Алгебро-геометрический анализ дифференциальных уравнений

В.В. Жаринов [1] [2]

11 апреля 2008 г.

[1]E-mail: zharinov@mi.ras.ru

[2]Буду рад любым замечаниям, указаниям на ошибки, неточности, опечатки.

Оглавление

1 Формальная дифференциальная геометрия 5

1.1 Алгебры 6

1.1.1 Определения 6

1.1.2 Примеры 7

1.1.3 Морфизмы алгебр 9

1.2 Мультипликаторы и дифференцирования 10

1.2.1 Мультипликаторы 10

1.2.2 Дифференцирования 14

1.2.3 Взаимные действия 16

1.3 Формальный комплекс де Рама 19

1.3.1 Составляющие 19

1.3.2 Внешняя алгебра $\wedge\mathfrak{D}$ 20

1.3.3 Комплекс $\{\Omega, d\}$ 26

1.3.4 Примеры 33

1.4 Спектральная последовательность 34

1.4.1 Картанова подалгебра 34

1.4.2 Симметрии 34

1.4.3 Картанова фильтрация 35

1.4.4 Спектральная последовательность 36

1.4.5 Некоторые действия 38

2 Основы алгебро-геометрического анализа 41

2.1 Пространство джетов 41

2.1.1 Переменные 41

2.1.2 Функции 42

2.1.3 Джеты 43

2.1.4 Мультипликаторы и дифференцирования . . 44

2.1.5 Картанова подалгебра 45

2.1.6 Операторы в полных частных производных . 48
2.1.7 Симметрии 49
2.1.8 Дифференциальные формы 51
2.1.9 Вариационный бикомплекс 52
2.1.10 Спектральная последовательность 57
2.1.11 Элементы формального вариационного исчисления 58
2.2 Эволюционные системы 63
2.2.1 Переменные 63
2.2.2 Функции 64
2.2.3 Джеты 64
2.2.4 Мультипликаторы и дифференцирования . . 64
2.2.5 Пространственные полные производные . . . 65
2.2.6 Эволюция 66

Глава 1

Формальная дифференциальная геометрия

Стандартные обозначения

Будем обозначать:

$\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ – множество всех целых чисел;

$\mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, \dots\}$ – множество всех неотрицательных целых чисел;

$\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$ – множество всех натуральных чисел;

$\mathbb{R}$ – множество всех вещественных чисел;

$\mathbb{C} = \mathbb{R} + \mathrm{i}\,\mathbb{R}$ – множество всех комплексных чисел;

$\mathbb{F} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$;

$\mathbb{X}^D = \times^D \mathbb{X} = \{x = (\xi^1, \dots, \xi^D); \xi^i \in \mathbb{X}, 1 \le i \le D\}$ – декартово произведение D копий множества $\mathbb{X} = \mathbb{Z}, \mathbb{Z}_+, \mathbb{N}, \mathbb{R}, \mathbb{C}, \dots$.

Всюду неявно предполагается, что все модули, линейные пространства и алгебры наделены естественными локально выпуклыми топологиями, а их морфизмы непрерывны.

1.1 Алгебры

1.1.1 Определения

Пусть $\mathbb{F}$ – поле. Напомним, что линейное пространство $\mathcal{A}$ над $\mathbb{F}$ называется *алгеброй*, если в нем определена билинейная операция (умножение)

$$\mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \mathcal{A}, \quad (a, b) \mapsto a \cdot b.$$

Алгебра $\mathcal{A}$ называется

- ⋆ *унитальной*, если она содержит единицу $e \in \mathcal{A}$, где $e \cdot a = a = a \cdot e$ для всех $a \in \mathcal{A}$,
- ⋆ *коммутативной*, если $a \cdot b = b \cdot a$ для всех $a, b \in \mathcal{A}$,
- ⋆ *ассоциативной*, если $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ для всех $a, b, c \in \mathcal{A}$ (в этом случае часто пишут ab вместо $a \cdot b$),
- ⋆ *алгеброй Ли*, если

  $a \cdot b + b \cdot a = 0$ для всех $a, b \in \mathcal{A}$,

  $(a \cdot b) \cdot c + (b \cdot c) \cdot a + (c \cdot a) \cdot b = 0$ для всех $a, b, c \in \mathcal{A}$.

  (в этом случае обычно пишут $[a, b]$ вместо $a \cdot b$).

Пусть $\mathcal{A}$ – алгебра.

Линейное подпространство $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ называется

- ⋆ *подалгеброй* алгебры $\mathcal{A}$, если $a \cdot b \in \mathcal{B}$ для всех $a, b \in \mathcal{B}$,
- ⋆ *левым идеалом* алгебры $\mathcal{A}$, если $a \cdot b \in \mathcal{B}$ для всех $a \in \mathcal{A}$, $b \in \mathcal{B}$,
- ⋆ *правым идеалом* алгебры $\mathcal{A}$, если $b \cdot a \in \mathcal{B}$ для всех $a \in \mathcal{A}$, $b \in \mathcal{B}$,
- ⋆ *идеалом* алгебры $\mathcal{A}$, если $a \cdot b, b \cdot a \in \mathcal{B}$ для всех $a \in \mathcal{A}$, $b \in \mathcal{B}$.

Подмножество

- ⋆ $\operatorname{cen} \mathcal{A} = \{c \in \mathcal{A} \mid a \cdot c = c \cdot a \text{ для всех } a \in \mathcal{A}\}$ называется *центром* алгебры $\mathcal{A}$,
- ⋆ $\operatorname{ann} \mathcal{A} = \{z \in \mathcal{A} \mid a \cdot z = z \cdot a = 0 \text{ для всех } a \in \mathcal{A}\}$ называется *аннулятором* алгебры $\mathcal{A}$.

Пусть $\mathcal{S} \subset \mathcal{A}$. Множество

$$\operatorname{nor}\mathcal{S} = \{a \in \mathcal{A} \mid a \cdot s - s \cdot a \in \mathcal{S} \text{ для всех } s \in \mathcal{S}\}$$

называется *нормализатором* множества $\mathcal{S}$ в алгебре $\mathcal{A}$.

С каждой алгеброй $\mathcal{A}$ ассоциирована операция $[a, b] = a \cdot b - b \cdot a$ для всех $a, b \in \mathcal{A}$, превращающая линейное пространство $\mathcal{A}$ в другую алгебру $\operatorname{as}\mathcal{A}$. Ясно, что $\operatorname{as}\mathcal{A} \simeq \mathcal{A}$, если исходная алгебра $\mathcal{A}$ – алгебра Ли, тогда как $\operatorname{as}\mathcal{A}$ – алгебра Ли, если алгебра $\mathcal{A}$ ассоциативная. В последнем случае алгебра $\operatorname{as}\mathcal{A}$ называется *присоединенной алгеброй Ли*.

1.1.2 Примеры

Пусть поле $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$.

Пример 1.1.1. **Гладкие функции на многообразии.** Пусть M – гладкое многообразие конечной размерности $m = \dim M \in \mathbb{N}$ (см., например, [15], [19], [21]). Множество $\mathcal{C}^\infty(M)$ всех гладких $\mathbb{F}$-значных функций на M обладает естественной структурой унитальной ассоциативной коммутативной алгебры с поточечными операциями.

В анализе важен случай $M = \mathbb{R}^m$. Алгебра $\mathcal{E}(\mathbb{R}^m) = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^m)$ обладает естественной топологией равномерной сходимости на компактах вместе с частными производными всех порядков, она имеет подалгебры $\mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$ и $\mathcal{D}(\mathbb{R}^m)$. Алгебра $\mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$ состоит из всех гладких функций на $\mathbb{R}^m$, убывающих на бесконечности вместе с частными производными всех порядков быстрее любой обратной степени модуля независимой переменной $x \in \mathbb{R}^m$, а алгебра $\mathcal{D}(\mathbb{R}^m)$ состоит из всех гладких *финитных* функций (т. е. функций с компактным носителем). Обе алгебры обладают естественными топологиями, обе они неунитальные, однако их аннуляторы тривиальные. Концепция формальной дифференциальной геометрии позволяет использовать геометрические методы и конструкции для вывода новых характеристик этих и других подобных алгебр. Например, алгебра $\mathcal{D}(\mathbb{R}^m)$ является идеалом алгебр $\mathcal{E}(\mathbb{R}^m)$ и $\mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$. Возникающие, таким образом фактор-алгебры

$$\mathcal{E}(S^{m-1}_\infty) = \mathcal{E}(\mathbb{R}^m)/\mathcal{D}(\mathbb{R}^m) \quad \text{и} \quad \mathcal{S}(S^{m-1}_\infty) = \mathcal{S}(\mathbb{R}^m)/\mathcal{D}(\mathbb{R}^m),$$

где S^{m-1}_∞ – $(m-1)$-мерная сфера бесконечно большого радиуса, совершенно не изучены, поскольку не укладываются в рамки традиционного анализа.

Пример 1.1.2. **Линейные отображения.** Пусть $\mathcal{L}$ – линейное пространство над $\mathbb{F}$. На линейном пространстве $\mathrm{End}_{\mathbb{F}}(\mathcal{L})$ всех эндоморфизмов пространства $\mathcal{L}$ имеется естественная билинейная операция – композиция отображений

$$(M, N) \mapsto M \circ N \quad \text{для всех} \quad M, N \in \mathrm{End}_{\mathbb{F}}(\mathcal{L},)$$

превращающая $\mathrm{End}_{\mathbb{F}}(\mathcal{L})$ в унитальную ассоциативную алгебру. В свою очередь, ассоциированная операция – коммутатор

$$(M, N) \mapsto [M, N] = M \circ N - N \circ M \quad \text{для всех} \quad M, N \in \mathrm{End}_{\mathbb{F}}(\mathcal{L},)$$

превращает $\mathrm{End}_{\mathbb{F}}(\mathcal{L})$ в алгебру Ли, которую обычно обозначают $\mathfrak{gl}(\mathcal{L})$.

Выделим нетривиальный частный случай (см., например, [3]). Пусть $\mathcal{L} = \mathbb{F}^n$ – линейное пространство всех столбцов высотой $n \in \mathbb{N}$ с элементами из поля $\mathbb{F}$. Тогда $\mathrm{End}_{\mathbb{F}}(\mathbb{F}^n) = \mathrm{Mat}(n, \mathbb{F})$ – алгебра всех квадратных матриц порядка n с элементами из поля $\mathbb{F}$, а $\mathfrak{gl}(\mathbb{F}^n) = \mathfrak{gl}(n, \mathbb{F})$ – ассоциированная алгебра Ли.

Пример 1.1.3. **Гладкие функции на множестве.** Пусть M – гладкое многообразие и S – его произвольное подмножество. Множество

$$\mathcal{J}(S) = \{\phi \in \mathcal{C}^\infty(M) \mid \phi|_S = 0\}$$

всех гладких функций, равных 0 на S, есть идеал алгебры $\mathcal{C}^\infty(M)$, так что определена фактор-алгебра $\mathcal{C}^\infty_{ext}(S) = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)/\mathcal{J}(S)$. Если S есть достаточно хорошее подмногообразие многообразия M, то $\mathcal{C}^\infty_{ext}(S)$ совпадает с алгеброй $\mathcal{C}^\infty(S)$ всех гладких функций на многообразии S. В противном случае, алгебра $\mathcal{C}^\infty_{ext}(S)$ есть вполне приличная база для изучения геометрии множества S.

Пример 1.1.4. **Алгебры с поточечными операциями.** Пусть M – множество, $\mathcal{A}$ – алгебра над полем $\mathbb{F}$. Множество $\mathcal{A}^M$ всех отображений из M в $\mathcal{A}$ есть алгебра с поточечными операциями:

$$(\alpha f + \beta g)(x) = \alpha f(x) + \beta g(y), \quad (f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x),$$

для всех $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$, $f, g \in \mathcal{A}$, $x \in M$.

Важный частный случай: M – гладкое многообразие, $\mathcal{A}$ – топологическая алгебра. Алгебра $\mathcal{A}^M$ имеет подалгебру $\mathcal{C}^\infty(M, \mathcal{A})$, состоящую из всех гладких функций на M со значениями в $\mathcal{A}$. Более того, $\mathcal{C}^\infty(M, \mathcal{A})$ обладает структурой $\mathcal{C}^\infty(M)$-модуля, опять с поточечными операциями:

$$(\lambda f + \mu g)(x) = \lambda(x) f(x) + \mu(x) g(x)$$

для всех $\lambda, \mu \in \mathcal{C}^\infty(M)$, $f, g \in \mathcal{C}^\infty(M, \mathcal{A})$.

1.1.3 Морфизмы алгебр

Пусть $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ – алгебры. Линейное отображение $F \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ называется морфизмом алгебр, если $F(x \cdot y) = F(x) \cdot F(y)$ для всех $x, y \in \mathcal{A}$. Здесь ядро $\ker F = \{a \in \mathcal{A} \mid F(a) = 0\}$ – двусторонний идеал алгебры $\mathcal{A}$, а образ $\mathrm{im}\, F = \{b = F(a) \in \mathcal{B} \mid a \in \mathcal{A}\}$ – подалгебра алгебры $\mathcal{B}$.

Пример 1.1.5. Пусть $\mu : M \to N$ – морфизм гладких многообразий. Отображение $\mu^* : \mathcal{C}^\infty(N) \to \mathcal{C}^\infty(M)$ определим правилом

$$f \mapsto \mu^* f = f \circ \mu, \quad \text{так что} \quad (\mu^* f)(x) = f(\mu(x)),$$

для всех $f \in \mathcal{C}^\infty(N)$, $x \in M$. Очевидно,

$$\mu^*(\alpha f + \beta g) = \alpha(\mu^* f) + \beta(\mu^* g), \quad \mu^*(fg) = (\mu^* f)(\mu^* g),$$

для всех $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$, $f, g \in \mathcal{C}^\infty(N)$, так что μ^* – морфизм из алгебры $\mathcal{C}^\infty(N)$ в алгебру $\mathcal{C}^\infty(M)$.

Пусть $\mathcal{A}$ – алгебра. *Левое присоединенное действие*

$$\mathrm{ad} : \mathcal{A} \to \mathrm{End}_{\mathbb{F}}(\mathcal{A})$$

определим правилом

$$a \mapsto \mathrm{ad}(a) : \mathcal{A} \to \mathcal{A}, \quad x \mapsto (\mathrm{ad}(a))(x) = a \cdot x \quad \text{для всех} \quad a, x \in \mathcal{A}.$$

Тогда

- $\star$ $\mathrm{ad} : \mathcal{A} \to \mathrm{End}_{\mathbb{F}}(\mathcal{A})$ – морфизм ассоциативных алгебр, если $\mathcal{A}$ – ассоциативная алгебра, здесь $a \mapsto \mathrm{ad}(a) : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$, $x \mapsto ax$ для всех $a, x \in \mathcal{A}$;
- $\star$ $\mathrm{ad} : \mathcal{A} \to \mathfrak{gl}(\mathcal{A})$ – морфизм алгебр Ли, если $\mathcal{A}$ – алгебра Ли, здесь $a \mapsto \mathrm{ad}(a) : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$, $x \mapsto [a, x]$ для всех $a, x \in \mathcal{A}$.

В частности, пусть $\mathcal{L}$ – линейное пространство. Тогда

- $\star$ $\mathrm{ad} : \mathrm{End}_{\mathbb{F}}(\mathcal{L}) \to \mathrm{End}_{\mathbb{F}}(\mathrm{End}_{\mathbb{F}}(\mathcal{L}))$ – морфизм ассоциативных алгебр,
  где $(\mathrm{ad}(F))(X) = F \circ X$ для всех $F, X \in \mathrm{End}_{\mathbb{F}}(\mathcal{L})$,

⋆ $\mathrm{ad} : \mathfrak{gl}(\mathcal{L}) \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{gl}(\mathcal{L}))$ – морфизм алгебр Ли,
где $(\mathrm{ad}(F))(X) = [F, X]$ для всех $F, X \in \mathrm{End}_{\mathbb{F}}(\mathcal{L})$.

Имеется также правое присоединенное действие

$$\mathrm{ad}_r : \mathcal{A} \to \mathrm{End}_{\mathbb{F}}(\mathcal{A}),$$

действующее по правилу

$$a \mapsto \mathrm{ad}_r(a) : \mathcal{A} \to \mathcal{A}, \quad x \mapsto (\mathrm{ad}_r(a))(x) = x \cdot a \text{ для всех } a, x \in \mathcal{A}.$$

В ситуациях, когда используются одновременно оба действия вместо ad обычно пишут ad_l. Конечно, $\mathrm{ad}_l = \mathrm{ad}_r = \mathrm{ad}$, если алгебра $\mathcal{A}$ коммутативная. В некоммутативном случае бывает полезным *ассоциированное действие* $\mathrm{as} = \mathrm{ad}_l - \mathrm{ad}_r$,

$$a \mapsto \mathrm{as}(a) : \mathcal{A} \to \mathcal{A}, \quad x \mapsto (\mathrm{as}(a))(x) = [a, x] = a \cdot x - x \cdot a, \quad a, x \in \mathcal{A}.$$

1.2 Мультипликаторы и дифференцирования

1.2.1 Мультипликаторы

Пусть $\mathcal{A}$ – алгебра. Линейное отображение $M \in \mathrm{End}_{\mathbb{F}}(\mathcal{A})$ называется

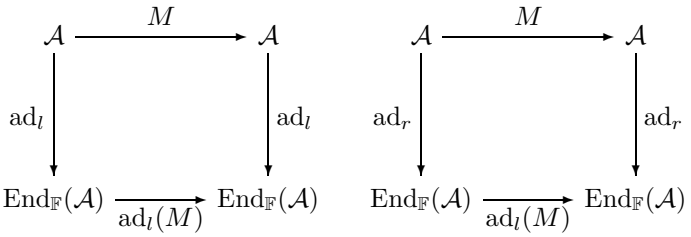
⋆ *левым мультипликатором*, если $M(a \cdot b) = M(a) \cdot b$,

⋆ *правым мультипликатором*, если $M(a \cdot b) = a \cdot M(b)$,

⋆ *мультипликатором*, если $M(a \cdot b) = M(a) \cdot b = a \cdot M(b)$,

для всех $a, b \in \mathcal{A}$. Обозначим через $\mathfrak{M}(\mathcal{A})$ множество всех мультипликаторов алгебры $\mathcal{A}$.

Предложение 1.2.1. *Эндоморфизм $M \in \mathrm{End}_{\mathbb{F}}(\mathcal{A})$ есть левый (правый) мультипликатор алгебры $\mathcal{A}$, тогда и только тогда, когда приведенная ниже левая (правая) диаграмма коммутативна*



Доказательство. Действительно, пусть $a, b \in \mathcal{A}$. Пройдя левую диаграмму по пути *направо-вниз*, получим

$$\mathrm{ad}_l(M(a))(b) = M(a) \cdot b,$$

а пройдя эту же диаграмму по пути *вниз-направо*, получим

$$\mathrm{ad}_l(M)(\mathrm{ad}_l(a))(b) = (M \circ \mathrm{ad}_l(a))(b) = M(a \cdot b).$$

Таким образом, левая диаграмма коммутативна тогда и только тогда, когда M – левый мультипликатор.

Аналогичным образом, разбирается и правая диаграмма. □

Замечание. Пусть $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(\mathcal{K}, \mathcal{L})$, где $\mathcal{K}$, $\mathcal{L}$ – линейные пространства над $\mathbb{F}$. Эндоморфизмы $g \in \mathrm{End}_{\mathbb{F}}(\mathcal{K})$ и $h \in \mathrm{End}_{\mathbb{F}}(\mathcal{L})$ называются *f-согласованными*, если следующая диаграмма коммутативна

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{K} & \xrightarrow{g} & \mathcal{K} \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ \mathcal{L} & \xrightarrow[h]{} & \mathcal{L} \end{array}$$

В этом смысле, линейное отображение $M : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ есть левый (правый) мультипликатор, если M и $\mathrm{ad}_l(M)$ ad_l-согласованы (ad_r-согласованы).

Предложение 1.2.2. *Пусть $\mathcal{A}$ – алгебра и $\mathfrak{M}(\mathcal{A})$ – множество всех ее мультипликаторов. Тогда*

- $\star$ $\ker M = \{a \in \mathcal{A} \mid M(a) = 0\}$ *и* $\mathrm{im}\, M = \{a = M(x) \mid x \in \mathcal{A}\}$ – *двусторонние идеалы алгебры $\mathcal{A}$ для любого $M \in \mathfrak{M}(\mathcal{A})$,*
- $\star$ $M\big(\mathrm{cen}\,\mathcal{A}\big) \subset \mathrm{cen}\,\mathcal{A}$ *и* $M\big(\mathrm{ann}\,\mathcal{A}\big) \subset \mathrm{ann}\,\mathcal{A}$ *для любого $M \in \mathfrak{M}(\mathcal{A})$,*
- $\star$ $\mathfrak{M}(\mathcal{A})$ – *унитальная подалгебра алгебры* $\mathrm{End}_{\mathbb{F}}(\mathcal{A})$,
- $\star$ $[M, N] \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(\mathcal{A}, \mathrm{ann}\,\mathcal{A})$ *для всех $M, N \in \mathfrak{M}(\mathcal{A})$.*

В частности, алгебра $\mathfrak{M}(\mathcal{A})$ – коммутативная, если $\mathrm{ann}\,\mathcal{A} = 0$ *(например, если $\mathcal{A}$ унитальная).*

Доказательство. Действительно, пусть $M \in \mathfrak{M}(\mathcal{A})$ и $a \in \ker M$, т. е. $M(a) = 0$, тогда

$$M(a \cdot b) = M(a) \cdot b = 0 \quad \text{и} \quad M(b \cdot a) = b \cdot M(a) = 0$$

для всех $b \in \mathcal{A}$. Аналогично, пусть $a \in \operatorname{im} M$, т.е. $a = M(x)$ для некоторого $x \in \mathcal{A}$, тогда

$$a \cdot b = M(x) \cdot b = M(x \cdot b) \quad \text{и} \quad b \cdot a = b \cdot M(x) = M(b \cdot x)$$

для всех $b \in \mathcal{A}$.

Пусть $M \in \mathfrak{M}(\mathcal{A})$ и $a \in \operatorname{cen} \mathcal{A}$, тогда

$$M(a) \cdot b = M(a \cdot b) = M(b \cdot a) = b \cdot M(a) \quad \text{для всех} \quad b \in \mathcal{A}.$$

Если же $M \in \mathfrak{M}(\mathcal{A})$ и $a \in \operatorname{ann} \mathcal{A}$, то

$$M(a) \cdot b = M(a \cdot b) = M(0) = 0 \quad \text{и} \quad b \cdot M(a) = M(b \cdot a) = M(0) = 0$$

для всех $b \in \mathcal{A}$.

Пусть $M, N \in \mathfrak{M}(\mathcal{A})$, тогда

$$\begin{aligned}(M \circ N)(a \cdot b) &= M(N(a \cdot b)) = M(N(a) \cdot b) = M(N(a)) \cdot b \\ &= (M \circ N)(a) \cdot b \quad \text{для всех} \quad a, b \in \mathcal{A}.\end{aligned}$$

Аналогично,

$$\begin{aligned}(M \circ N)(a \cdot b) &= M(N(a \cdot b)) = M(a \cdot N(b)) = a \cdot M(N(b)) \\ &= a \cdot (M \circ N)(b) \quad \text{для всех} \quad a, b \in \mathcal{A}.\end{aligned}$$

Наконец, пусть $M, N \in \mathfrak{M}(\mathcal{A})$ и $a \in \mathcal{A}$, тогда

$$\begin{aligned}[M, N](a) \cdot b &= M(N(a)) \cdot b - N(M(a)) \cdot b \\ &= N(a) \cdot M(b) - N(M(a) \cdot b) \\ &= N(a \cdot M(b)) - N(a \cdot M(b)) = 0, \\ b \cdot [M, N](a) &= b \cdot M(N(a)) - b \cdot N(M(a)) \\ &= M(b \cdot N(a)) - N(b) \cdot M(a) \\ &= M(N(b) \cdot a) - M(N(b) \cdot a) = 0,\end{aligned}$$

для любого $b \in \mathcal{A}$. □

Предложение 1.2.3. *Пусть $\mathcal{A}$ – унитальная алгебра, $e \in \mathcal{A}$ – ее единица. Определим отображение $e^* : \mathfrak{M}(\mathcal{A}) \to \mathcal{A}$ правилом $M \mapsto e^*(M) = M(e)$ для всех $M \in \mathfrak{M}(\mathcal{A})$. Тогда $\operatorname{im} e^* = \operatorname{cen} \mathcal{A}$, и $e^* : \mathfrak{M}(\mathcal{A}) \to \operatorname{cen} \mathcal{A}$ есть инъективный морфизм алгебр.*

Доказательство. Действительно, пусть $M \in \mathfrak{M}(\mathcal{A})$ и $a \in \mathcal{A}$, тогда с одной стороны, $e^*(M) \cdot a = M(e) \cdot a = M(e \cdot a) = M(a)$, а с другой стороны и $a \cdot e^*(M) = a \cdot M(e) = M(a \cdot e) = M(a)$. Таким образом, $\operatorname{im} e^* \subset \operatorname{cen} \mathcal{A}$.

