $\mathbb{M}$ однородно.

17.11 Формулы Френе

Рассмотрим произвольную гладкую кривую $\gamma = \{x^\alpha(t)\}$ на трехмерном многообразии $\mathbb{M}$, $\dim \mathbb{M} = 3$, с положительно определенной метрикой g. Тогда длина кривой (8.8) отлична от нуля. Выберем длину кривой в качестве канонического параметра t вдоль кривой. Предположим также, что на многообразии задана метрическая связность Γ (геометрия Римана–Картана). Единичный касательный вектор к кривой определяется вектором скорости

$$u^\alpha := \dot{x}^\alpha,$$

где точка обозначает дифференцирование по каноническому параметру t. Дифференцируя тождество $u^2 = 1$, получим

$$\nabla_\beta u^2 = 2u_\alpha \nabla_\beta u^\alpha = 0. \tag{17.97}$$

С учетом этого равенства нетрудно показать, что ковариантная производная (8.9) от u^α вдоль кривой γ (ускорение кривой),

$$\frac{Du^\alpha}{dt} = u^\beta \nabla_\beta u^\alpha = \frac{1}{\rho} n^\alpha, \tag{17.98}$$

где $\rho(t)$ – некоторая функция вдоль кривой, ортогональна вектору скорости. Здесь мы предполагаем, что $u^\beta \nabla_\beta u^\alpha \neq 0$, т.е. кривая γ не является геодезической. Вектор n^α всегда можно выбрать единичным:

$$(u, n) = 0, \qquad n^2 = 1. \tag{17.99}$$

Определение. Единичное векторное поле $n^\alpha(s) \in \mathcal{X}(\mathbb{M}, \gamma)$, определенное вдоль кривой, называется *главной нормалью кривой*. Функция $1/\rho(t)$ называется *кривизной кривой*. □

Поскольку пространство трехмерно, то дополним векторы u^α и n^α до ортонормированного базиса в касательном пространстве с помощью вектора *бинормали* к кривой, определяемого соотношениями

$$(u, b) = 0, \qquad (n, b) = 0, \qquad b^2 = 1. \tag{17.100}$$

Ковариантные производные от n^α и b^α можно разложить по этому базису с некоторыми коэффициентами

$$\begin{aligned} \frac{Dn^\alpha}{dt} &= au^\alpha + bn^\alpha + cb^\alpha, \\ \frac{Db^\alpha}{dt} &= a'u^\alpha + b'n^\alpha + c'b^\alpha. \end{aligned} \tag{17.101}$$

Дифференцируя тождества (17.99), (17.100) вдоль кривой, получим условия на коэффициенты разложения:

$$\frac{1}{\rho} + a = 0, \qquad b = 0, \qquad a' = 0, \qquad c + b' = 0, \qquad c' = 0.$$

Тогда из соотношений (17.98) и (17.101) следуют *формулы Френе*:

$$\begin{aligned} \frac{Du^\alpha}{dt} &= \frac{1}{\rho} n^\alpha, \\ \frac{Dn^\alpha}{dt} &= -\frac{1}{\rho} u^\alpha + \frac{1}{\tau} b^\alpha, \\ \frac{Db^\alpha}{dt} &= -\frac{1}{\tau} n^\alpha, \end{aligned} \tag{17.102}$$

где введено обозначение

$$c = -b' = \frac{1}{\tau}.$$

Функция $1/\tau(t)$ называется *кручением* кривой.

Если кривая задана, то при желании можно найти явные выражения для векторных полей u^α, n^α и b^α, а также вычислить кривизну и кручение кривой. В трехмерном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3$ верно также обратное утверждение (см. [**?**]). А именно, если известны кривизна и кручение как функции канонического параметра вдоль кривой, то можно восстановить кривую в $\mathbb{R}^3$ с точностью до движений (сдвигов, вращений и отражений) всего пространства. Таким образом кривизна и кручение кривой в трехмерном евклидовом пространстве представляют собой полный набор геометрических инвариантов кривой.

Пример 17.11.1. Рассмотрим спираль в трехмерном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3$, ось которой совпадает с осью z:

$$\begin{aligned} x &= R\cos\frac{t}{\sqrt{R^2+v^2}},\\ y &= R\sin\frac{t}{\sqrt{R^2+v^2}},\\ z &= \frac{vt}{\sqrt{R^2+v^2}}, \end{aligned} \tag{17.103}$$

где $R > 0$ и v – постоянные и параметр $t \in \mathbb{R}$ совпадает с длиной спирали. Касательный вектор к спирали имеет следующие компоненты:

$$\begin{aligned} u^x &= -\frac{R}{\sqrt{R^2+v^2}}\sin\frac{t}{\sqrt{R^2+v^2}},\\ u^y &= \frac{R}{\sqrt{R^2+v^2}}\cos\frac{t}{\sqrt{R^2+v^2}},\\ u^z &= \frac{v}{\sqrt{R^2+v^2}}. \end{aligned}$$

Дифференцирование этих равенств по t приводит к следующему вектору главной нормали:

$$\begin{aligned} n^x &= -\cos\frac{t}{\sqrt{R^2+v^2}},\\ n^y &= -\sin\frac{t}{\sqrt{R^2+v^2}},\\ n^z &= 0. \end{aligned}$$

При этом кривизна спирали равна

$$\frac{1}{\rho} = \frac{R}{R^2+v^2}.$$

Дальнейшее дифференцирования полученных равенств по t определяет вектор бинормали:

$$\begin{aligned} b^x &= \frac{v}{\sqrt{R^2+v^2}}\sin\frac{t}{\sqrt{R^2+v^2}},\\ b^y &= -\frac{v}{\sqrt{R^2+v^2}}\cos\frac{t}{\sqrt{R^2+v^2}},\\ b^z &= \frac{R}{\sqrt{R^2+v^2}} \end{aligned}$$

и кручение спирали

$$\frac{1}{\tau} = \frac{v}{R^2 + v^2}.$$

Таким образом вычислены все характеристики спирали.

Если $v = 0$, то спираль вырождается в окружность. Для окружности кривизна и кручение равны

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{R}, \qquad \frac{1}{\tau} = 0. \qquad \square$$

Пример 17.11.2. Кривизна и кручение прямой линии в трехмерном евклидовом пространстве равны нулю.

Замечание. Кривизна $1/\rho$ и кручение $1/\tau$ кривой зависят от метрики g и тензора кручения T трехмерного многообразия $\mathbb{M}$, что следует из определения метрической связности. При выводе формул Френе условие метричности связности важно, т.к. при отличной от нуля неметричности формула (17.97) неверна и ковариантная производная (17.98) не будет ортогональна вектору скорости. Заметим также, что кривизна и кручение кривой являются понятиями, отличными от кривизны и кручения аффинной связности, введенных ранее. $\square$

Посмотрим на геодезические линии с точки зрения введенных выше понятий. Следующее утверждение очевидно.

Предложение 17.11.1. *Кривая γ в трехмерном пространстве Римана–Картана является геодезической тогда и только тогда, когда ее кривизна $1/\rho$ равна нулю.*

Для геодезической линии на $\mathbb{M}$ правая часть уравнения (17.98) равна нулю, и, следовательно, вектор нормали n к геодезической нельзя определить соотношением (17.98). Кручение геодезической линии также неопределено.

При смещении вдоль кривой, отличной от геодезической, на расстояние dt компоненты касательного вектора и вектора главной нормали получают приращение

$$Du^\alpha = \frac{dt}{\rho} n^\alpha, \qquad Dn^\alpha = -\frac{dt}{\rho} u^\alpha + \frac{dt}{\tau} b^\alpha.$$

Отсюда следует, что при параллельном переносе вдоль кривой на бесконечно малое расстояние касательный вектор и вектор главной нормали остаются в плоскостях, натянутых на векторы u^α и n^α, тогда и только тогда, когда кручение кривой равно нулю, $1/\tau = 0$. В этом случае векторы u^α и n^α поворачиваются на угол $d\varphi = -dt/\rho$.

Если рассматривать кривую γ на двумерном многообразии с заданной римановой метрикой и метрической связностью, то вектор бинормали тождественно равен нулю, а формулы Френе принимают вид

$$\begin{aligned} \frac{Du^\alpha}{dt} &= \frac{1}{\rho} n^\alpha, \\ \frac{Dn^\alpha}{dt} &= -\frac{1}{\rho} u^\alpha. \end{aligned}$$

В этом случае кривые нулевой кривизны и только они являются геодезическими.

Глава 18

Симплектические и пуассоновы многообразия

Симплектические и пуассоновы многообразия играют важную роль в дифференциальной геометрии в связи с применениями, в первую очередь, к гамильтоновой динамике, рассмотренной в главе 20.

18.1 Симплектические группы

Симплектические группы играют в симплектической геометрии ту же роль, что и группы вращений в евклидовой геометрии. Поскольку эти группы устроены намного сложнее, чем ортогональные и унитарные матричные группы, то мы посвятим симплектическим группам и их свойствам целый раздел. Более подробное изложение содержится в [**?**].

Определение. Рассмотрим антисимметричную $2n\times 2n$ матрицу (*каноническую симплектическую форму*),

$$\varpi = (\varpi_{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} 0 & -\mathbb{1} \\ \mathbb{1} & 0 \end{pmatrix}, \tag{18.1}$$

где $\alpha, \beta = 1, \ldots, 2n$ и $\mathbb{1}$ – единичная $n \times n$ матрица. Эта матрица определяет билинейную квадратичную форму в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^{2n}$, рассматриваемом, как векторное пространство,

$$\varpi : \quad \mathbb{R}^{2n} \times \mathbb{R}^{2n} \ni X, Y \mapsto \varpi(X, Y) := X^\alpha Y^\beta \varpi_{\alpha\beta} \in \mathbb{R},$$

где X^α и Y^β – компоненты векторов относительно некоторого базиса. Квадратные матрицы A размера $2n \times 2n$ с вещественными элементами, оставляющие каноническую симплектическую форму ϖ инвариантной,

$$A^{\mathrm{T}} \varpi A = \varpi, \tag{18.2}$$

образуют группу Ли $\mathbb{SP}(n, \mathbb{R})$, которая называется *вещественной симплектической группой.* □

Взятие определителя от обеих частей определения (18.2) приводит к равенству $\det A = \pm 1$, поскольку $\det \varpi = 1$. Отсюда следует, что для любой матрицы A существует обратная. Нетрудно убедиться, что обратная матрица также является симплектической, а также в том, что произведение двух симплектических матриц снова дает симплектическую матрицу. Тем самым все групповые аксиомы выполнены.

Каноническая симплектическая форма универсальна в следующем смысле. Если ω – произвольная невырожденная антисимметричная матрица, то из курса линейной алгебры известно, что за счет линейного преобразования базиса в $\mathbb{R}^{2n}$ ее всегда можно преобразовать к каноническому виду (18.1).

Предложение 18.1.1. *Алгебра Ли $\mathfrak{sp}(n,\mathbb{R})$ группы $\mathbb{SP}(n,\mathbb{R})$ состоит из матриц вида*

$$\begin{pmatrix} B & C \\ D & -B^{\mathrm{T}} \end{pmatrix} \in \mathfrak{sp}(n,\mathbb{R}), \tag{18.3}$$

где B – произвольная вещественная $n\times n$ матрица, а вещественные $n\times n$ матрицы C и D симметричны.

Доказательство. Вблизи единицы группы симплектическая матрица представима в виде

$$A = \mathsf{e}^{tM} = \mathbb{1} + tM + \ldots, \qquad t\in\mathbb{R},$$

где $M\in\mathfrak{sp}(n,\mathbb{R})$ – элемент алгебры Ли. Подставляя это разложение в (18.2) в линейном по t порядке получаем равенство

$$M^{\mathrm{T}}\varpi + \varpi M = 0. \tag{18.4}$$

Представим элемент алгебры в блочном виде

$$M = \begin{pmatrix} B & C \\ D & E \end{pmatrix}.$$

Тогда из (18.4) следуют равенства:

$$C = C^{\mathrm{T}}, \qquad D = D^{\mathrm{T}}, \qquad E = -B^{\mathrm{T}} \qquad \square$$

Следствие. Размерность симплектической группы $\mathbb{SP}(n,\mathbb{R})$ равна $n(2n+1)$. $\square$

Выше было отмечено, что $\det A = \pm 1$. Справедливо более сильное утверждение.

Предложение 18.1.2. *Определитель любой симплектической матрицы равен единице*

$$\det A = 1, \qquad A\in\mathbb{SP}(n,\mathbb{R}). \tag{18.5}$$

Доказательство. Любую симплектическую матрицу $A = (A_\alpha{}^\beta)\in\mathbb{SP}(n,\mathbb{R})$, $\alpha,\beta = 1,\ldots,2n$, можно рассматривать, как невырожденное линейное преобразование $2n$-мерного евклидова пространства $\mathbb{R}^{2n}$, которое оставляет каноническую 2-форму ϖ инвариантной. Следовательно, симплектическое преобразование сохраняет инвариантной и любую внешнюю степень формы ϖ. В частности, симплектическое преобразование сохраняет $2n$-форму объема ϖ^n. Известно, что при преобразовании координат форма объема умножается на якобиан преобразования координат. Таким образом для симплектических преобразований имеем

$$\varpi^n = \varpi^n \det A.$$

Отсюда следует равенство (18.5). $\square$

Симплектические группы $\mathbb{SP}(n,\mathbb{R})$ существенно отличаются от групп вращений евклидова пространства. В частности, они являются некомпактными. Продемонстрируем это на примере простейшей группы $\mathbb{SP}(1,\mathbb{R})$.

Теорема 18.1.1. *Группа* $\mathbb{SP}(1,\mathbb{R})$ *изоморфна группе* 2×2 *матриц* $\mathbb{SL}(2,\mathbb{R})$. *С топологической точки зрения эта группа трехмерна некомпактна и гомеоморфна прямому произведению окружности на двумерную плоскость,* $\mathbb{SP}(1,\mathbb{R})\approx\mathbb{S}^1\times\mathbb{R}^2$. *Она неодносвязна, и ее фундаментальная группа изоморфна группе целых чисел*

$$\pi\big(\mathbb{SP}(1,\mathbb{R})\big)\approx\mathbb{Z}.$$

Доказательство. В двумерном случае каноническая симплектическая форма с точностью до знака совпадает с полностью антисимметричным тензором $\varpi_{\alpha\beta}=-\varepsilon_{\alpha\beta}$ (**??**). Рассмотрим матрицу $A\in\mathbb{SP}(1,\mathbb{R})$, как линейное преобразование двумерной евклидовой плоскости $\mathbb{R}^2$. Тогда уравнение (18.2) запишется в виде

$$A_\alpha{}^\gamma A_\beta{}^\delta\varepsilon_{\gamma\delta}=\varepsilon_{\alpha\beta}.$$

Поскольку левая часть уравнения антисимметрична по индексам α и β, то она равна $\det A\,\varepsilon_{\alpha\beta}$. Отсюда следует, что уравнение (18.2) эквивалентно одному уравнению $\det A=1$. Таким образом группа $\mathbb{SP}(1,\mathbb{R})$ изоморфна группе вещественных 2×2 матриц с единичным определителем, т.е. группе $\mathbb{SL}(2,\mathbb{R})$.

Из курса линейной алгебры известно, что любое линейное преобразование плоскости, для которого $\det A=1$, можно однозначно представить в виде композиции двух преобразований: ортогонального поворота плоскости (группа $\mathbb{U}(1)\approx\mathbb{S}^1$) и преобразования, задающегося верхнетреугольной матрицей вида

$$\begin{pmatrix}a & b\\ 0 & 1/a\end{pmatrix},\qquad a>0.$$

Вещественные числа a и b можно рассматривать в качестве координат на полуплоскости $a>0$, которая гомеоморфна всей евклидовой плоскости. Таким образом мы получаем топологическое разложение группы $\mathbb{SP}(1,\mathbb{R})$ на прямое произведение окружности и двумерной плоскости. Прямое произведение $\mathbb{S}^1\times\mathbb{R}^2$ гомотопически эквивалентно окружности (стягивается к окружности), и поэтому фундаментальная группа $\mathbb{SP}(1,\mathbb{R})$ изоморфна фундаментальной группой окружности (теорема 11.3.4). □

Симплектические группы $\mathbb{SP}(n,\mathbb{R})$ при $n>1$ имеют более сложную структуру, и их описание выходит за рамки настоящей монографии. Отметим лишь, что все группы $\mathbb{SP}(n,\mathbb{R})$ некомпактны. В дальнейшем нам понадобятся другой класс групп Ли, который обозначается $\mathbb{SP}(n)$ и состоит из компактных симплектических групп. Они существуют и строятся, как подгруппы в комплексных симплектических группах $\mathbb{SP}(n)\subset\mathbb{SP}(n,\mathbb{C})$.

Рассмотрим $2n$-мерное комплексное пространство $\mathbb{C}^{2n}$ с координатами z^α, $\alpha=1,\dots,2n$. Каноническая симплектическая форма ϖ задает на $\mathbb{C}^{2n}$ симплектическую структуру (билинейную квадратичную форму), т.е. двум векторам X и Y ставится в соответствие число

$$\varpi:\quad \mathbb{C}^{2n}\times\mathbb{C}^{2n}\ni X,Y\mapsto\varpi(X,Y):=X^\alpha Y^\beta\varpi_{\alpha\beta}\in\mathbb{C}.$$

По-определению, симплектическая структура антисимметрична $\varpi(X,Y)=-\varpi(Y,X)$. Невырожденное комплексное линейное преобразование координат называется *симплектическим*, если оно сохраняет каноническую симплектическую структуру. Это преобразование задается комплексной $2n\times 2n$ матрицей $A\in\mathbb{SP}(2n,\mathbb{C})$, которая удовлетворяет тому же равенству (18.2), что и в вещественном случае. Единственное

отличие состоит в том, что элементами матрицы A теперь являются комплексные числа. Эти матрицы образуют *комплексную симплектическую группу* $\mathbb{SP}(n,\mathbb{C})$. Ясно, что группа $\mathbb{SP}(n,\mathbb{R})$ содержится в группе $\mathbb{SP}(n,\mathbb{C})$, как подгруппа вещественных симплектических преобразований.

Представление элементов алгебры Ли $\mathfrak{sp}(n,\mathbb{C})$ в виде (18.3) справедливо и для комплексных симплектических групп, только матрицы B, C и D будут комплексными. Поэтому размерность группы $\mathbb{SP}(n,\mathbb{C})$ в два раза больше размерности вещественной группы $\mathbb{SP}(n,\mathbb{R})$ и равна $2n(2n+1)$. Так же, как и в вещественном случае, группа $\mathbb{SP}(n,\mathbb{C})$ при всех n является некомпактной.

Предложение 18.1.3. *Симплектические группы* $\mathbb{SP}(n,\mathbb{R})$ *и* $\mathbb{SP}(n,\mathbb{C})$ *являются связными, т.е. состоят из одной компоненты.*

Предложение 18.1.4. *Характеристический полином*

$$f(\lambda) = \det(A - \lambda \mathbb{1}) = \sum_{k=1}^{2n} a_k \lambda^k$$

симплектического вещественного преобразования $A \in \mathbb{SP}(n,\mathbb{R})$ *обладает свойством*

$$f(\lambda) = \lambda^{2n} f(1/\lambda),$$

что означает симметричность его коэффициентов $a_k = a_{2n-k}$. *В частности, если* λ *собственное число симплектического преобразования, то* $1/\lambda$ *также собственное число.*

Доказательство. Из определения симплектического преобразования (18.2) следует, что $A = -\varpi A^{-1\mathrm{T}} \varpi$, т.к. $\varpi^2 = -\mathbb{1}$. Отсюда вытекает цепочка равенств

$$\begin{aligned} f(\lambda) &= \det(-\varpi A^{-1\mathrm{T}} \varpi - \lambda \mathbb{1}) = \det(-A^{-1\mathrm{T}} + \lambda \mathbb{1}) \\ &= \det(-\mathbb{1} + \lambda A) = \lambda^{2n} \det\left(A - \frac{1}{\lambda}\mathbb{1}\right), \end{aligned}$$

где мы воспользовались равенством $\det A = \det A^{\mathrm{T}} = 1$. □

Отметим, что у характеристического полинома не может быть нулевого собственного значения, т.к. $\det A = 1$. Поскольку характеристический полином является вещественным, то, если λ – комплексное собственное число, то $\bar{\lambda}$ – также собственное число. Таким образом, в случае общего положения собственные числа вещественного симплектического преобразования разбиваются на четверки $\lambda, \bar{\lambda}, 1/\lambda, 1/\bar{\lambda}$, т.е. собственные числа расположены на комплексной плоскости симметрично относительно вещественной оси и единичной окружности.

По-построению, комплексная симплектическая группа $\mathbb{SP}(n,\mathbb{C})$ содержит некомпактную вещественную подгруппу $\mathbb{SP}(n,\mathbb{R})$. Оказывается, что группа $\mathbb{SP}(n,\mathbb{C})$ содержит компактную подгруппу, которая называется компактной симплектической группой и обозначается через $\mathbb{SP}(n)$. Эту подгруппу удобно определить с использованием алгебры кватернионов $\mathbb{H}$ (см. приложение 21.1).

Определение. Рассмотрим n-мерное кватернионное пространство $\mathbb{H}^n$ с базисом e_{A}, $\mathrm{A} = 1, \ldots, n$. Каждый вектор $q \in \mathbb{H}^n$ однозначно представим в виде $q = q^{\mathrm{A}} e_{\mathrm{A}}$, где каждая координата является кватернионом $q^{\mathrm{A}} \in \mathbb{H}$. Каждый кватернион разлагается по базису $\{1, i, j, k\}$:

$$q^{\mathrm{A}} = a^{\mathrm{A}} + b^{\mathrm{A}} i + c^{\mathrm{A}} j + d^{\mathrm{A}} k.$$

Вещественная размерность $\mathbb{H}^n$ равна $4n$. Очевидно, что $\mathbb{H}^1 = \mathbb{H}$.

Рассмотрим в $\mathbb{H}^n$ симметричное вещественнозначное скалярное произведение

$$(q_1, q_2) := \operatorname{re} q_1\bar{q}_2 = \sum_{\mathrm{A}=1}^{n}(a_1^{\mathrm{A}}a_2^{\mathrm{A}} + b_1^{\mathrm{A}}b_2^{\mathrm{A}} + c_1^{\mathrm{A}}c_2^{\mathrm{A}} + d_1^{\mathrm{A}}d_2^{\mathrm{A}}). \tag{18.6}$$

Множество всех линейных кватернионных преобразований $A \in \mathbb{GL}(n, \mathbb{H})$ пространства $\mathbb{H}^n$, не меняющих начало координат и сохраняющих скалярное произведение

$$(Aq_1, Aq_2) = (q_1, q_2),$$

называется *симплектической компактной группой* $\mathbb{SP}(n)$. □

Кватернионное пространство $\mathbb{H}^n$ естественным образом отождествляется с евклидовым пространством $\mathbb{R}^{4n}$. Тогда скалярное произведение (18.6) совпадает с обычным евклидовым скалярным произведением в $\mathbb{R}^{4n}$. Это значит, что группа $\mathbb{SP}(n)$ является подгруппой в $\mathbb{O}(4n, \mathbb{R})$. Поскольку группа вращений $\mathbb{O}(4n, \mathbb{R})$ компактна, то и симплектическая группа $\mathbb{SP}(n)$ также компактна.

В приложении 21.1 показано, что алгебра кватернионов $\mathbb{H}$ естественным образом отождествляется с двумерным комплексным пространством $\mathbb{C}^2$. Выполняя эту операцию вдоль каждой из кватернионных координат, мы получим отождествление $\mathbb{H}^n$ с $\mathbb{C}^{2n}$. При отождествлении

$$q = z_1 + j\bar{z}_2, \qquad z_1 = a + ib, \quad z_2 = c + id,$$

квадратичная форма двух кватернионов $q_1 = z_{11} + jz_{12}$ и $q_2 = z_{21} + jz_{22}$ перейдет в сумму комплексных квадратичных форм

$$(q_1, q_2)_{\mathbb{H}} := q_1\bar{q}_2 = (q_1, q_2)_{\mathbb{C}} + \langle q_1, q_2\rangle_{\mathbb{C}},$$

где

$$(q_1, q_2)_{\mathbb{C}} = \sum_{\mathrm{A}}(z_{11}^{\mathrm{A}}\bar{z}_{21}^{\mathrm{A}} + z_{12}^{\mathrm{A}}\bar{z}_{22}^{\mathrm{A}}), \qquad \langle q_1, q_2\rangle_{\mathbb{C}} = \sum_{\mathrm{A}}(z_{12}^{\mathrm{A}}z_{21}^{\mathrm{A}} - z_{11}^{\mathrm{A}}z_{22}^{\mathrm{A}}).$$

Квадратичная форма $(q_1, q_2)_{\mathbb{C}}$ эрмитова, т.е. $\overline{(q_1, q_2)}_{\mathbb{C}} = (q_2, q_1)_{\mathbb{C}}$, а форма $\langle q_1, q_2\rangle_{\mathbb{C}}$ антисимметрична: $\langle q_1, q_2\rangle_{\mathbb{C}} = -\langle q_1, q_2\rangle_{\mathbb{C}}$. Отметим, что квадратичная форма $(q_1, q_2)_{\mathbb{H}}$ отличается от квадратичной формы (18.6) отсутствием знака реальной части.

Теорема 18.1.2. *Множество элементов $\mathbb{SP}(n)$ является связной компактной группой Ли вещественной размерности $n(2n+1)$. При отождествлении $\mathbb{H}^n$ с $\mathbb{C}^{2n}$ группа $\mathbb{SP}(n)$ вкладывается как подгруппа в унитарную группу $\mathbb{U}(2n)$. При этом вложении алгебра Ли $\mathfrak{sp}(n)$ группы $\mathbb{SP}(n)$ состоит из комплексных $2n \times 2n$ матриц вида*

$$\begin{pmatrix} Z_1 & Z_2 \\ -\bar{Z}_2 & \bar{Z}_1, \end{pmatrix} \tag{18.7}$$

где Z_1 – комплексная антиэрмитова $n \times n$ матрица, а Z_2 – комплексная симметричная $n \times n$ матрица. Если матрицы из унитарной группы $\mathbb{U}(2n)$ представить в виде

$$\begin{pmatrix} U_1 & U_2 \\ U_3 & U_4, \end{pmatrix}$$

где U_1, U_2, U_3 и U_4 – комплексные $n \times n$ матрицы, то подгруппа $\mathbb{SP}(n)$ в $\mathbb{U}(2n)$ состоит из унитарных матриц вида

$$\begin{pmatrix} U_1 & U_2 \\ -\overline{U}_2 & \overline{U}_1 . \end{pmatrix} \tag{18.8}$$

При этом матрица (18.8) является унитарной тогда и только тогда, когда комплексные матрицы U_1 и U_2 удовлетворяют уравнениям $U_1 U_1^\dagger + U_2 U_2^\dagger = \mathbb{1}$ и $U_2 U_1^{\mathrm{T}} = U_1 U_2^{\mathrm{T}}$.

Доказательство. Проводится прямой проверкой [?]. □

Связь симплектических групп с другими матричными группами дается следующими двумя теоремами, доказательство которых дано, например, в [?].

Теорема 18.1.3. *Рассмотрим стандартные вложения групп $\mathbb{O}(n) \hookrightarrow \mathbb{U}(n)$, $\mathbb{U}(n) \hookrightarrow \mathbb{SO}(2n)$, $\mathbb{SP}(n) \hookrightarrow \mathbb{U}(2n)$. Тогда имеют место следующие соотношения:*

1) $\mathbb{SO}(2n) \cap \mathbb{SP}(n) = \mathbb{U}(n)$; здесь группы $\mathbb{SO}(2n)$ и $\mathbb{SP}(n)$ рассматриваются, как подгруппы в одной группе $\mathbb{U}(2n)$;

2) $\mathbb{SP}(n, \mathbb{C}) \cap \mathbb{U}(2n) = \mathbb{SP}(n)$;

3) $\mathbb{SP}(n, \mathbb{R}) \cap \mathbb{GL}(2n, \mathbb{C}) = \mathbb{U}(n)$;

4) $\mathbb{SP}(n, \mathbb{R}) \cap \mathbb{U}(2n) = \mathbb{U}(n)$.

Теорема 18.1.4. *Для компактных симплектических групп $\mathbb{SP}(1)$ и $\mathbb{SP}(2)$ имеют место изоморфизмы:*

$$\mathbb{SP}(1) \simeq \mathbb{SU}(2) \simeq \mathbb{SPIN}(3), \qquad \mathbb{SP}(2) \simeq \mathbb{SPIN}(5).$$

При больших $n > 2$ компактные симплектические группы $\mathbb{SP}(n)$ уже не сводятся к унитарным и ортогональным группам.

Теорема 18.1.5. *Группа $\mathbb{SP}(n)$ является максимальной компактной подгруппой в комплексной симплектической группе $\mathbb{SP}(n, \mathbb{C})$.*

Доказательство. См., например, []. □

Теорема 18.1.6. *Все компактные симплектические группы $\mathbb{SP}(n)$ односвязны.*

Доказательство. См., например, [?]. □

18.2 Симплектические многообразия

Определение. Многообразие $\mathbb{M}$ четной размерности, $\mathsf{dim}\,\mathbb{M} = 2n$, называется *симплектическим*, если на нем задана 2-форма

$$\omega = \frac{1}{2} dx^\alpha \wedge dx^\beta \omega_{\alpha\beta} \in \Lambda_2(\mathbb{M}),$$

удовлетворяющая двум условиям:

1) $\mathsf{det}\,\omega_{\alpha\beta} \neq 0, \quad \forall x \in \mathbb{M}$ – невырожденность,

2) $d\omega = 0$ – замкнутость.

Форма ω называется *симплектической*. □

Пусть на многообразии $\mathbb{M}$ задано два векторных поля $X, Y \in \mathcal{X}(\mathbb{M})$. Тогда форма ω называется невырожденной, если из условия $\omega(X,Y) = 0$ для всех $Y \in \mathcal{X}(\mathbb{M})$ следует $X = 0$. Легко проверить, что данное инвариантное определение невырожденности 2-формы эквивалентно условию $\det \omega_{\alpha\beta} \neq 0$, которое должно выполняться во всех картах и для всех точек $x \in \mathbb{M}$.

По-определению, компоненты симплектической формы антисимметричны относительно перестановки индексов. Это значит, что ее невырожденность возможна только на многообразиях четной размерности. Поэтому размерность многообразия включена в определение.

В координатах замкнутость симплектической формы ω записывается в виде дифференциального уравнения

$$\partial_\alpha \omega_{\beta\gamma} + \partial_\beta \omega_{\gamma\alpha} + \partial_\gamma \omega_{\alpha\beta} = 0. \tag{18.9}$$

Рассмотрим связь симплектических форм с ориентацией многообразий и формами объема.

Теорема 18.2.1. *Пусть ω – замкнутая 2-форма на многообразии $\mathbb{M}$, $\dim \mathbb{M} = 2n$. Для того, чтобы эта форма была симплектической необходимо и достаточно, чтобы $2n$-форма ω^n была формой объема на $\mathbb{M}$, т.е. нигде не обращалась в нуль.*

Доказательство. Следствие предложения 4.4.3. □

Следствие. Любое симплектическое многообразие $(\mathbb{M}, \omega)$ ориентируемо. □

Доказательство. Отличие от нуля формы ω^n согласно теореме 11.4.3 достаточно для ориентируемости. □

Обычно симплектическое многообразие $(\mathbb{M}, \omega)$ ориентируют формой объема υ с дополнительным множителем:

$$\upsilon = \frac{1}{n!}(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} \omega^n, \tag{18.10}$$

чтобы согласовать выбор канонических координат (см. ниже) с канонической ориентацией евклидова пространства.

Пример 18.2.1. Рассмотрим каноническую 2-форму (18.1) на евклидовом пространстве $\mathbb{R}^{2n}$

$$\varpi = \frac{1}{2} dx^\alpha \wedge dx^\beta \varpi_{\alpha\beta} = dx^{n+1} \wedge dx^1 + dx^{n+2} \wedge dx^2 + \ldots + dx^{2n} \wedge dx^n. \tag{18.11}$$

Она невырождена, т.к. $\det \varpi_{\alpha\beta} = 1$, и замкнута, поскольку компоненты формы постоянны. Тем самым форма ϖ определяет симплектическую форму на евклидовом пространстве. Поскольку

$$\varpi^n = (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} n! dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^{2n},$$

то соответствующая форма объема

$$\upsilon = \frac{1}{n!}(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} \varpi^n = dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^{2n} \tag{18.12}$$

является канонической формой объема евклидова пространства (4.73). □

Обратное утверждение о связи между наличием формы объема и симплектической формы неверно. Для двумерных многообразий это так: всякая ориентируемая поверхность допускает симплектическую структуру. Это просто полностью антисимметричный тензор второго ранга

$$\omega = \upsilon = \frac{1}{2} dx^\alpha \wedge dx^\beta \varepsilon_{\alpha\beta} = dx^1 \wedge dx^2 \sqrt{|g|}.$$

Для ориентируемых многообразий более высокой размерности $\dim \mathbb{M} = 2n$, $n > 1$, симплектическая форма существует не всегда.

Следующая конструкция позволяет строить симплектические структуры на произвольном кокасательном расслоении $\mathbb{T}^*(\mathbb{M})$, $\dim \mathbb{M} = n$, которое имеет размерность $2n$.

Определение. Пусть $X_r \in \mathbb{T}_r\big(\mathbb{T}^*(\mathbb{M})\big)$ – произвольный касательный вектор к кокасательному расслоению в точке $r \in \mathbb{T}^*(\mathbb{M})$. Определим *каноническую линейную форму* Θ на $\mathbb{T}^*(\mathbb{M})$, которая называется *формой Лиувилля* или *относительным интегральным инвариантом Пуанкаре*, следующим соотношением

$$\Theta(X_r) = r(\pi_* X_r), \tag{18.13}$$

где π_* – дифференциал проекции кокасательного расслоения, $\pi : \mathbb{T}^*(\mathbb{M}) \to \mathbb{M}$. □

Теорема 18.2.2. *На кокасательном расслоении $\mathbb{T}^*(\mathbb{M})$ к произвольному многообразию $\mathbb{M}$ существует симплектическая структура.*

Доказательство. Заметим, что r является линейной формой на $\mathbb{T}_{\pi(r)}(\mathbb{M})$ и $\pi_* X_r$ – касательный вектор в точке $\pi(r)$. Следовательно, форма Лиувилля (18.13) определена всюду на кокасательном расслоении $\mathbb{T}^*(\mathbb{M})$. Пусть q^α – локальная система координат на $\mathbb{U} \subset \mathbb{M}$. Введем на $\pi^{-1}(\mathbb{U})$ координаты $(x^1, \ldots, x^{2n}) = (q^1, \ldots, q^n, p_1, \ldots, p_n)$ следующим образом. Пусть q^α, $\alpha = 1, \ldots, n$ – координаты на $\mathbb{U}$. Формы $dx^1, \ldots, dx^n$ порождают пространство 1-форм на $\mathbb{U}$. Поэтому для всякой 1-формы $r \in \pi^{-1}(\mathbb{U})$ имеем

$$r = dq^\alpha p_\alpha.$$

Разложим касательный вектор X_r по координатному базису (q, p):

$$X_r = X_r^\alpha \frac{\partial}{\partial q^\alpha} + X_{r\alpha} \frac{\partial}{\partial p_\alpha}.$$

Тогда

$$\pi_* X_r = X_r^\alpha \frac{\partial}{\partial x^\alpha},$$

и условие (18.13) принимает вид

$$\Theta(X_r) = X_r^\alpha p_\alpha.$$

Таким образом получаем выражение для формы Лиувилля в локальных координатах:

$$\Theta = dx^\alpha p_\alpha. \tag{18.14}$$

Внешняя производная от формы Лиувилля имеет вид

$$d\Theta = dp_\alpha \wedge dq^\alpha = \frac{1}{2} dx^{\mathrm{A}} \wedge dx^{\mathrm{B}} \varpi_{\mathrm{AB}}, \qquad \mathrm{A}, \mathrm{B} = 1, \ldots, 2n,$$

т.е. совпадает с канонической симплектической формой ϖ. Таким образом построена невырожденная замкнутая 2-форма $d\Theta$ на произвольном кокасательном расслоении. □

Форма Лиувилля естественна в том смысле, что для любого сечения $\sigma : \mathbb{M} \to \mathbb{T}^*(\mathbb{M})$ возврат отображения σ^* переводит 1-форму Θ в r: $\sigma^*(\Theta) = r$.

Следствие. Любое кокасательное расслоение $\mathbb{T}^*(\mathbb{M})$ ориентируемо. □

Замечание. В гамильтоновом подходе к описанию динамики точечных частиц (см. главу 20) многообразие $\mathbb{M}$ и его кокасательное расслоение $\mathbb{T}^*(\mathbb{M})$ отождествляются, соответственно, с конфигурационным и фазовым пространствами. □

Поскольку ранг симплектической 2-формы максимален и равен $2n$, то ее класс также равен $2n$. В этом случае теорема Дарбу (4.4.4) формулируется следующим образом.

Теорема 18.2.3 (Дарбу). *Пусть задано симплектическое многообразие $(\mathbb{M}, \omega)$. Тогда у каждой точки $x \in \mathbb{M}$ существует такая координатная окрестность $\mathbb{U}_x \subset \mathbb{M}$, в которой симплектическая форма принимает канонический вид*

$$\omega = \varpi.$$

Определение. Координаты, в которых симплектическая форма имеет канонический вид, называются *координатами Дарбу.* □

Замечание. В главе 5 мы видели, что метрику g на многообразии $\mathbb{M}$ за счет выбора системы координат можно привести к каноническому виду только в фиксированной точке $x \in \mathbb{M}$. Лучшее, что можно сделать в общем случае, это привести метрику к каноническому виду вдоль произвольной кривой $\gamma \in \mathbb{M}$. В этом отношении симплектические многообразия проще. Согласно теореме Дарбу симплектическую форму можно привести к каноническому виду не только в данной точке многообразия, но и в некоторой окрестности этой точки. □

Поскольку симплектическая структура $\omega_{\alpha\beta}(x)$ является невырожденной, то в каждой точке $x \in \mathbb{M}$ существует обратная матрица $\omega^{-1\,\alpha\beta}(x)$, которая также антисимметрична:

$$\omega^{-1\,\alpha\beta}\omega_{\beta\gamma} = \omega_{\gamma\beta}\omega^{-1\,\beta\alpha} = \delta^\alpha_\gamma, \qquad \omega^{-1\,\alpha\beta} = -\omega^{-1\,\beta\alpha}.$$

Замечание. Если на симплектическом многообразии $(\mathbb{M}, \omega)$ задана также метрика g, то в общем случае

$$\omega^{-1\,\alpha\beta} \neq \omega^{\alpha\beta} := g^{\alpha\gamma}g^{\beta\delta}\omega_{\gamma\delta}.$$ □

Пример 18.2.2. Для канонической симплектической структуры (18.1)

$$\varpi^{-1} = (\varpi^{-1\alpha\beta}) = -\varpi = \varpi^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ -\mathbb{1} & 0 \end{pmatrix}.$$ □

Симплектическая структура устанавливает взаимно однозначное соответствие сечений касательных и кокасательных расслоений. В компонентах данное соответствие задается простым правилом:

$$A_\alpha = X^\beta\omega_{\beta\alpha}, \quad X^\alpha = A_\beta\omega^{-1\,\beta\alpha}, \qquad X \in \mathcal{X}(\mathbb{M}), \quad A \in \Lambda_1(\mathbb{M}). \tag{18.15}$$

Замкнутость симплектической формы (18.9) для обратного тензора $\omega^{-1\,\alpha\beta}(x)$ можно переписать в виде

$$\omega^{-1\,\alpha\delta}\partial_\delta\omega^{-1\,\beta\gamma} + \omega^{-1\,\beta\delta}\partial_\delta\omega^{-1\,\gamma\alpha} + \omega^{-1\,\gamma\delta}\partial_\delta\omega^{-1\,\alpha\beta} = 0.$$

Для этого достаточно свернуть равенство (18.9) с обратными матрицами $\omega^{-1\,\alpha\beta}$.

Используя внутреннее умножение (4.23), формулы (18.15) можно переписать в инвариантном виде:

$$A = \mathsf{i}_{X_A}\omega = X_A\rfloor\omega,$$

где X_A – векторное поле, соответствующее 1-форме A.

Поскольку симплектическая структура на $\mathbb{M}$ устанавливает взаимно однозначное соответствие между множеством векторных полей $\mathcal{X}(\mathbb{M})$ и пространством 1-форм $\Lambda_1(\mathbb{M})$, то структуру алгебры Ли на $\mathcal{X}(\mathbb{M})$ можно перенести на $\Lambda_1(\mathbb{M})$. Для двух произвольных 1-форм $A, B \in \Lambda_1(\mathbb{M})$ положим

$$[A, B] = [X_A, X_B]\rfloor\omega. \tag{18.16}$$

Тем самым линейное пространство $\Lambda_1(\mathbb{M})$ приобретает структуру алгебры Ли. Таким образом коммутатору векторных полей ставится в соответствие *скобка Пуассона* 1-форм (18.16).

В компонентах $A = dx^\alpha A_\alpha$, $B = dx^\alpha B_\beta$ и

$$[A, B] = dx^\alpha \left[(A_\beta\partial_\gamma B_\alpha + B_\gamma\partial_\beta A_\alpha)\omega^{-1\beta\gamma} + A_\beta B_\gamma\partial_\alpha\omega^{-1\beta\gamma}\right]. \tag{18.17}$$

Эта формула получается прямыми вычислениями.

Скобку Пуассона двух 1-форм можно выразить через производную Ли:

$$\begin{aligned}\mathsf{L}_{X_A}B &= \mathsf{L}_{X_A}(X_B\rfloor\omega) = \\ &= \mathsf{L}_{X_A}X_B\rfloor\omega + X_B\rfloor(\mathsf{L}_{X_A}\omega) = \\ &= [X_A, X_B]\rfloor\omega + X_B\rfloor\,(X_A\rfloor d\omega + d(X_A\rfloor\omega)) = \\ &= [A, B] + X_B\rfloor dA,\end{aligned}$$

где мы воспользовались линейностью производной Ли, основной формулой гомотопии (4.42) и замкнутостью симплектической формы. Отсюда следует выражение для скобки Пуассона через производную Ли:

$$[A, B] = L_{X_A}B - X_B\rfloor dA. \tag{18.18}$$

Если 1-формы A и B замкнуты, то полученное выражение упрощается:

$$[A, B] = L_{X_A}B = -\,\mathsf{L}_{X_B}A.$$

Предложение 18.2.1. *Скобка Пуассона двух замкнутых форм является точной формой.*

Доказательство. Из основной формулы гомотопии (4.42) следует, что для любой замкнутой формы A справедливо равенство $\mathsf{L}_X A = d(X\rfloor A)$. □

В компонентах скобка Пуассона двух замкнутых 1-форм (18.17) принимает простой вид

$$[A, B] = dx^\alpha\partial_\alpha(\omega^{-1\beta\gamma}A_\beta B_\gamma).$$

Скобку Пуассона можно также определить в алгебре функций на $\mathbb{M}$. А именно, каждая симплектическая структура определяет скобку Пуассона двух дифференцируемых функций $f(x)$ и $g(x)$ класса $\mathcal{C}^2$:

$$[f, g] = \omega^{-1\,\alpha\beta}\frac{\partial f}{\partial x^\alpha}\frac{\partial g}{\partial x^\beta}. \tag{18.19}$$

Дважды непрерывная дифференцируемость функций необходима для выполнения тождеств Якоби.

