Помимо основного текста лекций, имеется сводка используемых сведений, пока что из функционального анализа и общей топологии. Эта сводка содержится в отдельном файле sprav.pdf. В основном там надо добавить п. о топологических векторных пространствах.

Основной текст в известной степени стал законченным, хотя, возможно, кое-где стоило бы кое-что добавить, а главное, рассмотреть примеры.

§1. Дифференцирование в банаховых пространствах.

1. Производная вектор-функции скалярного аргумента.

Пусть в интервале J числовой оси задана функция f со значениями в банаховом пространстве E (её можно назвать векторной функцией скалярного аргумента, если надо отметить, что её значения — не числа, вернее, не обязательно числа)[1]. Её производная в точке $t_0 \in E$ — это, как и для привычной функции с числовыми значениями, предел $\lim_{h\to 0} \frac{f(t_0+h)-f(t_0)}{h}$, который обозначается через $f^\bullet(t_0)$ (точка может ставиться и наверху: $\dot{f}$) или $\frac{df(t_0)}{dt}$[2]. (Если конец интервала J принадлежит J и t_0 является этим концом, то делается обычная оговорка о знаке h). Когда E бесконечномерно, то, в отличие от случая $E = \mathbb{R}$ или $E = \mathbb{R}^n$, предел можно понимать в двух смыслах:

— Предел по норме (сильный предел); это значит, что

$$\left|\frac{f(t_0+h)-f(t_0)}{h} - f^\bullet(t_0)\right| \to 0 \qquad \text{при} \qquad h \to 0;$$

тогда говорят, что f дифференцируема в точке t_0 в сильном смысле (сильно дифференцируема) и что соответствующее $f^\bullet(t_0)$ является сильной производной.

— Слабый предел; элемент $c \in E$ является таковым, если для любого ограниченного линейного функционала[3] ξ на E существует предел

[1]В сравнительно более старой литературе такие функции часто называли “абстрактными функциями”, но потом, видимо, решили, что абстракции здесь не так уж много.

[2]Обозначение производной с помощью точки восходит к Ньютону и употребляется в тех случаях, когда независимую переменную наглядно представляют себе как время и обозначают через t (time). В других случаях используют штрих, напр., $f'(x), f'(y)$. Пишут также $f_x(x)$ и т.п.

[3]Напомню, что совокупность всех таких функционалов образует так называемое сопряжённое (к E или с E) пространство E^*, снабжённое “нормой функционалов” $\|\cdot\|$.

$\lim_{h\to 0} \xi\left(\frac{f(t_0+h)-f(t_0)}{h}\right)$ и этот предел равен $\xi(c)$, т.е. если

$$\lim_{h\to 0}\left|\xi\left(\frac{f(t_0+h)-f(t_0)}{h}-c\right)\right| = 0.$$

Это c и называется "производной $f^\bullet(t_0)$ векторной функции f в точке t_0 в смысле слабого предела" (говорят также о "слабой производной", однако надо предупредить, что в теории уравнений с частными производными такое название может употребляться и в несколько иных смыслах).

Если существует сильная производная, то она же является и производной в смысле слабой сходимости. Если же существует слабая производная, то сильной производной может и не существовать.

Теорема 1. Если при всех $t \in J$ существует производная в смысле слабого предела и если эта производная $f^\bullet(t)$ непрерывна по t (как обычная векторная функция, т.е. если при каждом t предел $\lim_{s\to t}|f^\bullet(s) - f^\bullet(t)| = 0$), то f при всех $t \in J$ дифференцируема в сильном смысле. (Слабая производная в этом случае оказывается и сильной.)

Зафиксируем точку $t_0 \in [a, b]$ и будем доказывать, что слабая производная $f^\bullet(t_0)$ является одновременно и сильной.

"Приращение аргумента" h без особых оговорок считается ниже столь малым, что $t_0 + h \in [a, b]$. Когда $t_0 = a$ или $t_0 = b$, мы, естественно, ограничиваемся только приращениями одного знака — положительными при $t_0 = a$ и отрицательными при $t_0 = b$.

В элементарном дифференциальном исчислении хорошо известна теорема Лагранжа (она же теорема о среднем), относящаяся к обычным числовым функциям одной переменной; если f определена и непрерывна на интервале $[a, b]$, а во всех его внутренних точках дифференцируема, то существует такая точка τ, что $f(b) - f(a) = f^\bullet(\tau)(b - a)$. Здесь пока было $b > a$, раз мы говорили об интервале $[a, b]$. Но если $b < a$, то $f(a) - f(b) = f^\bullet(\tau)(a - b)$, где τ — какая-то точка, лежащая между a и b, и по-прежнему $f(b) - f(a) = f^\bullet(\tau)(b - a)$.

Возьмём какой-нибудь ограниченный линейный функционал ξ (запись: $\xi \in E^*$). Применяя теорему о среднем к функции $\varphi(t) = \xi(f(t))$, рассматриваемой на отрезке между t_0 и $t_0 + h$, убеждаемся в существовании на этом отрезке такой точки τ, что $\varphi(t_0 + h) - \varphi(t_0) = \varphi^\bullet(\tau)h$. Далее я записываю τ в виде $\tau = t_0 + \theta h$, где θ — некоторое число из $[0, 1]$. Используя условие о слабой дифференцируемости функции f и определение этой самой слабой дифференцируемости, заключаем, что

$$\xi(f(t_0+h)) - \xi(f(t_0)) = \xi(f^{\bullet}(t_0+\theta h))h,$$

$$\xi\left(\frac{f(t_0+h)-f(t_0)}{h}\right) = \xi(f^{\bullet}(t_0+\theta h)),$$

$$\xi\left(\frac{f(t_0+h)-f(t_0)}{h} - f^{\bullet}(t_0)\right)$$
$$= \xi(f^{\bullet}(t_0+\theta h)) - \xi(f^{\bullet}(t_0))\xi(f^{\bullet}(t_0+\theta h) - f^{\bullet}(t_0)). \qquad (1)$$

Ввиду непрерывности $f^{\bullet}(t)$, для любого $\varepsilon > 0$ имеется такое $\delta > 0$, что если $|h| < \delta$, то

$$|f^{\bullet}(t_0+h) - f^{\bullet}(t_0)| < \varepsilon.$$

А поскольку $\theta \in [0,1]$, то и $|\theta h| < \delta$ и потому

$$|f^{\bullet}(t_0+\theta h)) - f^{\bullet}(t_0)| < \varepsilon.$$

Стало быть, норма левой части (1) не превосходит

$$\|\xi\||f^{\bullet}(t_0+\theta h)) - f^{\bullet}(t_0)| < \|\xi\|\varepsilon.$$

Обозначим для краткости выражение в скобках, фигурирующее в левой части (1), через u:

$$u = \frac{f(t_0+h)-f(t_0)}{h} - f^{\bullet}(t_0).$$

Мы показали, что значение $\xi(u)$ каждого линейного ограниченного функционала ξ на этом элементе не превосходит $\|\xi\|\varepsilon$. Отсюда вытекает, что $|u| \leqslant \varepsilon$. Действительно, в качестве следствия из теоремы Хана–Банаха получается, что имеется ограниченный линейный функционал ξ, для которого $\xi(u) = 1$ и $\|\xi\| = \frac{1}{|u|}$. Для этого функционала $1 \leqslant \frac{1}{|u|}\varepsilon$, что и означает нужное неравенство $|u| < \varepsilon$. (В данном рассуждении подразумевалось, что $u \neq 0$. Но если $u = 0$, то уж конечно $|u| < \varepsilon$.) Вывод: для любого $\varepsilon > 0$ имеется такое $\delta > 0$, что если $0 < |h| < \delta$, то $|\frac{f(t_0+h)-f(t_0)}{h} - f^{\bullet}(t_0)| < \varepsilon$. А это как раз и означает то, что нам надо было доказать — что $f^{\bullet}(t_0)$ является сильной производной.

Родственные соображения можно использовать в связи с заменой теоремы о среднем, пригодной для вектор-функций. В том виде, как она была сформулирована выше, эта теорема не переносится даже на самые простые векторные функции, начиная с функций со значениями в $\mathbb{R}^2$. Например, возьмём $a = 0, b = 2\pi, f(t) = (\cos t, \sin t)$. Тогда $f(b) - f(a) = 0$, тогда как $f^\bullet(\tau) = (-\sin\tau, \cos\tau)$ — вектор единичной длины; при любом τ получается, что $|f^\bullet(\tau)(b-a)| = 2\pi$.

Но теорему о среднем обычно используют для оценки разности $f(b) - f(a)$. Это можно сделать, когда известна оценка сверху для производной: если $|f^\bullet(\tau)| \leqslant m$, то $|f(b) - f(a)| \leqslant m|b-a|$. Такая оценка обобщается и на общие векторные функции: если $f\colon [a,b] \to E$ непрерывна и во всех внутренних точках отрезка существует производная $f^\bullet$, хотя бы и слабая, причём всюду $|f^\bullet(t)| \leqslant m$ при всех $t \in (a,b)$, то $|f(b) - f(a)| \leqslant m|b-a|$. Действительно, тогда для любого $\xi \in E^*$ (т.е. для ограниченного линейного функционала ξ на E) производная числовой функции $\xi(f(t))$ равна $\xi(f^\bullet(t))$. По теореме о среднем, найдётся такое $\tau \in (a,b)$ (вообще говоря, зависящее от ξ), что $\xi(f(b)) - \xi(f(a)) = \xi(f^\bullet(\tau))(b-a)$. Отсюда $|\xi(f(b) - f(a))| \leqslant \|\xi\| m(b-a)$. В качестве следствия из теоремы Хана–Банаха получается, что имеется ограниченный линейный функционал ξ, для которого $\xi(f(b) - f(a)) = 1$ и $\|\xi\| = \frac{1}{|f(b)-f(a)|}$. Для такого ξ имеем: $1 \leqslant \frac{m(b-a)}{|f(b)-f(a)|}$, что равносильно доказываемой оценке для $|f(b) - f(a)|$. (В этом рассуждении подразумевалось, что $f(b) - f(a) \neq 0$. Но если $f(b) - f(a) = 0$, то доказываемое утверждение очевидно.)

Упражнение. Проведите другое доказательство утверждения:

если $f\colon [a,b] \to E$ непрерывна и при всех $t \in [a,b]$ существует сильная производная $f^\bullet$,

причём всюду $|f^\bullet(t)| \leqslant m$, то $|f(b) - f(a)| \leqslant m|b-a|$,[4]

используя следующие соображения. Достаточно доказать, что если $M >$

[4]Данное утверждение отличается от доказанного выше в двух отношениях. Во-первых, в нём говорится о сильной, а не о слабой производной. Это связано с характером намеченного ниже доказательства — оно никак не привлекает функционалов и теоремы Хана–Банаха, между тем как само понятие слабой производной связано с функционалами. Во-вторых, в нём говорится о производной не только в точках (a,b), но и в точках a и b. Это несущественно. Пусть дано, что $f^\bullet$ существует и удовлетворяет неравенству $|f^\bullet(t)| \leqslant m$ в точках открытого интервала (a,b). Возьмём любые a_1 и b_1, для которых $a < a_1 < b_1 < b$. Тогда $f^\bullet$ существует и удовлетворяет неравенству $|f^\bullet(t)| \leqslant m$ всюду на $[a_1, b_1]$, так что доказываемое утверждение гарантирует, что $|f(b_1) - f(a_1)| \leqslant m|b_1 - a_1|$. Поскольку a_1 может быть сколь угодно близким к a, а b_1 — к b, то ввиду непрерывности f отсюда следует нужное неравенство и для a, b.

m, то $|f(b) - f(a)| \leqslant M|b - a|$ (почему?). Обозначим

$$A = \{t;\ t \in [a, b],\ |f(t) - f(a)| \leqslant M(t - a)\}.$$

$a \in A$ (почему?), так что $A \neq \emptyset$. Если $t \in A$ и $t \neq b$, то при достаточно малом $h > 0$ будет $|f(t+h) - f(t)| < Mh$ (почему?), а значит, $|f(t+h) - f(a)| \leqslant |f(t) - f(a)| + |f(t+h) - f(t)| < Mt + Mh = M(t+h)$, так что $t + h \in A$. Выведите отсюда, что $\sup A = b$. Но $\sup A \in A$ (почему?), и получается, что $|f(b) - f(a)| \leqslant M|b - a|$.

2. Производные Фреше и Гато.

Пусть в открытом подмножестве U банахова пространства E задана функция f, принимающая значения в банаховом пространстве F (запись:

$$U \subset E \text{ открытое}, \quad f\colon U \to F.$$

Говорят, что она дифференцируема по Фреше в точке $x_0 \in U$, если имеется такой ограниченный линейный оператор $A\colon E \to F$, что

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + Ah + o(h),$$

или, говоря подробнее, что

$$\lim_{h \to 0} \frac{|f(x_0 + h) - f(x_0) - Ah|}{|h|} = 0.$$

Этот оператор называют производной Фреше функции f в точке x_0 и обозначают через $f'(x_0), f_x(x_0), D_{x_0}f, Df(x_0)$ (вместо заглавной буквы D могут писать строчную d). Как видно, совершенно аналогично ситуации для скалярной функции, $f'(x_0)h$ является главной линейной частью "приращения" $f(x_0 + h) - f(x_0)$ функции f в точке x_0 (имеется в виду: "приращения, отвечающего приращению аргумента функции на h"). В прошлом о скалярной функции нескольких переменных вместо того, чтобы сказать: "у приращения f в точке x_0 имеется главная линейная часть", говорили: "f имеет в этой точке полный дифференциал".

Для производной Фреше очевидным образом справедливы правила, аналогичные привычным правилам дифференциального исчисления, вроде $(f + g)' = f' + g'$. Остановимся только на так называемом "цепном правиле для дифференцирования сложной функции".

Пусть E, F, G — банаховы пространства, $U \subset F$, $V \subset G$ — открытые подмножества, $x \in U$, $y \in V$ и имеются векторнозначные функции $f\colon U \to G$, $g\colon V \to E$. Если функция f дифференцируема по Фреше в точке $x \in U$, точка $y = f(x) \in V$ и g дифференцируема по Фреше в этой точке, то композиция $g \circ f$ (т.е. функция $u \mapsto g(f(u))$) дифференцируема по Фреше в точке x и её производная $D_x f(g(x)) = g'(y)f'(x)$ (справа стоит произведение линейных операторов $B = g'(y)\colon G \to E$ и $f'(x)\colon F \to G$, причём здесь, конечно, по-прежнему $y = f(x)$).

Частным случаем является одномерное утверждение (в нём $E = F = G = \mathbb{R}$), которые более привычно записывается так:

$$\frac{dg(f(x))}{dx} = \left.\frac{dg(y)}{dy}\right|_{y=f(x)} \frac{df(x)}{dx}.$$

Его обычное доказательство основано на простом преобразовании разностного отношения для функции $g \circ f$:

$$\frac{g(f(x+h)) - g(f(x))}{h} = \frac{g(f(x+h)) - g(f(x))}{f(x+h) - f(x)} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

и предельном переходе при $h \to 0$. Однако при этом исключается из рассмотрения случай, когда существуют сколь угодно малые h, для которых $f(x+h) - f(x) = 0$; его надо рассмотреть отдельно. Конечно, без труда получается, что в этом случае $D_x g(f(x)) = 0$ и $f'(x) = 0$, так что доказываемая формула сводится к $0 = 0$. Но сколь это ни просто, вызывает досаду, что в доказательстве приходится уделять особое внимание какому-то исключительному случаю, хотя в формулировке доказываемого утверждения он никак не выделяется. В приводимом ниже рассуждении с производными Фреше, относящемся к общему ("банахову") случаю, не встречается никаких исключений, которые требовали бы отдельного рассмотрения.

Обозначим $A = f'(x)$, $B = g'(y)$. Нам дано, что $f(x+h) - f(x) = Ah + o(|h|)$ и $g(y+k) - g(y) = Bk + o(|k|)$. Далее,

$$g(f(x+h)) - g(f(x)) = B(f(x+h) - f(x)) + o(|f(x+h) - f(x)|),$$

ибо ввиду дифференцируемости f в точке x разность $f(x+h) - f(x) \to 0$ при $h \to 0$, поэтому данная формула имеет смысл и является следствием формулы $g(y+k) - g(y) - Bk = o(|k|)$. Точнее даже можно сказать, что $f(x+h) - f(x) = O(|h|)$, а потому $g(f(x+h)) - g(f(x)) = B(f(x+h) - f(x)) + o(|h|)$. А здесь $B(f(x+h) - f(x)) = BAh + BO(|h|) = BAh + O(|h|)$. Окончательно получается, что $g(f(x+h)) - g(f(x)) = BAh + O(|h|)$, а это и означает существование производной Фреше $D_x g(f(x))$, совпадающей с $BA = g'(y)f'(x)$.

В настоящее время общепризнано, что производная Фреше — наиболее точный аналог производной функции от одной переменной. В подобной ситуации можно ожидать, что скоро её будут называть просто производной, не упоминая о Фреше. Однако этого может и не произойти, потому что имеется (и используется, хотя бы и в качестве вспомогательного понятия) другой вариант производной, который в честь другого французского математика называется производной Гато (см. ниже). В этой ситуации упоминания о Фреше и Гато имеют уточняющий характер. Причём уточнения необходимы, а имена Фреше и Гато позволяют быть при этом весьма кратким.

В обычном курсе матанализа проводится различие между производной и дифференциалом. Для скалярной функции f одного переменного производная $f^{\bullet}(t_0)$ — это число, а дифференциал $df = f^{\bullet}(t_0)dt$ — это линейная функция от новой переменной dt, которая играет ту же роль, что и h выше. Когда $f = (f_1, \ldots, f_n)$ является функцией k переменных $(x_1, \ldots, x_k)$ со значениями в $\mathbb{R}^n$, можно считать, что производная $f'(x_0)$ — это матрица коэффициентов упомянутого линейного оператора $A\colon \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ (в стандартном базисе пространств $\mathbb{R}^k$ и $\mathbb{R}^n$), т.е. матрица

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \ldots & \frac{\partial f_1}{\partial x_k} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \ldots & \frac{\partial f_n}{\partial x_k} \end{pmatrix},$$

и тогда аналогично случаю функции от одной переменной получается, что производная $f'(x_0)$ — это одно, а $f'(x_0)dx$ — это, по существу, главная линейная часть приращения $f(x_0 + h) - f(x_0)$, в которой вместо h написано dx, т.е. линейная функция от h или от dx (принимающая векторные значения, если $n > 1$). Но в бесконечномерном случае вместо матрицы приходится говорить о самом операторе A, и тогда различие стирается: производная — это A, дифференциал — это Adx или Ah, но ведь линейный оператор $A\colon E \to F$ как раз и определяется как линейная функция на E (со значениями в F)! Выходит, что если мы обозначаем эту функцию одной буквой A или символом вроде $f'(x_0)$, не упоминая явно об h или dx, то это производная, а если мы делаем явное упоминание об h или dx, то это дифференциал. Не очень-то большая разница. . . . (Я не рекомендую студенту пропагандировать такую точку зрения на экзамене, но особой опасности тут нет, ибо для функции от конечного числа переменных можно всё-таки стать на такую точку зрения, что разница есть, а в курсе функционального анализа есть много вещей поважнее сопоставления дифференциалов и производных и этим вещам резонно уделяется основное внимание.)

Другая распространённая точка зрения на дифференциал состоит в том, что dx в Adx рассматривается как формальная переменная, с которой можно действовать по известным правилам. (Это делают в курсах матанализа, когда речь идёт о функциях от нескольких переменных $x_1, \ldots, x_k$; при этом dx является обозначением для набора k формальных переменных $dx_1, \ldots, dx_k$, которые в записи Adx подразумеваются расположенными в виде столбца.) Тогда, конечно, дифференциал оказывается чем-то отличным от линейного оператора $A\colon E \to F$, поскольку h в выражении Ah — это не формальная переменная (и не набор таковых), а вектор из E. Однако эти два подхода вполне совместимы. Коль скоро в подходе с формальными переменными dx_i не имеют "реального" смысла, мы вправе им этот смысл придать, лишь бы при этом не нарушились формальные правила, принятые для dx_i. Сейчас я опишу, как это можно сделать.

Координаты x_i являются функциями на k-мерном векторном пространстве E (при отождествлении E с $\mathbb{R}^k$ мы чаще всего подразумеваем, что i-ой координатой вектора-столбца

$$x = \begin{pmatrix} u_1 \\ \dots \\ u_k \end{pmatrix}$$

служит u_i, так что $x_i(u) = u_i$ — это настолько очевидно, что чаще даже не упоминается; однако можно использовать и другие координаты). При нашем понимании дифференциала (когда он же, по существу, является и производной) dx_i — это главная линейная часть приращения $x_i(u+h) - x_i(u)$, т.е. h_i. Получается, что dx_i — это линейный функционал на E, переводящий h в h_i. А dx — это, стало быть, столбец из таких функционалов, или (это дело вкуса) линейное отображение $E \to \mathbb{R}^n$. При таком понимании формальным переменным dx_i придаётся определённый смысл — это не числа h_i, а линейные функции от вектора h (правда, сопоставляющие ему те же самые числа), т.е. элементы сопряжённого пространства E^*. Соответственно, Adx — это векторная функция на $\mathbb{R}^n$, сопоставляющая вектору h вектор Ah. Вроде бы это и есть оператор A, но тут его применение к h выражено посредством функционалов dx_i, выступающих как бы в роли промежуточного этапа (правда, на редкость тривиального: $dx(h) = h$).

Всё это выглядит (да и на самом деле является) тривиальным, однако лучше "поставить все точки над i" в максимально простой ситуации, чем отложить это до такого случая, когда это пришлось бы делать на фоне более сложной обстановки. Пока что мы сказали, что функция dx, которая тождественно равна своему аргументу, т.е. для которой $dx(h) = h$, — это всё-таки не совсем то же самое, что сам этот аргумент h, хотя различие здесь выглядит формальным и несущественным. Более сложная обстановка возникает, когда мы "стряпаем" из дифференциалов функции от нескольких векторов $h^{(1)}, h^{(2)}, \ldots$, где в конечномерном случае каждый вектор $h^{(i)}$ имеет координаты $h_1^{(i)}, h_2^{(i)}, \ldots$. Такая функция — скажем, функция

$$\varphi(h^{(1)}, h^{(2)}) = h_1^{(1)} h_2^{(2)} - h_2^{(1)} h_1^{(2)} = dx_1(h^{(1)}) dx_2(h^{(2)}) - dx_1(h^{(2)}) dx_2(h^{(1)})$$

(это как раз конкретный пример функции часто встречающегося типа), — уж никак не совпадает со своим аргументом.

Я упомянул о производной Гато. С точностью до некоторых оговорок или уточнений, которые будут сделаны ниже, это "производная по направлению вектора h":

$$\frac{d}{dt} f(x_0 + th)\Big|_{t=0}. \tag{2}$$

Если оставить в стороне случай $h = 0$ (когда указанная производная, очевидно, равна нулю), речь, по существу, идёт о производной в точке x_0 ограничения (сужения) $f|l$ функции f на прямую $l = x_0 + \mathbb{R} \cdot h = \{x_0 + th;\ t \in \mathbb{R}\}$, ориентированную в направлении вектора h. Только при дифференцировании вдоль прямой естественно говорить о пределе при $x \to x_0$ разностного отношения $\frac{f(x) - f(x_0)}{\pm|x - x_0|}$, где $x \in l$, а знак $\pm$ означает $+$ или $-$ в зависимости от того, совпадает ли направление вектора $x - x_0$ (геометрически, вектора $\overrightarrow{x_0 x}$) с направлением вектора h или противоположно ему. Последний предел совпадает с (2), когда $|h| = 1$, в общем же случае он получается из (2) делением на $|h|$. В буквальном смысле слова "производная по направлению вектора h" должна была бы учитывать только направление вектора h, но не его длину, и тогда это была бы как раз производная в точке x_0 ограничения (сужения) $f|l$ функции f на прямую $l = x_0 + \mathbb{R} \cdot h = \{x_0 + th;\ t \in \mathbb{R}\}$, ориентированную надлежащим образом; эту производную можно было бы определить ещё как $\frac{d}{dt} f(x_0 + t\frac{h}{|h|})\Big|_{t=0}$. Но принято называть "производной функции f в точке x_0 по направлению вектора h" предел (2).

(В курсе матанализа для гладкой (т.е. непрерывно дифференцируемой) функции f, заданной в области $U \subset \mathbb{R}^k$, её производная по направлению вектора h может пониматься несколько иначе. Пусть $\{\gamma(t)\}$ — (параметризованная) гладкая кривая, проходящая в некоторый момент времени — скажем, в момент $t = 0$ — через точку x_0 и имеющая в этот момент производную $\gamma^\bullet(0) = h$. Тогда производная f по направлению вектора h — это $\frac{d}{dt} f(\gamma(t))\big|_{t=0}$. Она совпадает с (2) и равна также

$f'(x_0)h$. Условие гладкости можно ослабить до дифференцируемости по Фреше функции f в точке x_0. Если же известно только, что существует производная (2) (и если даже такая производная существует при всех h), то о производной $\frac{d}{dt}f(\gamma(t))\big|_{t=0}$ ничего сказать нельзя — она может не существовать, а может существовать, но не совпадать с (2).)

В широком смысле слова дифференцируемость по Гато (векторной) функции f в точке x_0 означает, что производная (2) существует при любом h. Она является какой-то функцией от h; эту функцию в общем случае называют производной Гато функции f в точке x_0. Производная Гато может быть как линейной, так и нелинейной функцией от h. Пример последнего — производная Гато в точке $(0,0)$ скалярной функции двух переменных $f(x,y) = \frac{x^2y}{x^2+y^2}$. Нам важен тот случай, когда производная Гато является линейной функцией от h, ограниченной в том смысле, как это понимается для линейных операторов.

В любом случае предел (2) можно понимать в смысле сходимости по норме или в смысле слабой сходимости.

Теорема 2. Если при всех $x \in U$ существует производная Гато в смысле слабого предела, если она является ограниченным линейным оператором $A(x)$ и если она непрерывна по x (как векторная функция $U \to L(E,F)$, где $L(E,F)$ — пространство ограниченных линейных операторов $E \to F$ с обычной операторной нормой $\|\,.\,\|$, т.е. если $\lim_{y\to x}\|A(y)-A(x)\| = 0$ при каждом x), то f при всех $x \in U$ дифференцируема в смысле Фреше. (Производная Гато, даже понимаемая в слабом смысле, оказывается в этом случае и производной Фреше. Но пока это не доказано, я во избежание путаницы пишу $A(x)$ вместо $f'(x)$.)

Прежде всего, в предположениях теоремы производная Гато существует в смысле сильного предела, хотя бы мы и предполагали её существование только в смысле слабого предела. Действительно, зададимся какими-нибудь точкой $x \in U$ и вектором $u \in E$[5]. Возьмём столь малое $r > 0$, что все y с $|y-x| < r|u|$ лежат в U. Рассмотрим функцию

$$g\colon [0,r] \to F \qquad g(t) = f(x+tu).$$

[5]Собственно, "точка" и "вектор" сейчас синонимы, но на неформальном уровне нередко какое-то одно из этих двух слов кажется более подходящим. Трудно дать чёткое разъяснение таким неформальным вещам. Но известно из житейской практики, что обучение на примере порой может дать больше, чем чёткий инструктаж. Так что для начала "делай, как я", а потом, надеюсь, меня уже не будет нужно.

В предположениях нашей теоремы в точках вида $x + tu, \quad t \in [0, r]$ при любом $\xi \in F^*$ существует производная $\frac{d}{ds}\big|_0 \xi(f(x + tu + su))$ и она равна $\xi(A(x+tu)u)$. Итак, вектор-функция $g(t)$ имеет слабую производную, равную $A(x+tu)u$. Но эта производная непрерывно зависит от t (в обычном смысле:

$$\lim_{\tau \to t} |A(x + tu)u - A(x + \tau u)u| = 0). \tag{3}$$

(ведь нам дано, что $\lim_{y \to x} \|A(y) - A(x)\| = 0$ при любом x, откуда, в частности, $\lim_{\tau \to t} \|A(x + tu) - A(x + \tau u)\| = 0$, а это влечёт (3)). По теореме 1, тогда при $t \in [0, r]$ существует сильная производная $\frac{d}{dt} f(x+tu)$, которая, разумеется, совпадает со слабой, так что $\frac{d}{dt} f(x+tu) = A(x+tu)u$.

Теперь убедимся, что $A(x)$ является производной Фреше функции f в точке x, т.е. что

$$|f(x + h) - f(x) - A(x)h| = o(h). \tag{4}$$

Пусть дано $\varepsilon > 0$. Имеется столь малое $\delta > 0$, что когда $|y - x| < \delta$, то $y \in U$ и $\|A(y) - A(x)\| < \varepsilon$. Пусть $h \in E$ и $|h| < \delta$. Рассмотрим функцию

$$g\colon [0, 1] \to F \qquad g(t) = f(x + th) - f(x) - tA(x)h.$$

Она имеет сильную производную по t, равную $A(x+th)h - A(x)h$ (почему?). Когда $|h| < \delta$, то тем более $t|h| < \delta$ при $t \in [0, 1]$, так что

$$|\dot{g}(t)| = |(A(x + th) - A(x))h| \leqslant \varepsilon|h|.$$

Как мы видели в конце п. 1 (при обсуждении замены теоремы о среднем для вектор-функций), отсюда следует, что $|g(1)-g(0)| \leqslant \varepsilon|h|(1-0) = \varepsilon|h|$. А $g(1) = f(x + h) - f(x) - A(x)h$ и $g(0) = 0$, и мы приходим к выводу, что

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0 \quad |f(x + h) - f(x) - A(x)h| \leqslant \varepsilon|h| \quad \text{при } |h| < \delta.$$

Это и есть (4).