Далее, пусть $M \in \ker e^*$, тогда

$$M(a) = M(e \cdot a) = M(e) \cdot a = 0 \cdot a = 0 \quad \text{для всех} \quad a \in \mathcal{A},$$

так что $\ker e^* = 0$.

Наконец, пусть $M, N \in \mathfrak{M}(\mathcal{A})$, тогда

$$\begin{aligned} e^*(M \circ N) = (M \circ N)(e) = M(N(e)) = M(e \cdot N(e)) \\ = M(e) \cdot N(e) = e^*(M) \cdot e^*(N), \end{aligned}$$

т. е. линейное отображение e^* есть морфизм алгебр. □

Предложение 1.2.4. *Пусть $\mathcal{A}$ – ассоциативная алгебра. Тогда*

- ⋆ *левое присоединенное действие в алгебре $\mathcal{A}$ индуцирует морфизм ассоциативных алгебр* $\operatorname{ad} : \operatorname{cen} \mathcal{A} \to \mathfrak{M}(\mathcal{A})$, *причем* $\ker \operatorname{ad} = \operatorname{ann} \mathcal{A}$,
- ⋆ *если алгебра $\mathcal{A}$ еще и унитальная, то этот морфизм есть изоморфизм, причем* $\operatorname{ad}^{-1} = e^*$.

Доказательство. Действительно, пусть $a \in \operatorname{cen} \mathcal{A}$, тогда

$$\begin{aligned} \operatorname{ad}(a)(x \cdot y) = a \cdot (x \cdot y) = (a \cdot x) \cdot y = \operatorname{ad}(a)(x) \cdot y \\ = x \cdot (a \cdot y) = x \cdot \operatorname{ad}(a)(y) \quad \text{для всех} \quad x, y \in \mathcal{A}. \end{aligned}$$

Далее, пусть $a \in \ker \operatorname{ad}$, т. е. $\operatorname{ad}(a)(b) = a \cdot b = 0 = b \cdot a$ для всех $b \in \mathcal{A}$, откуда $a \in \operatorname{ann} \mathcal{A}$.

Если алгебра $\mathcal{A}$ ассоциативная и унитальная, то во-первых $\operatorname{ann} \mathcal{A} = 0$, а во-вторых для всех $M \in \mathfrak{M}(\mathcal{A})$ и $a \in \mathcal{A}$ имеем

$$(\operatorname{ad} \circ e^*)(M)(a) = \operatorname{ad}(M(e))(a) = M(e) \cdot a = M(e \cdot a) = M(a),$$

так что $\operatorname{ad} \circ e^* = \operatorname{id}_{\mathfrak{M}(\mathcal{A})}$. □

1.2.2 Дифференцирования

Пусть $\mathcal{A}$ – алгебра. Линейное отображение $D \in \mathrm{End}_{\mathbb{F}}(\mathcal{A})$ называется *дифференцированием*, если выполняется *правило Лейбница*

$$D(a \cdot b) = D(a) \cdot b + a \cdot D(b) \quad \text{для всех} \quad a, b \in \mathcal{A}.$$

Множество всех дифференцирований алгебры $\mathcal{A}$ обозначим через $\mathfrak{D}(\mathcal{A})$.

Предложение 1.2.5. *Эндоморфизм $D \in \mathrm{End}_{\mathbb{F}}(\mathcal{A})$ есть дифференцирование алгебры $\mathcal{A}$, тогда и только тогда, когда приведенная ниже диаграмма коммутативна*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A} & \xrightarrow{\quad D \quad} & \mathcal{A} \\ {\scriptstyle \mathrm{ad}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{ad}} \\ \mathrm{End}_{\mathbb{F}}(\mathcal{A}) & \xrightarrow[\mathrm{as}(D)]{} & \mathrm{End}_{\mathbb{F}}(\mathcal{A}) \end{array}$$

где $\mathrm{as}(D)(f) = [D, f]$ *для всякого* $f \in \mathrm{End}_{\mathbb{F}}(\mathcal{A})$.

Доказательство. Действительно, пусть $a, b \in \mathcal{A}$. Пройдя диаграмму по пути *направо-вниз*, получим

$$\begin{aligned} &a \mapsto D(a) \mapsto \mathrm{ad}(D(a)), \\ &\text{так что} \quad \mathrm{ad}(D(a))(b) = D(a) \cdot b, \end{aligned}$$

а пройдя по пути *вниз-направо*, получим

$$\begin{aligned} &a \mapsto \mathrm{ad}(a) \mapsto \mathrm{as}(D)(\mathrm{ad}(a)) = [D, \mathrm{ad}(a)], \\ &\text{так что} \quad [D, \mathrm{ad}(a)](b) = D(a \cdot b) - a \cdot D(b). \end{aligned}$$

Итак, диаграмма коммутативна тогда и только тогда, когда D удовлетворяет правилу Лейбница. □

Предложение 1.2.6. *Пусть $D \in \mathfrak{D}(\mathcal{A})$, тогда*

- $\star$ $\ker D = \{a \in \mathcal{A} \mid D(a) = 0\}$ – *подалгебра алгебры $\mathcal{A}$,*
- $\star$ $\mathrm{im}\, D = \{a = D(x) \mid x \in \mathcal{A}\}$ – *линейное подпространство линейного пространства $\mathcal{A}$,*

⋆ $D\big(\operatorname{cen}\mathcal{A}\big) \subset \operatorname{cen}\mathcal{A}$ *и* $D\big(\operatorname{ann}\mathcal{A}\big) \subset \operatorname{ann}\mathcal{A}$.

Доказательство. Действительно, пусть $a, b \in \ker D$, тогда

$$D(a \cdot b) = D(a) \cdot b + a \cdot D(b) = 0 \cdot b + a \cdot 0 = 0.$$

Второе утверждение очевидно, его смысл в том что образ $\operatorname{im} D$ не является ни идеалом ни подалгеброй алгебры $\mathcal{A}$.

Далее, пусть $a \in \operatorname{cen}\mathcal{A}$ и $b \in \mathcal{A}$, тогда

$$D(a) \cdot b = D(a \cdot b) - a \cdot D(b) = D(b \cdot a) - D(b) \cdot a = b \cdot D(a).$$

Наконец, пусть $a \in \operatorname{ann}\mathcal{A}$ и $b \in \mathcal{A}$, тогда

$$\begin{aligned} D(a) \cdot b &= D(a \cdot b) - a \cdot D(b) = D(0) - 0 = 0, \\ b \cdot D(a) &= D(b \cdot a) - D(b) \cdot a = D(0) - 0 = 0. \end{aligned}$$

□

Предложение 1.2.7. *Множество* $\mathfrak{D}(\mathcal{A})$ *всех дифференцирований алгебры* $\mathcal{A}$ *есть подалгебра алгебры Ли* $\mathfrak{gl}(\mathcal{A})$.

Доказательство. Действительно, пусть $X, Y \in \mathfrak{D}(\mathcal{A})$, тогда

$$\begin{aligned} [X,Y](a \cdot b) &= X(Y(a \cdot b)) - Y(X(a \cdot b)) \\ &= X(Y(a) \cdot b + a \cdot Y(b)) - Y(X(a) \cdot b + a \cdot X(b)) \\ &= (X(Y(a)) - Y(X(a))) \cdot b + a \cdot (X(Y(b)) - Y(X(b))) \\ &= [X,Y](a) \cdot b + a \cdot [X,Y](b) \quad \text{для всех} \quad a, b \in \mathcal{A}. \end{aligned}$$

□

Предложение 1.2.8. *Пусть* $\mathcal{A}$ *– ассоциативная алгебра и* $\operatorname{as}\mathcal{A}$ *– ее присоединенная алгебра Ли с коммутатором в качестве скобки Ли. Ассоциированное действие в алгебре* $\mathcal{A}$ *индуцирует морфизм алгебр Ли*

$$\operatorname{as} : \operatorname{as}\mathcal{A} \to \mathfrak{D}(\mathcal{A}).$$

Доказательство. Пусть $a \in \mathcal{A}$, тогда $\operatorname{as}(a)(x) = [a, x]$ для всех $x \in \mathcal{A}$, причем

$$\begin{aligned} \operatorname{as}(a)(x \cdot y) = [a, x \cdot y] &= a \cdot (x \cdot y) - (x \cdot y) \cdot a \\ &= (a \cdot x - x \cdot a) \cdot y + x \cdot (a \cdot y - y \cdot a) \\ &= [a, x] \cdot y + x \cdot [a, y] = \operatorname{as}(x) \cdot y + x \cdot \operatorname{as}(a)(y) \end{aligned}$$

для всех $x, y \in \mathcal{A}$, т. е. ассоциированное действие определяет линейное отображение $\mathrm{as} : \mathcal{A} \to \mathfrak{D}(\mathcal{A})$. Далее, пусть $a, b \in \mathcal{A}$, тогда

$$\begin{aligned}(\mathrm{as}([a,b]) - [\mathrm{as}(a), \mathrm{as}(b)])(x) &= [[a,b],x] - [a,[b,x]] + [b,[a,x]] \\ &= [[a,b],x] + [[b,x],a] + [[x,a],b] = 0\end{aligned}$$

для всех $x \in \mathcal{A}$, в силу тождества Якоби для коммутаторов, т. е. определен морфизм алгебр Ли $\mathrm{as} : \mathrm{as}\,\mathcal{A} \to \mathfrak{D}(\mathcal{A})$. □

Замечание. Дифференцирования $\mathrm{as}(a)$, $a \in \mathcal{A}$, называются *внутренними дифференцированиями* алгебры $\mathcal{A}$. Очевидно, у коммутативной алгебры есть только одно внутреннее дифференцирование, а именно тривиальное нулевое. С другой стороны, у матричной алгебры $\mathrm{Mat}(n, \mathbb{F})$ все дифференцирования внутренние [3].

1.2.3 Взаимные действия

Пусть $\mathcal{A}$ – алгебра, $\mathfrak{M}(\mathcal{A})$ – унитальная ассоциативная алгебра всех ее мультипликаторов, $\mathfrak{D}(\mathcal{A})$ – алгебра Ли всех ее дифференцирований. По построению, $\mathfrak{M}(\mathcal{A}), \mathfrak{D}(\mathcal{A}) \subset \mathrm{End}_{\mathbb{F}}(\mathcal{A})$, это позволяет определить взаимные действия мультипликаторов и дифференцирований, используя композиции и коммутаторы в объемлющей алгебре $\mathrm{End}_{\mathbb{F}}(\mathcal{A})$.

Предложение 1.2.9. *Левое присоединенное действие в объемлющей алгебре* $\mathrm{End}_{\mathbb{F}}(\mathcal{A})$ *индуцирует морфизм ассоциативных алгебр*

$$\mathrm{ad} : \mathfrak{M}(\mathcal{A}) \to \mathrm{End}_{\mathbb{F}}(\mathfrak{M}(\mathcal{A})),$$

а его сужение на $\mathrm{cen}\,\mathfrak{M}(\mathcal{A})$ *есть изоморфизм*

$$\mathrm{ad} : \mathrm{cen}\,\mathfrak{M}(\mathcal{A}) \simeq \mathfrak{M}(\mathfrak{M}(\mathcal{A})).$$

Доказательство. Действительно, первое утверждение следует из Предложений 1.2.2 и 1.2.4, а второе из Предложения 1.2.4. □

Предложение 1.2.10. *Левое присоединенное действие в объемлющей алгебре* $\mathrm{End}_{\mathbb{F}}(\mathcal{A})$ *индуцирует морфизм ассоциативных алгебр*

$$\mathrm{ad} : \mathfrak{M}(\mathcal{A}) \to \mathrm{End}_{\mathbb{F}}(\mathfrak{D}(\mathcal{A})),$$

так что линейное пространство $\mathfrak{D}(\mathcal{A})$ *имеет структуру левого* $\mathfrak{M}(\mathcal{A})$*-модуля.*

Доказательство. Действительно, левое присоединенное действие задает линейное отображение $\mathrm{ad} : \mathfrak{M}(\mathcal{A}) \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(\mathfrak{D}(\mathcal{A}), \mathrm{End}_{\mathbb{F}}(\mathcal{A}))$, причем

$$\begin{aligned}(M \circ D)(a \cdot b) &= M(D(a \cdot b)) = M(D(a) \cdot b + a \cdot D(b)) \\ &= M(D(a)) \cdot b + a \cdot M(D(b)) = (M \circ D)(a) \cdot b + a \cdot (M \circ D)(b)\end{aligned}$$

для всех $M \in \mathfrak{M}(\mathcal{A})$, $D \in \mathfrak{D}(\mathcal{A})$ и $a, b \in \mathcal{A}$. Другими словами, образ $\mathrm{ad}(M) : \mathfrak{D}(\mathcal{A}) \to \mathfrak{D}(\mathcal{A})$ для любого $M \in \mathfrak{M}(\mathcal{A})$, т. е. определено линейное отображение $\mathrm{ad} : \mathfrak{M}(\mathcal{A}) \to \mathrm{End}_{\mathbb{F}}(\mathfrak{D}(\mathcal{A}))$. Это отображение есть морфизм алгебр, поскольку алгебра эндоморфизмов любого линейного пространства ассоциативна. □

Предложение 1.2.11. *Ассоциированное действие в объемлющей алгебре* $\mathrm{End}_{\mathbb{F}}(\mathcal{A})$ *индуцирует морфизм алгебр Ли*

$$\mathrm{as} : \mathfrak{D}(\mathcal{A}) \to \mathfrak{D}(\mathfrak{M}(\mathcal{A})).$$

В частности, $\mathfrak{M}(\mathcal{A})$ *обладает структурой модуля Ли над* $\mathfrak{D}(\mathcal{A})$.

Доказательство. Действительно, ассоциированное действие задает линейное отображение $\mathrm{as} : \mathfrak{D}(\mathcal{A}) \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(\mathfrak{M}(\mathcal{A}), \mathrm{End}_{\mathbb{F}}(\mathcal{A}))$, причем

$$\begin{aligned}[D, M](a \cdot b) &= D(M(a \cdot b)) - M(D(a \cdot b)) \\ &= D(M(a) \cdot b) - M(D(a) \cdot b + a \cdot D(b)) \\ &= (D \circ M)(a) \cdot b + M(a) \cdot D(b) - (M \circ D)(a) \cdot b - M(a) \cdot D(b) \\ &= [D, M](a) \cdot b, \\ [D, M](a \cdot b) &= D(M(a \cdot b)) - M(D(a \cdot b)) \\ &= D(a \cdot M(b)) - M(D(a) \cdot b + a \cdot D(b)) \\ &= D(a) \cdot M(b) + a \cdot (D \circ M)(b) - D(a) \cdot M(b) - a \cdot (M \circ D)(b) \\ &= a \cdot [D, M](b)\end{aligned}$$

для всех $M \in \mathfrak{M}(\mathcal{A})$, $D \in \mathfrak{D}(\mathcal{A})$ и $a, b \in \mathcal{A}$. Другими словами, образ $\mathrm{as}(D)\big(\mathfrak{M}(\mathcal{A})\big) \subset \mathfrak{M}(\mathcal{A})$ для любого $D \in \mathfrak{D}(\mathcal{A})$, т. е. определено линейное отображение $\mathrm{as} : \mathfrak{D}(\mathcal{A}) \to \mathrm{End}_{\mathbb{F}}(\mathfrak{M}(\mathcal{A}))$. Это отображение есть морфизм алгебр Ли $\mathrm{as} : \mathfrak{D}(\mathcal{A}) \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{M}(\mathcal{A}))$, поскольку в

силу тождества Якоби для коммутаторов

$$\begin{aligned}\mathrm{as}([X,Y])(M) - [\mathrm{as}(X),\mathrm{as}(Y)](M)&\\ = [[X,Y],M] - [X,[Y,M]] + [Y,[X,M]]&\\ = [[X,Y],M] + [[Y,M],X] + [[M,X],Y]&\\ = 0 \quad \text{для всех} \quad X,Y \in \mathfrak{D}(\mathcal{A}),\ M \in \mathfrak{M}(\mathcal{A}).&\end{aligned}$$

Завершая доказательство покажем, что $\operatorname{im}\mathrm{as} \subset \mathfrak{D}(\mathfrak{M}(\mathcal{A}))$. Действительно, пусть $D \in \mathfrak{D}(\mathcal{A})$, $M, N \in \mathfrak{M}(\mathcal{A})$, тогда

$$\begin{aligned}\mathrm{as}(D)(M \circ N) = [D, M \circ N] = [D,M] \circ N + M \circ [D,N]&\\ = \mathrm{as}(D)(M) \circ N + M \circ \mathrm{as}(D)(N).&\end{aligned}$$

□

Замечание. Если алгебра мультипликаторов $\mathfrak{M}(\mathcal{A})$ коммутативная, то справедливо *правило ассоциативности*

$$\mathrm{as}(M \circ D)(N) = M \circ \mathrm{as}(D)(N) \text{ для всех } M, N \in \mathfrak{M}(\mathcal{A}),\ D \in \mathfrak{D}(\mathcal{A}).$$

Действительно, в этом случае

$$[M \circ D, N] = M \circ [D,N] + [M,N] \circ D = M \circ [D,N].$$

Предложение 1.2.12. *Ассоциированное действие в объемлющей алгебре* $\mathrm{End}_{\mathbb{F}}(\mathcal{A})$ *индуцирует морфизм алгебр Ли*

$$\mathrm{as} : \mathfrak{D}(\mathcal{A}) \to \mathfrak{D}(\mathfrak{D}(\mathcal{A})).$$

Доказательство. Действительно, ассоциированное действие задает линейное отображение $\mathrm{as} : \mathfrak{D}(\mathcal{A}) \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(\mathfrak{D}(\mathcal{A}), \mathrm{End}_{\mathbb{F}}(\mathcal{A}))$, а в силу тождества Якоби, $\mathrm{as}([X,Y])(D) = [\mathrm{as}(X), \mathrm{as}(Y)](D)$ для всех $X, Y, D \in \mathfrak{D}(\mathcal{A})$. Для завершения доказательства осталось проверить, что образ $\mathrm{as}(D) \in \mathfrak{D}(\mathfrak{D}(\mathcal{A}))$ для любого $D \in \mathfrak{D}(\mathcal{A})$, т. е. что

$$\mathrm{as}(D)([X,Y]) = [\mathrm{as}(D)(X), Y] + [X, \mathrm{as}(D)(Y)], \quad D, X, Y \in \mathfrak{D}(\mathcal{A}),$$

а это так, в силу все того же тождества Якоби. □

Предложение 1.2.13. *Для любых* $D \in \mathfrak{D}(\mathcal{A})$ *и* $M \in \mathfrak{M}(\mathcal{A})$ *справедливо следующее равенство эндоморфизмов линейного пространства* $\mathfrak{D}(\mathcal{A})$

$$[\mathrm{as}(D), \mathrm{ad}(M)] = \mathrm{ad}(\mathrm{as}(D)(M))$$

Доказательство. Напомним сначала, что

$$\begin{aligned}
&\mathrm{as}(D) : \mathfrak{D}(\mathcal{A}) \to \mathfrak{D}(\mathcal{A}), \quad X \mapsto [D, X] \text{ для всех } X \in \mathfrak{D}(\mathcal{A}),\\
&\mathrm{as}(D) : \mathfrak{M}(\mathcal{A}) \to \mathfrak{M}(\mathcal{A}), \quad N \mapsto [D, N] \text{ для всех } N \in \mathfrak{M}(\mathcal{A}),\\
&\mathrm{ad}(M) : \mathfrak{D}(\mathcal{A}) \to \mathfrak{D}(\mathcal{A}), \quad X \mapsto M \circ X \text{ для всех } X \in \mathfrak{D}(\mathcal{A}).
\end{aligned}$$

Далее, доказываемое равенство есть легко проверяемое коммутаторное равенство,

$$[D, M \circ X] = M \circ [D, X] + [D, M] \circ X \text{ для всех } D, M, X \in \mathrm{End}_{\mathbb{F}}(\mathcal{A}),$$

переписанное в других обозначениях. Действительно, в нашем случае

$$\begin{aligned}
[D, M \circ X] &= \mathrm{as}(D)(M \circ X) = \mathrm{as}(D)(\mathrm{ad}(M)(X))\\
&= (\mathrm{as}(D) \circ \mathrm{ad}(M))(X),\\
M \circ [D, X] &= \mathrm{ad}(M)([D, X]) = \mathrm{ad}(M)(\mathrm{as}(D)(X))\\
&= (\mathrm{ad}(M) \circ \mathrm{as}(D))(X),\\
[D, M] \circ X &= \mathrm{ad}([D, M])(X) = \mathrm{ad}(\mathrm{as}(D)(M))(X),
\end{aligned}$$

так что

$$(\mathrm{as}(D) \circ \mathrm{ad}(M))(X) - (\mathrm{ad}(M) \circ \mathrm{as}(D))(X) = \mathrm{ad}(\mathrm{as}(D)(M))(X)$$

для всех $X \in \mathfrak{D}(\mathcal{A})$, а это и требовалось доказать. □

1.3 Формальный комплекс де Рама

1.3.1 Составляющие

Пусть $\mathbb{F}$ – числовое поле, над которым заданы:

- ⋆ $\mathfrak{M}$ – унитальная ассоциативная коммутативная алгебра,
- ⋆ $\mathfrak{D}$ – алгебра Ли,
- ⋆ $\mathfrak{K}$ – линейное пространство,

причем определены следующие взаимные действия:

(M-D) морфизм ассоциативных алгебр
$\mu : \mathfrak{M} \to \mathrm{End}_{\mathbb{F}}(\mathfrak{D})$,
$M \mapsto \mu(M) : \mathfrak{D} \to \mathfrak{D}, \quad D \mapsto \mu(M)(D) = M \cdot D$
(т. е. $\mathfrak{D}$ – $\mathfrak{M}$-модуль);

(D-M) морфизм алгебр Ли
$\varkappa : \mathfrak{D} \to \mathfrak{D}(\mathfrak{M})$,
$D \mapsto \varkappa(D) : \mathfrak{M} \to \mathfrak{M}, \quad M \mapsto \varkappa(D)(M) = D(M)$
(в частности, $\mathfrak{M}$ – модуль Ли над $\mathfrak{D}$), причем справедливы
правило ассоциативности $(M \cdot D)(N) = M \cdot D(N)$
и коммутаторная формула
$[D, M \cdot X] = M \cdot [D, X] + D(M) \cdot X$;

(M-K) морфизм ассоциативных алгебр
$\mu_{\mathfrak{K}} : \mathfrak{M} \to \mathrm{End}_{\mathbb{F}}(\mathfrak{K})$,
$M \mapsto \mu_{\mathfrak{K}}(M) : \mathfrak{K} \to \mathfrak{K}, \quad k \mapsto \mu_{\mathfrak{K}}(M)(k) = M \cdot k$
(т. е. $\mathfrak{K}$ – $\mathfrak{M}$-модуль);

(D-K) морфизм алгебр Ли
$\varkappa_{\mathfrak{K}} : \mathfrak{D} \to \mathfrak{D}(\mathfrak{K})$,
$D \mapsto \varkappa_{\mathfrak{K}}(D) : \mathfrak{K} \to \mathfrak{K}, \quad k \mapsto \varkappa_{\mathfrak{K}}(D)(k) = D(k)$,
(т. е. $\mathfrak{K}$ – модуль Ли над $\mathfrak{D}$), где правило Лейбница имеет
вид $D(M \cdot k) = D(M) \cdot k + M \cdot D(k)$,
причем выполняется правило ассоциативности
$(M \cdot D)(k) = M \cdot D(k)$;

где всюду $M, N \in \mathfrak{M}$, $D, X \in \mathfrak{D}$, $k \in \mathfrak{K}$.