Замечание. Поля $\omega^{-1\,\alpha\beta}(x)$ являются компонентами антисимметричного контравариантного тензора второго ранга. Они являются частным случаем пуассоновой структуры, рассмотренной в следующем разделе. □

Замечание. Суперсимметричные модели часто формулируются в суперпространстве $\mathbb{N}$. Не вдаваясь в детали определения супепространства, отметим следующее. Пусть на $\mathbb{N}$ задана локальная система координат x^i, θ^α $(i = 1, \ldots, m,\ \alpha = 1, \ldots, 2n)$, где x^i – обычные коммутирующие координаты на подмногообразии $\mathbb{M} \subset \mathbb{N}$, а координаты θ^α, являются антикоммутирующими: $\theta^\alpha\theta^\beta = -\theta^\beta\theta^\alpha$. Тогда симплектическая форма $\omega \in \Lambda_2(\mathbb{M})$ играет роль метрики для антикоммутирующих переменных. Поэтому симплектические группы и многообразия играют важную роль в суперсимметричных моделях. □

Пусть на симплектическом многообразии $(\mathbb{M}, \omega)$ задана также аффинная геометрия, т.е. метрика g и аффинная связность Γ. Назовем аффинную связность *согласованной с симплектической структурой*, если ковариантная производная симплектической формы равна нулю:

$$\nabla_\alpha \omega_{\beta\gamma} = \partial_\alpha \omega_{\beta\gamma} - \Gamma_{\alpha\beta}{}^\delta \omega_{\delta\gamma} - \Gamma_{\alpha\gamma}{}^\delta \omega_{\beta\delta} = 0. \tag{18.20}$$

Рассмотрим линейную комбинацию ковариантных производных, в которой слагаемые отличаются циклической перестановкой индексов

$$\nabla_\alpha \omega_{\beta\gamma} + \nabla_\beta \omega_{\gamma\alpha} + \nabla_\gamma \omega_{\alpha\beta}.$$

Слагаемые с производными от симплектической формы сокращаются ввиду замкнутости ω, и мы получаем уравнение на тензор кручения

$$T_{\alpha\beta}{}^\delta \omega_{\delta\gamma} + T_{\beta\gamma}{}^\delta \omega_{\delta\alpha} + T_{\gamma\alpha}{}^\delta \omega_{\delta\beta} = 0. \tag{18.21}$$

Это необходимое условие для того, чтобы аффинная связность была согласована с симплектической структурой, но не достаточное.

18.3 Пуассоновы многообразия

Рассмотрим множество скалярных полей $f, g, \ldots \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{M})$ (алгебру гладких функций) на многообразии $\mathbb{M}$ произвольной размерности n.

Определение. Билинейное отображение

$$J: \quad \mathcal{C}^\infty(\mathbb{M}) \times \mathcal{C}^\infty(\mathbb{M}) \ni f, g \mapsto [f, g] \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{M})$$

называется *пуассоновой структурой* или *скобкой Пуассона*, если выполнены следующие четыре условия:

1) $[af + bg, h] = a[f, h] + b[g, h], \quad a, b \in \mathbb{R}$ – линейность,
2) $[f, g] = -[g, f]$ – антисимметрия,
3) $[f, gh] = [f, g]h + g[f, h]$ – правило Лейбница,
4) $[f, [g, h]] + [g, [h, f]] + [h, [f, g]] = 0$ – тождество Якоби.

Многообразие с заданной скобкой Пуассона называется *пуассоновым*. □

Из линейности скобки Пуассона и правила Лейбница следует, что скобка Пуассона постоянной функции $f = C = \mathsf{const}$ с произвольной функцией равна нулю:

$$[C, g] = 0.$$

Используя это свойство, получим явное выражение для скобки Пуассона в локальной системе координат x^α. С этой целью разложим функции f и g в ряды Тейлора в окрестности произвольной точки x_0:

$$f(x) = f_0 + (x^\alpha - x_0^\alpha)\left.\frac{\partial f}{\partial x^\alpha}\right|_{x=x_0} + \dots$$
$$g(x) = g_0 + (x^\alpha - x_0^\alpha)\left.\frac{\partial g}{\partial x^\alpha}\right|_{x=x_0} + \dots$$

Тогда

$$[f, g] = [x^\alpha - x_0^\alpha, x^\beta - x_0^\beta]\left.\frac{\partial f}{\partial x^\alpha}\frac{\partial g}{\partial x^\beta}\right|_{x=x_0} + \mathsf{o}(x - x_0) =$$
$$= [x^\alpha, x^\beta]\left.\frac{\partial f}{\partial x^\alpha}\frac{\partial g}{\partial x^\beta}\right|_{x=x_0} + \mathsf{o}(x - x_0).$$

Таким образом, в точке x_0 скобка определяется первым слагаемым. Поскольку точка x_0 произвольна, то получаем явное выражение для скобки Пуассона в координатах

$$[f, g] = J^{\alpha\beta}\frac{\partial f}{\partial x^\alpha}\frac{\partial g}{\partial x^\beta}, \tag{18.22}$$

где введены *структурные функции* пуассонова многообразия:

$$J^{\alpha\beta} = [x^\alpha, x^\beta] \tag{18.23}$$

Напомним, что каждую координату можно рассматривать, как функцию на многообразии $x^\alpha : \mathbb{M} \ni x \mapsto x^\alpha(x) \in \mathbb{R}$, поэтому для координатных функций скобка Пуассона (18.23) определена.

Скобка Пуассона (18.22) совпадает со скобкой Пуассона (18.19), введенной для симплектической структуры при $J^{\alpha\beta} = \omega^{-1\alpha\beta}$.

По-построению структурные функции $J^{\alpha\beta}(x)$ представляют собой компоненты антисимметричного тензора второго ранга, и выражение в правой части равенства (18.22) является функцией. Из определения скобки Пуассона следует, что структурные функции антисимметричны,

$$J^{\alpha\beta} = -J^{\beta\alpha},$$

и удовлетворяют тождеству Якоби:

$$J^{\alpha\delta}\partial_\delta J^{\beta\gamma} + J^{\beta\delta}\partial_\delta J^{\gamma\alpha} + J^{\gamma\delta}\partial_\delta J^{\alpha\beta} = 0, \tag{18.24}$$

где слагаемые отличаются циклической перестановкой индексов α, β, γ. Легко проверяется, что произвольный антисимметричный тензор второго ранга, удовлетворяющий тождеству Якоби, взаимно однозначно определяет скобку Пуассона (18.22).

Пример 18.3.1. Произвольная постоянная антисимметричная матрица определяет пуассонову структуру в некоторой системе координат. Действительно, тождества Якоби в этом случае выполняются. □

Пуассонова структура является билинейным дифференциальным оператором и записывается также в виде

$$J(f,g) := [f,g] = J^{\alpha\beta}\partial_\alpha f \partial_\beta g.$$

Поэтому для нее применяют иногда обозначение

$$J = \frac{1}{2} J^{\alpha\beta}\partial_\alpha \wedge \partial_\beta,$$

где знак $\wedge$ обозначает внешнее умножение (см. раздел 4).

Если на многообразии помимо пуассоновой структуры J задана также аффинная связность Γ, то тождество Якоби (18.24) можно переписать в явно ковариантном виде

$$\begin{aligned} &J^{\alpha\delta}\nabla_\delta J^{\beta\gamma} + J^{\beta\delta}\nabla_\delta J^{\gamma\alpha} + J^{\gamma\delta}\nabla_\delta J^{\alpha\beta} \\ &- J^{\alpha\delta}T_{\delta\epsilon}{}^{\beta}J^{\epsilon\gamma} - J^{\beta\delta}T_{\delta\epsilon}{}^{\gamma}J^{\epsilon\alpha} - J^{\gamma\delta}T_{\delta\epsilon}{}^{\alpha}J^{\epsilon\beta} = 0, \end{aligned}$$

где $T_{\alpha\beta}{}^{\gamma}$ – тензор кручения аффинной связности. Это доказывает, что тождества Якоби ковариантны, и их выполнение в одной системе координат влечет за собой их выполнение во всех других системах. Впрочем, это можно было бы и не доказывать, т.к. определение пуассоновой структуры было дано в инвариантном виде.

Если матрица структурных функций невырождена, $\det J^{\alpha\beta} \neq 0$, то она имеет обратную $J^{-1}_{\alpha\beta}$:

$$J^{\alpha\beta}J^{-1}_{\beta\gamma} = \delta^{\alpha}_{\gamma},$$

которая также антисимметрична. Это значит, что контравариантный тензор $J^{\alpha\beta}$ взаимно однозначно определяет 2-форму $dx^\alpha \wedge dx^\beta J^{-1}_{\alpha\beta}$ на многообразии. Из тождеств Якоби (18.24) следует, что 2-форма $J^{-1}_{\alpha\beta}$ замкнута,

$$\partial_\alpha J^{-1}_{\beta\gamma} + \partial_\beta J^{-1}_{\gamma\alpha} + \partial_\gamma J^{-1}_{\alpha\beta} = 0,$$

т.е. является симплектической (см. раздел 18.2). Легко проверяется и обратное утверждение: произвольная симплектическая форма $\omega_{\alpha\beta} = J^{-1}_{\alpha\beta}$ определяет пуассонову структуру на многообразии с невырожденными структурными функциями. При этом тождества Якоби следуют из условия замкнутости формы. Таким образом пуассоновы структуры с невырожденными структурными функциями находятся во взаимно однозначном соответствии с симплектическими формами на многообразии.

В общем случае структурные функции пуассоновой структуры могут быть вырождены. Это значит, в частности, что, в отличие от симплектической структуры, скобка Пуассона может быть также определена на многообразии нечетной размерности. *Рангом* пуассоновой структуры называется ранг матрицы $J^{\alpha\beta}$ структурных функций. Ввиду антисимметрии $J^{\alpha\beta}$ ранг пуассоновой структуры может быть только четным. В общем случае ранг пуассоновой структуры может меняться от точки к точке.

Если пуассонова структура вырождена, $\det J^{\alpha\beta} = 0$, то существуют *функции Казимира* $c \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{U})$, определенные, возможно, только в некоторой области $\mathbb{U} \subset \mathbb{M}$. Они определяются следующим равенством

$$[c,f] = 0, \quad \forall f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{U}). \tag{18.25}$$

В координатах это равенство принимает вид

$$J^{\alpha\beta}\partial_\beta c = 0.$$

Очевидно, что любое решение этих уравнений определено с точностью до аддитивной постоянной. Если пуассонова структура невырождена, то константы $c = \mathsf{const}$ являются единственными функциями Казимира.

Пусть ранг матрицы $J^{\alpha\beta}$ постоянен на $\mathbb{M}$ и равен $\mathsf{rank}\, J^{\alpha\beta} = 2m < n$. Количество функционально независимых функций Казимира c^{A}, $\mathrm{A} = 1, \ldots, n-2m$, равно числу функционально независимых решений уравнения (18.25), т.е. разности между размерностью многообразия n и рангом пуассоновой структуры $2m$. Если все функции Казимира известны и определены на всем $\mathbb{M}$, то условия $c^{\mathrm{A}} = \mathsf{const}$ выделяет в $\mathbb{M}$ подмногообразие $\mathbb{U}$ размерности $2m$. В следующем разделе мы увидим, что сужение J на это подмногообразие приводит к невырожденной пуассоновой структуре на $\mathbb{U}$.

Из определения функций Казимира следует, в частности, что скобка Пуассона двух функций Казимира равна нулю:

$$[c^{\mathrm{A}}, c^{\mathrm{B}}] = J^{\alpha\beta}\partial_\alpha c^{\mathrm{A}}\partial_\beta c^{\mathrm{B}} = 0. \tag{18.26}$$

Пусть задано пуассоново многообразие $(\mathbb{M}, J)$. Наличие пуассоновой структуры на алгебре функций $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{M})$ задает билинейное отображение, которое превращает множество функций в алгебру Ли. Эта алгебра Ли гомоморфно отображается в алгебру Ли векторных полей на $\mathbb{M}$ следующим образом. Скобка Пуассона координатных функций x^α с произвольной функцией f определяет компоненты векторного поля $X_f = X_f^\alpha \partial_\alpha$, где

$$X_f^\alpha = [f, x^\alpha] = -J^{\alpha\beta}\partial_\beta f.$$

Таким образом, мы имеем отображение множества гладких функций в алгебру Ли векторных полей

$$\mathcal{C}^\infty(\mathbb{M}) \ni f \mapsto X_f \in \mathcal{X}(\mathbb{M}). \tag{18.27}$$

Предложение 18.3.1. *Скобка Пуассона двух функций $f, g \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{M})$ связана с коммутатором соответствующих векторных полей соотношением*

$$[X_f, X_g] = X_{[f,g]}. \tag{18.28}$$

То есть отображение (18.27) является гомоморфизмом.

Доказательство. Простое следствие тождеств Якоби. □

Если пуассонова структура невырождена, то гомоморфизм (18.27) имеет нетривиальное ядро, состоящее из функций, постоянных на $\mathbb{M}$. Если пуассонова структура вырождена, то ядро отображения (18.28) включает также линейную оболочку функций Казимира.

Предложение 18.3.2. *Векторное поле X_f, порожденное произвольной функцией f, сохраняет скобку Пуассона. А именно, производная Ли вдоль векторного поля X_f от структурных функций равна нулю:*

$$\mathsf{L}_{X_f} J = 0.$$

Доказательство. Простая проверка. □

Обсудим связь пуассоновых структур с гамильтоновой динамикой точечных частиц. Рассмотрим произвольную функцию $H \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{M})$ и соответствующее векторное поле X_H. Тогда экспоненциальное отображение, определяемое системой уравнений

$$\dot{x}^\alpha = -X_H^\alpha = [x^\alpha, H] = J^{\alpha\beta}\partial_\beta H,$$

является ни чем иным, как уравнениями движения механической системы точечных частиц в канонической (гамильтоновой) форме. При этом точка обозначает дифференцирование по времени, и $H = H(x)$ – гамильтониан системы. Векторное поле

$$X_H = -J^{\alpha\beta}\partial_\beta H \partial_\alpha \tag{18.29}$$

называется *гамильтоновым*. Другими словами, каждую функцию на пуассоновом многообразии можно рассматривать, как гамильтониан некоторой механической системы. При этом каждому гамильтониану соответствует свое гамильтоново векторное поле.

Легко проверить, что для каждого гамильтонова векторного поля справедливо равенство

$$X_H f = [f, H]. \tag{18.30}$$

Пример 18.3.2. Механическая система, состоящая из N точечных частиц, в фазовом пространстве описывается координатами q^i и импульсами p_i, $i = 1, \cdots, \mathrm{N}$, со скобками Пуассона

$$[q^i, p_j] = \delta^i_j, \quad [q^i, q^j] = 0, \quad [p_i, p_j] = 0.$$

Фазовое пространство представляет собой 2N-мерное пуассоново многообразие. В координатах $\{x^\alpha\} = \{q^1, \ldots, q^{\mathrm{N}}, p_1, \ldots, p_{\mathrm{N}}\}$ структурные функции имеют вид

$$J^{\alpha\beta} = \varpi^{-1\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ -\mathbb{1} & 0 \end{pmatrix}. \tag{18.31}$$

Эта пуассонова структура невырождена и называется *канонической*. Как матрица каноническая пуассонова структура с точностью до знака совпадает с канонической симплектической формой (18.1), однако ее индексы расположены сверху, что соответствует контравариантному тензору второго ранга.

Координаты q^i и сопряженные импульсы p_i являются системой локальных координат фазового пространства $\mathbb{T}^*(\mathbb{M})$, которое является кокасательным расслоением к конфигурационному пространству $\mathbb{M}$ с координатами q^i.

Канонические уравнения движения механической системы

$$\dot{q}^i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \qquad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q^i}$$

записываются в виде

$$\dot{x}^\alpha = [x^\alpha, H],$$

где $H = H(q, p)$ – гамильтониан системы. Гамильтоново векторное поле на фазовом пространстве $\mathbb{T}^*(\mathbb{M})$ имеет вид

$$X_H = \frac{\partial H}{\partial p_i}\frac{\partial}{\partial q^i} - \frac{\partial H}{\partial q^i}\frac{\partial}{\partial p_i}. \qquad \square$$

Замечание. С точки зрения динамики функции Казимира представляют собой первые интегралы движения механической системы, которые существуют для любых функций Гамильтона. В этом смысле они носят кинематический характер. $\square$

18.4 Структура Ли–Пуассона

Теперь рассмотрим важный класс пуассоновых структур, связанных с алгебрами Ли.

Определение. Пусть $\mathfrak{g}$ – алгебра Ли размерности N. Это линейное пространство, каждая точка которого $y = y^{\mathrm{A}} L_{\mathrm{A}} \in \mathfrak{g}$, $\mathrm{A} = 1, \ldots, \mathrm{N}$, разлагается по базису L_{A} с коммутационными соотношениями

$$[L_{\mathrm{A}}, L_{\mathrm{B}}] = f_{\mathrm{AB}}{}^{\mathrm{C}} L_{\mathrm{C}},$$

где $f_{\mathrm{AB}}{}^{\mathrm{C}}$ – структурные константы алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Обозначим дуальное пространство к алгебре Ли через $\mathfrak{g}^*$ (множество линейных функционалов на $\mathfrak{g}$). Пусть ω^{A} – базис в $\mathfrak{g}^*$, который дуален к L_{A}, т.е. $\omega^{\mathrm{A}}(L_{\mathrm{B}}) = \delta^{\mathrm{A}}_{\mathrm{B}}$. Тогда точка дуального пространства представима в виде $x = \omega^{\mathrm{A}} x_{\mathrm{A}} \in \mathfrak{g}^*$. Значение функционала x на векторе y равно

$$x(y) = y^{\mathrm{A}} x_{\mathrm{A}}.$$

Рассмотрим функцию $f(x) \in \mathcal{C}^\infty(\mathfrak{g}^*)$ на дуальном пространстве $\mathfrak{g}^*$. Ее дифференциал равен

$$df = dx_{\mathrm{A}} \partial^{\mathrm{A}} f.$$

Мы пишем индекс у частной производной ∂^{A} вверху, т.к. координаты дуального пространства $\mathfrak{g}^*$ нумеруются нижним индексом. Каждый дифференциал естественным образом отождествляется с элементом алгебры Ли $\nabla f := \partial^{\mathrm{A}} f L_{\mathrm{A}} \in \mathfrak{g}$. Определим скобку Пуассона для функций на дуальном пространстве $f, g \in \mathcal{C}^\infty(\mathfrak{g}^*)$ в произвольной точке $x \in \mathfrak{g}^*$:

$$[f, g](x) := x\big([\nabla f, \nabla g]\big), \tag{18.32}$$

где $[\nabla f, \nabla g]$ – коммутатор в алгебре Ли $\mathfrak{g}$. В компонентах данная скобка Пуассона записывается в виде

$$[f, g] = J_{\mathrm{AB}} \partial^{\mathrm{A}} f \partial^{\mathrm{B}} g, \tag{18.33}$$

где структурные функции

$$J_{\mathrm{AB}} = f_{\mathrm{AB}}{}^{\mathrm{C}} x_{\mathrm{C}} \tag{18.34}$$

линейны по координатам x_{C}. Нетрудно проверить, что тождества Якоби для структурных функций (18.24) совпадают с тождествами Якоби для структурных констант алгебры Ли $\mathfrak{g}$:

$$f_{\mathrm{AB}}{}^{\mathrm{D}} f_{\mathrm{CD}}{}^{\mathrm{E}} + f_{\mathrm{BC}}{}^{\mathrm{D}} f_{\mathrm{AD}}{}^{\mathrm{E}} + f_{\mathrm{CA}}{}^{\mathrm{D}} f_{\mathrm{BD}}{}^{\mathrm{E}}.$$

Скобка Пуассона (18.32) называется скобкой *Ли–Пуассона*. □

Таким образом, скобка Ли–Пуассона является частным случаем скобки Пуассона с линейными структурными функциями (18.34). Ранг этой скобки в нуле всегда равен нулю, $J_{\mathrm{AB}}|_{x=0} = 0$.

Пример 18.4.1. (Вращение твердого тела.) В трехмерном евклидовом пространстве с декартовыми координатами $x_i \in \mathbb{R}^3$, $i = 1, 2, 3$, которое мы отождествим с дуальной алгеброй Ли трехмерных вращений $\mathfrak{so}(3)^*$, скобка Ли–Пуассона равна

$$[x_i, x_j] = -\varepsilon_{ijk} x^k, \tag{18.35}$$

где ε_{ijk} – полностью антисимметричный тензор третьего ранга, а подъем и опускание индексов производится с помощью евклидовой метрики δ_{ij}. Эта структура вырождена, ее ранг равен двум всюду, кроме начала координат, где он равен нулю. Для пуассоновой структуры (18.35) существует единственная функция Казимира

$$c = x^i x_i.$$

Скобку Ли–Пуассона (18.35) можно сузить на сферу произвольного радиуса, соответствующую постоянному значению функции Казимира $c = \mathsf{const}$. Соответствующая пуассонова структура на сфере $x^i x_i = \mathsf{const} > 0$ невырождена. В качестве координат Дарбу, которые будут определены в следующем разделе, на сфере можно выбрать ось $z = x^3$ и полярный угол $\varphi = \mathsf{arctg}\,(x^2/x^1)$. Используя определение (18.35), нетрудно проверить, что

$$[z, \varphi] = 1, \quad [\varphi, \varphi] = 0, \quad [z, z] = 0.$$

Таким образом, симплектическими слоями, соответствующими постоянной функции Казимира, являются сферы, а координатами Дарбу – цилиндрические координаты.

Скобке Ли–Пуассона (18.35) соответствует хорошо известный пример из механики твердого тела. Рассмотрим вращающееся твердое тело с покоящимся центром масс в декартовой системе координат, оси которой направлены по главным осям инерции. Гамильтониан системы в этом случае имеет вид

$$H(p) = \frac{x_1^2}{2I_1} + \frac{x_2^2}{2I_2} + \frac{x_3^2}{2I_3},$$

где x_i, $i = 1, 2, 3$ – моменты количества движения и $I_{1,2,3}$ – моменты инерции твердого тела. Если для координат x_i определить скобку Пуассона (18.35), то гамильтоновы уравнения движения примут вид

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= \frac{I_2 - I_3}{I_2 I_3} x_2 x_3, \\
\dot{x}_2 &= \frac{I_3 - I_1}{I_1 I_3} x_1 x_3, \\
\dot{x}_3 &= \frac{I_1 - I_2}{I_1 I_2} x_1 x_2.
\end{aligned}$$

Это есть *уравнения Эйлера* вращения твердого тела (см., например, [**?**]). □

18.5 Отображения пуассоновых многообразий

Определение. Пусть $\varphi : \mathbb{M} \to \mathbb{N}$ – гладкое отображение двух пуассоновых многообразий. Это отображение называется *пуассоновым*, если оно сохраняет скобку Пуассона:

$$[f \circ \varphi, g \circ \varphi]_{\mathbb{M}} = [f, g]_{\mathbb{N}} \circ \varphi, \tag{18.36}$$

где f и g – произвольные функции на многообразии $\mathbb{N}$. Соответственно, подмногообразие $\mathbb{M} \subset \mathbb{N}$ называется *пуассоновым*, если вложение $\mathbb{M} \hookrightarrow \mathbb{N}$ является пуассоновым отображением. В этом случае мы говорим, что пуассонова структура на $\mathbb{N}$ *сужена* до пуассоновой структуры на подмногообразии $\mathbb{M} \subset \mathbb{N}$.

С другой стороны, если пуассонова структура задана на многообразии $\mathbb{M}$, то ее всегда можно отобразить на образ $\varphi(\mathbb{M}) \subseteq \mathbb{N}$ с помощью дифференциала отображения. Эту пуассонову структуру на образе $\varphi(\mathbb{M}) \subset \mathbb{N}$ будем называть *индуцированной*.

В классической механике пуассоново отображение фазового пространства на себя называется *каноническим преобразованием*. □

Выпишем структурные функции для индуцированной пуассоновой структуры. Пусть отображение $\varphi : \mathbb{M} \to \mathbb{N}$ в координатах задается функциями $y^{\mathrm{A}}(x)$, где y^{A},

$\mathrm{A} = 1, \ldots, \dim \mathbb{N}$ и x^α, $\alpha = 1, \ldots, \dim \mathbb{M}$ – координаты соответственно на $\mathbb{N}$ и $\mathbb{M}$. Тогда индуцированная пуассонова структура на образе $\varphi(\mathbb{M}) \subseteq \mathbb{N}$ всегда определена и имеет следующие структурные функции:

$$J^{\mathrm{AB}} = J^{\alpha\beta}\partial_\alpha y^{\mathrm{A}} \partial_\beta y^{\mathrm{B}}.$$

Из свойств умножения матриц следует, что если отображение φ – вложение, то ранг индуцированной пуассоновой структуры J^{AB} равен рангу пуассоновой структуры на подмногообразии $\mathbb{M}$.

Рассмотренный ниже пример показывает, что пуассонову структуру на $\mathbb{N}$ в общем случае нельзя сузить на произвольное подмногообразие $\mathbb{M} \subset \mathbb{N}$.

Пример 18.5.1. Приведем простой пример непуассонова вложения, которое, на первый взгляд, должно быть таковым. Пусть многообразие $\mathbb{N}$ является прямым произведением двух многообразий, $\mathbb{N} = \mathbb{M} \times \mathbb{K}$. Обозначим координаты и пуассонову структуру на $\mathbb{M}$ через x^α, $\alpha = 1, \ldots, \dim \mathbb{M}$, и $J^{\alpha\beta}$. Пусть на $\mathbb{K}$ также заданы координаты y^μ, $\mu = 1, \ldots, \dim \mathbb{K}$, и пуассонова структура $J^{\mu\nu}$. Тогда матрица

$$J = \begin{pmatrix} J^{\alpha\beta} & 0 \\ 0 & J^{\mu\nu} \end{pmatrix}$$

определяет пуассонову структуру на $\mathbb{N}$ в координатах $\{x, y\}$. Это пуассонова структура индуцирована двумя естественными вложениями $\mathbb{M} \hookrightarrow \mathbb{M} \times \mathbb{K}$ и $\mathbb{K} \hookrightarrow \mathbb{M} \times \mathbb{K}$. Рассмотрим вложение

$$\varphi: \quad \mathbb{M} \ni x \mapsto (x, 0) \in \mathbb{N} = \mathbb{M} \times \mathbb{K}.$$

Пусть на $\mathbb{N}$ заданы две произвольные функции $f(x, y)$ и $g(x, y)$. Вычислим левую и правую части равенства (18.36):

$$\begin{aligned} [f \circ \varphi, g \circ \varphi]_{\mathbb{M}} &= J^{\alpha\beta}\partial_\alpha f \partial_\beta g|_{y=0}, \\ [f, g]_{\mathbb{N}} \circ \varphi &= \left(J^{\alpha\beta}\partial_\alpha f \partial_\beta g + J^{\mu\nu}\partial_\mu f \partial_\nu g\right)|_{y=0}. \end{aligned}$$

Мы видим, что в общем случае равенство (18.36) не выполняется. Отсюда следует, что вложение φ не является пуассоновым. □

Предложение 18.5.1. *Пусть $(\mathbb{M}, J)$ – пуассоново многообразие и X_H – гамильтоново векторное поле. Тогда поток векторного поля*

$$\varphi_t := \exp(tX_H): \quad \mathbb{M} \ni x(0) \mapsto x(t) \in \mathbb{M},$$

где $x(t)$ – интегральная кривая для X_H, определяет пуассоново отображение.

Доказательство. Пусть $f, g \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{M})$. При малых t поток векторного поля действует на x следующим образом $\varphi_t: \ x^\alpha \mapsto x^\alpha + tX_H^\alpha$. Поэтому

$$f \circ \varphi_t = f(x^\alpha + tX^\alpha) \simeq f(x) + tX_H f.$$

Продифференцируем по t условие пуассоновости (18.36) и положим $t = 0$. Тогда условие пуассоновости примет вид

$$[X_H f, g] + [f, X_H g] = X_H[f, g].$$

Из формулы (18.30) следует, что полученное равенство совпадает с тождествами Якоби. При $t = 0$ экспоненциальное отображение является тождественным и, следовательно, пуассоново. Поэтому интегрирование условия (18.36) вдоль X_H доказывает его выполнение при всех t, для которых определены интегральные кривые. □

Пример 18.5.2. Пусть на фазовой плоскости $q, p \in \mathbb{R}^2$ задана каноническая пуассонова структура (18.31). Рассмотрим гармонический осциллятор с гамильтонианом

$$H = \frac{1}{2}(q^2 + p^2).$$

Соответствующее гамильтоново векторное поле имеет вид

$$X_H = q\partial_p - p\partial_q$$

и задает группу вращений плоскости. Таким образом, каждое вращение фазовой плоскости задает пуассоново преобразование для гармонического осциллятора. Оно является каноническим, т.к. сохраняет скобку Пуассона. □

Поскольку любой гамильтонов поток сохраняет скобку Пуассона, то он, в частности сохраняет ее ранг. Поэтому справедливо

Следствие. Для любого гамильтонова векторного поля X_H на пуассоновом многообразии $(\mathbb{M}, J)$ ранг пуассоновой структуры J постоянен вдоль произвольной интегральной кривой для X_H. □

Это следствие является, по существу, переформулировкой предложения 18.3.2.

Предложение 18.5.2. *Если ранг пуассоновой структуры в какой либо точке $x \in \mathbb{M}$ пуассонова многообразия $(\mathbb{M}, J)$ равен нулю, то эта точка является неподвижной для любой гамильтоновой системы H на $\mathbb{M}$.*

Доказательство. Из курса линейной алгебры известно, что если матрица антисимметрична и ее ранг равен нулю, то она сама равна нулю. Если в точке $x \in \mathbb{M}$ ранг пуассоновой структуры равен нулю, то гамильтоново векторное поле X_H в этой точке для произвольного гамильтониана H обращается в нуль. Следовательно, точка x является неподвижной. □

Пример 18.5.3. Пуассонова структура в начале координат в примере 18.35 имеет нулевой ранг. Она остается неподвижной для любого гамильтонова потока. □

Пусть $\mathbb{M}$ – пуассоново многообразие. Тогда для каждой точки $x \in \mathbb{M}$ существует единственное линейное отображение кокасательного пространства в соответствующее касательное

$$J: \quad \mathbb{T}^*_x(\mathbb{M}) \to \mathbb{T}_x(\mathbb{M}), \tag{18.37}$$

такое, что для любой функции $f(x)$ справедливо равенство

$$J(df) = [f, x^\alpha]\partial_\alpha \in \mathbb{T}_x(\mathbb{M}).$$

Это есть рассмотренное ранее отображение (18.27). Для произвольной 1-формы $A = dx^\alpha A_\alpha$ отображение J в компонентах задается матрицей структурных функций:

$$X^\alpha = -J^{\alpha\beta}A_\beta.$$

Для симплектических многообразий, для которых матрица $J^{\alpha\beta}$ невырождена, отображение J является взаимно однозначным.

Ясно, что ядром отображения (18.37) является линейная оболочка дифференциалов функций Казимира dc^{A}.

Обозначим образ отображения J в точке $x \in \mathbb{M}$ через

$$\mathbb{J}_x(\mathbb{M}) = \{J(A) \in \mathbb{T}_x(\mathbb{M}) : \quad \forall A \in \mathbb{T}^*_x(\mathbb{M})\}.$$

Размерность векторного подпространства $\mathbb{J}_x(\mathbb{M}) \subset \mathbb{T}_x(\mathbb{M})$ равна рангу пуассоновой структуры $\mathsf{dim}\,\mathbb{J}_x(\mathbb{M}) = \mathsf{rank}\,J^{\alpha\beta}(x)$. Если ранг пуассоновой структуры на $\mathbb{M}$ является постоянным и равен $2m$, то совокупность подпространств $\mathbb{J}_x(\mathbb{M})$ для всех точек x задает на $\mathbb{M}$ распределение векторных полей $\mathcal{J}_{2m}(\mathbb{M})$ размерности $2m$, которое было определено в разделе 3.11. При этом, если пуассонова структура дифференцируема, то соответствующее распределение векторных полей также дифференцируемо.

В общем случае ранг пуассоновой структуры может меняться от точки к точке. Из определения отображения J следует, что образ $\mathbb{J}_x(\mathbb{M})$ является линейной оболочкой всех гамильтоновых векторных полей на $\mathbb{M}$ в точке x.

Введенные понятия позволяют сформулировать следующее утверждение.

Теорема 18.5.1. *Подмногообразие $\mathbb{M}$ пуассонова многообразия $(\mathbb{N}, J)$ является пуассоновым тогда и только тогда, когда $\mathbb{J}_x(\mathbb{M}) := \mathbb{J}_x(\mathbb{N})|_{\mathbb{M}} \subset \mathbb{T}_x(\mathbb{M})$ для всех $x \in \mathbb{M}$, т.е. каждое гамильтоново векторное поле на $\mathbb{N}$ всюду касается $\mathbb{M}$. В частности, если $\mathbb{J}_x(\mathbb{M}) = \mathbb{T}_x(\mathbb{M})$ для всех $x \in \mathbb{M}$, то $\mathbb{M}$ является симплектическим подмногообразием в $\mathbb{N}$.*

Доказательство. См., например, [?]. □

Из этой теоремы следует, что, поскольку размерность пространства $\mathbb{J}_x(\mathbb{M})$ совпадает с рангом пуассоновой структуры в данной точке, то размерность пуассонова подмногообразия не может быть меньше ранга, $\mathsf{dim}\,\mathbb{M} \geq \mathsf{rank}\,J$.

Пусть $\mathbb{M} \subset \mathbb{N}$ – пуассоново подмногообразие. Как было отмечено в теореме 18.5.1, любое гамильтоново векторное поле X_H на $\mathbb{N}$ касается подмногообразия $\mathbb{M}$. Это означает, что его сужение на $\mathbb{M}$ может быть получено из сужения гамильтониана на $\mathbb{M}$:

$$X_H|_{\mathbb{M}} = X_{\widetilde{H}}, \quad \text{где} \quad \widetilde{H} = H|_{\mathbb{M}}.$$

Допустим, что нас интересуют траектории движения гамильтоновой системы с некоторым гамильтонианом H, которые начинаются в некоторой точке пуассонова подмногообразия $x \in \mathbb{M} \subset \mathbb{N}$. В этом случае можно ограничиться движением точки в подмногообразии $\mathbb{M}$, которое порождается суженным гамильтонианом $\widetilde{H}$, тем самым понизив порядок гамильтоновой системы. Можно поставить вопрос, каково минимальное пуассоново подмногообразие для данных начальных условий. Ответ дает следующая

Теорема 18.5.2. *Пусть $(\mathbb{N}, J)$ – пуассоново многообразие. Тогда соответствующее распределение гамильтоновых векторных полей $\mathcal{J}(\mathbb{N})$ на $\mathbb{N}$ интегрируемо, т.е. через каждую точку $x \in \mathbb{N}$ проходит интегральное подмногообразие $\mathbb{M}$ распределения $\mathcal{J}(\mathbb{N})$, для которого $\mathbb{T}_x(\mathbb{M}) = \mathbb{J}_x(\mathbb{M})$ в любой точке $x \in \mathbb{M}$. Всякое интегральное подмногообразие является симплектическим подмногообразием в $\mathbb{N}$, и в совокупности эти подмногообразия определяют симплектическое слоение пуассонова многообразия $\mathbb{N}$. Кроме того, если $H : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ – произвольный гамильтониан и $x(t)$ – соответствующая траектория системы, проходящая через точку $x_0 \in \mathbb{N}$, то $x(t)$ остается в одном и том же интегральном подмногообразии $\mathbb{M}$ при всех t.*

Доказательство. Как уже отмечалось, распределение $\mathcal{J}(\mathbb{M})$ является линейной оболочкой всех гамильтоновых векторных полей на $\mathbb{M}$. Поскольку скобка Пуассона гамильтоновых векторных полей является гамильтоновым векторным полем (18.28), то распределение $\mathcal{J}(\mathbb{M})$ находится в инволюции. Отсюда по теореме Фробениуса следует существование интегрального подмногообразия. Остальные утверждения теоремы следуют из теоремы 18.5.1 и инвариантности ранга пуассоновой структуры вдоль гамильтоновых векторных полей. □

Проиллюстрируем данную теорему для пуассонова многообразия $(\mathbb{N}, J)$, $\dim \mathbb{N} = n$, с пуассоновой структурой постоянного ранга $\operatorname{rank} J^{\alpha\beta} = 2m < n$ путем построения специальной системы координат. В некоторой окрестности $\mathbb{U} \subset \mathbb{N}$ существует $(n-2m)$ функционально независимых функций Казимира $c^{\text{A}}(x)$, $\text{A} = 1, \ldots, n-2m$. Поверхности уровня функций Казимира $c^{\text{A}} = \operatorname{const}$ определяют $2m$-мерное подмногообразие $\mathbb{M} \subset \mathbb{U}$. Дополним функции Казимира $2m$ функционально независимыми скалярными полями g^{M}, $\text{M} = 1, \ldots, 2m$, (координаты на подмногообразии $\mathbb{M}$) таким образом, чтобы выполнялись условия

$$\operatorname{rank} [g^{\text{M}}, g^{\text{N}}]_{\mathbb{M}} = 2m.$$

Это всегда можно сделать, т.к. ранг пуассоновой структуры равен $2m$. Совокупность функций $\{c^{\text{A}}, g^{\text{M}}\}$ выберем в качестве новой системы координат на $\mathbb{U}$. Пуассонова структура в этой системе координат примет вид

$$J = \begin{pmatrix} J^{\text{AB}} = [c^{\text{A}}, c^{\text{B}}] & J^{\text{AN}} = [c^{\text{A}}, g^{\text{N}}] \\ J^{\text{MB}} = [g^{\text{M}}, c^{\text{B}}] & J^{\text{MN}} = [g^{\text{M}}, g^{\text{N}}] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & J^{\text{MN}} \end{pmatrix},$$

т.к. скобка Пуассона функции Казимира с любой функцией на $\mathbb{N}$ равна нулю. Таким образом, сужение Пуассоновой структуры на подмногообразие $\mathbb{M}$ определено и невырождено. То есть поверхности уровней функций Казимира представляют собой симплектические многообразия. Пусть на $\mathbb{N}$ задан гамильтониан. Соответствующие гамильтоновы уравнения

$$\dot{c}^{\text{A}} = J^{\text{AB}} \partial_{\text{B}} H + J^{\text{AN}} \partial_{\text{N}} H = 0, \tag{18.38}$$

$$\dot{g}^{\text{M}} = J^{\text{MB}} \partial_{\text{B}} H + J^{\text{MN}} \partial_{\text{N}} H = J^{\text{MN}} \partial_{\text{N}} H \tag{18.39}$$

определяют траектории системы. Поскольку уравнение (18.38) имеет решение $c^{\text{A}} = \operatorname{const}$, то траектория гамильтоновой системы, проходящей через точку $x_0 \in \mathbb{N}$, принадлежит соответствующему симплектическому подмногообразию $\mathbb{M}$:

$$\dot{g}^{\text{M}} = \widetilde{J}^{\text{MN}} \partial_{\text{N}} \widetilde{H},$$

где

$$\widetilde{J}^{\text{MN}} = J^{\text{MN}}|_{\mathbb{M}} \quad \text{и} \quad \widetilde{H} = H|_{\mathbb{M}}.$$

Таким образом, всякое пуассоново многообразие $(\mathbb{N}, J)$ расщепляется на симплектические подмногообразия – слои симплектического слоения. Размерность любого такого слоя $\mathbb{M}$ равна рангу пуассоновой структуры в произвольной точке $x \in \mathbb{M}$. Это означает, что, если ранг пуассоновой структуры на $\mathbb{N}$ непостоянен, то размерность симплектических слоев будет различной.

Теорема 18.5.3 (Дарбу). *Пусть $(\mathbb{M}, J)$ – пуассоново многообразие размерности n. Если пуассонова структура на многообразии имеет постоянный ранг,* $\operatorname{rank} J =$

$2m \leq n$, то в некоторой окрестности $\mathbb{U}$ произвольной точки $x \in \mathbb{M}$ существует такая система координат

$$\{x^\alpha\} = \{q^{\text{м}}, p_{\text{м}}, c^{\text{а}}\} = \{q^1, \ldots, q^m, p_1, \ldots, p_m, c^1, \ldots, c^{n-2m}\},$$

в которой скобка Пуассона двух произвольных функций $f, g \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{U})$ имеет вид

$$[f, g] = \frac{\partial f}{\partial q^{\text{м}}}\frac{\partial g}{\partial p_{\text{м}}} - \frac{\partial f}{\partial p_{\text{м}}}\frac{\partial g}{\partial q^{\text{м}}}. \tag{18.40}$$

Координаты $c^{\text{а}}$ являются функциями Казимира пуассоновой структуры J, и их постоянное значение определяет симплектическое слоение пуассонова многообразия $(\mathbb{U}, J)$.

Доказательство. Если ранг пуассоновой структуры равен нулю, то $J^{\alpha\beta} = 0$ и доказывать нечего. Любая система координат на $\mathbb{U}$ удовлетворяет утверждению теоремы.

Допустим, что ранг отличен от нуля. Зафиксируем точку $x_0 \in \mathbb{M}$ и выберем в ее окрестности $\mathbb{U}$ две такие функции $Q, f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{U})$, что

$$[Q, f] = X_Q f \neq 0.$$

В частности $X_Q|_{x_0} \neq 0$. Согласно теореме 3.6.2 возможно в меньшей окрестности существует такая система координат $Q, x^2, \ldots, x^n$, что $X_Q = \partial_Q$. Тогда существует такая функция $P \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{U})$, что выполнено условие

$$X_Q P = [Q, P] = 1.$$

Из предложения 18.3.1 следует равенство

$$[X_Q, X_P] = X_{[Q,P]} = 0.$$

Кроме того в силу антисимметрии $[X_Q, X_Q] = 0$ и $[X_P, X_P] = 0$. Таким образом, X_Q, X_P образуют пару коммутирующих векторных полей. Теорема Фробениуса позволяет дополнить пару функций $q^1 = Q$, $p_1 = P$ до локальной системы координат $q^1, p_1, y^3, \ldots, y^n$ в некоторой, возможно меньшей, окрестности точки x_0. Поскольку $J^{\alpha\beta} = [x^\alpha, x^\beta]$ и выполнены равенства $[q^1, y^i] = 0$, $[p_1, y^i] = 0$, $i = 3, \ldots, n$, то структурные функции в данной системе координат принимают вид

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & J^{ij} \end{pmatrix},$$

где $J^{ij} = [y^i, y^j]$. Покажем, что матрица J^{ij} не зависит от координат q^1 и p_1. Действительно,

$$\frac{\partial J^{ij}}{\partial q^1} = [q^1, J^{ij}] = [q^1, [y^i, y^j]] = 0,$$

где мы воспользовались тождествами Якоби. Аналогично доказывается, что матрица J^{ij} не зависит от p_1. Таким образом, матрица J^{ij} задает пуассонову структуру на подмногообразии $q^1 = \mathsf{const}$, $p_1 = \mathsf{const}$. Ранг этой структуры на два меньше исходного, $\mathsf{rank}\, J^{ij} = 2m - 2$. Поэтому, если $m > 1$, то этот процесс можно продолжить. □

Глава 19

Принцип наименьшего действия

Можно с уверенностью сказать, что в основе построения моделей современной математической физики лежит принцип наименьшего действия. Этот принцип требует стационарности некоторого функционала – действия – относительно вариаций полей, описывающих данную модель. В результате мы получаем систему уравнений Эйлера–Лагранжа, которая принимается в качестве уравнений движения, уравнений равновесия и т.д. для данной модели. При этом инвариантность действия относительно некоторой группы преобразований приводит к ковариантным уравнениям движения и к законам сохранения, которые играют важнейшую роль в физике.