Теорему 2 естественно воспринимать в том смысле, что существование некоей “части” производной Фреше (всего лишь производной по прямолинейным направлениям, да ещё и слабой) достаточно для существования самой этой производной, если эта “часть” обладает некоторыми “хорошими” свойствами. Вот ещё одна (более простая) теорема в том же духе.

Теорема 3. Пусть E, F, G — банаховы пространства, $U \subset E,\ V \subset F$ — открытые подмножества, и пусть задано отображение

$$U \times V \to G \qquad (x, y) \mapsto f(x, y),$$

причём "частные" производные Фреше $f_x(x, y)$ и $f_y(x, y)$ существуют и непрерывны по (x, y). (Это значит, что при любом фиксированном $y \in V$ функция

$$U \to G \qquad x \mapsto f(x, y)$$

всюду в U имеет производную Фреше $f_x(x, y)$, которая, как обычно, является ограниченным линейным оператором $E \to G$, а функция

$$V \to G \qquad y \mapsto f(x, y)$$

всюду в V имеет производную Фреше $f_y(x, y)$, которая является ограниченным линейным оператором $F \to G$; кроме того, эти операторы непрерывно зависят от (x, y) (в том смысле, что $\lim_{(u,v)\to(x,y)} \|f_u(u, v) - f_x(x, y)\| = 0$, и аналогично для f_y). Тогда f в любой точке $(x, y) \in U \times V$ имеет производную Фреше, являющуюся линейным ограниченным оператором

$$E \times F \to G \qquad (h.k) \mapsto f_x(x, y)h + f_y(x, y)k,$$

и эта производная (как видно из написанной формулы, — почему?) непрерывна по (x, y).

Пусть $(x, y) \in U \times V$ и пусть дано $\varepsilon > 0$. Мы убедимся в существовании такого $\delta > 0$, что для всех $h \in E,\ k \in F$ с $|h|, |k| < \delta$ будет $(x + h, y + k) \in U \times V$ и

$$|f(x + h, y + k) - f(x, y) - f_x(x, y)h - f_y(x, y)k| \leqslant \varepsilon(|h| + |k|) \qquad (5)$$

(то, что мы здесь пишем $\leqslant$ вместо традиционного $<$, конечно, несущественно). Представим оцениваемую разность как сумму двух разностей

$$f(x+h, y+k) - f(x, y+k) - f_x(x, y)h, \qquad f(x, y+k) - f(x, y) - f_y(x, y)k. \ (6)$$

Прежде всего,

$$\begin{aligned} &\exists\, \delta > 0\ \forall\, h \in E,\ k \in F \quad (|h|, |k| < \delta_0) \\ &\qquad \Longrightarrow ((x + h, y + k) \in U \times V \text{и } \|f_x(x + h, y + k) - f(x, y)\| < \varepsilon) (7) \end{aligned}$$

С второй разностью в (6) всё просто: по самому определению дифференцируемости по Фреше в точке y, имеется столь малое $\delta' \in (0, \delta_0)$, что

$$|f(x, y+k) - f(x, y) - f_y(x, y)k| < \varepsilon|k| \quad \text{при } |k| < \delta'.$$

(Здесь даже никак не используется существование f_y в точках, отличных от (x, y). В наших же предположениях нетрудно убедиться аналогично дальнейшему, что годится $\delta' = \delta$, но это не важно.) С первой разностью дело обстоит сложнее (почему?). Рассмотрим вспомогательную функцию

$$\varphi\colon [0,1] \to G \qquad \varphi(t) = f(x+th, y+k) - f(x, y+k) - tf_x(x, y)h.$$

Ясно, что она дифференцируема по t (в сильном смысле) и что

$$\dot{\varphi}(t) = f_x(x+th, y+k)h - f_x(x, y)h.$$

Ввиду (7),

$$|\dot{\varphi}(t)| = |(f_x(x+th, y+k) - f_x(x, y))h| \leqslant \|f_x(x+th, y+k) - f_x(x, y)\||h| \leqslant \varepsilon|h|.$$

Тогда, как явствует из проведенного в п. 1 обсуждения аналога теоремы о среднем для векторных функций, $|\varphi(t) - \varphi(0)| \leqslant \varepsilon|h|t$,

$$|f(x+h, y+k) - f(x, y+k) - f_x(x, y)h| = |\varphi(1)| = |\varphi(1) - \varphi(0)| \leqslant \varepsilon|h|.$$

Полученные оценки для обеих разностей в (6) доказывают (5).

В заключение отметим несколько простых лемм.

Лемма 1. Пусть в открытом и выпуклом[6] подмножестве U банахова пространства E задана функция f, принимающая значения в банаховом пространстве F. Пусть во всех точках U функция f имеет производную Фреше $f'(x)$, и пусть последняя непрерывна по x (тогда функцию f называют гладкой), причём всюду норма $\|f'(x)\| \leqslant K$. Тогда $|f(x) - f(y)| \leqslant K|x-y|$ при любых $x, y \in U$ (условие Липшица).

Рассмотрим вспомогательную функцию

$$\varphi\colon [0,1] \to F \qquad \varphi(x) = f((1-t)x + ty) - f(x)$$

[6] Подмножество векторного пространства называется выпуклым, если для любых двух его точек соединяющий их прямолинейный отрезок целиком содержится в этом множестве.

(наглядный смысл первого слагаемого в определении f: это значение f в точке, которая делит отрезок $\overline{xy}$ в отношении $t:(1-t)$ и при увеличении t пробегает этот отрезок от x до y, двигаясь с постоянной скоростью $y-x$). Ясно, что это гладкая функция от t,

$$\varphi(0)=0,\ \varphi(1)=f(y)-f(x),\ \dot{\varphi}(t)=y-x,\ |\dot{\varphi}(t)|\leqslant K,$$

и согласно сказанному в конце п. 1 при обсуждении аналога теоремы о среднем Лагранжа для вектор-функций,

$$|f(y)-f(x)|=|\varphi(1)-\varphi(0)|\leqslant K|y-x|\cdot 1=K|y-x|.$$

Лемма 2. Пусть в дополнение к тем же предположениям

$$\|f'(x)-f'(y)\|\leqslant a \quad \text{при любых } x,y\in U.$$

Тогда

$$|f(y)-f(x)-f'(x)(y-x)|\leqslant a|y-x| \quad \text{при любых } x,y\in U.$$

Фактически это уже получалось в ходе доказательства теорем 2, 3. Вот ещё одно доказательство (или другая упаковка тех же соображений). Зафиксируем $x\in U$ и введём вспомогательную функцию $g(y)=f(y)-f'(x)y$ (так как x фиксировано, отмечается только зависимость g от y). При любых $y\in U$

$$g'(y)=f'(y)-f'(x),\ \|g'(y)\|\leqslant a,$$

и по лемме 1

$$|g(y)-g(x)|\leqslant a|y-x|.$$

А $f(y)-f(x)-f'(x)(y-x)=(f(y)-f'(x)y)-(f(x)-f'(x)x)=g(y)-g(x)$.

Эта лемма будет использоваться в тех случаях, когда нам надо будет знать, что

$$|f(x+h)-f(x)-f'(x)h|=o(|h|) \qquad \text{равномерно по } x\in C, \tag{8}$$

где C — некоторое множество, иными словами, что

$$\begin{aligned}&\forall\,\varepsilon>0\ \exists\,\delta=\delta(\varepsilon)>0 \quad (x\in C,\ |h|<\delta) \quad \Longrightarrow\\ &\qquad\Longrightarrow (f(x+h) \text{ определена и } |f(x+h)-f(x)-f'(x)h|\leqslant\varepsilon|h|). \end{aligned}\tag{9}$$

При одном только условии дифференцируемости $f(x)$, — а дифференцируемость подразумевается самим видом левой части (8), где фигурирует производная, — разность, стоящая в левой части (8) есть $o(|h|)$, но это o, вообще говоря, зависит от x, так что вместо (9) мы имели бы только утверждение, начинающееся с $\forall\,\varepsilon > 0\ \forall\, x \in C\ \exists\,\delta = \delta(\varepsilon, x) > 0 \ldots$.

Лемма 3. Пусть в открытом подмножестве U банахова пространства E задана гладкая функция f (принимающая значения в каком-то банаховом пространстве F), а C — компактное подмножество U. Тогда имеет место (8) (т.е. говоря подробнее, (9)).

Доказательство опирается на следующую лемму, которая сама по себе не имеет отношения к дифференцированию (но мы её будем применять в f' — тогда такое отношение появится).

Лемма 4. Пусть в открытом подмножестве U банахова пространства E задана непрерывная функция f (принимающая значения в каком-то банаховом пространстве F), а C — компактное подмножество U. Тогда

$$\begin{gathered}\forall\,\varepsilon > 0\ \exists\,\delta = \delta(\varepsilon) > 0 \quad (x \in C,\ y, z \in U_\delta(x)) \quad \Longrightarrow \\ \Longrightarrow (f(y), f(z) \text{ определены и } |f(y) - f(z)| \leqslant \varepsilon).\end{gathered} \tag{10}$$

У любой точки $x \in C$ имеется такая шаровая окрестность $U_{\delta(x)}(U_x)$ (радиус которой, вообще говоря, зависит от x), что $U_{\delta(x)}(x) \subset U$ и $\|f(y) - f(x)\| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$. Выберем из открытого покрытия $\{U_{\frac{\delta(x)}{2}}(x)\}$ компактного множества C конечное подпокрытие $\{U_{\frac{\delta(x_i)}{2}}(x_i);\ i = 1, \ldots, N\}$ и будем короче писать δ_i вместо $\delta(x_i)$. Итак,

$$\text{все } U_{\delta_i}(x_i) \subset U, \quad \bigcup U_{\frac{\delta_i}{2}}(x_i) \supset C, \quad y \in U_{\delta_i}(x_i) \Longrightarrow \|f(y) - f(x_i)\| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

Возьмём $\delta = \min_i \delta_i$. Любая точка x из C принадлежит некоторой окрестности $U_{\frac{\delta_i}{2}}(x_i)$. При этом $U_\delta(x) \subset U_{\delta_i}(x_i)$ (почему?), а значит, если $y, z \in U_\delta(x)$, то

$$\|f(y) - f(x_i)\| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}, \quad \|f(z) - f(x_i)\| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$$

и потому $\|f(y) - f(z)\| \leqslant \varepsilon$. Лемма 4 доказана.

Теперь лемма 3 очевидным образом получается с помощью леммы 4, применённой к функции $f'(x)$, и леммы 2 (проверьте!).

3. “Банахова” теорема о неявной функции.

Сперва я напомню формулировку обычной теоремы о неявной функции из курса матанализа. В ней говорится (при определённых условиях) о решениях системы n уравнений

$$\begin{array}{l} f_1(x_1, \dots, x_k, y_1, \dots, y_n) = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ f_n(x_1, \dots, x_k, y_1, \dots, y_n) = 0 \end{array} \tag{11}$$

с n “неизвестными” $(y_1, \dots, y_n)$ (число уравнений равно числу неизвестных). Помимо неизвестных, левые части уравнений зависят ещё от k “параметров” или “независимых переменных” $(x_1, \dots, x_k)$. Поэтому решения, вообще говоря, тоже зависят от этих параметров:

$$y_j = y_j(x_1, \dots, x_k) \qquad (j = 1, \dots, n). \tag{12}$$

Отсюда и выражение “неявные функции” в названии теоремы — имеется в в виду, что функции (12) неявно задаются уравнениями (11).

Как и в других случаях, при формулировке (и доказательстве) этой теоремы удобно пользоваться сокращёнными векторно-матричными обозначениями:

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_k \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix},$$

$$f(x, y) = \begin{pmatrix} f_1(x_1, \dots, x_k, y_1, \dots, y_n) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ f_n(x_1, \dots, x_k, y_1, \dots, y_n) \end{pmatrix}.$$

Таким образом, f — это отображение, определённое где-то в $(k+n)$-мерном пространстве $\mathbb{R}^{k+l} = \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^n$ и принимающее значение в $\mathbb{R}^n$. При этом аргумент у f разбивается на две “части” x и y, принимающие значения где-то в $\mathbb{R}^k$ и $\mathbb{R}^n$. В теореме предполагается, что при каком-то $x = a$ система (11), которая теперь выглядит короче как $f(x, y) = 0$, имеет решение $y = b$, и доказывается, что при определённых условиях она имеет решение и при x, достаточно близких к a, причём это решение близко к b; уточняются его свойства. Для шаровой r-окрестности точки a чаще всего используется обозначение $U_r(a)$, но так как теперь нам придётся иметь дело с окрестностями двух разных точек a и b в разных пространствах, то будем обозначать их так:

$$U_r(a) = \{x \in \mathbb{R}^k : \ |x - a| < r\}, \quad V_r(b) = \{y \in \mathbb{R}^l : \ |y - b| < r\}.$$

Наконец, матрицу всех первых частных производных функций f_i по всем их аргументам мы теперь "разбиваем" на две матрицы

$$f_x(x,y) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)_{i=1,\dots,n;\ j=1,\dots k}, \qquad f_y(x,y) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial y_j}\right)_{i,j=1,\dots,n}.$$

(Я буду писать f_x и f_y и тогда, когда аргументы у этих производных — не (x,y), а какие-нибудь другие. В связи с известной небрежностью такого обозначения надо сказать, что в литературе предлагались обозначения $D_1 f$ и $D_2 f$, которые более последовательны — указывается, что речь идёт о дифференцированию по первому или второму аргументу, каким бы он ни был. Но внимательному читателю небольшая вольность речи не повредит (а невнимательному ничто не поможет). Заметим кстати, что одни из этих производных вполне могут существовать и без того, чтобы существовали другие, и тогда нельзя говорить, что, скажем, матрица f_y является частью матрицы всех частных производных функций f_i.)

Теперь можно сформулировать теорему о неявных функциях. Пусть $a \in \mathbb{R}^k,\ b \in \mathbb{R}^n$ и пусть G — открытая окрестность точки (a,b) в пространстве $\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^n$ (запись последнего в виде прямого произведения, а не в виде $\mathbb{R}^{k+n}$ предупреждает, что его точки рассматриваются как пары (x,y) с $x \in \mathbb{R}^k,\ y \in \mathbb{R}^n$). Пусть задано гладкое отображение $f\colon Gto\mathbb{R}^n$, причём $f(a,b) = 0$, а матрица $f_y(a,b)$ обратима, т.е. якобиан

$$\det\left(\frac{\partial f_i}{\partial y_j}\right)_{i,j=1,\dots,n} \neq 0.$$

Тогда существуют такие $r_1, r_2 > 0$ и такая гладкая функция $y(\,.\,)\colon U_{r_1}(a) \to V_{r_2}(b)$, что $U_{r_1}(a) \times V_{r_2}(b) \subset G$, $f(x, y(x)) = 0$ при всех $x \in U_{r_1}(a)$ и никаких других решений (11) в $U_{r_1}(a) \times V_{r_2}(b)$ нет, т.е. если $(x,y) \in U_{r_1}(a) \times V_{r_2}(b)$ и $f(x,y) = 0$, то $y = y(x)$.

В курсах матанализа теорему часто приводят с несколько иными условием и заключением. Вместо гладкости f требуют только, чтобы всюду в $G \times H$ существовали и были непрерывны по (x,y) частные производные $\frac{\partial f_i}{\partial y_j}$ $(i,j = 1,\dots,n)$ (короче говоря, чтобы существовала и была непрерывна по (x,y) производная $f_y(x,y)$). В заключении говорят только о непрерывности $y(\,.\,)$.

Вероятно, учащемуся, проявляющему особый интерес к анализу и предполагающему специализироваться по одной из аналитических дисциплин, стоит иметь в виду различные варианты этой теоремы. В порядке тренировки он может сам пересмотреть приводимое ниже доказательство теоремы о неявных функциях и убедиться, что при указанном изменении её условий заключение изменится именно так, как сказано[7]. Что же касается до "общематематического" образования, рассчитанного на всех будущих математиков, включая алгебраистов, матлогиков и вероятностников, то мне не кажется нужным заставлять их вникать в подробные детали. Более короткая формулировка, в которой f предполагается гладкой, достаточно хорошо отражает суть дела, и она покрывает большинство тех случаев, когда используется теорема о неявных функциях.

Ниже мы займёмся бесконечномерным аналогом этой теоремы, в котором евклидовы пространства $\mathbb{R}^m$ заменяются банаховыми пространствами. Основное изменение состоит в том, что о якобианах при этом нет речи. Но по-прежнему можно говорить об обратимости линейного оператора $f_y(a,b)$, что и делается.

Мне известно три доказательства обычной ("конечномерной") теоремы о неявной функции. В учебниках матанализа чаще всего приводится доказательство индукцией по размерности n. Оно начинается с частного случая $n = 1$, когда доказательство совсем просто, а затем тот же случай используется при переходе от n к $n+1$. Это доказательство, видимо, можно считать самым элементарным (это не значит, что самым коротким). Оно, конечно, принципиально годится только в конечномерном случае. В одном из добавлений к учебнику Понтрягина

Л.С.Понтрягин. Обыкновенные дифференциальные уравнения.

(как и во многих других книгах) приводится доказательство с помощью метода последовательных приближений. Будучи, может быть, длиннее, оно зато имеет два преимущества. Во-первых, метод последовательных приближений — это очень общий метод математического анализа (не того учебного предмета, который преподаётся под этим названием на первых двух курсах, а гигантского комплекса, включающего дифференциальные уравнения, функциональный анализ и теорию функций действительного и комплексного переменного вместе со всеми её связями), а его использование в данном случае выглядит вполне естественным шагом; на этом фоне не приходится тяготиться аккуратной проработкой соответствующих деталей, которые ясным образом подчинены общему

[7] Он может также проверить, что в таком варианте x может быть точкой не $\mathbb{R}^k$, а какого-нибудь метрического или даже топологического пространства.

плану. Во-вторых, это доказательство непосредственно переносится на банахов случай. Третье доказательство — по-моему, самое короткое и изящное[8] — имеется в учебнике

У.Рудин. Основы математического анализа. М.: Мир, 1966.

Непосредственно оно является конечномерным. Я продумывал, нельзя ли его переделать в бесконечномерное, и пришёл к выводу, что в банаховом случае проходит некая модификация этого доказательства, но она длиннее и, пожалуй, не столь изящна, так что при этом утрачиваются преимущества перед доказательством методом последовательных приближений. Поскольку последнее основано на прозрачном использовании простой и важной общей идеи, ему в бесконечномерном случае приходится отдать предпочтение. (А тогда не лучше ли обращаться к нему и в конечномерном случае?)

Перехожу к "банаховой" теореме о неявных функциях.

Теорема 4. Пусть E, F — банаховы пространства, $a \in E$, $b \in F$, и пусть G — открытая окрестность точки (a, b) в пространстве $E \times F$. Пусть задано гладкое отображение

$$f\colon G \to F \qquad (x.y) \mapsto f(x, y),$$

причём $f(a, b) = 0$, а оператор $f_y(a, b)\colon F \to F$ обратим. Тогда существуют такие $r_1, r_2 > 0$ и такая гладкая функция $y(\,.\,)\colon U_{r_1}(a) \to V_{r_2}(b)$ (через $U_r(a)$ и $V_r(b)$ по-прежнему обозначаются шаровые окрестности точек a и b в пространствах E и F соответственно), что $U_{r_1}(a) \times V_{r_2}(b) \subset G$, $f(x, y(x)) = 0$ при всех $x \in U_{r_1}(a)$ и никаких других решений уравнения $f(x, y) = 0$ в $U_{r_1}(a) \times V_{r_2}(b)$ нет, т.е. если $(x, y) \in U_{r_1}(a) \times V_{r_2}(b)$ и $f(x, y) = 0$, то $y = y(x)$.

Лемма 1. Пусть H — открытая окрестность нуля в пространстве $E \times F$, и пусть задано гладкое отображение

$$\psi\colon H \to F \qquad (u, v) \mapsto \psi(u, v),$$

причём[9]

$$\psi(0, 0) = 0, \quad \psi_u(0, 0) = 0, \quad \psi_v(0, 0) = 0. \tag{13}$$

[8] Правда, в нём, как и у нас, требуется гладкость f, а не только существование и непрерывность $f_y(x, y)$. Но я уже говорил, что считаю вариант с гладкой f основным и достаточным для "общематематической" подготовки.

[9] Два нуля в $(0, 0)$ выше, равно как и три нуля в правых частях (13), имеют разный смысл. Первый нуль в $(0, 0)$ — это нуль пространства E, второй нуль в $(0, 0)$ и нуль

Тогда существуют такое $\rho > 0$ и такая непрерывная функция $v\colon U_\rho(0) \to \operatorname{clos} V_\rho(0)$, что

а) $v(u) = \psi(u, v(u))$ при всех $u \in U_\rho(0)$;

б) все решения уравнения $v = \psi(u, v)$, принадлежащие $U_\rho(0) \times \operatorname{clos} V_\rho(0)$, лежат на графике функции v (т.е. если $(u, v) \in U_\rho(0) \times \operatorname{clos} V_\rho(0)$ и $v = \psi(u, v)$, то $v = \psi(u, v)$);

в) функция $v(u)$ имеет в точке $u = 0$ производную Фреше, равную нулю.

Доказательство леммы 1. Пусть $\rho_0 > 0$ столь мало, что $U_{\rho_0}(0) \times \operatorname{clos} V_{\rho_0}(0) \subset H$. Тогда можно ввести следующие отображения:

а) При любом фиксированном $u \in U_{\rho_0}$ определено отображение [10]

$$\Psi_u\colon\ \operatorname{clos} V_{\rho_0}(0) \to F \qquad \Psi_u(v) = \psi(u, v). \tag{14}$$

б) Определено также отображение

$$\Psi\colon C(U_{\rho_0}(0), \operatorname{clos} V_{\rho_0}(0)) \to C(U_{\rho_0}(0), F),$$

переводящее функцию $v(\,.\,)$ в функцию $\Psi(v)$, которая принимает в точке $v \in U_{\rho_0}(0)$ значение $\Psi(v)(u) = \psi(u, v(u)) = \Psi_u(v(u))$.
В терминах графиков можно сказать, что график функции $\Psi(v)$ получается из графика функции v при отображении

$$U_{\rho_0}(0) \times \operatorname{clos} V_{\rho_0}(0) \to U_{\rho_0}(0) \times F \qquad (u, v) \mapsto (u, \psi(u, v)).$$

А если на минуту представить себе Ψ_u как отображение

$$\{u\} \times \operatorname{clos} V_{\rho_0}(0) \to \{u\} \times F \qquad (u, v) \mapsto \psi(u, v),$$

отображающее "вертикальные составляющие" $\{u\} \times \operatorname{clos} V_{\rho_0}(0)$ прямого произведения $U_{\rho_0}(0) \times \operatorname{clos} V_{\rho_0}(0)$ в "вертикальные составляющие" $\{u\} \times F$ прямого произведения $U_{\rho_0}(0) \times F$ (а не просто как отображения $V_{\rho_0}(0) \to F$), то можно сказать, что точка графика v, лежащая в "вертикальной

в правой части первого из равенств (13) — нуль пространства F, в правой части второго из равенств (13) подразумевается нулевой оператор $E \to F$, а в правой части третьего — нулевой оператор $F \to F$. Чтобы различать эти нули, можно было бы писать $0_E, 0_F, 0_{L(E,F)}$ и $0_{L(F,F)}$. Однако опыт показывает, что внимательный читатель способен обходиться и без таких уточнений, ориентируясь по контексту.

[10] Нижняя буква u здесь не имеет отношения к дифференцированию.

составляющей" $\{u\}\times\operatorname{clos} V_{\rho_0}(0)$, переходит в точку графика $\Psi(v)$ под действием Ψ_u. Однако я не буду "привешивать" одноточечный сомножитель $\{u\}$ к $\operatorname{clos} V_{\rho_0}(0)$ и к F, так что Ψ_u у меня отображает $V_{\rho_0}(0)$ в F.

Ясно, что во всём сказанном до сих пор можно заменить ρ_0 на любое $\rho \in (0, \rho_0)$. Проверим, что при достаточно малом ρ

$$\Psi_u(\operatorname{clos} V_\rho(0)) \subset \operatorname{clos} V_\rho(0) \qquad \text{при } |u| < \rho, \tag{15}$$

откуда, очевидно, следует также, что

$$\Psi(C(U_\rho(0), \operatorname{clos} V_\rho(0))) \subset C(U_\rho(0), \operatorname{clos} V_\rho(0)). \tag{16}$$

При достаточно малом ρ всюду в $U_\rho(0) \times \operatorname{clos} V_\rho(0)$

$$|\psi_u(u,v)|, |\psi_v(u,v)| < \frac{1}{2}.$$

Отсюда следует, что при $|u| < \rho$

$$|\psi(u,0)| = |\psi(u,0) - \psi(0,0)| \leqslant \frac{1}{2}|u|$$

и что при $|u| < \rho,\ |v_1|, |v_2| \leqslant \rho$

$$|\Psi_u(v_1) - \Psi_u(v_2)| = |\psi(u,v_1) - \psi(u,v_2)| \leqslant \frac{1}{2}|v_1 - v_2| \tag{17}$$

(почему?). Значит,

$$|\Psi_u(v)| = |\psi(u,v)| \leqslant \frac{1}{2}(|u| + |v|) \leqslant \rho \qquad \text{в} \quad U_\rho(0) \times \operatorname{clos} V_\rho(0),$$

чем установлено (15) (и (16)). Далее, ввиду (17), Ψ_u является сжимающим отображением полного метрического пространства $\operatorname{clos} V_\rho(0)$ в себя. Заодно получается (как?), что Ψ является сжимающим отображением полного метрического пространства $C(U_\rho(0), \operatorname{clos} V_\rho(0))$ в себя. Стало быть, у каждого из этих Ψ_u и у Ψ имеется единственная неподвижная точка. Обозначим через v неподвижную точку отображения Ψ. Это есть некоторая непрерывная функция $v\colon U_\rho(0) \to \operatorname{clos} V_\rho(0)$, причём её значение $v(u)$ в точке u — это (единственная, как мы видели) неподвижная точка отображения Ψ_u (ибо $v(u) = \psi(u, v(u))$). Тем самым доказаны утверждения а) и б) из заключения теоремы.

Остаётся доказать утверждение в), которое эквивалентно тому, что $|v(u)| = o(|u|)$, т.е. тому, что

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta \in (0, \rho) \quad |u| < \delta \Longrightarrow |\psi(u)| \leqslant \varepsilon |u|. \tag{18}$$

Имеется такое $\delta(\varepsilon) \in (0, \rho)$, что

$$|u|, |v| < \delta(\varepsilon) \Longrightarrow |\psi_u(u, v)|, |\psi_v(u, v)| < \varepsilon,$$

откуда следует (как?), что

$$|u|, |v| < \delta(\varepsilon) \Longrightarrow |\psi(u, v)| \leqslant \varepsilon(|u| + |v|).$$

Ввиду непрерывности $v(\,.\,)$, имеется такое $\delta_2(\varepsilon) \in (0, \delta_1(\varepsilon))$, что

$$|u| < \delta_2(\varepsilon) \Longrightarrow |v(u)| < \delta_1(\varepsilon).$$

Стало быть,

$$|u| < \delta_2(\varepsilon) \Longrightarrow |u|, |v(u)| < \delta_1(\varepsilon) \Longrightarrow |v(u)| = |\psi(u, v(u))| \leqslant \varepsilon(|u| + |v(u)|),$$

откуда $(1 - \varepsilon)|v(u)| \leqslant \varepsilon|u|$, $|v(u)| \leqslant \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}|u|$. Это лишь несущественно отличается от (18): чтобы перейти к (18), достаточно положить $\delta(\varepsilon) = \delta_2\left(\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}\right)$ (проверьте!).

Лемма 2. Пусть E, F — банаховы пространства, $a \in E$, $b \in F$, и пусть G и H — открытые окрестности точек a и b в соответствующих пространствах. Пусть задано гладкое отображение $f\colon G \times H \to F$, причём $f(a, b) = 0$, а оператор $f_y(a, b)\colon F \to F$ обратим. Тогда существуют такие $r_1, r_2 > 0$ и такая непрерывная функция $y(\,.\,)\colon U_{r_1}(a) \to V_{r_2}(b)$, что $U_{r_1}(a) \times V_{r_2}(b) \subset G \times H$, $f(x, y(x)) = 0$ при всех $x \in U_{r_1}(a)$ и никаких других решений уравнения $f(x, y) = 0$ в $U_{r_1}(a) \times V_{r_2}(b)$ нет, т.е. если $(x, y) \in U_{r_1}(a) \times V_{r_2}(b)$ и $f(x, y) = 0$, то $y = y(x)$. Эта функция $y(\,.\,)$ имеет в точке $x = a$ производную Фреше $y'(a)$, равную нулю.

Заключение данной леммы слабее заключения теоремы 4 только в одном отношении: в лемме утверждается дифференцируемость по Фреше функции $y(\,.\,)$ только в точке $x = a$, тогда как в теореме говорится о гладкости этой функции.