Заметим, что при заданных объектах $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{D}$, удовлетворяющих условиям (M-D) и (D-M), можно положить $\mathfrak{K} = \mathfrak{M}$.

1.3.2 Внешняя алгебра $\wedge\mathfrak{D}$

Пусть $\wedge\mathfrak{D} = \oplus_{q \in \mathbb{Z}_+} \wedge^q \mathfrak{D}$ – внешняя алгебра $\mathfrak{M}$-модуля $\mathfrak{D}$, где

$$\wedge^q\mathfrak{D} = \begin{cases} \mathfrak{M}, & q = 0, \\ \underbrace{\mathfrak{D} \wedge \ldots \wedge \mathfrak{D}}_{q \text{ сомножителей}}, & q \in \mathbb{N} \end{cases}$$

(тензорное произведение берется в категории $\mathfrak{M}$-модулей, ради краткости, здесь и ниже пишем $\wedge$ вместо $\wedge_{\mathfrak{M}}$).

Определено действие (морфизм $\mathfrak{M}$-модулей)

$$\lambda : \mathfrak{D} \to \mathrm{End}_{\mathfrak{M}}(\wedge\mathfrak{D}), \quad D \mapsto \lambda_D : \wedge^q\mathfrak{D} \to \wedge^{q+1}\mathfrak{D}, \quad q \in \mathbb{Z}_+$$
$$X_1 \wedge \ldots \wedge X_q \mapsto D \wedge X_1 \wedge \ldots \wedge X_q,$$

в частности, $\lambda_D(M) = M \cdot D$ для всех $D \in \mathfrak{D}$ и $M \in \wedge^0\mathfrak{D} = \mathfrak{M}$.

Легко проверяется

Предложение 1.3.1. *Имеют место равенства*

$$\lambda_X \circ \lambda_Y + \lambda_Y \circ \lambda_X = 0 \quad \textit{для всех} \quad X, Y \in \mathfrak{D}.$$

В частности, $\lambda_D \circ \lambda_D = 0$, так что определены комплексы $\{\wedge\mathfrak{D}, \lambda_D\} = \{\wedge^q\mathfrak{D}, \lambda_D^q \mid q \in \mathbb{Z}_+\}$, где $\lambda_D^q = \lambda_D\big|_{\wedge^q\mathfrak{D}}$, для всех $D \in \mathfrak{D}$.

Положим $\Theta^1 = \mathrm{Hom}_{\mathfrak{M}}(\mathfrak{D}, \mathfrak{M}) = \mathfrak{D}^*$. Определено действие (морфизм $\mathfrak{M}$-модулей)

$$\begin{aligned}
&\iota : \Theta^1 \to \mathrm{End}_{\mathfrak{M}}(\wedge\mathfrak{D}),\\
&\qquad \theta \mapsto \iota_\theta : \wedge^q\mathfrak{D} \to \wedge^{q-1}\mathfrak{D}, \quad q \in \mathbb{Z}_+,\\
&X_1 \wedge \ldots \wedge X_q \mapsto \sum_{1\le i\le q} (-1)^{i-1} X_1 \ldots \theta(X_i) \ldots X_q\\
&\qquad = \sum_{1\le i\le q} (-1)^{i-1} \theta(X_i) \cdot X_1 \wedge \ldots \check{X}_i \ldots \wedge X_q.
\end{aligned}$$

В частности, $\iota_\theta(M) = 0$ для всех $\theta \in \Theta^1$ и $M \in \mathfrak{M} = \wedge^0\mathfrak{D}$.

Замечание. Здесь и всюду ниже значок $\check{}$ означает, что соответствующий аргумент пропущен.

Легко проверяется

Предложение 1.3.2. *Справедливы равенства*

- $\iota_\theta(V \wedge W) = \iota_\theta(V) \wedge W + (-1)^p V \wedge \iota_\theta(W)$ *для всех* $\theta \in \Theta^1$, $V \in \wedge^p\mathfrak{D}$, $W \in \wedge^q\mathfrak{D}$, $p, q \in \mathbb{Z}_+$;

- $\iota_\theta \circ \iota_\chi + \iota_\chi \circ \iota_\theta = 0$ *для всех* $\theta, \chi \in \Theta^1$.

В частности, для каждого $\theta \in \Theta^1$

- ι_θ – *косое дифференцирование внешней алгебры* $\wedge\mathfrak{D}$,

- $\iota_\theta \circ \iota_\theta = 0$, *так что определен комплекс* $\{\wedge\mathfrak{D}, \iota_\theta\} = \{\wedge^q\mathfrak{D}, \iota_\theta^q \mid q \in \mathbb{Z}_+\}$, *где* $\iota_\theta^q = \iota_\theta\big|_{\wedge^q\mathfrak{D}}$.

Предложение 1.3.3. *Для любых* $D \in \mathfrak{D}$ *и* $\theta \in \Theta^1$ *справедливо равенство*

$$\lambda_D \circ \iota_\theta + \iota_\theta \circ \lambda_D = \theta(D) \cdot \mathrm{id}_{\wedge\mathfrak{D}}\,.$$

Доказательство. Действительно,

$$\begin{aligned}(\iota_\theta \circ \lambda_D)(X_1 \wedge \ldots \wedge X_q) &= \iota_\theta(D \wedge X_1 \wedge \ldots \wedge X_q)\\ &= \iota_\theta(D) \wedge (X_1 \wedge \ldots \wedge X_q) - D \wedge \iota_\theta(X_1 \wedge \ldots \iota_\theta)\\ &= \theta(D) \cdot X_1 \wedge \ldots \wedge X_q - (\lambda_D \circ \iota_\theta)(X_1 \wedge \ldots \wedge X_q)\end{aligned}$$

для всех $X_1, \ldots, X_q \in \mathfrak{D}$. □

Следствие 1.3.1. *Пусть* $D \in \mathfrak{D}$, $\theta \in \Theta^1$, *причем* $\theta(D) = 1 \in \mathfrak{M}$, *тогда комплексы* $\{\wedge\mathfrak{D}, \lambda_D\}$ *и* $\{\wedge\mathfrak{D}, \iota_\theta\}$ *ациклические, т. е. все их* $\mathfrak{M}$*-модули когомологий тривиальные.*

Определено еще действие (морфизм $\mathfrak{M}$-модулей)

$$\begin{aligned}\Lambda : \mathfrak{D} \to \mathrm{End}_{\mathfrak{M}}(\wedge\mathfrak{D}), \quad D \mapsto \Lambda_D : \wedge^q\mathfrak{D} \to \wedge^{q+1}\mathfrak{D}, \quad q \in \mathbb{Z}_+\\ X_1 \wedge \ldots \wedge X_q \mapsto q \cdot D \wedge X_1 \wedge \ldots \wedge X_q\\ = \sum_{1 \le i \le q} (-1)^{i-1} X_1 \wedge \ldots D \wedge X_i \ldots \wedge X_q.\end{aligned}$$

Очевидно, $\Lambda\big|_{\wedge^q\mathfrak{D}} = q \cdot \lambda\big|_{\wedge^q\mathfrak{D}}$ для всех $q \in \mathbb{Z}_+$.

Легко проверяется

Предложение 1.3.4. *Справедливы равенства*

- $\Lambda_D(V \wedge W) = \Lambda_D(V) \wedge W + (-1)^p V \wedge \Lambda_D(W)$ *для всех* $D \in \mathfrak{D}$, $V \in \wedge^p\mathfrak{D}$, $W \in \wedge^q\mathfrak{D}$, $p, q \in \mathbb{Z}_+$;
- $\Lambda_X \circ \Lambda_Y + \Lambda_Y \circ \Lambda_X = 0$ *для всех* $X, Y \in \mathfrak{D}$.

В частности, для всех $D \in \mathfrak{D}$

- Λ_D – *косое дифференцирование внешней алгебры* $\wedge\mathfrak{D}$.

Перейдем теперь к другому классу действий.

Присоединенное действие $\mathrm{ad} : \mathfrak{D} \to \mathfrak{D}(\mathfrak{D})$,

$$D \mapsto \mathrm{ad}(D) : \mathfrak{D} \to \mathfrak{D}, \quad X \mapsto D(X) = [D, X] \text{ для всех } D, X \in \mathfrak{D},$$

индуцирует действие (морфизм $\mathbb{F}$-линейных пространств)

$$\begin{aligned}L : \mathfrak{D} \to \mathrm{End}_{\mathbb{F}}(\wedge\mathfrak{D}), \quad D \mapsto L_D : \wedge^q\mathfrak{D} \to \wedge^q\mathfrak{D}, \quad q \in \mathbb{Z}_+,\\ X_1 \wedge \ldots \wedge X_q \mapsto \sum_{1 \le i \le q} X_1 \wedge \ldots D(X_i) \ldots \wedge X_q.\end{aligned}$$

В частности,

- $\star$ $L_D(M) = D(M) = [D, M]$ для $M \in \wedge^0\mathfrak{D} = \mathfrak{M}$,
- $\star$ $L_D(X) = D(X) = [D, X]$ для $X \in \wedge^1\mathfrak{D} = \mathfrak{D}$.

Легко проверяется следующее

Предложение 1.3.5. *Для каждого $D \in \mathfrak{D}$ отображение L_D есть дифференцирование алгебры $\wedge\mathfrak{D}$, т. е.*

$$L_D(V \wedge W) = L_D(V) \wedge W + V \wedge L_D(W) \quad \textit{для всех} \quad V, W \in \wedge\mathfrak{D}.$$

Предложение 1.3.6. *Действие $L : \mathfrak{D} \to \mathfrak{D}(\wedge\mathfrak{D})$ есть морфизм алгебр Ли, т. е.*

$$[L_X, L_Y] = L_{[X,Y]} \quad \textit{для всех} \quad X, Y \in \mathfrak{D}.$$

Доказательство. Действительно, для всех $X_1, \ldots, X_q \in \mathfrak{D}$ имеем

$$\begin{aligned}
L_X(L_Y(X_1 \wedge \ldots \wedge X_q)) &= \sum_{1\le j\le q} L_X(X_1 \wedge \ldots [Y, X_j] \ldots \wedge X_q) \\
&= \sum_{1\le i<j\le q} X_1 \wedge \ldots [X, X_i] \ldots [Y, X_j] \ldots \wedge X_q \\
&+ \sum_{1\le i\le q} X_1 \wedge \ldots [X, [Y, X_i]] \ldots \wedge X_q \\
&+ \sum_{1\le j<i\le q} X_1 \wedge \ldots [Y, X_j] \ldots [X, X_i] \ldots \wedge X_q \\
&= \sum_{1\le i\le q} X_1 \wedge \ldots [X, [Y, X_i]] \ldots \wedge X_q \\
&+ \sum_{1\le i<j\le q} (X_1 \wedge \ldots [X, X_i] \ldots [Y, X_j] \ldots \wedge X_q \\
&+ X_1 \wedge \ldots [Y, X_i] \ldots [X, X_j] \ldots \wedge X_q).
\end{aligned}$$

В свою очередь,

$$\begin{aligned}
L_Y(L_X(X_1 \wedge \ldots \wedge X_q)) &= \sum_{1\le i\le q} X_1 \wedge \ldots [Y, [X, X_i]] \ldots \wedge X_q \\
&+ \sum_{1\le i<j\le q} (X_1 \wedge \ldots [Y, X_i] \ldots [X, X_j] \ldots \wedge X_q \\
&+ X_1 \wedge \ldots [X, X_i] \ldots [Y, X_j] \ldots \wedge X_q).
\end{aligned}$$

Вычитая из первого равенства второе, получим требуемое равенство, поскольку в силу тождества Якоби

$$[X,[Y,X_i]]-[Y,[X,X_i]]=[[X,Y],X_i].$$

□

Предложение 1.3.7. *Для любых $X,Y\in\mathfrak{D}$ справедливо равенство*

$$[L_X,\lambda_Y]=\lambda_{[X,Y]}.$$

Доказательство. Действительно, пусть $X,Y,X_1,\ldots,X_q\in\mathfrak{D}$, тогда

$$\begin{aligned}L_X(\lambda_Y(X_1\wedge\ldots\wedge X_q))&=L_X(Y\wedge X_1\wedge\ldots\wedge X_q)\\&=[X,Y]\wedge X_1\ldots\wedge X_q+\sum_{1\le i\le q}Y\wedge X_1\wedge\ldots[X,X_i]\ldots\wedge X_q\\&=\lambda_{[X,Y]}(X_1\wedge\ldots\wedge X_q)+\lambda_Y(L_X(X_1\wedge\ldots\wedge X_q)).\end{aligned}$$

□

Рассмотрим частный случай, когда алгебра Ли $\mathfrak{D}$ действует на алгебре $\mathfrak{M}$ (см. условие (D-M)) тривиально, т. е. $D(M)=0$ для всех $D\in\mathfrak{D}$ и $M\in\mathfrak{M}$. В этой ситуации $[D,M\cdot X]=M\cdot[D,X]$ для всех $D,X\in\mathfrak{D}$ и $M\in\mathfrak{M}$, так что определен граничный оператор $\partial\in\mathrm{End}_{\mathfrak{M}}(\wedge\mathfrak{D})$,

$$\begin{aligned}\partial:\wedge^q\mathfrak{D}\to\wedge^{q-1}\mathfrak{D},\quad X_1\wedge\ldots\wedge X_q&\mapsto\partial(X_1\wedge\ldots\wedge X_q)\\&=\sum_{1\le i<j\le q}(-1)^{i+j-1}[X_i,X_j]\wedge X_1\wedge\ldots\check{X}_i\ldots\check{X}_j\ldots\wedge X_q.\end{aligned}$$

В частности,

- $\star$ $\partial(M)=0$ для всех $M\in\wedge^0\mathfrak{D}=\mathfrak{M}$,
- $\star$ $\partial(X)=0$ для всех $X\in\wedge^1\mathfrak{D}=\mathfrak{D}$,
- $\star$ $\partial(X_1\wedge X_2)=[X_1,X_2]$ для всех $X_1\wedge X_2\in\wedge^2\mathfrak{D}$.

Предложение 1.3.8. *Для каждого $D\in\mathfrak{D}$ имеет место равенство*

$$\partial\circ\lambda_D+\lambda_D\circ\partial=L_D.$$

Доказательство. Действительно,

$$\begin{aligned}
&(\partial\circ\lambda_D)(X_1\wedge\ldots\wedge X_q)=\partial(D\wedge X_1\wedge\ldots\wedge X_q)\\
&\quad=\sum_{1\le j\le q}(-1)^{j-1}[D,X_j]\wedge\ldots\check{X}_j\ldots\wedge X_q\\
&\quad+\sum_{1\le i<j\le q}(-1)^{i+j-1}[X_i,X_j]\wedge D\wedge X_1\wedge\ldots\check{X}_i\ldots\check{X}_j\ldots\wedge X_q\\
&\quad=\sum_{1\le i\le q}X_1\wedge\ldots[D,X_i]\ldots\wedge X_q\\
&\quad-D\wedge\Bigg(\sum_{1\le i<j\le q}(-1)^{i+j-1}[X_i,X_j]\wedge X_1\wedge\ldots\check{X}_i\ldots\check{X}_j\ldots\wedge X_q\Bigg)\\
&\quad=L_D(X_1\wedge\ldots\wedge X_q)-(\lambda_D\circ\partial)(X_1\wedge\ldots\wedge X_q).
\end{aligned}$$

□

Лемма 1.3.1. *Для данного $D\in\mathfrak{D}$ положим $F_D=\partial\circ L_D-L_D\circ\partial$, тогда*

$$F_D\circ\lambda_X+\lambda_X\circ F_D=0\quad\textit{для всех}\quad X\in\mathfrak{D}.$$

Доказательство. Действительно,

$$\begin{aligned}
F_D\circ\lambda_X&=(\partial\circ L_D-L_D\circ\partial)\circ\lambda_X=\partial\circ(L_D\circ\lambda_X)-L_D\circ(\partial\circ\lambda_X)\\
&=\partial\circ(\lambda_{[D,X]}+\lambda_X\circ L_D)-L_D\circ(L_X-\lambda_X\circ\partial)\\
&=\partial\circ\lambda_{[D,X]}+(\partial\circ\lambda_X)\circ L_D-L_D\circ L_X+(L_D\circ\lambda_X)\circ\partial\\
&=(L_{[D,X]}-\lambda_{[D,X]}\circ\partial)+(L_X-\lambda_X\circ\partial)\circ L_D-L_D\circ L_X\\
&+(\lambda_{[D,X]}+\lambda_X L_D)\circ\partial\\
&=(L_{[D,X]}+L_X\circ L_D-L_D\circ L_X)+(-\lambda_{[D,X]}\circ\partial+\lambda_{[D,X]}\circ\partial)\\
&-\lambda_X\circ(\partial\circ L_D-L_D\circ\partial)=-\lambda_X\circ F_D,
\end{aligned}$$

где мы неоднократно воспользовались Предложениями 1.3.7, 1.3.8 и 1.3.6. □

Предложение 1.3.9. *Для каждого $D\in\mathfrak{D}$ имеет место равенство*

$$\partial\circ L_D-L_D\circ\partial=0.$$

Доказательство. Достаточно доказать, что $F_D=0$. Воспользуемся индукцией по степени $q\in\mathbb{Z}_+$. Элементарно проверяется,

что $F_D(M) = 0$ для любого $M \in \mathfrak{M} = \wedge^0\mathfrak{D}$. Предположим, что $F_D\big|_{\wedge^q\mathfrak{D}} = 0$, тогда, в силу предыдущей леммы,

$$\begin{aligned} F_D(X_0 \wedge X_1 \wedge \ldots \wedge X_q) &= F_D\big(\lambda_{X_0}(X_1 \wedge \ldots \wedge X_q)\big) \\ &= -\lambda_{X_0}\big(F_D(X_1 \wedge \ldots \wedge X_q)\big) = 0. \end{aligned}$$

□

Лемма 1.3.2. *Положим* $F = \partial \circ \partial$, *тогда*

$$F \circ \lambda_X - \lambda_X \circ F = 0 \quad \textit{для всех} \quad X \in \mathfrak{D}.$$

Доказательство. Действительно,

$$\begin{aligned} F \circ \lambda_X &= (\partial \circ \partial) \circ \lambda_X = \partial \circ (\partial \circ \lambda_X) = \partial \circ (L_X - \lambda_X \circ \partial) \\ &= \partial \circ L_X - (\partial \circ \lambda_X) \circ \partial = \partial \circ L_X - (L_X - \lambda_X \circ \partial) \circ \partial \\ &= (\partial \circ L_X - L_X \circ \partial) + \lambda_X \circ (\partial \circ \partial) = \lambda_X \circ F, \end{aligned}$$

где мы воспользовались Предложениями 1.3.8 и 1.3.9. □

Предложение 1.3.10. *Справедливо равенство*

$$\partial \circ \partial = 0.$$

Доказательство. Следует доказать, что $F = 0$. Опять используем индукцию по $q \in \mathbb{Z}_+$. Очевидно, $F\big|_{\wedge^0\mathfrak{D}} = 0$, предположим, что $F\big|_{\wedge^q\mathfrak{D}} = 0$, тогда в силу предыдущей леммы,

$$\begin{aligned} F(X_0 \wedge \ldots \wedge X_q) &= F\big(\lambda_{X_0}(X_1 \wedge \ldots \wedge X_q)\big) \\ &= \lambda_{X_0}\big(F(X_1 \wedge \ldots \wedge X_q)\big) = 0. \end{aligned}$$

□

В частности, в случае тривиального действия алгебры Ли $\mathfrak{D}$ на $\mathfrak{M}$, определен комплекс $\{\wedge\mathfrak{D}, \partial\} = \{\wedge^q\mathfrak{D}, \partial^q \mid q \in \mathbb{Z}_+\}$, где дифференциалы $\partial^q = \partial\big|_{\wedge^q\mathfrak{D}}$.

1.3.3 Комплекс $\{\Omega, d\}$

Определен $\mathfrak{M}$-модуль

$$\Omega = \Omega(\mathfrak{M}, \mathfrak{D}, \mathfrak{K}) = \mathrm{Hom}_{\mathfrak{M}}(\wedge\mathfrak{D}, \mathfrak{K}) = \oplus_{q\in\mathbb{Z}_+}\Omega^q,$$

где

$$\Omega^q = \Omega^q(\mathfrak{M}, \mathfrak{D}, \mathfrak{K}) = \mathrm{Hom}_{\mathfrak{M}}(\wedge^q \mathfrak{D}, \mathfrak{K}), \quad q \in \mathbb{Z}_+,$$

так что, $\Omega^0 = \mathfrak{K}$ (проверить).

В частности, положим

$$\Theta = \Omega(\mathfrak{M}, \mathfrak{D}, \mathfrak{M}) = \oplus_{q \in \mathbb{Z}_+} \Theta^q, \quad \Theta^q = \Omega^q(\mathfrak{M}, \mathfrak{D}, \mathfrak{M}).$$

По построению $\mathfrak{M}$-модуль Θ обладает структурой внешней алгебры с поточечным умножением, задаваемым стандартной формулой

$$(\omega \wedge \chi)(X_1 \wedge \ldots \wedge X_{p+q}) = \frac{1}{(p+q)!} \sum_{\sigma \in \Sigma_{p+q}} \mathrm{sign}\, \sigma \cdot$$
$$\cdot \omega(X_{\sigma(1)} \wedge \ldots \wedge X_{\sigma(p)}) \cdot \chi(X_{\sigma(p+1)} \wedge \ldots \wedge X_{\sigma(p+q)})$$

для всех $\omega \in \Theta^p$, $\chi \in \Theta^q$, $p, q \in \mathbb{Z}_+$.

В свою очередь, $\mathfrak{M}$-модуль Ω обладает структурой внешнего Θ-модуля (здесь $\mathfrak{M} = \Theta^0$ – подалгебра алгебры Θ), где для всех $\omega \in \Theta^p$, $\chi \in \Omega^q$, $p, q \in \mathbb{Z}_+$, произведение $\omega \wedge \chi$ вычисляется по той же самой стандартной формуле.

Определено действие (морфизм $\mathfrak{M}$-модулей),

$$\iota : \mathfrak{D} \to \mathrm{End}_{\mathfrak{M}}(\Omega), \quad D \mapsto \iota_D : \Omega^q \to \Omega^{q-1}, \quad \omega \mapsto \iota_D(\omega) = \omega \circ \Lambda_D,$$

т. е.

$$\iota_D(\omega)(X_1 \wedge \ldots \wedge X_{q-1}) = q \cdot \omega(D \wedge X_1 \wedge \ldots \wedge X_{q-1})$$

для всех $X_1, \ldots, X_{q-1} \in \mathfrak{D}$, $q \in \mathbb{Z}_+$. В частности, для каждого $D \in \mathfrak{D}$ имеем

- $\star$ $\iota_D(k) = 0$ для всех $k \in \Omega^0 = \mathfrak{K}$,
- $\star$ $\iota_D(\omega) = \omega(D)$ для всех $\omega \in \Omega^1$.

По построению справедливо

Предложение 1.3.11. *Для любого $D \in \mathfrak{D}$ эндоморфизм ι_D – косое дифференцирование внешней алгебры Θ и внешнего Θ-модуля Ω, т. е.*

$$\iota_D(\omega \wedge \chi) = \iota_D(\omega) \wedge \chi + (-1)^p \omega \wedge \iota_D(\chi)$$

для всех $\omega \in \Theta^p$ и $\chi \in \Theta^q$ или $\chi \in \Omega^q$, $p, q \in \mathbb{Z}_+$.