19.1 Постановка вариационных задач

Начнем с постановки вариационной задачи в евклидовом пространстве. Предположим, для простоты, что $\mathbb{M} \subset \mathbb{R}^n$ – ограниченная область евклидова пространства с кусочно гладкой границей $\partial\mathbb{M}$. Пусть в этой области задан некоторый набор дважды непрерывно дифференцируемых функций вплоть до границы, $\varphi = \{\varphi^a\} \in \mathcal{C}^2(\overline{\mathbb{M}})$, $a = 1, \dots, \mathrm{N}$. Это значит, что все функции и их производные до второго порядка непрерывны и ограничены в $\mathbb{M}$ и имеют конечный предел на границе. Если x^α, $\alpha = 1, \dots, n$, система координат на $\mathbb{M}$, то обозначим, для краткости, все первые производные полей через $\partial\varphi = \{\partial_\alpha \varphi^a\}$. Тогда на $\mathbb{M}$ определен *функционал действия* или, просто, *действие*

$$S[\varphi] = \int_{\mathbb{M}} dx\, L(x, \varphi, \partial\varphi), \tag{19.1}$$

где L – некоторая функция от n переменных x^α, N переменных φ^a и $n\mathrm{N}$ переменных $\partial_\alpha \varphi^a$. Она предполагается дважды непрерывно дифференцируемой функцией переменных $x \in \mathbb{M}$ и всех остальных переменных для всех конечных значений φ и $\partial\varphi$. Назовем функцию $L(x, \varphi, \partial\varphi)$ *лагранжевой плотностью* или *лагранжианом* данной модели, которая описывается набором полей φ.

Для определения функционала действия мы ограничили себя классом дважды непрерывно дифференцируемых функций $\mathcal{C}^2(\overline{\mathbb{M}})$. Тогда функционал действия задает отображение

$$S: \quad \left[\mathcal{C}^2(\overline{\mathbb{M}})\right]^{\mathrm{N}} \ni \varphi \mapsto S[\varphi] \in \mathbb{R} \tag{19.2}$$

бесконечномерного функционального пространства в поле вещественных чисел. Для постановки вариационной задачи нам важно, что функциональное пространство $\left[\mathcal{C}^2(\overline{\mathbb{M}})\right]^{\mathrm{N}}$ снабжено структурой линейного пространства с обычным поточечным сложением и

умножением на вещественные числа. Для того, чтобы говорить о непрерывности и вариационных производных отображения S, введем на $\left[\mathcal{C}^2(\overline{\mathbb{M}})\right]^{\mathrm{N}}$ норму:

$$\|\varphi\| := \sum_{a=1}^{\mathrm{N}} \left(\sup_{x\in\mathbb{M}} |\varphi^a| + \sum_{\alpha=1}^{n} \sup_{x\in\mathbb{M}} |\partial_\alpha \varphi^a| \right). \tag{19.3}$$

Тем самым класс рассматриваемых функций $\left[\mathcal{C}^2(\overline{\mathbb{M}})\right]^{\mathrm{N}}$ становится нормированным линейным функциональным пространством. По данной норме строится метрика и определяется топология, относительно которой отображение (19.2) непрерывно.

Назовем *вариацией* функции φ^a разность двух представителей из класса рассматриваемых функций: $\delta\varphi^a = \varphi'^a - \varphi^a$, где φ'^a – произвольная функция из $\mathcal{C}^2(\overline{\mathbb{M}})$. Ясно, что вариация функции принадлежит тому же классу, что и сама функция. Для малых вариаций функций $\epsilon\delta\varphi^a$, где $\epsilon > 0$ – малая величина, вариация (главная линейная часть) функционала действия, если она существует, равна

$$\begin{aligned} \delta S &= S[\varphi + \epsilon\delta\varphi] - S[\varphi] = \\ &= \int_{\mathbb{M}} dx \left[\frac{\partial L}{\partial \varphi^a} - \partial_\alpha \left(\frac{\partial L}{\partial(\partial_\alpha \varphi^a)} \right) \right] \epsilon\delta\varphi^a + \int_{\partial\mathbb{M}} ds_\alpha \frac{\partial L}{\partial(\partial_\alpha \varphi^a)} \epsilon\delta\varphi^a + \mathsf{o}(\epsilon), \end{aligned} \tag{19.4}$$

где второе слагаемое возникло при интегрировании по частям, и ds_α обозначает ориентированный элемент объема границы $\partial\mathbb{M}$. Отметим, что при вычислении вариации действия (19.1) область интегрирования $\mathbb{M}$ считалась неизменной.

В рассматриваемом классе функций φ и лагранжианов L вариация функционала всегда существует.

Назовем набор функций φ *стационарной*, или *критической* точкой, или *экстремалью* функционала $S[\varphi]$, если в этой точке линейная часть вариация действия равна нулю, $\delta S = \mathsf{o}(\epsilon)$. Такие точки соответствуют либо локальному минимуму, либо локальному максимуму, либо седловой точке функционала S. Это можно проверить после нахождения экстремали функционала, рассмотрев члены более высокого порядка по ϵ.

Для действия (19.1) можно поставить различные вариационные задачи. Рассмотрим задачи, которые наиболее часто встречаются в физике.

19.1.1 Задача с заданными граничными условиями

Вариационная задача с заданными граничными условиями является наиболее распространенной и самой простой с точки зрения постановки. Рассмотрим класс функций в $\mathcal{C}^2(\overline{\mathbb{M}})$ с заданными граничными условиями

$$\varphi\Big|_{\partial\mathbb{M}} = \varphi_0. \tag{19.5}$$

Поскольку граничные условия для всех функций при фиксированном индексе a одни и те же, то вариации обращаются в нуль на границе

$$\delta\varphi\Big|_{\partial\mathbb{M}} = 0. \tag{19.6}$$

Тогда интеграл по границе области в вариации действия (19.4) обращается в нуль в силу граничных условий (19.6). В рассматриваемом случае существует предел

$$\lim_{\epsilon\to 0} \frac{S[\varphi + \epsilon\delta\varphi] - S[\varphi]}{\epsilon} = \int_{\mathbb{M}} dx \, \frac{\delta S}{\delta\varphi^a} \delta\varphi^a. \tag{19.7}$$

Функция $\delta S/\delta\varphi^a$, стоящая под знаком интеграла, называется *вариационной производной* функционала S по полю φ^a и обозначается также

$$S_{,\,a} = \frac{\delta S}{\delta\varphi^a}. \tag{19.8}$$

Из вида вариации (19.4) получаем явное выражение для вариационной производной

$$S_{,\,a} = \frac{\partial L}{\partial\varphi^a} - \partial_\alpha \frac{\partial L}{\partial(\partial_\alpha\varphi^a)}. \tag{19.9}$$

Вариационная производная $S_{,\,a}$ является ядром линейного оператора, который есть производная по Фреше и, следовательно, по Гато отображения (19.2).

Формула (19.7) позволяет дать другое определение вариационной производной. А именно, вариационной производной функционала S в точке $\varphi \in [\mathcal{C}^2(\mathbb{M})]^{\mathrm{N}}$ назовем производную

$$\frac{\delta S}{\delta\varphi^a} = \left.\frac{\partial S(\varphi+\lambda\psi)}{\partial\lambda}\right|_{\lambda=0}, \tag{19.10}$$

где $\psi \in [\mathcal{C}^2(\mathbb{M})]^{\mathrm{N}}$. Ясно, что если главная линейная часть приращения функционала существует, то она равна производной (19.10). Обратное утверждение в общем случае неверно. Существуют примеры функционалов (менее гладких, чем мы рассматриваем), для которых производная (19.10) определена, однако из их приращения нельзя выделить главную линейную часть. Поэтому определение вариационной производной (19.10) является более общим. В рассматриваемом нами классе функций и лагранжианов данные выше определения эквивалентны.

Определение вариационной производной (19.10) просто обобщается на случай вариационных производных более высокого порядка. Вторые вариационные производные (17.27) были рассмотрены для экстремалей функционала длины кривой.

Из условия стационарности действия $\delta S = \mathsf{o}(\epsilon)$ в силу произвольности вариации $\delta\varphi^a$ и основной леммы вариационного исчисления следует

Теорема 19.1.1. *Набор функций φ при заданных граничных условиях является стационарной точкой действия $S[\varphi]$ тогда и только тогда, когда он удовлетворяет системе уравнений Эйлера–Лагранжа*

$$S_{,\,a} = \frac{\partial L}{\partial\varphi^a} - \partial_\alpha \frac{\partial L}{\partial(\partial_\alpha\varphi^a)} = 0. \tag{19.11}$$

В общем случае уравнения Эйлера–Лагранжа представляют собой систему нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка, число которых N равно числу функций, от которых зависит функционал действия. Их надо решать при заданных граничных условиях (19.5). Решение поставленной вариационной задачи может не существовать, а если оно существует, то может быть неединственно. Это зависит от вида лагранжиана и области $\mathbb{M}$.

Действие (19.1) для заданных уравнений Эйлера–Лагранжа при постановке задачи с фиксированными граничными условиями определено неоднозначно. Действительно, рассмотрим новый лагранжиан, $\widetilde{L}_\alpha = L + \partial_\alpha F$, который отличается от исходного на частную производную от некоторой достаточно гладкой функции $F(x,\varphi,\partial\varphi)$. Тогда действие получит дополнительный вклад, сводящийся к интегралу по границе. Вариация дополнительного слагаемого равна нулю, т.к. вариации всех полей на границе равны нулю. Отсюда следует, что уравнения Эйлера–Лагранжа не изменятся

при добавлении к лагранжиану частных производных $\partial_\alpha F$ от произвольной функции.

Рассмотренная вариационная задача наиболее часто рассматривается в моделях математической физики. При этом уравнения Эйлера–Лагранжа приводят к уравнениям движения, равновесия и т.д.

Замечание. Поверхностный интеграл в вариации действия (19.4) в задаче с заданными граничными условиями равен нулю, поскольку вариации полей обращаются в нуль на границе (19.6). Этого достаточно, если область $\mathbb{M}$ ограничена. Однако для действия (19.1), рассматриваемого во всем евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$, ситуация усложняется. В этом случае интеграл по границе является несобственным, т.к. площадь бесконечно удаленной границы стремится к бесконечности. Тогда важно не только граничное условие на вариации, но и их асимптотическое поведение. Так, в общей теории относительности в асимптотически плоском пространстве-времени поверхностный интеграл отличен от нуля, т.к. метрика недостаточно быстро стремится к метрике Минковского на пространственной бесконечности. Анализ граничного поведения полей важен и в общем случае сложен, поскольку зависит от рассматриваемой задачи. На данном этапе мы пренебрежем граничными слагаемыми. □

Замечание. Во многих моделях математической физики, например, в электродинамике, в качестве области $\mathbb{M}$ выбирается все пространство Минковского $\mathbb{R}^{1,3}$. При этом функционал действия не ограничен ни снизу, ни сверху. Кроме того, для многих решений уравнений Эйлера–Лагранжа он расходится. Поэтому говорить о принципе наименьшего действия в строгом смысле не приходится. Тем не менее уравнения Эйлера–Лагранжа имеют смысл, поскольку являются локальным объектом. Поэтому для действия часто пишут формальное выражение, не заботясь о сходимости интеграла. Этот способ очень удобен для получения уравнений с заданными свойствами симметрии. □

19.1.2 Задача со свободными граничными условиями

Для действия (19.1) можно поставить другую вариационную задачу, расширив класс рассматриваемых функций. Пусть по-прежнему все функции дважды непрерывно дифференцируемы $\varphi^a \in \mathcal{C}^2(\overline{\mathbb{M}})$ для всех $a = 1, \dots, \mathrm{N}$, но теперь снимем ограничения, накладываемые граничными условиями (19.5). В этом случае вариации полей $\delta\varphi^a$ также ничем не ограничены на границе $\partial\mathbb{M}$, и из явного вида вариации действия (19.4) следует

Теорема 19.1.2. *Набор функций φ является стационарной точкой действия $S[\varphi]$ тогда и только тогда, когда он удовлетворяет системе уравнений Эйлера–Лагранжа (19.11) и граничным условиям*

$$\left.\frac{\partial L}{\partial(\partial_\alpha\varphi^a)}\right|_{\partial\mathbb{M}} = 0. \tag{19.12}$$

Таким образом, в задаче со свободными граничными условиями граничные условия все таки возникают из условия стационарности действия.

Пример 19.1.1. Вариационная задача со свободными граничными условиями рассматривается в теории открытых бозонных струн, для которых из вариационного принципа вытекают граничные условия Неймана. □

Постановка вариационной задачи со свободными граничными условиями, зависит от добавления к действию граничных слагаемых. Иногда появления граничных условий (19.12) можно избежать, если из исходного действия вычесть все граничные вклады, которые возникают при интегрировании по частям. В этом случае условие (19.12) тождественно выполняется.

Замечание. В общем случае можно рассматривать смешанные вариационные задачи, когда граничные условия ставятся только для части полей. Именно такого типа задача естественным образом возникает в теории гравитации, где можно считать заданными на границе только физические поля. Нефизические поля находятся, как решение уравнений связей и калибровочных условий, и для них граничные значения не могут быть фиксированы произвольным образом. □

19.1.3 Задача с подвижной границей

Возможна также более общая постановка вариационной задачи для функционала (19.1), когда рассматриваются не только вариации полей, но и самой области $\mathbb{M}$. Сначала уточним постановку задачи. Предположим, что координаты и поля преобразуются следующим образом:

$$x^\alpha \mapsto x'^\alpha(x, \varphi, \partial\varphi, \epsilon), \tag{19.13}$$

$$\varphi^a \mapsto \varphi'^a(x, \varphi, \partial\varphi, \epsilon), \tag{19.14}$$

где ϵ – параметр преобразования. Если поля φ являются заданными функциями от координат, $\varphi = \varphi(x)$, то из уравнения (19.13) можно выразить старые координаты через новые: $x = x(x')$. Тогда подстановка найденных функций в формулу (19.14) позволяет рассматривать новые поля, как функции от новых координат, $\varphi' = \varphi'(x')$.

Мы считаем, что до и после преобразования координаты определены соответственно на ограниченных областях $\mathbb{M}$ и $\mathbb{M}'$ евклидова пространства $\mathbb{R}^n$, т.е. $x \in \mathbb{M}$ и $x' \in \mathbb{M}'$. Тогда под вариацией функционала подразумевается разность

$$\delta S := S[\varphi'(x')] - S[\varphi(x)] = \int_{\mathbb{M}'} dx' L(x', \varphi', \partial'\varphi') - \int_{\mathbb{M}} dx L(x, \varphi, \partial\varphi).$$

Нам требуется найти эту вариацию в линейном по ϵ приближении. При этом мы считаем, что при $\epsilon = 0$ преобразование (19.25) является тождественным. Разлагая формулы преобразования в ряд Тейлора при малых ϵ, получаем

$$\begin{aligned} x^\alpha \mapsto x'^\alpha &= x^\alpha + \delta x^\alpha + \mathsf{o}(\epsilon), \\ \varphi^a(x) \mapsto \varphi'^a(x') &= \varphi^a(x) + \bar\delta\varphi^a(x) + \mathsf{o}(\epsilon), \end{aligned} \tag{19.15}$$

где независимые вариации

$$\delta x^\alpha = \epsilon R^\alpha(x, \varphi, \partial\varphi), \tag{19.16}$$

$$\bar\delta\varphi^a = \varphi'^a(x') - \varphi^a(x) = \epsilon R^a(x, \varphi, \partial\varphi) \tag{19.17}$$

определяются некоторыми функциями $R^\alpha(x, \varphi, \partial\varphi)$ и $R^a(x, \varphi, \partial\varphi)$. Отметим, что вариация полей (19.17) определена, как разность значений полей в различных точках и не совпадает с вариацией формы поля, рассмотренной в разделе 3.13. Напомним, что под вариацией формы функции мы понимаем разность значений этой функции после и до преобразования в одной и той же точке:

$$\delta\varphi^a(x) = \varphi'^a(x) - \varphi^a(x).$$

При этом преобразования (19.15) рассматриваются, как активные (см. раздел 2.5). Тогда для вариации формы функции справедливо равенство

$$\delta\varphi^a(x) = \bar{\delta}\varphi^a - \delta x^\alpha \partial_\alpha \varphi^a = \epsilon(R^a - R^\alpha \partial_\alpha \varphi^a). \tag{19.18}$$

По-построению, для постоянного параметра преобразования вариация формы функции δ перестановочна с операцией частного дифференцирования ∂_α. Вариация действия относительно преобразований (19.15) имеет вид

$$\delta S = \int_{\mathbb{M}'} dx'\, L(x') - \int_{\mathbb{M}} dx\, L(x) = \int_{\mathbb{M}'} dx'\, \big(L(x) + \bar{\delta}L(x)\big) - \int_{\mathbb{M}} dx\, L(x),$$

где $L(x) = L\big(x, \varphi(x), \partial_\alpha\varphi(x)\big)$. Здесь и в дальнейшем мы будем рассматривать вариацию действия только с точностью до слагаемых, линейных по ϵ, и не будем это указывать. Вариации лагранжиана и элемента объема равны, соответственно,

$$\bar{\delta}L(x) = \frac{\partial L}{\partial x^\alpha}\delta x^\alpha + \frac{\partial L}{\partial \varphi^a}\bar{\delta}\varphi^a + \frac{\partial L}{\partial(\partial_\alpha\varphi^a)}\bar{\delta}(\partial_\alpha\varphi^a) = \delta L + \frac{dL}{dx^\alpha}\delta x^\alpha, \tag{19.19}$$

$$dx' \simeq dx + dx\frac{\partial(\delta x^\alpha)}{\partial x^\alpha}, \tag{19.20}$$

где

$$\frac{dL}{dx^\alpha} = \frac{\partial L}{\partial x^\alpha} + \frac{\partial L}{\partial \varphi^a}\partial_\alpha\varphi^a + \frac{\partial L}{\partial(\partial_\beta\varphi^a)}\partial^2_{\alpha\beta}\varphi^a.$$

Используя преобразование (19.20), перейдем от интегрирования по $\mathbb{M}'$ к интегрированию по исходной области $\mathbb{M}$ и перепишем вариацию действия в виде

$$\delta S = \int_{\mathbb{M}} dx\, \left(\delta L + \frac{dL}{dx^\alpha}\delta x^\alpha + L\frac{\partial(\delta x^\alpha)}{\partial x^\alpha}\right) = \int_{\mathbb{M}} dx\, \big(\delta L + \partial_\alpha(L\delta x^\alpha)\big). \tag{19.21}$$

Теперь перепишем вариацию формы лагранжиана:

$$\begin{aligned} \delta L &= \frac{\partial L}{\partial \varphi^a}\delta\varphi^a + \frac{\partial L}{\partial(\partial_\alpha\varphi^a)}\delta(\partial_\alpha\varphi^a) = \\ &= \left(\frac{\partial L}{\partial \varphi^a} - \partial_\alpha\frac{\partial L}{\partial(\partial_\alpha\varphi^a)}\right)\delta\varphi^a + \partial_\alpha\left(\frac{\partial L}{\partial(\partial_\alpha\varphi^a)}\delta\varphi^a\right). \end{aligned} \tag{19.22}$$

При этом существенно, что параметр преобразования постоянен, $\epsilon = \mathsf{const}$, и, следовательно,

$$\delta(\partial_\alpha\varphi^a) = \partial_\alpha(\delta\varphi^a).$$

Воспользовавшись формулой Стокса, дивергентные слагаемые можно переписать в виде поверхностного интеграла. Таким образом для вариации действия получаем окончательное выражение

$$\delta S = \int_{\mathbb{M}} dx\, \left(\frac{\partial L}{\partial \varphi^a} - \partial_\alpha\frac{\partial L}{\partial(\partial_\alpha\varphi^a)}\right)\delta\varphi^a + \int_{\partial\mathbb{M}} ds_\alpha\, \left(\frac{\partial L}{\partial(\partial_\alpha\varphi^a)}\delta\varphi^a + L\delta x^\alpha\right). \tag{19.23}$$

Поверхностный интеграл перепишем с учетом выражения для вариации формы функции (19.18):

$$\int_{\partial\mathbb{M}} ds_\alpha\, \left(\frac{\partial L}{\partial(\partial_\alpha\varphi^a)}\bar{\delta}\varphi^a + \left(L\delta^\alpha_\beta - \frac{\partial L}{\partial(\partial_\alpha\varphi^a)}\partial_\beta\varphi^a\right)\delta x^\beta\right).$$

поскольку вариации координат δx^α и функций $\bar{\delta}\varphi^a$ произвольны и независимы, то из полученного выражения для вариации действия вытекает

Теорема 19.1.3. *Набор функций φ является стационарной точкой действия $S[\varphi]$ в вариационной задаче с подвижной границей тогда и только тогда, когда он удовлетворяет системе уравнений Эйлера–Лагранжа (19.11) и граничным условиям:*

$$\begin{aligned} \left.\frac{\partial L}{\partial(\partial_\alpha \varphi^a)}\right|_{\partial\mathbb{M}} &= 0, \\ \left. L\delta^\alpha_\beta - \frac{\partial L}{\partial(\partial_\alpha \varphi^a)}\partial_\beta \varphi^a \right|_{\partial\mathbb{M}} &= 0. \end{aligned} \tag{19.24}$$

В последней вариационной задаче с подвижной границей мы имеем $n(n+\mathrm{N})$ граничных условий, число которых быстро растет с увеличением размерности пространства. Соответствующая вариационная задача далеко не всегда имеет решение. Чтобы уменьшить число независимых граничных условий, предположим, что в окрестности границы $\partial\mathbb{M}$ поля принимают наперед заданные значения:

$$\varphi^a(x) = \Phi^a(x),$$

где функции Φ^a заданы в некоторой окрестности $\partial\mathbb{M}$. Тогда вариации функций и координат связаны соотношением

$$\bar\delta\varphi^a\big|_{\partial\mathbb{M}} = \delta x^\alpha \partial_\alpha \Phi^a|_{\partial\mathbb{M}}\,.$$

В этом случае вместо $n(n+\mathrm{N})$ граничных условий (19.24) остаются n^2 условий:

$$\left[L\delta^\alpha_\beta + \frac{\partial L}{\partial(\partial_\alpha \varphi^a)}(\partial_\beta \Phi^a - \partial_\beta \varphi^a)\right]_{\partial\mathbb{M}} = 0. \tag{19.25}$$

Эти граничные условия называются *условиями трансверсальности.*

Стационарные точки действия для задачи с подвижной границей являются также стационарными точками для двух задач с фиксированной областью $\mathbb{M}$. Выполнение уравнений Эйлера–Лагранжа является необходимым условием во всех трех рассмотренных вариационных задачах. В задачах со свободными граничными условиями и с подвижной границей к уравнениям Эйлера–Лагранжа добавляются граничные условия.

19.1.4 Задача на условную стационарную точку

В настоящем разделе мы ограничимся рассмотрением вариационных задач на конечном отрезке $[p,q] \subset \mathbb{R}$ с заданными граничными условиями. Пусть требуется найти стационарную точку действия (19.1) в классе функций $\varphi^a \in \mathcal{C}^2\big([p,q]\big)$, $a = 1,\dots,\mathrm{N}$ при наличии $\mathrm{M} < \mathrm{N}$ независимых дополнительных условий, которые называются *связями*

$$G_{\mathrm{A}}(x,\varphi,\partial\varphi) = 0, \qquad \mathrm{A} = 1,\dots,\mathrm{M} < \mathrm{N}, \tag{19.26}$$

где G_{A} – достаточно гладкие функции своих аргументов. Мы предполагаем, что связи G_{A} не противоречат граничным условиям и функционально независимы, т.е. ни одна из связей не является следствием остальных. В частности, ни одна из связей не выполняется тождественно для всех функций φ. Функциональная независимость связей означает, что матрица производных

$$\frac{\partial G_{\mathrm{A}}}{\partial\big(\varphi^a, \partial_x \varphi^a\big)}$$

имеет постоянный ранг M. Отсюда следует, что локально связи можно разрешить относительно M функций или их первых производных, рассматривая остальные N−M функций как независимые.

В общем случае связи являются дифференциальными уравнениями, и их решения содержат произвольные постоянные. Мы предполагаем, что этот произвол устранен, например, наложением граничных условий, либо каким либо иным образом.

В частном случае связи могут быть алгебраическими уравнениями на неизвестные функции $G_{\mathrm{A}}(x,\varphi)=0$. В этом случае они называются *голономными*. В общем случае связи (19.26) называются *неголономными*.

При наличии связей вариации функций не являются независимыми, и выполнение уравнений Эйлера–Лагранжа для исходного действия (19.1) не является необходимым условием. Прямым способом решения задачи на условный экстремум является явное разрешение связей относительно M функций, подстановка полученного решения в исходное действие и исследование нового действия от $\mathrm{N}-\mathrm{M}$ функций на безусловный экстремум.

Задачи на условную стационарную точку часто встречаются в математической физике. В частности, к ним приводят все калибровочные модели, инвариантные относительно локальных преобразований полей. В связи с этим введем удобную терминологию, которая часто используется в физике. А именно, назовем поля *нефизическими*, если связи разрешаются относительно этих полей. Остальные поля, относительно которых после исключения нефизических полей возникает задача на безусловную стационарную точку, называются *физическими*. Деление полей на физические и нефизические условно, т.к. связи можно разрешать относительно различных переменных. В то же время число физических ($\mathrm{N}-\mathrm{M}$) и нефизических (M) полей, по предположению, постоянно.

Прямой способ исключения нефизических полей неприменим, если связи не решаются явно. Кроме этого исключение части полей может нарушить симметрию задачи, например, лоренц-инвариантность, что часто приводит к существенному усложнению вычислений. Поэтому используют метод неопределенных множителей Лагранжа. А именно, строят полное (total) действие

$$S_{\mathrm{T}}=\int_p^q dx(L-\lambda^{\mathrm{A}}G_{\mathrm{A}}), \tag{19.27}$$

где $\lambda(x)\in\mathcal{C}^1\big([p,q]\big)$ – новые функции, которые называются *множителями Лагранжа*. Это действие исследуется на безусловный экстремум. Вариация действия (19.27) по полям φ^a и множителям Лагранжа λ^{A} приводит к $\mathrm{N}+\mathrm{M}$ уравнениям Эйлера–Лагранжа, M из которых, возникших при вариации по множителям Лагранжа, совпадают с уравнениями связей (19.26). При этом вариации множителей Лагранжа на границе не обязаны быть равными нулю, т.к. они входят в действие без производных и никаких дополнительных граничных условий не возникает. Решение новой задачи на безусловный экстремум дает решение исходной задачи на условный экстремум, что является содержанием следующего утверждения.

Теорема 19.1.4. *Для функций φ, на которых функционал (19.1) имеет стационарное значение при выполнении уравнений связей (19.26), существует такой набор множителей Лагранжа, что они вместе с полями φ удовлетворяют уравнениям Эйлера–Лагранжа для действия (19.27):*

$$\frac{\delta S_{\mathrm{T}}}{\delta\varphi^a}=0,\qquad \frac{\delta S_{\mathrm{T}}}{\delta\lambda^{\mathrm{A}}}=G_{\mathrm{A}}=0.$$

Доказательство. См., например, [**?**]. □

Сформулированная теорема позволяет свести вариационную задачу на условный экстремум к вариационной задаче на безусловный экстремум, но для действия, зависящего от большего числа функций. В теории поля вариационные задачи рассматриваются не на прямой $\mathbb{R}$, а в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$. Тогда связи представляют собой в общем случае дифференциальные уравнения в частных производных. Для того чтобы доказать аналог теоремы о множителях Лагранжа необходимо зафиксировать каким либо образом класс рассматриваемых связей, что является сложной задачей. На практике метод неопределенных множителей Лагранжа часто используют, не заботясь о его применимости. В таком случае применимость метода необходимо доказывать в каждом конкретном случае.

19.1.5 Другие задачи и терминология

В общем случае функционал действия может зависеть от частных производных полей φ^a любого порядка, вплоть до бесконечного:

$$S[\varphi] = \int_{\mathbb{M}} dx\, L(x, \varphi, \partial\varphi, \partial^2\varphi, \dots). \tag{19.28}$$

Тогда уравнения Эйлера–Лагранжа примут вид

$$S_{,\,a} = \frac{\partial L}{\partial(\varphi^a)} - \partial_\alpha \frac{\partial L}{\partial(\partial_\alpha \varphi^a)} + \partial^2_{\alpha\beta} \frac{\partial L}{\partial(\partial^2_{\alpha\beta}\varphi^a)} - \dots = 0. \tag{19.29}$$

Для простоты в настоящем разделе мы не будем обсуждать возможные граничные слагаемые.

Модели теории поля, лагранжиан которых зависит от производных бесконечного порядка, называются *нелокальными*. Для *локальных* моделей, порядок производных в которых ограничен, ряд (19.29) обрывается. Модели, для которых уравнения Эйлера–Лагранжа содержат производные третьего или более высокого, но конечного порядка называются *моделями с высшими производными*.

Хорошо известно, что порядок уравнений можно понизить, рассматривая частные производные в качестве новых независимых переменных. В этом смысле любую теорию с высшими производными можно свести к модели без высших производных.

Замечание. С физической точки зрения теории с высшими производными представляют определенные трудности, т.к. наличие векторных лоренцевых индексов у полей, как правило, приводит к каноническому гамильтониану, неограниченному снизу за счет вклада временны́х компонент. После квантования такие теории приводят к гильбертову пространству с индефинитной метрикой, которая на допускает вероятностной интерпретации квантовой теории. Эти трудности можно избежать за счет выбора лагранжиана специального вида или налагая условие калибровочной инвариантности, которое позволяет исключить вклад временны́х компонент в канонический гамильтониан для физических степеней свободы. В квантовой теории поля модели с высшими производными принято считать неудовлетворительными до тех пор, пока не доказана положительная определенность канонического гамильтониана для физических степеней свободы.

Нелокальные теории поля представляют собой еще бо́льшие трудности для физической интерпретации, т.к. помимо проблем с индефинитной метрикой гильбертова

пространства, в общем случае они нарушают причинность. Это следует из того, что значение функции, разложимой в ряд Тейлора в точке x, в точке $y \neq x$ выражаются через ее значения и значения ее производных в точке x в виде бесконечного ряда. Следовательно, значение функции в некоторой точке может зависеть от ее значений в конусе будущего. □

Допустим, что задана система уравнений Эйлера–Лагранжа. Функционал действия, приводящий к этим или эквивалентным уравнениям Эйлера–Лагранжа, определен неоднозначно. Во-первых, как уже отмечалось при рассмотрении вариационной задачи с заданными граничными условиями, уравнения не изменятся, если к лагранжиану добавить частную производную от функции, зависящей произвольным образом от полей и их частных производных. В частности, можно добавлять члены, имеющие вид дивергенции. Отметим, что если сам лагранжиан равен полной дивергенции, то он не приводит ни к каким уравнениям Эйлера–Лагранжа (получается тождество $0 = 0$). Во-вторых, вместо одного набора полей φ^a можно выбрать другой: $\varphi'^a = \varphi'^a(\varphi)$. Если это преобразование полей невырождено, то новая система уравнений Эйлера–Лагранжа будет эквивалентна старой. Пример дают канонические преобразования в гамильтоновом формализме. Иногда можно изменить даже число новых переменных в лагранжиане, и доказать биективность пространств возникающих решений уравнений Эйлера–Лагранжа. В частности, лагранжев и гамильтонов способы описания динамики точечных частиц, рассмотренные в следующей главе, приводят к эквивалентным системам уравнений, но для разного числа переменных.

Замечание. Выбор независимых переменных в действии чрезвычайно важен, поскольку может привести к существенному упрощению возникающих уравнений движения, особенно в нелинейных теориях. С другой стороны, квантования моделей теории поля, основанные на различном выборе динамических переменных, может привести к различным квантовым теориям. В последнем случае теоретическим критерием выбора способа квантования является простота и самосогласованность конечной квантовой теории. Этот вопрос актуален для построения самосогласованной квантовой теории гравитации, которая в настоящее время отсутствует. □

В релятивистских моделях математической физики, т.е. в моделях, инвариантных относительно преобразований из группы Пуанкаре, действие записывается в виде интеграла по всему пространству Минковского $\mathbb{R}^{1,3}$. В этом случае уравнения Эйлера–Лагранжа (19.11) называются также *уравнениями движения*, поскольку описывают эволюцию системы во времени. При этом для уравнений движения часто ставится не краевая задача, а задача Коши.

Для корректной постановки вариационной задачи необходим глубокий анализ уравнений Эйлера–Лагранжа. Во многих важных случаях эти уравнения настолько сложны, что корректность постановки вариационной задачи доказать не удается. Поэтому в теоретической физике выбор действия означает, как правило, просто удобный способ задания уравнений движения для модели с заданными свойствами симметрии, что, конечно, чрезвычайно важно.

19.2 Первая теорема Нетер

В наиболее содержательных моделях математической физики функционал действия инвариантен относительно глобальных или локальных преобразований симметрии.

С каждым преобразованием симметрии связан закон сохранения, что было установлено Эмми Нетер [?] в первой и второй теореме, соответственно, для глобальных и локальных преобразований.

Пусть функционал действия (19.1) инвариантен относительно бесконечно малых преобразований

$$x^\alpha \to x'^\alpha = x^\alpha + \delta x^\alpha, \tag{19.30}$$
$$\varphi^a \to \varphi'^a(x') = \varphi^a(x) + \bar\delta\varphi^a(x). \tag{19.31}$$

Рассмотрим независимые вариации координат и полей:

$$\delta x^\alpha = \epsilon^{\text{A}} R_{\text{A}}{}^\alpha(x,\varphi,\partial\varphi), \tag{19.32}$$
$$\bar\delta\varphi^a = \varphi'^a(x') - \varphi^a(x) = \epsilon^{\text{A}} R_{\text{A}}{}^a(x,\varphi,\partial\varphi), \tag{19.33}$$

где $R_{\text{A}}{}^\alpha(x,\varphi,\partial\varphi)$ и $R_{\text{A}}{}^a(x,\varphi,\partial\varphi)$ – некоторые достаточно гладкие функции своих аргументов, которые называются *генераторами* преобразований симметрии, а $\epsilon^{\text{A}}(x)$, $\text{A} = 1,2,\ldots,\text{K}$, – постоянные или локальные параметры преобразований, число которых зависит от рассматриваемой модели. Мы говорим, что каждому значению индекса A соответствует одно преобразование симметрии.

Преобразования (19.30), (19.31) уже рассматривались нами при обсуждении вариационной задачи с подвижной границей. Разница заключается в том, что сейчас у нас не один, а K параметров преобразования, которые, вдобавок, могут зависеть от точки $x \in \mathbb{M}$.

Начнем с доказательства первой теоремы Нетер, т.е. будем считать параметры преобразований постоянными, $\epsilon^{\text{A}} = \mathsf{const}$. Под инвариантностью функционала действия мы понимаем следующее равенство

$$S = \int_{\mathbb{M}} dx\, L(x,\varphi,\partial\varphi) = \int_{\mathbb{M}'} dx'\, L(x',\varphi',\partial'\varphi'), \tag{19.34}$$

где интегрирование производится по ограниченной области $\mathbb{M} \subset \mathbb{R}^n$, которая отображается в $\mathbb{M}'$ при преобразовании (19.30).

Преобразования (19.32), (19.33) нетривиально действуют как на поля, так и на координаты. В дальнейшем нам понадобится вариация формы функции в данной точке $x \in \mathbb{M}$ (см., раздел 3.13)

$$\delta\varphi^a(x) = \varphi'^a(x) - \varphi^a(x),$$

которая определяется разностью значений полей после и до преобразования в точке x. Она связана с вариацией (19.31) следующим соотношением

$$\delta\varphi^a(x) = \bar\delta\varphi^a - \delta x^\alpha\partial_\alpha\varphi^a = \epsilon^{\text{A}}(R_{\text{A}}{}^a - R_{\text{A}}{}^\alpha\partial_\alpha\varphi^a). \tag{19.35}$$

По-построению, для постоянных параметров преобразований вариация формы функции δ перестановочна с операцией частного дифференцирования ∂_α. Вариация действия относительно преобразований (19.30), (19.31) была вычислена ранее (19.23). Если выполнены уравнения Эйлера–Лагранжа, то вариацию действия при постоянных параметрах преобразований симметрии запишем в виде

$$\delta S = -\int_{\mathbb{M}} dx\, \epsilon^{\text{A}}\partial_\alpha J_{\text{A}}{}^\alpha, \tag{19.36}$$

где

$$J_{\text{A}}{}^{\alpha} = -\frac{\partial L}{\partial(\partial_\alpha \varphi^a)}(R_{\text{A}}{}^{a} - R_{\text{A}}{}^{\beta}\partial_\beta \varphi^a) - L R_{\text{A}}{}^{\alpha}. \tag{19.37}$$

Совокупность величин $J_{\text{A}}{}^{\alpha}$, $\alpha = 1, \ldots, n$ можно рассматривать, как компоненты некоторого вектора (точнее, векторной плотности) J_{A}, который называется *сохраняющимся током* для каждого преобразования симметрии с параметром ϵ^{A}. Из полученного выражения следует

Теорема 19.2.1 (Первая теорема Нетер). *Если действие (19.1) инвариантно относительно преобразований (19.30)–(19.33) с постоянными параметрами, то для каждого преобразования симметрии и любого решения уравнений Эйлера–Лагранжа токи сохраняются:*

$$\partial_\alpha J_{\text{A}}{}^{\alpha} = 0, \qquad \text{A} = 1, \ldots, \text{K}. \tag{19.38}$$

Заметим, что для сохранения тока достаточно глобальной инвариантности, когда параметр преобразования не зависит от точек пространства-времени.

Поскольку лагранжиан не содержит производных выше первого порядка, то компоненты токов в общем случае зависят только от координат, полей и их первых производных. Симметрия действия (19.1) относительно преобразований (19.30), (19.31) означает, что вариация действия равна нулю для любой области интегрирования даже если сам функционал действия расходится.

Закон сохранения (19.38) не нарушится, если к току (19.37) добавить слагаемое

$$J'_{\text{A}}{}^{\alpha} = J_{\text{A}}{}^{\alpha} + \partial_\beta f_{\text{A}}{}^{\beta\alpha}, \tag{19.39}$$

где $f_{\text{A}}{}^{\beta\alpha} = -f_{\text{A}}{}^{\alpha\beta}$ – произвольная антисимметричная по индексам α, β функция. Чтобы не менять структуры тока (19.37), будем считать, что она зависит только от координат x^α, полей φ и их первых производных $\partial\varphi$. Это преобразование часто используется, чтобы упростить выражения для токов.

Перепишем закон сохранения (19.38) в интегральной форме

$$\int_{\mathbb{M}} dx\, \partial_\alpha J_{\text{A}}{}^{\alpha} = \int_{\partial\mathbb{M}} ds_\alpha\, J_{\text{A}}{}^{\alpha} = 0,$$

где интегрирование ведется по многообразию $\mathbb{M}$ и его границе $\partial\mathbb{M}$. Пусть на $\mathbb{M}$ задана (псевдо-)риманова геометрия, т.е. метрика $g_{\alpha\beta}$ и связность Леви–Чивиты $\widetilde{\Gamma}_{\alpha\beta}{}^{\gamma}$. Тогда, если индекс A не включает в себя пространственно временные индексы α, то первый интеграл по (псевдо-)риманову многообразию, можно переписать в ковариантной форме:

$$\int_{\mathbb{M}} dx\, \partial_\alpha J_{\text{A}}{}^{\alpha} = \int_{\mathbb{M}} dx\, \sqrt{|g|}\widetilde{\nabla}_\alpha \left(\frac{1}{\sqrt{|g|}} J_{\text{A}}{}^{\alpha} \right),$$

где

$$\widetilde{\nabla}_\alpha \left(\frac{1}{\sqrt{|g|}} J_{\text{A}}{}^{\alpha} \right) = \partial_\alpha \left(\frac{1}{\sqrt{|g|}} J_{\text{A}}{}^{\alpha} \right) + \widetilde{\Gamma}_{\alpha\beta}{}^{\alpha} \frac{1}{\sqrt{|g|}} J_{\text{A}}{}^{\beta}$$

– ковариантная производная от вектора тока, и мы воспользовались формулой для дивергенции (8.54).

Рассмотрим действие (19.1) в пространстве Минковского. Пусть $\{x^\alpha\} = \{x^0, \boldsymbol{x}\}$ – декартова система координат, и все поля достаточно быстро убывают на пространственной бесконечности:

$$\lim_{|\boldsymbol{x}|\to\infty} \varphi^a = 0$$

для всех моментов времени. Тогда, интегрируя уравнение (19.38) по области пространства Минковского, которая ограниченна двумя пространственноподобными сечениями $x^0_1 = \mathsf{const}$ и $x^0_2 = \mathsf{const}$, получим закон сохранения

$$Q_{\text{A}} = \int_{\mathbb{S}} d\boldsymbol{x}\, J_{\text{A}}{}^0 = \mathsf{const}, \tag{19.40}$$

где $\mathbb{S}$ – произвольное сечение $x^0 = \mathsf{const}$. Это означает, что каждому преобразованию симметрии соответствует закон сохранения: для любого решения уравнений движения, достаточно быстро убывающего на пространственной бесконечности, интеграл (19.40) не зависит от времени. Интеграл (19.40) называется *сохраняющимся зарядом*, соответствующим току $J_{\text{A}}{}^\alpha$. Если для уравнений движения поставлена задача Коши, то значение заряда Q_{A} однозначно определяется начальными условиями.

19.2.1 Тензор энергии-импульса

Предположим, что некоторая модель описывается набором полей φ^a в пространстве Минковского $\mathbb{R}^{1,n-1}$ с декартовыми координатами x^α. При этом метрика $\eta_{\alpha\beta} = \mathsf{diag}\,(+ - \ldots -)$ является заданной функцией в действии, по которой варьирование не проводится. Пусть действие инвариантно относительно трансляций

$$\delta x^\alpha = \epsilon^\alpha = \mathsf{const}, \tag{19.41}$$

$$\bar\delta \varphi^a = 0. \tag{19.42}$$

Для этого достаточно, чтобы лагранжиан модели $L(\varphi, \partial\varphi)$ не зависел явно от координат. Для трансляций индекс A в (19.32) пробегает те же значения, что и α, генератор трансляций совпадает с символом Кронекера, $R_{\text{A}}{}^\alpha \mapsto \delta^\alpha_\beta$, и $R_{\text{A}}{}^a = 0$. В этом случае выражение для тока (19.37) имеет вид

$$T_\alpha{}^\beta = \partial_\alpha \varphi^a \frac{\partial L}{\partial(\partial_\beta \varphi^a)} - \delta^\beta_\alpha L. \tag{19.43}$$

Это выражение называется *тензором энергии-импульса* полей φ^a. Он сохраняется:

$$\partial_\beta T_\alpha{}^\beta = 0. \tag{19.44}$$

Тензор энергии-импульса (19.43) будем называть *каноническим*.

Если лагранжиан модели является скалярным полем (функцией) относительно глобальных преобразований Лоренца $\mathbb{O}(1, n-1)$, то выражение (19.43) представляет собой тензор второго ранга типа $(1,1)$. Ясно, что выражение для $T_0{}^0$ всегда совпадает с плотностью гамильтониана для полей φ^a, и это оправдывает название "канонический".