Доказательство леммы 2. В условиях леммы, f возле (a, b) имеет вид

$$f(x, y) = A(x - a) + B(y - b) + \varphi(x, y),$$

где

$$A = f_x(a,b), \quad B = f_y(a,b), \quad \varphi(a,b) = 0, \quad \varphi_x(a,b) = 0, \quad \varphi_y(a,b) = 0,$$

причём оператор B обратим. Положив $x - a = u$, перепишем уравнение $f(x,y) = 0$ в виде $Au + B(y-b) + \varphi(a+u, y) = 0$ и затем — в виде

$$y = b - B^{-1}Au - B^{-1}\varphi(a+u, y).$$

Ввиду малости φ, естественно ожидать, что $b - B^{-1}Au$ составляет "основную часть" y. Поэтому мы положим

$$y = b - B^{-1}Au + v \tag{19}$$

и окончательно перепишем наше уравнение в терминах новых переменных u и v:

$$v = \psi(u,v),$$

где

$$\psi(u,v) = -B^{-1}\varphi(a+u, b - B^{-1}Au + v). \tag{20}$$

ψ определена в окрестности H точки $(0,0)$, являющейся образом G при гомеоморфизме[11]

$$E \times F \to E \times F \qquad (x,y) \mapsto (u,v) = (x-a, y-b+B^{-1}Au).$$

Повторим ещё раз: если $u = x - a$ и y, u, v связаны соотношением (19), то

$$((x,y) \in G,\ f(x,y) = 0) \Longleftrightarrow ((u,v) \in H,\ v = \psi(u,v)). \tag{21}$$

[11]Этот гомеоморфизм является обратимым аффинным (т.е. неоднородным линейным) отображением пространства $E \times F$ на себя. (Аффинное отображение $L \to L$ векторного пространства $L \to L$ — это отображение вида $z \mapsto Cz + c$, где C — линейный оператор в L и $c \in L$. Оно обратимо, если L обратим. В нашем случае $L = E \times F$ является нормированным (даже банаховым) пространством, а оператор C, если записывать элементы $E \times F$ в виде столбцов типа $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, в понятном смысле записывается как матрица

$$C = \begin{pmatrix} I_E & 0 \\ -B^{-1}A & I_F \end{pmatrix},$$

где I_E и I_F суть единичные операторы в E и F соответственно. И C, и C^{-1} являются ограниченными линейными операторами.

ψ имеет свойства (13), которые следуют из аналогичных свойств φ (например, $\psi_u(u,v) = -B^{-1}\varphi_x(a,b) = 0$). Итак, для ψ выполняются условия леммы 1 и потому существуют $\rho > 0$ и непрерывная функция $v\colon U_\rho(0) \to \operatorname{clos} V_\rho(0)$ с указанными в лемме свойствами.

Положим $r_2 = \frac{\rho}{2}$ и возьмём столь малое r_1, что $r_1 < \frac{\rho}{2(\|B^{-1}A\|+1)}$ и что в $V_{r_1}(0)$ всюду $|v(u)| < |u|$ (выполнение последнего условия при достаточно малых r_1 гарантировано существованием у v нулевой производной Фреше в точке 0). Функция

$$y(x) = b - B^{-1}A(x-a) + v(x-a) \tag{22}$$

определена и непрерывна в $U_{r_1}(a)$ (и даже в $U_\rho(a)$), а в точке $x = a$ она имеет производную Фреше. При этом

$$\begin{aligned} |y(x) - b| &\leqslant \|B^{-1}A\||x-a| + |v(x-a)| \leqslant \|B^{-1}A\||x-a| + |v(x-a)| \\ &= (\|B^{-1}A\|+1)|x-a| \\ &\leqslant (\|B^{-1}A\|+1)\frac{\rho}{2(\|B^{-1}A\|+1)} = \frac{\rho}{2} = r_2. \end{aligned}$$

Значит, $y(x)$ действительно отображает $U_{r_1}(a)$ в $\operatorname{clos} V_{r_2}(b)$.

Тот факт, что $f(x, y(x)) = 0$ при всех $x \in U_{r_1}(0)$, следует из (21) и из того, что связь между $y(x)$ и $u = x - a, v(u)$ в точности такая же, как в (19). Остаётся убедиться, что если $f(x,y) = 0$ и (x,y) находится в $U_{r_1}(a) \times \operatorname{clos} V_{r_2}(b)$, то $y = y(x)$. Поскольку $U_{r_1}(a) \times \operatorname{clos} V_{r_2}(b) \subset G$, то ввиду (21) $(u,v) \in H$, $\psi(u,v)$ определена и $v = \psi(u,v)$. Уточним, где именно внутри H лежит точка $(u,v) = (x-a, y-b+B^{-1}Au)$. $|u| < \rho$, ибо $r_1 < \frac{\rho}{2(\|B^{-1}A\|+1)} < \rho$, что же касается v, то

$$\begin{aligned} |v| &\leqslant |y-b| + \|B^{-1}A\||x-a| \leqslant r_2 + \|B^{-1}A\|r_1 \\ &< \frac{\rho}{2} + \|B^{-1}A\|\frac{\rho}{2(\|B^{-1}A\|+1)} < \frac{\rho}{2} + \frac{\rho}{2} = \rho. \end{aligned}$$

Стало быть, $(u,v) \in U_\rho(0) \times \operatorname{clos} V_\rho(0)$. Но в $U_\rho(0) \times \operatorname{clos} V_\rho(0)$ те точки, для которых $v = \psi(u,v)$, лежат на графике функции $v(\,.\,)$, так что у нас $v = v(u)$. А тогда из (19), из $u = x - a$ и из (22) явствует, что

$$y = b - B^{-1}A(x-a) + v(x-a) = y(x).$$

Доказательство теоремы 4. Мы сперва убедимся, что функция $y(x)$ дифференцируема по Фреше при всех $x \in U_{r_1}(a)$, а затем — что производная Фреше непрерывна по x. Уменьшив, если потребуется, G, можно считать, что производная Фреше $f_y(x,y)$ обратима всюду в G[12].

Прежде всего, лемма 2 (при применении которой с самого начала надо иметь в виду уменьшенную G) гарантирует существование надлежащих $U_{r_1}(a)$, $V_{r_2}(b)$ и $y(\,.\,)\colon U_{r_1}(a) \to \operatorname{clos} V_{r_2}(b)$, причём $y(\,.\,)$ дифференцируема по Фреше в точке a. Чтобы доказать дифференцируемость $y(\,.\,)$ в любой другой точке x_1, применим лемму 2, приняв точку x_1 за a, а $y_1 = y(x_1)$ — за b. Получим, что имеются $r_1', r_2' > 0$ и непрерывная функция $\widehat{y}\colon U_{r_1'}(x_1) \to \operatorname{clos} V_{r_2'}(y_1)$ со следующими свойствами:

$$\begin{gathered} y_1 = \widehat{y}(x_1), \quad f(x, \widehat{y}(x)) = 0 \text{ всюду в } U_{r_1'}(x_1), \\ \widehat{y} \text{ дифференцируема по Фреше при } x = x_1. \end{gathered}$$

(Лемма 2 гарантирует также, что все решения уравнения $f(x,y) = 0$, принадлежащие $U_{r_1'}(x_1) \times \operatorname{clos} V_{r_2'}(y_1)$, лежат на графике функции $\widehat{y}$, но сейчас это нам не понадобится.) Уменьшив, если понадобится, r_1' и r_2', можно считать, что $U_{r_1'}(x_1) \times \operatorname{clos} V_{r_2'}(y_1) \subset U_{r_1}(a) \times \operatorname{clos} V_{r_2}(b)$. Но в последней области все решения уравнения $f(x,y) = 0$ лежат на графике функции $y(x)$. Значит, $\widehat{y}(x)$ — это ограничение (сужение) функции $y(x)$ на окрестность $U_{r_1'}(x_1)$ точки x_1, а потому дифференцируемость $\widehat{y}(x)$ в точке x_1 означает и дифференцируемость $y(x)$ в той же точке.

Итак, $y(x)$ имеет производную Фреше при всех x, достаточно близких к a. Продифференцировав в какой-нибудь из таких точек x равенство $f(x, y(x)) = 0$, получим $f_x(x, y(x)) + f_y(x, y(x)) y'(x) = 0$. При достаточной близости x к a гарантирована обратимость оператора $f_y(x, y(x))$ (ибо при этом точка $y(x)$ тоже близка к b), так что

$$y'(x) = -(f_y(x, y(x)))^{-1} f_x(x, y(x)). \tag{23}$$

[12]Вероятно, читателю известно, что если норма $\|L\|$ линейного оператора $L\colon F \to F$ меньше 1, то оператор $I + L$ (где I — единичный оператор в F) обратим. (Действительно, легко проверить, что оператор $A = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n L^n$ (где принято $L^0 = I$) корректно определён и является двусторонним обратным для A, т.е. $AL = LA = I$.) Если теперь линейный оператор $B_0\colon F \to F$ обратим, то и любой достаточно близкий к нему оператор B тоже обратим. (Близость понимается как малость нормы $\|B - B_0\|$.) Действительно, обозначим $C = B - B_0$. Если $\|C\| < \frac{1}{\|B_0^{-1}\|}$, то $\|B_0 C\| \leqslant \|B_0\| \|C\| < 1$. Но $B_0 + C = B_0(I + B_0^{-1} C)$, где оба сомножителя обратимы (первый обратим по условию, а обратимость второго, как мы только что видели, гарантируется тем, что $\|B_0^{-1} C\| < 1$).

Правая часть (23) непрерывна по x (почему это так для $(f_y(x, y(x)))^{-1}$?), и мы видим, что возле a производная $y'(x)$ непрерывно зависит от x, т.е. функция $y(x)$ является гладкой.

§2. Применения "банаховой" теоремы о неявной функции в теории обыкновенных дифференциальных уравнений.

4. Существование и единственность решения обыкновенного дифференциального уравнения вместе с его дифференцируемостью по параметрам и начальным данным.

Наша цель указана в названии данного раздела. Можно уточнить: имеется в виду "локальная" теорема, говорящая о существовании и прочих свойствах решения на некотором "достаточно малом" интервале изменения независимой переменной ("времени")". В теории обыкновенных дифференциальных уравнений говорится кое-что и о том, что делается за пределами этого интервала, но доказательство соответствующей "глобальной" теоремы[13] требует уже иных рассуждений (другое дело, что при этом используется локальная теорема, но рассуждения отнюдь не сводятся к её автоматическому применению). Мы обращаемся к дифференциальным уравнениям для того, чтобы дать пример применения "банаховой" теоремы о неявной функции, а это касается только доказательства локальной теоремы. С этой точки зрения только последняя и должна бы нас интересовать. В основном мы, действительно, будем заниматься её доказательством. Однако затем я скажу и о глобальной теореме, чтобы локальная теорема воспринималась в правильной перспективе: не как окончательный результат, а как шаг на пути к таковому — но шаг, являющийся самым важным и технически самым сложным.

Надо сказать, что вообще при применении функционального анализа к вопросам, возникающим в каком-то другом разделе математики, ответ

[13] В упоминавшемся выше учебнике Л.С.Понтрягина она названа "интегральной" (с пояснением, что эта "интегральность" не имеет отношения к интегральному исчислению). Мне кажется, что прилагательное "глобальная", фигурируя в паре "локальная теорема — глобальная теорема", ничуть не хуже отражает различие между этими теоремами, чем "интегральная", и в то же время является, так сказать, менее занятым термином.

на эти вопросы часто не сводится к одному только непосредственному применению какой-то теоремы их функционального анализа,а требует также и использования каких-то (возможно, более простых) соображений из того самого раздела математики, где мы хотим эту теорему применить. В этом отношении настоящий п. 4 довольно типичен.

Этот п. получился длиннее, чем я ожидал, но это отчасти объясняется тем, что он содержит неформальные пояснения. Без них формулировки различных утверждений и их формальные доказательства занимают, мне кажется, несколько меньше места, чем требуется при более традиционном изложении тех же вопросов, причём приводимый здесь вариант, по-моему, в большей степени выдержан в едином духе.

Мы будем говорить о векторном дифференциальном уравнении (т.е. системе дифференциальных уравнений)

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x), \tag{24}$$

заданном в некоторой области Γ пространства $\mathbb{R}^{n+1} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ переменных (t, x). "Правая часть", т.е. (векторная) функция f[14], будет предполагаться гладкой по всем своим аргументам — это простая формулировка, удобная для запоминания и, мне кажется, её достаточно для общематематической подготовки, хотя на самом деле достаточно меньшего (это "меньшее" можно предоставить тем, кто будет хотя бы отчасти специализироваться по дифференциальным уравнениям). Когда специально обращают внимание на то значение, которое принимает решение (24) в какой-то "начальный" момент времени t_0, то говорят, что это значение x_0 является "начальным значением", а условие, что решение $x(t)$ в начальный момент времени t_0 принимает данное начальное значение x_0 (т.е. что $x(t_0) = x_0$), называют начальным условием. А когда надо специально указать, что данное решение имеет начальное значение x_0 (всё при том же $t = t_0$), то естественно обозначать это решение через $x(t, x_0)$, поскольку оно и в самом деле зависит и от t, и от x_0. Правда, вначале мы ещё не знаем, единственно ли такое решение[15] и потому — насколько недвусмысленно такое обозначение. Позднее мы установим единственность, но

[14]Говорят также "правые части", имея в виду, что речь идёт о системе уравнений $\dot{x}_i = f_i$, каждое из которых имеет свою правую часть f_i.

[15]Кое-что насчёт единственности будет установлено уже в теореме 5, но это будет далеко не окончательный вариант.

пока это не сделано, обозначение $x(t, x_0)$ (а также $x(t, u)$ с $u \approx x_0$) будет временно иметь такой смысл: это некоторое решение (24), о котором говорится в теореме 5. Оно действительно удовлетворяет начальному условию $x(t_0, x_0) = x_0$ (соответственно, $x(t_0, u) = u$), но вопрос о том, нет ли других решений (того же уравнения, удовлетворяющих тому же условию), вначале оставляется в стороне.

В основном мы будем доказывать следующую теорему.

Теорема 5. Пусть $(t_0, x_0) \in \Gamma$. Тогда существует такое $\delta > 0$, что при любом $u \in U_\delta(x_0)$[16] система (24) имеет решение $x(t, u)$, определённое на отрезке $[t_0-\delta, t_0+\delta]$ и удовлетворяющее начальному условию $x(t_0, u) = u$. Как вектор-функция

$$x\colon (t_0 - \delta, t_0 + \delta) \times U_\delta(x_0) \to \mathbb{R}^n \qquad (t, u) \mapsto x(t, u),$$

это $x(\,.\,,\,.\,)$ является гладкой функцией своих аргументов[17]. Если имеется другое решение $z(t)$, удовлетворяющее тому же начальному условию $z(t_0) = x_0$, то на некотором интервале $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ оно совпадает с $x(t, x_0)$.

Утверждение о единственности в этой формулировке выглядит довольно слабым. Естественно ожидать, что $x(t)$ и $y(t)$ совпадают не только на каком-то интервале, неизвестно, насколько малом, но и при всех тех t, при которых оба решения определены. И вообще ничего не говорится о единственности решений с начальными значениями $x(t_0) = u$

[16] $U_\delta(x_0)$ — это шаровая δ-окрестность точки x_0 в $\mathbb{R}^n$, т.е.

$$U_\delta(x_0) = \{u \in \mathbb{R}^n;\ |u - x_0| < \delta\}.$$

Забегая вперёд, предупредим, что шаровые δ-окрестности в других пространствах иногда во избежание путаницы будут обозначаться другими буквами, например, ниже появится шаровая δ-окрестность $V_\delta(a)$ точки a в $\mathbb{R}^m$.

[17] Полная область определения для $x(\,.\,,\,.\,)$ чуть больше указанной здесь — это множество $[t_0 - \delta, t_0 + \delta] \times U_\delta(x_0)$, не являющееся открытым. (Вообще-то в локальной теореме совершенно не существенно, говорить ли о решении, определённом на открытом или замкнутом интервале — от одного варианта всегда можно перейти к другому, чуть уменьшив интервал, где это решение определено. Просто в доказательстве будет удобнее иметь дело с замкнутым интервалом, вот я и формулирую теорему с $[t_0 - \delta, t_0 + \delta]$, т.е. в том виде, как она непосредственно будет доказана.) А понятие гладкой функции определялось только для функций на открытых множествах. Можно было бы определить его и для функций на множествах некоторых других типов, включая полную область определения $x(\,.\,,\,.\,)$. Однако не видно, чтобы в данном случае это сулило какие-то выгоды. Проще "забыть" о том, что $x(t, u)$ определено не только при $|t - x_0| < \delta$, но и при $|t - t_0| = \delta$.

при $u \approx x_0$. Позднее мы установим более сильное утверждение о единственности, восполняющее все эти недомолвки. При этом будет использоваться то сравнительно слабое утверждение о единственности, которое содержится в теореме 5, вместе с простыми соображениями совсем иного характера. Сама же теорема о неявной функции или принцип сжимающих отображений, на котором основано её доказательство, не очень-то подходят для непосредственного доказательства того утверждения о единственности, какое хотелось бы иметь. Они гарантируют единственность, но единственность чего? Единственность элемента некоторого банахова пространства непрерывных функций — по существу, это функции $[t_0 - \delta, t_0 + \delta] \to \mathbb{R}^n$, хотя формально мы изменим область их определения, — являющегося решением некоторого вспомогательного уравнения, равносильного комбинации "(24) + условие $x(t_0, u) = u$". Но не могут ли удовлетворять указанной комбинации какие-нибудь функции $y\colon J \to \mathbb{R}^n$, определённые не на $[t_0 - \delta, t_0 + \delta]$, а на каком-нибудь другом интервале J? Они не являются элементами того же банахова пространства, так что их существование непосредственно не противоречило бы единственности решения в некоторой области указанного банахова пространства. Приходится рассматривать одно и то же решение на различных интервалах времени. В теореме 5 сформулировано только то, что при этом непосредственно и просто получается на основании теоремы 4. Более длинные рассуждения позволили бы "выжать" из неё несколько больше, но это излишне — окончательный результат всё равно потребовал бы иных соображений и при этом не было бы большой разницы, будем ли мы пользоваться несколько более сильным утверждением, нежели в теореме 5, или удовольствуемся ею.

Сейчас же отмечу, что сразу напрашивается некоторое обобщение теоремы 5. Во-первых, за начальный момент времени можно брать различные числа s; (некоторое) решение, удовлетворяющее начальному условию $x(s) = u$, обозначается ниже через $x(t, u, s)$ (оно тоже окажется единственным, но вначале так будет обозначаться именно некоторое решение, доставляемое приводимой ниже теоремой 6, а вопрос о том, нет ли других решений, вначале будет оставлен в стороне). Во-вторых, стоит учесть и тот случай, когда дифференциальное уравнение зависит ещё от некоторого параметра $a \in \mathbb{R}^m$, так что теперь $f = f(a, t, x)$ — гладкая функция, определённая в некоторой области Γ пространства $\mathbb{R}^{m+n+1} = \mathbb{R}^m \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, а исходная система имеет вид

$$\dot{x} = f(a, t, x). \tag{25}$$

Указывая зависимость её решений (поначалу — некоторых решений, доставляемых теоремой 6) от параметра, мы будем писать $x(t, a, u, s)$.

Теорема 6. Пусть $(a_0, x_0, t_0) \in \Gamma$. Тогда существует такое $\delta > 0$, что при любых

$$(a, s, u) \in V_\delta(a_0) \times (t_0 - \delta, t_0 + \delta) \times U_\delta(x_0)$$

система (25) имеет решение $x(t) = x(t, a, s, u)$, определённое на отрезке $[t_0-\delta, t_0+\delta]$ и удовлетворяющее начальному условию $x(s) = x(s, a, s, u) = u$. Как вектор-функция

$$x\colon (t_0-\delta, t_0+\delta)\times V_\delta(a)\times(t_0-\delta, t_0+\delta)\times U_\delta(x_0) \to \mathbb{R}^n \qquad (t, u) \mapsto x(t, a, s, u),$$

это x является гладкой функцией своих аргументов.

Можно доказать теорему 6, повторяя с очевидными изменениями доказательство теоремы 5. Доказательство при этом становится несколько более громоздким, но никаких новых моментов не возникает. Но оказывается, что этого даже и не надо делать, потому что теорема 6 является формальным следствием теоремы 5, если применить последнюю к некоторой новой системе с новыми неизвестными и параметрами.

Для начала положим $y(t) = x(t + s)$. Для y получается уравнение

$$\dot{y}(t) = \dot{x}(t + s) = f(a, t + s, x(t + s)) = f(a, t + s, y(t)).$$

Начальное значение для y есть $y(0) = u$, причём нас по-прежнему интересуют значения u, близкие к x_0, а в $f(a, t+s, y)$ можно рассматривать s как ещё один (помимо a) параметр. Таким образом, мы перефразировали задачу о решениях (25) с начальными условиями $x(s) = u$, где $s \approx t_0$ и $x(s) = u \approx x_0$, как задачу о решениях системы

$$\dot{y}(t) = f(a, t + s, y(t)),$$

правая часть которой зависит от параметра $\begin{pmatrix} a \\ s \end{pmatrix}$ (этот вектор-столбец при случае может несколько небрежно записываться в виде строки (a, s)). Заметим, что при наших предположениях правая часть новой системы является гладкой функцией от $(t, y, (a, s))$.

Далее, параметр можно "загнать" в начальные значения, добавив новые неизвестные — столько же новых неизвестных, сколько параметров:

$$z \in \mathbb{R}^{m+1+n}, \quad z = \begin{pmatrix} a \\ s \\ y \end{pmatrix}.$$

z удовлетворяет уравнению

$$\dot{z} = g(t, z), \quad \text{где } g(t, z) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ f(a, t + s, y(t)) \end{pmatrix}. \tag{26}$$

Начальное значение для z есть $v = \begin{pmatrix} a \\ s \\ u \end{pmatrix}$. Нас интересуют значения v, близкие к $z_0 = \begin{pmatrix} a_0 \\ t_0 \\ x_0 \end{pmatrix}$.

По теореме 5, существует такое $\Delta > 0$ (изменение обозначения — Δ вместо δ — вызвано тем, что мы хотим иметь какое-то δ в заключении теоремы 6), что на отрезке $[-\Delta, \Delta]$ определено решение $z(t) = z(t, v)$ уравнения (26), причём вектор-функция

$$z\colon [-\Delta, \Delta] \times W_\Delta(z_0) \to \mathbb{R}^{m+1+n} \qquad (t, v) \mapsto z(t, v)$$

(W — это, конечно, шаровая окрестность) является гладкой; кроме того, выполняется утверждение о единственности. Как мы сейчас увидим, отсюда следует утверждение теоремы 6. В ней речь идёт об окрестности $V_\delta(a_0) \times (t_0 - \delta, t_0 + \delta) \times U_\delta(x_0)$ точки $(a_0, t_0, x_0) = z_0$ в $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, и если мы хотим, чтобы эта окрестность входила в "сферу действия" заключения теорема 5, надо, чтобы было

$$V_\delta(a_0) \times (t_0 - \delta, t_0 + \delta) \times U_\delta(x_0) \subset W_\Delta(z_0),$$

а это обеспечено при $\delta \leqslant \frac{\Delta}{\sqrt{3}}$. Мы возьмём даже чуть меньшее δ, а именно, $\delta = \frac{\Delta}{2}$. Так как z как функция от своего первого аргумента t является решением системы (26), а в правых частях первых $m+1$ уравнений этой системы стоят нули, то соответствующие z_i не меняются со временем, т.е. они всё время равны своим начальным значениям. А эти значения суть

(a, s). Последние n координат z_i образуют вектор $y(t)$, производная которого есть $f(a, t+s, y(t))$ (причём теперь мы знаем, что s и a фигурируют здесь как постоянные параметры). Значит, функция $x(t) = y(t-s)$ удовлетворяет (25). Эта функция определена, когда аргумент у y, т.е. $t-s$, не превосходит по модулю числа Δ. В заключении теоремы 6 говорится о другом — $x(t)$ должна быть определена при всех $t \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$. Мы уже договорились брать только те s, для которых $|t_0 - s| < \delta$; убедимся, что тогда $x(t)$ будет определено при всех $t \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$. В самом деле, при таких t и s

$$|t-s| = |(t-t_0) + (t_0 - s)| \leqslant |t - t_0| + |t_0 - s| \leqslant \delta + \delta = \Delta.$$

Теперь понятно, что отображение

$$x\colon [t_0 - \delta, t_0 + \delta] \times V_\delta(a) \times (t_0 - \delta, t_0 + \delta) \times U_\delta(x_0) \to \mathbb{R}^n \qquad (t, u) \mapsto x(t, a, s, u)$$

корректно определено и является гладким на $(t_0 - \delta, t_0 + \delta) \times \ldots$ (гладкость явствует из представления этого отображения как композиции

$$(t, a, s, u) \mapsto (t-s, a, s, u) = (t-s, v) \mapsto z(t-s, v) \mapsto$$

$$\mapsto \text{последние } n \text{ координат вектора } z(t-s, v)\ ).$$

Итак, теорема 6 сводится к теореме 5, доказательством которой мы сейчас и займёмся.

Векторное дифференциальное уравнение (24), заданное в некоторой области Γ пространства $\mathbb{R}^{n+1} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ переменных (t, x) и рассматриваемое вместе с начальным условием $x(t_0) = u$, равносильно интегральному уравнению

$$x(t) = u + \int_{t_0}^{t} f(\tau, x(\tau)) d\tau. \tag{27}$$

(Это просто и к тому же обсуждается в учебниках по теории обыкновенных дифференциальных уравнений.) Если f гладко зависит от своих аргументов, то к интегральному уравнению легко применить метод последовательных приближений (в более абстрактных терминах — принцип сжимающих отображений) и доказать существование решения у исходной системы обыкновенных дифференциальных уравнений с данным начальным значением. Одновременно доказывается и его единственность[18]. Кроме того, решение гладко зависит от своего начального значения u, но это уже не получается автоматически при доказательстве его существования, а устанавливается отдельно, причём посредством рассуждения совсем иного характера. Это отдельное рассуждение не так уж просто, хотя и не является особенно сложным; однако неприятно, что доказательство утверждения о существовании и дифференцируемости по (x_0, a) распадается на две не связанные друг с другом части, хотя само утверждение производит впечатление чего-то единого.

Принцип сжимающих отображений формулируется в таком контексте (для полных метрических пространств), в котором о дифференцируемости вообще не приходится говорить — в этом контексте подобного понятия нет. Последовательные приближения по своей форме не исключают того, чтобы наряду со сходимостью самих этих приближений говорить о сходимости их производных по каким-то переменным, а это могло бы доставить доказательство существования таких производных у интересующего нас предела этих приближений. Но так как обычные последовательные приближения по существу основаны на тех же сжимающих отображениях, то, если можно так выразиться, заложенный в них механизм "не настроен" на обеспечение сходимости производных.

Дело приобрело бы другой оборот, если бы удалось использовать "банахову" теорему о неявных функциях, в которой "дифференциальные" понятия фигурируют и в посылке, и в заключении. Естественно ожидать, что если удастся провести доказательство существования решений с её помощью, то это доказательство автоматически гарантирует и его гладкость по u.

Намерение применить эту теорему к интегральному уравнению сразу же наталкивается на следующее затруднение. Известно, что решения (24), а значит и (27), вообще говоря, существуют только локально. Скажем, утверждение о существования решений с $x(0) = x_0$, как и близ-

[18]Для возможности применения данного метода достаточно несколько более слабых условий, чем гладкость, однако я не думаю, что на эти уточнения стоит обращать внимание при математической подготовке "общего" характера (рассчитанной на будущих математиков, механиков и физиков различной ориентации); другое дело, что специалисты по дифференциальным уравнениям должны хотя бы в общих чертах знать об этом. Более существенно, что другим способом можно доказать существование решения даже тогда, когда правая часть всего лишь непрерывна; единственности в этом случае может не быть.

ких к нему решения, должно выглядеть так: "имеется такое $\delta > 0$, что существует функция, определённая на отрезке $[t_0 - \delta, t_0 + \delta]$ и имеющая такие-то свойства". Значит, функциональное пространство, в котором мы надеемся найти решение, должно быть пространством каких-то функций на отрезке $[t_0 - \delta, t_0 + \delta]$ и тем самым зависеть от δ. Уравнение (27) надо рассматривать сразу в некоем семействе пространств и должен быть получен вывод о существовании среди них пространства с какими-то "хорошими" свойствами. Но в теореме о неявных функциях речь идёт об уравнении в одном-единственном пространстве. Кроме того, в теореме о неявных функциях речь идёт об уравнении $f(u, v) = 0$, где v — неизвестное, а u — "параметр"[19]. Помимо всего прочего, в теореме 4 предполагается, что при некоем значении параметра $u = u_0$ уравнение имеет решение y_0. Какой у нас будет параметр — $u = x_0$, как только что говорилось? Тогда где же то значение параметра, при котором имеется какое-то решение v_0, т.е. при котором мы заранее знаем, что (27), т.е. (24), заведомо имеет решение?

Выход из положения до смешного прост. Мы вводим новую независимую переменную s, принимая, что $t = t_0 + bs$, переписываем (24) в терминах s вместо t, обозначая $x(t)$ через $y(s)$, и пишем интегральное уравнение для y:

$$\frac{dy(s))}{ds} = bf(t_0 + bs, y(s)),$$

$$y(s) = u + b\int_0^s f(t_0 + b\sigma, y(\sigma))d\sigma. \tag{28}$$

Мы намерены рассматривать значения s от -1 до 1. В терминах t это означает, что $|t - t_0| \leqslant b$. Функциональным пространством, с которым мы будем иметь дело, будет пространство $C([-1, 1], \mathbb{R}^n)$ непрерывных функций $[-1, 1] \to \mathbb{R}^n$, в котором имеется обычная норма $\|x\| = \max_{(-1,1)} |x(s)|$, а интегральное уравнение станет уравнением в этом пространстве, причём

[19] Я заменил x и y, фигурирующие в теореме 4, на u и v, потому что сейчас у нас x — это не какой-то параметр, а неизвестное решение (в теореме таковое обозначалось через y), тогда как x_0 — это значение решения в начальный момент времени (можно догадаться, что оно сыграет роль параметра или, может быть, "части параметра", если к x_0 будут присоединены ещё какие-то величины в качестве других параметров), тогда как в теореме 4 параметр обозначен через x. Если же представить себе теорему 4 перефразированной в терминах u и v, то опасность путаницы устраняется, а за x и x_0 можно сохранить тот смысл, какой они имеют в формулировке теоремы 5.