Также справедливо

Предложение 1.3.12. *Имеют место равенства*

$$\iota_X \circ \iota_Y + \iota_Y \circ \iota_X = 0 \quad \textit{для всех} \quad X, Y \in \mathfrak{D}.$$

Определено действие (морфизм $\mathbb{F}$-линейных пространств),

$$L : \mathfrak{D} \to \mathrm{End}_{\mathbb{F}}(\Omega), \quad D \mapsto L_D : \Omega^q \to \Omega^q, \quad q \in \mathbb{Z}_+,$$
$$\omega \mapsto L_D(\omega) = \varkappa_{\mathfrak{K}}(D) \circ \omega - \omega \circ L_D,$$

так что

$$L_D(\omega)(X_1 \wedge \ldots \wedge X_q)$$
$$= D(\omega(X_1 \wedge \ldots \wedge X_q)) - \sum_{1 \le i \le q} \omega(X_1 \wedge \ldots [D, X_i] \ldots \wedge X_q)$$

для всех $X_0, \ldots, X_q \in \mathfrak{D}$, $q \in \mathbb{Z}_+$.

По построению справедливо

Предложение 1.3.13. *Для каждого $D \in \mathfrak{D}$ эндоморфизм L_D есть дифференцирование внешней алгебры Θ и внешнего Θ-модуля Ω, т. е.*

$$L_D(\omega \wedge \chi) = L_D(\omega) \wedge \chi + \omega \wedge L_D(\chi)$$

для всех $\omega \in \Theta^p$ и $\chi \in \Theta^q$ или $\chi \in \Omega^q$, $p, q \in \mathbb{Z}_+$.

Предложение 1.3.14. *Действие $L : \mathfrak{D} \to \mathfrak{gl}(\Omega)$ есть морфизм алгебр Ли, т. е.*

$$[L_X, L_Y] = L_{[X,Y]} \quad \textit{для всех} \quad X, Y \in \mathfrak{D}.$$

Доказательство. Действительно, пусть $X, Y \in \mathfrak{D}$, $\omega \in \Omega^q$, где $q \in \mathbb{Z}_+$. Тогда

$$\begin{aligned} L_X(L_Y(\omega)) &= L_X(\varkappa_{\mathfrak{K}}(Y) \circ \omega - \omega \circ L_Y) \\ &= \varkappa_{\mathfrak{K}}(X) \circ \varkappa_{\mathfrak{K}}(Y) \circ \omega - \varkappa_{\mathfrak{K}}(Y) \circ \omega \circ L_X \\ &- \varkappa_{\mathfrak{K}}(X) \circ \omega \circ L_Y + \omega \circ L_Y \circ L_X, \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} L_Y(L_X(\omega)) &= L_Y(\varkappa_{\mathfrak{K}}(X) \circ \omega - \omega \circ L_X) \\ &= \varkappa_{\mathfrak{K}}(Y) \circ \varkappa_{\mathfrak{K}}(X) \circ \omega - \varkappa_{\mathfrak{K}}(X) \circ \omega \circ L_Y \\ &- \varkappa_{\mathfrak{K}}(Y) \circ \omega \circ L_X + \omega \circ L_X \circ L_Y. \end{aligned}$$

Вычитая из первого равенства второе и учитывая Предложение (1.3.6), получим требуемое равенство. □

Предложение 1.3.15. *Для любых* $X, Y \in \mathfrak{D}$ *справедливо равенство*

$$[L_X, \iota_Y] = \iota_{[X,Y]}.$$

Доказательство. Пусть $X, Y \in \mathfrak{D}$, $\omega \in \Omega^q$, $q \in \mathbb{Z}_+$, тогда

$$\begin{aligned} L_X(\iota_Y(\omega)) &= q \cdot L_X(\omega \circ \lambda_Y) \\ &= q \cdot \big(\varkappa_{\mathfrak{K}}(X) \circ \omega \circ \lambda_Y - \omega \circ \lambda_Y \circ L_X\big), \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} \iota_Y(L_X(\omega)) &= \iota_Y(\varkappa_{\mathfrak{K}}(X) \circ \omega - \omega \circ L_X) \\ &= q \cdot \big(\varkappa_{\mathfrak{K}}(X) \circ \omega \circ \lambda_Y - \omega \circ L_X \circ \lambda_Y\big). \end{aligned}$$

Вычитая из первого равенства второе, и учитывая Предложение (1.3.7), получим требуемое равенство. □

Предложение 1.3.16. *Существует единственный эндоморфизм* $d \in \mathrm{End}_{\mathbb{F}}(\Omega)$, *где* $d : \Omega^q \to \Omega^{q+1}$, $q \in \mathbb{Z}_+$, *такой что*

$$d \circ \iota_D + \iota_D \circ d = L_D \quad \textit{для всех} \quad D \in \mathfrak{D}.$$

Именно,

$$\begin{aligned} &d\omega(X_0 \wedge \ldots \wedge X_q) \\ &= \frac{1}{q+1}\Big\{ \sum_{0 \le i \le q} (-1)^i X_i\big(\omega(X_0 \wedge \ldots \check{X}_i \ldots \wedge X_q)\big) \\ &+ \sum_{0 \le i < j \le q} (-1)^{i+j} \omega([X_i, X_j] \wedge X_0 \wedge \ldots \check{X}_i \ldots \check{X}_j \ldots \wedge X_q)\Big\} \end{aligned}$$

для всех $q \in \mathbb{Z}_+$, $\omega \in \Omega^q$, $X_0, \ldots, X_q \in \mathfrak{D}$.

Доказательство. Воспользуемся индукцией по $q \in \mathbb{Z}_+$. Для $q = 0$ имеем для всех $\omega \in \Omega^0 = \mathfrak{K}$, $X \in \mathfrak{D}$,

$$\begin{aligned} &\iota_X(\omega) = 0,\ d(\iota_X(\omega)) = 0,\ \iota_X(d\omega) = d\omega(X), \\ &L_X(\omega) = X(\omega), \quad \text{так что} \quad d\omega(X) = X(\omega), \end{aligned}$$

как и требуется. Пусть утверждение верно для $q-1$, тогда для всех $\omega \in \Omega^q$, $X_0, \ldots, X_q \in \mathfrak{D}$, имеем

$$\begin{aligned} & d(\iota_{X_0}\omega)(X_1 \wedge \ldots \wedge X_q) \\ & = \sum_{1 \le i < j \le q} (-1)^{i+j} \omega(X_0 \wedge [X_i, X_j] \wedge X_1 \wedge \ldots \check{X}_i \ldots \check{X}_j \ldots \wedge X_q) \\ & + \sum_{1 \le i \le q} (-1)^{i-1} X_i(\omega(X_0 \wedge X_1 \wedge \ldots \check{X}_i \ldots \wedge X_q)), \end{aligned}$$

далее

$$\iota_{X_0}(d\omega)(X_1 \wedge \ldots \wedge X_q) = d\omega(X_0 \wedge X_1 \wedge \ldots \wedge X_q),$$

и наконец

$$\begin{aligned} L_{X_0}(\omega)(X_1 \wedge \ldots \wedge X_q) &= X_0(\omega(X_1 \wedge \ldots \wedge X_q)) \\ &+ \sum_{1 \le i \le q} (-1)^i \omega([X_0, X_i] \wedge X_1 \wedge \ldots \check{X}_i \ldots \wedge X_q). \end{aligned}$$

Подставляя полученные выражения в определяющую формулу для дифференциала, убеждаемся в справедливости доказываемого утверждения для q. □

Стандартным образом проверяется

Предложение 1.3.17. *Эндоморфизм d есть косое дифференцирование внешней алгебры Θ и внешнего Θ-модуля Ω, т. е.*

$$d(\omega \wedge \chi) = d(\omega) \wedge \chi + (-1)^p \omega \wedge d(\chi)$$

для всех $\omega \in \Theta^p$ и $\chi \in \Theta^q$ или $\chi \in \Omega^q$, $p, q \in \mathbb{Z}_+$.

Предложение 1.3.18. *Справедливо равенство*

$$d \circ L_D - L_D \circ d = 0 \quad \text{для всех} \quad D \in \mathfrak{D}.$$

Доказательство. Действительно, пусть $D, X \in \mathfrak{D}$. Положим

$$F_D = d \circ L_D - L_D \circ d : \Omega^q \to \Omega^{q+1}.$$

Тогда

$$\begin{aligned}
&F_D \circ \iota_X = (d \circ L_D - L_D \circ d) \circ \iota_X = d \circ (L_D \circ \iota_X) - L_D \circ (d \circ \iota_X) \\
&= d \circ (\iota_{[D,X]} + \iota_X \circ L_D) - L_D \circ (L_X - \iota_X \circ d) \\
&= d \circ \iota_{[D,X]} - L_D \circ L_X + (d \circ \iota_X) \circ L_D + (L_D \circ \iota_X) \circ d \\
&= d \circ \iota_{[D,X]} - L_D \circ L_X + (L_X - \iota_X \circ d) \circ L_D \\
&+ (\iota_{[D,X]} + \iota_X \circ L_D) \circ d \\
&= (d \circ \iota_{[D,X]} + \iota_{[D,X]} \circ d - L_D \circ L_X + L_X \circ L_D) \\
&- \iota_X \circ (d \circ L_D - L_D \circ d) \\
&= -\iota_X \circ (d \circ L_D - L_D \circ d) = -\iota_X \circ F_D,
\end{aligned}$$

где мы неоднократно использовали Предложения 1.3.16, 1.3.15 и 1.3.14. Итак,

$$F_D \circ \iota_X + \iota_X \circ F_D = 0 \quad \text{для всех} \quad D, X \in \mathfrak{D},$$

Опираясь на это равенство докажем требуемое равенство индукцией по $q \in \mathbb{Z}_+$. Пусть, сначала $q = 0$, $\omega \in \Omega^0 = \mathfrak{K}$, тогда

$$\begin{aligned}
&\iota_X(\omega) = 0, \quad F_D(\iota_X(\omega)) = 0, \quad \text{так что} \\
&\iota_X(F_D(\omega)) = F_D(\omega)(X) = 0 \quad \text{для всех} \quad X \in \mathfrak{D},
\end{aligned}$$

и требуемое равенство для $q = 0$ доказано. Предположим теперь, что равенство верно для некоторого q, и пусть $\omega \in \Omega^{q+1}$, тогда

$$\begin{aligned}
&\iota_{X_0}(\omega) \in \Omega^q, \quad F_D(\iota_{X_0}(\omega) = 0, \quad \text{так что} \\
&\iota_{X_0}(F_D(\omega))(X_1 \wedge \ldots \wedge X_q) = F_D(\omega)(X_0 \wedge \ldots \wedge X_q) = 0,
\end{aligned}$$

для всех $X_0, \ldots, X_q \in \mathfrak{D}$, что и требовалось. □

Предложение 1.3.19. *Справедливо равенство*

$$d \circ d = 0.$$

Доказательство. Положим $F = d \circ d : \Omega^q \to \Omega^{q+2}$, $q \in \mathbb{Z}_+$, и пусть $X \in \mathfrak{D}$, тогда

$$\begin{aligned}
F \circ \iota_X &= (d \circ d) \circ \iota_X = d \circ (d \circ \iota_X) = d \circ (L_X - \iota_X \circ d) \\
&= d \circ L_X - (d \circ \iota_X) \circ d = d \circ L_X - (L_X - \iota_X \circ d) \circ d \\
&= d \circ L_X - L_X \circ d + \iota_X \circ d \circ d = \iota_X \circ (d \circ d) = \iota_X \circ F,
\end{aligned}$$

в силу Предложений 1.3.16 и 1.3.18. Итак,

$$F \circ \iota_X = \iota_X \circ F \quad \text{для всех} \quad X \in \mathfrak{D}.$$

Как и выше, индукцией по $q \in \mathbb{Z}_+$ отсюда выводится требуемое равенство $d \circ d = 0$. □

Таким образом, определен комплекс $\{\Omega, d\} = \{\Omega^q, d^q \mid q \in \mathbb{Z}_+\}$, где $d^q = d|_{\Omega^q} : \Omega^q \to \Omega^{q+1}$. Здесь используется терминология:

- ⋆ элементы линейного пространства Ω^q называют *q-коцепями, q-формами*,
- ⋆ элементы ядра $\ker d^q = \{\omega \in \Omega^q | d(\omega) = 0\}$ называют *q-коциклами, замкнутыми q-формами*,
- ⋆ элементы образа $\operatorname{im} d^{q-1} = \{\omega = d(\phi) | \phi \in \Omega^{q-1}\}$ называют *q-когранцами, точными q-формами*,
- ⋆ элементы фактор-пространства $H^q(\Omega, d) = \ker d^q / \operatorname{im} d^{q-1}$ называют *q-когомологиями*,

причем всюду добавляют – *с коэффициентами в* $\mathfrak{K}$.

В приложениях часто встречается ситуация, когда $\mathfrak{K}$ обладает дополнительной структурой ассоциативной алгебры, причем к условия (M-K), (D-K) добавляются следующие правила согласования:

(M-K-a) $M \cdot (k \cdot l) = (M \cdot k) \cdot l \quad$ для всех $\quad M \in \mathfrak{M},\ k, l \in \mathfrak{K}$,

(D-K-a) $D(k \cdot l) = D(k) \cdot l + k \cdot D(l) \quad$ для всех $\quad D \in \mathfrak{D},\ k, l \in \mathfrak{K}$.

В этом случае $\mathfrak{M}$-модуль Ω обладает структурой внешней алгебры с поточечным умножением, задаваемым стандартной формулой

$$(\omega \wedge \chi)(X_1 \wedge \ldots \wedge X_{p+q}) = \frac{1}{(p+q)!} \sum_{\sigma \in \Sigma_{p+q}} \operatorname{sign} \sigma \cdot$$
$$\cdot \omega(X_{\sigma(1)} \wedge \ldots \wedge X_{\sigma(p)}) \cdot \chi(X_{\sigma(p+1)} \wedge \ldots \wedge X_{\sigma(p+q)})$$

для всех $\omega \in \Omega^p$, $\chi \in \Omega^q$, $p, q \in \mathbb{Z}_+$.

Предложение 1.3.20. *Если $\mathfrak{K}$ обладает структурой ассоциативной алгебры, то*

- ⋆ *для каждого* $D \in \mathfrak{D}$ *эндоморфизм* $\iota_D \in \mathrm{End}_{\mathbb{F}}(\Omega)$ *есть косое дифференцирование алгебры* Ω*, т. е.*

$$\iota_D(\omega \wedge \chi = \iota_D(\omega) \wedge \chi + (-1)^p \omega \wedge \iota_D(\chi),$$

- ⋆ *для каждого* $D \in \mathfrak{D}$ *эндоморфизм* $L_D \in \mathrm{End}_{\mathbb{F}}(\Omega)$ *есть дифференцирование алгебры* Ω*, т. е.*

$$L_D(\omega \wedge \chi) = L_D(\omega) \wedge \chi + \omega \wedge L_D(\chi),$$

- ⋆ *эндоморфизм* $d \in \mathrm{End}_{\mathbb{F}}(\Omega)$ *есть косое дифференцирование алгебры* Ω*, т. е.*

$$d(\omega \wedge \chi) = d(\omega) \wedge \chi + (-1)^p \wedge d(\chi),$$

где всюду $\omega \in \Omega^p$*,* $\chi \in \Omega^q$*,* $p, q \in \mathbb{Z}_+$*.*

Доказательство. Предлагается проделать самостоятельно, в качестве упражнения. □

1.3.4 Примеры

Пример 1.3.1. **Классическая дифференциальная геометрия.** Пусть M – гладкое многообразие конечной размерности $n = \dim M$ (см., например, [15], [19], [21]), $\mathcal{A} = \mathcal{C}^\infty(M)$ – унитальная ассоциативная коммутативная алгебра всех гладких функций на M, снабженная естественной топологией. Согласно Предложению 1.2.4, в этом случае алгебра мультипликаторов $\mathfrak{M}(\mathcal{A}) = \mathcal{A}$ (это и есть причина того, что понятие мультипликатора в классической дифференциальной геометрии отсутствует). В свою очередь дифференцирования алгебры $\mathcal{A}$ суть касательные векторные поля на многообразии M, так что $\mathfrak{D}(\mathcal{A}) = \mathcal{T}(M)$. Очевидно, тройка $\mathfrak{M} = \mathcal{A}$, $\mathfrak{D} = \mathcal{T}(M)$, $\mathfrak{K} = \mathcal{A}$ удовлетворяет условиям (M-D) – (D-K), так что определен комплекс $\{\Omega, d\}$ – классический комплекс де Рама дифференциальных форм на многообразии M. Пространства когомологий $H^q(\Omega, d)$ являются важнейшими топологическими характеристиками многообразия M. В более общей ситуации $\mathfrak{K}$ есть $\mathcal{A}$-модуль, такой что выполнено условие (D-K) (например, $\mathfrak{K}$ – векторное расслоение над M), в этом случае элементы из Ω называются *векторно-значными дифференциальными формами на* M.

Пример 1.3.2. **Формальная дифференциальная геометрия** Пусть $\mathcal{A}$ – унитальная ассоциативная алгебра, $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}(\mathcal{A})$ – унитальная ассоциативная алгебра ее мультипликаторов (в этом случае коммутативная!), $\mathfrak{D} = \mathfrak{D}(\mathcal{A})$ – алгебра Ли ее дифференцирований, $\mathfrak{K}$ – $\mathfrak{M}(\mathcal{A})$-модуль, для которого выполнено условие (D-K) (например, $\mathfrak{K} = \mathcal{A}$ или $\mathfrak{M}(\mathcal{A})$). В силу Предложений 1.2.10, 1.2.11 и 1.2.13, будут выполнены условия (M-D) – (D-M), так что определен комплекс $\{\Omega, d\}$.

Пример 1.3.3. **Когомологии алгебр Ли** Пусть $\mathfrak{g}$ – алгебра Ли и $\mathfrak{K}$ – модуль Ли над $\mathfrak{A}$ (другими словами, задано представление алгебры Ли $\mathfrak{g}$ в линейном пространстве $\mathfrak{K}$). Положим $\mathfrak{M} = \mathbb{F}$, $\mathfrak{D} = \mathfrak{g}$, $\mathfrak{K} = \mathfrak{K}$. Легко проверяется, что условия (M-D) – (D-K) выполнены с тривиальным действием $\mathfrak{g} \to \mathfrak{D}(\mathbb{F}) = 0$, так что определен комплекс $\{\mathcal{C}, d\}$, где $\mathcal{C} = \oplus_{q\in\mathbb{Z}_+}\mathcal{C}^q$, $\mathcal{C}^q = \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(\wedge^q\mathfrak{g}, \mathfrak{K})$. Когомологии комплекса $\{\mathcal{C}, d\}$ называются *когомологиями Шевалле-Эйленберга* алгебры Ли $\mathfrak{g}$.

1.4 Спектральная последовательность

Для лучшего понимания содержания этого раздела рекомендуется предварительно прочесть раздел 1.7 лекций [12]. Термин "модуль" ниже означает "$\mathfrak{M}$-модуль".

1.4.1 Картанова подалгебра

Пусть в дополнение к составляющим $\mathbb{F}$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{K}$, удовлетворяющим условиям (M-D) – (D-K) (см. пункт 1.3.1), выделено подмножество $\mathfrak{C} \subset \mathfrak{D}$, со следующими свойствами:

(C-D) множество $\mathfrak{C}$ – подалгебра алгебры Ли $\mathfrak{D}$ (*картанова подалгебра*),

(C-M) множество $\mathfrak{C}$ – свободный подмодуль конечной размерности $m \in \mathbb{N}$ ($\dim_{\mathfrak{M}} \mathfrak{C} = m$) модуля $\mathfrak{D}$.

1.4.2 Симметрии

Нормализатор подалгебры $\mathfrak{C}$ в алгебре Ли $\mathfrak{D}$ есть множество

$$\mathfrak{LB} = \big\{X \in \mathfrak{D} \mid [X, Y] \in \mathfrak{C} \quad \text{для всех} \quad Y \in \mathfrak{C}\big\}.$$

Предложение 1.4.1. *Нормализатор $\mathfrak{LB}$ есть подалгебра алгебры Ли $\mathfrak{D}$, а подалгебра $\mathfrak{C}$ – ее идеал.*

Доказательство. Очевидно, $\mathfrak{LB}$ – линейное пространство, и подалгебра $\mathfrak{C} \subset \mathfrak{LB}$. Далее, пусть $X, Y \in \mathfrak{LB}$, тогда, в силу тождества Якоби,

$$[[X,Y],Z] = -[[Y,Z],X] - [[Z,X],Y] = [X,[Y,Z]] - [Y,[X,Z] \in \mathfrak{C}$$

для всех $Z \in \mathfrak{C}$, т. е. $[X,Y] \in \mathfrak{LB}$, и значит $\mathfrak{LB}$ – подалгебра алгебры Ли $\mathfrak{D}$. Ну и конечно, $\mathfrak{C}$ – идеал алгебры Ли $\mathfrak{LB}$, поскольку, по определению, $[X,Y] \in \mathfrak{C}$ для всех $X \in \mathfrak{LB}$ и $Y \in \mathfrak{C}$. □

Алгебра Ли $\mathfrak{LB}$ называется *алгеброй Ли-Беклунда*, а факторалгебра $\mathrm{Sym}_{\mathfrak{C}} = \mathfrak{LB}/\mathfrak{C}$ называется *алгеброй симметрий*.

1.4.3 Картанова фильтрация

Пусть $\Omega = \Omega(\mathfrak{M}, \mathfrak{D}, \mathfrak{K}) = \oplus_{q \in \mathbb{Z}_+} \Omega^q = \oplus_{q \in \mathbb{Z}_+} \Omega^q(\mathfrak{M}, \mathfrak{D}, \mathfrak{K})$ – модуль коцепей со значениями в $\mathfrak{K}$. Коцепь $\omega \in \Omega^q$ называется *p-картановой*, если $\omega(X_1 \wedge \ldots \wedge X_q) = 0$ при $X_1, \ldots, X_{p-1} \in \mathfrak{D}$ и $X_p, \ldots, X_q \in \mathfrak{C}$, где $p, q \in \mathbb{Z}_+$. Обозначим через $\mathfrak{C}^p\Omega^q$ модуль всех p-картановых q-коцепей со значениями в $\mathfrak{K}$. По построению, для каждого $q \in \mathbb{Z}_+$ имеем:

- $\star$ $\mathfrak{C}^0\Omega^q = \Omega^q$,
- $\star$ $\mathfrak{C}^p\Omega^q \supset \mathfrak{C}^{p+1}\Omega^q$ для любого $p \in \mathbb{Z}_+$,
- $\star$ $\mathfrak{C}^p\Omega^q = 0$ для всех $p > q$,
- $\star$ $\mathfrak{C}^p\Omega^q = \mathfrak{C}^{q-m}\Omega^q$ для всех $p \leq q - m$, где $m = \dim_{\mathfrak{M}} \mathfrak{C}$.

В частности, для каждого $q \in \mathbb{Z}_+$ определена *убывающая фильтрация* модуля Ω^q

$$\Omega^q = \mathfrak{C}^0\Omega^q \supset \mathfrak{C}^1\Omega^q \supset \cdots \supset \mathfrak{C}^p\Omega^q \supset \mathfrak{C}^{p+1}\Omega^q \supset \cdots \supset \mathfrak{C}^q\Omega^q \supset 0.$$

В свою очередь, градуированный модуль $\Omega = \oplus_{q \in \mathbb{Z}_+} \Omega^q$ также имеет убывающую фильтрацию

$$\Omega = \mathfrak{C}^0\Omega \supset \mathfrak{C}^1\Omega \supset \cdots \supset \mathfrak{C}^p\Omega \supset \mathfrak{C}^{p+1}\Omega \supset \ldots, \quad \mathfrak{C}^p\Omega = \oplus_{q \geq p} \mathfrak{C}^p\Omega^q,$$

которую ниже будем называть *картановой*. По построению, градуировка и картанова фильтрация модуля Ω совместимы (иначе говоря, Ω – градуированный модуль с фильтрацией), причем эта фильтрация регулярная.