Замечание. В общей теории относительности, основанной на псевдоримановой геометрии, постулируется, что тензор Риччи пропорционален тензору энергии-импульса материи. При этом тензор энергии-импульса материи (**??**) определяется, как вариационная производная действия для полей материи по метрике. При таком определении тензор энергии-импульса всегда симметричен. Для скалярного поля вариационная производная действия по метрике является ковариантным обобщением тензора (19.43). В других случаях связь двух определений сложнее и будет обсуждаться в каждом конкретном случае. □

В общем случае тензор энергии-импульса с опущенным верхним индексом $T_{\alpha\beta}$ не является симметричным. Если это так, то в ряде случаев можно провести симметризацию, добавив соответствующую дивергенцию (19.39). Однако, это не всегда возможно. Действительно, после добавления дивергенции получим новый тензор энергии-импульса

$$T'_{\alpha\beta} = T_{\alpha\beta} + \partial^\gamma f_{\alpha\gamma\beta}.$$

Из условия симметрии $T'_{\alpha\beta} - T'_{\beta\alpha} = 0$ следуют уравнения на неизвестную функцию $f_{[\alpha\gamma\beta]} = 0$, в которые входят только полностью антисимметричные компоненты

$$\partial^\gamma f_{[\alpha\gamma\beta]} = -\frac{1}{2}(T_{\alpha\beta} - T_{\beta\alpha}).$$

Таким образом мы имеем $n(n-1)/2$ дифференциальных уравнений на $n(n-1)(n-2)/3!$ неизвестных компонент. При $n = 4$ возникает 6 уравнений на 4 неизвестные функции, которые не всегда имеют решения.

Введем стандартные 3-формы на координатных трехмерных гиперповерхностях в четырехмерном пространстве-времени $\mathbb{R}^{1,3}$:

$$ds_\alpha = \frac{1}{6}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} dx^\beta \wedge dx^\gamma \wedge dx^\delta. \tag{19.45}$$

Определим сохраняющийся во времени *ковектор энергии-импульса* с помощью интеграла

$$P_\alpha = \int\limits_{x^0=\mathsf{const}} ds_\beta \, T_\alpha{}^\beta, \tag{19.46}$$

где по индексу β производится суммирование. Полученное выражение (19.46), по-построению, является ковектором относительно глобальных лоренцевых вращений. В предположении, что все поля достаточно быстро убывают на пространственной бесконечности ковектор энергии-импульса определяется одним интегралом по пространству,

$$P_\alpha = \int\limits_{x^0=\mathsf{const}} d\boldsymbol{x} \, T_\alpha{}^0. \tag{19.47}$$

Выражение для нулевой компоненты P_0 совпадает с гамильтонианом системы полей φ^a, т.е. равно сохраняющейся полной энергии. Это оправдывает название ковектора энергии-импульса. Компоненты тензора энергии-импульса

$$T_i^0 = \frac{\partial L}{\partial(\partial_0 \varphi^a)} \partial_i \varphi^a \tag{19.48}$$

определяют сохраняющийся полный импульс системы полей φ^a

$$P_i = \int\limits_{x^0=\mathsf{const}} d\boldsymbol{x} \, T_i^0.$$

Полная энергия системы P_0 и каждая компонента полного импульса P_i относительно данной декартовой системы сохраняются во времени. В другой декартовой системе координат они тоже сохраняются, но имеют другие численные значения.

19.2.2 Тензор момента количества движения

Пусть действие $S[\varphi]$ в пространстве Минковского $\mathbb{R}^{1,n-1}$ инвариантно относительно лоренцевых вращений. Мы предполагаем, что набор полей φ^a преобразуется по некоторому, возможно, приводимому представлению группы Лоренца $\mathbb{SO}(1,n-1)$. Обозначим представление генераторов группы для полей через $L_{\gamma\delta b}{}^a = -L_{\delta\gamma b}{}^a$. Тогда в инфинитезимальной форме лоренцевы вращения примут вид

$$\delta x^\alpha = -x^\beta \omega_\beta{}^\alpha = \sum_{\gamma<\delta} \omega^{\gamma\delta}(x_\delta \delta^\alpha_\gamma - x_\gamma \delta^\alpha_\delta), \tag{19.49}$$

$$\delta\varphi^a = \sum_{\gamma<\delta} \omega^{\gamma\delta} L_{\gamma\delta b}{}^a \varphi^b, \tag{19.50}$$

$\omega^{\gamma\delta} = -\omega^{\delta\gamma}$ – параметры преобразований, которые предполагаются постоянными. Для инвариантности действия достаточно, чтобы лагранжиан был скалярным полем (функцией) от координат, полей и их производных. Для лоренцевых вращений индекс $\mathrm{A} \mapsto (\alpha\beta) = -(\beta\alpha)$ представляет собой пару антисимметричных векторных индексов.

Выражение для тока (19.37) приводит к следующему тензору *момента количества движения*, который мы представим в виде суммы двух слагаемых:

$$\begin{aligned} J_{\gamma\delta}{}^\alpha &= -\frac{\partial L}{\partial(\partial_\alpha\varphi^a)}\Big(L_{\gamma\delta b}{}^a\varphi^b - (x_\delta\delta^\beta_\gamma - x_\gamma\delta^\beta_\delta)\partial_\beta\varphi^a\Big) - L(x_\delta\delta^\alpha_\gamma - x_\gamma\delta^\alpha_\delta) \\ &= M_{\gamma\delta}{}^\alpha + S_{\gamma\delta}{}^\alpha, \end{aligned} \tag{19.51}$$

где введен *орбитальный* и *спиновый* моменты, соответственно,

$$M_{\alpha\beta}{}^\gamma = x_\beta T_\alpha{}^\gamma - x_\alpha T_\beta{}^\gamma, \tag{19.52}$$

$$S_{\alpha\beta}{}^\gamma = -\frac{\partial L}{\partial(\partial_\gamma\varphi^a)} L_{\alpha\beta b}{}^a \varphi^b. \tag{19.53}$$

Оба объекта являются тензорами третьего ранга относительно преобразований Лоренца. Отметим, что орбитальный момент (19.52) не инвариантен относительно трансляций, т.к. явно зависит от координат. В противоположность этому спиновый момент инвариантен относительно трансляций.

Если все поля φ^a являются скалярами относительно лоренцевых вращений, то $L_{\alpha\beta b}{}^a = 0$ и спиновый момент равен нулю, $S_{\alpha\beta}{}^\gamma = 0$.

Допустим, что действие для некоторой системы полей инвариантно относительно трансляций и лоренцевых вращений (группы Пуанкаре), и спиновый момент равен нулю $S_{\alpha\beta}{}^\gamma = 0$, как для скалярных полей. Тогда закон сохранения момента количества движения принимает вид

$$\partial_\gamma M_{\alpha\beta}{}^\gamma = T_{\alpha\beta} - T_{\beta\alpha} + x_\beta \partial_\gamma T_\alpha{}^\gamma - x_\alpha \partial_\gamma T_\beta{}^\gamma.$$

С учетом закона сохранения тензора энергии-импульса (19.44) отсюда вытекает, что для такой системы ковариантный тензор энергии-импульса симметричен:

$$T_{\alpha\beta} = T_{\beta\alpha}. \tag{19.54}$$

Так же, как и для канонического тензора энергии-импульса, для тензора момента количества движения можно ввести полный момент системы. Для полей, достаточно быстро убывающих на пространственной бесконечности, он равен интегралу по пространству:

$$M_{\alpha\beta} = \int\limits_{x^0=\,\mathsf{const}} d\boldsymbol{x}\, M_{\alpha\beta}{}^0. \tag{19.55}$$

Полный момент количества движения является антисимметричным тензором второго ранга относительно преобразований Лоренца.

Замечание. Требование инвариантности моделей математической физики относительно преобразований группы Пуанкаре имеет глубокий физический смысл и составляет основное содержание специальной теории относительности. Инвариантность действия относительно трансляций означает однородность пространства-времени. То есть все точки пространства-времени равноправны, и законы природы имеют одинаковый вид в декартовых координатах с произвольно выбранным началом. Инвариантность относительно преобразований Лоренца означает изотропность пространства-времени. То есть равноправие всех направлений и одинаковый вид законов природы в декартовых координатах с произвольной ориентацией осей. Законы сохранения энергии-импульса и момента количества движения к настоящему времени нашли многочисленные экспериментальные подтверждения в различных областях физики. Поэтому инвариантность фундаментальных моделей математической физики относительно действия группы Пуанкаре следует считать экспериментально установленным фактом.

Помимо этого требование инвариантности функционала действия относительно преобразований группы Пуанкаре в квантовой теории поля означает, что все элементарные частицы должны описываться полями, принадлежащими одному из неприводимых представлений группы Пуанкаре, которые характеризуются массой и спином. Использование этих понятий в экспериментальной физике элементарных частиц также чрезвычайно плодотворно. Это также можно рассматривать, как экспериментальное подтверждение инвариантности законов природы относительно преобразований группы Пуанкаре. □

19.3 Вторая теорема Нетер

Рассмотрим действие (19.1), которое инвариантно относительно преобразований (19.30)–(19.33) с локальными параметрами $\epsilon^{\text{A}}(x)$, зависящим от точек пространства-времени. Мы допускаем, что эти преобразования могут зависеть от частных производных $\partial_\alpha \epsilon^{\text{A}}$ первого и более высокого порядка. Чтобы упростить формулы будем использовать обозначения Девитта [**?**], т.е. суммирование по индексу A в формулах (19.30), (19.31) подразумевает интегрирование, а генераторы локальных преобразований рассматриваются, как двухточечные функции, содержащие δ-функции и (или) их производные.

Пример 19.3.1. Калибровочное преобразование в электродинамике

$$\delta A_\alpha = \partial_\alpha \epsilon$$

будем записывать в виде

$$\delta A_\alpha = \epsilon R_\alpha = \partial_\alpha \int dx'\, \epsilon(x') \delta(x' - x), \tag{19.56}$$

где

$$R_\alpha(x', x) = \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \delta(x' - x). \quad \square \tag{19.57}$$

Пример 19.3.2. Бесконечно малые общие преобразования координат для электромагнитного поля (3.90) можно записать в виде

$$\delta x^\alpha = \epsilon^\alpha = \epsilon^\beta R_\beta{}^\alpha, \tag{19.58}$$

$$\delta A_\alpha = -\partial_\alpha \epsilon^\beta A_\beta - \epsilon^\beta \partial_\beta A_\alpha = \epsilon^\beta N_{\beta\alpha}, \tag{19.59}$$

где

$$R_\beta{}^\alpha = \delta^\alpha_\beta \delta(x' - x), \tag{19.60}$$

$$N_{\beta\alpha} = F_{\alpha\beta}(x')\delta(x' - x) - A_\beta(x')\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\delta(x' - x). \quad \square \tag{19.61}$$

Определение. Преобразования полей (19.33) с локальными параметрами $\epsilon^{\text{A}}(x)$ называются *калибровочными.* $\square$

Рассмотрим одну из вариационных задач. Будем считать, что параметры ϵ^{A} и их производные равны нулю на границе области. Тогда инвариантность действия относительно калибровочных преобразований можно записать в виде

$$\delta S = \int dx\, \delta\varphi^a S,_a = \int dx\, \epsilon^{\text{A}}(R_{\text{A}}{}^a - R_{\text{A}}{}^\alpha \partial_\alpha \varphi^a) S,_a = 0. \tag{19.62}$$

При этом были отброшены все граничные слагаемые. Отсюда следует

Теорема 19.3.1 (Вторая теорема Нетер). *Если функционал действия (19.1) инвариантен относительно калибровочных преобразований, которые параметризуются* K *произвольными функциями* $\epsilon^{\text{A}}(x)$, $\text{A} = 1, \ldots, \text{K}$, *то уравнения Эйлера–Лагранжа удовлетворяют* K *тождествам:*

$$(R_{\text{A}}{}^a - R_{\text{A}}{}^\alpha \partial_\alpha \varphi^a) S,_a = 0. \tag{19.63}$$

Замечание. В формулировке теоремы мы отбросили предположение о том, что параметры преобразований и их производные равны нулю на границе. Если это не так, то зависимость уравнений Эйлера–Лагранжа все равно сохранится. В этом случае из требования инвариантности действия появятся дополнительные следствия для граничных условий, которые мы не рассматриваем. $\square$

Напомним, что в линейном соотношении между уравнениями движения (19.63) суммирование по индексу a предполагает интегрирование. Отсюда следует, что если калибровочные преобразования зависят от частных производных l-того порядка от параметра преобразования, то соотношения (19.63) представляют собой систему K линейных дифференциальных уравнений в частных производных l-того порядка относительно вариационных производных $S,_a$.

Вторая теорема Нетер утверждает, что в калибровочных моделях, а также моделях, инвариантных относительно общих преобразований координат, не все уравнения движения являются линейно независимыми. Это указывает на то, что в решениях задачи Коши будет содержаться функциональный произвол, т.к. количества уравнений недостаточно для однозначного определения решений по начальным данным.

Для доказательства теоремы существенно, что параметры преобразований $\epsilon^{\text{A}}(x)$ является произвольными функциями, т.к. только в этом случае подынтегральное выражение в (19.62) согласно основной лемме вариационного исчисления должно обращаться в нуль.

Пример 19.3.3. Проведем аналогию с теорией функций многих переменных. Пусть $f = f(x)$ – функция n переменных $x = \{x^\alpha\}$. Аналогом вариационной производной действия в таком случае является обычная частная производная $\partial_\alpha f$. Допустим, что f инвариантна относительно калибровочных преобразований $\delta x^\alpha = \epsilon X^\alpha$, где $\epsilon = \epsilon(x)$

– параметр преобразования и X^α – векторное поле (генератор калибровочного преобразования), которое предполагается отличным от нуля. Тогда зависимость уравнений движения сводится к линейной зависимости частных производных $X^\alpha\partial_\alpha f = 0$. Поэтому функция f постоянна вдоль интегральной кривой $x(t)$ векторного поля X^α:

$$f\big(x(t)\big) = \mathsf{const}, \qquad \dot{x}^\alpha = X^\alpha.$$

Это значит, что локальный экстремум $\partial_\alpha f = 0$ достигается не в точке, а на интегральной кривой $x(t)$. □

Из второй теоремы Нетер следует, что функционал действия для калибровочных моделей достигает экстремального значения не на отдельных функциях, а на классах функций, которые связанных между собой калибровочными преобразованиями.

Если некоторая модель инвариантна относительно локальных преобразований, то она, в частности, инвариантна относительно тех же преобразований с постоянными параметрами. Это значит, что токи (19.37) приводят к законам сохранения (19.40) и для локальных преобразований. Поэтому в моделях, инвариантных относительно локальных преобразований можно применить обе теоремы Нетер. При этом первая теорема дает выражения для сохраняющихся токов, а вторая – зависимость уравнений движения. В общем случае это не одно и то же.

Пример 19.3.4. Рассмотрим модели математической физики, инвариантные относительно общих преобразований координат. Пусть действие $S = S(g, \Gamma)$ зависит только от метрики $g_{\alpha\beta}$ и аффинной связности $\Gamma_{\alpha\beta}{}^\gamma$. Обозначим вариационные производные действия следующим образом:

$$\sqrt{|g|}S,^{\alpha\beta} = \frac{\delta S}{\delta g_{\alpha\beta}}, \qquad \sqrt{|g|}S,^{\alpha\beta}{}_\gamma = \frac{\delta S}{\delta \Gamma_{\alpha\beta}{}^\gamma}. \tag{19.64}$$

Здесь мы явно ввели в качестве множителя определитель репера $\sqrt{|g|} = \mathsf{det}\, e_\alpha{}^a$, поскольку вариационные производные так же, как и лагранжиан, являются тензорными плотностями степени -1. Инвариантность действия относительно общих преобразований координат означает равенство нулю вариации

$$\delta S = \int dx\sqrt{|g|}(S,^{\alpha\beta}\delta g_{\alpha\beta} + S,^{\alpha\beta}{}_\gamma\delta\Gamma_{\alpha\beta}{}^\gamma) = 0.$$

Подставляя сюда вариации метрики (3.93) и связности (3.96) и интегрируя по частям (8.62), получим тождества

$$\begin{aligned} &2\widetilde{\nabla}_\alpha S,^\alpha{}_\gamma - \nabla_\beta\nabla_\alpha S,^{\alpha\beta}{}_\gamma + \\ &\quad + \nabla_\beta(T_\alpha + \tfrac{1}{2}Q_\alpha)S,^{\alpha\beta}{}_\gamma + (T_\alpha + \tfrac{1}{2}Q_\alpha)\nabla_\beta(S,^{\alpha\beta}{}_\gamma + S,^{\beta\alpha}{}_\gamma) - \nabla_\alpha S,^{\alpha\beta}{}_\delta T_{\beta\gamma}{}^\delta - \\ &\quad - (T_\alpha + \tfrac{1}{2}Q_\alpha)(T_\beta + \tfrac{1}{2}Q_\beta)S,^{\alpha\beta}{}_\gamma + (T_\alpha + \tfrac{1}{2}Q_\alpha)T_{\beta\gamma}{}^\delta S,^{\alpha\beta}{}_\delta + S,^{\alpha\beta}{}_\delta R_{\alpha\gamma\beta}{}^\delta = 0, \end{aligned} \tag{19.65}$$

где $\widetilde{\nabla}_\alpha$ и ∇_α – ковариантные производные соответственно со связностью Леви–Чивиты $\widetilde{\Gamma}_{\alpha\beta}{}^\gamma$ и аффинной связностью $\Gamma_{\alpha\beta}{}^\gamma$, а подъем и опускание индексов производится с помощью метрики $g_{\alpha\beta}$. Таким образом, в моделях, инвариантных относительно общих преобразований координат, уравнения движения удовлетворяют n линейным дифференциальным тождествам.

В (псевдо-)римановой геометрии, когда гравитационная часть действия зависит только от метрики, эти тождества значительно упрощаются:

$$\widetilde{\nabla}_\alpha S,^\alpha{}_\beta = 0. \tag{19.66}$$

В общей теории относительности для действия Гильберта–Эйнштейна имеем

$$\widetilde{\nabla}_\alpha \left(\widetilde{R}^\alpha{}_\beta - \frac{1}{2}\delta^\alpha_\beta \widetilde{R} \right) = 0. \tag{19.67}$$

Это тождество совпадает со свернутыми тождествами Бианки (8.108). □

Пример 19.3.5. Модели гравитации, построенные в рамках геометрии Римана–Картана, в переменных Картана инвариантны относительно общих преобразований координат и локальных преобразований Лоренца. Как следствие не все уравнения движения являются независимыми, поскольку удовлетворяют тождествам. Пусть действие $S = S(e, \omega)$ зависит только от репера $e_\alpha{}^a$ и лоренцевой связности $\omega_\alpha{}^{ab}$. Обозначим вариационные производные следующим образом:

$$\sqrt{|g|} S,^\alpha{}_a = \frac{\delta S}{\delta e_\alpha{}^a}, \qquad \sqrt{|g|} S,^\alpha{}_{ab} = \frac{\delta S}{\delta \omega_\alpha{}^{ab}}. \tag{19.68}$$

Используя формулы для вариаций репера (**??**) и лоренцевой связности (**??**) при локальных лоренцевых вращениях, получим следующую зависимость уравнений движения

$$\widetilde{\nabla}_\alpha S,^\alpha{}_{ab} + \frac{1}{2}(S,_{ab} - S,_{ba}) = 0, \tag{19.69}$$

где переход от греческих индексов к латинским осуществляется с помощью репера. Полученная зависимость соответствует инвариантности действия относительно локальных лоренцевых вращений.

Вариации полей e и ω при общих преобразованиях координат имеют вид (3.102) и (3.104). Поэтому инвариантность действия относительно общих преобразований координат приводит к тождествам:

$$\nabla_\alpha S,^\alpha{}_\beta + T_\alpha S,^\alpha{}_\beta + S,^\alpha{}_a T_{\alpha\beta}{}^a + S,^\alpha{}_{ab} R_{\alpha\beta}{}^{ab} = 0, \tag{19.70}$$

где мы учли полученное ранее тождество (19.69).

При добавлении к гравитационному действию слагаемых, зависящих от других полей (полей материи), тождества, которым удовлетворяют уравнения движения меняются, т.к. необходимо учитывать вариации всех полей. □

19.4 Эффективное действие

При исследовании моделей математической физики, действие которых зависит от нескольких полей, иногда удается решить часть уравнений Эйлера–Лагранжа явно. В этом случае вариационную задачу можно свести к новому эффективному действию, зависящему от меньшего числа переменных. В настоящем разделе мы докажем простую теорему, позволяющую строить эффективное действие в случае вариационной задачи с фиксированными граничными условиями. То есть будем пренебрегать всеми граничными слагаемыми. Обобщение на более сложные случаи будет ясно из дальнейшего рассмотрения.

Начнем с простейшего случая. Пусть на ограниченной области $\mathbb{M} \subset \mathbb{R}^n$ заданы два скалярных поля $\varphi(x)$ и $\psi(x)$, и пусть функция $\psi = \psi(x, \varphi, \partial\varphi, \partial^2\varphi)$ в каждой точке $x \in \mathbb{M}$ задана как функция φ, ее первых и вторых частных производных:

$\partial_\alpha\varphi$ и $\partial_\alpha\partial_\beta\varphi$. Представим значение функции $\psi(x) := \psi\big[x, \varphi(x), \partial\varphi(x), \partial^2\varphi(x)\big]$ в точке $x \in \mathbb{M}$ в виде функционала, используя δ-функцию,

$$\psi(x) = \int_{\mathbb{M}} dy\, \psi(y)\delta(y-x).$$

Вариация функционала $\psi(x)$, вызванная вариацией $\delta\varphi$, имеет вид

$$\delta\psi(x) = \int_{\mathbb{M}} dy \left(\frac{\partial\psi}{\partial\varphi}\delta\varphi + \frac{\partial\psi}{\partial(\partial_\alpha\varphi)}\delta(\partial_\alpha\varphi) + \frac{\partial\psi}{\partial(\partial_\alpha\partial_\beta\varphi)}\delta(\partial_\alpha\partial_\beta\varphi) \right) \delta(y-x).$$

Проинтегрировав второе и третье слагаемые по частям, получим выражение для вариационной производной

$$\frac{\delta\psi(x)}{\delta\varphi(y)} = \frac{\partial\psi}{\partial\varphi}\delta(y-x) - \frac{\partial}{\partial y^\alpha}\left(\frac{\partial\psi}{\partial(\partial_\alpha\varphi)}\delta(y-x)\right) + \partial_\alpha\partial_\beta\left(\frac{\partial\psi}{\partial(\partial_\alpha\partial_\beta\psi)}\delta(y-x)\right), \quad (19.71)$$

где в правой части $\psi = \psi(y)$ и $\varphi = \varphi(y)$.

Пусть действие $S[\varphi, \psi]$ зависит от двух функций φ и ψ. Из принципа наименьшего действия следуют два уравнения Эйлера–Лагранжа:

$$\frac{\delta S}{\delta\varphi} = 0, \quad (19.72)$$

$$\frac{\delta S}{\delta\psi} = 0. \quad (19.73)$$

Допустим, что второе уравнение Эйлера–Лагранжа допускает общее решение для ψ, как функции от φ и ее производных:

$$\psi = \psi(x, \varphi, \partial\varphi, \partial^2\varphi).$$

При этом мы предполагаем, что общее решение не имеет особенностей. Если действие зависит только от самих функций и их первых производных, то в общее решение будут входить производные от φ не выше второго порядка. Поскольку уравнение Эйлера–Лагранжа (19.73) является дифференциальным уравнением в частных производных, то общее решение зависит также от некоторого набора произвольных функций и постоянных. Часть этих произвольных функций и постоянных фиксируется, если это возможно, граничными условиями $\psi|_{\partial\mathbb{M}} = \psi_0$ и $\varphi|_{\partial\mathbb{M}} = \varphi_0$. Используем полученное решение для построения нового *эффективного* действия

$$S_{\text{eff}}[\varphi] := S[\varphi, \psi(\varphi)], \quad (19.74)$$

которое зависит только от одной функции φ. Тогда уравнение Эйлера–Лагранжа для φ связано со старыми уравнениями (19.72), (19.73) простым соотношением

$$\frac{\delta S_{\text{eff}}}{\delta\varphi(x)} = \frac{\delta S}{\delta\varphi(x)} + \frac{\delta S}{\delta\psi(y)}\frac{\delta\psi(y)}{\delta\varphi(x)}\bigg|_{\psi=\psi(\varphi)} = 0, \quad (19.75)$$

где во втором слагаемом подразумевается интегрирование по аргументу поля $\psi(y)$, которое снимается δ-функцией в вариационной производной. Ясно, что второе слагаемое равно нулю, если выполнено уравнение Эйлера–Лагранжа для ψ (19.73).

Проведенные вычисления остаются в силе и в том случае, когда мы рассматриваем наборы полей $\varphi = \{\varphi^a\}$, $a = 1, \ldots, \mathrm{N}$ и ψ^{A}, $\mathrm{A} = 1, \ldots, m$. Отсюда следует

Теорема 19.4.1. *Пусть дано действие $S[\varphi, \psi]$, зависящее от двух наборов полей φ и ψ. Тогда множество экстремалей этого действия для вариационной задачи с заданными граничными условиями совпадает с множеством экстремалей эффективного действия (19.74).*

Замечание. Если рассматриваются другие вариационные задачи, то слова "множество экстремалей" нужно заменить на "множество решений уравнений Эйлера–Лагранжа". □

Эта теорема важна, поскольку позволяет строить эффективное действие, которое зависит от меньшего числа полей, подставляя решение части системы уравнений Эйлера–Лагранжа непосредственно в исходное действие.

19.5 Редуцированное действие

В настоящем разделе мы рассмотрим еще один способ сведения сложной вариационной задачи к более простой. Пусть задано действие $S[\varphi]$. Рассмотрим для него вариационную задачу с фиксированными граничными условиями. Как правило, уравнения Эйлера–Лагранжа (уравнения движения) настолько сложны, что не позволяют найти все решения. В таких случаях для нахождения частных решений делают упрощающие предположения: решение уравнений движения ищется в определенном классе функций. Например, ищутся статические или сферически симметричные решения. Чтобы найти стационарную точку действия, упрощающую подстановку, которую часто называют *анзац* (от немецкого ansatz $\simeq$ исходное математическое выражение), следует производить в уравнения Эйлера–Лагранжа (19.11), а не в действие. В этом случае найденное точное решение уравнений движения действительно будет стационарной точкой исходного действия.

Однако в ряде случаев подстановки можно производить непосредственно в действие. Это означает следующее. Пусть в результате упрощающих предположений исходный набор функций φ^a, $a = 1, \ldots, \mathrm{N}$, будет выражен через меньшее число независимых функций ψ^{A}, $\mathrm{A} = 1, \ldots, m$, и координаты

$$\varphi^a = \varphi^a(x, \psi). \tag{19.76}$$

При этом функции ψ могут зависеть от меньшего числа координат. В результате подстановки будет получено новое *редуцированное действие*

$$S_{\mathrm{red}}[\psi] := S[\varphi(\psi)], \tag{19.77}$$

зависящее от меньшего числа независимых полей.

Допустим, что найдено решение уравнений движения для редуцированного действия

$$\frac{\delta S_{\mathrm{red}}}{\delta \psi^{\mathrm{A}}} = 0.$$

Тогда функции (19.76), как правило, не будут удовлетворять исходным уравнениям (19.11). Тем не менее в ряде случаев исходные уравнения все же будут удовлетворены. Это замечательные случаи, которые позволяют существенно упростить вычисления. Вместе с этим наличие редуцированного действия помогает в анализе свойств рассматриваемой модели.

Опишем достаточные условия для возможности подстановки (19.76) непосредственно в действие. Пусть на многообразии $\mathbb{M}$ действует группа Ли преобразований $\mathbb{G}$ справа:

$$\mathbb{M} \times \mathbb{G} \ni x, g \mapsto xg \in \mathbb{M}.$$

Предположим, что набор полей $\varphi^a(x)$ при этом преобразуются по некоторому представлению $T(g)_a{}^b$ группы Ли $\mathbb{G}$:

$$\varphi'^a(xg) = \varphi^b(x) T(g)_b{}^a, \tag{19.78}$$

где штрихом обозначены новые поля на $\mathbb{M}$, полученные в результате действия группы $\mathbb{G}$. Поля $\varphi^a(x)$ называются $\mathbb{G}$-*инвариантными*, если в равенстве (19.78) можно убрать штрих. То есть выполнено условие

$$\varphi^a(xg) = \varphi^b(x) T(g)_b{}^a,$$

или

$$\varphi^a(x) = \varphi^b(xg^{-1}) T(g)_b{}^a. \tag{19.79}$$

Эти условия представляют собой уравнения, определяющие $\mathbb{G}$-инвариантные поля на многообразии $\mathbb{M}$.

Обозначим множество всех $\mathbb{G}$-инвариантных полей на $\mathbb{M}$ через Φ. Пусть это множество параметризуется некоторым набором функций ψ^{A}, которые могут зависеть от меньшего числа координат и не определяются из уравнений (19.79). В результате $\mathbb{G}$-инвариантные функции будут представлены в виде (19.76).

Теорема 19.5.1 (Принцип Коулмена). *Пусть исходный функционал действия $S[\varphi]$ инвариантен относительно действия группы Ли преобразований (19.78),*

$$S[\varphi'] = S[\varphi].$$

Тогда поля (19.76), построенные для стационарных точек редуцированного действия (19.77), будут удовлетворять уравнениям Эйлера–Лагранжа исходного действия.

Это утверждение известно, как *принцип Коулмена*. Оно было высказано Коулманом и проиллюстрировано на нескольких примерах [**?**] (см. также [**?**]). Строгое доказательство вместе с ограничениями на его применимость было дано в статье [**?**]. Этот результат затем был обобщен в работах [**?**, **?**]. Другая его формулировка, на языке теории стратов была дана еще до Коулмена [**?**]. В настоящее время доказано, что принцип Коулмана справедлив для всех компактных групп преобразований, полупростых групп, а также для унитарных представлений некомпактных групп.

Глава 20

Канонический формализм

Трудно переоценить роль канонического (гамильтонова) формализма в классической и квантовой механике, а также в теории поля. Он предоставляет наиболее мощные методы интегрирования уравнений движения и является основой для канонического квантования различных моделей математической физики. К его недостаткам относится явное нарушение Лоренц-инвариантности моделей теории поля, поскольку время в гамильтоновом формализме играет выделенную роль. Это усложняет вычисления, проводимые в рамках теории возмущений. Однако принципиальные вопросы, связанные с физической интерпретацией математических моделей, невозможно решить без обращения к гамильтоновой формулировке. В настоящей главе рассматривается канонический формализм для системы точечных частиц, формализм Дирака для систем со связями и его обобщение на теорию поля.

20.1 Канонический формализм в механике точечных частиц

20.1.1 Преобразование Лежандра

Рассмотрим *выпуклую функцию* $y = f(x)$ на интервале $-\infty \le a < x < b \le \infty$, т.е. функцию, у которой $f''(x) > 0$ при $x \in (a, b)$. Преобразованием Лежандра функции f на интервале (a, b) называется новая функция $g(p)$ нового переменного p, которая строится следующим образом (см. рис. 20.1). Нарисуем на плоскости x, y график функции f. Рассмотрим прямую $y = px$, где p – фиксированное число. Найдем точку

Рис. 20.1: Преобразование Лежандра $g(p)$ выпуклой функции $f(x)$. fletra.eps

$x(p)$, в которой кривая дальше всего от прямой по вертикали, т.е. функция $F(x, p) = px - f(x)$ имеет максимум по x при фиксированном p. Тогда, по-определению, $g(p) = F\big(x(p), p\big)$. Функция $g(p)$ определена на некотором интервале $-\infty \le c < p < d \le \infty$.

Точка $x(p)$ определяется из условия экстремума $\partial F/\partial x = 0$ или

$$p = f'(x)$$

Ввиду выпуклости f, если это уравнение имеет решение, то оно единственно.

Пример 20.1.1. Нетрудно проверить, что функция $f(x) = \frac{mx^2}{2}$, $m = \mathsf{const} > 0$ выпукла на всей вещественной оси $x \in \mathbb{R}$ и $p = mx$. Ее преобразование Лежандра определено для всех $p \in \mathbb{R}$ и имеет вид

$$g(p) = (xp - f)|_{x=p/m} = \frac{p^2}{2m} \qquad \square$$

Пусть функция f достаточное число раз дифференцируема. Тогда преобразование Лежандра переводит выпуклые функции в выпуклые. Это значит, что преобразование Лежандра можно применить дважды. Можно доказать [**?**], что преобразование Лежандра *инволютивно*, т.е. его квадрат равен тождественному преобразованию.

По-определению $F(x,p) = px - f(x) \leq g(p)$ для всех x и p. Отсюда вытекает *неравенство Юнга*

$$px \leq f(x) + g(p)$$

Преобразование Лежандра без труда обобщается на функции нескольких переменных. Пусть $f(\boldsymbol{x})$ – выпуклая функция нескольких переменных $\boldsymbol{x} = (x^1, \ldots, x^n) \in \mathbb{R}^n$, т.е. квадратичная форма $dx^\alpha dx^\beta \partial^2_{\alpha\beta} f$, $\alpha = 1, \ldots, n$, положительно определена в некоторой окрестности $\mathbb{U} \subset \mathbb{R}^n$. Тогда преобразованием Лежандра называется функция $g(\boldsymbol{p})$ того же числа переменных $\boldsymbol{p} = (p_1, \ldots, p_n)$, которая строится аналогично случаю одного переменного:

$$g(\boldsymbol{p}) = F\big(\boldsymbol{x}(\boldsymbol{p}), \boldsymbol{p}\big) = \max_{\boldsymbol{x}} F(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{p}),$$

где

$$F(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{p}) = x^\alpha p_\alpha - f(\boldsymbol{x}), \qquad \text{и} \qquad p_\alpha = \frac{\partial f}{\partial x^\alpha}.$$

Преобразование Лежандра $g(\boldsymbol{p})$ определено в некоторой окрестности $\boldsymbol{p} \in \mathbb{V} \subset \mathbb{R}^n$, которая определяется исходной функцией $f(\boldsymbol{x})$.

В этом определении мы различаем верхние и нижние индексы по следующей причине. Поскольку $\boldsymbol{x}$ – точка многообразия $\mathbb{R}^n$ и f – функция на $\mathbb{R}^n$, то набор переменных p_α определяет компоненты некоторого ковектора (1-формы). Отметим также, что в этом определении все координаты x^α равноправны.

Пример 20.1.2. Преобразованием Лежандра положительно определенной квадратичной формы

$$f(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} x^\alpha x^\beta,$$

где $g_{\alpha\beta} = g_{\beta\alpha}$ – постоянная матрица, снова является положительно определенная квадратичная форма

$$g = \big(x^\alpha p_\alpha - f(\boldsymbol{x})\big)\big|_{x^\alpha = g^{\alpha\beta} p_\beta} = \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} p_\alpha p_\beta.$$

где $g^{\alpha\beta}$ – матрица, обратная к $g_{\alpha\beta}$. При этом значения обеих форм в соответствующих точках совпадают:

$$f\big(\boldsymbol{x}(\boldsymbol{p})\big) = g(\boldsymbol{p}), \qquad g\big(\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x})\big) = f(\boldsymbol{x}).$$

Обе функции $f(\boldsymbol{x})$ и $g(\boldsymbol{p})$ определены на всем евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$. $\square$

20.1.2 Гамильтонова динамика точечных частиц

Механика точечных частиц может быть описана на двух эквивалентных языках: лагранжевом и гамильтоновом. Каждый подход имеет свои преимущества и недостатки. В лагранжевом подходе совокупность N частиц описывается обобщенными координатами $q^i(t)$, $i = 1, \dots, \mathrm{N}$, зависящих от времени t. Если каждая частица движется в трехмерном пространстве, то q^i представляет собой трехмерный вектор в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3$ для каждого значения индекса i. Для определенности мы считаем, что каждая частица движется в одномерном пространстве. Тогда совокупность всех координат q^i можно рассматривать, как координаты одной частицы в *конфигурационном* пространстве $\mathbb{R}^{\mathrm{N}}$. Размерность конфигурационного пространства называется *числом степеней свободы* механической системы. Говорят, что механическая система имеет N степеней свободы.

Для простоты обозначений условимся считать, что символ с индексом q^i обозначает i-ю координату частицы, а по повторяющимся индексам производится суммирование. Если индекс отсутствует, то символ q обозначает весь набор координат $q := (q^1, \dots, q^{\mathrm{N}})$. В лагранжевом подходе уравнения движения имеют второй порядок, поэтому будем рассматривать дважды непрерывно дифференцируемые функции $q^i \in \mathcal{C}^2\big([t_1, t_2]\big)$ для всех i на конечном отрезке $[t_1, t_2]$.

Предположим, что механическая система описывается некоторым действием

$$S[q] = \int_{t_1}^{t_2} dt\, L(q, \dot{q}), \tag{20.1}$$

где функция Лагранжа или лагранжиан $L(q, \dot{q})$ зависит только от обобщенных координат q и их первых производных по времени $\dot{q}$, которые называются обобщенными *скоростями*. Рассмотрим вариационную задачу с фиксированными граничными условиями

$$q(t_1) = q_1, \qquad q(t_2) = q_2, \tag{20.2}$$

т.е. траектория механической системы представляет собой кривую в конфигурационном пространстве, которая соединяет две фиксированные точки q_1 и q_2. Тем самым вариации координат на концах интервала обращаются в нуль.

Обычно предполагают, что конфигурационное пространство представляет собой евклидово пространство $\mathbb{R}^{\mathrm{N}}$ с заданной метрикой δ_{ij}, а обобщенные координаты – это декартовы координаты в $\mathbb{R}^{\mathrm{N}}$. Кроме того, мы предполагаем, что лагранжиан в действии (20.1) представляет собой функцию (скалярное поле) на $\mathbb{R}^{\mathrm{N}}$. Поэтому метрика необходима для построения инвариантов из координат q^i и скоростей $\dot{q}^i$, и она входит в действие. В этом действии евклидова метрика рассматривается как внешнее поле, и по ней варьирование не проводится. Конечно, после того, как задача поставлена, действие можно переписать в произвольной криволинейной системе координат в $\mathbb{R}^{\mathrm{N}}$. Тогда обобщенные координаты q^i станут криволинейными координатами в $\mathbb{R}^{\mathrm{N}}$, а компоненты евклидовой метрики $g_{ij}(x)$ будут нетривиальными функциями от x. Действие по этим компонентам не варьируется.

Замечание. При рассмотрении движения механической системы, естественная линейная структура в $\mathbb{R}^{\mathrm{N}}$ не играет никакой роли и нигде не используется. Важно только наличие метрики. В общем случае можно считать, что конфигурационное пространство – это произвольное риманово многообразие $(\mathbb{M}, g)$ с заданной метрикой g, которая необходима для построения инвариантов. Действие в этом случае будет

зависеть от метрики, которая рассматривается как внешнее поле, и по ней варьирование не проводится. Заметим также, что задание лагранжиана ничего не говорит о топологии конфигурационного пространства. Для того, чтобы задать топологию $\mathbb{M}$ необходимо сделать какие либо дополнительные предположения. В дальнейшем, для простоты, мы будем рассматривать в основном топологически тривиальные конфигурационные пространства, $\mathbb{M} \approx \mathbb{R}^{\mathrm{N}}$. □

Уравнения Эйлера–Лагранжа (уравнения движения) для действия (20.1),

$$\frac{\delta S}{\delta q^i} = \frac{\partial L}{\partial q^i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} = 0, \tag{20.3}$$

представляют собой систему уравнений не выше второго порядка. Функции $q^i(t)$, удовлетворяющие уравнениям Эйлера–Лагранжа, соответствуют стационарным точкам действия (20.1). Они определяют *траекторию* механической системы. Траектории частиц не зависят от выбора координат в конфигурационном пространстве $\mathbb{R}^{\mathrm{N}}$, которые выбираются из соображений удобства.

Как правило, решение системы уравнений движения (20.3) содержит $2\mathrm{N}$ произвольных постоянных, которые находятся из граничных условий (20.2). У краевой задачи решения может не существовать, а если оно существует, то может не быть единственным. Вместо краевой задачи можно поставить задачу Коши, которая имеет единственное решение при корректной постановке. В этом случае произвольные постоянные, возникающие в решении уравнений движения, находятся из начальных данных для q и $\dot{q}$ в начальный момент времени $t = 0$. Именно эта задача наиболее часто ставится в физических приложениях для уравнений движения (20.3).

Перейдем к гамильтонову или каноническому формализму. В этом случае механическая система, состоящая из N частиц, описывается N обобщенными координатами q^i и N обобщенными импульсами

$$p_i := \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}, \tag{20.4}$$

которые рассматриваются, как независимые переменные. Обобщенные координаты и импульсы являются координатами механической системы в $2\mathrm{N}$-мерном *фазовом* пространстве. Мы говорим, что координаты и импульсы являются канонически сопряженными переменными.

Предположим, что конфигурационное пространство с координатами q^i является N-мерным многообразием $\mathbb{M}$. Тогда производные $\dot{q}^i$ являются компонентами касательного вектора вдоль траектории частицы. Это значит, что лагранжиан $L(q, \dot{q})$ является функцией (скалярным полем) на касательном расслоении $\mathbb{T}(\mathbb{M})$. Тогда формула (20.4) определяет компоненты ковариантного вектора (1-формы). Это значит, что фазовое пространство есть ни что иное, как кокасательное расслоение $\mathbb{T}^*(\mathbb{M})$ к конфигурационному пространству $\mathbb{M}$.

Поскольку q^i и p_i являются координатами в базе и в кокасательном слое, то мы пишем координатные индексы, соответственно, вверху и внизу.

Предположим, что функция Лагранжа $L(q, \dot{q})$ выпукла по скоростям, т.е. квадратичная форма $\partial^2 L/\partial\dot{q}^i\partial\dot{q}^j$ положительно определена. Это условие не является ковариантным относительно произвольной замены координат на касательном расслоении $\mathbb{T}(\mathbb{M})$. Однако оно ковариантно относительно общих преобразований координат в конфигурационном пространстве $\mathbb{M}$. Действительно, при замене координат $q \mapsto q'(q)$ скорости преобразуются как векторы:

$$\dot{q}^i \mapsto \dot{q}'^i = \frac{\partial q'^i}{\partial q^j}\dot{q}^j.$$

Поскольку якобиан преобразования $\partial q'^i/\partial q^j$ не зависит от скоростей, то

$$\frac{\partial^2 L}{\partial\dot q^i\partial\dot q^j}\mapsto\frac{\partial^2 L}{\partial\dot q'^i\partial\dot q'^j}=\frac{\partial q^k}{\partial q'^i}\frac{\partial}{\partial\dot q^k}\left(\frac{\partial q^l}{\partial q'^j}\frac{\partial L}{\partial\dot q^l}\right)=\frac{\partial q^k}{\partial q'^i}\frac{\partial q^l}{\partial q'^j}\frac{\partial^2 L}{\partial\dot q^k\partial\dot q^l}.$$

Таким образом, понятие выпуклости лагранжиана по скоростям не зависит от выбора координат в конфигурационном пространстве $\mathbb{M}$.

Если функция Лагранжа выпукла по скоростям, то можно построить ее преобразование Лежандра (по скоростям):

$$H(q,p):=p_i\dot q^i-L(q,\dot q),\tag{20.5}$$

которое называется *функцией Гамильтона* или *гамильтонианом* системы. В силу определения преобразования Лежандра гамильтониан системы зависит только от обобщенных координат и импульсов. Это можно проверить и непосредственно

$$\frac{\partial H}{\partial\dot q^i}=p_i-\frac{\partial L}{\partial\dot q^i}=0,$$

что следует из определения обобщенных импульсов (20.4).