уравнение зависит от параметров u и b. Прежняя формулировка "имеется такое $\delta > 0$, что существует функция, определённая на отрезке $[t_0 - \delta, t_0 + \delta]$ и имеющая такие-то свойства", заменяется следующей: "имеется такое $\delta > 0$, что при $|u - x_0|, |b| < \delta$ существует функция y, определённая на отрезке $[-1, 1]$, удовлетворяющая интегральному уравнению (28) с этими параметрами u, b и имеющая ещё такие-то свойства" (в первоначальных терминах решение $x(\,.\,)$ получается определённым на $[-b, b]$; дословно первоначальная формулировка получится, если выбрать какое-то $b \in (0, \delta)$ и, чуть меняя обозначения, принять это b за "окончательное" δ). Всё это теперь относится к одному и тому же пространству.

Ниже через $U_r(x_0)$ обозначается открытый шар пространства $\mathbb{R}^n$ радиуса r с центром в x_0, а через $W_r(x_0)$ — открытый шар $\|y - x_0\| < r$ пространства $C([-1, 1], \mathbb{R}^n)$. Возьмём столь малое $r > 0$, что функция $f(t, x)$ определена и является гладкой в $(t_0 - r, t_0 + r) \times U_r(x_0)$. При $|b| < r$ и $\|y - x_0\| < r$ в аргументе подинтегрального выражения в (28)

$$(t_0 + b\sigma, y(\sigma)) \in (t_0 - r, t_0 + r) \times U_r(x_0)$$

при всех $\sigma \in [-1, 1]$, поэтому интеграл в правой части (28) корректно определён и (при данных b, y) является некоторой функцией $z(t)$. Определим отображение

$$\mathcal{F}\colon (-r, r) \times W_r(x_0) \to C([-1, 1], \mathbb{R}^n)$$

как отображение, переводящее $(b, y(\,.\,))$ в эту самую $z(\,.\,)$. Можно ещё сказать, что

$$\mathcal{F}(b, y)(s) = \int_0^s f(t_0 + b\sigma, y(\sigma))d\sigma$$

(поясняю запись: $\mathcal{F}(b, y)$ — это, как и y, функция от s (та самая, которая на минуту была обозначена через z); в точке s она принимает значение $\mathcal{F}(b, y)(s)$; в правой части указано, чему это значение равно).

Нам надо установить разрешимость в нашем функциональном пространстве $C([-1, 1], \mathbb{R}^n)$ относительно y уравнения $y = u + b\mathcal{F}(b, y)$ или, что то же, уравнения

$$y - u - b\mathcal{F}(b, y) = 0 \tag{29}$$

при достаточно малых b и при $u \approx x_0$. (u, b) — это параметр (играющий ту же роль, какую в п. 3 играл x). Если это будет сделано, то теорема гарантирует существование решения $y = y(b, u)$, которое лежит в некоторой области пространства $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, содержащей точку $(0, x_0, y_0)$, где

y_0 — функция, тождественно равная x_0, и единственно в этой области. Область, о которой идёт речь, имеет вид $(-\delta, \delta) \times W_\delta(x_0)$ с некоторым $\delta > 0$. Будучи элементом пространства $C([-1,1], \mathbb{R}^n)$, полученное y является функцией от s, так что в более конкретных терминах теорема доставляет нам решение $y(s) = y(s, b, u)$ интегрального уравнения (28), определённое на $[-1,1]$ при $|b| < \delta, |u - x_0| < \delta$, а также утверждение о единственности этого решения при таких же значениях (b, u) (уточним: единственности такого решения, которое при $s \in [-1,1]$ не выходит из $U_\delta(x_0)$). Гладкая зависимость элемента y функционального пространства $C([-1,1], \mathbb{R}^n)$ от (b, u) влечёт за собой и гладкость y как функции от (s, b, u). (Затем, как уже говорилось, мы фиксируем какое-нибудь b, меньшее δ, принимаем это b за новое δ и переходим к первоначальным t и x.) После всего этого нам надо будет сказать, какое отношение то утверждение о единственности, которое нам доставляется теоремой 4, имеет к утверждению о единственности в конце теоремы 5.

Для применения теоремы о неявной функции надо проверить три вещи:

— Левая часть (29) является гладкой функцией от своих аргументов (u, b, y). Это, конечно, сводится к гладкости $\mathcal{F}(b, y)$, которой мы займёмся ниже. (Действительно, производная левой части (29) по u — это взятый с обратным знаком оператор $\mathbb{R}^n \to C([-1,1], \mathbb{R}^n)$, переводящий $h \in \mathbb{R}^n$ в элемент пространства $C([-1,1], \mathbb{R}^n)$, являющийся функцией, тождественно равной h.). Производная левой части (29) по b — это взятая с обратным знаком сумма $\mathcal{F}(b, y) + b\mathcal{F}_b(b, y)$ (если $\mathcal{F}_b$ существует; первое же слагаемое, непосредственно обозначающее элемент пространства $C([-1,1], \mathbb{R}^n)$, рассматривается как оператор $\mathbb{R} \to C([-1,1], \mathbb{R}^n)$, переводящий число c в $\mathcal{F}(b, y)$). Производная левой части (29) по y — это разность $I - b\mathcal{F}_y(b, y)$ (опять-таки в предположении гладкости $\mathcal{F}$; первое слагаемое — единичный оператор в $C([-1,1], \mathbb{R}^n)$));

— При $(u, b) = (x_0, 0)$ у (29) имеется решение. Здесь и проверять нечего: при $b = 0$ уравнение сводится к $y = u$ — вот и решение (даже при любом u).

— В точке $(x_0, 0, x_0)$ производная Фреше левой части (29) по y обратима. Это тоже ясно (если только эта производная существует): эта производная равна $I - b\mathcal{F}_y(b, y)$, где I — единичный оператор в $C([-1,1], \mathbb{R}^n)$. Когда $b = 0$, то вычитаемое равно нулю независимо от того, чему равно $\mathcal{F}_y(b, y)$, так что производная равна I (не только в точке $(0, x_0)$, но и в любой точке $(0, y)$).

Как видно, нетривиальна только гладкость $\mathcal{F}(b, y)$. Мы докажем, что существуют производные Гато по b, y (собственно, производная Гато или Фреше по скалярной независимой переменной b — это одно и то же; различие имеется для производных по y), являющихся линейными операторами[20], непрерывно зависящими от (b, y). Отсюда следует сперва существование производных Фреше по b, y (теорема 2), которые, совпадая с производными Гато, оказываются непрерывными по (b, y), а это означает гладкость $\mathcal{F}$ (теорема 3).

Сперва мы допустим, что производная $\mathcal{F}_b(b, y)$ и производная Гато $\mathcal{F}_y(b, y)$ существуют, и выясним, какими они должны быть, — так сказать, выявим "единственных кандидатов в эти производные". Затем мы докажем, что эти "кандидаты" действительно являются, соответственно, производной $\mathcal{F}_b$ и производной Гато $\mathcal{F}_y$.

Определим ограниченное линейное отображение

$$\mathrm{ev}_s\colon C([-1,1], \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}^n \qquad \mathrm{ev}_s(x) = x(s)$$

(ev происходит от evaluation). Оно является ограниченным линейным отображением (почему?) и оттого должно переводить производные

$$\left.\frac{d}{dv}\right|_{v=0} \mathcal{F}(b+v, y), \qquad \left.\frac{d}{dv}\right|_{v=0} \mathcal{F}(b, y+vz)$$

в производные

$$\left.\frac{d}{dv}\right|_{v=0} ev_s\mathcal{F}(b+v, y), \qquad \left.\frac{d}{dv}\right|_{v=0} ev_s\mathcal{F}(b, y+vz).$$

Но

$$ev_s\mathcal{F}(b+v, y) = \mathcal{F}(b+v, y)(s) = \int_0^s f(t_0 + b\sigma + v\sigma, y(\sigma))d\sigma,$$

$$ev_s\mathcal{F}(b, y+vz) = \mathcal{F}(b, y+vz)(s) = \int_0^s f(t_0 + b\sigma, y(\sigma) + vz(\sigma))d\sigma,$$

[20]Производная по b является просто некоторым элементом g из $C([-1,1], \mathbb{R}^n)$, но в рамках общего понятия производной Гато или Фреше этот элемент выступает в роли линейного отображения

$$\mathbb{R} \to C([-1,1], \mathbb{R}^n) \qquad c \mapsto cg.$$

$$\frac{d}{dv}\bigg|_{v=0}\int_0^s f(t_0+b\sigma+v\sigma,y(\sigma))d\sigma=\int_0^s \frac{\partial}{\partial v}\bigg|_{v=0} f(t_0+b\sigma+v\sigma,y(\sigma))d\sigma=$$
$$=\int_0^s f_t(t_0+b\sigma,y(\sigma))\sigma d\sigma,$$
$$\frac{d}{dv}\bigg|_{v=0}\int_0^s f(t_0+b\sigma,y(\sigma)+vz(\sigma))d\sigma=\int_0^s \frac{\partial}{\partial v}\bigg|_{v=0} f(t_0+b\sigma,y(\sigma)+vz(\sigma))d\sigma=$$
$$=\int_0^s f_y(t_0+b\sigma,y(\sigma))z(\sigma)d\sigma.$$

(Здесь речь идёт о производной по параметру v интеграла, у которого пределы интегрирования не зависят от параметра, а подинтегральное выражение является гладкой функцией от этого параметра; известно, что такая производная равна интегралу от соответствующий производной подинтегрального выражения.)

Итак, если у $\mathcal{F}(b,y)$ действительно существуют производная по b и производная Гато по y и если первая является элементом $g\in C([-1,1],\mathbb{R}^n)$, а последняя — линейным оператором A, то

$$(g)(s)=\int_0^s f_t(t_0+b\sigma,y(\sigma))\sigma d\sigma, \tag{30}$$

$$(Az)(s)=\int_0^s f_x(t_0+b\sigma,y(\sigma))z(\sigma)d\sigma. \tag{31}$$

Полученные (пока только предположительно) выражения действительно определяют некоторый элемент $g\in C([-1,1],\mathbb{R}^n)$ и линейный ограниченный оператор $A=A(b,y)$, действующий в $C([-1,1],\mathbb{R}^n)$. Теперь мы приступим к проверке, что эти элемент и оператор действительно являются, соответственно, производной и производной Гато, т.е. что $\frac{d}{dv}\big|_{v=0}\mathcal{F}(b+v,y)=g$, $\frac{d}{dv}\big|_{v=0}\mathcal{F}(b,y+vz)=Az$. Мы хотим показать, что при достаточно малом $|v|$

$$|\mathcal{F}(b+v,y)-\mathcal{F}(b,y)-vg|=o(v),$$

$$|\mathcal{F}(b,y+vz)-\mathcal{F}(b,y)-vA(b,y)z|=o(v),$$

т.е. что

$$
\begin{aligned}
&\sup_{s\in(-1,1)}\left|\int_0^s (f(t_0+b\sigma+v\sigma,y(\sigma))-f(t_0+b\sigma,y(\sigma))-\right.\\
&\qquad\qquad \left.-vf_t(t_0+b\sigma,y(\sigma))\sigma)d\sigma\right|\leqslant\varepsilon|v|,\\
&\sup_{s\in(-1,1)}\left|\int_0^s (f(t_0+b\sigma,y(\sigma)+vz(\sigma))-\right.\\
&\qquad\qquad \left.-f(t_0+b\sigma,y(\sigma))-vf_x(t_0+b\sigma,y(\sigma))z(\sigma))d\sigma\right|\leqslant\varepsilon|v|
\end{aligned}
\tag{32}
$$

с наперёд заданным $\varepsilon>0$. При этом может понадобиться уменьшить r (то число, которое ограничивает $|b|$ и размеры окрестности $W_r(x_0)$).

Фигурирующие в подынтегральных выражениях в (32 f, f_t, f_x определены и непрерывны в открытом множестве вида $(t_0-r,t_0+r)\times U_r(x_0)$. Если брать, скажем, $b\in[-\frac{r}{2},\frac{r}{2}]$, $y\in W_{\frac{r}{2}}(x_0)$, то кривая $\{(t_0{+}b\sigma,y(\sigma));\ \sigma\in[-1,1]$ будет компактным подмножеством в $(t_0-r,t_0+r)\times U_r(x_0)$. По лемме 3 из п. 2, имеется такое $\delta>0$, что

$$|f(t_0+b\sigma+,y(\sigma))-f(t_0+b\sigma,y(\sigma))-f_t(t_0+b\sigma,y(\sigma))|\leqslant\varepsilon|h|$$

(h — число) и потому

$$|f(t_0+b\sigma+v\sigma,y(\sigma))-f(t_0+b\sigma,y(\sigma))-vf_t(t_0+b\sigma,y(\sigma))\sigma|\leqslant\varepsilon|v|,$$

а

$$|\,(f(t_0+b\sigma,y(\sigma)+h)-f(t_0+b\sigma,y(\sigma))-f_x(t_0+b\sigma,y(\sigma))h|\leqslant\varepsilon|h|$$

(h — вектор из $\mathbb{R}^n$) и потому

$$|\,(f(t_0+b\sigma,y(\sigma)+vz(\sigma))-f(t_0+b\sigma,y(\sigma))-vf_x(t_0+b\sigma,y(\sigma))z(\sigma)|\leqslant\varepsilon|v|.$$

При применении теоремы о неявных функциях возникает некоторое другое δ, поэтому переобозначим то δ, о котором только что шла речь, через r. Раз подинтегральные выражения в (32) при всех σ не превосходят по модулю $\varepsilon|v|$, то то же верно и для интегралов (берущихся по отрезкам длины $\leqslant 1$), и тем самым неравенства (32) доказаны.

Мы должны ещё доказать сделанное в теореме 5 утверждение о единственности. Как и при доказательстве существования, перейдём к независимой переменной s и будем вместо решения $z(t)$ системы (24), удовлетворяющего начальному условию $z(t_0)=x_0$, рассматривать функцию

$w(s) = z(t_0 + bs)$. Она удовлетворяет интегральному уравнению (28). Относительно последнего мы получили (на основании теоремы 4) некоторое утверждение не только о существовании, но и единственности его решения. Надо только посмотреть, насколько это утверждение соответствует нашим целям? Прежде всего, функция $w(s)$ должна быть определённой на $[-1, 1]$. До сих пор ничего не говорилось о том, где определено решение $z(t)$ уравнения (24) (не считая того, что область его определения должна содержать t_0). Пусть $z(t)$ определено на интервале (α, β). Несколько уменьшим его, сделав его симметричным относительно t_0; это значит, что мы уменьшаем область определения $z(t)$ до $(t_0 - \delta_1, t_0 + \delta_1)$, где $\delta_1 = \min(t_0 - \alpha, \beta - t_0)$. Чтобы $w(s)$ было определено на $[-1, 1]$, надо, чтобы было $|b| < \delta_1$.

Далее, в (28) имеется параметр (аналог x в теореме 4) — пара (b, u). Существование и единственность решения имеют место в области $(-\delta, \delta) \times U_\delta(x_0) \times W_\delta(x_0)$, где $W_\delta(x_0) \subset C([-1, 1], \mathbb{R}^n)$ состоит из функций y, для которых $|y(t) - x_0| < \delta$ при всех t. Нас сейчас интересует только $u = x_0$ — таково начальное значение z. Значит, нам надо, чтобы было $|b| < \delta$ и чтобы $z(s)$ при всех $s \in [-1.1]$ оставалось в $U_\delta(x_0)$, т.е. чтобы было

$$|z(t) - x_0| < \delta \qquad \text{при всех } t \in [t_0 - b, t_0 + b].$$

Поскольку $z(t_0) = x_0$ и $z(t)$ является непрерывной функцией t, то действительно существует такое δ_2, что $z([t_0 - \delta_2, t_0 + \delta_2]) \subset U_\delta(x_0)$. В терминах b это означает, что $|b| < \delta_2$. Итак, на b мы накладываем ограничение: $|b| < \delta_3$, где $\delta_3 = \min(\delta_1, \delta, \delta_2)$. При любом таком b решение (28) с $u = x_0$, не выходящее из δ-окрестности точки x_0, единственно и является тем самым $x(t_0 + bs)$, о котором говорится в теореме 5. Приняв за ε какое-нибудь $b \in 90, \delta_3)$, мы и получим, что $z(t) = x(t)$ при $|t - t_0| < \varepsilon$.

Покончив с обсуждением теорем 5, 6, остановимся на том, как в теории дифференциальных уравнений дополняют эти локальные утверждения некоторым утверждением о единственности решения и как переходят к глобальному утверждению.

Прежде всего обратим внимание на терминологию, частично повторяя сказанное раньше. Решение дифференциального уравнения (24) — это функция $x(t)$, определённая на некотором открытом интервале J (возможно, бесконечном или полубесконечном) и удовлетворяющая при всех $t \in J$ уравнению (24). Последнее подразумевает, что при всех $t \in J$ эта функция дифференцируема и что $f(t, x(t))$ имеет смысл, т.е. что

$(t, x(t)) \in \Gamma$ при всех $t \in \Gamma$. Будучи дифференцируемой, функция $x(t)$ тем более непрерывна, поэтому непрерывна по t и функция $f(t, x(t))$, т.е. производная $\dot{x}(t)$; таким образом, решение не только всюду дифференцируемо по t, но и является гладкой функцией. (В локальной теореме существования уже говорилось о гладкости решения, но там это относилось только к тому решению, которое обеспечивается этой теоремой, а теперь речь идёт о любом решении.) Когда специально обращают внимание на то значение, которое принимает решение в какой-то "начальный" момент времени t_0, то говорят, что это значение x_0 является "начальным значением". А условие, что решение $x(t)$ в начальный момент времени t_0 принимает данное начальное значение x_0 (т.е. что $x(t_0) = x_0$), называют начальным условием. Естественно, за начальный момент времени можно брать различные числа t_0, и соответственно получаются различные начальные условия для одного и того же решения.

Читатель, конечно, помнит из курса обыкновенных дифференциальных уравнений, что при наших требованиях на f (гладкость) начальное условие однозначно определяет решение, т.е. что существует только одно решение $x(t)$, которое в данный момент времени t_0 принимает данное начальное значение x_0. Но здесь надо кое-что уточнить. Строго говоря, если имеется решение $x(t)$ с начальным значением $x(t_0) = x_0$, определённое на некотором интервале времени, то ведь можно ту же самую функцию от t рассматривать на любом меньшем интервале времени, и если этот меньший интервал содержит t_0, то функция $x(t)$, рассматриваемая на этом уменьшенном интервале, конечно, снова будет решением (24) с тем же начальным значением; какая же тут единственность? Формально ведь это будет другое решение. "Формально правильно, а по существу безобразие", как было сказано по совсем другому поводу. В теории дифференциальных уравнений "безобразие" устраняется путём обсуждения вопроса о возможности продолжения решения, заданного на некотором интервале времени, на бóльшие интервалы. Оказывается, что формально различные решения с одним и тем же начальным значением всегда получаются так, как только что было сказано (уменьшением интервалов, где они определены) из некоего решения, определённого на самом большом интервале (самом большом по сравнению со всеми остальными решениями с данным начальным значением; он может быть и конечным, и бесконечным в одну или обе стороны). Этот интервал называется максимальным интервалом существования решения с данным начальным значением $x(t_0) = x_0$ и будет иногда обозначаться через

$$J(t_0, x_0) = (t^-(t_0, x_0), t^+(t_0, x_0))$$

(где $t^\pm$ могут равняться и $\pm\infty$). Решение же (с данным начальным значением), определённое на $J(t_0, x_0)$, называют "максимальным" или "непродолжаемым" решением. Мы будем обозначать его через $x(t, t_0, x_0)$. Это будет обозначение корректно определённого объекта (после того как мы докажем всё сказанное выше). Оно "непродолжаемо" даже в формально несколько более сильном смысле, чем было сказано: не только решения с данным начальным значением $x(t_0) = x_0$ являются ограничениями (сужениями) непродолжаемого решения на некоторый подинтервал интервала $J(t_0, x_0)$, но и вообще любое решение, которое в какой-то момент времени (не обязательно в момент t_0) принимает то же значение, что и непродолжаемое решение, является ограничением (сужением) последнего на некоторый подинтервал.

Когда рассматриваемое дифференциальное уравнение (25) зависит от параметра a, от этого параметра зависит и непродолжаемое решение, принимающее при $t = t_0$ значение x_0. Поэтому данное решение можно обозначить через $x(t, a, t_0, x_0)$[21]. В том же духе максимальный интервал существования последнего решения можно обозначать через

$$J(a, t_0, x_0) = (t^-(a, t_0, x_0), t^+(a, t_0, x_0)).$$

Опишем, как доказывается существование непродолжаемого решения. Доказательство начинается с двух утверждений о единственности:

1). Если $x(t)$ и $y(t)$ — два решения (24), принимающие в какой-то момент времени t_0 одинаковые значения (т.е. $x(t_0) = y(t_0)$), то $x(t)$ и $y(t)$ совпадают в некоторой окрестности точки t_0, т.е. существует такое $\delta > 0$, что $x(t) = y(t)$ на интервале $(t_0 - \delta, t_0 + \delta)$. Это известно из теоремы 5 (см. конец её формулировки.)

2). Если $x(t)$ и $y(t)$ — два решения (24), принимающие в какой-то момент времени t_0 одинаковые значения (т.е. $x(t_0) = y(t_0)$), то $x(t)$ и $y(t)$ совпадают в общей области определения: если $x(t)$ определено на интервале I, а $y(t)$ — на интервале J, то $x(t) = y(t)$ в точках интервала $I \cap J$.

[21]В теореме 6 так же обозначалось некоторое локальное решение с теми же параметром и начальным условием.

После этого осуществляется “склеивание” решений, удовлетворяющих заданному начальному условию, в одно решение с самой большой областью определения — непродолжаемое решение.

Докажем 2). Положим

$$r^- = \inf\{s \in I \cap J;\ s < t_0,\ x(t) = y(t) \text{ при всех } t \in (s, t_0]\},$$

$$r^+ = \sup\{s \in I \cap J;\ s > t_0,\ x(t) = y(t) \text{ при всех } t \in [t_0, s)\}.$$

Ясно, что $x(t) = y(t)$ при всех $t \in (r^-, r^+)$. А если бы, скажем, r^- не совпадало с левым концом интервала $I \cap J$, то ввиду непрерывности $x(t)$ и $y(t)$ получилось бы, что $x(r^-) = y(r^-)$, а значит $x(t)$ и $y(t)$ совпадали бы как на $[r^-, t_0]$, так и на некотором интервале $(r^- - \delta, r^-]$, т.е. совпадали бы при всех $t \in (r^- - \delta, t_0]$. Это противоречило бы определению r^- как нижней грани соответствующего множества.

Замечу, что в чуть более абстрактных терминах проведенное рассуждение состоит в том, что множество $\{t \in I \cap J;\ x(t) = y(t)\}$ является одновременно открытым и замкнутым в интервале $I \cap J$ (подробнее: открытым и замкнутыми в топологии этого интервала, индуцированном на нём обычной топологией содержащей его прямой $\mathbb{R}$) и что такими подмножествами интервала являются только $\emptyset$ и сам этот интервал.

При выполнении условий 2) вектор-функция

$$z\colon I \cup J \to \mathbb{R}^n \qquad z(t) = \begin{cases} x(t) & \text{при } t \in I, \\ y(t) & \text{при } t \in J \end{cases}$$

является решением (24), являющимся продолжением обоих решений $x(t)$ и $y(t)$ на интервал $I \cup J$, содержащий как I, так и J. Можно сказать, что z получается при “склеивании” друг с другом решений x и y (интегральные кривые, являющиеся графиками последних двух решений, при этом действительно склеиваются друг с другом в том смысле, как это обычно понимают в геометрии, и склеенная кривая является графиком решения z). После этого нетрудно наглядно представить себе, что посредством “склеивания” можно прийти к непродолжаемому решению, к которому уже ничего “подклеить” нельзя. Формально же рассуждение оформляется так. Зададимся фиксированным начальным условием $x(t_0) = x_0$. Наряду с решением $x(t)$ будем на минуту явно указывать и тот интервал I, где оно определено, прибегая к записи $(x(t), I)$. Рассмотрим множество

M всевозможных таких пары $(x(t), I)$, где интервалы $I \supset t_0$ и $x(t_0) = x_0$. Положим

$$J = \bigcup_{(x(t),I)\in M} I$$

(это некоторый интервал — почему?) и определим $z\colon J \to \mathbb{R}^n$ следующим образом. Если $t \in J$, то имеется такое $(x(t), I) \in M$, что $t \in I$; положим $z(t) = x(t)$. Значение $z(t)$ получается одинаковым для всех $(x(t), I) \in M$, для которых $t \in I$ (почему?), так что $z(\,.\,)$ — корректно определённая функция $J \to \mathbb{R}^n$. Она является решением (24), удовлетворяющим начальному условию $z(t_0) = x_0$ (почему?), причём непродолжаемым решением. Ведь если бы на некотором интервале I, пересекающимся с J, но не содержащимся в J, было определено решение $x(t)$, принимающее в некоторой точке $t_1 \in I \cap J$ значение $x(t_1) = z(t_1)$, то решения x и y можно было бы "склеить" в решение u, определённое на интервале $I \cup J$, который больше, чем J, а в то же время решение u принимало бы в точке t_0 значение x_0 (почему?); получилось бы, что раз $M \ni (u, I \cup J)$, то $J \supset J \cup I$, хотя точка t_1 лежит в $I \cup J$, но не в J.

После того как все решения оказались "частями" непродолжаемых решений, о последних часто говорят просто как о решениях[22]. Как уже говорилось, теперь обозначение $x(t, t_0, x_0)$ будет применяться для непродолжаемого решения, принимающего в момент времени t_0 значение x_0.

Согласно "теореме о продолжении решения до границы области" (название неточное, хотя и отражающее суть дела), если интервал, где определено (непродолжаемое далее) решение $x(t)$, имеет конечный (левый или правый) конец, то при приближении t к этому концу или решение принимает значения, сколь угодно большие по абсолютной величине, или соответствующая интегральная кривая подходит сколь угодно близко к границе области Γ (где определено наше уравнение). Другая формулировка, по-моему, более удобная: если — любое компактное подмножество Γ, то при всех t, достаточно близких к рассматриваемому конечному концу, точка $(t, x(t))$ оказывается вне .

Упражнение. а). Пусть C — компактное подмножество Γ. Докажите, что существует такое $\delta > 0$, что если $(s, u) \in C$, то $x(t, s, u)$ определено

[22]Но, скажем, в локальной теореме по самому её характеру речь идёт о решении, которое определено на некотором небольшом интервале, содержащем начальный момент времени t_0, и ещё "не успевает" отойти далеко от своего начального значения x_0.

на $[s-\delta, s+\delta]$. (Указание. Убедитесь в существовании такой конечной системы точек (s_i, u_i) и чисел $\delta_i > 0$, что множества $(s_i - \frac{\delta_i}{2}, s_i + \frac{\delta_i}{2}) \times U_{\frac{\delta_i}{2}(u_i)}$ покрывают C и что если (s, u) принадлежит i-му из этих множеств, то $x(t, s, u)$ определено на $[s_i - \delta_i, s_i + \delta_i]$. Затем попробуйте взять $\delta = \min \frac{\delta_i}{2}$.)

б). Выведите отсюда, что если $t_-(t_0, x_0) > -\infty$ (если $t_+(t_0, x_0) < \infty$), то $\inf\{t;\ x(t, t_0, x_0) \in C\} > t_-(t_0, x_0)$ (соответственно, $\sup\{t;\ x(t, t_0, x_0) \in C\} < t_+(t_0, x_0)$).

Сейчас мы говорили об $x(t, t_0, x_0)$ как о функции от t. Но $x(t, t_0, x_0)$ зависит от трёх переменных — t, t_0 и x_0. Надо сказать несколько слов о её свойствах. Она определена на множестве

$$D = \{(t, t_0, x_0);\ t \in J(t_0, x_0)\} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$$

(а при наличии параметра — на множестве

$$D = \{(t, a, t_0, x_0);\ t \in J(a, t_0, x_0)\} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n\ ).$$

Эти множества оказываются открытыми подмножествами соответствующих пространств, а отображение

$$D \to \mathbb{R}^n \qquad (t, x_0, t_0) \mapsto x(t, t_0, x_0)$$

(соответственно,

$$D \to \mathbb{R}^n \qquad (t, a, t_0, x_0) \mapsto x(t, a, t_0, x_0)\ )$$

оказывается гладким.

Объясним, почему D — открытое и отображение $x : D \to \mathbb{R}^n$ — гладкое, ограничиваясь тем случаем, когда параметра a нет (читатель может перенести излагаемые рассуждения на тот случай, когда имеется параметр).

В дальнейшем в этом п. в Γ часто используются окрестности точек (t, x), имеющие вид $(t-\delta, t+\delta) \times U_\delta(x)$. Ради краткости они обозначаются через $V_\delta(t, x)$. (Раньше V_δ имело другой смысл, но с прежними V_δ нам больше не придётся встречаться.)

Первый шаг состоит в доказательстве следующего утверждения.

Лемма. Пусть C — компактное подмножество Γ. Тогда существует такое $\delta > 0$, что если $V_\delta(s, u) \cap C \neq \emptyset$, то $x(t, s, u)$ определено при всех $(t, s, u) \in (s - \delta, s + \delta) \times V_\delta(s, u)$ и является в этой области гладкой функцией своих аргументов.