1.4.4 Спектральная последовательность

Наличие фильтрации позволяет рафинировать формальный комплекс $\{\Omega, d\} = \{\Omega^q, d^q \mid q \in \mathbb{Z}_+\}$, поскольку справедливо

Предложение 1.4.2. *Картанова фильтрация совместима с дифференциалом $d : \Omega \to \Omega$, подробнее*

$$d\mathfrak{C}^p\Omega^q \subset \mathfrak{C}^p\Omega^{q+1} \quad \textit{для всех} \quad p, q \in \mathbb{Z}_+.$$

Доказательство. Достаточно вспомнить формулу для дифференциала (1.3.16), воспользоваться определением p-картановости и учесть, что $\mathfrak{C}$ – алгебра Ли. □

Таким образом, определена градуированная спектральная последовательность $\{E_r^{pq}, d_r^{pq} \mid p, q, r \in \mathbb{Z}\}$, где

- $E_r^{pq} = Z_r^{pq} \big/ \big(B_{r-1}^{pq} + Z_{r-1}^{p+1,q-1}\big)$,
- $Z_r^{pq} = \{\omega \in \mathfrak{C}^p\Omega^{p+q} \mid d\omega \in \mathfrak{C}^{p+r}\Omega^{p+q+1}\}$
  $= \mathfrak{C}^p\Omega^{p+q} \cap d^{-1}\mathfrak{C}^{p+r}\Omega^{p+q+1}$,
- $B_r^{pq} = \{\omega = d\chi \in \mathfrak{C}^p\Omega^{p+q} \mid \chi \in \mathfrak{C}^{p-r}\Omega^{p+q-1}\}$
  $= \mathfrak{C}^p\Omega^{p+q} \cap d\mathfrak{C}^{p-r}\Omega^{p+q-1}$,
- $d_r^{pq} : E_r^{pq} \to E_r^{p+r,q-r+1}, \quad d_r^{pq}([\omega]_r^{pq}) = [d\omega]_r^{p+r,p-q+1}$.

(Здесь для удобства положено $\mathfrak{C}^p\Omega^q = \Omega^q$ при $p < 0$, $[\omega]_r^{pq}$ означает класс эквивалентности коцепи $\omega \in Z_r^{pq}$ в фактор-модуле E_r^{pq}.)

Предложение 1.4.3. *Справедливы равенства:*

- $E_r^{pq} = \mathfrak{C}^p\Omega^{p+q} \big/ \mathfrak{C}^{p+1}\Omega^{p+q}$ *при всех* $r \leq 0, \quad p, q \in \mathbb{Z}$;
- $E_r^{pq} = 0$ *при всех* $p < 0, \quad r, q \in \mathbb{Z}$;
- $E_r^{pq} = 0$ *при всех* $q < 0$, $q > m, \quad r, p \in \mathbb{Z}$, *где* $m = \dim_{\mathfrak{M}} \mathfrak{C}$.

Доказательство. Действительно, по построению, при $r \leq 0$ модули $Z_r^{pq} = \mathfrak{C}^p\Omega^{p+q}$, $Z_{r-1}^{p+1,q-1} = \mathfrak{C}^{p+1}\Omega^{p+q}$, $B_{r-1}^{pq} = d\mathfrak{C}^{p-r+1}\Omega^{p+q-1}$, так что $B_{r-1}^{pq} \subset Z_{r-1}^{p+1,q-1}$ и $E_r^{pq} = \mathfrak{C}^p\Omega^{p+q} \big/ \mathfrak{C}^{p+1}\Omega^{p+q}$.

Далее, при $p \leq 0$ модули $\mathfrak{C}^p\Omega^{p+q} = \Omega^{p+q}$, так что при $p < 0$ имеем $Z_r^{pq} = \{\omega \in \Omega^{p+q} \mid d\omega \in \mathfrak{C}^{p+r}\Omega^{p+q+1}\} = Z_{r-1}^{p+1,q-1}$, и значит $E_r^{pq} = 0$.

Аналогично, по построению, модули $\mathfrak{C}^p\Omega^q = 0$ при $p > q$, так что $\mathfrak{C}^p\Omega^{p+q} = 0$ при $q < 0$, а в этом случае и $E_r^{pq} = 0$.

Наконец, при $p \le q - m$ модули $\mathfrak{C}^p\Omega^q = \mathfrak{C}^{q-m}\Omega^{p+q}$, другими словами, $\mathfrak{C}^p\Omega^{p+q} = \mathfrak{C}^{p+q-m}\Omega^{p+q}$, а при $q > m$ по построению имеем $\mathfrak{C}^{p+1}\Omega^{p+q} = \mathfrak{C}^{p+1}\Omega^{(p+1)+(q-1)} = \mathfrak{C}^{p+q-m}\Omega^{p+q} = \mathfrak{C}^p\Omega^{p+q}$. Следовательно,

$$\begin{aligned} Z_{r-1}^{p+1,q-1} &= \{\omega \in \mathfrak{C}^{p+1}\Omega^{p+q} \mid d\omega \in \mathfrak{C}^{(p+1)+(r-1)}\Omega^{p+q+1}\} \\ &= \{\omega \in \mathfrak{C}^{p}\Omega^{p+q} \mid d\omega \in \mathfrak{C}^{p+r}\Omega^{p+q+1}\} = Z_r^{pq}, \end{aligned}$$

и значит опять $E_r^{pq} = 0$. □

Таким образом, без ограничения общности можно считать, что

$$\big\{E_r^{pq}, d_r^{pq} \mid r, p \in \mathbb{Z}_+, 0 \le q \le m\big\}.$$

В частности,

- $E_0^{pq} = \mathfrak{C}^P\Omega^{p+q}\big/\mathfrak{C}^{p+1}\Omega^{p+q}$,
- $E_1^{pq} = \big[\mathfrak{C}^p\Omega^{p+q} \cap d^{-1}\mathfrak{C}^{p+1}\Omega^{p+q+1}\big]\big/\big[d\mathfrak{C}^p\Omega^{p+q-1} + \mathfrak{C}^{p+1}\Omega^{p+q}\big]$.

Доказательство следующих двух предложений в более общей постановке можно найти, например, в [12], раздел 1.7.

Предложение 1.4.4. *Справедливы равенства*

$$E_{r+1}^{pq} = \ker d_r^{pq}\big/\operatorname{im} d_r^{p-r,q+r-1} \quad \textit{для всех} \quad r, p \in \mathbb{Z}_+,\ 0 \le q \le m.$$

Положим

$$E_\infty^{pq} = Z_\infty^{pq}\big/\big(B_\infty^{pq} + Z_\infty^{p+1,q-1}\big), \quad p, q \in \mathbb{Z},$$

где

$$\begin{aligned} Z_\infty^{pq} &= \{\omega \in \mathfrak{C}^p\Omega^{p+q} \mid d\omega = 0\}, \\ B_\infty^{pq} &= \{\omega = d\chi \in \mathfrak{C}^p\Omega^{p+q} \mid \chi \in \Omega^{p+q-1}\}. \end{aligned}$$

Предложение 1.4.5. *Для любых $p, q \in \mathbb{Z}$ имеет место равенство*

$$\varinjlim E_r^{pq} = E_\infty^{pq}.$$

В приложениях, как правило, используются отдельные члены спектральной последовательности. Так в алгебро-геометрическом анализе дифференциальных уравнений важную роль играют следующие члены:

- $\star$ $E_1^{0m} = \Omega^m \big/ \{d\Omega^{m-1} + \mathfrak{C}\Omega^m\}$ – пространство *функционалов*, представители классов эквивалентности называются *лагранжианами*;

- $\star$ $E_1^{0,m-1} = \{\omega \in \Omega^{m-1} \mid d\omega \in \mathfrak{C}\Omega^m\} \big/ \{d\Omega^{m-2} + \mathfrak{C}\Omega^{m-1}\}$ – пространство *законов сохранения*, представители классов эквивалентности называются *сохраняющимися токами*;

- $\star$ $E_1^{pm} = \mathfrak{C}^p\Omega^{p+m} \big/ \{d\mathfrak{C}^p\Omega^{p+m-1} + \mathfrak{C}^{p+1}\Omega^{p+m}\}$ – пространство *функциональных p-форм*, $p \in \mathbb{N}$;

- $\star$ $d_1^{pm} : E_1^{pm} \to E_1^{p+1,m}$ – *функциональные (вариационные) дифференциалы* , $p \in \mathbb{Z}_+$, дифференциал $\delta = d_1^{0m}$ называется *оператором Эйлера-Лагранжа* .

1.4.5 Некоторые действия

Посмотрим теперь как на элементах спектральной последовательности действуют отображения ι_D и L_D. Легко проверяется

Предложение 1.4.6. *Пусть* $\omega \in \mathfrak{C}^p\Omega^q$, $p, q \in \mathbb{Z}_+$, *тогда*

- $\star$ $\iota_D(\omega) \in \mathfrak{C}^{p-1}\Omega^{q-1}$ *для всех* $D \in \mathfrak{D}$,

- $\star$ $\iota_D(\omega) \in \mathfrak{C}^p\Omega^{q-1}$ *для всех* $D \in \mathfrak{C}$,

- $\star$ $L_D(\omega) \in \mathfrak{C}^{p-1}\Omega^q$ *для всех* $D \in \mathfrak{D}$,

- $\star$ $L_D(\omega) \in \mathfrak{C}^p\Omega^q$ *для всех* $D \in \mathfrak{LB}$.

Предложение 1.4.7. *Для каждого* $\mathbf{D} = D + \mathfrak{C} \in \mathrm{Sym}_{\mathfrak{C}}$ *определены линейные отображения*

$$(\iota_{\mathbf{D}})_r : E_r^{pq} \to E_r^{p-1,q}, \quad [\omega]_r^{pq} \mapsto [\iota_D\omega]_r^{p-1,q},$$

для всех $p, q \in \mathbb{Z}_+$ *и* $r = 0, 1$.

Доказательство. Проводится прямыми вычислениями (которые полезно проделать в качестве упражнения), единственная тонкость – при доказательстве того факта, что $d(\iota_D\omega) \in \mathfrak{C}^p\Omega^{p+q+1}$ для всех $D \in \mathfrak{LB}$, $\omega \in Z_1^{pq}$, следует воспользоваться определяющим равенством $d \circ \iota_D + \iota_D \circ d = L_D$ (см. Предложение 1.3.16 на стр. 29). $\square$

Предложение 1.4.8. *Для каждого* $\mathbf{D} = D + \mathfrak{C} \in \mathrm{Sym}_{\mathfrak{C}}$ *определены линейные отображения*

$$(L_{\mathbf{D}})_1 : E_1^{pq} \to E_1^{pq}, \quad [\omega]_r^{pq} \mapsto [L_D\omega]_1^{pq}, \quad \textit{для всех} \quad p, q \in \mathbb{Z}_+.$$

Доказательство. Опять единственная тонкость – при доказательстве того факта, что $L_X\omega \in d\mathfrak{C}^p\Omega^{p+q-1} + \mathfrak{C}^{p+1}\Omega^{p+q}$ для всех $X \in \mathfrak{C}$, $\omega \in Z_1^{pq}$, следует воспользоваться все тем же определяющим равенством. □

Глава 2

Основы алгебро-геометрического анализа

Стандартные обозначения

Будем использовать мультииндексные обозначения:

- $\mathbb{I} = \mathbb{I}_m = (\mathbb{Z}_+)_m = \big\{i = (i_1, \dots, i_m) \mid i_\mu \in \mathbb{Z}_+,\ 1 \le \mu \le m\big\}$;
- $|i| = i_1 + \cdots + i_m \in \mathbb{Z}_+ \quad$ для всех $\quad i \in \mathbb{I}$;
- $\mathbb{I}(p) = \big\{i \in \mathbb{I} \mid |i| \le p\big\}$, $p \in \mathbb{Z}_+$;
- $i + j = (i_1 + j_1, \dots, i_m + j_m) \in \mathbb{I} \quad$ для всех $\quad i, j \in \mathbb{I}$;
- $(\mu) = (0, \dots, 1, \dots, 0) \in \mathbb{I} \quad$ для всех $\quad 1 \le \mu \le m$ (единица стоит на μ-м месте, а на остальных местах – нули).

2.1 Пространство джетов

2.1.1 Переменные

Будем обозначать:

- $\mathbb{R}^m = \big\{x = (x^1, \dots, x^m) \mid x^\mu \in \mathbb{R},\ 1 \le \mu \le m\big\}$ – евклидово пространство *независимых переменных*, $m \in \mathbb{N}$,

- $\star$ $\mathbb{R}^{\mathrm{A}} = \{u = (u^\alpha) \mid u^\alpha \in \mathbb{R},\ \alpha \in \mathrm{A}\}$ – евклидово пространство *зависимых переменных*, где A – конечное множество индексов,
- $\star$ $\mathbb{R}^{\mathrm{A}}_{\mathbb{I}}(p) = \{\mathbf{u} = (u^\alpha_i) \mid u^\alpha_i \in \mathbb{R},\ \alpha \in \mathrm{A},\ i \in \mathbb{I}(p)\}$ – евклидово пространство *дифференциальных переменных порядка* $\leq p$, $p \in \mathbb{Z}_+$;
- $\star$ $\mathbb{R}^{\mathrm{A}}_{\mathbb{I}} = \{\mathbf{u} = (u^\alpha_i) \mid u^\alpha_i \in \mathbb{R},\ \alpha \in \mathrm{A},\ i \in \mathbb{I}\}$ – пространство *дифференциальных переменных порядка* $\leq \infty$, наделенное естественной топологией проективного предела евклидовых пространств $\mathbb{R}^{\mathrm{A}}_{\mathbb{I}(p)}$,

$$\mathbb{R}^{\mathrm{A}}_{\mathbb{I}} = \varprojlim_{p \in \mathbb{Z}_+} \mathbb{R}^{\mathrm{A}}_{\mathbb{I}(p)}.$$

- $\star$ $\mathbb{J}(p) = \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{\mathrm{A}}_{\mathbb{I}(p)} = \{(x, \mathbf{u}) \mid x \in \mathbb{R}^m,\ \mathbf{u} \in \mathbb{R}^{\mathrm{A}}_{\mathbb{I}(p)}\}$ – евклидово пространство *джетов порядка* p, $p \in \mathbb{Z}_+$;
- $\star$ $\mathbb{J} = \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{\mathrm{A}}_{\mathbb{I}} = \{(x, \mathbf{u}) \mid x \in \mathbb{R}^m,\ \mathbf{u} \in \mathbb{R}^{\mathrm{A}}_{\mathbb{I}}\}$ – пространство *джетов порядка* ∞, наделенное естественной топологией проективного предела евклидовых пространств $\mathbb{J}(p)$,

$$\mathbb{J} = \varprojlim_{p \in \mathbb{Z}_+} \mathbb{J}(p).$$

Введем два векторных расслоения над $\mathbb{R}^m$:

- $\star$ $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{\mathrm{A}} \xrightarrow{\pi} \mathbb{R}^m$, $(x, u) \mapsto x$,
- $\star$ $\mathbb{J} = \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{\mathrm{A}}_{\mathbb{I}} \xrightarrow{\pi_J} \mathbb{R}^m$, $(x, \mathbf{u}) \mapsto x$.

Хотя эти расслоения и тривиальные, но они мотивируют приводимые ниже стандартные геометрические конструкции.

2.1.2 Функции

Введем следующие пространства гладких (т. е. класса $\mathcal{C}^\infty$) функций

- $\star$ $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^m)$ – алгебра всех вещественных гладких функций на $\mathbb{R}^m$, наделенная естественной топологией покомпонентной равномерной сходимости на компактах вместе с частными производными всех порядков;

- ⋆ $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^m)$-модуль $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^m,\mathbb{R}^{\mathrm{A}})$ всех гладких сечений расслоения $\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^{\mathrm{A}}\to\mathbb{R}^m$, т. е. пространство всех гладких функций на $\mathbb{R}^m$ со значениями в $\mathbb{R}^{\mathrm{A}}$, наделенное естественной топологией покомпонентной равномерной сходимости на компактах вместе с частными производными всех порядков, в частности, $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^m)=\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^m,\mathbb{R})$;

- ⋆ $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^m)$-модуль $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^m,\mathbb{R}^{\mathrm{A}}_{\mathbb{I}})$ всех гладких сечений расслоения джетов $\mathbb{J}\to\mathbb{R}^m$, т. е. пространство всех гладких функций на $\mathbb{R}^m$ со значениями в $\mathbb{R}^{\mathrm{A}}_{\mathbb{I}}$, наделенное естественной топологией покомпонентной равномерной сходимости на компактах вместе с частными производными всех порядков;

- ⋆ $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{J}(p))=\mathcal{C}^\infty(\mathbb{J}(p),\mathbb{R})$, – алгебра всех вещественных гладких функций на $\mathbb{J}(p)$, наделенная естественной топологией равномерной сходимости на компактах вместе с частными производными всех порядков, $p\in\mathbb{Z}_+$;

- ⋆ алгебра $\mathcal{A}=\mathcal{C}^\infty(\mathbb{J})=\mathcal{C}^\infty(\mathbb{J},\mathbb{R})$ – индуктивный предел алгебр $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{J}(p))$,

$$\mathcal{A}=\mathcal{C}^\infty(\mathbb{J})=\varinjlim_{p\in\mathbb{Z}_+}\mathcal{C}^\infty(\mathbb{J}(p)).$$

  По построению функция $f=f(x,\mathbf{u})\in\mathcal{C}^\infty(\mathbb{J})$ тогда и только тогда, когда $f\in\mathcal{C}^\infty(\mathbb{J}(p))$ для некоторого $p\in\mathbb{Z}_+$, наименьшее из таких номеров p называется *дифференциальным порядком* (или просто *порядком*) функции f (другими словами, p – дифференциальный порядок функции $f(x,\mathbf{u})$, если $\partial_{u_i^\alpha}f\neq 0$ для некоторых $\alpha\in\mathrm{A}$, $i\in I$, $|i|=p$, тогда как $\partial_{u_i^\alpha}f=0$ для всех $\alpha\in\mathrm{A}$, $i\in I$, $|i|>p$, здесь и всюду ниже $\partial_{u_i^\alpha}$ – частная производная по переменной u_i^α).

2.1.3 Джеты

Определено линейное отображение

$$\boldsymbol{j}:\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^m,\mathbb{R}^{\mathrm{A}})\to\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^m,\mathbb{R}^{\mathrm{A}}_{\mathbb{I}}),$$

которое каждой функции $\phi=(\phi^\alpha(x))\in\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^m,\mathbb{R}^{\mathrm{A}})$ ставит в соответствие ее *джет* $\boldsymbol{\phi}=\boldsymbol{j}(\phi)=(\phi^\alpha_i(x))\in\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^m,\mathbb{R}^{\mathrm{A}}_{\mathbb{I}})$, где компоненты $\phi^\alpha_i(x)=\partial_{x^i}\phi^\alpha(x)$, $\alpha\in\mathrm{A}$, $i\in\mathbb{I}$, $\partial_{x^i}=(\partial_{x^1})^{i_1}\dots(\partial_{x^m})^{i_m}$,

здесь и всюду ниже ∂_{x^μ} – частная производная по переменной x^μ, $1 \leq \mu \leq m$. Подробнее, элемент $\boldsymbol{j}(\phi)(x) = (\partial_{x^i}\phi^\alpha(x)) \in \mathbb{R}^{\mathrm{A}}_{\mathbb{I}}$ называется *(бесконечным) джетом функции* $\phi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^{\mathrm{A}})$ *в точке* $x \in \mathbb{R}^m$.

2.1.4 Мультипликаторы и дифференцирования

По построению $\mathcal{A} = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{J})$ есть унитальная ассоциативная коммутативная алгебра с обычными поточечными алгебраическими операциями. В частности, алгебра мультипликаторов $\mathfrak{M}(\mathcal{A}) = \mathcal{A}$. В свою очередь, алгебра Ли $\mathfrak{D}(\mathcal{A})$ всех дифференцирований алгебры $\mathcal{A}$ есть бесконечномерный свободный $\mathcal{A}$-модуль,

$$\mathfrak{D}(\mathcal{A}) = \left\{ X = \sum_{1\leq\mu\leq m} \xi^\mu \cdot \partial_{x^\mu} + \sum_{\alpha\in\mathrm{A}, i\in\mathbb{I}} \eta_i^\alpha \cdot \partial_{u_i^\alpha} \;\middle|\; \xi^\mu, \eta_i^\alpha \in \mathcal{A} \right\}$$

с (топологическим) базисом $\{\partial_{x^\mu}, \partial_{u_i^\alpha} \mid 1 \leq \mu \leq m,\ \alpha \in \mathrm{A},\ i \in \mathbb{I}\}$. Обратим внимание, что несмотря на то что каждый дифференциальный оператор X содержит бесконечное число слагаемых $\eta_i^\alpha \cdot \partial_{u_i^\alpha}$ действие $X(f)$ определено корректно, поскольку по построению для всякой дифференциальной функции $f \in \mathcal{A}$ лишь конечное число частных производных $\partial_{u_i^\alpha} f \neq 0$.

Расслоение $\mathbb{J} \xrightarrow{\pi_J} \mathbb{R}^m$ выделяет $\mathcal{A}$-подмодуль

$$\mathfrak{V}(\mathcal{A}) = \left\{ V = \sum_{\alpha\in\mathrm{A}, i\in\mathbb{I}} \zeta_i^\alpha \cdot \partial_{u_i^\alpha} \;\middle|\; \zeta_i^\alpha \in \mathcal{A} \right\} \subset \mathfrak{D}(\mathcal{A})$$

вертикальных дифференцирований алгебры $\mathcal{A}$, с характерным свойством

$$V(\pi_J^*(\phi)) = 0 \quad \text{для всех} \quad V \in \mathfrak{V}(\mathcal{A}),\ \phi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^m),$$

напомним, что $\pi_J^* : \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^m) \to \mathcal{C}^\infty(\mathbb{J})$, $\phi \mapsto \pi_J^*(\phi) = \phi \circ \pi_J$ (подробнее см., например, [12], раздел 2.7).

Предложение 2.1.1. *$\mathcal{A}$-модуль $\mathfrak{V}(\mathcal{A})$ всех вертикальных дифференцирований алгебры $\mathcal{A}$ является подалгеброй алгебры Ли $\mathfrak{D}(\mathcal{A})$, причем*

$$[U, V] = W \quad \textit{для всех} \quad U = \sum \xi_i^\alpha \cdot \partial_{u_i^\alpha}, V = \sum \eta_i^\alpha \cdot \partial_{u_i^\alpha} \in \mathfrak{V}(\mathcal{A}),$$

где $W = \sum \zeta_i^\alpha \cdot \partial_{u_i^\alpha} \in \mathfrak{V}(\mathcal{A})$, *компоненты* $\zeta_i^\alpha = U(\eta_i^\alpha) - V(\xi_i^\alpha)$.

Доказательство. Предлагается проделать самостоятельно, в качестве упражнения. □

В частности, вертикальные дифференцирования определяют на пространстве джетов $\mathbb{J}$ инволютивное распределение, интегральные подмногообразия которого суть слои $\pi_J^{-1}(x)$, $x \in \mathbb{R}^m$. Более того, пространство джетов $\mathbb{J}$ покрывается единой расслаивающей картой с глобальными координатами – исходными переменными $(x, \mathbf{u}) \in \mathbb{J}$.

2.1.5 Картанова подалгебра

Для каждого $1 \leq \mu \leq m$ определена *полная частная производная*

$$D_\mu = \partial_{x^\mu} + \sum_{\alpha \in \mathrm{A}, i \in \mathbb{I}} u^\alpha_{i+(\mu)} \cdot \partial_{u^\alpha_i} \in \mathfrak{D}(\mathcal{A}).$$

Будем обозначать

$$f\big|_{\boldsymbol{\phi}} = f\big|_{\boldsymbol{\phi}}(x) = f(x, \boldsymbol{\phi}(x)) \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^m)$$

для всех $f = f(x, \mathbf{u}) \in \mathcal{A}$, $\boldsymbol{\phi} = \boldsymbol{\phi}(x) \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^{\mathrm{A}}_{\mathbb{I}})$, $x \in \mathbb{R}^m$. В частности,

$$f\big|_{\boldsymbol{j}(\phi)} = f\big|_{\boldsymbol{j}(\phi)}(x) = f(x, \boldsymbol{j}(\phi)(x)) \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^m)$$

для всех $f \in \mathcal{A}$, $\phi = \phi(x) \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^{\mathrm{A}})$, $x \in \mathbb{R}^m$.