Используя связь между гамильтонианом и лагранжианом (20.5), рассмотрим действие

$$S[q,p]=\int_{t_1}^{t_2}dt\,\big(p_i\dot q^i-H(q,p)\big)\tag{20.6}$$

как функционал от канонически сопряженных координат и импульсов. Соответствующая система уравнений Эйлера–Лагранжа имеет вид

$$\frac{\delta S}{\delta q^i}=-\dot p_i-\frac{\partial H}{\partial q^i}=0,\tag{20.7}$$

$$\frac{\delta S}{\delta p_i}=\ \ \dot q^i-\frac{\partial H}{\partial p_i}=0.\tag{20.8}$$

Нетрудно проверить, что N уравнений Эйлера–Лагранжа второго порядка (20.3) эквивалентны 2N уравнениям первого порядка (20.7). Понижение порядка уравнений движения произошло за счет введения новых независимых переменных – импульсов.

Поскольку конфигурационное и фазовое пространства имеют разную размерность, то уточним понятие эквивалентности. Для однозначного определения траектории частицы $q(t)$ в конфигурационном пространстве необходимо решить уравнения Эйлера–Лагранжа второго порядка (20.3), например, с начальными условиями $q(0)=q_0$, $\dot q(0)=q_1$. Траектория движения в фазовом пространстве $q(t),p(t)$ однозначно находится решением уравнений движения первого порядка (20.7), (20.8) с начальными условиями $q(0)=q_0$, $p(0)=p_0$. Каждая траектория в фазовом пространстве естественным образом проектируется на траекторию в конфигурационном пространстве $\{q(t),p(t)\}\mapsto\{q(t)\}$, при этом начальное условие для скорости q_1 определяется из уравнения (20.8). Обратно. Для любой траектории в конфигурационном пространстве $q(t)$ уравнение (20.8) определяет импульсы $p(t)$ и начальные условия p_0 так, что пара $q(t),p(t)$ является траекторией в фазовом пространстве. Здесь мы предполагаем, что уравнение (20.8) имеет единственное решение для p (в противном случае преобразование Лежандра не определено).

При постановке граничной задачи для действия (20.6) мы не можем рассматривать траектории, соединяющие две произвольные точки (q_1,p_1) и (q_2,p_2) фазового

пространства, т.к. возникает 4N условий для 2N обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка (20.7), (20.8). В этом случае количество граничных условий превышает количество уравнений, и задача может не иметь решения. Поэтому можно рассматривать, например, те траектории, которые имеют начало и конец на N-мерных подмногообразиях фазового пространства, определяемых условиями (20.2), как и в лагранжевом подходе. При этом никаких граничных условий на импульсы не возникает, поскольку они входят в подынтегральное выражение без производных, и при вариации импульсов интегрирования по частям не происходит.

Замечание. Как правило для уравнений Эйлера–Лагранжа в фазовом пространстве ставится задача Коши, которая имеет единственное решение. При этом начальной точкой траектории может быть произвольная точка фазового пространства $\mathbb{T}^*(\mathbb{R}^N) = \mathbb{R}^{2N}$. Тем самым мы предполагаем, что фазовое пространство так же как и конфигурационное пространство топологически тривиально. Обсуждение области определения различных функций в конфигурационном и фазовом пространствах требует знания явного вида лагранжиана, гамильтониана и анализа уравнений движения. Поскольку в общем случае учесть все возможности нельзя, то в дальнейшем при обсуждении общей схемы все рассматриваемые функции будут считаться определенными на всем фазовом пространстве и достаточно гладкими. В каждом конкретном случае области определения должны быть проанализированы, а постановка задачи уточнена. □

Посмотрим на уравнения (20.7), (20.8) с другой точки зрения. Пусть заданы две функции от канонических переменных $f(q,p)$ и $g(q,p)$, т.е. два скалярных поля на фазовом пространстве. Определим для них *скобку Пуассона*

$$[f,g] = \frac{\partial f}{\partial q^i}\frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial g}{\partial q^i}. \tag{20.9}$$

Легко проверить, что она обладает следующими свойствами:

1) $[af+bg,h] = a[f,g] + b[g,h], \quad a,b \in \mathbb{R}$ – линейность,
2) $[f,g] = -[g,f]$ – антисимметрия,
3) $[f,gh] = [f,g]h + g[f,h]$ – правило Лейбница,
4) $[f,[g,h]] + [g,[h,f]] + [h,[f,g]] = 0$ – тождество Якоби,

и, следовательно, определяет пуассонову структуру на фазовом пространстве (см. раздел 18.3.

Скобку Пуассона (20.9) можно переписать в эквивалентном виде. Обозначим координаты фазового пространства через $\{x^\alpha\} = \{q^1 \dots q^N, p_1 \dots p_N\}$ или, короче, $x = (q,p)$. Тогда

$$[f,g] = \varpi^{-1\alpha\beta}\frac{\partial f}{\partial x^\alpha}\frac{\partial g}{\partial x^\beta}, \tag{20.10}$$

где

$$\varpi^{-1\alpha\beta} = [x^\alpha, x^\beta] = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ -\mathbb{1} & 0 \end{pmatrix}$$

– каноническая пуассонова структура. Каноническая форма ϖ невырождена и точна $d\varpi = 0$, поскольку ее компоненты постоянны. Поэтому фазовое пространство представляет собой также симплектическое многообразие (см. раздел 18.2).

Рассмотрим простейшие свойства скобки Пуассона. Очевидно, скобки Пуассона произвольной функции f с самой собой и константой c равны нулю:

$$[f, f] = 0, \qquad [f, c] = 0.$$

Из определения (20.9) следует, что скобка Пуассона обобщенной координаты с импульсом равна символу Кронекера

$$[q^i, p_j] = \delta^i_j. \tag{20.11}$$

Рассмотрим траекторию в фазовом пространстве $q(t), p(t)$. Тогда, используя скобку Пуассона, уравнения движения (20.7), (20.8) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \dot{q}^i &= [q^i, H] = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \\ \dot{p}_i &= [p_i, H] = -\frac{\partial H}{\partial q^i}. \end{aligned} \tag{20.12}$$

При этом скобка Пуассона для координат фазового пространства (20.11) рассматривается как одновременная:

$$[q^i(t), p_j(t)] = \delta^i_j, \qquad \forall t \in \mathbb{R}. \tag{20.13}$$

Скобка Пуассона для различных моментов времени $[q^i(t_1), p_j(t_2)]$ при $t_1 \neq t_2$ не определена. Вообще, эволюция во времени любой функции $f(t, q, p)$, зависящей от времени и канонических переменных определяется уравнением

$$\dot{f} = \frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + [f, H]. \tag{20.14}$$

В частности, если функция Гамильтона не зависит от времени явно, то

$$\frac{dH}{dt} = [H, H] = 0,$$

ввиду антисимметрии скобки Пуассона. Это значит, что для заданной траектории механической системы в фазовом пространстве гамильтониан является интегралом движения и его численное значение сохраняется. Это значение называется *энергией* механической системы и определяется начальными данными. Системы, у которых гамильтониан не зависит от времени, называются *консервативными.*

Пример 20.1.3 (Гармонический осциллятор с затуханием). Рассмотрим функцию Лагранжа для одной точечной частицы (осциллятора), которая явно зависит от времени

$$L = \frac{1}{2} e^{2\mu t}(\dot{q}^2 - \omega^2 q^2), \qquad \mu, \omega = \mathsf{const}.$$

Постоянные ω и μ называются соответственно собственной частотой и коэффициентом затухания осциллятора. Обобщенный импульс частицы равен

$$p := \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = e^{2\mu t}\dot{q}.$$

Гамильтониан осциллятора также зависит от времени явно:

$$H = \frac{1}{2} e^{-2\mu t} p^2 + \frac{1}{2} e^{2\mu t} \omega^2 q^2.$$

Гамильтоновы и лагранжевы уравнения движения для осциллятора с затуханием имеют вид

$$\left.\begin{aligned}\dot q &= \ \ e^{-2\mu t}p,\\ \dot p &= -e^{2\mu t}\omega^2 q,\end{aligned}\right\} \quad\Leftrightarrow\quad e^{2\mu t}(\ddot q + 2\mu\dot q + \omega^2 q) = 0.$$

Общее решение этих уравнений параметризуется двумя постоянными: амплитудой A_0 и фазой φ,

$$q = A_0 e^{-\mu t}\cos(\tilde\omega t + \varphi), \qquad \tilde\omega^2 = \omega^2 - \mu^2.$$

Произвольная фаза φ соответствует произволу в выборе начала отсчета времени, и в дальнейшем мы положим $\varphi = 0$. При малых коэффициентах затухания $\mu^2 < \omega^2$ амплитуда колебаний экспоненциально затухает, если $\mu > 0$. Затухающие колебания происходят с частотой, меньшей собственной частоты осциллятора $\tilde\omega < \omega$. Для произвольной траектории численное значение гамильтониана зависит от времени явно

$$H = \frac{1}{2}A_0^2\omega^2\left[1 - \frac{1}{2}\cos 2\tilde\omega t - \frac{1}{2}\cos(2\tilde\omega t + 2\psi)\right],$$

где $\cos\psi = \mu/\omega$. □

Функция канонических переменных $f(q,p)$ называется *интегралом движения*, если $f(q,p) = \mathsf{const}$ для любого решения канонических уравнений движения, т.е. является интегралом уравнений движения.

Теорема 20.1.1. *Если известны два интеграла движения f и g, то их скобка Пуассона $[f,g]$ также является интегралом движения.*

Доказательство. Прямая проверка равенства $d[f,g]/dt = 0$. □

Замечание. Теорема не гарантирует того, что вычисление скобки Пуассона двух интегралов движения дает новый интеграл движения. Часто она равна нулю, или интегралы движения f, g и $[f,g]$ – функционально зависимы. □

Если гамильтониан не зависит от какой-либо из координат, например, от q^1, т.е. $\partial H/\partial q^1 = 0$, то эта координата называется *циклической*, а соответствующий обобщенный импульс сохраняется в силу второго уравнения (20.12)

$$p_1 = c = \mathsf{const}.$$

При этом изменение остальных координат и импульсов во времени такое же, как в системе с координатами $q^2,\dots,q^{\mathrm N}$, импульсами $p_2,\dots,p_{\mathrm N}$ и функцией Гамильтона $H(q^2,\dots,q^{\mathrm N},c,p_2,\dots,p_{\mathrm N})$.

В большинстве физических приложений для системы уравнений Гамильтона (20.12) решается задача Коши, т.е. ищется решение системы уравнений (20.12) с заданными начальными условиями

$$q(0) = q_0, \qquad p(0) = p_0. \tag{20.15}$$

Канонические уравнения движения (20.12) можно записать в виде

$$\dot x = X,$$

где $x = (q,p)$, а правая часть уравнений определяются векторным полем

$$X = \frac{\partial H}{\partial p_i}\frac{\partial}{\partial q^i} - \frac{\partial H}{\partial q^i}\frac{\partial}{\partial p_i}$$

на фазовом пространстве. С геометрической точки зрения решение уравнений Гамильтона с заданными начальными условиями задает интегральную кривую этого векторного поля, проходящую через точку (20.15). Как было показано в разделе 3.6.5, интегральные кривые векторного поля задают абелеву однопараметрическую группу преобразований многообразия, которым в данном случае является фазовое пространство. Эта группа преобразований в гамильтоновой динамике имеет специальное название.

Определение. *Фазовым потоком* называется однопараметрическая группа преобразований фазового пространства

$$s_t : \quad \mathbb{T}^*(\mathbb{M}) \ni q(0), p(0) \ \mapsto \ q(t), p(t) \in \mathbb{T}^*(\mathbb{M}),$$

где $q(t), p(t)$ – решение системы уравнений Гамильтона (20.12). □

20.1.3 Потенциальное движение точечной частицы

Потенциальное движение точечной частицы массы m в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^{\mathrm{N}}$ с декартовыми координатами q^i, $i = 1, \ldots, \mathrm{N}$ описывается следующей функцией Лагранжа

$$L = m\frac{\dot{q}^i\dot{q}_i}{2} - U(q), \tag{20.16}$$

где $U(q) \geq 0$ – некоторая положительно определенная функция координат. В настоящем разделе подъем и опускание индексов производится с помощью евклидовой метрики $\delta_{ij} = \mathsf{diag}\,(+\ldots+)$. Уравнения движения (*уравнения Ньютона*) при этом имеют вид

$$m\ddot{q}^i = -\frac{\partial U}{\partial q_i}. \tag{20.17}$$

Это – система обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка и их решение зависит от $2\mathrm{N}$ произвольных постоянных. Для их определения решают, как правило, задачу Коши. То есть ищется решение уравнений (20.17) с заданными начальными условиями:

$$q(0) = q_0, \qquad \dot{q}(0) = v_0.$$

В физических приложениях функции $U(q)$ обычно таковы, что решение этой задачи существует, единственно и определено при всех $t \in (-\infty, \infty)$. Заметим, что потенциальная энергия определена с точностью до постоянной, которая не влияет на уравнения движения.

Если потенциальная энергия имеет локальный экстремум в точке q_0, то

$$\left.\frac{\partial U}{\partial q^i}\right|_{q=q_0} = 0.$$

Следовательно, постоянная траектория $q = q_0$ удовлетворяет системе уравнений (20.17). Таким образом, локальные экстремумы потенциальной энергии определяют положения равновесия частицы. Эти положения могут быть устойчивы или не устойчивы по отношению к малым возмущениям в зависимости от того является ли локальный экстремум минимумом или максимумом потенциальной энергии. Для положительно определенной потенциальной энергии существует по крайней мере одна точка равновесия.

Посмотрим на эту задачу с точки зрения принципа наименьшего действия. Во-первых, действие

$$S[q] = \int dt \left(m\frac{\dot{q}^i \dot{q}_i}{2} - U(q) \right)$$

не является положительно определенным. Поэтому нужно говорить не о минимуме действия, а только о стационарных точках. Во-вторых, для свободного движения, $U = 0$, траектории представляют собой прямые линии

$$q = v_0 t + q_0,$$

по которым частица движется с постоянной скоростью v_0. Соответствующее действие при интегрировании по бесконечному интервалу расходится и говорить даже о стационарности действия в этом случае не имеет смысла. Подытожить сделанные замечания можно следующим образом. Потенциальное движение точечной частицы происходит таким образом, что для каждого конечного интервала времени (t_1, t_2) действие стационарно среди всех возможных траекторий, соединяющих точки q_1 и q_2. При этом первую граничную точку можно выбрать произвольным образом, а вторая должна быть такой, чтобы задача Коши, поставленная в первой точке, имела решение для некоторой скорости $\dot{q}_1 = v_0$.

Переформулируем потенциальное движение точечной частицы на гамильтоновом языке. Компоненты импульса и гамильтониан точечной частицы равны

$$\begin{aligned} p_i &= m\dot{q}_i, \\ H &= \frac{p^i p_i}{2m} + U(q). \end{aligned} \tag{20.18}$$

Гамильтоновы уравнения движения принимают вид

$$\begin{aligned} \dot{q}^i &= \frac{p^i}{m}, \\ \dot{p}_i &= -\frac{\partial U}{\partial q^i}, \end{aligned} \tag{20.19}$$

которые эквивалентны уравнениям Ньютона. Заметим, что в данном случае первое уравнение совпадает с определением импульса частицы.

Гамильтониан точечной частицы (20.18) положительно определен и для заданной траектории его значение (энергия) постоянно. Первое и второе слагаемые в (20.18) называются соответственно *кинетической* и *потенциально* энергией точечной частицы. Следующий пример показывает, что функция Гамильтона зависит от выбора системы координат в фазовом пространстве, а каноническая пуассонова структура – нет.

Пример 20.1.4. Рассмотрим частицу массы m, которая движется в трехмерном конфигурационном пространстве $q \in \mathbb{R}^3$ с заданным потенциалом U. Гамильтониан является функцией на фазовом пространстве и в произвольной криволинейной системе координат имеет вид

$$H = \frac{1}{2m} g^{ij} p_i p_j + U(q),$$

где $g^{ij} = g^{ij}(q)$ – обратная метрика в выбранной системе отсчета. Например, в декартовых координатах x, y, z

$$H = \frac{1}{2m} \left(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 \right) + U(x, y, z).$$

В цилиндрических координатах r, φ, z

$$H = \frac{1}{2m}\left(p_r^2 + \frac{p_\varphi^2}{r^2} + p_z^2\right) + U(r, \varphi, z).$$

В сферических координатах r, θ, φ

$$H = \frac{1}{2m}\left(p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2} + \frac{p_\varphi^2}{r^2 \sin^2\theta}\right) + U(r, \theta, \varphi). \qquad \square$$

Каноническая пуассонова структура была определена в произвольной, в общем случае криволинейной, системе координат. Проверим корректность этого определения относительно преобразования координат, поскольку при переходе от одной системы координат к другой структурные функции могли бы измениться. Допустим, что мы определили каноническую пуассонову структуру в декартовой системе координат. В рассматриваемом случае преобразование координат имеет вид $q, p \mapsto Q(q), P(q, p)$, где большие буквы обозначают криволинейные (сферические или цилиндрические) координаты в конфигурационном пространстве. Скобки Пуассона новых координат и импульсов равны:

$$\begin{aligned}
[Q^i, Q^j] &= 0,\\
[Q^i, P_j] &= \frac{\partial Q^i}{\partial q^k}\frac{\partial P_j}{\partial p_k},\\
[P_i, P_j] &= \frac{\partial P_i}{\partial q^k}\frac{\partial P_j}{\partial p_k} - \frac{\partial P_i}{\partial p_k}\frac{\partial P_j}{\partial q^k}.
\end{aligned}$$

Поскольку компоненты обобщенных импульсов являются компонентами ковектора, то они преобразуются по правилу

$$P_i = \frac{\partial q^k}{\partial Q^i} p_k.$$

Теперь нетрудно проверить выполнение скобок Пуассона:

$$[Q^i, P_j] = \delta^i_j, \qquad [Q^i, Q^j] = 0, \qquad [P_i, P_j] = 0.$$

Таким образом, структурные функции имеют канонический вид и не зависят от выбора системы координат в конфигурационном пространстве $\mathbb{R}^3$. Рассматриваемые преобразования координат $q, p \mapsto Q, P$ в фазовом пространстве относятся к классу канонических преобразований, которые будут рассмотрены в разделе 20.1.10.

Определение. Преобразование координат $q = q(Q)$ конфигурационного пространства $\mathbb{R}^{\mathrm{N}}$ называется *точечным*. $\square$

20.1.4 Лемма Стокса

В этом и следующих разделах механика частиц будет рассмотрена с более общей точки зрения. Начнем с геометрического рассмотрения, которое затем применим к гамильтоновой динамике точечных частиц. Пусть на многообразии $\mathbb{M}$ нечетной размерности $\dim \mathbb{M} = 2\mathrm{N} + 1$ задана 2-форма

$$B = \frac{1}{2} dx^\alpha \wedge dx^\beta B_{\alpha\beta}.$$

Поскольку матрица, задающая 2-форму в локальной системе координат антисимметрична, $B_{\alpha\beta} = -B_{\beta\alpha}$, а многообразие нечетномерно, то ее определитель равен нулю. Это значит, что в каждой точке $x \in \mathbb{M}$ у нее существует по крайней мере один нетривиальный собственный вектор $X = X^\alpha \partial_\alpha$ с нулевым собственным значением. Отсюда вытекает, что для 2-формы B существует *нулевое* векторное поле X со свойством

$$B(X,Y) = X^\alpha Y^\beta B_{\alpha\beta} = 0, \quad \forall Y = Y^\alpha \partial_\alpha.$$

Пространство нулевых векторных полей линейно.

Определение. 2-форма называется *неособой*, если размерность пространства нулевых векторов минимальна, т.е. равна нулю или единице на многообразиях четной и нечетной размерности соответственно. □

Пример 20.1.5. Рассмотрим 2-форму ϖ в фазовом пространстве $\mathbb{R}^{2\mathrm{N}}$ с координатами $x = (x^1 \dots x^{2\mathrm{N}}) = (q^1 \dots q^{\mathrm{N}}, p_1 \dots p_{\mathrm{N}})$,

$$\varpi = dp_i \wedge dq^i = dx^{\mathrm{N}+1} \wedge dx^1 + dx^{\mathrm{N}+2} \wedge dx^2 + \ldots + dx^{2\mathrm{N}} \wedge dx^{\mathrm{N}} = \frac{1}{2} dx^\alpha \wedge dx^\beta \varpi_{\alpha\beta}, \quad (20.20)$$

где ϖ – каноническая симплектическая форма (18.1). Эта форма неособа, т.к. ее определитель равен единице $\det \varpi_{\alpha\beta} = 1$. □

Пусть на многообразии $\mathbb{M}$, $\dim \mathbb{M} = 2\mathrm{N} + 1$, задана 1-форма $A = dx^\alpha A_\alpha$. Предположим, что внешний дифференциал этой формы является неособым. Это значит, что в каждой точке многообразия $x \in \mathbb{M}$ существует единственный, с точностью до умножения на постоянную, нулевой вектор X такой, что

$$dA(X,Y) = 0, \quad \forall Y. \quad (20.21)$$

Тем самым 1-форма A определяет нулевое векторное поле X на $\mathbb{M}$ с точностью до умножения на отличную от нуля функцию. Назовем интегральные кривые $x^\alpha(t)$,

$$\frac{dx^\alpha}{dt} = X^\alpha,$$

нулевого векторного поля *характеристиками* формы A. Далее, пусть γ_1 – замкнутая кривая на $\mathbb{M}$, которая ни в одной своей точке не касается характеристик. Тогда множество характеристик, выходящих из точек кривой γ_1, образует *трубку характеристик*. Трубка характеристик определена по крайней мере в некоторой окрестности кривой γ_1.

Лемма 20.1.1 (Стокс). *Интеграл от 1-формы A с неособым внешним дифференциалом dA по любой из двух замкнутых кривых γ_1 и γ_2, охватывающих одну и ту же трубку характеристик, одинаков:*

$$\oint_{\gamma_1} A = \oint_{\gamma_2} A,$$

если $\gamma_1 - \gamma_2 = \partial S$, где S – часть трубки характеристик.

Доказательство. По формуле Стокса имеем

$$\oint_{\gamma_1} A - \oint_{\gamma_2} A = \oint_{\partial S} A = \int_S dA.$$

Этот интеграл обращается в нуль, т.к. значение формы dA на любой паре векторов, касательных к трубке характеристик, равен нулю в силу (20.21). □

20.1.5 Канонические уравнения Гамильтона

Из безобидной, на первый взгляд, леммы Стокса непосредственно вытекают все основные положения гамильтоновой динамики. Рассмотрим *расширенное фазовое пространство* $\mathbb{R}^{2N+1}$ с координатами $q^1,\dots,q^N,p_1,\dots,p_N,t$, в котором время t рассматривается, как независимая дополнительная координата. Пусть задана некоторая функция $H(q,p,t)$. Определим 1-форму на расширенном фазовом пространстве

$$A = dq^i p_i - dtH. \tag{20.22}$$

Эта форма называется *интегральным инвариантом Пуанкаре–Картана*. Точнее, интегральный инвариант получается после интегрирования формы A по замкнутому контуру в расширенном фазовом пространстве. Смысл названия будет ясен из дальнейшего рассмотрения. Внешний дифференциал 1-формы (20.22) является неособым, т.к. каноническая форма $\varpi = dp_i \wedge dq^i$ неособа.

Теорема 20.1.2. *Характеристики формы A в расширенном фазовом пространстве $\mathbb{R}^{2N+1}$ однозначно проектируются на фазовое пространство q,p, т.е. задаются функциями $q(t)$, $p(t)$. Эти функции удовлетворяют уравнениям Гамильтона:*

$$\begin{aligned} \frac{dq^i}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial p_i}, \\ \frac{dp_i}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial q^i}, \end{aligned} \tag{20.23}$$

Другими словами, характеристики формы A представляют собой траектории фазового потока в расширенном фазовом пространстве, т.е. интегральные кривые канонических уравнений (20.23).

Доказательство. Дифференциал формы (20.22) равен

$$dA = dp_i \wedge dq^i - \frac{\partial H}{\partial q^i} dq^i \wedge dt - \frac{\partial H}{\partial p_i} dp_i \wedge dt$$

Эта 2-форма неособа, т.к. ранг матрицы, составленной из ее координат, равен $2N$. Прямая подстановка показывает, что вектор

$$X = \frac{\partial H}{\partial p_i}\frac{\partial}{\partial q^i} - \frac{\partial H}{\partial q^i}\frac{\partial}{\partial p_i} + \frac{\partial}{\partial t} \tag{20.24}$$

является нулевым вектором формы A

$$dA(X,Y) = -\frac{\partial H}{\partial q^i}Y^i - Y_i\frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial H}{\partial p_i}Y^0\frac{\partial H}{\partial q^i} + Y^i\frac{\partial H}{\partial q^i} + \frac{\partial H}{\partial q^i}Y^0\frac{\partial H}{\partial p_i} + Y_i\frac{\partial H}{\partial p_i} = 0.$$

Это значит, что векторное поле (20.24) задает направление характеристик 1-формы (20.22). С другой стороны, вектор (20.24) является вектором скорости фазового потока (20.23). Действительно, интегральные кривые $\{q(\tau),p(\tau),t(\tau)\}$ в расширенном фазовом пространстве задаются уравнениями

$$\frac{dq^i}{d\tau} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \qquad \frac{dp_i}{d\tau} = -\frac{\partial H}{\partial q^i}, \qquad \frac{dt}{d\tau} = 1. \tag{20.25}$$

В силу последнего уравнения они однозначно проектируются на фазовое пространство. Таким образом, интегральные кривые (20.23) представляют собой проекции характеристик формы (20.22) на фазовое пространство. □

Применим теперь лемму Стокса и интегральному инварианту Пуанкаре–Картана.

Теорема 20.1.3. *Пусть две замкнутые кривые γ_1 и γ_2 охватывают одну и ту же трубку характеристик формы (20.22). Тогда интегралы по ним от интегрального инварианта Пуанкаре–Картана одинаковы:*

$$\oint_{\gamma_1}(dqp - dtH) = \oint_{\gamma_2}(dqp - dtH).$$

В частном случае, когда замкнутые кривые лежат в фазовом подпространстве, соответствующем постоянному значению времени, $t = \mathsf{const} \Leftrightarrow dt = 0$, получаем

Следствие. Фазовый поток сохраняет интеграл

$$\oint_{\gamma} dqp$$

вдоль произвольной замкнутой кривой в фазовом пространстве.

Форма $dqp := dq^i p_i$ в фазовом пространстве называется *относительным интегральным инвариантом Пуанкаре* или *формой Лиувилля*. Точнее, интегральный инвариант получается после интегрирования формы Лиувилля по замкнутому контуру γ. Он имеет простой геометрический смысл. Пусть S – двумерная ограниченная ориентированная поверхность с кусочно гладкой границей такая, что $\partial S = \gamma$, тогда по формуле Стокса

$$\oint_{\gamma} dqp = \int_S dp \wedge dq,$$

где $dp \wedge dq = dp_i \wedge dq^i$. Отсюда вытекает

Следствие. Фазовый поток $s_t := \mathsf{exp}\,(tX_H)$ сохраняет сумму ориентированных площадей проекций поверхности на N координатных плоскостей q^i, p_i:

$$\int_S dp \wedge dq = \int_{s_t S} dp \wedge dq.$$

В этом смысле каноническая 2-форма $\varpi = dp \wedge dq$ является абсолютным интегральным инвариантом фазового потока s_t.

20.1.6 Принцип Мопертюи

В приложениях часто встречаются гамильтонианы, не зависящие от времени явно $H = H(q, p)$. В этом случае численное значение гамильтониана (энергия) на фазовой траектории сохраняется

$$\frac{dH}{dt} = [H, H] = 0.$$

Покажем, что наличие интеграла энергии позволяет понизить размерность расширенного фазового пространства $\mathbb{R}^{2N+1}$ на две единицы и свести задачу к интегрированию некоторой системы канонических уравнений в $(2N-1)$-мерном пространстве. Предположим, что в некоторой области фазового пространства уравнение

$$H(q, p) = E$$

можно решить относительно p_1:

$$p_1 = K(Q, P, T; E),$$

где $Q = (q^2, \dots, q^{\mathrm{N}})$, $P = (p_2, \dots, p_{\mathrm{N}})$ и $T = -q^1$. Тогда

$$pdq - Hdt = PdQ - KdT - d(Ht) + tdH. \tag{20.26}$$

Пусть γ – интегральная кривая канонических уравнений (20.23). Она лежит на $2\mathrm{N}$-мерном подмногообразии $H(q,p) = E$ в расширенном фазовом пространстве $\mathbb{R}^{2\mathrm{N}+1}$. Спроектируем расширенное фазовое пространство на фазовое пространство $\mathbb{R}^{2\mathrm{N}}$. При этом поверхность $H = E$ проектируется на $(2\mathrm{N}-1)$-мерное подмногообразие $\mathbb{M}^{2\mathrm{N}-1}$ фазового пространства, которое определяется тем же уравнением $H = E$, а кривая γ – на кривую $\bar{\gamma}$, лежащую на этом подмногообразии. Переменные Q, P, T образуют локальную систему координат на $\mathbb{M}^{2\mathrm{N}-1}$. Но характеристики формы $PdQ - KdT$ удовлетворяют уравнениям Гамильтона, поскольку $dH = 0$ на $\mathbb{M}^{2\mathrm{N}-1}$, а полный дифференциал $d(Ht)$ в (20.26) не влияет на уравнения движения. Это доказывает следующее утверждение.

Теорема 20.1.4. *Если гамильтониан не зависит от времени явно, то фазовые траектории канонических уравнений (20.23) на подмногообразии $\mathbb{M}^{2\mathrm{N}-1}$ фазового пространства, определяемом уравнением $H(q,p) = E$, удовлетворяют каноническим уравнениям*

$$\frac{dq^i}{dq^1} = -\frac{\partial K}{\partial p_i}, \qquad \frac{dp_i}{dq^1} = \frac{\partial K}{\partial q^i}, \qquad i = 2, \dots, \mathrm{N}, \tag{20.27}$$

где функция $K(q^1, \dots, q^{\mathrm{N}}, p_2, \dots, p_{\mathrm{N}}, E)$ определяется уравнением

$$H(q^1, \dots, q^{\mathrm{N}}, K, p_2, \dots, p_{\mathrm{N}}) = E.$$

Замечание. В этой теореме роль времени играет первая координата q^1, и канонические уравнения определяют не динамику системы, а форму траектории. □

Покажем, каким образом канонические уравнения Гамильтона связаны с принципом наименьшего действия. Рассмотрим интегральную кривую уравнений (20.25) в расширенном фазовом пространстве (q, p, t), соединяющую две точки (q_0, p_0, t_0) и (q_1, p_1, t_1).

Теорема 20.1.5. *Кривая γ является стационарной точкой интеграла*

$$\int_\gamma (dq\, p - dt H) \tag{20.28}$$

при таких вариациях γ, когда концы кривой остаются на N-мерных подмногообразиях $(q = q_0, t = t_0)$ и $(q = q_1, t = t_1)$.

Доказательство. В силу третьего уравнения (20.25) вариацию интеграла (20.28) можно записать как вариацию функционала действия

$$\delta \int_\gamma dt(p\dot{q} - H) = p\delta q\Big|_{q_0}^{q_1} + \int_\gamma dt \left[\left(\dot{q}^i - \frac{\partial H}{\partial p_i} \right) \delta p_i - \left(\dot{p}_i + \frac{\partial H}{\partial q^i} \right) \delta q^i \right].$$

Отсюда вытекает, что для исчезновения граничных вкладов достаточно зафиксировать только значения обобщенных координат при $t = t_{0,1}$. □

Понижение размерности расширенного фазового пространства при гамильтониане, не зависящем от времени, позволяет по новому взглянуть и в определенной степени оправдать употребление термина "принцип наименьшего действия" в механике. Фазовые траектории исходных канонических уравнений (20.23) целиком лежат на подмногообразии $\mathbb{M}^{2N-1}$, соответствующем фиксированному значению энергии, и являются характеристиками формы $dq\,p = dQP - dTK$. Отсюда следует

Теорема 20.1.6. *Если функция Гамильтона не зависит от времени явно, то фазовые траектории канонических уравнений (20.23), лежащие на подмногообразии $\mathbb{M}^{2n-1}$, соответствующем фиксированному значению энергии $H(q,p) = E$, являются стационарными точками интеграла*

$$\int dq\,p$$

в классе кривых, лежащих на $\mathbb{M}^{2N-1}$ и соединяющих подпространства $q = q_0$ и $q = q_1$.

Рассмотрим теперь проекцию экстремали, лежащую на подмногообразии постоянной энергии $\mathbb{M}^{2N-1}$ на конфигурационное пространство. Эта кривая соединяет точки с координатами q_0 и q_1. Пусть $q = q(\tau)$, $\tau \in [a,b]$ – некоторая кривая, соединяющая те же точки $q(a) = q_0$ и $q(b) = q_1$ в конфигурационном пространстве. Она является проекцией некоторой кривой γ на подмногообразии $\mathbb{M}^{2N-1}$. Эту кривую нетрудно построить. Для этого достаточно найти обобщенный импульс $p = \partial L/\partial\dot{q}$, где $\dot{q} = dq/d\tau$ – вектор скорости кривой в конфигурационном пространстве. Если параметр τ подобран так, что $H(q,p) = E$, то мы получаем кривую $q = q(\tau)$, $p = \partial L/\partial\dot{q}$ на поверхности $\mathbb{M}^{2N-1}$. Применяя предыдущую теорему, получаем

Следствие. Среди всех кривых $q = q(\tau)$, $\tau \in [a,b]$ соединяющих точки q_0 и q_1 в конфигурационном пространстве и параметризованных так, что функция Гамильтона имеет фиксированное значение

$$H(q, \partial L/\partial\dot{q}) = E$$

траекторией движения механической системы является экстремаль *укороченного действия*

$$\int_a^b d\tau\, p_i\dot{q}^i = \int_a^b d\tau \frac{\partial L}{\partial\dot{q}^i}\dot{q}^i. \tag{20.29}$$

Это следствие называется *принципом наименьшего действия Мопертюи*. Важно отметить, что отрезок $\tau \in [a,b]$ не фиксирован и может быть разным у сравниваемых кривых. Зато одинаковой должна быть энергия. Принцип Мопертюи определяет только форму траектории, а для определения зависимости координат от времени необходимо воспользоваться условием постоянства энергии. Заметим также, что во многих задачах подынтегральное выражение в (20.29) положительно определено. В таких случаях движение происходит действительно по экстремалям укороченного действия, и можно говорить о принципе наименьшего действия.

Пример 20.1.6. Покажем, что если материальная точка движется по риманову многообразию $(\mathbb{M}, g)$ только под действием сил инерции, то движение происходит по экстремалям. Пусть $ds^2 = dq^i dq^j g_{ij}$ – интервал риманова многообразия. Тогда функция

Лагранжа для инерциального движения частицы определяется только кинетической энергией:

$$L = T = H = \frac{1}{2}\left(\frac{ds}{d\tau}\right)^2 = \frac{1}{2} g_{ij} \frac{dq^i}{d\tau}\frac{dq^j}{d\tau}, \qquad \frac{\partial L}{\partial \dot q^i}\dot q^i = 2T = \left(\frac{ds}{d\tau}\right)^2.$$

Чтобы обеспечить фиксированное значение энергии вдоль траектории, параметр τ необходимо выбрать пропорциональным длине траектории $d\tau = ds/\sqrt{2E}$. Тогда укороченное действие принимает вид

$$\int_a^b d\tau \frac{\partial L}{\partial \dot q^i}\dot q^i = \sqrt{2E}\int_a^b ds.$$

Это означает, что инерциальное движение происходит по экстремалям римановой метрики g_{ij}. □

Пример 20.1.7. Пусть движение материальной точки происходит по риманову многообразию $(\mathbb{M}, g)$ с интервалом $ds^2 = dq^i dq^j g_{ij}$ в потенциальном поле $U(q) \in \mathcal{C}^k(\mathbb{M})$. Функция Лагранжа и гамильтониан имеют вид

$$L = T - U, \qquad H = T + U, \qquad T = \frac{1}{2}\left(\frac{ds}{d\tau}\right)^2.$$

Чтобы обеспечить фиксированное значение энергии $H = E$, параметр τ вдоль траектории необходимо выбрать пропорциональным длине:

$$d\tau = \frac{ds}{\sqrt{2(E-U)}}.$$

Тогда укороченное действие примет вид

$$\int_\gamma d\tau \frac{\partial L}{\partial \dot q^i}\dot q^i = \int_\gamma ds\sqrt{2(E-U)}.$$

Это значит, что движение материальной частицы по риманову многообразию $(\mathbb{M}, g)$ в потенциальном поле U происходит вдоль экстремалей метрики $\rho = g\,2(E-U)$, которая связана с исходной метрикой множителем $2(E-U)$. Эта метрика имеет особенность на границе $U(q) = E$. □

Если начальная и конечная точки экстремали в рассмотренных примерах достаточно близки, то экстремум длины является минимумом. Это оправдывает название “принцип наименьшего действия”.

Пример 20.1.8 (**Метод факторизации**). Для нахождения траектории частицы иногда удобно выделить из гамильтониана $H(q,p)$ отличный от нуля множитель. Пусть $f(q,p) > 0$ – некоторая положительная функция на фазовом пространстве. Рассмотрим новый гамильтониан

$$\widetilde H = f(q,p)\big(H(q,p) - E\big), \qquad E = \mathsf{const}.$$

Соответствующие уравнения движения имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{dq}{ds} &= f\frac{\partial H}{\partial p} + \frac{\partial f}{\partial p}(H-E), \\ \frac{dp}{ds} &= -f\frac{\partial H}{\partial q} - \frac{\partial f}{\partial q}(H-E). \end{aligned} \tag{20.30}$$

Эти уравнения на инвариантной поверхности фазового пространства, определяемой уравнением $\widetilde{H} = 0$ или $H = E$, эквивалентны гамильтоновым уравнениям (20.12) для исходного гамильтониана H. Уравнения (20.30) позволяют определить только форму траектории. Для определения эволюции частицы во времени достаточно проинтегрировать уравнение

$$\frac{dt}{ds} = f\big(q(s), p(s)\big),$$

где $q(s), p(s)$ – соответствующая траектория. □

20.1.7 Уравнение Гамильтона–Якоби

Рассмотрим *расширенное конфигурационное* пространство $\mathbb{R}^{N+1}$ с координатами $\{q, t\} = \{q^1, \ldots, q^N, t\}$, которое получается из конфигурационного пространства $\mathbb{R}^N$ добавлением еще одного измерения – времени.

Определение. Функцией действия $S(q, t)$ называется интеграл

$$S(q, t) = \int_\gamma d\tau L, \tag{20.31}$$

где $L(q, \dot{q}, \tau)$ – функция Лагранжа, и интегрирование ведется вдоль экстремали $\gamma := \{q(\tau), t(\tau)\}$, с фиксированным началом q_0, t_0 переменным концом q, t расширенного конфигурационного пространства. □

Это определение корректно по крайней мере в малой окрестности начальной точки q_0, t_0. Точнее, функция действия (20.31) определена в некоторой окрестности $\mathbb{U}$ точки q_0, t_0, если любую точку этой окрестности можно соединить с точкой q_0, t_0 экстремалью, целиком лежащей в $\mathbb{U}$, и эта экстремаль единственна. Если точка q, t лежит далеко от q_0, t_0, то интеграл (20.31) может не определить функцию по двум причинам. Во-первых, может существовать несколько экстремалей, соединяющих точки q_0, t_0 и q, t. Во-вторых, возможно, что точки q_0, t_0 и q, t вообще нельзя соединить экстремалью. С другой стороны, для любой точки q, t расширенного конфигурационного пространства можно так подобрать начальную точку q_0, t_0, что функция действия будет определена в некоторой окрестности точки q, t. В дальнейшем мы будем считать, что точка q_0, t_0 фиксирована, и рассматривать те области расширенного конфигурационного пространства, где функция действия определена.

Аргументом функции действия является верхний предел интеграла (20.31), поэтому ее дифференциал равен

$$dS(q, t) = dq^i p_i - dtH, \tag{20.32}$$

где $p_i = \partial L/\partial \dot{q}^i$ и $H = \dot{q}^i p_i - L$ определяются в конечной точке кривой γ. Таким образом, дифференциал функции действия dS является интегральным инвариантом Пуанкаре–Картана (20.22).

Теорема 20.1.7. *Функция действия удовлетворяет уравнению Гамильтона–Якоби*

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H\left(q, \frac{\partial S}{\partial q}, t\right) = 0. \tag{20.33}$$

Доказательство. Для доказательства достаточно заметить, что из выражения (20.32) следуют равенства

$$\frac{\partial S}{\partial t} = -H(q,p,t), \qquad p_i = \frac{\partial S}{\partial q^i}. \qquad \square$$

Очевидно, что любое решение уравнения Гамильтона–Якоби определено с точностью до аддитивной постоянной, которая соответствует произволу в выборе начальной точки q_0, t_0 экстремали γ в определении функции действия (20.31).

Уравнение Гамильтона–Якоби представляет собой уравнение в частных производных первого порядка. Покажем, что его интегрирование сводится к интегрированию обыкновенных дифференциальных уравнений Гамильтона. Поставим для уравнения Гамильтона–Якоби задачу Коши, т.е. будем искать решение уравнения (20.33) с начальным условием

$$S(q,t_0) = S_0(q). \tag{20.34}$$

Чтобы построить решение этой задачи, рассмотрим задачу Коши для уравнений Гамильтона (20.23) с начальными условиями:

$$q^i(t_0) = q^i_0, \qquad p_i(t_0) = \left.\frac{\partial S_0}{\partial q^i}\right|_{q_0}.$$

Соответствующее этим начальным условиям решение изображается в расширенном конфигурационном пространстве кривой $q(t)$, которая является стационарной точкой действия $\int dtL$, где $L(q,\dot q,t)$ есть преобразование Лежандра по импульсу p от гамильтониана $H(q,p,t)$. Эта траектория называется *характеристикой* задачи Коши для уравнения Гамильтона–Якоби, выходящей из точки q_0, t_0. При временах, достаточно близких к t_0, значения $q(t), t$ можно принять за координаты в окрестности точки q_0, t_0 расширенного конфигурационного пространства. Построим теперь функцию действия

$$S(q,t) = S_0(q_0) + \int_{q_0,t_0}^{q,t} d\tau L(q,\dot q,\tau),$$

где интегрирование ведется вдоль экстремали, соединяющей точки q_0, t_0 и q, t. После этого проверяется, что эта функция действия удовлетворяет уравнению Гамильтона–Якоби (20.33) и начальному условию (20.34). Можно также доказать, что это решение задачи Коши для уравнения Гамильтона–Якоби единственно.

Если гамильтониан не зависит от времени явно, то зависимость функции действия от времени легко находится:

$$S(q,t) = -Et + W(q), \tag{20.35}$$

где $W(q)$ – *укороченная функция действия*, зависящая только от координат, и $E =$ const. Из уравнения Гамильтона–Якоби (20.33) следует, что она должна удовлетворять уравнению в частных производных

$$H\left(q, \frac{\partial W}{\partial q}\right) = E. \tag{20.36}$$

Отсюда следует, что постоянная E равна энергии системы. Это уравнение называется *укороченным* уравнением Гамильтона–Якоби.