Лемма почти совпадает с а) из предыдущего упражнения, и её доказательство тоже может быть предоставлено читателю. По-прежнему надо использовать покрытие C подходящими множествами $(s_i-\frac{\delta_i}{2}, s_i+\frac{\delta_i}{2})\times U_{\frac{\delta_i}{2}}$. О решениях $x(t,s,u)$ с (s,u), принадлежащим i-му из этих множеств, теперь используется больше, чем раньше: они не только определены на $[s_i-\delta_i, s_i+\delta_i]$, но и являются гладкими функциями на

$$(s_i-\delta_i, s_i+\delta_i)\times(s_i-\frac{\delta_i}{2}, s_i+\frac{\delta_i}{2})\times U_{\frac{\delta_i}{2}}(u_i) = (s_i-\delta_i, s_i+\delta_i)\times V_{\frac{\delta_i}{2}}(s_i,u_i).$$

При использовании этой леммы C будет конечной дугой $C=x([a,b])$ некоторого решения, определённого на конечном отрезке времени $[a,b]$. Пусть $[a,b]$ — конечный отрезок времени, на котором определено решение $x(t)=x(t,t_0,x_0)$ (с некоторыми фиксированными (t_0,x_0)) (тем самым сказано, что

$$(t_0,x_0)\in\Gamma,\quad t_-(t_0,x_0)<a<b<t_+(t_0,x_0).)$$

Лемма гарантирует существование такого $\delta>0$, что если $(s,u)\in V_\delta(x(\tau))$ с каким-нибудь $\tau\in[a,b]$, то $x(t,s,u)$ определено при всех $(t,s,u)\in(s-\delta, s+\delta)\times V_\delta(s,u)$ и является в этой области гладкой функцией своих аргументов.

Ниже $x(t)=x(t,t_0,x_0)$ — фиксированное решение с фиксированными начальными данными $x(t_0)=x_0$. Мы докажем, что $x(\,.\,,\,.\,,\,.\,)$ определено и является гладкой функцией своих аргументов в некоторой окрестности точки (t,t_0,x_0) (если только последняя принадлежит множеству D, где $x(t,t_0,x_0)$ определено, т.е. если $t\in J(t_0,x_0)$).

Для $t'\in J(t_0,x_0)$ обозначим

$$\begin{aligned}A(t')=\{\tau\in J(t_0,x_0);\ x(\,.\,,\,.\,,\,.\,)\ &\text{определено}\\ &\text{и является гладкой функцией возле точки } (\tau,t',x(t'))\}.\end{aligned}$$

(Внешне в этой формулировке не говорится ни о каких областях, однако на самом деле выражение “нечто имеет место возле такой-то точки” означает, что это “нечто” выполняется в некоторой окрестности указанной точки.) С помощью A доказываемое утверждение можно сформулировать так: $A(t_0)=J(t_0,x_0)$ (почему?).

Лемма. Если $t_1\in A(t_2)$ и $A(t_2)\in A(t_0)$, то $t_1\in A(t_0)$.

Доказательство. Условие $t_2 \in A(t_0)$ означает, что функция $x(s, t_0', x_0')$ определена и гладко зависит от (s, t_0', x_0') возле точки (t_2, t_0, x_0). В частности, придав первому аргументу у $x(\,.\,,\,.\,,\,.\,)$ фиксированное значение $s = t_2$, получаем, что

$$\begin{gathered}\text{функция } (t_0', x_0') \mapsto x(t_2, t_0', x_0') \text{ определена}\\ \text{и является гладкой возле } (t_0, x_0).\end{gathered} \tag{33}$$

Условие же $t_1 \in A(t_2)$ означает, что функция $x(t, t_2', y)$ определена и гладко зависит от (t, t_2', y) возле точки $(t_1, t_2, x(t_2))$. В частности, придав второму аргументу у $x(\,.\,,\,.\,,\,.\,)$ фиксированное значение $t_2' = t_2$, получаем, что

$$\begin{gathered}\text{функция } (t, y) \mapsto x(t, t_2, y) \text{ определена}\\ \text{и является гладкой возле } (t_1, x(t_2)).\end{gathered} \tag{34}$$

Нам же надо доказать, что

$$\text{функция } x(t, t_0', x_0') \text{ определена и является гладкой возле } (t_1, t_0, x_0).$$

Но $x(t, t_0', x_0') = x(t, t_2, x(t_2, t_0', x_0'))$, если правая часть определена (тогда определена и левая часть). Ввиду (33), при достаточной близости (t_0', x_0') к (t_0, x_0), третий аргумент у $x(t, t_2,\,.\,)$ в правой части последнего равенства (т.е. величина $y = x(t_2, t_0', x_0')$) определён и является гладкой функцией от (t_0', x_0'), при этом он близок к $x(t_2)$. Значит, при достаточной близости t к t_1 и (t_0', x_0') к (t_0, y_0) обеспечена близость первого и третьего аргументов t и $y = x(t_2, t_0', x_0')$ у $x(\,.\,, t_2,\,.\,)$ к t_1 и к $x(t_2)$. Получается, что при этом (т.е. при $t \approx t_1$) и $(t_0', x_0') \approx (t_0, x_0)$) функция $x(t, t_0', x_0')$ действительно определена и является гладкой функцией своих аргументов, будучи композицией

$$(t, t_0', x_0') \mapsto (t, t_2, x(t_2, t_0', x_0')) = (t, t_2, y) \mapsto x(t, t_2, y).$$

Теперь уже нетрудно убедиться, что $A(t_0) = J(t_0, x_0)$. Непосредственно из определения следует, что $A(t_0)$ — открытое подмножество $\mathbb{R}$ (почему?). Докажем замкнутость $A(t_0)$. Из одной из предыдущих лемм следует, что

$$\forall \text{ конечного } [a, b] \in J(t_0, x_0)\ \exists \delta > 0\ \forall t \in [a, b] \quad (t - \delta, t + \delta) \in A(t) \tag{35}$$

(проверьте!). Если теперь $t_1 \in J(t_0, x_0) \cap \operatorname{clos} A(t_0)$, то возьмём какой-нибудь замкнутый отрезок $[a, b] \subset J(t_0, x_0)$, содержащий t_1:

$$t_-(t_0, x_0) < a < t_1 < b < t_+(t_0, x_0).)$$

Пусть δ таково, как в (35). Сколь угодно близко к t_1, — в частности, на расстоянии $< \delta$, — имеется какое-нибудь $t_2 \in A(t_0)$. По (35), $t_1 \in A(t_2)$. По последней лемме, $t_1 \subset A(t_0)$.

Остаётся сослаться на тот факт, что открытые и в то же время замкнутые подмножества интервала J (возможно, бесконечного или полубесконечного) суть только $\emptyset$ и J. Это доказано в sprav.tex, но доказательство столь просто, что его можно повторить и здесь.

Раз A непустое, то оно содержит некоторую точку a и даже (будучи открытым) некоторую её окрестность. Рассмотрим множество $B = \{b;\ b > a,\ [a, b] \subset A\}$. Если $c = \sup B < \infty$, то $c \in A$ (ведь A замкнутое, а в любой окрестности c имеются точки из A). Но тогда также некоторое $(c - \varepsilon, c + \varepsilon) \subset A$ (ведь A открытое). а из определения c видно, что $[a, c) \in A$. Получается, что $[a, c + \frac{\varepsilon}{2}] = [a, c - \frac{\varepsilon}{2}] \cup [c, c + \frac{\varepsilon}{2}] \subset A \cup A = A$, так что $c \neq \sup A$.

Как ни странно, в учебниках редко указывают, что D — открытое множество. (Возможно, цитированный выше учебник Л.С.Понтрягина был первым, где это было написано "чёрным по белому", хотя менее отчётливые формулировки могли даваться и раньше.) Порой приводится равносильное утверждение в терминах некоторого свойства функций $J_\pm(t_0, x_0)$.

Функция f, заданная на каком угодно пространстве M (оно может быть даже топологическим, но сейчас нам нужны подмножества обычных $\mathbb{R}^N$) называется полунепрерывной снизу (сверху) в точке x, если для любого $\varepsilon > 0$ имеется такая окрестность U этой точки, что $f(y) > f(x) - \varepsilon$ (соответственно, $f(y) < f(x) + \varepsilon$) для всех $y \in U$. Здесь подразумевалось, что f принимает только конечные значения или, по крайней мере, что значение $f(x)$ конечно. Можно несколько расширить это определение, допуская бесконечные значения. Если значение $f(x)$ бесконечно, то полунепрерывность f снизу (сверху) в точке x означает, что или $f(x) = -\infty$ (соответственно, $f(x) = \infty$), или $f(x) = \infty$ (соответственно, $f(x) = -\infty$) и для любого $N > 0$ имеется такая окрестность U точки x, для всех точек y которой $f(y) > N$ (соответственно, $f(y) < -N$). Эквивалентная формулировка, имеющая то достоинство, что в ней не надо отдельно говорить о бесконечных значениях: f полунепрерывна снизу в x, если $\underline{\lim}_{y \to x} f(y) = f(x)$ (иными словами, $\underline{\lim}_{y \to x,\ y \neq x} f(y) \geqslant f(x)$); f полунепрерывна сверху в x, если $\overline{\lim}_{y \to x} f(y) = f(x)$ (иными словами, $\overline{\lim}_{y \to x,\ y \neq x} f(y) \leqslant f(x)$).

Упражнение. Докажите, что $t_-(t_0, x_0)$ — полунепрерывная сверху, а $t_+(t_0, x_0)$ — полунепрерывная снизу функция от (t_0, x_0). Как это связано с тем, что множество D — открытое?

5. Теорема об устойчивости по первому приближению.

В этом и следующем п. мы будем рассматривать некоторые вопросы о поведении траекторий автономной[23] гладкой системы $\dot{x} = F(x)$ возле положения равновесия $x = x_0$ (это точка, в которой так называемый вектор фазовой скорости $F(x_0) = 0$; решение с начальным значением $x(t) = x_0$ тождественно равно x_0.) Без ограничения общности можно считать (приняв, если понадобится, $x - x_0$ за новые координаты), что $x_0 = 0$. Тогда нашу систему можно записать в виде

$$\dot{x} = Ax + f(x), \tag{36}$$

где $A = F'(0) = \left(\frac{\partial F_i(0)}{\partial x_j}\right)$ и $f(x) = F(x) - Ax = o(|x|)$. Говорят, что

[23]Автономность системы означает, что её правая часть $F(x)$ не зависит (явно) от независимой переменной — от "времени" t. Фазовое пространство такой системы — это пространство x-ов (название связано с тем, что если такая система описывает процессы в какой-то физической системы, то точки этого пространства — как говорят, фазовые точки — описывают состояния этой системы, а состояния когда-то называли фазами, что по сей день сохранилось в выражении "фазы Луны" и в "фазовых состояниях вещества". Важная особенность автономных систем, отличающая их от неавтономных, состоит в следующем: обозначая через $x(t, x_0)$ решение с начальным значением $x(0) = x_0$ (такое обозначение уже встречалось нам в п. 4, но тогда это было локальное решение, определённое в некотором отрезке изменения t возле начального момента времени, теперь же имеется в виду непродолжаемое решение; если угодно, это $x(t, 0, x_0)$), имеем $x(t+s, x_0) = x(t, x(s, x_0))$. С этим связано то, что в случае автономных систем вместо пространства переменных (t, x) (с которым мы имели дело в п. 4) чаще рассматривают фазовое пространство. При изменении "времени" t решение $x(t)$ автономной системы вычерчивает некоторую кривую в фазовом пространстве, которую называют (фазовой) траекторией и которая, очевидно, является проекцией в фазовое пространство графика решения, лежащего в пространстве переменных (t, x). При наших предположениях о гладкости правых частей, влекущих единственность решения, удовлетворяющих заданному начальному условию, две фазовые траектории либо не пересекаются, либо совпадают, что и делает удобным рассмотрение этих траекторий вместо графиков решений. (Для неавтономной системы проекции графиков вполне могут пересекаться, не совпадая.) Всё это объясняется в учебниках (напр., в учебнике Л.С.Понтрягина); нетрудно и полезно самостоятельно найти доказательства. В фазовом пространстве возникает наглядная картина движения фазовых точек по траекториям, которую можно назвать "кинематической интерпретацией" автономной системы.

линейная система $\dot{x} = Ax$ является линейным (или "первым") приближением к (36) возле 0 или что она получается при линеаризации системы $\dot{x} = F(x)$ в точке (0), а $f(x)$ — это "нелинейный член", который откидывается при линеаризации (переходе к системе линейного приближения). Вектор-функция f определена и является гладкой в некоторой окрестности точки $x = 0$, причём $f(0) = 0$, $f'(0) = 0$.

В этом п. предполагается, что спектр матрицы A, т.е. совокупность её собственных значений λ_i, расположен внутри левой полуплоскости $\operatorname{Re}\lambda < 0$, откуда легко следует (я напомню это ниже), что решения "уравнения первого приближения" $\dot{x} = Ax$ экспоненциально убывают с ростом t. Мы увидим, что тогда решения "полной" системы ведут себя аналогично (точная формулировка даётся в теореме 7, которую называют теоремой А.М.Ляпунова об устойчивости по первому приближению). Читателю предоставляется вывести отсюда (или доказать независимо в духе части излагаемых ниже рассуждений), что при $t \to -\infty$ решения экспоненциально возрастают, пока не выходят из той окрестности точки 0, к которой относятся наши рассуждения. Тот случай, когда собственные значения A лежат в правой полуплоскости, сводится к данному путём перехода к "новому времени" $\tau = -t$; тогда $\frac{dx}{d\tau} = -Ax - f(x)$, и можно сделать вывод об экспоненциальном убывании решений при $\tau \to \infty$, т.е. $t \to -\infty$, и экспоненциальном росте при $\tau \to -\infty$, т.е. $t \to \infty$. В следующем п. будет рассмотрен случай, когда у A нет когда собственные значения лежат на мнимой оси, но имеются собственные значения, лежащие как в левой, так и в правой полуплоскости.

Теорема 7. При сформулированных условиях (спектр A — внутри левой полуплоскости, f — гладкая вектор-функция, определённая в некоторой окрестности точки 0, причём $f(0) = 0$ и $f'(0) = 0$) положение равновесия $x = 0$ системы (36) является экспоненциально устойчивым. Это означает следующее: имеются такие C, $\varepsilon > 0$ и $\beta > 0$, что при любом x_0 с $|x_0| < \varepsilon$ решение $x(t, x_0)$ уравнения (36) с начальным значением $x(0, x_0) = x_0$ определено при всех $t \geqslant 0$ и

$$|x(t, x_0)| \leqslant Ce^{-\beta t}|x_0|. \tag{37}$$

Экспоненциальная устойчивость — более сильное свойство, чем асимптотическая устойчивость и тем более устойчивость по Ляпунову (определения этих свойств имеются во многих учебниках). Она также означает нечто бо́льшее, нежели просто утверждение об экспоненциальном убывании при увеличении t решений системы (36) с достаточно малыми начальными значениями, поскольку гарантирует равномерность по малым x_0 экспоненциальной оценки для $\frac{|x(t,x_0)|}{|x_0|}$.

Излагаемое ниже доказательство теоремы 7 является неоправданно громоздким — её можно доказать короче и проще, что обычно и делается в курсе обыкновенных дифференциальных уравнений. Но нам оно нужно для подготовки к доказательству теоремы 8 о локальном инвариантном устойчивом многообразии, излагаемому в следующем п.

Сперва отметим некоторые вспомогательные сведения о линейных обыкновенных дифференциальных уравнениях с постоянными коэффициентами.

1). Если собственные значения λ_i матрицы A лежат слева от мнимой оси, т.е. все $\operatorname{Re}\lambda_i < 0$, то норма матрицы e^{At} экспоненциально убывает при $t \to \infty$, т.е. существуют такие $\alpha, m > 0$, что

$$\left|e^{At}\right| \leqslant me^{-\alpha t} \quad \text{при всех } t \geqslant 0. \tag{38}$$

В самом деле, из теории обыкновенных дифференциальных уравнений известно, что коэффициенты матрицы e^{At} являются квазимногочленами от t, т.е. функциями вида $e^{\lambda_1 t}p_1(t) + \ldots + t^{\lambda_k t}p_k(t)$, где $p_j(t)$ суть многочлены от t; при этом для коэффициентов матрицы e^{At} показателями λ_j служат собственные значения матрицы A. Когда все $\operatorname{Re}\lambda_i < 0$, то при $t \to \infty$ все эти квазимногочлены убывают с экспоненциальной скоростью, а потому то же верно и для нормы матрицы e^{At}.

Несколько раздражает множитель m в (38). При излагаемом здесь подходе это не принципиально, и мы вполне могли бы провести наши рассуждения с этим множителем. (Полезно это проверить хотя бы в общих чертах.) Но без него будет чуть удобнее. Мы не можем ожидать, что его не будет, если пользоваться одной и той же "стандартной" нормой $|x| = \sqrt{\sum x_i^2}$ в $\mathbb{R}^n$, но ниже мы увидим, что от него можно отделаться, если вместо $|\,.\,|$ пользоваться другой нормой, построение которой зависит от A и которая является тоже "евклидовой" нормой (т.е. её квадрат является квадратичной формой; соответствующая симметричная билинейная форма задаёт новое скалярное произведение, которым бывает удобно при этом пользоваться). Сперва подтвердим сказанное примером.

Упражнение. Покажите, что у системы

$$\dot{x}_1 = -x_2, \quad \dot{x}_2 = 2x_1 - 2x_2$$

собственные значения матрицы коэффициентов лежат в левой полуплоскости, так что норма $|x(t)|$ любого её нетривиального решения $x(t) = (x_1(t), x_2(t))$ экспоненциально возрастает при $t \to \infty$, но что при этом $|x(t)|$ время от времени возрастает. В то же время при замене неизвестных

$$y_1 = -2x_1 + x_2, \quad y_2 = x_2$$

для y_i получается система (какая?), нормы решений которой всё время убывают с ненулевой скоростью. Переписав квадратичную форму $y_1^2 + y_2^2$ в терминах переменных x_i, получим некоторую положительно определённую квадратичную форму $W(x)$ (чему она равна?). Если вместо обычной нормы $|x|$ взять норму $|x|_1 = \sqrt{W(x)}$, то получится, что $\frac{d}{dt}|x(t)|_1 < 0$ (более того, эта производная является отрицательно определённой квадратичной формой от $x_i(t)$, т.е. имеет тот же порядок, что и $|x|_1$).

В этом примере я не объяснил, откуда я взял систему и замену переменных. Система была подобрана путём "эксперимента" с дифференцированием $x_1(t)^2 + x_2(t)^2$, причём я хотел, чтобы она имела в точке 0 устойчивый фокус, а не узел (мне не нравилась исключительная траектория в виде прямой, имеющаяся у невырожденного узла — она-то ведь идёт прямо в 0); конечно, система вполне могла бы быть и другой. Замена же координат связана с комплексными собственными векторами матрицы коэффициентов выбранной системы; читатель может при желании продумать это замечание.

В общем случае построение "евклидовой" нормы $|\,.\,|_1$, для которой $\frac{d}{dt}\left|e^{At}x\right|_1 < 0$ при $x \neq 0$ (и даже $\leqslant -\alpha\left|e^{At}x\right|_1 \|$ с некоторым $\alpha > 0$ [24]), тоже можно привести, пользуясь понятиями, связанными с жордановой нормальной формой матрицы A. Так иногда и поступают. Но я предпочитаю другое (по-моему, более короткое и "идейное") построение, основанное на совсем других соображениях, которое и воспроизводится ниже.

Норму (метрику), по отношению к которой[25] $\left|e^{At}\right|_1 \leqslant e^{-\alpha t}$ при всех $t \geqslant 0$, можно назвать "ляпуновской", равно как и соответствующую квадратичную форму $|x|_1^2$, потому что А.М.Ляпунов использовал эту форму

[24] Впрочем, "даже" здесь не совсем оправдано — если $\frac{d}{dt}\left|e^{At}x\right| < 0$ при $x \neq 0$, то существует такое $\alpha > 0$, что $\frac{d}{dt}\left|e^{At}x\right| \leqslant -\alpha\left|e^{At}x\right|$ при всех x, — почему?

[25] Напомню, что норма линейного оператора L по отношению к норме $|\,.\,|_1$ — это $\sup_{x \neq 0} \frac{|Lx|_1}{|x|_1}$.

в своих работах по теории устойчивости. Для нас переход к ляпуновской метрике — не более чем вопрос удобства, причём пока второстепенного (оно более существенно для п. 6, где без него описание основных объектов — локальных инвариантных неустойчивого и устойчивого многообразий — было бы более тяжеловесным). Но в теории устойчивости такая метрика (равно как и некоторые другие функции — так называемые “функции Ляпунова” — с более или менее сходными свойствами, на которых я не буду останавливаться) играют важную роль.

Положим

$$W(x) = \int_0^\infty \left|e^{A\tau}x\right|^2 d\tau.$$

Ввиду экспоненциального убывания подинтегрального выражения этот несобственный интеграл интеграл сходится. Убедимся, что $W(x)$ — квадратичная форма от x (т.е. от координат этого вектора). Обозначая, как обычно, скалярное произведение через $(\,.\,,\,.\,)$ и разлагая вектор x по какому-нибудь базису $\{e_i\}$ пространства $\mathbb{R}^n$, имеем

$$x = \sum x_i e_i, \quad |x|^2 = (x,x) = \sum x_i x_j (e_i, e_j).$$

В интегралах $\int_0^\infty \left(e^{A\tau}e_i, e^{A\tau}e_j\right) d\tau$ подинтегральное выражение экспоненциально убывает, так что эти интегралы сходятся, и потому

$$W(x) = \int_0^\infty \sum x_i x_j \left(e^{A\tau}e_i, e^{A\tau}e_j\right) d\tau = \sum x_i x_j \int_0^\infty \left(e^{A\tau}e_i, e^{A\tau}e_j\right) d\tau,$$

что действительно является квадратичной формой от $(x_1, \ldots, x_n)$. Она положительно определена, т.е. $W(x) \neq 0$ при $x \neq 0$, потому что при $x \neq 0$ подинтегральное выражение положительно. Далее,

$$W\left(e^{At}x\right) = \int_0^\infty \left|e^{A(t+\tau)}x\right|^2 d\tau = \int_t^\infty \left|e^{A\tau}x\right|^2 d\tau.$$

t входит в этот интеграл только как нижний предел интегрирования, поэтому производная по t

$$\frac{d}{dt}W\left(e^{At}x\right) = -\left|e^{A0}x\right|^2 = -|x|^2. \tag{39}$$

(Несобственные интегралы требуют известной осторожности, но в данном случае, когда вся зависимость интеграла от t сводится к тому, что t

служит нижним пределом интегрирования, дифференцирование несобственного интеграла по t сводится к дифференцированию собственного интеграла, потому что

$$W(0) - W\left(e^{At}\right) = \int_0^t \left|e^{A\tau}x\right|^2 d\tau.)$$

Из положительной определённости W следует существование таких $a, b > 0$, что $a|x|^2 \leqslant W(x) \leqslant b|x|^2$ при всех x. (Правое неравенство имеет место для любой квадратичной формы, не обязательно положительно определённой. Достаточно записать её в виде (Sx, x) с некоторым линейным оператором S — его обычно берут симметричным, но сейчас это не обязательно, — и получится, что $|W(x)| \leqslant |Sx||x| \leqslant \|S\||x|^2$. Левое неравенство проще всего доказать от противного. Если надлежащего a не существует, то для любого $n \in \mathbb{N}$ найдётся такое x_n, что $\frac{1}{n}|x_n|^2 \geqslant W(x_n)$. Представив x_n как $|x_n|y_n$ с $|y_n| = 1$, вынеся множитель $|x_n|^2$ из квадратичных форм $|x|^2$ и $W(x)$ и сократив на него, получим, что $\frac{1}{n} \geqslant W(y_n)$. Выбрав из ограниченной последовательности единичных векторов $\{y_n\}$ сходящуюся подпоследовательность $\{y_{n_k}\}$, предел которой тоже является некоторым единичным вектором y, получим, что $0 \geqslant W(y)$, а это противоречит положительной определённости квадратичной формы W.) Сопоставляя это с (39), приходим к выводу, что при всех x

$$\frac{d}{dt}W\left(e^{At}x\right) \leqslant -2\alpha W(e^{At}x),$$

(с некоторым $\alpha > 0$, не зависящим от x; запись с множителем 2 использована в предвидении дальнейшего). Отсюда $\frac{dW/dt}{W} \leqslant -2\alpha$ (деление на W законно, ибо $W \neq 0$),

$$\frac{d}{dt}\ln W\left(e^{At}x\right) \leqslant -2\alpha.$$

$$\ln W\left(e^{At}x\right) - \ln W(0) \leqslant -2\alpha t, \quad W\left(e^{At}x\right) \leqslant W(0)e^{-2\alpha t}.$$

Если перейти к норме $|x| = \sqrt{W(x)}$, то по отношению к ней (38) будет выполняться без множителя m.

На самом деле в качестве α годится любое число из $(0, \min\operatorname{Re}(-\lambda_i))$ (при этом ляпуновская норма, вообще говоря, зависит от того, с каким α мы хотим обеспечить выполнение неравенства $\left|e^{At}\right| \leqslant e^{-\alpha t}$). Нам это не понадобится, но ради полноты я всё-таки поясню. Пусть $\alpha \in$

$(0, \min \mathrm{Re}(-\lambda_i))$. Для $y = e^{\alpha t} x$ получается уравнение $\dot{y} = (A + \alpha I)y$. Для него собственные значения матрицы коэффициентов суть $\lambda_i + \alpha$. Они всё ещё лежат в левой полуплоскости. Значит, имеется такая евклидова норма, по отношению к которой при некотором $\beta > 0$

$$\left| e^{(A+\alpha I)t} \right| \leqslant e^{-\beta t} \leqslant 1,$$

а тогда $\left| e^{At} \right| \leqslant e^{-\alpha t}$.

В ряде учебников по теории обыкновенных дифференциальных уравнений (например, в цитировавшемся ранее учебнике Л.С.Понтрягина) объясняется, как доказать теорему 7 (теорему Ляпунова об устойчивости положения равновесия по первому приближению) с помощью ляпуновской метрики. Повторяю, что мы доказываем эту теорему в порядке подготовки к следующему п. и потому нам нужна не сама эта теорема, а один из вариантов её доказательства — вариант, использующий рассуждения, которые в более сложной обстановке встретятся при доказательстве теоремы 8 в следующем п.

2). Напомним, в чём состоит метод вариации постоянных, применяемый для решения системы

$$\dot{x} = Ax + \varphi(t). \tag{40}$$

методом вариации постоянных. Сделаем замену переменных $x = e^{At} y$. Если бы y было постоянным, то мы получили бы решение однородной системы $\dot{x} = Ax$ (причём общее решение — любое решение однородной системы представляется в таком виде с некоторым постоянным вектором y). Поэтому данный метод называется “методом вариации постоянных” — теперь, когда мы ищем решение (40), бывшие постоянные (координаты y) будут переменными. Подстановка $x = e^{At} y$ в (40) даёт

$$Ae^{At} y + e^{At} \dot{y} = \dot{x} = Ae^{At} y + \varphi(t),$$

$$\dot{y} = e^{-At} \varphi(t),$$

$$y(t) = y(0) + \int_0^t e^{-A\tau} \varphi(\tau) d\tau.$$

Если ещё учесть, что при $t = 0$ наша замена переменных даёт $x(0) = y(0)$, то окончательно получаем ответ

$$x(t) = e^{At} x(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)} \varphi(\tau) d\tau. \tag{41}$$

Очевидным образом можно провести эти рассуждения в обратном порядке и тем самым доказать, что если $x(t)$ выражается формулой (41), то $x(t)$ является решением исходного векторного уравнения (40).

Доказательство теоремы 7. Оно основано на редукции нашей задачи к некоторому интегральному уравнению, не такому, как в предыдущем п. (где рассматривались уравнения гораздо более общего вида (24) и речь шла вовсе не об устойчивости).

Применим метод вариации постоянных к (36), приняв $f(x(t))$ за $\varphi(t)$. Получается интегральное уравнение для $x(t)$

$$x(t) = e^{At}x_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)} f(x(\tau))d\tau. \tag{42}$$

Решение (36) является решением (42) с $x_0 = x(0)$, Обратно, решение (42) является решением (36) с начальным значением $x(0) = x_0$. (Последнее можно проверить непосредственным дифференцированием, а можно и просто сослаться на сказанное выше в связи с (41).

Введём в $\mathbb{R}^n$ ляпуновскую норму, по отношению к которой выполняется (38) с $m = 0$ и с некоторым $\alpha > 0$ (тот факт, что за α можно принять любое положительное число, меньшее $\min(-\operatorname{Re}\lambda_i)$,где λ_i — собственные значения a, нам не понадобится). Зафиксируем какое-нибудь $\beta \in (0, \alpha)$ и введём пространство E непрерывных функций $[0, \infty) \to E$, для которых $\sup_{t\geqslant 0} e^{\beta t}|x(t)| < \infty$ (оно, естественно, наделяется нормой $\|x\| = \sup_{t\geqslant 0} e^{\beta t}|x(t)|$). Мы докажем с помощью "банаховой" теоремы о неявных функциях, что при любом достаточно малом x_0, — скажем, при $|x_0| < \varepsilon$, т.е. для x_0 из открытого шара $U_\varepsilon(0)$ пространства $\mathbb{R}^n$ с центром в 0 и радиуса ε, — уравнение (42) имеет решение в E. Это решение, конечно, зависит от x_0: $x = x(x_0)$. С другой стороны, оно, как и всякий элемент пространства E, является функцией от t, которая зависит также и от x_0, раз от x_0 зависит данный элемент пространства E; итак, имеем функцию

$$U_\varepsilon(0) \times [0, \infty) \to \mathbb{R}^n \qquad (x_0, t) \mapsto x(t, x_0).$$

И, как говорилось, $x(t, x_0)$ как функция от t при постоянном x_0 является решением (36) с начальным значением x_0 (т.е. $x(0, x_0) = x_0$); такое решение единственно, так что нам надо только получить оценку (37) для того самого $x(t, x_0)$, которое мы получим с помощью теоремы о неявных функциях. А поскольку функция $t \mapsto x(t, x_0)$ является элементом E, то

$$|x(t, x_0)| \leqslant \|x(x_0)\|e^{-\beta t} \qquad \text{при всех } t \geqslant 0. \tag{43}$$

Это ещё не (37), потому что нам надо оценить $x(t)$ через $x_0 = x(0)$, а ведь в E наверняка имеются такие функции $x(t)$, для которых $\|x\|$ в любое наперёд заданное число раз больше, чем $x(0)$ (есть даже и ненулевые функции, для которых $x(0) = 0$). Однако теорема о неявной функции обеспечит нам гладкую зависимость $x(x_0)$ от x_0. А при $x_0 = 0$ очевидным решением (42) является $x(t) \equiv 0$. В некоторой шаровой окрестности точки $x_0 = 0$ пространства $\mathbb{R}^n$ (уменьшив, если потребуется, ε, можно считать, что это та же $U_\varepsilon(0)$, где теорема о неявной функции доставляет нам решение $x(x_0)$ нашего интегрального уравнения) $\|x'(x_0)\| \leqslant C$, где за C можно принять, скажем, $|x'(0)| + 1$. По "теореме о среднем" (с условным характером этого названия), $\|x(x_0)\| = \|x(x_0) - x(0)\| \leqslant C|x_0|$. А после этого (43) приводит к (37).