Предложение 2.1.2. *Для данной функции $\boldsymbol{\phi} \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^{\mathrm{A}}_{\mathbb{I}})$ равенство*

$$\partial_{x^\mu}\big(f\big|_{\boldsymbol{\phi}}(x)\big) = \big(D_\mu f\big)\big|_{\boldsymbol{\phi}}(x)$$

справедливо для всех $f \in \mathcal{A}$ тогда и только тогда, когда $\boldsymbol{\phi} = \boldsymbol{j}(\phi)$ для некоторой $\phi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^{\mathrm{A}})$ (фактически, $\phi = (\phi^\alpha = \phi^\alpha_0)$, если $\boldsymbol{\phi} = (\phi^\alpha_i)$, где мультииндекс $0 = (0, \dots, 0) \in \mathbb{I}$).

Доказательство. Действительно, согласно правилу дифференцирования сложной функции, левая часть доказываемого равенства есть

$$\partial_{x^\mu}\big(f\big|_{\boldsymbol{\phi}}(x)\big) = \big(\partial_{x^\mu} f\big)\big|_{\boldsymbol{\phi}}(x) + \sum_{\alpha, i} \big(\partial_{u^\alpha_i} f\big)\big|_{\boldsymbol{\phi}}(x) \cdot \partial_{x^\mu} \phi^\alpha_i(x),$$

тогда как правая часть по определению полной частной производной равна

$$\big(D_\mu f\big)\big|_{\boldsymbol{\phi}}(x) = \big(\partial_{x^\mu} f\big)\big|_{\boldsymbol{\phi}}(x) + \sum_{\alpha,i} \big(\partial_{u^\alpha_i} f\big)\big|_{\boldsymbol{\phi}}(x) \cdot u^\alpha_{i+(\mu)}\big|_{\boldsymbol{\phi}}(x).$$

Таким образом, равенство справедливо для всех $f \in \mathcal{A}$ тогда и только тогда, когда

$$\partial_{x^\mu} \phi^\alpha_i(x) = u^\alpha_{i+(\mu)}\big|_{\boldsymbol{\phi}}(x) = \phi^\alpha_{i+(\mu)}(x)$$

для всех $\alpha \in \mathrm{A}$, $i \in \mathbb{I}$, $1 \le \mu \le m$. Многомерной индукцией по мультииндексу $i \in \mathbb{I}$ легко проверяется, что это имеет место тогда и только тогда, когда $\phi^\alpha_i(x) = \partial_{x^i} \phi^\alpha_0(x)$, т. е. когда $\boldsymbol{\phi} = \boldsymbol{j}(\phi)$, где $\phi = \phi_0$. □

Предложение 2.1.3. *Полные частные производные коммутируют, т. е.*

$$[D_\mu, D_\nu] = 0 \quad \textit{для всех} \quad 1 \le \mu, \nu \le m.$$

Доказательство. Можно вычислить коммутатор непосредственно, исходя из определения полной частной производной, а можно воспользоваться предыдущим Предложением и учесть, что обычные частные производные коммутируют. Полезно проделать и то и другое в качестве упражнения. □

Положим

$$\mathfrak{C}(\mathcal{A}) = \left\{ X = \sum_{1 \le \mu \le m} \xi^\mu \cdot D_\mu \;\middle|\; \xi^\mu \in \mathcal{A} \right\} \subset \mathfrak{D}(\mathcal{A}).$$

По построению, $\mathfrak{C}(\mathcal{A})$ – свободный m-мерный $\mathcal{A}$-модуль, кроме того, $\mathfrak{C}(\mathcal{A})$ – подалгебра алгебры Ли $\mathfrak{D}(\mathcal{A})$, поскольку

$$[X, Y] = Z = \sum \zeta^\mu \cdot D_\mu \in \mathfrak{C}(\mathcal{A}), \quad \text{где} \quad \zeta^\mu = X(\eta^\mu) - Y(\xi^\mu),$$

для всех $X = \sum \xi^\mu \cdot D_\mu, Y = \sum \eta^\mu \cdot D_\mu \in \mathfrak{C}(\mathcal{A})$. Алгебра Ли $\mathfrak{C}(\mathcal{A})$ называется *картановой подалгеброй* алгебры Ли $\mathfrak{D}(\mathcal{A})$ всех дифференцирований алгебра $\mathcal{A}$.

Предложение 2.1.4. *Картанова подалгебра* $\mathfrak{C}(\mathcal{A})$ *определяет связность в расслоении* $\mathbb{J} \xrightarrow{\pi_J} \mathbb{R}^m$. *Именно, имеет место разложение* $\mathcal{A}$*-модуля* $\mathfrak{D}(\mathcal{A})$ *в прямую сумму*

$$\mathfrak{D}(\mathcal{A}) = \mathfrak{C}(\mathcal{A}) \oplus \mathfrak{V}(\mathcal{A}).$$

Доказательство. Действительно, пусть $X \in \mathfrak{D}(\mathcal{A})$ тогда

$$\begin{aligned} X &= \sum_{1\le\mu\le m} \xi^\mu \cdot \partial_\mu + \sum_{\alpha\in \mathrm{A}, i\in\mathbb{I}} \eta_i^\alpha \cdot \partial_{u_i^\alpha} \\ &= \sum_{1\le\mu\le m} \xi^\mu \cdot D_\mu + \sum_{\alpha\in \mathrm{A}, i\in\mathbb{I}} \zeta_i^\alpha \cdot \partial_{u_i^\alpha} \\ &= C + V \in \mathfrak{C}(\mathcal{A}) \oplus \mathfrak{V}(\mathcal{A}), \end{aligned}$$

где $\zeta_i^\alpha = \eta_i^\alpha - \sum_\mu \xi^\mu \cdot u^\alpha_{i+(\mu)}$, $\eta_i^\alpha = \zeta_i^\alpha + \sum_\mu \xi^\mu \cdot u^\alpha_{i+(\mu)}$. □

Следуя принятой в теории связностей терминологии, картановы дифференцирования часто называют *горизонтальными*, и полагают $\mathfrak{C}(\mathcal{A}) = \mathfrak{H}(\mathcal{A})$.

Поскольку $\mathcal{A}$-модуль $\mathfrak{C}(\mathcal{A})$ является и алгеброй Ли, то определяемая им связность плоская, другими словами *распределение Картана* на пространстве джетов $\mathbb{J}$, задаваемое алгеброй Ли $\mathfrak{C}(\mathcal{A})$ инволютивное.

Предложение 2.1.5. *Интегральные подмногообразия распределения Картана* $\mathfrak{C}(\mathcal{A})$ *на* $\mathbb{J}$ *имеют вид*

$$\mathbf{\Phi} = \mathbf{u} - \boldsymbol{j}(\phi)(x) = \mathbf{0}, \quad \phi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^{\mathrm{A}}).$$

Доказательство. Действительно, можно проверить, что для распределения Картана на всяком m-мерном интегральном подмногообразии в качестве координат можно выбрать независимые переменные $x \in \mathbb{R}^m$ (см., например, [5]), так что без ограничения общности можно считать, что подмногообразие задается уравнениями

$$\mathbf{\Phi} = \mathbf{u} - \boldsymbol{\phi}(x) = \mathbf{0}, \quad \boldsymbol{\phi} \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^{\mathrm{A}}_{\mathbb{I}}).$$

Такое подмногообразие будет интегральным для $\mathfrak{C}(\mathcal{A})$ тогда и только тогда, когда

$$D_\mu(\Phi_i^\alpha)\big|_{\mathbf{\Phi}=\mathbf{0}} = D_\mu(u_i^\alpha - \phi_i^\alpha(x))\big|_{\mathbf{u}=\boldsymbol{\phi}(x)} = 0,$$

т. е. когда

$$(u^\alpha_{i+(\mu)} - \partial_{x^\mu}\phi^\alpha_i(x))\big|_{\mathbf{u}=\boldsymbol{\phi}(x)} = \phi^\alpha_{i+(\mu)}(x) - \partial_{x^\mu}\phi^\alpha_i(x) = 0$$

для всех $x \in \mathbb{R}^m$, $1 \le \mu \le m$, $\alpha \in \mathrm{A}$, $i \in \mathbb{I}$. Отсюда по индукции выводится требуемое представление $\boldsymbol{\phi} = \boldsymbol{j}(\phi)$ с $\phi = \phi_0$. □

Если бы пространство джетов $\mathbb{J}$ было конечномерным, отсюда следовало бы, что через каждую точку пространства $\mathbb{J}$ проходит одно и только одно интегральное подмногообразие распределения $\mathfrak{C}(\mathcal{A})$, более того, на пространстве $\mathbb{J}$ существовал бы атлас из расслаивающих карт, в которых интегральные подмногообразия были бы горизонтальными. В действительности, пространство $\mathbb{J}$ бесконечномерное, и через каждую точку пространства $\mathbb{J}$ бесконечное число интегральных подмногообразий. Последний факт есть следствие того, что каждое интегральное подмногообразие имеет вид $\mathbf{u} = \boldsymbol{j}(\phi)$, $\phi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^\mathrm{A})$, такое подмногообразие проходит через точку $(x_0, \mathbf{u}_0) \in \mathbb{J}$ тогда и только тогда, когда набор $\mathbf{u}_0 \in \mathbb{R}^\mathrm{A}_\mathbb{I}$ есть множество коэффициентов Тейлора функции $u = \phi(x)$ в точке $x_0 \in \mathbb{R}^m$, а гладкая функция (в отличие от аналитической) восстанавливается по своим тейлоровским коэффициентам, как известно, неоднозначно. В частности, заведомо не существует расслаивающих карт.

Замечание. Отметим, что переход в вещественно аналитическую категорию приводит к своим трудностям, например, отсутствует разбиение единицы, что существенно сокращает вычислительный аппарат.

2.1.6 Операторы в полных частных производных

Наряду с пространством $\mathcal{A} = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{J})$ введем еще пространство

$$\mathcal{E} = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{J}, \mathbb{R}^\mathrm{A}) = \big\{f = (f^\alpha) \mid f^\alpha \in \mathcal{A},\ \alpha \in \mathrm{A}\big\} = \mathcal{A}^\mathrm{A},$$

и его поточечное дуальное

$$\mathcal{E}^* = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{J}, \mathbb{R}_\mathrm{A}) = \big\{f = (f_\alpha) \mid f_\alpha \in \mathcal{A},\ \alpha \in \mathrm{A}\big\} = \mathcal{A}_\mathrm{A},$$

с поточечным спариванием

$$\mathcal{E}^* \times \mathcal{E} \to \mathcal{A}, \quad (g, f) \mapsto \langle g, f\rangle = \sum_{\alpha\in\mathrm{A}} g_\alpha \cdot f^\alpha.$$

Каждой функции $L \in \mathcal{A}$ ставится в соответствие линейный оператор в полных частных производных (формальный дифференциал Фреше)

$$L_* : \mathcal{E} \to \mathcal{A}, \quad f \mapsto L_*(f) = \sum_{\alpha,i} \big(\partial_{u_i^\alpha} L\big) \cdot D_i f^\alpha,$$

(здесь и всюду ниже $D_i = (D_1)^{i_1} \dots (D_m)^{i_m}$ для всех $i \in \mathbb{I}$), и его дуальный по Лагранжу

$$L^* : \mathcal{A} \to \mathcal{E}^*, \quad M \mapsto L^*(M), \quad L^*(M)_\alpha = \sum_i (-1)^{|i|} D_i\big((\partial_{u_i^\alpha} L) \cdot M\big).$$

Далее, каждой функции $f \in \mathcal{E}$ ставится в соответствие линейный оператор в полных частных производных

$$f_* : \mathcal{E} \to \mathcal{E}, \quad h \mapsto f_*(h), \quad f_*(h)^\alpha = \sum_{\beta,j} \big(\partial_{u_j^\beta} f^\alpha\big) \cdot D_j h^\beta,$$

и его дуальный по Лагранжу

$$f^* : \mathcal{E}^* \to \mathcal{E}^*, \quad g \mapsto f^*(g), \quad f^*(g)_\beta = \sum_{\alpha,i} (-1)^{|i|} D_i\big((\partial_{u_i^\beta} f^\alpha) \cdot g_\alpha\big).$$

Наконец, каждой функции $g \in \mathcal{E}^*$ ставится в соответствие линейный оператор в полных частных производных

$$g_* : \mathcal{E} \to \mathcal{E}^*, \quad h \mapsto g_*(h), \quad g_*(h)_\alpha = \sum_{\beta,j} \big(\partial_{u_i^\beta} g_\alpha\big) \cdot D_j h^\beta,$$

и его дуальный по Лагранжу

$$g^* : \mathcal{E} \to \mathcal{E}^*, \quad h \mapsto g^*(h), \quad g^*(h)_\beta = \sum_{\alpha,i} (-1)^{|i|} D_i\big((\partial_{u_i^\beta} g_\alpha) \cdot h^\alpha\big).$$

2.1.7 Симметрии

Нормализатор подалгебры $\mathfrak{C}(\mathcal{A})$ в алгебре Ли $\mathfrak{D}(\mathcal{A})$ есть множество

$$\mathfrak{LB}(\mathcal{A}) = \big\{X \in \mathfrak{D}(\mathcal{A}) \mid [X, Y] \in \mathfrak{C}(\mathcal{A}) \quad \text{для всех} \quad Y \in \mathfrak{C}(\mathcal{A})\big\}.$$

Согласно Предложению 1.4.1, $\mathfrak{LB}(\mathcal{A})$ есть подалгебра алгебры Ли $\mathfrak{D}(\mathcal{A})$, а $\mathfrak{C}(\mathcal{A})$ – ее идеал, так что определена фактор-алгебра $\operatorname{Sym}\mathfrak{C}(\mathcal{A}) = \mathfrak{LB}(\mathcal{A})/\mathfrak{C}(\mathcal{A})$.

Предложение 2.1.6. *Вертикальное дифференцирование* $V \in \mathfrak{V}(\mathcal{A})$ *удовлетворяет равенствам*

$$[V, D_\mu] = 0, \quad 1 \leq \mu \leq m,$$

тогда и только тогда, когда

$$V = \mathrm{E}_f = \sum_{\alpha \in \mathrm{A}, i \in \mathbb{I}} (D_i f^\alpha) \cdot \partial_{u_i^\alpha} \quad \textit{для некоторого} \quad f \in \mathcal{E}.$$

Доказательство. Действительно, пусть $V = \sum_{\alpha,i} \zeta_i^\alpha \cdot \partial_{u_i^\alpha}$ тогда

$$\begin{aligned}[V, D_\mu] &= \sum_{\alpha,i} \big(V(u^\alpha_{i+(\mu)}) - D_\mu(\zeta_i^\alpha)\big) \cdot \partial_{u_i^\alpha} \\ &= \sum_{\alpha,i} \big(\zeta^\alpha_{i+(\mu)} - D_\mu(\zeta_i^\alpha)\big) \cdot \partial_{u_i^\alpha} = 0 \quad \text{для всех} \quad 1 \leq \mu \leq m\end{aligned}$$

тогда и только тогда, когда $\zeta^\alpha_{i+(\mu)} = D_\mu \zeta_i^\alpha$ для всех $1 \leq \mu \leq m$, $\alpha \in \mathrm{A}$, $i \in \mathbb{I}$. Последнее, очевидно, имеет место лишь при условии $\zeta_i^\alpha = D_i f^\alpha$, где $f^\alpha = \zeta_0^\alpha$. □

Замечание. Обратим внимание на равенство

$$\mathrm{E}_f(L) = L_*(f) \quad \text{для всех} \quad f \in \mathcal{E},\ L \in \mathcal{A}.$$

Дифференцирования E_f, $f \in \mathcal{E}$, называются *эволюционными*, множество

$$\mathfrak{E}(\mathcal{A}) = \big\{E_f \in \mathfrak{V}(\mathcal{A}) \mid f \in \mathcal{E}\big\}$$

образует подалгебру алгебры Ли $\mathfrak{V}(\mathcal{A})$, поскольку справедливо

Предложение 2.1.7. *Имеют место равенства*

$$[E_f, E_g] = E_h \quad \textit{для всех} \quad f, g \in \mathcal{E},$$

где $h^\alpha = E_f(g^\alpha) - E_g(f^\alpha)$, $\alpha \in \mathrm{A}$.

Доказательство. Предлагается проделать в качестве упражнения. □

Предложение 2.1.8. *Имеет место изоморфизм алгебр Ли*

$$\operatorname{Sym} \mathfrak{C}(\mathcal{A}) = \mathfrak{LB}(\mathcal{A}) \big/ \mathfrak{C}(\mathcal{A}) \simeq \mathfrak{E}(\mathcal{A}).$$

Доказательство. Действительно, пусть $X = C + V \in \mathfrak{D}(\mathcal{A})$, где $C \in \mathfrak{C}(\mathcal{A})$, $V \in \mathfrak{V}(\mathcal{A})$. По построению $[C, Y] \in \mathfrak{C}(\mathcal{A})$ для любого $Y \in \mathfrak{C}(\mathcal{A})$, так что $X \in \mathfrak{LB}(\mathcal{A})$ тогда и только тогда, когда $[V, Y] \in \mathfrak{C}(\mathcal{A})$ для всех $Y \in \mathfrak{C}(\mathcal{A})$. Легко проверяется (проделать это в качестве упражнения!), что последнее имеет место тогда и только тогда, когда $[V, D_\mu] = 0$ для всех $1 \leq \mu \leq m$, т. е. когда (см. Предложение 2.1.6) $V = \mathrm{E}_f$ с некоторым $f \in \mathcal{E}$. Таким образом, в каждом классе эквивалентности из $\operatorname{Sym} \mathfrak{C}(\mathcal{A})$ имеется представитель из $\mathfrak{E}(\mathcal{A})$. Очевидно такой представитель единственный, и применение Предложения 2.1.7 завершает доказательство. □

2.1.8 Дифференциальные формы

Определен свободный $\mathcal{A}$-модуль

$$\Omega(\mathbb{J}) = \Omega(\mathcal{A}, \mathfrak{D}(\mathcal{A}), \mathcal{A}) = \oplus_{q \in \mathbb{Z}_+} \Omega^q(\mathbb{J})$$

дифференциальных форм на пространстве джетов $\mathbb{J}$, где

$$\Omega^q(\mathbb{J}) = \operatorname{Hom}_{\mathcal{A}}(\wedge^q \mathfrak{D}(\mathcal{A}), \mathcal{A}), \quad q \in \mathbb{Z}_+.$$

В частности,

$$\Omega^1(\mathbb{J}) = \mathfrak{D}^* = \left\{ \omega = \sum_\mu \omega_\mu \cdot dx^\mu + \sum_{\alpha, i} \omega^i_\alpha \cdot du^\alpha_i \;\middle|\; \omega_\mu, \omega^i_\alpha \in \mathcal{A} \right\},$$

где лишь конечное число компонент $\omega^i_\alpha \neq 0$, а семейство

$$\left\{ dx^\mu, du^\alpha_i \in \Omega^1(\mathbb{J}) \mid 1 \leq \mu \leq m,\ \alpha \in \mathrm{A},\ i \in \mathbb{I} \right\}$$

есть базис в $\mathcal{A}$-модуле $\Omega^1(\mathbb{J})$, дуальный к базису

$$\left\{ \partial_{x^\mu}, \partial_{u^\alpha_i} \in \mathfrak{D}(\mathcal{A}) \mid 1 \leq \mu \leq m,\ \alpha \in \mathrm{A},\ i \in \mathbb{I} \right\}$$

в $\mathcal{A}$-модуле $\mathfrak{D}(\mathcal{A})$. Детальное представление при $q > 1$ достаточно громоздкое и имеет следующую структуру

$$\Omega^q(\mathbb{J}) = \wedge^q \Omega^1(\mathbb{J}),$$

где внешняя степень берется в категории $\mathcal{A}$-модулей.

2.1.9 Вариационный бикомплекс

В согласии с общим определением форма $\omega \in \Omega^q(\mathbb{J})$, называется p-картановой, если $\omega(X_1 \wedge \ldots \wedge X_q) = 0$ при $X_1, \ldots, X_{p-1} \in \mathfrak{D}(\mathcal{A})$ и $X_p, \ldots, X_q \in \mathfrak{C}(\mathcal{A})$, где $p, q \in \mathbb{Z}_+$ (см. раздел 1.4.3, стр. 35). Обозначим через $\mathfrak{C}^p\Omega^q(\mathbb{J})$ $\mathcal{A}$-модуль всех p-картановых q-форм на пространстве джетов $\mathbb{J}$.

В частности, 1-формы

$$\delta u_i^\alpha = du_i^\alpha - \sum_\nu u^\alpha_{i+(\nu)} \cdot dx^\nu \in \mathfrak{C}^1\Omega^1(\mathbb{J}) \quad \text{для всех} \quad \alpha \in \mathrm{A},\ i \in \mathbb{I},$$

поскольку

$$\begin{aligned}\delta u_i^\alpha(D_\mu) &= D_\mu(u_i^\alpha) - \sum_\nu u^\alpha_{i+(\nu)} D_\mu(x^\nu) \\ &= u^\alpha_{i+(\mu)} - \sum_\nu u^\alpha_{i+(\nu)}\delta^\nu_\mu = 0 \quad \text{для всех} \quad 1 \le \mu \le m.\end{aligned}$$

Отсюда следует, что всякая 1-форма $\omega \in \Omega^1(\mathbb{J})$ имеет два представления:

$$\omega = \sum_\mu \omega_\mu \cdot dx^\mu + \sum_{\alpha,i} \omega^i_\alpha \cdot du_i^\alpha = \sum_\mu \chi_\mu \cdot dx^\mu + \sum_{\alpha,i} \omega_i^\alpha \cdot \delta u_i^\alpha,$$

где $\chi_\mu = \omega_\mu + \sum_{\alpha,i} \omega^i_\alpha \cdot u^\alpha_{i+(\mu)}$.

Таким образом, семейство

$$\left\{dx^\mu, \delta u_i^\alpha \in \Omega^1(\mathbb{J}) \mid 1 \le \mu \le m,\ \alpha \in \mathrm{A},\ i \in \mathbb{I}\right\}$$

образует альтернативный базис в $\mathcal{A}$-модуле $\Omega^1(\mathbb{J})$, более удобный для наших целей. В частности, имеет место разложение в прямую сумму $\mathcal{A}$-модулей

$$\Omega^1(\mathbb{J}) = \Omega^{01}(\mathbb{J}) \oplus \Omega^{10}(\mathbb{J}),$$

где

$$\Omega^{01}(\mathbb{J}) = \left\{\omega = \sum_\mu \omega_\mu \cdot dx^\mu\right\}, \quad \Omega^{10}(\mathbb{J}) = \left\{\omega = \sum_{\alpha,i} \omega^i_\alpha \cdot \delta u_i^\alpha\right\}$$

В случае $q > 1$ ситуация аналогичная:

$$\begin{aligned}\Omega^q(\mathbb{J}) &= \oplus_{p+s=q}\big(\wedge^p \Omega^{10}(\mathbb{J})\big) \wedge \big(\wedge^s \Omega^{01}(\mathbb{J})\big) \\ &= \oplus_{p+s=q}\Omega^{p0}(\mathbb{J}) \wedge \Omega^{0s}(\mathbb{J}) = \oplus_{p+s=q}\Omega^{ps}(\mathbb{J}).\end{aligned}$$

Итак, справедливо

Предложение 2.1.9. *$\mathcal{A}$-модуль $\Omega(\mathbb{J})$ биградуирован:*

$$\Omega(\mathbb{J}) = \oplus_{p,s\in\mathbb{Z}_+}\Omega^{ps}(\mathbb{J}).$$

Посмотрим теперь как обстоят дела с внешним дифференциалом $d : \Omega^q(\mathbb{J}) \to \Omega^{q+1}(\mathbb{J})$, $q \in \mathbb{Z}_+$.