Пример 20.1.9. Поясним определение функции действия на простом примере свободной точечной частицы единичной массы, движущейся в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^N$. В этом случае лагранжиан и гамильтониан частицы имеют вид

$$L = \frac{1}{2}\dot{q}^i\dot{q}_i, \qquad H = \frac{1}{2}p^i p_i,$$

где подъем и опускание индексов осуществляется с помощью символов Кронекера. Траекториями свободной частицы являются прямые линии и только они. Экстремаль $q^i(\tau)$, соединяющая точки q_0^i, t_0 и q^i, t, задается линейной функцией

$$q^i(\tau) = q_0^i + \frac{q^i - q_0^i}{t - t_0}(\tau - t_0),$$

описывающей равномерное прямолинейное движение частицы со скоростью $\dot{q}^i = (q^i - q_0^i)/(t - t_0)$. Нетрудно вычислить соответствующую функцию действия

$$S(q,t) = \int_{t_0}^{t} d\tau \frac{1}{2}\left(\frac{q - q_0}{t - t_0}\right)^2 = \frac{1}{2}\frac{(q - q_0)^2}{t - t_0},$$

где

$$(q - q_0)^2 = (q^i - q_0^i)(q_i - q_{0i}).$$

Функция действия определена для всех $q \in \mathbb{R}^N$, $t > t_0$ и удовлетворяет уравнению Гамильтона–Якоби:

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial S}{\partial q^i}\frac{\partial S}{\partial q_i} = 0.$$

Поскольку гамильтониан частицы не зависит от времени явно, то для любой траектории частицы энергия сохраняется:

$$E = \frac{1}{2}\left(\frac{q - q_0}{t - t_0}\right)^2 = \mathsf{const}$$

Отсюда можно выразить время через координаты

$$t - t_0 = \sqrt{\frac{(q - q_0)^2}{2E}}.$$

Поскольку $S = E(t - t_0)$, то укороченное действие равно

$$W = Et + S = 2E(t - t_0) + Et_0 = \sqrt{2E(q - q_0)^2} + Et_0.$$

Нетрудно проверить, что укороченное действие удовлетворяет укороченному уравнению Гамильтона–Якоби

$$E = \frac{1}{2}\frac{\partial W}{\partial q^i}\frac{\partial W}{\partial q_i}$$ □

Уравнение Гамильтона–Якоби предоставляет мощный метод решения задач механики точечных частиц. При обобщении этого метода на теорию поля возникают существенные усложнения. В настоящее время, насколько известно автору, это интересное обобщение не развито.

20.1.8 Принцип Гюйгенса

Многие понятия гамильтоновой механики возникли при перенесении на общие вариационные принципы весьма простых и наглядных понятий геометрической оптики. В настоящем разделе мы обсудим некоторые аспекты геометрической оптики. Рассмотрим свет, распространяющийся в среде (конфигурационном пространстве), которую мы отождествим с евклидовым пространством $\mathbb{R}^3$ с декартовыми координатами q^i, $i = 1, 2, 3$. В общем случае скорость света зависит от точки $q \in \mathbb{R}^3$ (неоднородная среда) и направления луча света (неизотропная среда). Неизотропность среды можно описать, задав в каждой точке q поверхность в касательном пространстве $\mathbb{T}_q(\mathbb{R}^3)$. Для этого отложим в начале координат касательного пространства $\mathbb{T}_q(\mathbb{R}^3)$ вектор скорости распространения света в точке q. Эта поверхность называется *индикатрисой*. Согласно *принципу Ферма*, свет распространяется в среде из точки q_0 в точку q за кратчайшее время.

Если среда изотропна, то принцип Ферма приобретает простую математическую форму. Пусть $q(t)$ – траектория луча. Тогда для скорости света $v^i := dq^i/dt$ справедливо равенство

$$v^2 dt^2 = ds^2,$$

где $v^2 = v^i v^j \delta_{ij}$ и $ds^2 := dq^i dq^j \delta_{ij}$. Отсюда следует, что время прохождения луча между точками q_0 и q вдоль траектории $q(t)$ равно

$$t = \int_{q_0}^{q} \frac{ds}{v},$$

где $v := \sqrt{v^2}$ и $ds := \sqrt{ds^2}$. Для изотропной среды показатель преломления n равен отношению скорости света c в вакууме к скорости света v в среде, $n = c/v$. Поэтому время распространения луча света дается интегралом

$$t = \frac{1}{c} \int_{q_0}^{q} n ds. \tag{20.37}$$

Таким образом, принцип Ферма для распространения лучей света в изотропной среде сводится к вариационной задаче для действия (20.37), в котором показатель преломления $n(q)$ является заданной функцией на конфигурационном пространстве.

Распространение света в среде можно также описать на языке волновых фронтов. Допустим, что в момент времени $t = 0$ в точке q_0 произошла вспышка света. Рассмотрим множество точек, до которых свет дойдет за время, меньшее или равное $t > 0$. Граница этого множества $\Phi_0(t)$, которая представляет собой некоторую поверхность в $\mathbb{R}^3$, называется *волновым фронтом* точки q_0 через время t и состоит из точек, до которых свет дойдет за время t и не может дойти быстрее. При этом мы предполагаем, что среда такова, что волновые фронты представляют собой гладкие поверхности в $\mathbb{R}^3$. Тогда между волновыми фронтами для разных моментов времени t имеется замечательное соотношение.

Теорема 20.1.8 (Принцип Гюйгенса). *Рассмотрим волновой фронт $\Phi_0(t)$ точки q_0 в момент времени t. Для каждой точки этого фронта $q \in \Phi_0(t)$ построим волновой фронт $\Phi_q(s)$ через время $s > 0$. Тогда волновой фронт $\Phi_0(t+s)$ точки q_0 через время $t+s$ будет огибающей поверхностью всех фронтов $\Phi_q(s)$ для $q \in \Phi_0(t)$.*

Доказательство. Пусть $q_{t+s} \in \Phi_0(t+s)$. Тогда существует путь из начальной точки q_0 в точку q_{t+s}, по которому свет распространяется за время $t+s$ и нет более короткого. Рассмотрим точку q_t на этом пути, до которой свет идет время t. Никакого

более короткого пути из q_0 в q_t не существует, иначе путь не был бы кратчайшим. Поэтому точка q_t лежит на фронте $\Phi_0(t)$. Точно так же путь из q_t в q_{t+s} свет проходит за время s и нет более короткого пути между этими точками. Поэтому точка q_{t+s} лежит на фронте $\Phi_q(s)$ точки $q(t)$ через время s. Осталось показать, что фронты $\Phi_q(s)$ и $\Phi_0(t+s)$ в точке $q(t+s)$ касаются. Действительно, предположим, что фронты пересекаются, как показано на рис.**??**. Тогда в некоторые точки фронта $\Phi_0(t+s)$ из точки q_t можно было бы добраться за время, меньшее s. В свою очередь это значит, что в эти точки из q_0 можно было бы добраться за время, меньшее $t+s$, что противоречит определению фронта $\Phi_0(t+s)$. □

Рис. 20.2: Пересечение фронтов.

Разумеется, точку q_0 в принципе Гюйгенса можно заменить на кривую, поверхность или вообще на произвольной замкнутое множество, а трехмерное евклидово пространство на произвольное дифференцируемое многообразие $\mathbb{M}$. При этом свет можно заменить на распространение любого возмущения, передающегося локально, т.е. вдоль линии $\gamma \in \mathbb{M}$, на которой некоторый функционал принимает наименьшее значение.

Принцип Гюйгенса приводит к двум способам описания распространения возмущений. Во-первых, можно следить за *лучами*, т.е. кратчайшими путями, вдоль которых распространяется свет. В этом случае распространение света задается вектором скорости $\dot{q}$ в каждой точке конфигурационного пространства, т.е. некоторой точкой на индикатрисе. Во-вторых, мы можем следить за распространением волнового фронта.

Определим скорость движения p волнового фронта следующим образом. Для каждой точки q_0 определим функцию $S_0(q)$, как наименьшее время распространения света из точки q_0 в точку q. По-построению, поверхность уровня функции $S_0(q)$ является волновым фронтом:

$$\Phi_0(t) := \{q \in \mathbb{R}^3 : \quad S_0(q) = t\}.$$

Определение. Ковектор с компонентами

$$p_i := \frac{\partial S_0(q)}{\partial q^i}$$

называется *ковектором нормальной медлительности фронта.* □

Такое название связано с тем, что чем больше градиент функции $S_0(q)$, тем медленнее движется фронт. Действительно, в линейном приближении справедливо равенство

$$S_0(q+dq) = S_0(q) + p_i dq^i = t + dt.$$

Отсюда следует, что чем больше расстояние dq, пройденное светом за время dt, тем меньше ковектор нормальной медлительности фронта p. Векторы X, касательные к волновому фронту, определяются, как ортогональное дополнение к ковектору нормальной медлительности фронта:

$$X^i p_i = 0.$$

Если на конфигурационном пространстве определена риманова метрика g_{ij}, то можно определить вектор нормальной медлительности фронта с компонентами $p^i = g^{ij} p_j$. По-построению, этот вектор ортогонален волновому фронту.

Если среда анизотропна, то направление лучей света $\dot{q}$ и направление движения фронта p не совпадают. Однако они связаны между собой простым соотношением, которое легко выводится из принципа Гюйгенса. Напомним, что оптические свойства среды в точке q характеризуются поверхностью в касательном пространстве $\mathbb{T}_q(\mathbb{R}^3)$ – индикатрисой.

Определение. Направление гиперплоскости (т.е. вектор, перпендикулярный к данной гиперплоскости), касающейся индикатрисы в точке $\dot{q}$, называется *сопряженным* к направлению $\dot{q}$. □

Предложение 20.1.1. *Направление p волнового фронта $\Phi_0(t)$ в точке q_t сопряжено направлению луча $\dot{q}$ в данной точке.*

Доказательство. Рассмотрим точки $q_{t-\epsilon}$, лежащие на луче с началом в точке q_0 и концом в q_t, при малых $\epsilon > 0$. Фронт волны $\Phi_{q_{t-\epsilon}}(\epsilon)$ в точке $q_{t-\epsilon}$ в момент времени ϵ можно представить в виде

$$\Phi_{q_{t-\epsilon}}(\epsilon) = \{q^i_{t-\epsilon} + \dot{q}^i_t\epsilon\},$$

где вектор скорости $\dot{q}$ пробегает всю индикатрису, с точностью порядка $\mathsf{o}(\epsilon)$. Из принципа Гюйгенса следует, что фронт $\Phi_{q_{t-\epsilon}}(\epsilon)$ касается фронта $\Phi_0(t)$ в точке q_t. В пределе $\epsilon \to 0$ получаем утверждение предложения. □

Теперь сравним геометрическую оптику с построениями предыдущего раздела. Лучом является траектория частицы $q(t)$ в конфигурационном пространстве $\mathbb{R}^3$. Ковектор нормальной медлительности фронта – это импульс частицы p. Принцип Ферма соответствует принципу наименьшего действия. Функция $S_0(q)$ есть ни что иное, как функция действия (20.31), в которой время t соответствует концу траектории $q = q(t)$. Поверхности уровня функции действия $S(q,t)$ соответствуют волновым фронтам.

20.1.9 Переменные действие-угол

Знание интегралов движения позволяет упросить задачу. При этом интерес представляют функционально независимые интегралы движения. Из определения функциональной независимости следует, что на фазовом пространстве размерности 2N может существовать не более 2N функционально независимых интегралов движения.

Чтобы проинтегрировать систему из 2N обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка, достаточно знать 2N независимых первых интегралов. Оказывается, что если задана каноническая система уравнений движения, то ситуация существенно проще: достаточно знать только N независимых первых интегралов. Это происходит потому что каждый интеграл движения позволяет понизить порядок системы уравнений не на одну, а на две единицы.

Определение. Функция $F \in \mathcal{C}^1(\mathbb{M})$ на пуассоновом многообразии $\mathbb{M}$ называется *первым интегралом* механической системы с гамильтонианом H, если ее скобка Пуассона с гамильтонианом равна нулю, $[F,H] = 0$. Две функции $F_1, F_2 \in \mathcal{C}^1(\mathbb{M})$ находятся в *инволюции*, если их скобка Пуассона равна нулю, $[F_1,F_2] = 0$. □

Теорема 20.1.9 (**Лиувилль**). *Предположим, что на симплектическом многообразии* $\mathbb{M}$ *размерности* $2\mathrm{N}$ *заданы* N *функционально независимых дифференцируемых функций* $\{F_i\}$, $i = 1, \dots \mathrm{N}$, *которые находятся в инволюции,* $[F_i, F_j] = 0$. *Рассмотрим* N*-мерное подмногообразие* $\mathbb{M}_f \subset \mathbb{M}$, *которое является множеством уровня функций* F_i*:*

$$\mathbb{M}_f := \{x \in \mathbb{M} : \quad F_i = f_i = \mathsf{const},\ i = 1, \dots, \mathrm{N}\}.$$

Тогда справедливы следующие утверждения:

1) *Подмногообразие* $\mathbb{M}_f$ *инвариантно относительно фазового потока с функцией Гамильтона* $H = F_i$ *при любом фиксированном* i.
2) *Если подмногообразие* $\mathbb{M}_f$ *компактно и связно, то оно диффеоморфно* N*-мерному тору* $\mathbb{T}^{\mathrm{N}}$.
3) *Фазовый поток с функцией Гамильтона* H *определяет на* $\mathbb{M}_f$ *условно-периодическое движение, т.е. в угловых координатах* $\{\varphi^i, \ \mathsf{mod}\, 2\pi\}$ *на торе уравнения движения имеют вид*

$$\frac{d\varphi^i}{dt} = \omega^i, \qquad \omega^i = \omega^i(f) = \mathsf{const}, \quad \forall i. \tag{20.38}$$

4) *Канонические уравнения движения с функцией Гамильтона* H *интегрируются в квадратурах.*

Доказательство. См., например, [**?**].

Прокомментируем первые два утверждения теоремы.

Поскольку фазовое пространство $\mathbb{M}$ является симплектическим и, следовательно, пуассоновым многообразием, то каждой функции F_i ставится в соответствие векторное поле X_i по правилу (18.27). При этом инволютивность первых интегралов движения влечет за собой инволютивность распределения векторных полей $\{X_i\}$. Согласно теореме Фробениуса у этого распределения существует интегральное подмногообразие, которым является $\mathbb{M}_f \subset \mathbb{M}$. Отсюда следует инвариантность $\mathbb{M}_f$ относительно фазового потока для любой функции F_i.

Тор возникает из-за того, что векторные поля X_i, которые являются генераторами группы однопараметрических преобразований $\mathbb{M}_f$, не просто находятся в инволюции, а коммутируют между собой. □

Замечание. Если гамильтониан механической системы H не зависит от времени, то его можно выбрать в качестве одного из первых интегралов F_i. □

Определение. Гамильтонова механическая система, называется *интегрируемой*, если она имеет N или более функционально независимых интегралов движения. □

Если фазовое пространство механической системы таково, что выполнены условия теоремы Лиувилля, то на фазовом пространстве $\mathbb{M}$ существует выделенная система координат (действие-угол), в которой уравнения движения выглядят особенно просто. Для определенности будем считать, что гамильтониан системы совпадает с первым интегралом движения: $H = F_1$. В теореме Лиувилля утверждается, что подмногообразие $\mathbb{M}_f \subset \mathbb{M}$ является N-мерным тором, инвариантно относительно фазового потока и на нем существуют угловые координаты φ^i, для которых уравнения движения имеют вид (20.38). Общее решение этих уравнений имеет простой вид

$$\varphi = \varphi_0 + \omega t, \qquad \varphi_0 = \mathsf{const}.$$

Поскольку интегралы движения функционально независимы, то в некоторой окрестности подмногообразия $\mathbb{M}_f$ в качестве координат можно выбрать совокупность функций $\{F, \varphi\}$. В этой системе координат уравнения движения принимают простой вид

$$\frac{dF}{dt} = 0, \qquad \frac{d\varphi}{dt} = \omega(F),$$

и легко интегрируются:

$$F(t) = F(0), \qquad \varphi(t) = \varphi_0 + \omega\big(F(0)\big)t.$$

В общем случае в координатах $\{F, \varphi\}$ симплектическая форма не будет иметь канонического вида. Однако существует существует такой набор функционально независимых функций $\{I = I(F)\}$, $i = 1, \dots, \mathrm{N}$, что переменные $\{I, \varphi\}$ образуют такую систему координат в окрестности $\mathbb{M}_f$, в которой симплектическая форма имеет канонический вид

$$\varpi = dI_i \wedge d\varphi^i. \tag{20.39}$$

Определение. Координаты $\{\varphi^1, \dots, \varphi^{\mathrm{N}}, I_1, \dots, I_{\mathrm{N}}\}$ в некоторой окрестности подмногообразия фазового пространства $\mathbb{M}_f \subset \mathbb{R}^{2\mathrm{N}}$, в которых канонические уравнения движения имеют вид

$$\frac{dI}{dt} = 0, \qquad \frac{d\varphi}{dt} = \omega(I),$$

и симплектическая форма является канонической (20.39) называются *переменными действие-угол.* □

Переменные действие-угол являются координатами на фазовом пространстве. При этом угловые переменные удобно рассматривать как обобщенные координаты, а переменные действия – как сопряженные импульсы. Из определения сразу следует, что преобразование координат $q, p \mapsto \varphi, I$, если оно существует, является каноническим.

Переменные I так же как и функции F являются первыми интегралами движения. В переменных действие-угол гамильтониан механической системы имеет вид $H = F_1 = H(I)$ и не зависит от угловых переменных φ. То есть каждая из угловых координат φ является циклической.

Теорема 20.1.10. *Координаты действие-угол $\{\varphi, I\}$ существуют в некоторой окрестности подмногообразия $\mathbb{M}_f \subset \mathbb{R}^{2\mathrm{N}}$.*

Доказательство. Рассмотрим множество торов $\mathbb{M}_F$, соответствующих различным значениям интегралов движения F_i. Пусть γ_i, $i = 1, \dots, \mathrm{N}$, – базисные одномерные циклы на торах $\mathbb{M}_F$, т.е. приращение координаты φ^i на цикле γ_j равно 2π, если $i = j$ и 0, если $i \neq j$. Каждое подмногообразие $\mathbb{M}_F \subset \mathbb{R}^{2\mathrm{N}}$ является нулевым. Действительно, векторные поля X_i, соответствующие интегралам движения F_i, образуют базис касательных пространств $\mathbb{T}_x(\mathbb{M}_F)$ для всех $x \in \mathbb{M}_F$ и попарно коммутируют. Поэтому значение канонической симплектической формы $\varpi = dp_i \wedge dq^i$ на двух произвольных базисных полях равно нулю:

$$\varpi(X_i, X_j) = \varpi_{kl} X_i^k X_j^l = \varpi^{-1kl} \partial_k F_i \partial_l F_j = [F_i, F_j] = 0.$$

Следовательно, подмногообразие $\mathbb{M}_F$ является нулевым. Отсюда вытекает, что 1-форма dqp замкнута на $\mathbb{M}_F$, т.е. ее внешняя производная $dp \wedge dq$ обращается в нуль на подмногообразии $\mathbb{M}_F$. Положим

$$I_i(F) := \oint_{\gamma_i} dqp.$$

Эти функции зависят от значений интегралов движения F_i, определяющих тор $\mathbb{M}_F$, но не зависят от выбора базисных циклов γ_i, т.к. форма dqp замкнута. Это означает, что функции $I_i(F)$ не зависят от координат φ на торе.

Теперь совершим два канонических преобразования. Поскольку скобка Пуассона интегралов движения F_i между собой равна нулю, то их можно выбрать в качестве новых импульсов: $P_i = F_i$. Совершим первое каноническое преобразование $q, p \mapsto Q, F$ с производящей функцией $S_4(p, F)$, зависящей от новых и старых импульсов F и p. Тогда старые и новые координаты определены соотношениями (20.66):

$$q = -\frac{\partial S_4}{\partial p}, \qquad Q = \frac{\partial S_4}{\partial F}.$$

Подмногообразие $\mathbb{M}_F$ в новой системе координат задано соотношениями $P = 0$. Следовательно, новые координаты Q образуют некоторую систему координат на $\mathbb{M}_F$.

Зафиксируем точку $Q_0 \in \mathbb{M}_F$. В некоторой ее окрестности можно выбрать систему координат Q, I, т.к. функции $I = I(P)$ зависят только от импульсов $P = F$. При этом импульсы P можно выразить, как функции от Q и I, т.е. $P = P(Q, I)$. Поскольку преобразование $q, p \mapsto Q, P$ каноническое, то 1-форма dQP замкнута. Поэтому в односвязной окрестности $\mathbb{U}$ точки $Q_0 \in \mathbb{U} \subset \mathbb{M}_F$ определена функция

$$S_2(Q, I) = \int_{Q_0}^{Q} dQ' P(Q', I).$$

Этот интеграл не зависит от кривой, целиком лежащей в $\mathbb{U}$ и соединяющей точки Q_0 и Q. Следовательно функцию $S_2(Q, I)$ можно выбрать в качестве производящей функции второго канонического преобразования $Q, P \mapsto \varphi, I$, зависящей от старых координат Q и новых импульсов I. Формулы преобразования имеют вид (20.64):

$$P = \frac{\partial S_2}{\partial Q}, \qquad \varphi = \frac{\partial S_2}{\partial I}.$$

Таким образом, преобразование координат $q, p \mapsto \varphi, I$ является произведением двух канонических преобразований $q, p \mapsto Q, P$ и $Q, P \mapsto \varphi, I$ и, следовательно, само является каноническим. По-построению, оно определено в окрестности тора $\mathbb{M}_f$. □

Замечание. В доказательстве теоремы переход от координат q, p к переменным действие-угол φ, I содержит только алгебраические операции и интегрирование. Это доказывает утверждение 4 теоремы Лиувилля 20.1.9. □

Переменные действие-угол определены неоднозначно. Очевидно, что координаты можно сдвигать:

$$I' = I + \mathsf{const}, \qquad \varphi' = \varphi + \mathsf{const}(I).$$

20.1.10 Канонические преобразования

Наиболее мощный и гибкий метод нахождения точных решений уравнений движения дают канонические преобразования. По-прежнему, обозначим конфигурационное и фазовое пространства соответственно через $\mathbb{R}^{\mathrm{N}}$, и $\mathbb{T}^*(\mathbb{R}^{\mathrm{N}}) \approx \mathbb{R}^{2\mathrm{N}}$. Будем считать, что на фазовом пространстве заданы координаты $\{x^\alpha\} = \{q^i, p_i\} := (q^1, \ldots, q^{\mathrm{N}}, p_1, \ldots, p_{\mathrm{N}})$ и каноническая пуассонова структура (18.31).

Определение. Дифференцируемое биективное отображение g фазового пространства $\mathbb{T}^*(\mathbb{R}^{\mathrm{N}})$ на себя называется каноническим, если оно сохраняет каноническую симплектическую форму:

$$g^*\varpi = \varpi,$$

где $\varpi := dp \wedge dq = dp_i \wedge dq^i$. □

В координатах это определение записывается следующим образом. Отображение g фазового пространства задается $2\mathrm{N}$ функциями, которые в общем случае могут зависеть от времени,

$$g: \quad \mathbb{T}^*(\mathbb{R}^{\mathrm{N}}) \ni (q^i, p_i) \mapsto \big(Q^i(q,p,t), P_i(q,p,t)\big) \in \mathbb{T}^*(\mathbb{R}^{\mathrm{N}}), \tag{20.40}$$

где время t входит в качестве параметра. Поскольку ранг 2-формы ϖ равен $2\mathrm{N}$, то канонические преобразования задают преобразование координат (диффеоморфизм) фазового пространства с отличным от нуля якобианом:

$$\frac{\partial(Q,P)}{\partial(q,p)} \neq 0.$$

Условие сохранения канонической симплектической формы ϖ принимает вид

$$dp_i \wedge dq^i = dP_i \wedge dQ^i. \tag{20.41}$$

Это равенство приводит к дифференциальным уравнениям на функции $Q^i(q,p,t)$, $P_i(q,p,t)$, которые мы рассмотрим несколько позже.

Определение канонических преобразований можно записать в эквивалентном интегральном виде

$$\int_{\mathbb{S}} dp \wedge dq = \int_{g\mathbb{S}} dp \wedge dq, \tag{20.42}$$

где интегрирование ведется по произвольной двумерной поверхности $\mathbb{S} \subset \mathbb{T}^*(\mathbb{R}^{\mathrm{N}})$ с кусочно гладкой границей. Поскольку кокасательное расслоение $\mathbb{T}^*(\mathbb{R}^{\mathrm{N}})$ односвязно, то к интегралу (20.42) можно применить формулу Стокса:

$$\int_{\mathbb{S}} dp \wedge dq = \oint_{\partial\mathbb{S}} dqp,$$

где мы предположили, что граница $\partial\mathbb{S}$ такова, что dq на ней может обращается в нуль только в изолированных точках. Поэтому для односвязных фазовых пространств интегральное определение канонического преобразования (20.42) можно переписать в виде

$$\oint_{\gamma} dqp = \oint_{g\gamma} dqp, \tag{20.43}$$

где γ – произвольная кусочно гладкая замкнутая кривая в фазовом пространстве. В общем случае неодносвязных многообразий из (20.43) следует (20.42), но не наоборот. То есть сохранение 1-формы dqp является достаточным условием того, что преобразование будет каноническим.

Пример 20.1.10. Каноническая пуассонова структура определена на произвольном кокасательном расслоении $\mathbb{T}^*(\mathbb{M})$. При этом вид структурных функций не зависит от выбора координат на конфигурационном пространстве $\mathbb{M}$. Поэтому преобразование $q, p \mapsto Q(q), P(q,P)$, где Q зависит только от q, является каноническим (см., пример 20.50). □

Пример 20.1.11. Пусть фазовое пространство топологически тривиально, $\mathbb{T}^*(\mathbb{M}) \approx \mathbb{R}^{2N}$. Поскольку линейное преобразование координат фазового пространства, порождаемое симплектической группой $\mathbb{SP}(N, \mathbb{R})$ (см. раздел 18.1), сохраняет каноническую симплектическую форму, то оно является каноническим. □

На практике наиболее полезными и содержательными являются нелинейные канонические преобразования, связанные со спецификой задачи: симметриями и наличием интегралов движения.

Пример 20.1.12. Фазовый поток является каноническим отображением в силу следствия из теоремы 20.1.3. □

Пример 20.1.13 (Теория возмущений). Допустим, что гамильтониан механической системы состоит из двух слагаемых,

$$H(q,p) = H_0(q,p) + H_1(q,p). \tag{20.44}$$

При этом гамильтониан H_0 настолько прост, что для него известно общее решение

$$q = q(t; q_0, p_0), \qquad p = p(t; q_0, p_0), \tag{20.45}$$

задачи Коши с начальными условиями:

$$q(0; q_0, p_0) = q_0, \qquad p(0; q_0, p_0) = p_0.$$

Как было отмечено, фазовый поток определяет каноническое преобразование, которое задается функциями (20.45). Обратное преобразование $q, p \mapsto q_0, p_0$ также является каноническим. При этом преобразовании гамильтониан H_0 обращается в нуль и уравнения движения исходной гамильтоновой системы упрощаются:

$$\dot{q}_0 = \frac{\partial \tilde{H}_1}{\partial p_0}, \qquad \dot{p}_0 = -\frac{\partial \tilde{H}_1}{\partial q_0},$$

где

$$\tilde{H}_1(q_0, p_0, t) = H_1\big(q(t; q_0, p_0), p(t; q_0, p_0)\big). \tag{20.46}$$

Обозначим через $\tilde{q}_0(t; q_0.p_0)$ и $\tilde{p}_0(t; q_0.p_0)$ решение задачи Коши для полученной системы уравнений движения с начальными данными:

$$\tilde{q}_0(0; q_0, p_0) = q_0, \qquad \tilde{p}_0(0; q_0, p_0) = p_0.$$

Это решение обладает замечательным свойством: для невозмущенной системы оно постоянно и совпадает с начальными данными. Таким образом, задача Коши для гамильтоновой системы (20.44) сведена к задаче Коши для возмущения, которое определяется гамильтонианом (20.46). Формулы для решения исходной задачи в старых координатах q, p получаются после подстановки решения $\tilde{q}_0, \tilde{p}_0$ в общее решение (20.45) невозмущенной задачи. □

Из определения канонических преобразований фазового пространства следует, что фазовое пространство вместе с каноническими отображениями образуют группу преобразований. Эта группа является подгруппой группы общих преобразований координат фазового пространства $\mathsf{diff}\,\mathbb{T}^*(\mathbb{M})$. В общем случае канонические преобразования $q^i, p_i \mapsto Q^i, P_i$ не сохраняют структуру кокасательного расслоения на фазовом пространстве, соответствующую координатам q^i, p_i, т.к. могут перемешивать канонические координаты и импульсы.

По-определению, каноническое преобразование сохраняет 2-форму ϖ (20.20) и, следовательно, все ее внешние степени. Отсюда вытекает

Теорема 20.1.11. *Канонические преобразования сохраняют интегральные инварианты* $\varpi^2, \dots, \varpi^{\mathrm{N}}$.

Поскольку $2\mathrm{N}$-форма ϖ^{N} существует и невырождена, то на фазовом пространстве существует также форма объема υ, которая ей пропорциональна (18.12). Отсюда вытекает

Следствие. Канонические преобразования сохраняют форму объема υ фазового пространства. Другими словами, якобиан канонического преобразования координат равен единице,

$$\det \frac{\partial(Q,P)}{\partial(q,p)} = 1.$$

Это значит, что объем

$$V = \int_{\mathbb{U}} \upsilon$$

произвольной области $\mathbb{U}$ фазового пространства сохраняется при каноническом преобразовании: $gV = V$.

Поскольку фазовый поток для произвольной гамильтоновой системы является каноническим преобразованием, то он также имеет интегральные инварианты $\varpi, \varpi^2, \dots, \varpi^{\mathrm{N}}$. Последний из этих инвариантов есть фазовый объем. Отсюда следует

Теорема 20.1.12 (Лиувилль). *Фазовый поток сохраняет объем произвольной области фазового пространства.*

Верно также обратное утверждение. А именно, пусть задан функционал

$$I_k = \int_{\mathbb{U}} d^{2k}x F(t,x), \qquad k = 1, \dots, \mathrm{N},$$

где $\mathbb{U} \subset \mathbb{R}^{2\mathrm{N}}$ – произвольное четномерное подмногообразие фазового пространства размерности $\dim \mathbb{U} = 2k$ с кусочно гладкой границей и $F(t,x)$ – некоторая функция времени и канонических переменных. Если этот функционал инвариантен относительно фазового потока с произвольным гамильтонианом, то он называется интегральным инвариантом.

Теорема 20.1.13. *Любой интегральный инвариант I_k фазового потока с произвольным гамильтонианом имеет вид*

$$I_k = c \int_{\mathbb{U}} \varpi^k,$$

где c – некоторая постоянная, для всех $k = 1, \dots, \mathrm{N}$.

Доказательство. Дано сравнительно недавно [**?**]. □

Важность канонических преобразований заключается в том, что они позволяют менять координаты в фазовом пространстве не меняя вида канонических уравнений движения. Чтобы показать это, рассмотрим преобразование координат в расширенном фазовом пространстве $\mathbb{R}^{2\mathrm{N}+1}$, с координатами q, p, t. Как было показано в разделе 20.1.5, фазовый поток взаимно однозначно связан с характеристиками интегрального инварианта Пуанкаре–Картана в расширенном фазовом пространстве. Поскольку характеристики 1-формы являются инвариантным объектом, то замену координат $q, p, t \mapsto Q, P, T$ удобно провести в расширенном фазовом пространстве.

Теорема 20.1.14. *Пусть Q, P, T – новая система координат в расширенном фазовом пространстве $\mathbb{R}^{2N+1}$ и $K(Q,P,T)$, $S(Q,P,T)$ – такие функции, что выполнено условие*

$$dqp - dtH = dQP - dTK + dS. \tag{20.47}$$

Тогда траектории фазового потока (20.23) изображаются в координатах Q, P, T интегральными кривыми канонических уравнений

$$\frac{dQ^i}{dT} = \frac{\partial K}{\partial P_i}, \qquad \frac{dP_i}{dT} = -\frac{\partial K}{\partial Q^i}. \tag{20.48}$$

Доказательство. Поскольку $ddS = 0$, то 1-форма dS не влияет на характеристики формы (20.47). Это значит, что фазовый поток определяется также характеристиками формы $dQP - dTK$. Уравнения (20.48) следуют из теоремы 20.1.2. □

Каноническим преобразованиям координат в фазовом пространстве $q, p \mapsto Q, P$ соответствует преобразование координат $q, p, t \mapsto Q, P, t$ в расширенном фазовом пространстве, которое не меняет времени.

Теорема 20.1.15. *В новых координатах Q, P канонические уравнения движения (20.23) имеют канонический вид (20.48) со старой функцией Гамильтона, выраженной через новые координаты $K(Q,P,t) = H\big(q(Q,P), p(Q,P), t\big)$.*

Доказательство. Рассмотрим 1-форму $dqp - dQP$ в фазовом пространстве. Тогда для любой замкнутой кривой γ справедливо равенство

$$\oint_\gamma (dqp - dQP) = 0,$$

поскольку преобразование является каноническим. Это равенство можно записать в дифференциальной форме $dqp - dQP = dS$, где $S(Q,P)$ – некоторая функция на фазовом пространстве. Следовательно, в расширенном фазовом пространстве имеем

$$dqp - dtH = dQP - dtH + dS,$$

и справедлива предыдущая теорема. □

Таким образом, мы показали, что при канонических преобразованиях вид гамильтоновых уравнений движения не меняется. Часто это свойство принимается за определение канонических преобразований. Следующий пример показывает, что такое определение является более общим, чем принятое в настоящей монографии.

Пример 20.1.14. Преобразование координат

$$\varphi_c : \quad \mathbb{R}^{2N} \ni (q,p) \mapsto (Q = q, P = cp) \in \mathbb{R}^{2N}, \tag{20.49}$$

где $c \neq 0$ – некоторая постоянная, сохраняет гамильтонову форму уравнений движения с гамильтонианом $K = cH$. Тем не менее оно не является каноническим, т.к. каноническая форма

$$\varpi = dp \wedge dq = \frac{1}{c} dP \wedge dQ$$

меняет свой вид.

В более общем случае преобразование $Q = bq, P = cp$, где b и c – произвольные отличные от нуля постоянные, также сохраняет вид гамильтоновых уравнений движения. При этом новый гамильтониан равен $K = bcH$. □

По сути дела этот пример описывает все отличия в разных определениях канонического преобразования.

Предложение 20.1.2. *Пусть при преобразовании координат $\varphi:\ q,p\mapsto Q,P$ фазового пространства $\mathbb{R}^{2N}$ гамильтоновы уравнения движения (20.12) сохраняют свой вид:*

$$\dot{Q}^i=\frac{\partial K}{\partial P_i},\qquad \dot{P}_i=-\frac{\partial K}{\partial Q^i},$$

где $K(Q,P)$ – некоторый новый гамильтониан. Тогда

$$\oint_{\varphi(\gamma)} dQP = c\oint_\gamma dqp, \tag{20.50}$$

где $c\neq 0$ – некоторая постоянная.

Доказательство. Рассмотрим расширенное фазовое пространство $\mathbb{R}^{2N+1}$. Пусть γ – замкнутый контур в фазовом пространстве, соответствующий фиксированному моменту времени $t=\mathsf{const}$. Тогда в силу следствия из теоремы 20.1.3 интегралы

$$\oint_\gamma dqp,\qquad \oint_{\varphi(\gamma)} dQP$$

являются интегральными инвариантами фазовых потоков. По теореме Стокса интеграл по контуру γ преобразуется в интеграл по поверхности, натянутой на данный контур. Используя теорему 20.1.13, заключаем, что

$$\oint_{\varphi(\gamma)} dQP = c\oint_\gamma dqp,$$

где $c\neq 0$ – некоторая постоянная. □

Ясно, что множество преобразований, сохраняющих вид гамильтоновых уравнений, образует группу преобразований фазового пространства.

Следствие. Любое преобразование координат $q,p\mapsto Q,P$ фазового пространства, которое сохраняет форму гамильтоновых уравнений движения, является композицией преобразования φ_c (20.49) и некоторого канонического преобразования. □

Доказательство. При преобразовании координат $q,p\mapsto Q,P$ относительный интегральный инвариант Пуанкаре–Картана умножается на некоторую постоянную c (20.50). Представим это преобразование в виде двух последовательных преобразования координат:

$$\varphi_c:\ q,p\mapsto\tilde{q},\tilde{p}\quad\text{ и }\quad g:\ \tilde{q},\tilde{p}\mapsto Q,P.$$

Поскольку при первом преобразовании инвариант умножается на ту же постоянную c, то при втором преобразовании координат он сохраняется,

$$g:\quad \oint_{\varphi_c(\gamma)} d\tilde{q}\tilde{p}=\oint_{g\circ\varphi_c(\gamma)} dQP.$$

Ввиду произвольности контура γ это значит, что преобразование g является каноническим. □

Поскольку преобразование φ_c (20.49) является простой растяжкой координат, то канонические преобразования составляют нетривиальную и наиболее содержательную часть преобразований координат, сохраняющих вид гамильтоновых уравнений движения.

Сформулируем три критерия для канонических преобразований. С этой целью введем новое понятие. Обозначим координаты фазового пространства через $\{x^\alpha\} = \{q^i, p_i\}$, $\alpha = 1, \ldots, 2\mathrm{N}$.

Определение. Пусть на фазовом пространстве $\mathbb{R}^{2\mathrm{N}}$ с координатами $\{x^\alpha\} = \{q^i, p_i\}$ и канонической симплектической формой ϖ задано преобразование координат $\{x^\alpha\} \mapsto \{y^\alpha\} = \{Q^i(x), P_i(x)\}$. Назовем *скобкой Лагранжа* двух новых координат y^α и y^β для заданного набора функций $q^i(y^\alpha, y^\beta)$, $p_i(y^\alpha, y^\beta)$, определяющих преобразование координат, следующее выражение

$$\begin{aligned}[y^\alpha, y^\beta]_{\mathrm{L}} &:= \varpi_{\delta\gamma}\frac{\partial x^\gamma}{\partial y^\alpha}\frac{\partial x^\delta}{\partial y^\beta} \\ &= \frac{\partial q^i}{\partial y^\alpha}\frac{\partial p_i}{\partial y^\beta} - \frac{\partial q^i}{\partial y^\beta}\frac{\partial p_i}{\partial y^\alpha}. \qquad \square\end{aligned} \tag{20.51}$$

$\square$

Скобка Лагранжа антисимметрична и определена для любой пары новых координат y^α и y^β.

Замечание. Если на фазовом пространстве просто заданы две дифференцируемые функции $F, G \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^{2\mathrm{N}})$, то скобка Лагранжа для них неопределена, т.к. не определены частные производные $\partial x^\alpha/\partial F$ и $\partial x^\alpha/\partial G$. $\square$

Теорема 20.1.16. *Для того, чтобы преобразование координат фазового пространства $q, p \mapsto Q, P$ было каноническим, необходимо и достаточно выполнения следующих условий для скобок Лагранжа новых координат:*

$$[Q^i, Q^j]_{\mathrm{L}} = 0, \quad [P_i, P_j]_{\mathrm{L}} = 0, \quad [Q^i, P_j]_{\mathrm{L}} = \delta^i_j. \tag{20.52}$$

Доказательство. Подставляя в определение канонических преобразований (20.41) функции $q^i(Q, P)$, $p_i(Q, P)$, определяющие канонические преобразования, получим

$$\begin{aligned}dP_i \wedge dQ^i = &\frac{1}{2}dQ^l \wedge dQ^k \left(\frac{\partial q^i}{\partial Q^k}\frac{\partial p_i}{\partial Q^l} - \frac{\partial q^i}{\partial Q^l}\frac{\partial p_i}{\partial Q^k}\right) \\ &+ dP_l \wedge dQ^k \left(\frac{\partial q^i}{\partial Q^k}\frac{\partial p_i}{\partial P_l} - \frac{\partial q^i}{\partial P_l}\frac{\partial p_i}{\partial Q^k}\right) \\ &+ \frac{1}{2}dP_l \wedge dP_k \left(\frac{\partial q^i}{\partial P_k}\frac{\partial p_i}{\partial P_l} - \frac{\partial q^i}{\partial P_l}\frac{\partial p_i}{\partial P_k}\right).\end{aligned} \tag{20.53}$$

Отсюда следует первый критерий для канонических преобразований координат. $\square$

Таким образом, при каноническом преобразовании скобки Лагранжа для новых координат обязаны совпадать со скобкой Пуассона.

Матрицы Якоби для канонических преобразований обладают замечательным свойством, которое можно сформулировать в виде второго критерия канонических преобразований.

Теорема 20.1.17. *Преобразование координат фазового пространства является каноническим тогда и только тогда, когда матрица Якоби этого преобразования*

$$J_\alpha{}^\beta = \frac{\partial y^\beta}{\partial x^\alpha} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial Q}{\partial q} & \dfrac{\partial P}{\partial q} \\ \dfrac{\partial Q}{\partial p} & \dfrac{\partial P}{\partial p} \end{pmatrix} \tag{20.54}$$

является симплектической, $J_\alpha{}^\beta \in \mathbb{SP}(n, \mathbb{R})$.

Доказательство. Доказательство проводится прямой проверкой равенства

$$\varpi_{\alpha\beta} = J_\alpha{}^\gamma J_\beta{}^\delta \varpi_{\gamma\delta} \tag{20.55}$$

с учетом свойств (20.52). Вычисления проще проводить в блочно диагональном виде (20.54). □

Поскольку определитель симплектической матрицы равен единице (18.5), то форма объема фазового пространства сохраняется при каноническом преобразовании. Отсюда также следует теорема Лиувилля 20.1.12.

Третий критерий канонических преобразований формулируется в терминах скобок Пуассона.

Теорема 20.1.18. *Преобразование координат фазового пространства является каноническим тогда и только тогда, когда оно сохраняет скобки Пуассона*

$$[F, G]_{q,p} = [F, G]_{Q,P}. \tag{20.56}$$

где F *и* G *– две произвольные дифференцируемые функции на фазовом пространстве, и скобки Пуассона вычислены, соответственно, в координатах* q, p *и* Q, P *с одинаковыми каноническими структурными функциями* $\varpi^{-1\alpha\beta}$.

Доказательство. Канонические преобразования и только они сохраняют каноническую симплектическую форму. Сохранение этой формы эквивалентно сохранению матрицы $\varpi^{-1\alpha\beta}$, т.е. канонической пуассоновой структуры. □

Пример 20.1.15. Преобразование

$$Q^i = q^i, \qquad P_i = p_i + \frac{\partial F(q)}{\partial q^i}, \tag{20.57}$$

где $F(q) \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^{\mathrm{N}})$ – произвольная функция от обобщенных координат q, является каноническим. Действительно, скобки Пуассона

$$[Q^i, Q^j] = 0, \qquad [Q^i, P_j] = \delta^i_j$$

остаются прежними. Нетрудно также проверить, что

$$[P_i, P_j] = \left[P_i, \frac{\partial F}{\partial q^j}\right] + \left[\frac{\partial F}{\partial q^i}, P_j\right] = 0.$$

Аналогично, преобразование

$$Q^i = q^i + \frac{\partial G(p)}{\partial p_i}, \qquad P_i = p_i,$$

где $G(p) \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^{\mathrm{N}})$ – произвольная функция импульсов, также является каноническим □

Важность канонических преобразований сводится к следующему. Если удается найти такое каноническое преобразование, при котором гамильтониан упрощается настолько, что уравнения Гамильтона явно интегрируются, то тогда можно построить и решение исходной задачи. Соответствующие канонические преобразования зависят от конкретной задачи, и общего метода их нахождения не существует.

20.1.11 Производящие функции канонических преобразований.

Широкий класс канонических преобразований можно описать на языке производящих функций, которые строятся следующим образом. Рассмотрим фазовое пространство $\mathbb{T}^*(\mathbb{R}^{\mathrm{N}}) \approx \mathbb{R}^{2\mathrm{N}}$ с координатами q, p и канонической пуассоновой структурой. Пусть 2N функций $Q^i(q,p)$ и $P_i(q,p)$ от 2N переменных задают каноническое преобразование. Тогда 1-форма

$$dqp - dQP = dS(q,p) \tag{20.58}$$

есть полный дифференциал.