Итак, мы хотим рассматривать (42) как уравнение в E, содержащее параметр x_0. Для этого надо убедиться в следующем.

а). Доказать полноту пространства E. (К самому интегральному уравнению (42) это не имеет отношения.)

б). Доказать, что если $|x_0|$ и $\|x\|$ достаточно малы, — скажем, $\leqslant r$, — то функция

$$y(t) = e^{At}x_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)} f(x(\tau))d\tau \tag{44}$$

(x, напоминаю, это некоторая функция от t, она-то и фигурирует здесь в правой части; в этом месте ещё не нужно никакой связи между x_0 и $x(\,.\,)$) определена при всех $t \geqslant 0$ и принадлежит пространству E. По самому определению,

$$y(t) = z(t) + w(t), \quad \text{где } z(t) = e^{At}x_0 \text{ и } w(t) = \int_0^t e^{A(t-\tau)} f(x(\tau))d\tau.$$

Очевидно, что $z(t) \in E$ (экспоненциальная оценка скорости убывания для $z(t)$ при $t \to \infty$ даже несколько лучше, нежели требуется для элементов E — с α в показателе вместо β; и это не требует никаких ограничений на $|x_0|$). Поэтому надо убедиться, что при достаточно малом $\|x\|$ определена и принадлежит пространству E функция

$$w(t) = \int_0^t e^{A(t-\tau)} f(x(\tau))d\tau$$

(определение которой зависит только от x).

Далее используется обозначение $V_r(0)$ для шара пространства E с центром в 0 и с радиусом r: $V_r(0) = \{x;\ x \in E, \|x\| < r\}$. (Аналогичный шар в $\mathbb{R}^n$ уже обозначен через $U_r(0)$. Я использую различные буквы U и V, чтобы не путать шары различных пространств.)

в). После б) мы можем определить отображение

$$\mathcal{F}\colon U_r(0) \times V_r(0) \to E \qquad (x_0, x(\,.\,)) \mapsto y(\,.\,),$$

где $y(t)$ определяется, как в б). Очевидно, что $\mathcal{F}(x_0, x) = \mathcal{G}(x_0) + \mathcal{H}(x)$, где $\mathcal{G} : \mathbb{R}^n \to E$ переводит x_0 в $e^{At}x_0$, а $\mathcal{H} : E \to E$ переводит функцию $x(\,.\,)$ в $w(\,.\,)$. Нас интересует уравнение $x = \mathcal{F}(x_0, x)$. Надо доказать, что $x - \mathcal{F}(x_0, x)$ удовлетворяет условиям теоремы о неявных функциях:

— $\mathcal{F}$ является гладкой функцией от (x_0, x); это равносильно гладкости $\mathcal{G}(x_0)$ и $\mathcal{H}(x)$;

— $\mathcal{F}(0, 0) = 0$ (это мы уже знаем);

— $I - \mathcal{F}_x(0, 0)$ (где I — единичный оператор в E) — обратимый оператор (мы докажем, что $\mathcal{F}_x(0, 0) = 0$; это равносильно тому, что $\mathcal{H}_x = 0$). Тогда теорема о неявных функциях обеспечит нам существование в некоторой окрестности нуля $U_\varepsilon(0)$ пространства $\mathbb{R}^n$ гладкой функции $x(x_0)$ со значениями в E, значение которой при каждом x_0 является решением уравнения $x = \mathcal{F}(x_0, x)$ и которая обращается в 0 при $x_0 = 0$. Мы уже убедились, что тем самым теорема об устойчивости по первому приближению будет доказана.

Приступаем к реализации этой программы.

Упражнение. Пусть x_n — фундаментальная последовательность элементов T, которые, как мы помним, являются некоторыми функциями $x_n(t)$. Докажите, что она сходится в E. (Указание. x_n являются некоторыми функциями $x_n(t)$, определёнными и непрерывными на $[0, \infty)$. Значит, их можно рассматривать как элементы пространства $BC([0.\infty), \mathbb{R}^n)$ непрерывных и равномерно ограниченных вектор-функций $[0, \infty) \to \mathbb{R}^n$. Обычную норму в этом пространстве обозначим через $\|\,.\,\|_C$, чтобы не путать её с нормой в E, которую для бóльшей выразительности я буду временно обозначать через $\|\,.\,\|_E$. Проверьте, что $\|x\|_C \leqslant \|x\|$, так что последовательность x_n является фундаментальной и в $BC([0, \infty), \mathbb{R}^n)$. Последнее пространство полно. Возможно, читателю известна полнота пространства $BC(X)$ ограниченных непрерывных функций $X \to \mathbb{R}$ на любом метрическом (и даже топологическом) пространстве X со значениями в $\mathbb{R}$; полнота $BC([0, \infty), \mathbb{R}^n)$ доказывается аналогично и, кроме того, следует из полноты $BC([0,\infty)$, ибо сходимость в BC фундаментальной последовательности вектор-функций следует просто из сходимости последовательностей их координат. (Можно также рассмотреть ограничения $x_n|[0,a]$ наших функций на отрезок $[0,a]$. Эти ограничения образуют фундаментальную последовательность в пространстве $(C[0,a],\mathbb{R}^n)$, полнота которого должна быть известна читателю. Значит, последовательность $x_n|[0,a]$ сходится к непрерывной предельной функции $x^a(t)$, которая пока что задана на $[a,b]$ и зависит от a. Но если $a<b$, то ограничение предельной функции x^b в $(C[0,b],\mathbb{R}^n)$ на меньший отрезок $[0,b]$ является предельной функцией x^a в $(C[0,a],\mathbb{R}^n)$ (почему?), откуда понятно, что все эти предельные функции оказывается ограничениями на соответствующие отрезки некоторой непрерывной функции x, определённой на всём $[0,\infty)$). Убедитесь, что $\|x_n-x\|_C\to 0$ на всём $[0,\infty)$).) Покажите, что $x\in E$ и что x_n сходятся к x также и по норме $\|\,.\,\|_E$.)

Этим реализовано а). Займёмся б). Уже говорилось, что с первым слагаемым в (44), т.е. $z(t)=e^{At}x_0$, всё ясно. Второе слагаемое $w(t)$ — интеграл $\int_0^t e^{A(t-\tau)}f(x(\tau))d\tau$ — определено, если $x(\tau)$ при всех τ принадлежит той области, где определена функция f. Когда $x\in E$ и $\|x\|<r$, то $|x(\tau)|\leqslant e^{-\beta\tau}\|x\|\leqslant e^{-\beta\tau}r$. Это $<r$, так что если шаровая r-окрестность точки 0 целиком содержится в той области, где определена гладкая функция f, то второе слагаемое в (44) определено. Надо проверить, что как функция от t оно принадлежит E. Ввиду непрерывности $f'(x)$, при достаточно малом r всюду в $U_r(0)$ будет $|f'(x)-f'(0)|<1$, а так как $f'(0)-=0$, то $|f'(x)|<1$. Отсюда и из леммы 1 п. 2 следует, что $|f(x)|=|f(x)-f(0)|\leqslant|x|<r$ при всех $x\in U_r(0)$. Когда $x(\,.\,)\in E$ и $\|x(\,.\,)\|<r$, то, как мы только что видели, $|x(\tau)|\leqslant e^{-\beta\tau}\|x\|<r$, и уже из $|x(\tau)|<r$ следует, что $|f(x(\tau))|\leqslant|x(\tau)|$, а далее используем экспоненциальную оценку для $|x(\tau)|$ и заключаем, что $|f(x(\tau))|\leqslant e^{-\beta\tau}\|x\|<e^{-\beta\tau}r$. Теперь

$$e^{\beta t}w(t)=e^{\beta t}\left|\int_0^t e^{A(t-\tau)}f(x(\tau))d\tau\right|\leqslant\int_0^t e^{\beta t}e^{-\alpha(t-\tau)}e^{-\beta\tau}rd\tau=$$

$$=r\int_0^t e^{(\alpha-\beta)\tau}d\tau=r\frac{1-e^{(\alpha-\beta)t}}{\alpha-\beta},$$

$$\sup_{t\geqslant 0}e^{\beta t}|w(t)|\leqslant\frac{r}{\alpha-\beta}.$$

Мы видим, что действительно $\sup_{t\geqslant 0} e^{\beta t}|w(t)| < \infty$, так что $w(\,.\,) \in E$. (Правда, надо ещё убедиться в непрерывности $w(\,.\,)$. Но это очевидно из выражения этой функции как интеграла, особенно если переписать его в виде $e^{At}\int_0^t e^{-A\tau} f(x(\tau))d\tau$ — всё сводится к непрерывности по t интеграла от непрерывной функции с верхним пределом интегрирования t.)

И. наконец, докажем в). Отображение

$$\mathcal{G} : \mathbb{R}^n \to E \quad x_0 \mapsto z, \text{ где } z(t) = e^{At}x_0,$$

является ограниченным линейным оператором. Его производная Фреше совпадает с ним самим: для "приращения" h вектора x_0 имеем $\mathcal{G}_{x_0}(h) = \mathcal{G}(h)$ (ибо даже $\mathcal{G}(x_0+h) - \mathcal{G}(x_0) = \mathcal{G}(h)$). Нам остаётся доказать, что $\mathcal{H}$ является гладкой функцией от x и $\mathcal{F}_x(0) = 0$.

Как и в п. 4, вместо производной Фреше удобнее иметь дело с производной Гато — она окажется ограниченным линейным оператором B (в отличие от п. 4, буква A сейчас занята), который непрерывно зависит от x, а тем самым будет доказано существование производной Фреше, совпадающей с тем же оператором и, значит, непрерывно зависящей от x, т.е. гладкость $\mathcal{H}$. Из формулы для производной будет видно и то, что $\mathcal{H}_x(0) = 0$. Как и в п. 4, мы вначале постараемся, применяя отображения ev_t, найти предположительное выражение для B, а потом проверим, что задаваемый этим выражением линейный оператор B действительно является производной Гато для $\mathcal{H}$.

Мы уже знаем, чему равно $\mathrm{ev}_t\,\mathcal{H}(x)$ — это есть значение в точке t той самой функции w, которой равно $\mathcal{H}(x)$, так что

$$\mathrm{ev}_t\,\mathcal{H}(x) = w(t) = \int_0^t e^{A(t-\tau)} f(x(\tau))d\tau.$$

Если существует производная $\frac{d}{ds}\Big|_{s=0}\mathcal{H}(x+su) = Bu$, то ограниченный линейный оператор ev_t переводит $\mathcal{H}(x+su)$ в зависящий от s вектор из $\mathbb{R}^n$, у которого тоже существует производная по s, и эта производная должна быть образом при отображении ev_t производной Bu от $\mathcal{H}(x+su)$. Но

$$\mathrm{ev}_t\,\mathcal{H}(x+su) = \int_0^t e^{A(t-\tau)} f(x(\tau)+su(\tau))d\tau,$$

так что (в предположении существования у $\mathcal{H}$ производной Гато)

$$\mathrm{ev}_t\,B(u) = \frac{\partial}{\partial s}\Big|_{s=0}\int_0^t e^{A(t-\tau)} f(x(\tau)+su(\tau))d\tau =$$

$$= \int_0^t e^{A(t-\tau)} \left.\frac{\partial}{\partial s}\right|_{s=0} f(x(\tau)+su(\tau))d\tau = \int_0^t e^{A(t-\tau)} f'(x(\tau))u(\tau)d\tau.$$

(Пояснение по поводу перехода от производной (символ $\frac{d}{ds}$) к частной производной (символ $\frac{\partial}{\partial s}$): Имея дело с зависящим от s элементом $\mathcal{H}(x+su)$ банахова пространства E, мы обозначали производную этого элемента по s с помощью знака $\frac{d}{ds}$, но после того как мы вспомнили что элементы E суть функции от t, у нас получается функция $\mathrm{ev}_t\,\mathcal{H}(x+su)$ от двух переменных (выражающаяся в виде соответствующего интеграла), и её производная по s — это частная производная, которую надо обозначать с помощью знака $\frac{\partial}{\partial s}$. Пояснение по поводу законности перестановки дифференцирования и интегрирования: t при этом фиксировано, пределы интегрирования от s не зависят, а подинтегральная функция гладко зависит от (s,τ). Для законности перестановки операций дифференцирования и интегрирования достаточно было бы и меньшего, например, непрерывности подинтегральной функции по (s,τ) и существования у неё производной по s, тоже непрерывной по (s,τ).).

Следовательно, если у $\mathcal{H}$ существует производная Гато, являющаяся непрерывным линейным оператором B, то (в точке x)

$$(Bu)(t) = \int_0^t e^{A(t-\tau)} f'(x(\tau))u(\tau)d\tau.$$

Правая часть этой формулы действительно определяет ограниченный линейный оператор от u. В самом деле, правая часть является некоторой функцией $v(t)$, и нам надо проверить, что $v \in E$ и что $\|v\| \leqslant C\|u\|$. (После этого мы будем вправе определить $B : E \to E$ как оператор, переводящий u в v.) Соответствующие рассуждение и выкладка похожи на уже проведенные в б). Так как $x(\tau)$ всё время находится в области, где $|f'(x)| < 1$, то

$$|e^{\beta t}v(t)| \leqslant \int_0^y e^{\beta t}e^{-\alpha(t-\tau)} \cdot 1 \cdot |u(\tau)|d\tau = \int_0^t e^{\beta(t-\tau)}e^{-\alpha(t-\tau)}e^{\beta\tau}|u(\tau)|d\tau \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^t e^{-(\alpha-\beta)(t-\tau)}\|u\|d\tau \leqslant \frac{\|u\|}{\alpha-\beta}.$$

Тем самым мы убедились и в том, что $v \in E$, и в том, что $\|v\| \leqslant C\|u\|$.

Итак, у нас есть “единственный кандидат на роль производной Гато” — оператор B, — и нам надо проверить “законность его притязания на эту роль". Мы должны доказать, что

$$\|\mathcal{H}(x+su)-\mathcal{H}(x)-sBu\| = o(|s|).$$

Это значит: для любого $\varepsilon > 0$ найдётся такое $\delta > 0$, что всякий раз, когда $\|u\| < \delta$,

$$\sup_{t\geqslant 0} e^{\beta t}\bigg|\int_0^t e^A(t-\tau)f(x(\tau)+su(\tau))d\tau - \int_0^t e^A(t-\tau)f(x(\tau))d\tau -$$

$$-s\int_0^y e^A(t-\tau)f'(x(\tau))u(\tau)d\tau\bigg| \leqslant \varepsilon s.$$

Впрочем, мы получим такое неравенство с некоторым дополнительным множителем C, не зависящим от s, чего, конечно, достаточно. Естественно, мы используем, что

$$\bigg|\int_0^t e^A(t-\tau)f(x(\tau)+su(\tau))d\tau - \int_0^t e^A(t-\tau)f(x(\tau))d\tau -$$

$$-s\int_0^y e^A(t-\tau)f'(x(\tau))u(\tau)d\tau\bigg| \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^t \left|e^A(t-\tau)\right| |f(x(\tau)+su(\tau)) - f(x(\tau)) - sf'(x(\tau))u(\tau)| d\tau,$$

и поэтому нам нужна некоторая оценка для $|f(x(\tau)+su(\tau)) - f(x(\tau)) - sf'(x(\tau))u(\tau)|$, причём оценка требуется для всех точек кривой $\{x(\tau);\ 0 \leqslant \tau < \infty\}$. Если бы кривая была компактным подмножеством окрестности $U_r(0)$, то могли бы использовать лемму 3 из п. 2. На самом деле эта кривая, конечно, не компактна, но лемму всё-таки можно использовать.

Упражнение. Докажите компактность множества $C = \{x(\tau);\ 0 \leqslant \tau < \infty\} \cup \{0\}$. (Указание. Вероятно, всего короче рассмотреть отображение $g : [0,1] \to \mathbb{R}^n$, определяемое как $g(1) = 0$ и $g(t) = x\left(\frac{t}{1-t}\right)$ при $0 \leqslant t < 1$.)

Итак, для любого $\varepsilon > 0$ имеется такое $\delta > 0$, что для всех $h \in \mathbb{R}^n$, для которых $|h| < \delta$, и всех $\tau \geqslant 0$

$$|f(x(\tau)+h) - f(x(\tau)) - f'(x(\tau))h| \leqslant \varepsilon |h|.$$

Напомним ещё, что $|u(\tau)| \leqslant e^{-\beta\tau}\|u\|$ и, в частности, $|u(\tau)| < \delta$, если $\|u\| < \delta$. Поэтому

$$\begin{aligned}
e^{\beta\tau} \int_0^t \left|e^A(t-\tau)\right| |f(x(\tau)+su(\tau)) - f(x(\tau)) - sf'(x(\tau))u(\tau)|d\tau \leqslant \\
\leqslant \int_0^t e^{\beta t} e^{-\alpha(t-\tau)} \delta e^{-\beta\tau}) \varepsilon s\|u\| d\tau = \varepsilon s\|u\| \int_0^t e^{-(\alpha-\beta)(t-\tau} d\tau \leqslant \\
\leqslant \varepsilon s\|u\| \int_0^\infty e^{-(\alpha-\beta)(t-\tau} d\tau = \frac{\varepsilon s\|u\|}{\alpha-\beta},
\end{aligned}$$

что лишь несущественным постоянным множителем отличается от εs. Мы видим, что B действительно является производной Гато $\mathcal{H}_x(x)$.

До сих пор x было фиксированным элементом E — о различных x приходилось говорить лишь постольку, поскольку выполнение некоторые нужных нам утверждений можно было гарантировать при достаточной малости $\|x\|$. Поэтому нам незачем было напоминать в самом обозначении, что B как-то зависит от x. Теперь же мы обратим внимание на эту зависимость, в связи с чем будем писать $B(x)$, и докажем, что зависимость является непрерывной.

Чтобы доказать непрерывность $B(\,.\,)$ в каком-нибудь элементе $x \in E$ (удовлетворяющем наложенным на него условиям малости), надо показать, что при всех $u \in E$ с достаточно малой нормой $\|u\|$ норма разности операторов $\|B(x+u)-B(x)\|$ будет мала. Задавшись $\varepsilon > 0$, мы убедимся в существовании такого $\delta > 0$, что при $\|u\| < \delta$ норма $\|B(x+u)-B(x)\| \leqslant K\varepsilon$, где K — некоторое число, не зависящее от u и ε. По определению операторной нормы, это означает, что для всех $v \in E$

$$\|(B(x+u) - B(x))v\| \leqslant K\varepsilon\|v\|. \tag{45}$$

Оцениваемая разность $(B(x+u) - B(x))v$ — это функция от t, принимающая в точке t значение

$$\mathrm{ev}_t(B(x+u) - B(x))v = \int_0^t e^{A(t-\tau)}(f'(x(\tau)+u(\tau)) - f'(x(\tau)))v(\tau)d\tau,$$

а её норма в E — это $\sup_{t\geqslant 0} e^{\beta t}\,\mathrm{ev}_t(B(x+u) - B(x))v$. Величина, стоящая под знаком sup, оценивается так:

$$e^{\beta t}\,\mathrm{ev}_t(B(x+u)-B(x))v \leqslant e^{\beta t} \int_0^t \left|e^{A(t-\tau)}\right| |f'(x(\tau)+u(\tau))-f'(x(\tau))||v(\tau)|d\tau.$$

Применяя лемму 4 к $C = \{x(\tau);\ 0 \leqslant \tau < \infty\} \cup \{0\}$ и к f', находим, что при достаточно малом δ для всех h с $|h| < \delta$

$$|f'(x(\tau) + h) - f'(x(\tau))| \leqslant \varepsilon.$$

Если $\|u\| < \delta$, то, как мы уже видели, $|u(\tau)| \leqslant e^{-\beta\tau}\|u\| < \delta$, поэтому $|f'(x(\tau) + u(\tau)) - f'(x(\tau))| \leqslant \varepsilon$. Поэтому (учитывая, что и для v тоже $|v(\tau)| \leqslant e^{-\beta\tau}\|v\|$) интересующий нас интеграл не превосходит

$$\int_0^t e^{\beta t} e^{-\alpha(t-\tau)} \varepsilon e^{-\beta\tau}\|v\| d\tau = \int_0^t e^{-(\alpha-\beta)(t-\tau)} \varepsilon\|v\| d\tau \leqslant \frac{\varepsilon\|v\|}{\alpha - \beta}.$$

Тем самым мы пришли к (45) с $K = \frac{1}{\alpha-\beta}$.

Наконец, то, что при $x = 0$ получается $B = 0$ — это видно из формулы

$$(Bu)(t) = \int_0^t e^{A(t-\tau)} f'(x(\tau)) u(\tau) d\tau.$$

При $x = 0$ в этой формуле $f' = 0$ при всех τ.

6. Пример применения "банаховой" теоремы о неявной функции: локальное инвариантное устойчивое многообразие для "седлового" положения равновесия.

В этом п. мы по-прежнему рассматриваем некоторые вопросы о поведении траекторий автономной системы (36) с положением равновесия в начале координат (и с прежними условиями о "нелинейном члене" f — это гладкая вектор-функция в некоторой окрестности положения равновесия 0, причём $f(0) = 0$ и $f'(0) = 0$), но с изменённым предположением о спектре A. Теперь предполагается, что часть собственных значений лежит внутри левой полуплоскости $\operatorname{Re}\lambda < 0$, а часть — внутри правой $\operatorname{Re}\lambda > 0$.

Из линейной алгебры известно, что тогда $\mathbb{R}^n$ распадается в прямую сумму двух инвариантных (относительно A) векторных подпространств E^s и E^u, отвечающих собственным значениям λ_i, лежащим, соответственно, в левой и правой полуплоскостях. (Индексы s и u происходят от stable и unstable.) Можно ввести новые декартовы координаты x и y с прежним началом координат таким образом, что точки с координатами $(x, 0)$[26] заполняют E^u, а точки $(0, y)$ — E^s. (Как видно, x теперь употребляется в новом смысле. Чуть ниже новый смысл придаётся также A и f.) В терминах новых координат матрица линейного приближения является блочно-диагональной матрицей $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$, причём спектр A расположен справа, а спектр B — слева от мнимой оси. Вся же система в этих терминах имеет вид

$$\dot{x} = Ax + f(x, y), \quad \dot{y} = By + g(x, y), \tag{46}$$

f, g — гладкие "нелинейные добавки", т.е. гладкие вектор-функции, заданные возле $(0, 0)$, причём $f(0, 0) = 0$, $g(0, 0) = 0$ и производные Фреше функций f, g в точке $(0, 0)$ равны нулю.

В тех случаях, когда мы будем говорить о решении системы (46), не обращая внимания на его x- и y-координаты по отдельности, мы будем

[26] Вообще-то лучше бы записывать координаты столбцом: $\begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$. Но их часто располагают в строчку, однако подразумевая, что "на самом деле" это столбец. При желании можно пользоваться знаком транспонирования и совершенно корректно записывать $\begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$ в виде $(x, 0)'$. Однако в подобных случаях я, как и многие, позволяю себе некоторую вольность речи, вернее, записи.

обозначать его через $z(t)$. (Таким образом, $z(t)$ — это сокращённое обозначение для $(x(t), y(t))$.) С другой стороны, длины векторов $|x|$ и $|y|$ приходится рассматривать по отдельности и, в частности, накладывать на x и y условия вида $|x| <$ чего-то и $y <$ чего-то (то, какие именно нормы в E^u и E^s нам понадобятся, будет уточнено ниже). Поэтому для z будет использоваться норма $|z| = \max(|x|, |y|)$.

Система линейного приближения теперь есть

$$\dot{x} = Ax, \quad \dot{y} + By.$$

x и y изменяются независимо друг от друга. Подпространства E^u и E^s инвариантны, т.е. траектория, проходящая через какую-нибудь точку E^u или E^s, целиком лежит в этом подпространстве. Движение фазовых точек в E^u описывается уравнением $\dot{x} = Ax$, где спектр матрицы A лежит в правой полуплоскости. Поэтому при $t \to \infty$ все решения с начальными значениями в E^u экспоненциально возрастают, а при $t \to -\infty$ они, наоборот, экспоненциально убывают. Допуская вольность речи, можно сказать, что траектории как бы выходит при $t = -\infty$ из положения равновесия 0 и со временем неограниченно удаляются от 0, уходят в бесконечность. Движение точек в E^s описывается уравнением $\dot{y} = By$, где спектр матрицы B лежит в левой полуплоскости. Поэтому при $t \to \infty$ все решения с начальными значениями в E^u экспоненциально убывают, а при $t \to -\infty$ они, наоборот, экспоненциально возрастают. Допуская вольность речи, можно сказать, что траектории как бы приходят из бесконечности и при $t = \infty$ входят в положение равновесия 0.

Оказывается, что частично сказанное остаётся в силе и для нелинейной системы (46) — линейные члены, так сказать, играют главную роль и в основном определяют качественную картину возле 0. Инвариантные подпространства E^u и E^s как бы искривятся, и их роль будут играть инвариантные многообразия W^u и W^s. Они проходят через 0 и касаются там E^u и E^s. Конечно, нет причин, чтобы линейные члены сохраняли ведущую роль вдали от 0, поэтому их “влияния” хватает только на построение “локальных инвариантных многообразий” $W^u_r(0)$ и $W^s_r(0)$, где нижний индекс r характеризует некоторым образом размеры этих многообразий. $W^u_r(0)$ описывается уравнением вида $y = \eta(x)$, где $\eta(x)$ — гладкая функция, определённая на E^u возле 0 и имеющая в точке 0 производную $\eta'(0) = 0$. Таким образом, $W^u_r(0)$ — это как бы несколько искривлённый кусочек E^u, проходящий через 0. Аналогично, $W^s_r(0)$ — это как бы несколько искривлённый кусочек E^s, тоже проходящий через 0; он описывается уравнением вида $x = \xi(y)$, где $\xi(y)$ — гладкая функция, определённая при $|y| \leqslant r$ и имеющая в точке 0 производную $\xi'(0) = 0$.

Надо немного подумать о форме этих кусочков, например, о форме W_r^s. Если просто сказать, что берётся некоторая окрестность $U_{E^s}(0)$ точки 0 в подпространстве E^s и "искривляется", то ведь уже форма окрестности $U_{E^s}(0)$ может быть "плохой", "сложной" (что бы это ни значило), а при искривлении "лучше" и "проще" она не станет. Ещё неприятнее, что из-за неподходящей формы границы области $U_{E^s}(0)$ стремящееся к 0 решение $\dot{y} = By$ может несколько раз пересекать эту границу, то входя в $U_{E^s}(0)$, то на какое-то время выходя из этой области, пока в конце концов траектория не войдёт в неё навсегда, приближаясь к 0. Это связано не с какими-то особенностями поведения траектории, а просто с неподходящим выбором окрестности $U_{E^s}(0)$. И даже если взять за $U_{E^s}(0)$ шар $\{y \in E^s;\ |y| \leqslant r\}$, всё же не исключено, что на какой-то части границы траектории будут входить в эту область $U_{E^s}(0)$, а на какой-то части — выходить из неё, и что траектория может войти в $U_{E^s}(0)$, а потом снова на время выйти из этой области (хотя в конце концов она войдёт в неё навсегда). Это уже обсуждалось в п. 5 (в терминах изменения со временем расстояния до 0. Там же мы видели, что ситуация упрощается при использовании ляпуновской метрики (которая вначале обозначалась через $|\,.\,|_1$, а потом — просто через $|\,.\,|$, что я по-прежнему буду делать в настоящем п.): тогда $|y(t)|$ убывает (с ростом t) с ненулевой скоростью (если не говорить о тривиальном решении, тождественно равном 0). Значит, если взять за $U_{E^s}(0)$ шар $\{y \in E^s;\ |y| \leqslant r\}$, понимаемый в смысле ляпуновской нормы $|\,.\,|$, то решения $y(t) = e^{Bt}y$ системы $\dot{y} = By$, начинающиеся в этом шаре, остаются в нём при всех $t > 0$. Если мы надеемся, что на локальном устойчивом многообразии $W_r^s(0)$ поведение траекторий $z(t)$ нелинейной системы (46) аналогично поведению траекторий системы линейного приближения на $U_{E^s}(0)$, то можно надеяться найти такую гладкую функцию $\xi(y)$, которая определена при $|y| \leqslant r$ с достаточно малым r (где $|\,.\,|$ — ляпуновская норма), имеет указанные выше свойства ($\xi(0) = 0,\ \xi'(0) = 0$) и для которой уравнение $x = \xi(y)$ описывает локальное инвариантное устойчивое многообразие $W_r^s(0)$. Последнее инвариантно в том смысле, что решения, начинающиеся на $W_r^s(0)$, остаются на $W_r^s(0)$ при всех $t > 0$ (это естественно назвать "положительной инвариантностью"), и устойчиво в том смысле, что эти решения при $t \to \infty$

стремятся к 0 с экспоненциальной оценкой, аналогичной той, с которой мы встретились в п. 5:

$$|z(t)| = |(x(t), y(t))| \leqslant e^{-\beta t}|y(0)| \quad \text{при } t \geqslant 0,$$

где β — некоторое положительное число. (Напоминаю, что $|z| = \max(|x|, |y|)$.)