Пусть $f \in \mathcal{A} = \Omega^0(\mathbb{J}) = \Omega^{00}(\mathbb{J})$, тогда

$$\begin{aligned} df &= \sum_\mu (\partial_{x^\mu} f)\cdot dx^\mu + \sum_{\alpha,i}(\partial_{u_i^\alpha} f)\cdot du_i^\alpha \\ &= \sum_\mu (D_\mu f)\cdot dx^\mu + \sum_{\alpha,i}(\partial_{u_i^\alpha})\cdot \delta u_i^\alpha \\ &= d_H f + d_V f \in \Omega^{01}(\mathbb{J})\oplus\Omega^{10}(\mathbb{J}). \end{aligned}$$

Пусть $\omega = \sum_\mu \omega_\mu \cdot dx^\mu \in \Omega^{01}(\mathbb{J})$, тогда

$$\begin{aligned} d\omega &= \sum_\mu d\omega_\mu \wedge dx^\mu = \sum_\mu \big(d_H\omega_\mu + d_V\omega_\mu\big)\wedge dx^\mu \\ &= \sum_\mu (d_H\omega_\mu)\wedge dx^\mu + \sum_\mu (d_V\omega_\mu)\wedge dx^\mu \\ &= d_H\omega + d^{\mathbf{10}}\omega \in \Omega^{02}(\mathbb{J})\oplus\Omega^{11}(\mathbb{J}). \end{aligned}$$

Пусть $\omega = \sum_{\alpha,i}\omega_\alpha^i\cdot\delta u_i^\alpha \in \Omega^{10}(\mathbb{J})$, тогда

$$\begin{aligned} d\omega &= \sum_{\alpha,i}\big(d\omega_\alpha^i\wedge\delta u_i^\alpha + \omega_\alpha^i\cdot d\delta u_i^\alpha\big) \\ &= \sum_{\alpha,i}\big(d_H\omega_\alpha^i\wedge\delta u_i^\alpha + d_V\omega_\alpha^i\wedge\delta u_i^\alpha - \omega_\alpha^i\sum_\mu \delta u^\alpha_{i+(\mu)}\wedge dx^\mu\big) \\ &= \sum_{\alpha,i}\big(-\delta u_i^\alpha\wedge d_H\omega_\alpha^i - \omega_\alpha^i\sum_\mu\delta u^\alpha_{i+(\mu)}\wedge dx^\mu\big) + \sum_{\alpha,i} d_V\omega_\alpha^i\wedge\delta u_i^\alpha \\ &= d_H\omega + d_V\omega \in \Omega^{11}(\mathbb{J})\oplus\Omega^{20}(\mathbb{J}), \end{aligned}$$

поскольку

$$\begin{aligned} d\delta u_i^\alpha &= d\big(du_i^\alpha - \sum_\mu u^\alpha_{i+(\mu)} \cdot dx^\mu\big) = -\sum_\mu du^\alpha_{i+(\mu)} \wedge dx^\mu \\ &= -\sum_\mu \big(\delta u^\alpha_{i+(\mu)} + \sum_\nu u^\alpha_{i+(\mu)+(\nu)} \cdot dx^\nu\big) \wedge dx^\mu \\ &= -\sum_\mu \delta u^\alpha_{i+(\mu)} \wedge dx^\mu - \sum_{\mu,\nu} u^\alpha_{i+(\mu)+(\nu)} \cdot dx^\nu \wedge dx^\mu \\ &= -\sum_\mu \delta u^\alpha_{i+(\mu)} \wedge dx^\mu \in \Omega^{11}(\mathbb{J}). \end{aligned}$$

В общем случае справедливо

Предложение 2.1.10. *Имеет место представление*

$$d = d_H + d_V$$

где

$$\begin{aligned} d_H &: \Omega^{ps}(\mathbb{J}) \to \Omega^{p,s+1}(\mathbb{J}), \\ d_V &: \Omega^{ps}(\mathbb{J}) \to \Omega^{p+1,s}(\mathbb{J}). \end{aligned}$$

Доказательство. Достаточно воспользоваться приведенными выше вычислениями и тем фактом, что внешний дифференциал есть косое дифференцирование внешней алгебры $\Omega(\mathbb{J})$ (см. Предложение 1.3.20 на стр. 32). □

Более того, справедливо

Предложение 2.1.11. *Выполняются равенства:*

$$d_H \circ d_H = d_H \circ d_V + d_V \circ d_H = d_V \circ d_V = 0.$$

Доказательство. Действительно,

$$\begin{aligned} d \circ d &= (d_H + d_V) \circ (d_H \circ d_V) \\ &= d_H \circ d_H + (d_H \circ d_V + d_V \circ d_H) + d_V \circ d_V = 0, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} d_H \circ d_H &: \Omega^{ps}(\mathbb{J}) \to \Omega^{p,s+2}(\mathbb{J}), \\ d_H \circ d_V + d_V \circ d_H &: \Omega^{ps}(\mathbb{J}) \to \Omega^{p+1,s+1}(\mathbb{J}), \\ d_V \circ d_V &: \Omega^{ps}(\mathbb{J}) \to \Omega^{p+2,s}(\mathbb{J}), \end{aligned}$$

и для завершения доказательства следует воспользоваться Предложением 2.1.9. □

Подводя итоги, приходим к выводу, что справедлива

Теорема 1. *Определен бикомплекс*

$$\{\Omega^{ps}(\mathbb{J}), d_H^{ps}, d_V^{ps} \mid p, s \in \mathbb{Z}_+\},$$

где $d_H^{ps} = d_H\big|_{\Omega^{ps}(\mathbb{J})}$, $d_V^{ps} = d_V\big|_{\Omega^{ps}(\mathbb{J})}$.

Замечание. Построенный бикомплекс играет важную роль в вариационном исчислении (особенно в формальном вариационном исчислении), и посему называется *вариационным*. Дифференциал d_H обычно называют *горизонтальным*, а дифференциал d_V – *вертикальным* (см., например, [1]). Очевидно, $\Omega^{ps}(\mathbb{J}) = 0$ при $s \geq m$. (По поводу бикомплексов см., например, [12], раздел 1.6.4.. Важная в приложениях составляющая бикомплекса подробно описана в [18].)

Добавим к вариационному бикомплексу стандартный комплекс де Рама пространства $\mathbb{R}^m$

$$\left\{\Omega_R^s(\mathbb{R}^m), d_R^s \mid 0 \leq s \leq m\right\}$$

где

$$\Omega_R^s(\mathbb{R}^m) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^m)}(\wedge^s \mathfrak{D}(\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^m)), \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^m)),$$

$d^s \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\Omega_R^s(\mathbb{R}^m), \Omega^{s+1}(\mathbb{R}^m))$ – внешний дифференциал

(см., например [12], раздел 2.4.2). Естественные вложения

$$0 \longrightarrow \Omega_R^s(\mathbb{R}^m) \xrightarrow{\pi_J^*} \Omega^s(\mathbb{J}), \quad 0 \leq s \leq m,$$

индуцированы проекцией $\pi_J : \mathbb{J} = \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{\mathrm{A}}_{\mathbb{I}} \to \mathbb{R}^m$.

Добавим еще комплекс *функциональных форм*

$$\left\{\mathfrak{F}^p(\mathbb{J}), \delta^p \mid p \in \mathbb{Z}_+\right\},$$

где

фактор-модули $\mathfrak{F}^p(\mathbb{J}) = \Omega^{pm}(\mathbb{J}) \big/ \operatorname{im} d_H^{p,m-1}$ суть $\mathcal{A}$-модули *функциональных форм*,

фактор-дифференциалы $\delta^p : \mathfrak{F}^p(\mathbb{J}) \to \mathfrak{F}^{p+1}(\mathbb{J})$ действуют по стандартному правилу $[\omega] \mapsto \delta^p[\omega] = [d_V\omega]$ и называются *вариационными* (иначе, *функциональными*) *дифференциалами*.

По построению, имеем канонические проекции $\Omega^{pm}(\mathbb{J}) \to \mathfrak{F}^p(\mathbb{J})$, $p \in \mathbb{Z}_+$.

В результате этих построений получаем *пополненный вариационный бикомплекс*, изображенный на Рис. 2.1, где ради экономии места, пришлось изъять индексы у всех дифференциалов, положить $\Omega^{ps} = \Omega^{ps}(\mathbb{J})$, $\mathfrak{F}^p = \mathfrak{F}^p(\mathbb{J})$, $\Omega^s_R = \Omega^s_R(\mathbb{R}^m)$, и максимально сократить число столбцов.

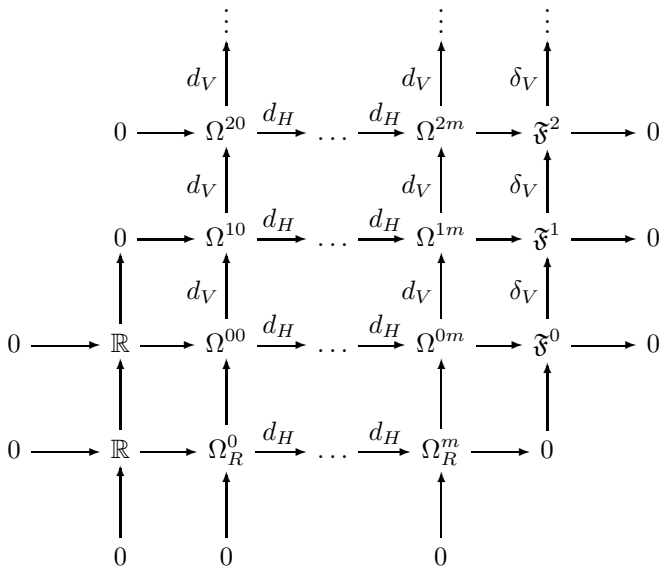


Рис. 2.1: Пополненный бикомплекс

Теорема 2. *Пополненный вариационный бикомплекс ациклический, т. е. все его строки и столбцы точные.*

Доказательство. Доказательство этой теоремы весьма кропотливое, требует введения ряда специальных операторов (например, операторов Эйлера высшего порядка) и выходит за рамки

данных лекций. Желающие могут ознакомиться с ним, например, по книге [1]. В этом случае полезно предварительно прочитать соответствующую главу книги [18]. □

Замечание. $\mathcal{A}$-модули $\mathfrak{F}^p$, $p \in \mathbb{N}$, и вариационные дифференциалы δ^p, $p \in \mathbb{Z}_+$, имеют конструктивное описание, которое также можно найти в книгах [1] и [18].

2.1.10 Спектральная последовательность

Обозначив через $\mathfrak{C}^p\Omega^q(\mathbb{J})$ $\mathcal{A}$-модуль всех p-картановых q-форм на пространстве $\mathbb{J}$, получим убывающие фильтрации

$$\Omega^q(\mathbb{J}) = \mathfrak{C}^0\Omega^q(\mathbb{J}) \supset \mathfrak{C}^1\Omega^q(\mathbb{J}) \supset \cdots \supset \mathfrak{C}^q\Omega^q(\mathbb{J}) \supset 0, \quad q \in \mathbb{Z}_+,$$

со свойствами, описанными в разделе 1.4.3. Согласно Предложению 2.1.10, эта фильтрация совместима с внешним дифференциалом d, так что определена градуированная *спектральная последовательность*

$$\bigl\{E_r^{pq}(\mathbb{J}), d_r^{pq} \mid p, q, r \in \mathbb{Z}_+\bigr\},$$

со свойствами, приведенными в разделе 1.4.4. По построению (см., например, [12], раздел 1.7),

$$E_0^{pq}(\mathbb{J}) = \mathfrak{C}^p\Omega^{p+q}(\mathbb{J})\big/\mathfrak{C}^{p+1}\Omega^{p+q}(\mathbb{J}) = \begin{cases}\Omega^{pq}(\mathbb{J}), & p \in \mathbb{Z}_+, 0 \leq q \leq m;\\ 0, & \text{в других случаях.}\end{cases}$$

В свою очередь, дифференциалы $d_0^{pq} : E_0^{pq}(\mathbb{J}) \to E_0^{p,q+1}(\mathbb{J})$ в общем случае действуют по правилу

$$d_0^{pq}[\omega]_0^{pq} = [d\omega]_0^{p,q+1} \quad \text{для всех} \quad [\omega]_0^{pq} \in E_0^{pq}(\mathbb{J}),$$

что в данном случае, очевидно, сводится к

$$d_0^{pq} = d_H^{pq} : \Omega^{pq}(\mathbb{J}) \to \Omega^{p,q+1}(\mathbb{J}).$$

Далее,

$$E_1^{pq}(\mathbb{J}) = \ker d_0^{pq}\big/\operatorname{im} d_0^{p,q-1} = \ker d_H^{pq}\big/\operatorname{im} d_H^{p,q-1}$$
$$= \begin{cases}\mathfrak{F}^p(\mathbb{J}), & p \in \mathbb{Z}_+, q = m,\\ 0, & \text{в других случаях,}\end{cases}$$

поскольку, в силу Теоремы 2, строки пополненного вариационного бикомплекса точные.

Дифференциалы $d_1^{pm} : E_1^{pm}(\mathbb{J}) \to E_1^{p+1,m}(\mathbb{J})$ действуют по правилу

$$d_1^{pm}[\omega]_1^{pm} = [d\omega]_1^{p+1,m} = [d_V]_1^{p+1,m} \quad \text{для всех} \quad [\omega]_1^{pm} \in E_0^{pq}(\mathbb{J}),$$

так как $d_H\omega = 0$ для любой формы $\Omega^{pm}(\mathbb{J})$. Следовательно,

$$d_1^{pm} = \delta^p : \mathfrak{F}^p(\mathbb{J}) \to \mathfrak{F}^{p+1}(\mathbb{J}).$$

В частности,

$$E_2^{pm}(\mathbb{J}) = \ker d_1^{pm} \big/ \operatorname{im} d_1^{p-1,m} = \ker \delta^p \big/ \operatorname{im} \delta^{p-1} = 0, \quad p \in \mathbb{Z}_+,$$

в силу точности столбцов пополненного вариационного бикомплекса (см. Теорему 2). Подводя итоги, приходим к выводу, что справедлива

Теорема 3. *Спектральная последовательность* $\{E_r^{pq}(\mathbb{J}), d_r^{pq}\}$ *имеет вид*

$$E_r^{pq}(\mathbb{J}) = \begin{cases} \mathbb{R}, & r \in \mathbb{N},\ p = q = 0, \\ \Omega^{pq}(\mathbb{J}), & r = 0,\ p \in \mathbb{Z}_+,\ 0 \leq q \leq m, \\ \mathfrak{F}^p(\mathbb{J}), & r = 1,\ p \in \mathbb{Z}_+,\ q = m, \\ 0, & \textit{в других случаях}, \end{cases}$$

$$d_r^{pq} = \begin{cases} d_H^{pq}, & r = 0,\ p \in \mathbb{Z}_+,\ 0 \leq q \leq m, \\ \delta^p, & r = 1,\ p \in \mathbb{Z}_+,\ q = m, \\ 0, & \textit{в других случаях}. \end{cases}$$

2.1.11 Элементы формального вариационного исчисления

Выделим здесь элементы вариационного бикомплекса, играющие ведущую роль в формальном вариационном исчислении.

Линейное пространство *функционалов* (иначе, *действий*)2

$$\mathfrak{F}^0(\mathbb{J}) = \Omega^{0m}(\mathbb{J}) \big/ \operatorname{im} d_H^{0,m-1}.$$

Здесь $\mathcal{A}$-модуль *лагранжианов*

$$\Omega^{0m}(\mathbb{J}) = \big\{\omega = L \cdot d^m x \mid L \in \mathcal{A}\big\} \simeq \mathcal{A},$$

где $d^m x = dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^m$, а линейное пространство *тривиальных* (иначе, *нулевых*) *лагранжианов*

$$\operatorname{im} d^{0,m-1} = \{\omega = d_H\chi \mid \chi \in \Omega^{0,m-1}(\mathbb{J})\}.$$

Легко проверяется, что имеет место представление

$$\Omega^{0,m-1}(\mathbb{J}) = \left\{\chi = \sum_\mu J^\mu \cdot d_\mu x \mid J^\mu \in \mathcal{A},\ 1 \le \mu \le m\right\} \simeq \mathcal{A}^m,$$

где $d_\mu x = (-1)^{\mu-1} dx^1 \wedge \ldots \check{dx^\mu} \ldots \wedge dx^m$, значок $\check{}$ как всегда означает, что стоящий под ним элемент пропущен. Более того, для $\chi = \sum_\mu J^\mu \cdot d_\mu x$ горизонтальный дифференциал

$$d_H\chi = \sum_\mu d_H J^\mu \wedge d_\mu x = \operatorname{Div} J \cdot d^m x,$$

где *полная дивергенция*

$$\operatorname{Div} J = \sum_\mu D_\mu J^\mu \quad \text{для всех} \quad J = (J^\mu) \in \mathcal{A}^m.$$

Таким образом,

$$\operatorname{im} d_H^{0,m-1} = \{\omega = \operatorname{Div} J \cdot d^m x \mid J \in \mathcal{A}^m\} \simeq \operatorname{Div}\mathcal{A}^m.$$

Отметим, что в классах эквивалентности $[\omega] \in \mathfrak{F}^0(\mathbb{J})$ не существует естественного способа выделения канонического представителя.

Следующий объект – $\mathcal{A}$-модуль *функциональных* 1-*форм*

$$\mathfrak{F}^1(\mathbb{J}) = \Omega^{1m}(\mathbb{J}) \big/ \operatorname{im} d_H^{1,m-1}.$$

Здесь,

$$\Omega^{1m}(\mathbb{J}) = \left\{\omega = \sum_{\alpha,i} \omega^i_\alpha \cdot \delta u^\alpha_i \wedge d^m x \,\middle|\, \omega^i_\alpha \in \mathcal{A}\right\},$$

$$\operatorname{im} d_H^{1,m-1} = \left\{\omega = d_H\chi \mid \chi \in \Omega^{1,m-1}(\mathbb{J})\right\},$$

$$\Omega^{1,m-1}(\mathbb{J}) = \left\{\chi = \sum_{\alpha,i,\mu} \chi^{i\mu}_\alpha \cdot \delta u^\alpha_i \wedge d_\mu x \,\middle|\, \chi^{i\mu}_\alpha \in \mathcal{A}\right\}.$$

Замечание. Обратим внимание, что $\delta u_i^\alpha \wedge d^m x = du_i^\alpha \wedge d^m x$.

Далее (напомним, что $d_H \delta u_i^\alpha = d\delta u_i^\alpha = -\sum_\nu \delta u_{i+(\nu)}^\alpha \wedge dx^\nu$),

$$\begin{aligned} d_H\bigl(\chi_\alpha^{i\mu} \cdot \delta u_i^\alpha \wedge d_\mu x\bigr) &= (d_H \chi_\alpha^{i\mu}) \wedge \delta u_i^\alpha \wedge d_\mu x + \chi_\alpha^{i\mu} \cdot (d_H \delta u_i^\alpha) \wedge d_\mu x \\ &= \sum_\nu (D_\nu \chi_\alpha^{i\mu}) \cdot dx^\nu \wedge \delta u_i^\alpha \wedge d_\mu x - \chi_\alpha^{i\mu} \cdot \sum_\nu \delta u_{i+(\nu)}^\alpha \wedge dx^\nu \wedge d_\mu x \\ &= -(D_\mu \chi_\alpha^{i\mu}) \cdot \delta u_i^\alpha \wedge d^m x - \chi_\alpha^{i\mu} \cdot \delta u_{i+(\mu)}^\alpha \wedge d^m x. \end{aligned}$$

В частности,

$$\omega_\alpha^i \cdot \delta u_i^\alpha \wedge d^m x = -(D_\mu \omega_\alpha^i) \cdot \delta u_{i-(\mu)}^\alpha \wedge d^m x + d_H \varrho$$

для некоторой формы $\varrho \in \Omega^{1,m-1}$ (которую, кстати, нетрудно выписать, полезно проделать это в качестве упражнения). По индукции, отсюда выводим

$$\omega_\alpha^i \cdot \delta u_i^\alpha \wedge d^m x = (-1)^{|i|} (D_i \omega_\alpha^i) \cdot \delta u^\alpha \wedge d^m x + d_H \chi$$

для некоторой $\chi \in \Omega^{1,m-1}$ (которую, также полезно выписать), где $u^\alpha = u_0^\alpha$, так что $\delta u^\alpha = \delta u_0^\alpha$.

Предложение 2.1.12. *В классе эквивалентности $[\omega] \in \mathfrak{F}^1(\mathbb{J})$ формы*

$$\omega = \sum_{\alpha,i} \omega_\alpha^i \cdot \delta u_i^\alpha \wedge d^m x \in \Omega^{1m}(\mathbb{J})$$

*имеется один и только один представитель (*канонический представитель*) вида*

$$\widetilde{\omega} = \sum_{\alpha \in \mathrm{A}} \omega_\alpha \cdot \delta u^\alpha \wedge d^m x \in \Omega^{1m}(\mathbb{J}), \qquad \omega_\alpha = \sum_i (-1)^{|i|} D_i \omega_\alpha^i \in \mathcal{A}.$$

Доказательство. В свете предыдущих построений, следует доказать лишь единственность представителя указанного вида. Пусть $\omega = \sum_\alpha \omega_\alpha \cdot \delta u^\alpha \wedge d^m x = d_H \chi$, где $\chi = \sum_{|i| \le N, \alpha, \mu} \chi_\alpha^{i\mu} \cdot \delta u_i^\alpha \wedge d_\mu x$, т. е. χ имеет порядок $\le N$ (напомним, что у всякой формы $\omega \in \Omega(\mathbb{J})$

лишь конечное число компонент $\omega^{\dots}_{\dots} \neq 0$). Тогда

$$\begin{aligned} d_H\chi &= \sum_{|i|\leq N,\alpha,\mu} \Big(d_H\chi^{i\mu}_\alpha \wedge \delta u^\alpha_i + \chi^{i\mu}_\alpha \cdot d_H \delta u^\alpha_i \Big) \wedge d_\mu x \\ &= - \sum_{|i|\leq N,\alpha,\mu} \Big(\chi^{i\mu}_\alpha \cdot \delta u^\alpha_{i+(\mu)} + \big(D_\mu \chi^{i\mu}_\alpha\big) \cdot \delta u^\alpha_i \Big) \wedge d^m x \\ &= -\Big(\sum_{|i|=N,\alpha,\mu} \chi^{i\mu}_\alpha \cdot \delta u^\alpha_{i+(\mu)} + \dots \Big) \wedge d^m x = \sum_\alpha \omega_\alpha \cdot \delta u^\alpha \wedge d^m x, \end{aligned}$$

где $\dots$ означают члены порядка $\leq N$. Следовательно, компоненты $\chi^{i\mu}_\alpha = 0$ для всех $|i| = N$, т. е. форма χ имеет порядок $\leq (N-1)$. Повторяя эти рассуждения, приходим к выводу, что форма χ имеет порядок ≤ 0). причем

$$\begin{aligned} d_H\chi &= -\sum_{\alpha,\mu} \big(\chi^\mu_\alpha \cdot \delta u^\alpha_{(\mu)} + \big(D_\mu \chi^\mu_\alpha\big) \cdot \delta u^\alpha \big) \wedge d^m x \\ &= \sum_\alpha \omega_\alpha \cdot \delta u^\alpha \wedge d^m x. \end{aligned}$$

Таким образом, компоненты $\chi^\mu_\alpha = 0$, форма $\chi = 0$, а значит и форма $\omega = 0$. □

Следствие 2.1.1. *Имеет место естественный изоморфизм линейных пространств*

$$\mathfrak{F}^1(\mathbb{J}) \simeq \left\{ \omega = \sum_\alpha \omega_\alpha \cdot \delta u^\alpha \wedge d^m x \;\middle|\; \omega_\alpha \in \mathcal{A} \right\} \simeq \mathcal{E}^*.$$

Всюду ниже будем отождествлять класс эквивалентности с его каноническим представителем, так что левый знак изоморфизма в Следствии 2.1.1 в можно заменить на знак равенства.