Предположим, что в окрестности некоторой точки старые и новые координаты (q,Q) можно выбрать в качестве координат фазового пространства. Это значит, что

$$\det \frac{\partial(q,Q)}{\partial(q,p)} = \det \begin{pmatrix} \dfrac{\partial q}{\partial q} & \dfrac{\partial Q}{\partial q} \\ 0 & \dfrac{\partial Q}{\partial p} \end{pmatrix} = \det \frac{\partial Q}{\partial p} \neq 0. \tag{20.59}$$

Тогда функцию S можно локально выразить через эти координаты:

$$S(q,p) = S_1(q,Q).$$

Функция $S_1(q,Q)$ называется *производящей* функцией канонического преобразования. Эту функцию не следует рассматривать как функцию на фазовом пространстве, потому что координаты q и Q не являются канонически сопряженными. Производящая функция S_1 от 2N переменных задана в некоторой окрестности прямого произведения $\mathbb{R}^{\mathrm{N}}_q \times \mathbb{R}^{\mathrm{N}}_Q$.

Из определения производящей функции и уравнения (20.58) следует, что

$$p = \frac{\partial S_1}{\partial q}, \qquad P = -\frac{\partial S_1}{\partial Q}. \tag{20.60}$$

Конечно, эти формулы являются сокращенной записью равенств

$$p_i = \frac{\partial S_1}{\partial q^i}, \qquad P_i = -\frac{\partial S_1}{\partial Q^i}.$$

Полученные уравнения служат для нахождения канонического преобразования $Q(q,p)$, $P(q,p)$. Таким образом, каждая производящая функция $S_1(q,Q)$ такая, что

$$\det \frac{\partial^2 S_1}{\partial q^i \partial Q^j} \neq 0,$$

определяет некоторое каноническое преобразование по формулам (20.60). Последнее неравенство следует из первого уравнения (20.60) и условия (20.59).

Для того, чтобы получить гамильтониан $K(Q,P)$ для новых канонических переменных, необходимо просто подставить в старое выражение $H(q,p)$ функции $q = q(Q,P)$ и $p = p(Q,P)$:

$$K(Q,P) = H\big(q(Q,P), p(Q,P)\big). \tag{20.61}$$

Пример 20.1.16. Пусть $S_1 = q^i Q_i$. Тогда $Q_i = p_i$ и $P^i = -q^i$. Тем самым координаты и импульсы меняются местами. Этот пример показывает, что в каноническом формализме координаты и импульсы играют совершенно равноправную роль. □

Пусть гамильтониан не зависит от времени явно. Покажем, что если производящая функция $S_1(q, Q)$ сама удовлетворяет уравнению Гамильтона–Якоби по переменным q, то уравнения движения интегрируются в квадратурах. Для этого заметим, что если гамильтониан системы зависит только от новых координат $H = K(Q)$, то канонические уравнения

$$\dot{Q} = 0, \qquad \dot{P} = -\frac{\partial K}{\partial Q}$$

просто интегрируются

$$Q = Q_0, \qquad P = P_0 - t\,\frac{\partial K}{\partial Q}\bigg|_{Q_0}.$$

Теперь будем искать производящую функцию $S_1(q, Q)$ этого канонического преобразования. Из первого условия (20.60) следует, что такая производящая функция должна удовлетворять уравнению

$$H\left(q, \frac{\partial S_1}{\partial q}\right) = K(Q). \tag{20.62}$$

То есть при каждом фиксированном значении Q производящая функция $S_1(q, Q)$ должна удовлетворять укороченному уравнению Гамильтона–Якоби (20.36). Верно также и обратное утверждение.

Теорема 20.1.19 (Якоби). *Если найдено решение $S_1(q, Q)$ укороченного уравнения Гамильтона–Якоби (20.62), зависящее от* N *параметров Q^i и такое, что*

$$\det \frac{\partial^2 S_1}{\partial q^i \partial Q^j} \neq 0,$$

то канонические уравнения (20.23) решаются в квадратурах, причем функции $Q(q, p)$, определяемые уравнениями $\partial S_1/\partial q = p$, являются N *первыми интегралами уравнений Гамильтона.*

Доказательство. См., например, [**?**]. □

Теорема Якоби сводит решение канонических уравнений к нахождению полного интеграла укороченного уравнения Гамильтона–Якоби. Может показаться удивительным, что сведение более простого к более сложному доставляет эффективный метод решения конкретных задач. Между тем оказывается, что это – наиболее мощный из существующих в настоящее время методов интегрирования уравнений движения, и многие задачи, решенные методом Якоби, вообще не поддаются решению другими способами.

В качестве дополнительного аргумента производящей функции можно рассматривать время, $S_1 = S_1(q, Q, t)$. При этом все предыдущие формулы остаются в силе за исключением выражения (20.61) для нового Гамильтониана. Оно получает дополнительное слагаемое,

$$K = H + \frac{\partial S_1}{\partial t}, \tag{20.63}$$

что следует из выражения для действия (**??**) в расширенном конфигурационном пространстве.

Если после канонического преобразования новый гамильтониан тождественно равен нулю, то уравнения движения, очевидно, интегрируются. Для этого необходимо выполнение уравнения

$$\frac{\partial S_1}{\partial t} + H(q,p,t) = 0.$$

Учитывая выражение для импульсов через производящую функцию (20.60) получаем, что производящая функция в этом случае должна удовлетворять уравнению Гамильтона–Якоби для всех значений Q. Тем самым доказана

Теорема 20.1.20 (Якоби). *Если найдено решение $S_1(q,Q,t)$ уравнения Гамильтона–Якоби (20.33), зависящее от* N *параметров Q^i и такое, что*

$$\det \frac{\partial^2 S_1}{\partial q^i \partial Q^j} \neq 0,$$

то канонические уравнения (20.23) решаются в квадратурах, причем координаты Q^i и импульсы $P_i = -\partial S_1/\partial Q^i$ дают 2N *первых интегралов уравнений Гамильтона.*

Частное решение уравнения Гамильтона–Якоби, зависящее от $\mathrm{N}+1$ параметра (по числу независимых переменных), называется *полным интегралом*. Функция от $\mathrm{N}+1$ параметра $S_1(q,Q,t)+\mathrm{const}$, где S_1 – решение уравнения Гамильтона–Якоби из предыдущей теоремы является полным интегралом уравнения Гамильтона–Якоби. В том случае, когда для уравнения Гамильтона–Якоби можно определить общее решение, оно будет зависеть от произвольных функций. Это значит, что полный интеграл уравнения Гамильтона–Якоби дает лишь незначительную часть всех решений.

Выше был рассмотрен случай, когда производящая функция зависит от старых и новых координат. Аналогичным образом можно показать, что канонические преобразования генерируются производящими функциями $S_2(q,P,t)$, зависящими от старых координат и новых импульсов. Если

$$\det \frac{\partial^2 S_2}{\partial q^i \partial P_j} \neq 0,$$

то каноническое преобразование задается формулами

$$p = \frac{\partial S_2}{\partial q}, \qquad Q = \frac{\partial S_2}{\partial P}, \qquad K = H + \frac{\partial S_2}{\partial t}. \tag{20.64}$$

Переход от производящей функции $S_1(q,Q)$ к $S_2(q,P)$ является преобразованием Лежандра по переменной Q при этом

$$S_2(q,P,t) = S_1(q,Q,t) + PQ.$$

Пример 20.1.17. Каноническое преобразование, генерируемое производящей функцией $S_2 = qP := q^i P_i$ является тождественным. □

Пример 20.1.18. Пусть $S_2 = q^i S_i{}^j P_j$, где $S_i{}^j$ – произвольная невырожденная матрица. Тогда $P_i = S_i^{-1j} p_j$ и $Q^i = q^j S_j{}^i$. То есть это преобразование генерирует линейное однородное преобразование фазового пространства. □

Пример 20.1.19. Выберем производящую функцию бесконечно малых канонических преобразований в виде

$$S_2 = qP + \epsilon S(q,P,\epsilon), \qquad \epsilon \ll 1,$$

где $S(q,P,\epsilon)$ – произвольная функция, зависящая от параметра ϵ. Тогда

$$Q = q + \epsilon\frac{\partial S}{\partial P}, \qquad p = P + \epsilon\frac{\partial S}{\partial q}.$$

Отсюда следует, что бесконечно малые канонические преобразования удовлетворяют каноническим уравнениям

$$\left.\frac{dQ}{d\epsilon}\right|_{\epsilon=0} = \frac{\partial H}{\partial p}, \qquad \left.\frac{dP}{d\epsilon}\right|_{\epsilon=0} = -\frac{\partial H}{\partial q}$$

с функцией Гамильтона $H(q,p) = S(q,p,0)$. Тем самым гамильтониан произвольной механической системы можно рассматривать, как генератор бесконечно малых канонических преобразований по времени $t = \epsilon$, которые происходят по мере эволюции механической системы. □

На самом деле движение частицы в фазовом пространстве $q(t)$, $p(t)$ можно рассматривать как последовательность канонических преобразований, параметризующихся одним параметром t. Допустим, что решение канонических уравнений движения определено для всех $t \in \mathbb{R}$. Тогда канонические уравнения движения (20.12) определяют однопараметрическую группу преобразований фазового пространства. Для каждого момента времени, по-определению, выполнены канонические коммутационные соотношения (20.13). Следовательно, для каждого момента времени t отображение фазового пространства

$$\mathbb{R}^{2N} \ni \big(q(0),p(0)\big) \mapsto \big(q(t),p(t)\big) \in \mathbb{R}^{2N}$$

представляет собой каноническое преобразование.

В заключение рассмотрим еще два вида производящих функций, часто встречающихся в приложениях. Если производящая функция $S_3(p,Q,t)$ зависит от старых импульсов и новых координат и при этом

$$\det \frac{\partial^2 S_3}{\partial p_i \partial Q^j} \neq 0,$$

то каноническое преобразование задается формулами:

$$q = -\frac{\partial S_3}{\partial p}, \qquad P = -\frac{\partial S_3}{\partial Q}, \qquad K = H + \frac{\partial S_3}{\partial t}. \tag{20.65}$$

При этом производящая функция S_3 является преобразованием Лежандра функции S_1 по переменной q:

$$S_3(p,Q,t) = S_1(q,Q,t) - pq.$$

Пример 20.1.20. Каноническое преобразование, генерируемое производящей функцией $S_3 = -p_iQ^i$, является тождественным. □

Производящая функция полезна в следующем случае. Допустим, что нам заранее известно, как удобно выбрать координаты в конфигурационном пространстве, т.е. заданы функции $q = q(Q)$. Например, если конфигурационное пространство инвариантно относительно действия некоторой группы преобразований, то новые координаты Q удобно выбрать в соответствии с симметрией задачи. Тогда производящая функция $S_3 = -p_iq^i(Q)$ дает выражения для новых обобщенных импульсов P_i, сопряженных к координатам Q^i.

Точечные преобразования, рассмотренные в разделе 20.1.3, относятся именно к этому типу. Точечные преобразования – это все преобразования координат, которые допустимы в лагранжевой механике. Рассмотренный выше пример показывает, что точечные преобразования составляют лишь небольшой класс канонических преобразований. Все множество канонических преобразований намного шире, и это является причиной большей гибкости канонического формализма по сравнению с лагранжевым.

Продолжим изучение производящих функций. Если производящая функция $S_4(p, P, t)$ зависит от старых и новых импульсов и

$$\det \frac{\partial^2 S_4}{\partial p_i \partial P_j} \neq 0,$$

то каноническое преобразование задается формулами:

$$q = -\frac{\partial S_4}{\partial p}, \quad Q = \frac{\partial S_4}{\partial P}, \quad K = H + \frac{\partial S_4}{\partial t}. \tag{20.66}$$

При этом производящая функция S_4 является двойным преобразованием Лежандра функции $S_1(q, Q)$ по переменным q и Q:

$$S_4(p, P, t) = S_1(q, Q, t) - pq + PQ.$$

Пример 20.1.21. Каноническое преобразование, генерируемое производящей функцией $S_4 = p_i P^i$, меняет местами координаты и импульсы: $Q_i = p_i$, $P^i = -q_i$. Это преобразование совпадает с каноническим преобразованием из примера 20.1.16. □

Пример 20.1.22 (Гармонический осциллятор). Продемонстрируем сложные построения последних разделов на примере гармонического осциллятора. Пусть задана функция Лагранжа

$$L = \frac{1}{2}\dot{q}^2 - \frac{1}{2}\omega^2 q^2,$$

где $\omega = \mathsf{const}$ – собственная частота гармонического осциллятора. Конфигурационное пространство представляет собой прямую $q \in \mathbb{R}$. Импульс, сопряженный координате q, равен скорости

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = \dot{q}.$$

Преобразование Лежандра приводит к положительно определенному гамильтониану:

$$H = \frac{1}{2}p^2 + \frac{1}{2}\omega^2 q^2.$$

Фазовым пространством для гармонического осциллятора является евклидова плоскость $(q, p) \in \mathbb{R}^2$ с канонической пуассоновой структурой. Соответствующие уравнения движения имеют вид

$$\left.\begin{aligned} \dot{q} &= p, \\ \dot{p} &= -\omega^2 q, \end{aligned}\right\} \quad \Leftrightarrow \quad \ddot{q} + \omega^2 q = 0. \tag{20.67}$$

Общее решение этих уравнений параметризуется двумя произвольными постоянными, амплитудой A_0 и фазой φ,

$$\begin{aligned} q &= A_0 \cos(\omega t + \varphi), \\ p &= -A_0 \omega \sin(\omega t + \varphi). \end{aligned} \tag{20.68}$$

Фаза φ соответствует выбору начала отсчета времени. Полученное решение соответствует решению задачи Коши с начальными данными

$$\begin{aligned} q_0 &= \quad A_0 \cos\varphi, \\ p_0 &= -A_0\omega \sin\varphi. \end{aligned}$$

В терминах начальных условий общее решение (20.68) перепишется в виде

$$\begin{aligned} q &= \quad q_0 \cos\omega t + \frac{p_0}{\omega}\sin\omega t, \\ p &= -\omega q_0 \sin\omega t + p_0 \cos\omega t. \end{aligned}$$

Траекториями гармонического осциллятора в фазовом пространстве являются эллипсы. Как видим, эволюция во времени представляет собой эллиптическое вращение фазового пространства $(q_0, p_0) \mapsto \big(q(t), p(t)\big)$. Если $\mathbb{V}_0 \subset \mathbb{R}^2$ – произвольная ограниченная область фазового пространства, то в соответствии с теоремой Лиувилля (20.1.12) объем этой области сохраняется во времени:

$$\int_{\mathbb{V}_0} dq_0 dp_0 = \int_{\mathbb{V}(t)} dq dp = \int_{\mathbb{V}(t)} dq_0 dp_0,$$

т.к. якобиан преобразования координат равен единице,

$$\det \frac{\partial(q,p)}{\partial(q_0,p_0)} = 1.$$

Поскольку гамильтониан не зависит от времени явно, то энергия на каждой траектории постоянна $E = H = \mathrm{const}$.

Найдем функцию действия $S(q,t)$. Чтобы вычислить интеграл (20.31) необходимо исключить скорости $\dot q$ из лагранжиана. Поскольку интегрирование ведется вдоль траектории частицы, то в лагранжиан необходимо подставить

$$\dot q = p = \sqrt{2E - \omega^2 q^2}.$$

В этом выражении E рассматривается, как некоторая постоянная. После несложных вычислений получаем функцию действия

$$\begin{aligned} S(q,t) &= -\int dt E + \int dq \sqrt{2E - \omega^2 q^2} \\ &= -Et + \frac{E}{\omega}\arcsin\frac{\omega q}{\sqrt{2E}} + \frac{q}{2}\sqrt{2E - \omega^2 q^2} \end{aligned}$$

с точностью до несущественной постоянной, определяемой начальными данными. Нетрудно проверить, что

$$\frac{\partial S}{\partial q} = \sqrt{2E - \omega^2 q^2} = p.$$

Поэтому уравнение Гамильтона–Якоби (20.33) выполняется. Укороченное действие имеет вид

$$W(q,E) = \frac{E}{\omega}\arcsin\frac{\omega q}{\sqrt{2E}} + \frac{q}{2}\sqrt{2E - \omega^2 q^2}.$$

Таким образом, нам известно укороченное действие, зависящее от параметра E, причем

$$\frac{\partial^2 W}{\partial q \partial E} \neq 0.$$

Поэтому его можно выбрать в качестве производящей функции канонического преобразования $q, p \to Q, P$

$$S_2(q, P) = \frac{P}{\omega} \operatorname{arcsin} \frac{\omega q}{\sqrt{2P}} + \frac{q}{2}\sqrt{2P - \omega^2 q^2}.$$

Воспользовавшись формулами (20.64), получаем явный вид канонических преобразований

$$q = \frac{\sqrt{2P}}{\omega} \sin(\omega Q),$$
$$p = \sqrt{2P} \cos(\omega Q).$$

Отсюда вытекает связь дифференциалов:

$$dq = \sqrt{2P} \cos(\omega Q) dQ + \frac{1}{\omega\sqrt{2P}} \sin(\omega Q) dP,$$
$$dp = -\omega\sqrt{2P} \sin(\omega Q) dQ + \frac{1}{\sqrt{2P}} \cos(\omega Q) dP.$$

Теперь нетрудно убедиться в том, что построенное преобразование действительно является каноническим

$$dp \wedge dq = dP \wedge dQ.$$

В новых переменных гамильтониан имеет вид $H = P$ и уравнения движения

$$\dot{Q} = P, \qquad \dot{P} = 0$$

тривиально интегрируются. Таким образом укороченная функция действия для гармонического осциллятора является производящей функцией к переменным "действие-угол". Фазовым пространством в переменных "действие-угол" является полуплоскость $Q \in \mathbb{R}$, $P \geq 0$, а траекториями – прямые линии $P = \mathsf{const}$. □

В настоящем разделе мы рассмотрели широкий класс канонических преобразований, которые генерируются четырьмя видами производящих функций: $S_1(q, Q, t)$, $S_2(q, P, t)$, $S_3(p, Q, t)$ и $S_4(p, P, t)$. Существуют также производящие функции более общего вида, которые мы сейчас опишем.

Предложение 20.1.3. *Пусть заданы две системы координат q, p и Q, P в фазовом пространстве пространстве $\mathbb{R}^{2N}$ с канонической пуассоновой структурой. Тогда среди $4N$ координатных функций q, p, Q, P всегда можно выбрать $2N$ независимых функций так, чтобы среди них не было ни одной пары канонически сопряженных функций q^i, p_i или Q^i, P_i.*

Доказательство. См., например, [**?**]. □

Из данного утверждения следует, что в качестве координат на фазовом пространстве $\mathbb{R}^{2N}$ всегда можно выбрать набор функций

$$q^1, \ldots, q^L,\ p_{L+1}, \ldots, p_N,\ Q^1, \ldots, Q^M,\ P_{M+1}, \ldots, P^N, \qquad 0 \leq L, M \leq N,$$

состоящий из N старых и N новых координат. Введем обозначения:

$$\{z^i\} := \{q^1, \ldots, q^L, p_{L+1}, \ldots, p_N\},$$
$$\{Z^i\} := \{Q^1, \ldots, Q^M, P_{M+1}, \ldots, P^N\}.$$

Допустим, что на фазовом пространстве задана функция $S(z, Z)$ такая, что

$$\det \frac{\partial^2 S}{\partial z^i \partial Z^j} \neq 0. \tag{20.69}$$

Тогда нетрудно проверить, что функция $S(z, Z)$ определяет каноническое преобразование:

$$\begin{aligned}
p_i &= \frac{\partial S}{\partial q^i}, && i = 1, \ldots, L,\\
q^i &= -\frac{\partial S}{\partial p_i}, && i = L+1, \ldots, \mathrm{N},\\
P_i &= -\frac{\partial S}{\partial Q^i}, && i = 1, \ldots, M,\\
Q^i &= \frac{\partial S}{\partial P_i}, && i = M+1, \ldots, \mathrm{N}.
\end{aligned}$$

Рассмотренное каноническое преобразование включает в себя четыре предыдущих при $L = 0, \mathrm{N}$ и $M = 0, \mathrm{N}$. В общем случае производящая функция $S(z, Z)$ зависит от старых координат и импульсов и новых координат и импульсов. При этом среди них нет ни одной пары канонически сопряженных переменных. Примеры 20.1.16 и 20.1.21 показывают, что различные производящие функции могут приводить к одинаковым каноническим преобразованиям. Во всех случаях от производящей функции требуется отличие от нуля определителя (20.69). Поэтому производящие функции описывают широкий класс канонических преобразований, но не все.

Пример 20.1.23. В примере 20.1.15 из предыдущего раздела было рассмотрено каноническое преобразование, которое не охватывается производящими функциями, рассмотренными в настоящем разделе. Действительно, для преобразования (20.57) формула (20.58) принимает вид

$$-dq\frac{\partial F(q)}{\partial q} = dS(q,p) = dq\frac{\partial S}{\partial q} + dp\frac{\partial S}{\partial p}.$$

Откуда следуют равенства:

$$\frac{\partial S}{\partial q} = -\frac{\partial F}{\partial q}, \qquad \frac{\partial S}{\partial p} = 0.$$

Таким образом, для канонических преобразований вида (20.57) функция $S(q, p)$ имеет вид

$$S(q,p) = -F(q) + \mathsf{const}$$

и не относится ни к одному типу производящих функций настоящего раздела. □

20.2 Гамильтонова динамика частиц со связями

В современной математической физике большую роль играют модели, инвариантные относительно действия локальных групп преобразований, которые принято называть калибровочными. С точки зрения гамильтонова формализма такие модели соответствуют системам со связями. В калибровочных моделях связи возникают не как дополнительные условия на канонические переменные, наложенные извне, а при

переходе от вырожденного инвариантного лагранжиана к гамильтониану. Основы гамильтонова формализма для калибровочных моделей были заложены П. Дираком на примере точечных частиц [?, ?, ?]. Обобщение этого формализма на теорию поля представляет значительные трудности, которые мы кратко обсудим в разделе ??. Несмотря на важность, эта задача до сих пор не решена. В теории поля до настоящего времени, как правило, используют методы, развитые для точечных частиц. В простейших случаях это приводит к разумным результатам.

В последующих разделах мы обсудим вопрос о гамильтоновой динамике со связями для систем точечных частиц, оставив в стороне важную задачу перехода от вырожденных калибровочно инвариантных лагранжианов к гамильтонианам, которая подробно рассматривается в монографиях [?, ?, ?]. Квантование калибровочных моделей с помощью функционального интеграла в фазовом пространстве было развито в [?, ?].

20.2.1 Гамильтонова динамика частиц со связями II рода

Начнем рассмотрение гамильтоновой динамики частиц со связями с обсуждения связей второго рода, т.к. она значительно проще. Связи первого рода будут рассмотрены в следующем разделе. Там будет показано, что динамика частиц со связями I рода после наложения канонической калибровки сводится к рассмотрению частиц со связями II рода.

Рассмотрим систему N точечных частиц с действием (20.6). Предположим, что фазовое пространство представляет собой дифференцируемое многообразие $\mathbb{N}$ класса $\mathcal{C}^k$, $\dim \mathbb{N} = 2\mathrm{N}$. Для простоты предположим, что фазовое пространство топологически тривиально $\mathbb{N} \approx \mathbb{R}^{2\mathrm{N}}$ и покрывается одной картой. Координаты на фазовом пространстве $\mathbb{N}$, как и раньше, обозначим $(q,p) = (q^1,\dots,q^{\mathrm{N}},p_1,\dots,p_{\mathrm{N}})$. Мы предполагаем, что на фазовом пространстве задана каноническая пуассонова структура $[q^i,p_j] = \delta^i_j$.

Пусть на канонические переменные наложены *связи* в виде 2M алгебраических условий:

$$\Phi^\mu(q,p) = 0, \qquad \Phi^\mu \in \mathcal{C}^k(\mathbb{N}), \quad \mu = 1,\dots,2\mathrm{M} < 2\mathrm{N}. \tag{20.70}$$

Мы пишем индекс связи вверху, поскольку в дальнейшем связи будут частью новых координатных функций. Условия (20.70) представляют собой систему уравнений на канонические переменные. Будем считать, что все Φ^μ функционально независимы, т.е. ранг матрицы $\partial\Phi^\mu/\partial x^\alpha$, где $x = (q,p)$, максимален и равен 2M в окрестности всех точек, координаты которых удовлетворяют системе уравнений (20.70). Если все связи принадлежат классу $\mathcal{C}^k$, то их совокупность, согласно теореме 3.10.4, определяет подмногообразие

$$\mathbb{M} = \{x \in \mathbb{N} : \quad \Phi = 0\}$$

того же класса гладкости и размерности $\dim \mathbb{M} = 2(\mathrm{N} - \mathrm{M})$. Это подмногообразие называется *поверхностью связей*, которую будем обозначать равенством $\Phi = 0$ без индекса.

Уравнения, задающие поверхность связей, определены неоднозначно. Например, невырожденные линейные комбинации исходных связей определяют ту же поверхность связей $\mathbb{M} \subset \mathbb{N}$.

Предложение 20.2.1. *Любая функция $f(q,p) \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{N})$, обращающаяся в нуль на поверхности связей $\mathbb{M} \subset \mathbb{N}$, в некоторой окрестности $\mathbb{U}_0 \subset \mathbb{N}$ произвольной точки*

$(q_0, p_0) \in \mathbb{M}$ *представима в виде*

$$f(q,p) = \Phi^\mu(q,p) f_\mu(q,p), \qquad (q,p) \in \mathbb{U}_0, \tag{20.71}$$

с гладкими коэффициентами $f_\mu(q,p) \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{U}_0)$.

Доказательство. Поскольку связи Φ^μ функционально независимы, то в некоторой окрестности произвольной точки на поверхности связей $(q_0, p_0) \in \mathbb{M}$ их можно дополнить до системы координат $\{x^\alpha\} \to \{y^a, \Phi^\mu\}$, где y^a, $a = 1, \ldots, 2(\mathrm{N} - \mathrm{M})$, – координаты на поверхности связей. Тогда согласно предложению 3.6.2 произвольная гладкая функция $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{U}_0)$ представима в виде

$$f(q,p) = f(q_0,p_0) + y^a(q,p) f_a(q,p) + \Phi^\mu(q,p) f_\mu(q,p)$$

с гладкими коэффициентами f_μ, f_a. Так как функция f равна нулю на поверхности связей $\mathbb{M}$, то $f(q_0,p_0) = 0$ и $f_a(q,p) = 0$ для всех a и $(q,p) \in \mathbb{U}_0$. Поэтому справедливо представление (20.71). □

Определение. Связи Φ^μ, $\mu = 1, \ldots, 2\mathrm{M}$, называются *связями II рода*, если определитель матрицы, составленной из скобок Пуассона связей между собой, отличен от нуля на поверхности связей:

$$\det [\Phi^\mu, \Phi^\nu]_{\Phi=0} \neq 0. \quad \square \tag{20.72}$$

Отметим, что элементы матрицы, составленной из скобок Пуассона $[\Phi^\mu, \Phi^\nu]$, в общем случае зависят от точки фазового пространства. Условие (20.72) означает отличие определителя от нуля в каждой точке подмногообразия $\mathbb{M} \subset \mathbb{N}$, определяемого связями (20.70). Из непрерывности функций Φ^μ следует, что определитель (20.72) отличен от нуля не только на $\mathbb{M}$, но и в некоторой окрестности подмногообразия $\mathbb{M}$.

Поскольку матрица, составленная из скобок Пуассона,

$$J^{\mu\nu} = -J^{\nu\mu} = [\Phi^\mu, \Phi^\nu], \tag{20.73}$$

антисимметрична, то ее определитель может быть отличен от нуля только при четном числе связей. Поэтому мы с самого начала предположили наличие четного числа связей $2\mathrm{M}$. Это значит, что поверхность связей также имеет четную размерность $2(\mathrm{N} - \mathrm{M})$.

С точки зрения вариационного принципа при наличии связей на фазовом пространстве мы имеем задачу на условный экстремум, которую можно решать методом неопределенных множителей Лагранжа. С этой целью рассмотрим *обобщенный (extended) гамильтониан*, который получается после добавления к исходному гамильтониану всех связей второго рода

$$H_{\mathrm{E}} = H + \lambda_\mu \Phi^\mu, \tag{20.74}$$

где $\lambda_\mu = \lambda_\mu(q,p,t)$ – неопределенные множители Лагранжа. Этому гамильтониану соответствует *обобщенное действие*

$$S_{\mathrm{E}} = \int_{t_1}^{t_2} dt (p\dot{q} - H - \lambda_\mu \Phi^\mu). \tag{20.75}$$

При варьировании этого действия мы считаем вариации координат на границе нулевыми, $\delta q(t_{1,2}) = 0$, а вариации импульсов и множителей Лагранжа могут быть

произвольны, т.к. они входят в действие без производных. Канонические уравнения для обобщенного гамильтониана имеют вид

$$\begin{aligned}\dot{q}^i &= [q^i, H_{\text{E}}] = [q^i, H] + \lambda_\mu [q^i, \Phi^\mu] + [q^i, \lambda_\mu]\Phi^\mu,\\ \dot{p}_i &= [p_i, H_{\text{E}}] = [p_i, H] + \lambda_\mu [p_i, \Phi^\mu] + [p_i, \lambda_\mu]\Phi^\mu.\end{aligned} \tag{20.76}$$

Эти уравнения необходимо дополнить уравнениями связей (20.70), возникающими при варьировании обобщенного действия по множителям Лагранжа. В уравнениях движения (20.76) последние слагаемые можно отбросить, т.к. они равны нулю на поверхности связей (20.70). Таким образом, мы имеем $2(\text{N} + \text{M})$ уравнений (20.76), (20.70) на $2(\text{N} + \text{M})$ переменных q, p, λ, из которых 2N уравнений являются дифференциальными. Решение этой задачи можно провести следующим образом.

Предложение 20.2.2. *Для того, чтобы фазовая траектория гамильтоновой системы (20.75), проходящая через произвольную точку поверхности связей, целиком лежала на этой поверхности необходимо и достаточно, чтобы производная по времени от всех связей обращалась в нуль,*

$$\dot{\Phi}^\mu = [\Phi^\mu, H_{\text{E}}]_{\Phi=0} = [\Phi^\mu, H]_{\Phi=0} + \lambda_\nu [\Phi^\mu, \Phi^\nu]_{\Phi=0} = 0. \tag{20.77}$$

Доказательство. Достаточность. Пусть выполнено условие (20.77) для каждой связи. Тогда, если в начальный момент времени траектория находится на поверхности связей, то она на ней и останется во все последующие моменты времени. Необходимость. Допустим, что каждая траектория, имеющая хотя бы одну точку на поверхности связей, целиком принадлежит этой поверхности. Тогда производная вдоль траектории от каждой связи должна быть равна нулю на поверхности связей, поскольку мы можем произвольно менять исходную точку на поверхности. Это означает выполнение условий (20.77) для всех значений индекса μ. □

Уравнения (20.77) можно рассматривать как уравнения на множители Лагранжа на поверхности связей. При этом условие, определяющее связи второго рода (20.72), является необходимым и достаточным для однозначного определения множителей Лагранжа $\lambda_\mu(x)$ на поверхности связей $\mathbb{M}$. Вне поверхности связей множители Лагранжа можно продолжить любым достаточно гладким образом, поскольку это не влияет на динамику частицы на поверхности связей. Для определенности положим

$$\lambda_\mu = -J^{-1}_{\mu\nu}[\Phi^\nu, H] \tag{20.78}$$

в некоторой окрестности поверхности связей. Если продолжить множители Лагранжа вне поверхность связей каким либо иным образом, то это изменит только траектории, лежащие вне поверхности связей, которые нас не интересуют. Множители Лагранжа (20.78) подставляем в уравнения (20.76) и решаем задачу Коши для координат и импульсов. Тогда, если в начальный момент времени точка фазового пространства находилась на поверхности связей, то она там и останется при эволюции системы. Это означает, что метод неопределенных множителей Лагранжа позволяет из вариационного принципа для обобщенного действия (20.75) определить множители Лагранжа и эволюцию динамических переменных.

Решение (20.78) означает, что, если связи выполняются в начальный момент времени для некоторой траектории, то множители Лагранжа всегда можно подобрать таким образом, что связи будут выполнены и во все последующие моменты времени.

Исключим множители Лагранжа (20.78) из уравнений движения (20.76):

$$\dot{q}^i = [q^i, H] - [q^i, \Phi^\mu] J^{-1}_{\mu\nu} [\Phi^\nu, H],$$
$$\dot{p}_i = [p_i, H] - [p_i, \Phi^\mu] J^{-1}_{\mu\nu} [\Phi^\nu, H].$$

Эти уравнения можно записать в компактном виде с помощью нового важного понятия, которое было введено в [**?**].

Определение. Для любых функций $f, g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{N})$ билинейная операция

$$[f, g]_{\text{D}} = [f, g] - [f, \Phi^\mu] J^{-1}_{\mu\nu} [\Phi^\nu, g], \tag{20.79}$$

называется *скобкой Дирака.* □

Скобка Дирака, очевидно, антисимметрична. Кроме того, нетрудно проверить, что для нее справедливо правило Лейбница и тождества Якоби. Следовательно, скобка Дирака определяет на фазовом пространстве $\mathbb{N}$ новую пуассонову структуру (см. раздел 18.3). Напомним, что на фазовом пространстве уже существует каноническая пуассонова структура для координат и сопряженных импульсов $[f, g]$. Скобка Дирака определяет на $\mathbb{N}$ вторую *диракову пуассонову структуру*, которая обладает рядом замечательных свойств для гамильтоновых систем со связями II рода.

Сначала заметим, что уравнения движения (20.76) можно записать в компактном виде

$$\dot{q}^i = [q^i, H]_{\text{D}}, \qquad \dot{p}_i = [p_i, H]_{\text{D}}. \tag{20.80}$$

В эти уравнения не входят явно множители Лагранжа, потому что достаточная информация о связях содержится в определении скобки Дирака.

Из определения (20.79) следует, что скобка Дирака каждой связи (20.70) с произвольной функцией $F \in \mathcal{C}^1(\mathbb{N})$ равна нулю:

$$[F, \Phi^\mu]_{\text{D}} = 0.$$

Отсюда вытекает, что диракова пуассонова структура вырождена и все связи второго рода являются функциями Казимира для скобки Дирака. Покажем, что других функционально независимых функций Казимира не существует.

Предложение 20.2.3. *На поверхности связей $\Phi = 0$ существует такая система координат y^a, $a = 1, \ldots, 2(\text{N} - \text{M})$, что выполнены следующие условия:*

$$\mathsf{det}\, [y^a, y^b]_{\Phi=0} \neq 0, \qquad [y^a, \Phi^\mu]_{\Phi=0} = 0.$$

Доказательство. Поскольку связи функционально независимы, то их можно выбрать в качестве части координатных функций новой системы координат в некоторой окрестности поверхности связей. Выберем какие либо координаты $\tilde{y}^a$, $a = 1, \ldots, 2(\text{N} - \text{M})$, на поверхности связей. Тогда совокупность функций $\{\tilde{y}^a, \Phi^\mu\}$ образует систему координат в окрестности поверхности связей. В общем случае $[\tilde{y}^a, \Phi^\mu] \neq 0$. Тогда введем новые координаты на поверхности связей $y^a = \tilde{y}^a + \lambda^a_\mu \Phi^\mu$, где λ^a_μ – некоторые функции. На поверхности связей $\Phi = 0$ эти координаты совпадают со старыми. Выберем неизвестные функции λ^a_μ таким образом, чтобы на поверхности связей выполнялись уравнения:

$$[y^a, \Phi^\mu]_{\Phi=0} = [\tilde{y}^a, \Phi^\mu]_{\Phi=0} + \lambda^a_\nu [\Phi^\nu, \Phi^\mu]_{\Phi=0} = 0.$$

Это всегда можно сделать, поскольку связи Φ^μ второго рода. В новой системе координат структурные функции канонической пуассоновой структуры на поверхности связей примет вид

$$J = \begin{pmatrix} [y^a, y^b]_{\Phi=0} & 0 \\ 0 & [\Phi^\mu, \Phi^\nu]_{\Phi=0} \end{pmatrix}.$$

Поскольку она не может быть вырожденной, то $\det [y^a, y^b]_{\Phi=0} \neq 0$. □

В системе координат $\{y^a, \Phi^\mu\}$ из только что доказанного предложения структурные функции дираковой пуассоновой структуры примут вид

$$J_{\text{D}} = \begin{pmatrix} [y^a, y^b]_{\Phi=0} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

поскольку $[y^a, y^b]_{\text{D}\Phi=0} = [y^a, y^b]_{\Phi=0}$. Отсюда следует, что в окрестности связей ранг J_{D} равен $2(\text{N} - \text{M})$. Таким образом мы доказали следующее утверждение.

Теорема 20.2.1. *Связи второго рода Φ^μ и только они являются функциями Казимира для пуассоновой структуры Дирака (20.79).*

Используя скобку Дирака, для каждой связи Φ^μ можно построить векторное поле с компонентами

$$X^\alpha_{\Phi^\mu} = [\Phi^\mu, x^\alpha]_{\text{D}},$$

где $x = (q, p)$ – координаты на фазовом пространстве $\mathbb{N}$. Согласно предложению 18.3.1 коммутаторы этих векторных полей равны нулю:

$$[X_{\Phi^\mu}, X_{\Phi^\nu}] = X_{[\Phi^\mu, \Phi^\nu]_{\text{D}}} = 0.$$

Следовательно распределение векторных полей $\{X_{\Phi^\mu}\}$, $\mu = 1, \ldots, 2\text{M}$, находится в инволюции и определяет интегральные подмногообразия в $\mathbb{N}$. Таким образом, постоянные значения функций Казимира слоят фазовое пространство $\mathbb{N}$ на симплектические сечения, одним из которых является поверхность связей $\mathbb{M} \subset \mathbb{N}$.

Каноническая пуассонова структура на $\mathbb{N}$ не приспособлена для описания систем со связями, потому что ограничение скобки Пуассона двух функций на поверхность связей нельзя проводить до вычисления самой скобки:

$$\big[f, g\big]_{\Phi=0} \neq \big[f_{\Phi=0}, g_{\Phi=0}\big].$$

Например, мы сразу приходим к противоречию, если $f = \Phi^\mu$ и $g = \Phi^\nu$ для некоторых μ и ν. В то же время ограничение скобки Дирака на поверхность связей можно проводить до вычисления самой скобки:

$$\big[f, g\big]_{\text{D}}\big|_{\Phi=0} = \big[f_{\Phi=0}, g_{\Phi=0}\big]_{\text{D}}. \tag{20.81}$$

Так как поверхность связей является подмногообразием $\mathbb{M} \subset \mathbb{N}$, то ее можно рассматривать, как вложение $\mathbb{M} \hookrightarrow \mathbb{N}$. Тогда равенство (20.81) означает, что вложение $\mathbb{M} \hookrightarrow \mathbb{N}$ является пуассоновым отображением для скобки Дирака, но не для канонической пуассоновой структуры на $\mathbb{N}$.

Поскольку скобки Дирака достаточно для описания эволюции всех переменных, то ее использование приносит существенные упрощения в описание динамики систем со связями II рода.

Скобка Дирака (20.79) определена с помощью канонической пуассоновой структуры на фазовом пространстве $\mathbb{N}$. В разделе 20.1.10 было показано, что канонические

преобразования сохраняют вид канонической скобки Пуассона. Поэтому скобка Дирака двух функций также инвариантна относительно канонических преобразований, т.е. она имеет одинаковый вид в любых координатах на $\mathbb{N}$, связанных между собой каноническим преобразованием.

В физических приложениях важную роль играет специальная система координат на фазовом пространстве, которая строится с учетом вложения $\mathbb{M} \hookrightarrow \mathbb{N}$. Ее существование обеспечивается следующим важным утверждением.

Теорема 20.2.2. *Пусть задано фазовое пространство $\mathbb{N}$ и набор функционально независимых связей второго рода (20.70). Тогда существует такое каноническое преобразование*

$$\{q^i, p_i\} \;\to\; \{q^{*a}, p^*_a, Q^{\mathrm{A}}, P_{\mathrm{A}}\}, \quad a = 1, \dots, \mathrm{N} - \mathrm{M}, \quad \mathrm{A} = 1, \dots, \mathrm{M},$$

что набор связей $\Phi = 0$ эквивалентен связям

$$Q = 0, \qquad P = 0.$$

При этом координаты q^*, p^* являются канонически сопряженными координатами и импульсами на поверхности связей $\mathbb{M} \subset \mathbb{N}$.

Доказательство. Поскольку связи Φ^μ являются связями второго рода, то согласно теореме Дарбу существуют такие координаты $Q^{\mathrm{A}}, P_{\mathrm{A}}$, что $[Q^{\mathrm{A}}, P_{\mathrm{B}}] = \delta^{\mathrm{A}}_{\mathrm{B}}$ и уравнения $\Phi = 0$ эквивалентны уравнениям $Q = 0$, $P = 0$. После этого из теоремы Дарбу 18.5.3 следует существование системы координат $q^{*a}, p^*_a, Q^{\mathrm{A}}, P_{\mathrm{A}}$. Поскольку скобка Пуассона в новых координатах имеет канонический вид, то преобразование координат является каноническим. □

Эта теорема локальна. Если найдены координаты q^*, p^*, Q, P в явном виде, то ограничение функций на поверхность связей особенно просто: нужно просто положить $Q = 0$ и $P = 0$. В частности,

$$H_{\mathrm{E}}|_{\Phi=0} = H|_{Q=0,\, P=0}.$$

Поскольку

$$[q^*, Q] = 0, \quad [q^*, P] = 0 \quad \text{и} \quad [p^*, Q] = 0, \quad [p^*, P] = 0,$$

то уравнения движения (20.80) в новой системе координат примут вид

$$\dot q^* = [q^*, H_{\mathrm{ph}}], \quad \dot p^* = [p^*, H_{\mathrm{ph}}]$$
$$\dot Q^{\mathrm{A}} = 0, \quad \dot P_{\mathrm{A}} = 0,$$

где

$$H_{\mathrm{ph}}(q^*, p^*) = H_{\mathrm{E}}|_{\Phi=0} = H(q^*, p^*, Q, P)|_{Q=0,\, P=0}.$$

Мы видим, что динамика системы N частиц, на которую наложено 2M связей второго рода свелась к обычной динамике системы из $\mathrm{N} - \mathrm{M}$ частиц, на которую уже не наложено никаких связей. По этой причине мы говорим, что система имеет $\mathrm{N} - \mathrm{M}$ *физических степеней свободы* q^*, p^*. Координаты Q, P описывают *нефизические степени свободы*, поскольку определяют связи. Динамика физических степеней свободы задается *эффективным (физическим) гамильтонианом* H_{ph}, зависящим только от физических координат. Координаты на поверхности связей определены неоднозначно. Например, на $\mathbb{M}$ всегда можно совершить каноническое преобразование. Однако размерность поверхности связей (удвоенное число физических степеней свободы) фиксирована и всегда равна $2(\mathrm{N}-\mathrm{M})$. Мы говорим, что система N частиц с 2M связями II рода описывает $\mathrm{N} - \mathrm{M}$ физических степеней свободы.