С очевидными изменениями сказанное относится и к той окрестности $U_{E^u}(0)$ точки 0 на E^u, где мы будем строить функцию $y = \eta(x)$, описывающую $W_r^u(0)$. Роль ляпуновской нормы теперь будет играть ляпуновская норма для системы $\frac{dx}{d\tau} = -Ax$, получающейся из системы $\dot{x} = Ax$ путём "обращения времени", т.е. перехода к "новому времени" $\tau = -t$. По отношению к этой норме $\frac{d}{dt}\left|e^{At}y\right| \geqslant \alpha\left|e^{At}y\right|$ при всех y (с некоторым $\alpha > 0$), откуда, конечно, можно вывести, что $|e^{At}| \geqslant e^{\alpha t}$ при $t \geqslant 0$, однако это не то, что нам нужно. Нам надо знать, что под действием линейного оператора e^{At} определённым образом увеличиваются длины всех векторов, а большая норма оператора e^{At} означает только то, что под действием этого оператора увеличивается длина какого-то вектора, тогда как длина какого-то другого вектора может и уменьшиться. Увеличение длин всех векторов по действием e^{At} равносильно уменьшению длин всех векторов под действием обратного оператора e^{-At}, а вот это действительно можно выразить как утверждение о норме последнего оператора. В нашем случае, конечно, речь идёт не просто об увеличении или уменьшении, а об экспоненциальной оценке $|e^{-At}| \leqslant e^{-\alpha t}$ при $t > 0$. Фактически мы её уже имеем (в терминах τ) — каким именно образом? За $U_{E^u}(0)$ мы примем шар $|x| \leqslant r$пространства E^u (где используется ляпуновская норма). Теперь из $x \in U_{E^u}(0)$ следует, что $e^{At}x \in U_{E^u}(0)$ при всех $t \leqslant 0$. Можно ожидать, что удастся найти такую гладкую функцию $\eta(x)$, которая определена при $|x| \leqslant r$ с достаточно малым r (где $|\,.\,|$ — ляпуновская норма), имеет указанные выше свойства ($\eta(0) = 0,\ \eta'(0) = 0$) и для которой уравнение $y = \eta(x)$ описывает локальное инвариантное неустойчивое многообразие $W_r^u(0)$. Последнее инвариантно в том смысле, что решения $z(t)$ системы (46), начинающиеся на $W_r^u(0)$, остаются на $W_r^u(0)$ при всех $t < 0$ (это естественно назвать "отрицательной инвариантностью"), и неустойчиво в том смысле, что эти решения при $t \to -\infty$ стремятся к 0 с экспоненциальной оценкой:

$$|z(t)| = |(x(t), y(t))| \leqslant e^{\beta t}|x(0)| \quad \text{при } t \leqslant 0,$$

где β — некоторое положительное число. (При возрастании же t они, наоборот, удаляются от 0 с аналогичной оценкой, пока не выходят из

$W_r^u(0)$. Понятно, что об их дальнейшей "судьбе" наши локальные рассуждения никакой информации дать не могут — при удалении от 0 это поведение уже не определяется преимущественно линейными членами системы (46). Аналогично, о поведении при $t < 0$ решений, начинающихся на $W_r^s(0)$, локальные рассуждения говорят только то, что любое такое решение, отличное от 0, при убывании t выходят из $W_r^s(0)$, и не дают информации о поведении этих решений в ещё более раннее время.)

Основной в этом п. является теорема 8, главное утверждение которой — это существование локального инвариантного устойчивого многообразия $W_r^s(0)$ у положения равновесия 0 системы (46). Теорема 8 содержит также некоторое утверждение о том, что экспоненциально убывающее решение лежит на $W_r^s(0)$, но это утверждение слабее, чем было описано выше (об решениях, просто остающихся малыми при неограниченном возрастании t, ничего не говорится). Просто оно получается практически по ходу доказательства существования $W_r^s(0)$, почему и сформулировано вместе с утверждением об этом существовании. После этого с помощью рассуждений иного характера, специфически связанных с дифференциальными уравнениями (и более простых), но не с методами функционального анализа, уточняется поведение траекторий, не лежащих на $W_r^s(0)$. С помощью "обращения времени", т.е. перехода к новому времени $\tau = -t$, из теоремы 8 и прочих наших утверждений можно вывести существование локального инвариантного неустойчивого многообразия $W_r^u(0)$ и утверждение, что решение, остающееся малым при всех $t < 0$, лежит на этом многообразии (как?).

Ситуация, таким образом, напоминает ситуацию в п. 4: "основную тяжесть" берёт на себя теорема, доказательство которой основано на интересующих нас сведениях из функционального анализа, но некоторые окончательные формулировки получаются с последующим использованием более простых соображений, не требующих этих сведений. Как и в п. 4, я останавливаюсь на этих дополнительных соображениях и делаю это с той же целью: чтобы сообщить читателю окончательный результат и чтобы теорема 8 воспринималась в правильной перспективе — в некоторых отношениях она представляет собой не окончательный результат, а шаг на пути к таковому — но шаг, являющийся самым важным и технически самым сложным.

В теореме 8 подразумевается, что система (46) удовлетворяет сформулированным выше условиям (о собственных значениях матриц A и B, о гладкости и малости f и g возле нуля — $f(0) = 0$, $f'(0) = 0$ и аналогично для g). Зафиксируем какое-нибудь такое $\alpha > 0$, что имеются ляпуновские метрики в E^u (пространство x-ов) и E^s (пространство y-ков), для которых $\left|e^{-At}\right| \leqslant e^{-alphat}$ и $\left|e^{Bt}\right| \leqslant e^{-alphat}$ при всех $t \geqslant 0$. Ниже нормы векторов $|x|$ и $|y|$ понимаются именно как эти ляпуновские нормы. Наконец, зафиксируем какое-нибудь $\beta \in (0, \alpha)$.

Теорема 8. При достаточно малых $r > 0$ система (46) имеет положительно инвариантное устойчивое многообразие $W_r^s(0)$, которое описываемое уравнением вида $x = \xi(y)$, где ξ — гладкая функция (со значениями в E^u), которая определена при $|y| \leqslant r$ и для которой $\xi(0) = 0$, $\xi'(0) = 0$ (так что $W_r^s(0)$ проходит через 0 и касается там E^s). Если $z(t)$ — решение и $|z(t)| \leqslant re^{-\beta t}$ при всех $t \geqslant 0$, то $z(t) \in W_r^s(0)$ при всех этих t; обратно, $W_r^s(0)$ состоит из точек, лежащих на траекториях таких решений $z(t)$; при этом оказывается, что $|z(t)| \leqslant e^{-\beta t}|y(0)|$ при всех $t \geqslant 0$, где C — некоторая константа (одна и та же для всех t и всех достаточно малых $|y_0|$) [27].

Различные варианты этой теоремы доказывались рядом математиков конца XIX — начала XX века. По традиции теорему 8 принято называть “теоремой Адамара – Перрона”, что исторически не совсем точно. Но верно, что именно в работах Ж.Адамара и О.Перрона имеются два наиболее употребительных метода доказательства теорем такого типа, причём Адамар со своим методом, повидимому, не имел предшественников, Перрон же имел, но он доказал одну из самых удачных более общих теорем, относящихся к уравнениям с переменными (зависящими от t) коэффициентами, и отчётливо выявил соответствующие “движущие пружины”[28].

[27]Из дальнейших рассуждений, дополняющих теорему 8, видно, что на самом деле здесь можно взять $C = 1$ (это связано с тем, что сейчас мы при самой формулировки теоремы используем ляпуновскую метрику; в теореме 7 мы этого не делали и потому были вынуждены говорить о неравенстве с какой-то константой C). Неравенство $|z(t)| \leqslant e^{-\beta t}|y(0)|$ несколько сильнее неравенства $|z(t)| \leqslant re^{-\beta t}$, потому что если $z(t)$ удовлетворяет последнему, а $|z(0)| < r$, то ведь само по себе данное неравенство не исключает как возможности, что $|z(t)|$ вначале некоторое время увеличивается, так и возможности, что $|y(0)| < |x(0)|$, тогда как утверждение, что $|z(t)| \leqslant e^{-\beta t}|y(0)|$, их исключает. То же неравенство (с какой-то константой C), которое приводится в формулировке теоремы 8, не слабее и не сильнее неравенства $|z(t)| \leqslant re^{-\beta t}$. Но уже и с константой C теорема 8 устанавливает, что по отношению к траекториям, лежащим на многообразии $W_r^s(0)$, наше положение равновесия $(0, 0)$ является экспоненциально устойчивым.

[28]Интересно, что задолго до Перрона Ляпунов доказал другую теорему такого же

В методе Перрона непосредственно ищется не уравнение $x = \xi(y)$ для $W_r^s(0)$, а ищутся решения с малыми начальными значениями, экспоненциально убывающие с ростом t. Доказывается, что для каждого малого y_0 имеется ровно одно такое x_0, что решение $(x(t,x_0,y_0), y(t,x_0,y_0)$ системы (46) при увеличении t экспоненциально убывает с оценкой типа $|(x(t),y(t)| < Ce^{-\beta t}|y_0|$, где C — некоторая константа. Уже потом эти решения "соединяются" в локальное устойчивое многообразие $W_r^s(0)$. Оказывается, что эти решения удовлетворяют интегральным уравнениям

$$\begin{aligned} x(t) &= -\int_t^\infty e^{A(t-\tau)} f(x(\tau),y(\tau))d\tau, \\ y(t) &= e^{Bt}y_0 + \int_0^t e^{B(t-\tau)} g(x(\tau),y(\tau))d\tau \end{aligned} \tag{47}$$

и что, обратно, экспоненциально убывающие (с нужной скоростью) решения этих интегральных уравнений являются решениями (46), имеющими нужные свойства. Доказывается, что интегральные уравнения (47) действительно имеют такие решения.

Метод Перрона можно оформить как связанный с использованием "банаховой" теоремы о неявных функциях (сам Перрон, естественно, пользовался последовательными приближениями, т.е. сжимающими отображениями). При таком оформлении автоматически получается и гладкость инвариантного многообразия. Естественно, мы им и воспользуемся. Метод Адамара кое в чём проще; он непосредственно даёт уравнение $x = \xi(y)$ для $W_r^s(0)$ (или $y = \eta(x)$ для $W_r^u(0)$ — здесь имеются различные варианты). Но его не удалось оформить таким образом, чтобы применялась "банахова" теорема о неявных функциях, поэтому при использовании метода Адамара гладкость инвариантного многообразия приходится доказывать отдельно.

1). Вывод уравнений (47). Здесь доказывается, что если решение $z(t) = (x(t),y(t))$ системы (46) при всех $t \geqslant 0$ удовлетворяет неравенству $|z(t)| \leqslant re^{-\beta t}$ (т.е. $|x(t)| \leqslant re^{-\beta t}$ и $|y(t)| \leqslant re^{-\beta t}$), то оно удовлетворяет (47).

Второе из уравнений (47) получается аналогично уравнению (42). Как и там, множители e^{Bt} и $e^{B(t-\tau)}$ экспоненциально убывают с ростом t и $t-\tau$. Но если бы мы написали аналогичное уравнение для $x(t)$, то получили бы экспоненциально растущие множители. Непонятно, как при

типа, но относящуюся к несколько иной ситуации, которая является, в некотором смысле, более специальной и более тонкой. Эта теорема тоже имеет важные применения, но всё-таки более специального характера.

этом можно было бы получить экспоненциально убывающие решения. К тому же в нём фигурировало бы $x(0)$, а на устойчивом многообразии x должно быть функцией от y, так что $y(0)$ можно рассматривать как произвольный параметр (лишь бы он был малым), но $x(0)$ нельзя — мы и не рассчитываем найти убывающее решение при любом $x(0)$, а только при некотором (как-то зависящем от $y(0)$). Для $x(t)$ мы начинаем с аналога формулы (41), в котором роль начального условия играет значение $x(s)$ решения x в момент времени s:

$$x(t) = e^{A(t-s)}x(s) + \int_s^t e^{A(t-\tau)}\varphi(\tau)d\tau,$$

т.е. применительно к первому из уравнений (46),

$$x(t) = e^{A(t-s)}x(s) + \int_s^t e^{A(t-\tau)}f(x(\tau), y(\tau))d\tau.$$

В последней формуле мы делаем предельный переход при $s \to \infty$, учитывая, что на предполагаемом устойчивом интегральном многообразии и x, и y убывают. (В данный момент достаточно и равномерной ограниченности $x(s)$ и $|f(x(\tau), y(\tau))|$ на всей положительной полуоси времени. Используем лемму 4 из п. 2, применяя её к малой окрестности точки $(0,0)$, приняв за C множество $\{(0,0\}$ и заменив в ней x, y, z на $(0,0), (0,0)$ и $(x(t), y(t))$.) Получается

$$x(t) = \int_\infty^t e^{A(t-\tau)}f(x(\tau), y(\tau))d\tau,$$

что совпадает с первым из уравнений (47), если поменять местами пределы интегрирования.

2). В п. 5 переход от (36) к (42) (и обратно) был возможен всегда; другое дело, что у нас были предположения о матрице A и мы искали решения с определёнными свойствами (решения, лежащие в E). Что же касается перехода от (46) к (47), то связь второго из уравнений (47) со вторым из уравнений (46) — такая же, как связь между (42) и (36), но с первыми из этих уравнений дело обстоит иначе. Переход от первого из уравнений (46) к первому из уравнений (47) был осуществлён не для всех решений (46), а для тех, которые убывают (или по крайней мере равномерно ограничены) при $t \geqslant 0$; другое дело, что нас именно такие решения и интересуют. Надо особо обсудить обратный переход от (42) к (46) для экспоненциально убывающих решений (которые только и интересуют нас; при этом не надо думать, имеются ли другие решения).

Итак, пусть $x(t), y(t))$ — решение (42), для которого при всех $t \geqslant 0$ удовлетворяет неравенству $|z(t)| \leqslant re^{-\beta t}$ (т.е. , повторяю, $|x(t)| \leqslant re^{-\beta t}$ и $|y(t)| \leqslant re^{-\beta t}$). Для $y(t)$ из п. 5 видно, что

$$\dot{y}(t) = By(t) + g(x(t), y(t)),$$

т.е. y удовлетворяет второму из уравнений (46) (с какой-то функцией $x(t)$ — сейчас мы ещё не знаем, является ли x решением первого из этих уравнений). Займёмся $x(t)$. Формальное дифференцирование первого из уравнений (47) даёт

$$\dot{x}(t) = e^{A(t-t)} f(x(t), y(t)) = f(x(t), y(t)),$$

но оправдано ли формальное дифференцирование? Да. Здесь не надо даже вспоминать никаких теорем о дифференцировании несобственных интегралов. Достаточно заметить, что

$$x(t) - x(0) = -\int_t^0 e^{A(t-\tau)} f(x(\tau), y(\tau)) d\tau,$$

и теперь приходится дифференцировать самый обычный интеграл с конечными пределами.

3). Теперь наступает центральный момент доказательства, где используется “банахова” теорема о неявной функции (теорема 4). Вводим пространства E и F непрерывных функций $x : [0, \infty) \to E^u,\ y : [0, \infty) \to E^s$, для которых при всех $t \geqslant 0$

$$\sup_{t \geqslant 0} e^{\beta t} |x(t)| < \infty, \quad \sup_{t \geqslant 0} e^{\beta t} |y(t)| < \infty.$$

Левые части этих неравенств, естественно, принимаем за нормы $\|x\|$ и $\|y\|$ в E и F. Это действительно нормы, а в п. 5 мы видели, что пространство E с нормой $\|x\|$ является полными; то же самое относится и к F с нормой $\|y\|$, поскольку эти пространство и норма определяется точно так же.

Рассматривая уравнения (47) как уравнения в E и F (точнее — рассматривая систему этих двух уравнений как уравнение в $E \times F$), мы докажем, что при любом достаточно малом y_0 (скажем, при $|y_0| \leqslant r$) (47) имеет ровно одно решение $(x(\,.\,), y(\,.\,)) \in E \times F$, для которого $\|x\|, \|y\| \leqslant r$ и которое (как элемент $E \times F$) гладко зависит от "параметра" y_0 (при необходимости на это можно явно указать в записи, написав $(x(\,.\,,y_0), y(\,.\,,y_0))$. Мы увидим также, что для этого решения на самом деле $\|x\|, \|y\| \leqslant |y_0|$ и что когда $y_0 = 0$, то $(x(\,.\,,y_0), y(\,.\,,y_0)) = (0,0)$, а производная Фреше $x_{y_0}(\,.\,,y_0) = 0$. Примем пока это без доказательства и убедимся, что рассматриваемые нами решения заполняют искомое локальное инвариантное устойчивое многообразие $W^s_r(0)$ и что оно является гладким.

4). Из второго из уравнений (47) видно, что $y(0) = y_0$, т.е. y_0 действительно является начальным значением для y. О начальном значении для x можно только сказать, что оно является какой-то функцией от y_0:

$$x(0) = \mathrm{ev}_0\, x(\,.\,,y_0) = x(t, y_0),$$

каковую функцию мы обозначим через $\xi(y_0)$. Это гладкая функция, поскольку элемент $x(\,.\,,y_0)$ пространства E гладко зависит от y_0, а $\mathrm{ev}_0 : E \to E^u$ — ограниченное линейное отображение. Далее, $\xi(0) = 0$, поскольку $(x(\,.\,,y_0) = 0$ (а ev_0 переводит 0 в 0) и $\xi'(0) = \mathrm{ev}_0\, x_{y_0}(\,.\,,y_0) = 0$.

Многообразие $W^s_r(0)$ мы определим как график функции ξ, т.е. $W^s_r(0) = \{(x,y);\ |y| \leqslant r, x = \xi(y)\}$. Тем самым сказано, что если $z(t) = (x(t), y(t))$ — решение (46), у которого x и y достаточно малы и экспоненциальног убывают, — точнее, для которого $x(\,.\,) \in E, y(\,.\,) \in F$ и $\|x\|, \|y\| \leqslant r$, — то начальное значение этого решения $z(0) \in W^s_r(0)$. Убедимся, что это верно не только для начального значения этого решения, но и для всех его значений при $t \geqslant 0$. Рассмотрим "сдвинутое по времени" решение

$$z_1(t) = (x_1(t), y_1(t)) = z(t+s) = (x(t+s), y(t+s))$$

с каким-нибудь (на минуту фиксированным) $s > 0$. Оно удовлетворяет оценке $|z_1(t)| \leqslant re^{-\beta t}$ (даже $\leqslant re^{-\beta(t+s)}$. Поэтому x-координата $x_1(0)$ его начального значения $z_1(0)$ должна равняться $\xi(y_1(0))$. Иными словами, $x(s) = \xi(y(s))$, и это верно для всех $s \geqslant 0$. Вот мы и доказали, что положительная полутраектория $\{z(t);\ t \geqslant 0\} \subset W^s_r(0)$.

Нам надо ещё убедиться, что $|z(t)| \leqslant |y_0|e^{-\beta t}$ с некоторой константой C. Это делается аналогично тому, как получается аналогичное неравенство в теореме 7. Раз $x(\,.\,,y_0) \in E$ и $y(\,.\,,y_0) \in F$, то

$$|x(t,y_0)| \leqslant \|x(y_0)\| e^{-\beta t}, \quad |y(t,y_0)| \leqslant \|y(y_0)\| e^{-\beta t}. \tag{48}$$

Теорема о неявной функции обеспечит нам гладкую зависимость $x(y_0)$ и $y(y_0)$ от x_0. А при $y_0 = 0$ очевидным решением (47) является $(x(t), y(t)) \equiv 0$.

В некоторой шаровой окрестности точки $y_0 = 0$ пространства E^s (уменьшив, если потребуется, ε, можно считать, что это та же $U_\varepsilon(0)$, где теорема о неявной функции доставляет нам решение $(x(x_0), y(y_0))$ нашей системы интегральных уравнений) $\|x'(y_0)\| \leqslant C$ и $\|y'(y_0)\| \leqslant C$, где за C можно принять, скажем, $\max(|x'(0)|, |y'(0)|) + 1$. По "теореме о среднем" (с условным характером этого названия), $\|x(y_0)\| = \|x(y_0) - x(0)\| \leqslant C|y_0|$ и аналогично $\|y(y_0)\| \leqslant C|y_0|$. После этого (48) приводит к неравенству $|x(t, y_0)|, |y(t, y_0)| \leqslant |y_0| e^{-\beta t}$.

5). Для завершения доказательства теоремы 8 остаётся доказать утверждения, сформулированные в 3) и принятые там без доказательства.

а). Можно ли рассматривать уравнения (47) как уравнение в $E \times F$? Это значит: верно ли, что когда $|y_0| \leqslant r$ и $x \in E,\ y \in F,\ \|x\| \leqslant r,\ \|y\| \leqslant r$, то правые части (47) определяют некоторые функции $v \in E,\ w \in F$?

б). Выполняются ли при этом условия теоремы о неявных функциях?

в). Верно ли, что когда $y_0 = 0$, то $(x(\,.\,, y_0), y(\,.\,, y_0)) = (0, 0)$, а производная Фреше $x_{y_0}(\,.\,, y_0) = 0$?

Положительный ответ на а) для второго из уравнений (47) (т.е. для его правой части) мы уже знаем — это точно такое же уравнение, как в п. 5. Займёмся правой частью первого из этих уравнений — выражением (с изменённым знаком)

$$\int_t^\infty e^{A(t-\tau)} f(x(\tau), y(\tau)) d\tau.$$

В соответствующем интеграле $\tau \geqslant t$, поэтому $\left|e^{A(t-\tau)}\right| \leqslant e^{-\alpha(\tau - t)}$, а в некоторой окрестности точки $(0, 0)$ заведомо $|f(x, y)| \leqslant 1$. Значит, при достаточно малых $\|x\|$ и $\|y\|$ при всех $\tau \geqslant 0$ будет $|f(x(\tau), y(\tau))| < 1$ (ведь $|x(\tau)| \leqslant \|x\|$ и аналогично для y), а тогда интеграл заведомо сходится и определяет некоторую функцию $v : [0, \infty) \to E^u$. Чтобы убедиться в её непрерывности, не надо вспоминать теорем о соответствующих свойствах несобственного интеграла — наш интеграл

$$\int_t^\infty e^{A(t-\tau)} f(x(\tau), y(\tau)) d\tau = e^{At} \int_t^\infty e^{-A\tau} f(x(\tau), y(\tau)) d\tau =$$

$$= e^{At} \left(v(0) - \int_0^t e^{-A\tau} f(x(\tau), y(\tau)) d\tau \right),$$

и всё сводится к непрерывности по верхнему пределу t обычного интеграла $\int_0^t$ от непрерывной функции. Наконец, $v \in E$. Здесь требуется лишь не на много точнее, чем выше, оценивать интеграл (позднее придётся это делать более точно). В некоторой окрестности $U_r(0)$ нашего седлового положения равновесия всюду $|f_x(x,y)|, |f_y(x,y)| < 1$, потому что в самом этом положении равновесия производные $f_x(0,0) = 0, f_y(0,0) = 0$, а они непрерывны. Если $\|x\|, \|y\| < 1$, то $|x(\tau)|, |y(\tau)| < re^{-\beta\tau}$ при всех $\tau > 0$ (почему?), и тогда

$$|f(x(\tau), y(\tau))| \leqslant (|x(\tau)| + |y(\tau)|) \leqslant 2re^{-\beta\tau},$$

$$e^{\beta t}|v(t)| \leqslant \int_t^\infty e^{\beta t}\left|e^{A(t-\tau)}\right| 2re^{-\beta\tau} d\tau \leqslant 2r\int_t^\infty e^{-\alpha(\tau-t)}e^{-\beta(\tau-t)}d\tau =$$

$$= 2r\int_t^\infty e^{-(\alpha+\beta)(\tau-t)}d\tau = \frac{2r}{\alpha+\beta}.$$

Мы делаем вывод, что при $|y_0| \leqslant r, x \in E, \|x\| \leqslant r, y \in F, \|y\| \leqslant r$ правые части (47) определяют функции $v \in E$ и $w \in F$ (ещё раз — v равно правой части первого из уравнений (47) с обратным знаком), если только r достаточно мало, а потому определены и функции $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$

$$\mathcal{F} : V_r(0) \times W_r(0) \to E, \quad \mathcal{G} : U_r(0) \times V_r(0) \times W_r(0) \to F$$

(U_r, V_r, W_r — r-окрестности нуля в E^s, E и F соответственно), переводящие (x,y) в v и (y_0,x,y) в w[29]. Наконец, определена функция

$$\mathcal{H} : U_r(0) \times V_r(0) \times W_r(0) \to E \times F \qquad \mathcal{H} = (x + \mathcal{F}(x,y), y - \mathcal{G}(y_0,x,y))$$

(на самом деле это столбец). Нас интересуют решения $(x(y_0), y(y_0))$ уравнения $\mathcal{H}(y_0,x,y) = 0$. (Будучи элементами E и F, эти $x(y_0)$ и $y(y_0)$ являются некоторыми функциями на $[0,\infty)$, — как мы обычно говорим, функциями от t, — но пока что мы не отражаем этого в обозначениях.) При $y_0 = 0$ имеется очевидное решение $(0,0)$. Чтобы на основании теоремы 4 (о неявных функциях) можно было сделать вывод о существовании решения при любом достаточно малом y_0 и о каких-то свойствах этого решения, надо убедиться, что $\mathcal{H}$ имеет непрерывную производную Фреше в некоторой окрестности точки $(0,0,0)$ (надеюсь, читатель понимает,

[29] В п. 5 функция $\mathcal{F}$, аналогичная теперешней $\mathcal{G}$, представлялась как сумма двух слагаемых $\mathcal{G}$ и $\mathcal{H}$, рассматривавшихся по отдельности. Теперь мы не пользуемся таким представлением — мы используем только те из заключений п. 5, которые относятся ко всей функции $\mathcal{F}$, т.е. к теперешней $\mathcal{G}$.

что эти три нуля — нули в различных пространствах!) и что производная $\mathcal{H}_{(x,y)}(0,0,0)$ является обратимым линейным оператором.

Насчёт "второй координаты вектор-функции $\mathcal{H}$" $y-\mathcal{G}(y_0,x,y)$ мы уже знаем, что (при достаточно малом r) она гладко зависит от (y_0,x,y) и что производная $\mathcal{G}$ по x,y в точке $(0,0,0)$ равна 0. Поэтому производная Фреше "второй координаты" по (x,y) в точке $(0,0,0)$ — это оператор $(h_E,h_F)\mapsto h_F$ (где $h_E,h_F)$ — компоненты "приращения аргумента" $h=(h_E,h_F)$, лежащие в E и F соответственно; на самом деле их надо записывать столбцом). Его можно записать в виде строки $(0,I_F)$, где 0 — нулевой оператор $E\to F$, а I_F — единичный оператор в F. Эта строка как раз и действует должным образом на приращение:

$$(0,I_F)\begin{pmatrix} h_E \\ h_F \end{pmatrix}=h_F.$$

Мы докажем, что $\mathcal{F}(y_0,x,y)$ тоже гладко зависит от (y_0,x,y) и что производная $\mathcal{F}$ по (x,y) в точке $(0,0,0)$ тоже равна 0, так что "первая координата" гладко зависит от своих аргументов (x,y) (от y_0 она вообще не зависит) и её производная Фреше в точке $(0,0)$ — это оператор $h\mapsto h_E$. Этим будет доказано, прежде всего, что у $\mathcal{H}(y_0,x,y)$ "обе координаты" $x+\mathcal{F}(y_0,x,y)$ и $y-\mathcal{G}(y_0,x,y)$ гладко завися от (y_0,x,y), чем будет установлена гладкость $\mathcal{H}$. Кроме того, получится, что $\mathcal{H}_{(x,y)}(0,0)=\begin{pmatrix} I_E & 0 \\ 0 & I_F \end{pmatrix}$, где каждое I является единичным линейным оператором в соответствующем пространстве. Отсюда явствует обратимость $\mathcal{H}_{x,y}(0,0)$.

Итак, докажем дифференцируемость $\mathcal{F}$, найдём выражение для $\mathcal{F}_{(x,y)}(x,y)$ в виде некоторого интегрального оператора, проверим его непрерывную зависимость от (x,y) и убедимся, что $\mathcal{F}_{(x,y)}(0,0)=0$. Как обычно, мы предпочитаем иметь дело с производной Гато и сперва находим "кандидата" $=(x,y)$ на роль этой производной. "Кандидат" должен переводить функцию $h=(h_E,h_F)$ в функцию, принимающую в точке t значение

$$\mathrm{ev}_t\left.\frac{d}{ds}\right|_{s=0}\mathcal{F}(x+sh_E,y+sh_F)=\left.\frac{d}{ds}\right|_0\mathrm{ev}_t\,\mathcal{F}(x+sh_E,y+sh_F)=$$

$$=\left.\frac{\partial}{\partial s}\right|_0\int_t^\infty e^{A(t-\tau)}f(x(\tau)+sh_E(\tau),y(\tau)+sh_F(\tau))d\tau=$$

$$=\int_t^\infty e^{A(t-\tau)}\left.\frac{\partial}{\partial s}\right|_0 f(x(\tau)+sh_E(\tau),y(\tau)+sh_F(\tau))d\tau=$$

$$= \int_t^{\infty} e^{A(t-\tau)}(f_x(x(\tau),y(\tau))h_E(\tau) + f_y(x(\tau),y(\tau))h_F(\tau))d\tau.$$

Перестановка дифференцирования и интегрирования можно оправдать ссылкой на соответствующие свойства несобственного интеграла. Но можно стать и на такую точку зрения, что пока что мы занимаемся угадыванием “кандидата” $C(x,y)$ в производные Гато $\mathcal{F}_{(x,y)}(x,y)$. Мы решили попробовать в роли кандидата оператор $C(x,y)$, переводящий $h = (h_E, h_F)$ в функцию от t

$$\int_t^{\infty} e^{A(t-\tau)}(f_x(x(\tau),y(\tau))h_E(\tau) + f_y(x(\tau),y(\tau))h_F(\tau))d\tau.$$

Поскольку затем мы займёмся проверкой пригодности этого кандидата, то не важно, насколько обоснованными были те соображения, которые склонили нас в его пользу. (Если они были обоснованными, то производной Гато может быть только C; если C не годится, то производной Гато нет. Если же они не были обоснованными, то вначале не исключается, что производной Гато может быть какой-то другой оператор, равно как не исключается и то, что её вообще нет. Но все эти разговоры станут бессодержательными, коль скоро будет доказано, что C действительно является производной Гато от $\mathcal{F}$. Тогда, конечно, будет фактически обоснована и перестановка дифференцирования с интегрированием, только этого уже не будет нужно.)