Предложение 2.1.13. *Вариационный дифференциал*

$$\delta^0 : \mathfrak{F}^0(\mathbb{J}) \to \mathfrak{F}^1(\mathbb{J}), \quad \delta^0[\omega] = [d_V \omega],$$

действует по правилу

$$\delta^0[\omega] = \sum_\alpha \big(\delta_{u^\alpha} L\big) \cdot \delta u^\alpha \wedge d^m x, \quad \textit{для всех} \quad \omega = L \cdot d^m x \in \Omega^{0m}(\mathbb{J}),$$

где вариационные производные

$$\delta_{u^\alpha} L = \sum_i (-1)^{|i|} D_i\big(\partial_{u^\alpha_i} L\big) \quad \textit{для всех} \quad L \in \mathcal{A},\ \alpha \in \mathrm{A}.$$

Доказательство. Действительно, пусть $\omega = L \cdot d^m x \in \Omega^{0m}(\mathbb{J})$, тогда образ $d_V\omega = \sum_{\alpha,i} \big(\partial_{u^\alpha_i} L\big) \cdot \delta u^\alpha_i \wedge d^m x$, и его канонический представитель $\widetilde{d_V\omega} = \sum_{\alpha,i} (-1)^{|i|} D_i\big(\partial_{u^\alpha_i} L\big) \cdot \delta u^\alpha \wedge d^m x$, что и требовалось доказать. □

В частности, определено линейное отображение (*оператор Эйлера-Лагранжа*)

$$\delta_u : \mathcal{A} \to \mathcal{E}^*, \quad L \mapsto \delta_u L = \big(\delta_{u^\alpha} L\big) = L^*(1), \quad 1 \in \mathcal{A}.$$

Точность крайнего правого столбца пополненного вариационного бикомплекса в члене $\mathfrak{F}^0(\mathbb{J})$ означает, что ядро

$$\ker \delta_u = \mathrm{Div}\mathcal{A}^m \simeq \operatorname{im} d_H^{0,m-1}.$$

С другой стороны, справедливо

Предложение 2.1.14. *Образ*

$$\operatorname{im} \delta_u = \big\{ g \in \mathcal{E}^* \mid g_* = g^* \big\}.$$

Доказательство. Напомним, сначала, что для данной функции $g \in \mathcal{E}^*$ линейные операторы $g_*, g^* : \mathcal{E} \to \mathcal{E}^*$ определены в разделе 2.1.6 на стр. 48. Итак, с одной стороны можно проверить (см. например, [1] или [18]). что если $g = \delta L$ для некоторого $L \in \mathcal{A}$, то $g_* = g^*$. С другой стороны, пусть $g \in \mathcal{E}^*$, и $g_* = g^*$. Модифицируя формулу Пуанкаре (см., например, [12], Лемма Пуанкаре), положим

$$L = \int_0^1 \sum_\beta u_0^\beta \cdot g_\beta(x, \lambda \mathbf{u}) d\lambda,$$

тогда

$$
\begin{aligned}
\delta_{u^\alpha} L &= \sum_i (-1)^{|i|} D_i\big(\partial_{u_i^\alpha} L\big) \\
&= \int_0^1 \sum_{i,\beta} (-1)^{|i|} D_i\big(\partial_{u_i^\alpha}\big(u_0^\beta \cdot g_\beta(x,\lambda\mathbf{u})\big)\big) d\lambda \\
&= \int_0^1 \Big[g_\alpha(x,\lambda\mathbf{u}) + \sum_{i,\beta} (-1)^{|i|} D_i\big(\big(\partial_{u_i^\alpha} g_\beta(x,\lambda\mathbf{u})\big) \cdot u_0^\beta\big)\Big] d\lambda \\
&= \int_0^1 \Big[g_\alpha(x,\lambda\mathbf{u}) + \lambda \sum_{i,\beta} (-1)^{|i|} \big(D_i\big(\big(\partial_{u_i^\alpha} g_\beta\big) \cdot u_0^\beta\big)\big)(x,\lambda\mathbf{u})\Big] d\lambda \\
&= \int_0^1 \Big[g_\alpha(x,\lambda\mathbf{u}) + \lambda \sum_{i,\beta} g^*(u_0)_\alpha(x,\lambda\mathbf{u})\Big] d\lambda \\
&= \int_0^1 \Big[g_\alpha(x,\lambda\mathbf{u}) + \lambda \sum_{i,\beta} g_*(u_0)_\alpha(x,\lambda\mathbf{u})\Big] d\lambda \\
&= \int_0^1 \Big[g_\alpha(x,\lambda\mathbf{u}) + \lambda \sum_{i,\beta} \big((\partial_{u_i^\beta} g_\alpha)(D_i u_0^\beta)\big)(x,\lambda\mathbf{u})\Big] d\lambda \\
&= \int_0^1 \Big[g_\alpha(x,\lambda\mathbf{u}) + \lambda \sum_{i,\beta} u_i^\beta \big(\partial_{u_i^\beta} g_\alpha\big)(x,\lambda\mathbf{u})\Big] d\lambda \\
&= \int_0^1 \frac{\partial}{\partial\lambda}\Big[\lambda \cdot g_\alpha(x,\lambda\mathbf{u})\Big] d\lambda = \Big(\lambda \cdot g_\alpha(x,\lambda\mathbf{u})\Big)\Big|_0^1 = g_\alpha(x,\mathbf{u}),
\end{aligned}
$$

где $u_0 = (u_0^\alpha) \in \mathcal{E}$, и мы учли, что

$$
D_i u_0^\beta = u_i^\beta, \quad D_i\big(g_\beta(x,\lambda\mathbf{u})\big) = \big(D_i g_\beta\big)(x,\lambda\mathbf{u}).
$$

□

2.2 Эволюционные системы

2.2.1 Переменные

К переменным, введенным в разделе 2.1.1 (см. стр. 41), добавим еще одну независимую переменную – *время* $t \in \mathbb{R}$, а независимые переменные $x \in \mathbb{R}^m$ будем теперь называть *пространственными*. Так что теперь имеются пространство независимых переменных $\mathbb{R}^{1+m} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m$, пространство зависимых переменных

$\mathbb{R}^{\mathrm{A}}$, пространство дифференциальных переменных $\mathbb{R}^{\mathrm{A}}_{\mathbb{I}}$, пространство пространственных джетов $\mathbb{J} = \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{\mathrm{A}}_{\mathbb{I}}$ и его расширение $\widetilde{\mathbb{J}} = \mathbb{R} \times \mathbb{J}$. Отметим, что дифференциальные переменные, включающие частные производные по t отсутствуют.

2.2.2 Функции

Новая независимая переменная приводит к модификации пространств функций. Именно:

- $\star$ $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^m)$ переходит в $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^{1+m})$;
- $\star$ $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^{\mathrm{A}})$ переходит в $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^{1+m}, \mathbb{R}^{\mathrm{A}})$;
- $\star$ $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^{\mathrm{A}}_{\mathbb{I}})$ переходит в $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^{1+m}, \mathbb{R}^{\mathrm{A}}_{\mathbb{I}})$;
- $\star$ $\mathcal{A} = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{J})$ переходит в $\widetilde{\mathcal{A}} = \mathcal{C}^\infty(\widetilde{\mathbb{J}})$;
- $\star$ $\mathcal{E} = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{J}, \mathbb{R}^{\mathrm{A}})$ переходит в $\widetilde{\mathcal{E}} = \mathcal{C}^\infty(\widetilde{\mathbb{J}}, \mathbb{R}^{\mathrm{A}})$;
- $\star$ $\mathcal{E}^* = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{J}, \mathbb{R}_{\mathrm{A}})$ переходит в $\widetilde{\mathcal{E}}^* = \mathcal{C}^\infty(\widetilde{\mathbb{J}}, \mathbb{R}_{\mathrm{A}})$.

2.2.3 Джеты

Определено линейное отображение

$$\boldsymbol{j} : \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^{1+m}, \mathbb{R}^{\mathrm{A}}) \to \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^{1+m}, \mathbb{R}^{\mathrm{A}}_{\mathbb{I}}), \quad \phi \mapsto \boldsymbol{\phi} = \boldsymbol{j}(\phi),$$

где $\phi = (\phi^\alpha(t,x))$, *пространственный джет* $\boldsymbol{j}(\phi) = (\phi^\alpha_i(t,x))$, компоненты $\phi^\alpha_i(t,x) = \partial_{x^i}\phi^\alpha(t,x)$, $\alpha \in \mathrm{A}$, $i \in \mathbb{I}$.

2.2.4 Мультипликаторы и дифференцирования

Опять алгебра мультипликаторов $\mathfrak{M}(\widetilde{\mathcal{A}}) = \widetilde{\mathcal{A}}$. Алгебра Ли дифференцирований алгебры $\widetilde{\mathcal{A}}$ есть свободный $\widetilde{\mathcal{A}}$-модуль

$$\mathfrak{D}(\widetilde{\mathcal{A}}) = \left\{ X = \tau \cdot \partial_t + \sum_\mu \xi^\mu \cdot \partial_{x^\mu} + \sum_{\alpha,i} \eta^\alpha_i \cdot \partial_{u^\alpha_i} \;\middle|\; \tau, \xi^\mu, \eta^\alpha_i \in \widetilde{\mathcal{A}} \right\}$$

с базисом $\{\partial_t, \partial_{x^\mu}, \partial_{u^\alpha_i} \mid 1 \le \mu \le m,\ \alpha \in \mathrm{A},\ i \in \mathbb{I}\}$, где ∂_t – частная производная по $t \in \mathbb{R}$. $\widetilde{\mathcal{A}}$-подмодуль *вертикальных дифференцирований* имеет вид

$$\mathfrak{V}(\widetilde{\mathcal{A}}) = \left\{ V = \sum_{\alpha,i} \zeta^\alpha_i \cdot \partial_{u^\alpha_i} \;\middle|\; \zeta^\alpha_i \in \widetilde{\mathcal{A}} \right\}.$$

Очевидно справедливо

Предложение 2.2.1. *$\widetilde{\mathcal{A}}$-модуль $\mathfrak{V}(\widetilde{\mathcal{A}})$ всех вертикальных дифференцирований алгебры $\widetilde{\mathcal{A}}$ является подалгеброй алгебры Ли $\mathfrak{D}(\widetilde{\mathcal{A}})$, причем*

$$[U,V]=W \quad \textit{для всех} \quad U=\sum \xi_i^\alpha\cdot\partial_{u_i^\alpha}, V=\sum\eta_i^\alpha\cdot\partial_{u_i^\alpha}\in\mathfrak{V}(\widetilde{\mathcal{A}}),$$

где $W=\sum\zeta_i^\alpha\cdot\partial_{u_i^\alpha}\in\mathfrak{V}(\widetilde{\mathcal{A}})$, компоненты $\zeta_i^\alpha=U(\eta_i^\alpha)-V(\xi_i^\alpha)$.

2.2.5 Пространственные полные производные

Определены *пространственные полные частные производные*

$$D_\mu=\partial_{x^\mu}+\sum_{\alpha,i}u^\alpha_{i+(\mu)}\cdot\partial_{u_i^\alpha}\in\mathfrak{D}(\widetilde{\mathcal{A}}),\quad 1\le\mu\le m.$$

Здесь время t является параметром, в частности справедливы все результаты предыдущей секции с соответствующими модификациями.

Будем теперь обозначать

$$f\big|_{\boldsymbol{\phi}}=f\big|_{\boldsymbol{\phi}}(t,x)=f(t,x,\boldsymbol{\phi}(t,x))\in\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^{1+m})$$

для всех $f=f(t,x,\mathbf{u})\in\widetilde{\mathcal{A}}$, $\boldsymbol{\phi}=\boldsymbol{\phi}(t,x)\in\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^{1+m},\mathbb{R}^{\mathrm{A}}_{\mathbb{I}})$. В частности,

$$f\big|_{\boldsymbol{j}(\phi)}=f\big|_{\boldsymbol{j}(\phi)}(t,x)=f(t,x,\boldsymbol{j}(\phi)(t,x))\in\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^{1+m})$$

для всех $f\in\mathcal{A}$, $\phi=\phi(t,x)\in\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^{1+m},\mathbb{R}^{\mathrm{A}})$.

Предложение 2.2.2. *Для данной функции $\boldsymbol{\phi}\in\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^{1+m},\mathbb{R}^{\mathrm{A}}_{\mathbb{I}})$ равенство*

$$\partial_{x^\mu}\big(f\big|_{\boldsymbol{\phi}}(t,x)\big)=\big(D_\mu f\big)\big|_{\boldsymbol{\phi}}(t,x)$$

справедливо для всех $f\in\widetilde{\mathcal{A}}$ тогда и только тогда, когда $\boldsymbol{\phi}=\boldsymbol{j}(\phi)$ для некоторой $\phi\in\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^{1+m},\mathbb{R}^{\mathrm{A}})$.

Доказательство. Достаточно воспользоваться доказанным выше Предложением 2.1.2, поскольку переменная t по сути является здесь параметром. □

Точно также (см. 2.1.3), справедливо

Предложение 2.2.3. *Пространственные полные частные производные коммутируют, т. е.*

$$[D_\mu,D_\nu]=0\quad\textit{для всех}\quad 1\le\mu,\nu\le m.$$

2.2.6 Эволюция

Для задания эволюции на пространстве $\mathbb{R}^m$ теперь необходима *эволюционная система уравнений в частных производных*, которая в наших обозначениях имеет вид $u_t = \mathrm{f}$, где $\mathrm{f} \in \widetilde{\mathcal{E}}$ – заданная функция, подробнее,

$$\partial_t u^\alpha = \mathrm{f}^\alpha(t, x, \mathbf{u}), \quad \alpha \in \mathrm{A}.$$

Функция $\phi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^{1+m}, \mathbb{R}^{\mathrm{A}})$ называется решением системы $u_t = \mathrm{f}$, если

$$\partial_t \phi^\alpha(t, x) = \mathrm{f}^\alpha\big|_{\boldsymbol{j}(\phi)}(t, x), \quad \alpha \in \mathrm{A}.$$

Определим *оператор* $D_t \in \mathfrak{D}(\widetilde{\mathcal{A}})$ *частной производной по времени в силу системы* $u_t = \mathrm{f}$ таким образом, чтобы интегральные подмногообразия распределения Картана

$$\mathfrak{C}(\mathrm{f}) = \left\{ X = \tau \cdot D_t + \sum_\mu \xi^\mu \cdot D_\mu \;\middle|\; \tau, \xi^\mu \in \widetilde{\mathcal{A}} \right\}$$

были индуцированы решениями системы $u_t = \mathrm{f}$ и только ими. Прежде всего положим $D_t = \partial_t + V$, где $V \in \mathfrak{V}(\widetilde{\mathcal{A}})$. Тогда свободный $\widetilde{\mathcal{A}}$-модуль $\mathfrak{C}(\mathrm{f})$ будет иметь необходимую размерность $1 + m$, а условие инволютивности распределения $\mathfrak{C}(\mathrm{f})$ сведется к естественным равенствам

$$[D_t, D_\mu] = 0 \quad \text{для всех} \quad 1 \le \mu \le m.$$

Очевидно, $[\partial_t, D_\mu] = 0$, так что условие инволютивности имеет вид $[V, D_\mu]$=0, $1 \le \mu \le m$, т. е. $V = \mathrm{E}_g$ с некоторой $g \in \widetilde{\mathcal{A}}$ (см. Предложение 2.1.6). Далее, интегральные подмногообразия распределения $\mathfrak{C}(\mathrm{f})$ имеют вид (см. Предложение 2.1.5)

$$\boldsymbol{\Phi} = \mathbf{u} - \boldsymbol{j}(\phi)(t, x) = \mathbf{0}, \quad \phi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^{1+m}, \mathbb{R}^{\mathrm{A}}).$$

Условия касания $\big(D_\mu \boldsymbol{\Phi}\big)\big|_{\boldsymbol{\Phi}=\mathbf{0}}$, $1 \le \mu \le m$, по построению выполняются для любой функции $\phi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^{1+m}, \mathbb{R}^{\mathrm{A}})$, а условие касания $\big(D_t \boldsymbol{\Phi}\big)\big|_{\boldsymbol{\Phi}=\mathbf{0}}$ подробнее запишется так:

$$\begin{aligned}
&\big[(\partial_t + \mathrm{E}_g)(u_i^\alpha - \phi_i^\alpha(t, x))\big]\big|_{\boldsymbol{\Phi}=\mathbf{0}} \\
&\qquad = \big((D_i g^\alpha)(t, x, \mathbf{u}) - \partial_t \partial_{x^i} \phi^\alpha(t, x)\big)\big|_{\mathbf{u}=\boldsymbol{j}(\phi)} \\
&\qquad = \partial_{x^i}\big(g^\alpha\big|_{\boldsymbol{j}(\phi)}(t, x) - \partial_t \phi^\alpha(t, x)\big) = 0
\end{aligned}$$

для всех $\alpha \in \mathrm{A}$, $i \in \mathbb{I}$, $t \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^m$, где мы воспользовались Предложением 2.2.2. Другими словами, это условие касания выполняется тогда и только тогда, когда ϕ есть решение системы $u_t = g$. Таким образом, поставленные условия на оператор D_t будут выполнены, если $g = \mathrm{f}$, т. е. когда

$$D_t = \partial_t + \mathrm{E_f} = \partial_t + \sum_{\alpha,i} D_i \mathrm{f}^\alpha \cdot \partial_{u_i^\alpha}.$$

В этом случае дополнительно справедливо

Предложение 2.2.4. *Для данной функции* $\phi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^{1+m}, \mathbb{R}^{\mathrm{A}})$ *равенство*

$$\partial_t\big(F\big|_{\boldsymbol{j}(\phi)}(t,x)\big) = \big(D_t F\big)\big|_{\boldsymbol{j}(\phi)}(t,x)$$

имеет место для всех $F \in \widetilde{\mathcal{A}}$ *тогда и только тогда, когда* ϕ *есть решение системы* $u_t = \mathrm{f}$.

Доказательство. Предлагается провести самостоятельно, в качестве упражнения. □

Замечание. Именно это свойство оператора D_t оправдывает термин *частная производная по времени в силу системы* $u_t = \mathrm{f}$ и явилось основанием для выбора представления $D_t = \partial_t + V$.

Итак, построены все компоненты для алгебро-геометрического анализа системы $u_t = \mathrm{f}$. Именно:

- $\widetilde{\mathbb{J}} = \mathbb{R} \times \mathbb{J} = \mathbb{R}^{1+m} \times \mathbb{R}^{\mathrm{A}}_{\mathbb{I}}$ – расширенное пространство джетов и расслоение $\widetilde{\mathbb{J}} = \mathbb{R}^{1+m} \times \mathbb{R}^{\mathrm{A}}_{\mathbb{I}} \xrightarrow{\pi_{\widetilde{\mathbb{J}}}} \mathbb{R}^{1+m}$, где $\pi_{\widetilde{\mathbb{J}}}$ – проекция на первый сомножитель;
- $\widetilde{\mathcal{A}}$ – алгебра всех гладких функций на пространстве $\widetilde{\mathbb{J}}$;
- $\mathfrak{C}(\mathrm{f})$ – картанова подалгебра алгебры Ли $\mathfrak{D}(\widetilde{\mathcal{A}})$ всех дифференцирований алгебры $\widetilde{\mathcal{A}}$.

Предложение 2.2.5. *Картанова подалгебра* $\mathfrak{C}(\mathrm{f})$ *определяет связность в расслоении* $\widetilde{\mathbb{J}} \xrightarrow{\pi_{\widetilde{\mathbb{J}}}} \mathbb{R}^{1+m}$. *Именно, имеет место разложение* $\widetilde{\mathcal{A}}$*-модуля* $\mathfrak{D}(\widetilde{\mathcal{A}})$ *в прямую сумму*

$$\mathfrak{D}(\widetilde{\mathcal{A}}) = \mathfrak{C}(\mathrm{f}) \oplus \mathfrak{V}(\widetilde{\mathcal{A}}).$$

Доказательство. По существу совпадает с доказательством аналогичного Предложения 2.1.4. Предлагается провести его самостоятельно в качестве упражнения. □

Литература

[1] I.M. Anderson, The variational bicomplex, Dept. Math., Utah State University: Logan, Utah, November 2004, 318 pages; http://www.math.usu.edu/ fg_mp/Publications/VB/vb.pdf.

[2] Isham C.J., Modern Differential Geometry for Physicists. Singapore-New Jersey-London-Hong Kong, World Scientific, 1999.

[3] Madore J., An introduction to noncommutative differential geometry and its physical applications. Cambridge, University Press, 1995.

[4] Vermani L.R., An elementary approach to homological algebra. Boca Raton, Chapman and Hall/CRC, 2003.

[5] Zharinov V.V., Lecture notes on geometrical aspects of partial differential equations. Singapore-New Jersey-London-Hong Kong, World Scientific, 1992.

[6] Бурбаки Н. Дифференцируемые и аналитические многообразия. Сводка результатов. Москва, Мир, 1975.

[7] Виноградов А.М. и Красильщик И.С. (редакторы), Симметрии и законы сохранения уравнений математической физики. Москва, Факториал, 1997.

[8] Годеман Р., Алгебраическая топология и теория пучков. Москва, ИЛ, 1961.

[9] Дубровин В.А., Новиков С.П. и Фоменко А.Т., Современная геометрия. Методы и приложения. Том I. Москва, Эдиториал УРСС, 1998.

[10] Дубровин В.А., Новиков С.П. и Фоменко А.Т., Современная геометрия. Методы и приложения. Том II. Москва, Эдиториал УРСС, 1998.

[11] Дубровин В.А., Новиков С.П. и Фоменко А.Т., Современная геометрия. Методы теории гомологий. Москва, Наука, 1984.

[12] Жаринов В.В., Алгебро-геометрические основы математической физики. Лекционные курсы НОЦ. Выпуск ?. Москва, МИРАН, 2008.

[13] Зуланке Р. и Винтген П., Дифференциальная геометрия и расслоения. Москва, Мир, 1975.

[14] Ибрагимов Н.Х., Группы преобразований в математической физике. Москва, Наука, 1983.

[15] Кобаяси Ш. и Номидзу К., Основы дифференциальной геометрии. Том I. Москва, Наука, 1981.

[16] Кобаяси Ш. и Номидзу К., Основы дифференциальной геометрии. Том II. Москва, Наука, 1981.

[17] Ленг С., Алгебра. Москва, Мир, 1968.

[18] Олвер П., Приложения групп Ли к дифференциальным уравнениям. Москва, Мир, 1989.

[19] Стернберг С., Лекции по дифференциальной геометрии. Москва, Мир, 1970.

[20] Федорюк М.В., Обыкновенные дифференциальные уравнения. Москва, Наука, 1985.

[21] Хелгасон С., Дифференциальная геометрия, группы Ли и симметрические пространства. Москва, Факториал Пресс, 2005.

Предметный указатель

Эйлера-Лагранжа
    оператор, 38, 62
Картана
    распределение, 47
Лейбница правило, 14
алгебра, 6
    Ли, 6
        присоединенная, 7
    Ли-Беклунда, 35
    ассоциативная, 6
    коммутативная, 6
    симметрий, 35
    унитальная, 6
аннулятор, 6
бикомплекс
    вариационный, 55
центр, 6
частная производная
    полная, 45, 65
действие
    ассоциированное, 10
    присоединенное, 9
дифференциал
    функциональный, 38, 56
    горизонтальный, 55
    вариационный, 38, 56
    вертикальный, 55
дифференцирование, 14
    эволюционное, 50
    горизонтальное, 47
    вертикальное, 44, 64
    внутреннее, 16
дивергенция
    полная, 59
джет
    функции, 43
    пространственный, 64
фильтрация, 35
форма
    функциональная, 38, 55
функционал, 38
идеал, 6
    левый, 6
    правый, 6
картанова подалгебра, 34
коцепь
    p-картанова, 35
лагранжиан, 38
мультипликатор, 10
    левый, 10
    правый, 10
нормализатор, 7, 34
переменная
    временная, 63
переменные
    пространственные, 63
подалгебра, 6
порядок
    дифференциальный, 43
производная
    в силу системы, 66
    вариационная, 62

система
    эволюционна, 66
ток, 38
закон сохранения, 38