Замечание. На практике найти в явном виде координаты q^*, p^* для физических степеней свободы удается только в простейших случаях. Кроме того, в теории поля связи часто представляют собой дифференциальные уравнения по пространственным координатам. В этих случаях переход к координатам q^*, p^* задается нелокальными выражениями, как, например, в свободной электродинамике (см. раздел **??**). Поэтому, вычисления обычно проводят в исходных координатах q^i, p_i, используя теорему 20.2.2 для доказательства общих утверждений. □

Таким образом, если на фазовом пространстве $\mathbb{N}$ с канонической пуассоновой структурой задана система связей $\{\Phi^\mu\}$ второго рода, то она определяет некоторое подмногообразие $\mathbb{M} \subset \mathbb{N}$, на котором естественным образом определена каноническая пуассонова структура. Посмотрим на эту задачу с обратной точки зрения. Пусть задано вложение $\mathbb{M} \hookrightarrow \mathbb{N}$, и мы знаем, что подмногообразие $\mathbb{M}$ является фазовым пространством некоторой механической системы с канонической пуассоновой структурой. Возникает естественный вопрос может ли пространство-мишень также быть фазовым пространством ? Ниже мы покажем, что ответ на этот вопрос положительный.

Пусть задано вложение

$$\varphi: \quad \mathbb{M} \hookrightarrow \mathbb{N}, \qquad \dim \mathbb{M} = 2(\mathrm{N} - \mathrm{M}), \quad \dim \mathbb{N} = 2\mathrm{N}, \ \mathrm{M} < \mathrm{N},$$

фазового пространства $\mathbb{M}$ с канонической пуассоновой структурой. Тогда в окрестности каждой точки $\mathbb{M}$ существует такая система координат y^a, $a = 1, \ldots, 2(\mathrm{N} - \mathrm{M})$, в которой пуассонова структура имеет канонический вид

$$[y^a, y^b] = \varpi^{-1ab}.$$

Эта пуассонова структура определяет пуассонову структуру на образе $\varphi(\mathbb{M})$ с помощью дифференциала отображения φ_*. В дальнейшем образ отображения вложения мы отождествим с самим многообразием, т.е. положим $\mathbb{M} = \varphi(\mathbb{M}) \subset \mathbb{N}$. Если x^α, $\alpha = 1, \ldots, \mathrm{N}$, – система координат на $\mathbb{N}$, то индуцированная пуассонова структура на $\mathbb{M}$ в координатах $x^\alpha \in \mathbb{N}$ задается антисимметричной матрицей

$$J^{\alpha\beta} = \varpi^{-1ab} \partial_a x^\alpha \partial_b x^\beta, \tag{20.82}$$

где функции $x^\alpha(y)$ описывают вложение. Из свойств произведения матриц следует, что ранг этой пуассоновой структуры равен $2(\mathrm{N} - \mathrm{M})$, и поэтому она всегда вырождена. Следовательно, для индуцированной на $\mathbb{N}$ пуассоновой структуры существует $2\mathrm{M}$ независимых функций Казимира c^μ, $\mu = 1, \ldots \mathrm{M}$. Выберем координаты в окрестности $\mathbb{M} \subset \mathbb{N}$ следующим образом

$$\{x^\alpha\} = \{y^a, c^\mu\}.$$

Тогда подмногообразие $\mathbb{M}$ задается постоянными значениями функций Казимира $c^\mu = \mathsf{const}$. Отсюда следует, что уравнения $c^\mu = \mathsf{const}$ эквивалентны исходной системе связей (20.70).

Проведенное построение показывает, что на фазовом пространстве $\mathbb{N}$ существует такая система координат, в которой индуцированная пуассонова структура имеет вид

$$J^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} \varpi^{-1ab} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Тем самым можно отождествить индуцированную пуассонову структуру с дираковой пуассоновой структурой, а функции Казимира c^μ со связями Φ^μ.

Ранее скобка Дирака была определена через каноническую пуассонову структуру на исходном многообразии $\mathbb{N}$ с помощью связей. В обратную сторону однозначного рецепта определения невырожденной пуассоновой структуры на $\mathbb{N}$ не существует, поскольку ранг индуцированной пуассоновой структуры $2(\mathrm{N}-\mathrm{M})$ меньше размерности многообразия $\dim\mathbb{N}=2\mathrm{N}$. Здесь существует много возможностей. Например, можно положить $J^{\alpha\beta}=\varpi^{-1\alpha\beta}$ в координатах $\{y^a,c^\mu\}$. Тогда получим каноническую пуассонову структуру на $\mathbb{N}$.

20.2.2 Гамильтонова динамика частиц со связями I рода

Пусть действие для N точечных частиц в фазовом пространстве $\mathbb{N}$ имеет обычный вид (20.6). Будем искать решение канонических уравнений движения (20.23) при наличии $\mathrm{M}<\mathrm{N}$ связей на канонические переменные:

$$G_{\mathrm{A}}(q,p)=0,\qquad \mathrm{A}=1,\dots,\mathrm{M}<\mathrm{N}. \tag{20.83}$$

Другими словами, будем считать, что частицы не могут покинуть $(2\mathrm{N}-\mathrm{M})$-мерного подмногообразия фазового пространства $\mathbb{U}\subset\mathbb{N}$ (*поверхность связей*), определенного уравнениями (20.83). Из дальнейшего рассмотрения будет ясно, почему мы выбрали число связей первого рода в два раза меньшим числа связей второго рода и почему индекс у связей первого рода пишется внизу.

Предположим, что связи являются достаточно гладкими функциями и функционально независимы на поверхности связей (20.83), т.е. ранг матрицы $\partial G_{\mathrm{A}}/\partial x^\alpha$, где $x=(q^1,\dots,q^{\mathrm{N}},p_1,\dots,p_{\mathrm{N}})$ – координаты фазового пространства, максимален и равен M. Будем считать, что рассматриваемая гамильтонова система со связями находится в *инволюции*:

$$[G_{\mathrm{A}},G_{\mathrm{B}}]=f_{\mathrm{AB}}{}^{\mathrm{C}}G_{\mathrm{C}}\approx 0, \tag{20.84}$$

$$[G_{\mathrm{A}},H]=v_{\mathrm{A}}{}^{\mathrm{B}}G_{\mathrm{B}}\approx 0, \tag{20.85}$$

где $f_{\mathrm{AB}}{}^{\mathrm{C}}(q,p)=-f_{\mathrm{BA}}{}^{\mathrm{C}}(q,p)$ и $v_{\mathrm{A}}{}^{\mathrm{B}}(q,p)$ – некоторые функции от точки фазового пространства $(q,p)\in\mathbb{N}$. Волнистый знак равенства $\approx$ обозначает, что данная функция обращается в нуль на поверхности связей:

$$f\approx 0\quad\Leftrightarrow\quad f|_{G=0}=0.$$

При этом говорят, что скобки Пуассона связей между собой и с гамильтонианом *слабо равны нулю*.

Замечание. Для выполнения равенств (20.84) необходимо, чтобы количество связей не превосходило половины размерности фазового пространства $\mathrm{M}\le\mathrm{N}$, что мы потребовали с самого начала (20.83). Действительно, при преобразованиях координат фазового пространства каноническая пуассонова структура не может вырождаться. В силу функциональной независимости функций G_{A} их можно выбрать в качестве части новых координат. Если $\mathrm{M}>\mathrm{N}$, то пуассонова структура была бы вырожденной, что невозможно для фазового пространства. □

Определение. Связи (20.83), наложенные на канонические переменные механической системы с гамильтонианом $H(q,p)$, которые удовлетворяют условиям (20.84), (20.85), называются *связями I рода*. □

Мы предполагаем, что все связи I рода учтены в системе уравнений (20.83), т.е. для заданной гамильтоновой системы не существует большего числа функционально независимых соотношений между каноническими переменными, для которых выполнены условия (20.84) и (20.85).

Скобки Пуассона (20.84) по виду напоминают коммутатор базисных векторных полей в алгебре Ли. Однако в рассматриваемом случае допускается нетривиальная зависимость *структурных функций* от точки фазового пространства: $f_{\text{AB}}{}^{\text{C}} = f_{\text{AB}}{}^{\text{C}}(q,p)$.

Напомним, что связи определены неоднозначно. Например, невырожденные линейные комбинации связей определяют ту же поверхность связей. Можно совершить и более сложное преобразование связей, не меняющее поверхности связей. Это приведет к изменению структурных функций $f_{\text{AB}}{}^{\text{C}}$ и $v_{\text{A}}{}^{\text{B}}$, что важно при решении уравнений движения.

Функции $f_{\text{AB}}{}^{\text{C}}$ и $v_{\text{A}}{}^{\text{B}}$ не могут быть произвольными. По-определению, скобки Пуассона удовлетворяют тождеству Якоби. Рассмотрев скобки Пуассона $\big[[G_{\text{A}},G_{\text{B}}],G_{\text{C}}\big]$ и $\big[[G_{\text{A}},G_{\text{B}}],H\big]$ и их циклические перестановки, получим ограничения на структурные функции:

$$\begin{aligned} f_{\text{AB}}{}^{\text{D}} f_{\text{DC}}{}^{\text{E}} + f_{\text{BC}}{}^{\text{D}} f_{\text{DA}}{}^{\text{E}} + f_{\text{CA}}{}^{\text{D}} f_{\text{DB}}{}^{\text{E}} + [f_{\text{AB}}{}^{\text{E}}, G_{\text{C}}] + [f_{\text{BC}}{}^{\text{E}}, G_{\text{A}}] + [f_{\text{CA}}{}^{\text{E}}, G_{\text{B}}] = 0, \\ f_{\text{AB}}{}^{\text{D}} v_{\text{D}}{}^{\text{C}} + v_{\text{B}}{}^{\text{D}} f_{\text{DA}}{}^{\text{C}} - v_{\text{A}}{}^{\text{D}} f_{\text{DB}}{}^{\text{C}} + [f_{\text{AB}}{}^{\text{C}}, H] + [v_{\text{B}}{}^{\text{C}}, G_{\text{A}}] - [v_{\text{A}}{}^{\text{C}}, G_{\text{B}}] = 0. \end{aligned} \tag{20.86}$$

Тождество Якоби для двойной скобки Пуассона $\big[[G_{\text{A}},H],H\big]$ удовлетворяются автоматически в силу уравнения (20.85).

Если структурные функции постоянны, $f_{\text{AB}}{}^{\text{C}} = \mathsf{const}$, то множество всех линейных комбинаций $a^{\text{A}}G_{\text{A}}$, $a^{\text{A}} \in \mathbb{R}$, образует алгебру Ли с базисом G_{A}. Тогда уравнение (20.84) задает коммутатор базисных векторов, а соотношение (20.86) сводится к тождеству Якоби для структурных констант.

Предложение 20.2.4. *Для того, чтобы фазовые траектории, проходящие через произвольную точку на поверхности связей, целиком лежали на этой поверхности необходимо и достаточно, чтобы были выполнены условия (20.85).*

Доказательство. Совпадает с доказательством предложения 20.2.2. Достаточно только заметить, что

$$\dot{G}_{\text{A}} = [G_{\text{A}}, H] \approx 0, \tag{20.87}$$

и воспользоваться предложением 20.2.1. □

С точки зрения вариационного принципа решение канонических уравнений (20.23) при наличии связей (20.83) является задачей на условный экстремум. Применим к решению этой задачи метод неопределенных множителей Лагранжа. С этой целью построим *полный (total) гамильтониан*, добавив к исходному гамильтониану линейную комбинацию связей первого рода,

$$H_{\text{T}} = H + \lambda^{\text{A}} G_{\text{A}}, \tag{20.88}$$

где $\lambda^{\text{A}} = \lambda^{\text{A}}(q,p,t)$ – неопределенные множители Лагранжа. Соответствующее действие, которое мы назовем *полным*, имеет вид

$$S_{\text{T}} = \int_{t_1}^{t_2} dt (p\dot{q} - H - \lambda^{\text{A}} G_{\text{A}}).$$

Из него вытекают уравнения Эйлера–Лагранжа:

$$\begin{aligned}\frac{\delta S_{\text{т}}}{\delta p_i} &= \quad \dot{q}^i - \frac{\partial H}{\partial p_i} - \lambda^{\text{а}}\frac{\partial G_{\text{а}}}{\partial p_i} = 0,\\ \frac{\delta S_{\text{т}}}{\delta q^i} &= -\dot{p}_i - \frac{\partial H}{\partial q^i} - \lambda^{\text{а}}\frac{\partial G_{\text{а}}}{\partial q^i} = 0,\end{aligned} \tag{20.89}$$

$$\frac{\delta S_{\text{т}}}{\delta \lambda^{\text{а}}} = -G_{\text{а}} = 0, \tag{20.90}$$

где в правых частях уравнений движения (20.89) мы отбросили слагаемые, пропорциональные связям. При варьировании действия мы считаем вариации координат на границе равными нулю, $\delta q(t_{1,2}) = 0$, а вариации импульсов и множителей Лагранжа могут быть произвольны.

Предложение 20.2.5. *Для того, чтобы фазовые траектории для полного действия $S_{\text{т}}$, проходящие через произвольную точку на поверхности связей, целиком лежали на этой поверхности достаточно, чтобы были выполнены условия (20.84) и (20.85).*

Доказательство. Повторяет доказательство предложения 20.2.2. Достаточно заметить, что

$$\dot{G}_{\text{а}} = [G_{\text{а}}, H] + \lambda^{\text{в}}[G_{\text{а}}, G_{\text{в}}] \approx 0. \qquad \square$$

Уравнения движения для систем со связями первого рода (20.89) существенно отличаются от уравнений для систем со связями второго рода. Дело в том, что они не позволяют определить ни одного множителя Лагранжа. Это связано с тем, что уравнения (20.77), из которых находились множители Лагранжа для связей второго рода в рассматриваемом случае (20.87) на поверхности связей вовсе не содержат множителей Лагранжа. Тем самым любое решение уравнений движения для систем со связями первого рода содержит произвольные функции $\lambda^{\text{а}}(t)$, число которых совпадает с числом связей. Причиной функционального произвола в решении уравнений движения является калибровочная инвариантность.

Теорема 20.2.3. *Полное действие $S_{\text{т}}$ инвариантно относительно локальных инфинитезимальных преобразований, генерируемых каждой связью первого рода,*

$$\begin{aligned}\delta q^i &= \epsilon^{\text{а}}[q^i, G_{\text{а}}] = \quad \epsilon^{\text{а}}\frac{\partial G_{\text{а}}}{\partial p_i},\\ \delta p_i &= \epsilon^{\text{а}}[p_i, G_{\text{а}}] = -\epsilon^{\text{а}}\frac{\partial G_{\text{а}}}{\partial q^i},\\ \delta\lambda^{\text{а}} &= \dot{\epsilon}^{\text{а}} + \epsilon^{\text{в}} v_{\text{в}}{}^{\text{а}} + \epsilon^{\text{в}}\lambda^{\text{с}} f_{\text{вс}}{}^{\text{а}},\end{aligned} \tag{20.91}$$

где $\epsilon^{\text{а}} = \epsilon^{\text{а}}(q,p,t)$ – малый параметр преобразований и $\dot{\epsilon} = \partial\epsilon/\partial t$. Параметр преобразований может быть произвольной функцией координат, импульсов и времени с нулевыми граничными условиями $\epsilon^{\text{а}}(t_{1,2}) = 0$ для всех q и p.

Доказательство. Вариация действия равна

$$\delta S_{\text{т}} = \int dt \left(-\epsilon^{\text{а}}\frac{\partial G_{\text{а}}}{\partial q^i}\dot{q}^i - \dot{p}_i\epsilon^{\text{а}}\frac{\partial G_{\text{а}}}{\partial p_i} + \epsilon^{\text{а}}[G_{\text{а}}, H] + \epsilon^{\text{а}}\lambda^{\text{в}}[G_{\text{а}}, G_{\text{в}}] - \delta\lambda^{\text{а}} G_{\text{а}} \right).$$

Подставляя вариацию множителей Лагранжа и интегрируя слагаемое $\dot{\epsilon}^{\text{а}} G_{\text{а}}$ по частям с учетом уравнений (20.84) и (20.85), получаем $\delta S_{\text{т}} = 0$. Условия на параметры калибровочных преобразований $\epsilon^{\text{а}}(t_{1,2}) = 0$ достаточны для того, чтобы интегрирование слагаемого $\dot{\epsilon}^{\text{а}} G_{\text{а}}$ по частям было возможно. $\square$

Согласно второй теореме Нетер локальная инвариантность приводит к линейной зависимости уравнений движения:

$$\frac{\delta S_{\mathrm{T}}}{\delta q}\frac{\partial G_{\mathrm{A}}}{\partial p}-\frac{\delta S_{\mathrm{T}}}{\delta p}\frac{\partial G_{\mathrm{A}}}{\partial q}-\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\delta S_{\mathrm{T}}}{\delta \lambda^{\mathrm{A}}}\right)+\frac{\delta S_{\mathrm{T}}}{\delta \lambda^{\mathrm{B}}}(v_{\mathrm{A}}{}^{\mathrm{B}}+\lambda^{\mathrm{C}}f_{\mathrm{AC}}{}^{\mathrm{B}})=0, \tag{20.92}$$

в чем нетрудно убедиться и прямой проверкой. В этом случае для любого решения системы уравнений (20.89) будет автоматически выполнено уравнение

$$\dot{G}_{\mathrm{A}}=(v_{\mathrm{A}}{}^{\mathrm{B}}+\lambda^{\mathrm{C}}f_{\mathrm{AC}}{}^{\mathrm{B}})G_{\mathrm{B}}.$$

Для этой системы уравнений точка $G=0$ является стационарной. Поэтому, если в начальный момент времени фазовая траектория находится на поверхности связей, то для любого решения системы уравнений (20.89) при любых множителях Лагранжа $\lambda^{\mathrm{A}}(q,p,t)$ связи $G_{\mathrm{A}}=0$ будут автоматически удовлетворены. Это и является причиной возникновения функционального произвола в решениях уравнений движения.

Замечание. Преобразования координат фазового пространства q,p (20.91) с малым постоянным параметром $\epsilon=\mathsf{const}$ являются инфинитезимальной формой канонического преобразования, описанного в примере 20.1.19,

$$q^i(t)\ \mapsto\ q^i(t,\epsilon),\qquad p_i(t)\ \mapsto\ p_i(t,\epsilon),$$

определяемого уравнениями

$$\frac{\partial q^i}{\partial \epsilon^{\mathrm{A}}}=[q^i,G_{\mathrm{A}}],\qquad \frac{\partial p_i}{\partial \epsilon^{\mathrm{A}}}=[p_i,G_{\mathrm{A}}].$$ □

Модели, функционал действия которых инвариантен относительно локальных преобразований, называют *калибровочными*, а сами преобразования – *калибровочными*. Это название пришло из физики, где все калибровочные модели, в частности, электродинамика и поля Янга–Миллса обладают этим свойством. Тем самым мы доказали, что каждой связи первого рода соответствует локальная инвариантность полного действия, а сама связь является генератором калибровочных преобразований. По аналогии с генераторами групп Ли мы пишем индексы у связей первого рода внизу.

Проанализируем уравнения движения подробнее. Поскольку среди $2\mathrm{N}+\mathrm{M}$ уравнений Эйлера–Лагранжа (20.89) и (20.90) только $2\mathrm{N}$ являются независимыми, то в отличии от задачи на условный экстремум, рассмотренной в разделе 19.1, этих уравнений недостаточно для определения всех неизвестных функций $q(t)$, $p(t)$ и $\lambda(t)$. Допустим, что систему уравнений (20.89) можно решить относительно канонических переменных, для которых поставлена задача Коши: $q(t_1)=q_1$, $p(t_1)=p_1$. Тогда решение этой задачи будет зависеть от M произвольных функций времени, которыми являются множители Лагранжа, и $2\mathrm{N}$ постоянных интегрирования. Все постоянные интегрирования определяются начальными данными. В этом случае через одну точку фазового пространства проходит множество фазовых траекторий, которые параметризуется множителями Лагранжа.

С физической точки зрения это означает следующее. Пусть некоторое физическое явление описывается калибровочной моделью. Тогда начальное состояние системы не определяет однозначно последующую эволюцию, что противоречит экспериментальным данным, если не принимать во внимание квантовомеханическую неопределенность. Тем не менее калибровочные модели в настоящее время широко используются в теоретической физике: классическим примером служит электродинамика.

Выход из этого противоречия прост. Для калибровочных моделей вводится постулат: все физические наблюдаемые калибровочно инвариантны, т.е. не зависят от произвольных функций, которые могут содержаться в решении уравнений движения. Отсюда следует, что физические наблюдаемые описываются функциями $f \in \mathcal{C}^k(\mathbb{N})$ на фазовом пространстве $\mathbb{N}$, которые являются калибровочно инвариантными. А именно, мы требуем, чтобы скобка Пуассона каждой наблюдаемой функции со связями обращалась в нуль на поверхности связей:

$$[f, G_{\text{A}}] = d_{\text{A}}{}^{\text{B}} G_{\text{B}}, \tag{20.93}$$

где $d_{\text{A}}{}^{\text{B}}(q,p)$ – некоторые достаточно гладкие функции канонических переменных. Тогда в уравнении движения для калибровочно инвариантной функции

$$\dot{f} = [f, H] + \lambda^{\text{A}}[f, G_{\text{A}}]$$

все слагаемые с множителями Лагранжа обратится в нуль на поверхности связей и, следовательно, на поверхности связей никакого произвола в эволюции калибровочно инвариантной функции нет.

Проведенное рассмотрение требует комментария, потому что каждой физической наблюдаемой соответствует не одна, а целый класс калибровочно инвариантных функций. Поскольку мы рассматриваем динамику частиц на поверхности связей (20.83), то физические наблюдаемые определяются значениями калибровочно инвариантных функций на поверхности связей. Пусть две калибровочно инвариантные функции f_1 и f_2 совпадают на поверхности связей $\mathbb{U}$. Тогда они могут отличаться только на линейную комбинацию связей:

$$f_2 = f_1 + \mu^{\text{A}} G_{\text{A}}, \tag{20.94}$$

где $\mu^{\text{A}}(q,p)$ – некоторые достаточно гладкие функции. Следовательно, все множество калибровочно инвариантных функций разбивается на классы эквивалентности (20.94). При этом каждый класс эквивалентности соответствует одной физической наблюдаемой.

Другими словами, калибровочно инвариантная функция задается на поверхности связей $\mathbb{U} \subset \mathbb{N}$, а затем продолжается на все фазовое пространство в значительной степени произвольным образом. Степень произвола описывается произвольными функциями $\mu^{\text{A}}(q,p)$. При этом физические наблюдаемые не зависят от способа продолжения.

Оценим произвол, с которым калибровочно инвариантная функция может быть задана на поверхности связей $\mathbb{U} \subset \mathbb{N}$. Условие калибровочной инвариантности (20.93) представляет собой систему M дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка, которую можно переписать в виде

$$X_{G_{\text{A}}} f = 0,$$

где $X_{G_{\text{A}}}$ – векторное поле, соответствующее связи G_{A} (18.27). Для этой системы уравнений условиями совместности являются уравнения (20.84). Действительно,

$$[X_{G_{\text{A}}}, X_{G_{\text{B}}}] f = X_{[G_{\text{A}}, G_{\text{B}}]} = f_{\text{AB}}{}^{\text{C}} X_{G_{\text{C}}} f = 0,$$

где мы воспользовались равенством (18.28). Поэтому функция f однозначно определяется начальными данными на некотором собственном подмногообразии $\mathbb{M} \subset \mathbb{U} \subset \mathbb{N}$

размерности $2\mathrm{N}-\mathrm{M}-\mathrm{M}=2(\mathrm{N}-\mathrm{M})$ и существенно зависит только от части координат на $\mathbb{U}$. Подмногообразие $\mathbb{M}$ можно задать с помощью M дополнительных функционально независимых соотношений между координатами и импульсами:

$$F^{\mathrm{A}}(q,p)=0, \tag{20.95}$$

которые называются *калибровочными условиями*. Эти условия должны удовлетворять неравенству

$$\det\left[F^{\mathrm{A}},G_{\mathrm{B}}\right]\Big|_{F=0,\,G=0}\neq 0, \tag{20.96}$$

т.к. только в этом случае на $\mathbb{M}$ можно задать начальные данные для системы уравнений (20.93). Условия (20.95) при выполнении (20.96) называются *канонической калибровкой*. В общем случае функции F^{A}, определяющие калибровочные условия, могут зависеть также от времени и множителей Лагранжа λ^{A}.

После фиксирования канонической калибровки на рассматриваемую гамильтонову систему будет наложено 2M связей (20.83) и (20.95). Введем для полной совокупности связей и калибровочных условий следующее обозначение

$$\{\Phi^{\mu}\}=(F^1,\ldots,F^{\mathrm{M}},G_1,\ldots,G_{\mathrm{M}}),\qquad \mu=1,\ldots,2\mathrm{M}. \tag{20.97}$$

Очевидно, что

$$\det\left[\Phi^{\mu},\Phi^{\nu}\right]_{\Phi=0}=\det\begin{pmatrix}[F^{\mathrm{A}},F^{\mathrm{B}}] & [F^{\mathrm{A}},G_{\mathrm{B}}]\\ [G_{\mathrm{A}},F^{\mathrm{B}}] & [G_{\mathrm{A}},G_{\mathrm{B}}]\end{pmatrix}_{\Phi=0}=\det{}^2[F^{\mathrm{A}},G_{\mathrm{B}}]_{\Phi=0}, \tag{20.98}$$

т.к. $[G_{\mathrm{A}},G_{\mathrm{B}}]\approx 0$. Поскольку определитель скобок Пуассона для канонических калибровочных условий со связями первого рода, по-построению, отличен от нуля (20.96), то полная совокупность связей Φ^{μ} представляет собой систему связей второго рода, рассмотренную в предыдущем разделе. Таким образом, калибровочные модели в канонической калибровке сведены к гамильтоновым системам со связями второго рода, для которых метод множителей Лагранжа применим в полном объеме. Заметим, что значение скобок Пуассона для канонических калибровочных условий между собой $[F^{\mathrm{A}},F^{\mathrm{B}}]$ несущественно.

После наложения калибровочных условий возникает обобщенное действие

$$S_{\mathrm{E}}=\int dt(p_i\dot{q}^i-H-\lambda^{\mathrm{A}}G_{\mathrm{A}}-\pi_{\mathrm{A}}F^{\mathrm{A}})=\int dt(p_i\dot{q}^i-H-\lambda_{\mu}\Phi^{\mu}),$$

которое совпадает с (20.75).

Каноническая калибровка выделяет в фазовом пространстве $\mathbb{N}$ единственную траекторию, проходящую через данную точку физического подпространства $\mathbb{M}$. Это происходит благодаря тому, что каноническая калибровка однозначно определяет множители Лагранжа на поверхности связей $\Phi=0$. Верно также обратное утверждение: произвольный выбор множителей Лагранжа эквивалентен некоторой канонической калибровке. Действительно, при фиксированных множителях Лагранжа граничная задача для уравнений (20.89) имеет единственное решение $x(t)=\{q(t),p(t)\}$. Перепишем для данного решения уравнения (20.89), но теперь уже с неопределенными множителями Лагранжа. В результате получим переопределенную, но совместную систему 2N линейных алгебраических уравнений на M множителей Лагранжа. Тогда соответствующие соотношения $x^{\mathrm{A}}=x^{\mathrm{A}}(t)$ можно принять в качестве канонических калибровочных условий. Это следует из того, что, поскольку условия

$F^{\text{A}} = x^{\text{A}} - x^{\text{A}}(t)$ позволяют однозначно определить множители Лагранжа, то условие (20.96) выполнено. Напомним, что это условие является необходимым и достаточным для однозначного определения λ^{A} на поверхности связей, как следует из анализа, проведенного в предыдущем разделе, и (20.98).

Замечание. В приложениях часто рассматриваются неканонические калибровки. Например, лоренцева или временна́я калибровки в электродинамике не являются каноническими. Они не фиксируют калибровочную свободу полностью, и это создает определенные трудности, например, при квантовании. В электродинамике неканонические калибровочные условия можно использовать, т.к. уравнения движения линейны и их можно проанализировать. В общем случае существенно нелинейных моделей формализм для неканонических калибровок не развит и мы на них останавливаться не будем. □

Таким образом, динамика частиц со связями I рода в канонических калибровках сводится к гамильтоновым моделям со связями II рода. Это сведение не является однозначным, т.к. от калибровочных условий требуется выполнение только неравенств (20.96). Выбор той или иной системы калибровочных условий диктуется рассматриваемой задачей и соображениями простоты. Как правило, исследование калибровочных моделей проводится в различных калибровках, каждая из которых имеет свои преимущества и недостатки.

20.2.3 Калибровочная модель нерелятивистской частицы

В настоящем разделе мы рассмотрим динамику точечной частицы с точки зрения калибровочных моделей и покажем трудности в определении энергии, которые при этом возникают.

Рассмотрим движение точечной частицы в фазовом пространстве $\mathbb{T}^*(\mathbb{R}^{\text{N}})$ с координатами $q^* = \{q^{*a}\}$ и $p^* = \{p^*_a\}$, где $a = 1, \ldots, \text{N}$. Пусть динамика частицы задана гамильтонианом $H^*(q^*, p^*)$, не зависящим явно от времени. Действие такой частицы имеет обычный вид

$$S = \int_{t_1}^{t_2} dt(\dot{q}^{*a} p^*_a - H^*), \tag{20.99}$$

где точка обозначает дифференцирование по времени t. Будем считать, что все координаты имеют фиксированные значения на границе $t = t_{1,2}$. Для каждой траектории частицы $q^*(t), p^*(t)$, которая определяется каноническими уравнениями движения

$$\dot{q}^* = \frac{\partial H^*}{\partial p^*}, \qquad \dot{p}^* = -\frac{\partial H^*}{\partial q^*},$$

выполнено равенство $\dot{H}^* = 0$. Это значит, что на каждой траектории гамильтониан имеет постоянное численное значение, которое называется энергией точечной частицы.

Переформулируем модель точечной частицы, как калибровочную. С этой целью расширим фазовое пространство $\mathbb{T}^*(\mathbb{R}^{\text{N}}) \to \mathbb{T}^*(\mathbb{R}^{\text{N}+1})$ путем введения дополнительной пары сопряженных канонических переменных Q, P, и рассмотрим новое действие

$$S_{\text{т}} = \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau(\dot{Q}P + \dot{q}^* p_* - \lambda G), \qquad G = -Q + H^*, \tag{20.100}$$

где λ – множитель Лагранжа, а точка обозначает дифференцирование по некоторому параметру τ, играющему роль времени. Уравнения движения для этой модели имеют вид

$$\dot{Q} = 0, \tag{20.101}$$
$$\dot{P} = \lambda, \tag{20.102}$$
$$\dot{q}^* = \lambda \frac{\partial H^*}{\partial p_*}, \tag{20.103}$$
$$\dot{p}_* = -\lambda \frac{\partial H^*}{\partial q^*}, \tag{20.104}$$
$$G = 0. \tag{20.105}$$

Последнее уравнение представляет собой уравнение связи. Эта связь, очевидно, является связью первого рода, которая определяет гамильтониан системы.

Согласно общей теории действие (20.100) инвариантно относительно инфинитезимальных калибровочных преобразований с параметром $\epsilon(\tau)$, генерируемых связью G,

$$\begin{aligned} \delta Q &= \epsilon\{Q, G\} = 0, \\ \delta P &= \epsilon\{P, G\} = \epsilon, \\ \delta q^* &= \epsilon\{q^*, G\} = \epsilon \frac{\partial H^*}{\partial p_*}, \\ \delta p_* &= \epsilon\{p_*, G\} = -\epsilon \frac{\partial H^*}{\partial q^*}. \end{aligned} \tag{20.106}$$

При этом множитель Лагранжа преобразуется по правилу

$$\delta\lambda = \dot{\epsilon}. \tag{20.107}$$

Для того, чтобы вариации δq^* на границе были равны нулю, необходимо предположить, что $\epsilon(\tau_{1,2}) = 0$. Вариация множителя Лагранжа на границе несущественна, т.к. он входит в действие без производных. Отметим, что эволюцию во времени канонических переменных можно рассматривать, как калибровочное преобразование с параметром $\epsilon = \lambda d\tau$.

Приведенные выше калибровочные преобразования представляют собой бесконечно малые преобразования, соответствующие инвариантности действия (20.100) относительно перепараметризации времени. При произвольном преобразовании временно́го параметра $\tau' = \tau'(\tau)$ мы постулируем, что координаты фазового пространства преобразуются, как скаляры

$$Q'(\tau') = Q(\tau), \qquad P'(\tau') = P(\tau)$$

(такие же формулы преобразования постулируются для q^* и p_*). При этом множитель Лагранжа преобразуется, как 1-форма:

$$\lambda'(\tau') = \frac{d\tau}{d\tau'}\lambda(\tau).$$

Нетрудно проверить, что действие (20.100) инвариантно относительно произвольной перепараметризации времени τ. Это и есть калибровочная инвариантность. При бес-

конечно малом преобразовании $\tau' = \tau + u(\tau)$ для вариаций формы функций имеем

$$\begin{aligned}
\delta Q &= -u\dot{Q} = 0,\\
\delta P &= -u\dot{P} = -u\lambda,\\
\delta q^* &= -u\dot{q}^* = -u\lambda\frac{\partial H^*}{\partial p_*},\\
\delta p_* &= -u\dot{p}_* = u\lambda\frac{\partial H^*}{\partial q^*},\\
\delta\lambda &= -u\dot{\lambda} - \dot{u}\lambda = -\frac{d}{d\tau}(u\lambda),
\end{aligned} \tag{20.108}$$

где в первых четырех уравнениях были использованы уравнения движения. Полученные преобразования совпадают с инфинитезимальными калибровочными преобразованиями (20.106), (20.107) при $\epsilon = -u\lambda$.

Таким образом мы показали, что действие (20.100) инвариантно относительно произвольной перепараметризации времени. В модели имеется одна связь первого рода, и для фиксирования соответствующего произвола в решениях уравнений движения необходимо наложить одно калибровочное условие. Поскольку множитель Лагранжа λ является произвольной функцией времени, то из уравнения движения (20.102) следует, что импульс P также произволен. Чтобы устранить этот произвол, зафиксируем калибровку

$$F_1 = P - \mathsf{const} = 0.$$

Тогда из уравнений движения определяется множитель Лагранжа $\lambda = 0$. При этом для действия получаем следующее выражение

$$S_{\text{т}}|_{F_1=0,\,G=0} = \int d\tau \dot{g}^* p^*.$$

Это значит, что в выбранной калибровке мы получили "замороженную" теорию, в которой не происходит никакой эволюции. При этом вся эволюция заменяется калибровочным преобразованием.

Можно рассмотреть класс калибровок, явно зависящих от времени. Пусть калибровочное условие имеет вид

$$F_2 = P - \tau = 0.$$

В этом случае из уравнений движения следует $\lambda = 1$, и эффективный гамильтониан для физических степеней свободы становится нетривиальным. Поскольку

$$\dot{Q}P = \frac{d}{d\tau}(QP) - Q\dot{P},$$

и

$$Q\dot{P}|_{F_2=0,G=0} = H^*(q^*, p^*).$$

то эффективное действие для физических степеней свободы равно

$$S_{\text{т}}|_{F_2=0,G=0} = \int d\tau(\dot{g}^* p_* - H^*),$$

что совпадает с исходным действием (20.99) для точечной частицы. Мы видим, что в калибровке $F_2 = 0$ нетривиальный эффективный гамильтониан возникает из кинетического слагаемого $\dot{Q}P$ для нефизической степени свободы.

Можно рассмотреть более общий класс калибровок

$$F_3 = P - f(\tau) = 0,$$

где $f(\tau)$ – произвольная функция времени с положительной производной, $\dot{f} > 0$. Для этой калибровки $\lambda = \dot{f}$, и полное действие принимает вид

$$S_{\text{т}}|_{F_3=0,G=0} = \int d\tau(\dot{g}^* p_* - \dot{f} H^*).$$

После перепараметризации траектории $dt = d\tau \dot{f}$, мы возвращаемся к исходному действию для точечной частицы (20.99).

Таким образом, действие (20.100) калибровочно инвариантно и после наложения калибровочного условия (из достаточно широкого класса калибровок) эквивалентно обычному действию для точечной частицы. В рассмотренном примере нефизическую степень свободы удалось в явном виде исключить из теории после решения связи и калибровочного условия. В подавляющем большинстве моделей математической физики это сделать не удается. Даже в электродинамике связи и калибровочные условия нельзя решить в явном виде. Ситуация в моделях Янга–Миллса и гравитации еще более сложная. Поэтому для проведения вычислений в калибровочных моделях используют методы, учитывающие как физические, так и нефизические степени свободы.

А теперь обратимся к вопросу об определении энергии в калибровочно инвариантных теориях. Во многих моделях математической физики исходное действие в гамильтоновой форме имеет вид (20.100). В таком виде гамильтониан системы при выполнении уравнений движения тождественно равен нулю, и принимать его за энергию системы не имеет никакого смысла. В рассмотренной модели за энергию частицы естественно принять численное значение гамильтониана H^* для физических степеней свободы. Для того, чтобы его построить, исходя из действия (20.100), необходимо сначала зафиксировать калибровку, зависящую явно от времени, а затем решить уравнения движения для нефизических степеней свободы и связь. При этом, выбирая различные функции времени в калибровочном условии $F_3 = 0$, можно получить, что множитель Лагранжа и, следовательно, эффективный гамильтониан будут явно зависеть от времени. Для простоты картины, следует выбрать такую функцию времени, чтобы эта зависимость исчезла. Если это возможно, то построенный таким образом гамильтониан следует принять за определение энергии, а соответствующий ему временно́й параметр назвать временем $\tau = t$.

Глава 21

Дополнение

21.1 Кватернионы

Рассмотрим четырехмерное векторное пространство $\mathbb{H}$ над полем вещественных чисел, которое содержит поле вещественных чисел как подпространство. Обозначим базис этого пространства символами $1, i, j, k$, где 1 – единица из поля вещественных чисел. Тогда произвольный элемент $q \in \mathbb{H}$ представим в виде

$$q = a + bi + cj + dk, \tag{21.1}$$

где a, b, c, d – вещественные числа. Введем билинейное умножение в $\mathbb{H}$, положив

$$\begin{aligned} ij &= -ji = k, \\ jk &= -kj = i, \\ ki &= -ik = j, \\ i^2 &= j^2 = k^2 = -1. \end{aligned} \tag{21.2}$$

Элементы вида (21.1) с операциями сложения, умножения на действительные числа и умножения (21.2) называются *кватернионами*. С помощью прямых вычислений можно проверить, что кватернионы с так определенным умножением образуют ассоциативную, но не коммутативную алгебру $\mathbb{H}$ с единицей над полем вещественных чисел. Эту алгебру можно представить в виде комплексных матриц $A(q) \in \mathbb{GL}(2, \mathbb{C})$

$$A(q) = \begin{pmatrix} a + bi & c + di \\ -c + di & a - bi \end{pmatrix}, \tag{21.3}$$

где i – мнимая единица. Прямые вычисления показывают, что отображение $q \mapsto A(q)$ является гомоморфизмом, то есть

$$A(q_1 q_2) = A(q_1) A(q_2).$$

Для доказательства этого утверждения достаточно проверить его для $q = i, j, k$. В частности, при $q = i, j, k$ имеем

$$A(i) = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \quad A(j) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A(k) = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}. \tag{21.4}$$

Эти матрицы с точностью до множителя $-i$ совпадают с матрицами Паули (**??**)

$$\sigma_1 = -iA(k), \quad \sigma_2 = -iA(j), \quad \sigma_3 = -iA(i). \tag{21.5}$$

Введем операцию сопряжения в $\mathbb{H}$, то есть поставим каждому кватерниону вида (21.1) его сопряженный элемент

$$\bar{q} = a - bi - cj - dk. \tag{21.6}$$

Это отображение $q \to \bar{q}$ является антиавтоморфизмом алгебры кватернионов, то есть

$$\overline{q_1 + q_2} = \bar{q}_1 + \bar{q}_2, \qquad \overline{q_1 q_2} = \bar{q}_2 \bar{q}_1.$$

Число a называется вещественной частью $\mathsf{re}\, q = a$, а остаток $\mathsf{im}\, q = bi + cj + dk$ – мнимой частью кватерниона. В алгебре кватернионов можно ввести симметричное скалярное произведение

$$(q_1, q_2) = \mathsf{re}\, q_1 \bar{q}_2 = a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2 + d_1 d_2, \tag{21.7}$$

которое совпадает с обычным евклидовым произведением в $\mathbb{R}^4$. Поскольку каждый кватернион представим в виде $q = \mathsf{re}\, q + \mathsf{im}\, q$, то алгебра кватернионов распадается в прямую сумму ортогональных подпространств $\mathbb{H} = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^3$, где $\mathbb{R}$ – прямая, состоящая из вещественных кватернионов, а $\mathbb{R}^3$ – ортогональное трехмерное евклидово пространство мнимых кватернионов.

Определим норму кватерниона

$$\| q \|^2 = q\bar{q} = \bar{q}q = a^2 + b^2 + c^2 + d^2. \tag{21.8}$$

Нетрудно проверить, что

$$\| q \|^2 = \mathsf{det}\, A(q).$$

Отсюда следует, что $\| q_1 q_2 \|^2 = \| q_1 \|^2 \| q_2 \|^2$.

Каждый отличный от нуля кватернион обладает единственным обратным элементом

$$qq^{-1} = q^{-1}q = 1,$$

где

$$q^{-1} = \frac{\bar{q}}{\| q \|^2}.$$

Это означает, что множество кватернионов относительно операции сложения и умножения (21.2) (без умножения на действительные числа) образует тело, так как умножение некоммутативно.

Алгебра кватернионов $\mathbb{H}$ допускает естественное отождествление с двумерным комплексным пространством $\mathbb{C}^2$. Используя определение умножения в алгебре кватернионов $k = -ji$ (21.2), запишем кватернион в виде

$$q = (a + ib) + j(c - id) = z_1 + j\bar{z}_2,$$

где линейные комбинации $z_1 = a + ib$ и $z_2 = c + id$ можно отождествить с парой комплексных чисел. При этом 1 и j рассматриваются, как базис в $\mathbb{C}^2$.

Рассмотрим чистый кватернион, не содержащий вещественной части,

$$r = bi + cj + dk, \qquad \| r \| = b^2 + c^2 + d^2.$$

Его можно представить, как вектор в трехмерном евклидовом пространстве $r \in \mathbb{R}^3$. Пусть $q \in \mathbb{H}$ произвольный обратимый (в смысле кватернионного умножения) кватернион. Тогда кватернион qrq^{-1} снова является чистым кватернионом с той же нормой

$$qrq^{-1} \in \mathbb{R}^3, \qquad \| qrq^{-1} \| = \| q \| .$$

Это значит, что каждому обратимому кватерниону ставится в соответствие некоторое вращение. При этом двум кватернионам q и $-q$, отличающимся знаком, соответствует одно и то же вращение. Можно проверить, что любое вращение можно реализовать с помощью кватерниона единичной нормы. Поскольку кватернионы единичной нормы параметризуют трехмерную сферу единичного радиуса, то существует гомеоморфизм

$$\mathbb{SO}(3) \approx \frac{\mathbb{S}^3}{\mathbb{Z}_2}.$$

Рассмотрим отображение кватернионов $q \in \mathbb{H}$, задаваемое двумя кватернионами $a, b \in \mathbb{H}$ единичной нормы

$$q \to aqb^{-1}, \qquad \| a \| = \| b \| = 1.$$

Это отображение задает вращение четырехмерного евклидова пространства $\mathbb{H} = \mathbb{R}^4$, поскольку сохраняет норму q. Можно проверить, что любое вращение определяет пару a и b с точностью до знака, так как кватернионы a, b и $-a, -b$ определяют одно и то же вращение. Это значит, что существует гомеоморфизм

$$\mathbb{SO}(4) \approx \frac{\mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^3}{\mathbb{Z}_2}.$$