Как и в пп. 4, 5, надо прежде всего убедиться, что оператор $C(x,y)$ вообще определён при достаточно малых $\|x\|, \|y\|$ (как оператор $E \oplus F \to E$) и является ограниченным линейным оператором. Здесь всё ещё достаточно того, что когда $\|x\|, \|y\|$ достаточно малы, то при всех $t \geqslant 0$ будет $|f_x(x(\tau),y(\tau))|,\ |f_y(x(\tau),y(\tau))| < 1$ (ещё раз: а это почему так?). Тогда

$$\left| \int_t^{\infty} e^{A(t-\tau)}(f_x(x(\tau),y(\tau))h_E(\tau) + f_y(x(\tau),y(\tau))h_F(\tau))d\tau \right| \leqslant$$

$$\leqslant \int_t^{\infty} e^{-\alpha(\tau-t)}(\|h_e\| + \|h_F\|)e^{-\beta\tau}d\tau.$$

Очевидно, что этот интеграл сходится и потому определяет некоторую функцию $\xi(t)$. В её непрерывности проще всего убедиться, рассуждая так же, как это делалось при проверке непрерывности $v(t)$:

$$\xi(t) = e^{At}\int_t^{\infty} e^{-A\tau}(f_x h_E + f_y h_F)d\tau =$$

$$= e^{At}\left(\int_0^\infty e^{-A\tau}(f_x h_E + f_y h_F)d\tau - \int_0^t e^{-A\tau}(f_x h_E + f_y h_F)d\tau\right),$$

и всё сводится к непрерывности $\int_0^t$ по t (плюс непрерывность e^{At}). Далее,

$$e^{\beta t}|\xi(t)| \leqslant \int_t^\infty e^{-\alpha(\tau-t)}(\|h_e\| + \|h_F\|)e^{-\beta(\tau-t)}d\tau = \frac{\|h_E\| + \|h_F\|}{\alpha+\beta},$$

чем доказано как то, что $\xi \in E$, а следовательно $C(x, y)$ действительно отображает $E \oplus F$ в E, так и то, что этот (очевидно, линейный) оператор является ограниченным: $\|C(x, y)\| \leqslant \frac{1}{\alpha+\beta}$.

Мы доказали, что $\mathcal{F}(x, y)$ имеет производную Гато $C(x, y)$. Дабы убедиться, что это в то же время и производная Фреше, надо убедиться в непрерывности $C(x, y)$ по (x, y). Это же нужно и для применения теоремы о неявных функциях (там ведь от $\mathcal{H}$ требуется не только дифференцируемость по Фреше, но и гладкость.)

Докажем непрерывность C в точке $(x(\,.\,), y(\,.\,))$. Здесь нужны оценки поточнее, чем раньше — того, что $|f_x|, |f_y| < 1$, теперь мало. Как мы видели в п. 5, на основании леммы 3 из п. 2 можно утверждать, что для любого $\varepsilon > 0$ имеется $\delta > 0$ с таким свойством: когда

$$x = x(\tau),\ y = y(\tau) \ \text{ с некоторым } \tau \geqslant 0,\ |x - x_1| < \delta,\ |y - y_1| < \delta,$$

то $|f_x(x) - f_x(x_1)| < \varepsilon,\ |f_y(y) - f_y(y_1)| < \varepsilon$. Если теперь

$$x, x_1 \in E\ , y, y_1 \in F,\ \|x - x_1\| < \delta,\ \|y - y_1\| < \delta,$$

то при всех $\tau \geqslant 0$ будет

$$|x(\tau) - x_1(\tau)| < \delta, \quad |y(\tau) - y_1(\tau)| < \delta$$

(почему?) и, значит,

$$|f_x(x_1(\tau), y_1(\tau)) - f_x(x(\tau), y(\tau))| < \varepsilon, |f_y(x_1(\tau), y_1(\tau)) - f_y(x(\tau), y(\tau))| < \varepsilon.$$

После этого малость $C(x_1, y_1) - C(x, y)$ без труда получается в духе известных нам вычислений:

$$\|C(x_1, y_1) - C(x, y))(h_E, h_F)\| =$$

$$= \sup_{t \geqslant 0} e^{\beta t} \left| \int_t^\infty e^{A(t-\tau)}\ .\right.$$

$$\cdot\Big(\big(f_x(x_1(\tau)),y_1(\tau))-f_x(x(\tau),y(\tau))\big)h_E(\tau)+$$

$$+\big(f_y(x_1(\tau)),y_1(\tau))-f_y(x(\tau),y(\tau))\big)h_F(\tau)\Big)d\tau\Big| \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{t\geqslant 0} e^{\beta t}\int_t^\infty e^{-\alpha(\tau-t)}\varepsilon(|h_E(\tau)|+|h_F(\tau)|)\leqslant$$

$$\leqslant \sup_t \int_t^\infty e^{-\alpha(\tau-t)}e^{\beta t}\varepsilon(\|h_E\|+\|h_F\|)e^{-\beta\tau}=$$

$$=\sup\int_t^\infty e^{-(\alpha+\beta)(\tau-t)}\varepsilon(\|h_E\|+\|h_F\|)d\tau=\frac{\varepsilon}{\alpha+\beta}(\|h_E\|+\|h_F\|).$$

Мы видим, что $\|C(x_1,y_1)-C(x,y)\|\leqslant\frac{\varepsilon}{\alpha+\beta}$.

Наконец, в теореме о неявной функции требуется обратимость $\mathcal{H}_{(x,y)}$, которая, как мы видели, обеспечивается тем, что

$$\mathcal{F}_{(x,y)}(0,0)=0 \quad \text{и} \mathcal{G}_{(x,y)}(0,0,0)=0.$$

Последнее нам уже известно, а первое совершенно аналогичным образом явствует из того, что в выражении для $\mathcal{F}_{(x,y)}(0,0)$ в виде интегрального оператора $f_x=0$ и $f_y=0$.

Итак, условия теоремы о неявной функции выполняются. При каждом малом y_0 интегральное уравнение (47) имеет единственное малое решение $(x,y)=(x(\,.\,,y_0),y(\,.\,,y_0))$, гладко зависящее от y_0 (как элемент $E\oplus F$). При $y_0=0$ имеется очевидное решение $(x,y)\equiv(0,0)$ (мы на него и ссылаемся при проверке одного из условий теоремы о неявных функциях). Следовательно, $(x(\,.\,,0),y(\,.\,,0))=(0,0)$. Осталось доказать, что производная Фреше $x_{y_0}(\,.\,,0)=0$. По общей теории,

$$\begin{pmatrix} x_{y_0}(y_0)\\ y_{y_0}(y_0)\end{pmatrix}=\Big(\mathcal{H}_{(x,y)}(0,0,0)\Big)^{-1}\mathcal{H}_{y_0}(0,0,0)$$

$$=\begin{pmatrix} I_e & 0\\ 0 & I_F\end{pmatrix}^{-1}\mathcal{H}_{y_0}(0,0,0)=\begin{pmatrix} I_e & 0\\ 0 & I_F\end{pmatrix}\mathcal{H}_{y_0}(0,0,0)=\mathcal{H}_{y_0}(0,0,0),$$

а у нас

$$\mathcal{H}=\begin{pmatrix} x+\mathcal{F}(x,y)\\ y-\mathcal{G}(y_0,x,y)\end{pmatrix},$$

и так как $\mathcal{F}$ не зависит от y_0, то

$$\mathcal{H}_{y_0} = \begin{pmatrix} 0 \\ \dots \end{pmatrix}.$$

Вот и выходит, что

$$x_{y_0}(0) = \text{ “верхняя координата” } \mathcal{H}_{y_0}(0,0,0) = 0.$$

В дополнение к доказательству теоремы 8 мы хотим ещё показать, что если $|z(t)| \leqslant r$ при всех $t \geqslant 0$, то $z(t) \in W_r^s(0)$ при всех таких t. Докажем следующие утверждения о ненулевом решении $z(t) = (x(t), y(t))$:

А). Если $|x(t)| \leqslant |y(t)| \leqslant r$ при некотором t, то $\frac{d}{dt}|y(t)| \leqslant -\beta|y(t)|$.

Б). Если $|y(t)| \leqslant |x(t)| \leqslant r$ при некотором t, то $\frac{d}{dt}|x(t)| \geqslant \beta|x(t)|$.

В). Если в некоторый момент времени $|x(t_0)| = |y(t_0)| \leqslant r$, то на некотором интервале $(t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)$ $|x(t)| < |y(t)|$ при $t \in (t_0 - \varepsilon, 0)$ и $|x(t)| > |y(t)|$ при $t \in (t_0, t_0 - \varepsilon)$.

К А: при $|y(t)| \geqslant |x(t)|$ имеем

$$\frac{d}{dt}|y(t)|^2 = 2(y, By + f(x,y)) = 2(y, By) + 2(y, f(x,y)).$$

Про первое слагаемое мы уже знаем из п. 5, что оно $\leqslant -2\alpha|y(t)|^2$ (в терминах квадратичной формы Ляпунова речь идёт, в сущности, о неравенстве $\frac{d}{dt}\big|_0 W\left(e^{Bt}y\right) \leqslant -2\alpha W(y)$, — почему?). Если всюду в $U_r(0)$

$$|f_x(x,y)|, |f_y(x,y)| < \varepsilon,$$

то во втором слагаемом $|f(x,y)| \leqslant \varepsilon|x| + \varepsilon|y| \leqslant 2\varepsilon|y|$, так что

$$\frac{d}{dt}|y(t)|^2 \leqslant -2(\alpha - \varepsilon)|y(t)|^2 \leqslant 2\beta|y(t)|^2,$$

если ε достаточно мало (что обеспечивается малостью r), и $\frac{d}{dt}|y(t)| \leqslant -\beta|y(t)|$.

К Б): рассуждаем аналогично предыдущему, используя, что $(x, Ax) \geqslant 2\alpha|x|^2$ и что при $|x| \geqslant |y|$ и при достаточной малости $|x|$ и $|y|$ имеет место неравенство $|f(x,y)| \leqslant 2\varepsilon|x|$.

К В). Если $x(t_0)| = |y(t_0)|$, то, по предыдущему, в некоторой окрестности точки $t = t_0$ на числовой оси $|x(t)|$ возрастает, а $|y(t)|$ убывает.

Из В) следует, что в пределах $U_r(0)$ никакая траектория не может перейти из области, где $|x| \geqslant |y|$, в область, где $|x| \leqslant |y|$. Из А) видно, что если начальное значение $(x(0), y(0)$ решения $(x(t), y(t))$ лежит в $U_r(0)$, то выйти из $U_r(0)$ это решение может, только перейдя из области, где $|x| \leqslant |y|$, в область, где $|x| \geqslant |y|$. Из F) и Б) видно, что если при $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$ решение $z(t) = (x(t), y(t)) \in U_r(0) \cap \{(x, y);\ |x| \leqslant |y|\}$, соответственно, $z(t) = (x(t), y(t)) \in U_r(0) \cap \{(x, y);\ |x| \geqslant |y|\}$, то $|y(t_2)| \leqslant e^{\beta(t_2 - t_1)}|y(t_1)|$ в первом случае и $|x(t_2)| \geqslant e^{\beta(t_2 - 1)}|x(t_1)|$ во втором. Поэтому любое отличное от $(0, 0)$ решение, попадающее в область $U_r(0) \cap \{(x, y);\ |x| \geqslant |y|\}$, со временем выходит из неё, а решение, которое при всех $t \geqslant 0$ остаётся в области $U_r(0)$, должно при этом удовлетворять условию $|x| \leqslant |y|$, и для такого решения $|z(t)| = \max(|x(t)|, |y(t)|) \leqslant e^{-\beta t}$. А тогда, как мы знаем, $z(t) \in W^s_r(0)$.

§3. Обратная теорема Тейлора.

7. Обратная теорема Тейлора для скалярной функции одной переменной.

Теорема 9. Пусть f — непрерывная функция, заданная на отрезке $[a, b]$, и пусть при всех $x \in [a, b]$ $f(x+h)$ представляется в виде суммы некоторого многочлена от h порядка n и "остаточного члена" порядка $o(h^n)$ (коэффициенты многочлена и остаточный член зависят от x):

$$f(x+h) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\alpha_k(x)}{k!} h^k + o(h^n) \tag{49}$$

(по аналогии с формулой Тейлора мы пишем коэффициенты со знаменателями $k!$; об их зависимости от x упоминаем явно, а о зависимости остаточного члена от x — нет). Если $\alpha_k(x)$ являются непрерывными функциями от x, то $f \in C^n[a, b]$ (т.е. f во всех точках отрезка $[a, b]$ имеет n непрерывных производных $f^{(i)}$, $i = 1, \dots, n$).

Вместо непрерывности по x коэффициентов α_k можно потребовать, чтобы "остаточный член" имел порядок $o(h^n)$ равномерно по x, т.е. чтобы малость разности $|f(x+h) - \sum \dots|$ характеризовалась бы не условием

$$\forall \varepsilon > 0\ \forall x\ \exists \delta = \delta(\varepsilon, x) > 0 \quad (|h| < \delta) \Longrightarrow \left(\left|f(x+h) - \sum \dots\right| \leqslant \varepsilon |h|^n\right),$$

а условием

$$\forall \varepsilon > 0\ \ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0\ \forall x \quad (|h| < \delta) \Longrightarrow \left(\left|f(x+h) - \sum \dots\right| \leqslant \varepsilon |h|^n\right).$$

В этом случае доказательство намного проще (читатель может попробовать провести его самостоятельно). Если же не накладывать никаких условий ни на коэффициенты $\alpha_k(x)$, ни на остаточный член, то теорема неверна.

Доказательство теоремы приводится в в). В нём нам понадобятся некоторые дополнительные сведения, которые сами по себе не имеют отношения к данной теореме. Они приводятся в а) и б).

а). Нижнее и верхнее правое и левое производные числа функции f в точке t определяются следующим образом (нижние числа обозначаются через λ, а верхние - через Λ; нижние значки пр и лев не нуждаются в пояснениях):

$$\lambda_{\text{пр}}(t) = \lambda_{\text{пр}}(t, f) = \varliminf_{h \to 0,\ h > 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h},$$

$$\Lambda_{\text{пр}}(t) = \Lambda_{\text{пр}}(t, f) = \varlimsup_{h \to 0,\ h > 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h},$$

$$\lambda_{\text{лев}}(t) = \lambda_{\text{лев}}(t, f) = \varliminf_{h \to 0,\ h > 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h},$$

$$\Lambda_{\text{лев}}(t) = \Lambda_{\text{лев}}(t, f) = \varlimsup_{h \to 0,\ h > 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h}.$$

Лемма. Пусть f — непрерывная функция, заданная на отрезке $[a, b]$, и пусть при всех $x \in [a, b)$ нижнее правое производное число $\lambda_{\text{пр}}(x, f) \leqslant 0$ (или $\lambda_{\text{пр}}(x, f) < 0$). Тогда f не возрастает (соответственно, f убывает) на этом отрезке. Аналогично, если при всех $x \in [a, b)$ верхнее правое производное число $\Lambda_{\text{пр}}(x, f) \geqslant 0$ (или $\Lambda_{\text{пр}}(x, f) > 0$), то f не убывает (соответственно, f возрастает) на $[a, b]$.

Докажем сперва внешне ослабленный вариант леммы: если f непрерывна на $[a, b]$ и всюду $\lambda_{\text{пр}}(x) < 0$, то $f(b) \leqslant f(a)$. В основе доказательства лежит следующий факт:

$$\text{при сделанных предположениях } \forall\, t_0 \in [a, b]\ \exists\, t_1 \in (t_0, b) \quad f(t_1) < f(t_0). \tag{50}$$

Действительно, раз $\varliminf_{h \to 0,\ h>0} \frac{f(t_0+h)-f(t_0)}{h} = \lambda_{\text{пр}}(x) < 0$, то для любого $\alpha \in (\lambda_{\text{пр}}(x), 0)$ имеются такие $h > 0$ (даже сколь угодно малые $h < 0$, но их малость сейчас не нужна), что $\frac{f(t_0+h)-f(t_0)}{h} < \alpha$. Если h таково, то за t_1 можно взять $t_0 + h$.

Рассмотрим теперь множество $A = \{t; \quad t \in [a, b],\ f(t) \leqslant f(a)\}$. Оно непусто, ибо $a \in A$. Ввиду (50), никакая точка из $[a, b)$ не может быть верхней гранью $\sup A$, поэтому $\sup A = b$. Но ввиду непрерывности f верхняя грань $\sup A \in A$. Следовательно, $f(b) \leqslant f(a)$. После этого понятно, что f является невозрастающей функцией: если $a \leqslant a_1 < b_1 \leqslant b$, то на отрезке $[a_1, b_1]$ функция f обладает теми же свойствами, о которых говорится в формулировке леммы — f непрерывна и всюду на отрезке $\lambda_{\text{пр}} < 0$; значит, по уже доказанной части леммы, $f(b_1) \leqslant f(a_1)$.

На самом деле $f(b) < f(a)$. Так как f не возрастает, то во всех точках x отрезка $[a, b]$ имеем $f(a) \geqslant f(x) \geqslant f(b)$, и если бы $f(b)$ равнялось $f(a)$, то $f(x) = \text{const}$. Но тогда $\lambda_{\text{пр}}$ всюду равнялось бы нулю.

После этого такое же рассуждение с меньшим отрезком доказывает, что f является убывающей функцией.

Наконец, пусть дано, что всюду $\lambda_{\text{пр}}(x, f) \leqslant 0$. Рассмотрим вспомогательную функцию $g(x) = f(x) - \varepsilon(x - a)$ с $\varepsilon > 0$. Она непрерывна и всюду $\lambda_{\text{пр}}(x, g) = \lambda_{\text{пр}}(x, f) - \varepsilon < 0$. По доказанному, $g(b) < g(a)$, т.е. $f(b) - \varepsilon(b - a) < f(a)$. Так как это верно при любом $\varepsilon > 0$, то $f(b) \leqslant f(a)$. Рассуждение с меньшим отрезком доказывает, что f не возрастает.

Читателю предоставляется самому доказать утверждение леммы, относящееся к $\Lambda_{\text{пр}}$. Можно повторить с надлежащими изменениями приведённые выше рассуждения, а можно рассмотреть функцию $-f(x)$ (что это даст?).

Следствие. Пусть g и ψ — непрерывные функции на отрезках $[0, 1]$ и $[a, b]$ соответственно, причём $p > 0$ на $(0, 1)$. Если при всех $x \in (a, b)$

$$\int_0^1 p(s)(\psi(x + sh) - \psi(x))ds = o(h),$$

то $\psi = \text{const}$.

Мы увидим, что в предположениях данного следствия всюду

$$\lambda_{\text{пр}}(x, \psi) \leqslant 0 \quad \text{и} \quad \Lambda_{\text{пр}}(x, \psi) \geqslant 0.$$

Согласно лемме, тогда ψ одновременно и не возрастает, и не убывает, т.е. $\psi = \text{const}$.

Допустим, что $\lambda_{\text{пр}}(x, \psi) > 0$ в какой-нибудь точке x. Возьмём какое-нибудь $\alpha \in (0, \lambda_{\text{пр}}(x, \psi))$. Существует такое $\delta > 0$, что $\frac{\psi(x+h)-\psi(x)}{h} \geqslant \alpha$ при всех $h \in (0, \delta)$. Значит, при таких h будет $\psi(x + h) - \psi(x) \geqslant \alpha h$. При любом $s \in (0, 1)$ и $0 < h < \delta$ nтем более $hs \in (0, \delta)$, значит, в подинтегральном выражении $\psi(x+sh)-\psi(x) \geqslant \alpha sh$, а интеграл $\geqslant \int_0^1 p(s)ashds = ah\int_0^1 sp(s)ds$. Последний интеграл > 0 — в нём $sp(s)$ является непрерывной функцией, положительной на $(0, 1)$. Обозначив этот интеграл через b, получаем, что

$$\int_0^1 p(s)(\psi(x + sh) - \psi(x))ds \geqslant abh,$$

а это никак не $o(h)$.

Рассуждение, относящееся к $\Lambda_{\text{пр}}(x, \psi)$, аналогично.

б). Пусть $f \in C^n[a, b]$ (т.е. f задана на отрезке $[a, b]$ и во всех его точках имеет n непрерывных производных $f^{(i)}$, $i = 1, \ldots, n$), причём $f(a) = f'(a) = \ldots = f^{(n-1)}(a) = 0$. Тогда

$$f(x) = \int_a^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(t)dt. \tag{51}$$

Я знаю три доказательства. Первое — непосредственная проверка. Это всего короче, но остаётся чувство неудовлетворённости, потому что формула (51) берётся "с потолка". Второе - изменения порядка интегрирования в формулах

$$f^{(n-1)}(x) = \int_a^x f^{(n)}(t_1)dt_1, \quad f^{(n-2)}(x) = \int_a^x dt_2 \int_a^{t_2} f^{(n)}(t_1)dt_1,$$

$$f^{(n-3)}(x) = \int_a^x dt_3 \int_a^{t_3} dt_2 \int_a^{t_2} f^{(n)}(t_1)dt_1, \ldots,$$

в результате чего интегралы преобразуются в однократные, последним из которых оказывается интеграл в (51). Это "понятнее", но всё-таки то, что при этом всё так хорошо получается, оставляет впечатление некоторой загадочности. Третье доказательство основано на формуле (41) для решения дифференциального уравнения $\dot{x} = Ax + \varphi(t)$. Образуем вектор-столбец y с координатами $y_i = f^{(i)}$, $i = 0, \ldots, n-1$. Тогда $\dot{y} = Jy + \varphi(t)$, где J — нильпотентная матрица

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix},$$

а φ — вектор-столбец, последняя координата которого (при нашей нумерации координат, начинающейся с 0, это φ_{n-1}) равна $f^{(n)}$, а остальные координаты равны нулю. Используем формулу (41), заметив, что в данном случае $y(a) = 0$, а коэффициенты матрицы e^{Jt} суть многочлены от t (какие?).

Обратно, если $g \in C[a,b]$, то функция

$$f(x) = \int_a^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} g(t)dt$$

— класса C^n. Это можно проверить непосредственным дифференцированием, но можно сослаться и на то, что это — "нулевая" координата решения дифференциального уравнения $\dot{y} = Jy + \varphi$, где у вектора-столбца φ последняя координата равна g, а остальные координаты нулевые. Определение решения непосредственно даёт только непрерывную дифференцируемость y, но в данном случае, когда $y_i' = y_{i+1}$ при $i < n-1$ и $y_{n-1}' = g$, координата y_0 имеет n непрерывных производных, причём $y_0^{(n)} = g$.

в). **Доказательство теоремы 9**. Если условие теоремы выполняется при некотором n, то оно выполняется при любом меньшем n. При $n = 0$ она очевидна (ничего не утверждается, кроме уже известной нам непрерывности f), при этом получается, что $\alpha_0(x) = f(x)$. При $n = 1$ из

$$f(x+h) = \alpha_0(x) + \alpha_1(x)h + o(h) = f(x) + \alpha_1(x)h + o(h)$$

следует, что f дифференцируема в точке x и $\alpha_1(x) = f'(x)$ (ссылаемся прямо на определение дифференцируемости и производной; непрерывная зависимость $\alpha_1(x)$ от x здесь не используется). Далее проводим рассуждение по индукции. Опишем шаг индукции "$n \Longrightarrow n+1$". Если условие теоремы выполняется с заменой n на $n+1$, то оно выполняется и для n, а тогда, по предположению индукции, $f \in C^n[a,b]$. Можно считать, что $f(a) = f'(a) = \ldots = f^n(a) = 0$, — ведь это так для разности f и подходящего многочлена от x n-ой степени, которую мы снова обозначим через f; для этой разности по-прежнему $f(x+h)$ представляется в виде суммы многочлена от h $(n+1)$-ой степени и остаточного члена порядка $o(h^{n+1})$. Итак, нам дано, что при всех $x \in [a,b]$

$$f(x+h) = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{\alpha_k(x)}{k!} h^k + o(h^{n+1})$$

с некоторыми (новыми) непрерывными $\alpha_k(x)$, что $f \in C^n[a,b]$ и что $f(a) = f'(a) = \ldots = f^n(a) = 0$.

Положим

$$\varphi(x) = \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} \alpha_{n+1}(t)dt, \quad g = f - \varphi.$$

Тогда, как мы видели в б), $\varphi \in C^{n+1}[a,b]$, $\varphi(a) = \varphi'(a) = \ldots = \varphi^n(a) = 0$. Что же до g, то

$$g \in C^n[a,b] \quad \text{и } g(a) = g'(a) = \ldots = g^{(n)}(a) = 0; \tag{52}$$

мы хотим доказать, что у g имеется и $(n+1)$-ая производная, которая непрерывна. Вычитая друг из друга формулы

$$f(x+h) = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{\alpha_k(x)}{k!} h^k + o(h^{n+1})$$

и

$$\varphi(x+h) = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{\varphi^k(x)}{k!} h^k + o(h^{n+1}),$$

получим аналогичное представление для $g(x+h)$. Оно имеет следующую особенность: поскольку $\varphi^{(n+1)}(x) = \alpha_{n+1}(x)$, то в нём нет слагаемого с h^{n+1} (а тем не менее остаточный член имеет порядок $o(h^{n+1})$ — мы сыграем на этом подозрительном факте). Получается, что

$$g(x+h) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\beta_k(x)}{k!} h^k + o(h^{n+1})$$

с некоторыми непрерывными $\beta_k(x)$ (они являются разностями $\alpha_k - \varphi^{(k)}$ непрерывных функций). А так как $g \in C^n[a,b]$, то $\beta_k = g^{(k)}$ (единственность многочлена Тейлора n-го порядка для функции с n производными. Мы ещё раз используем, что $o(h^{n+1})$ — это также и $o(h^n)$.) Итак,

$$g(x+h) = \sum_{k=0}^{n} \frac{g^{(k)}(x)}{k!} h^k + o(h^{n+1}). \tag{53}$$

Ввиду б) и (52),

$$g(x) = \int_a^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} g^{(n)}(t)dt. \tag{54}$$

Отсюда для производных от g порядка $k = 1, \ldots, n-1$

$$g^{(k)}(x) = \int_a^x \frac{(x-t)^{n-1-k}}{(n-1-k)!} g^{(n)}(t)dt.$$

(Можно либо продифференцировать (54), либо использовать (51) для $f = g^k$, заменив n на $n - k - 1$.) Подставим эти выражения для производных в тейлоровский многочлен, фигурирующий в (53):

$$\sum_{k=0}^{n} g^{(k)}(x)\frac{h^k}{k!} = \sum_{k=0}^{n-1}\int_a^x \frac{(x-t)^{n-1-k}}{(n-1-k)!}g^{(n)}(t)dt\frac{h^k}{k!} + g^{(n)}(x)\frac{h^n}{n!} =$$

$$= \int_a^x \left(\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(x-t)^{n-1-k}}{(n-1-k)!}\frac{h^k}{k!}\right) g^{(n)}(t)dt + g^{(n)}(x)\frac{h^n}{n!}.$$

Сумма, стоящая в скобках, равна

$$\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(x-t)^{n-1-k}h^k}{(n-1-k)!k!} = \frac{1}{(n-1)!}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(n-1)!}{(n-1-k)!k!}(x-t)^{n-1-k}h^k =$$

$$= \frac{1}{(n-1)!}\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{n-1-k}(x-t)^{n-1-k}h^k = \frac{1}{(n-1)!}(x-t+h)^{n-1},$$

и, значит, интеграл, в котором подынтегральное выражение содержит эту сумму, равен

$$\int_a^x \frac{1}{(n-1)!}(x-t+h)^{n-1}g^{(n)}(t)dt.$$

Итак, тейлоровский многочлен, фигурирующий в (53),

$$\sum_{k=0}^{n} g^{(k)}(x)\frac{h^k}{k!} = \int_a^x \frac{1}{(n-1)!}(x-t+h)^{n-1}g^{(n)}(t)dt + \frac{h^n}{n!}g^{(n)}(x),$$

так что

$$g(x+h) = \int_a^x \frac{1}{(n-1)!}(x-t+h)^{n-1}g^{(n)}(t)dt + \frac{h^n}{n!}g^{(n)}(x) + o(h^{n+1}).$$

С другой стороны, ввиду (54)

$$g(x+h) = \int_a^{x+h}\frac{(x+h-t)^{n-1}}{(n-1)!}g^{(n)}(t)dt.$$

Значит,

$$\int_x^{x+h}\frac{(x+h-t)^{n-1}}{(n-1)!}g^{(n)}(t)dt = \frac{h^n}{n!}g^{(n)}(x) + o(h^{n+1}).$$

Наконец,
$$\int_x^{x+h} \frac{(x+h-t)^{n-1}}{(n-1)!}dt = \int_0^h \frac{s^{n-1}}{(n-1)!}ds = \frac{h^n}{n!},$$
поэтому, перенеся $\frac{h^n}{n!}g^{(n)}(x)$ в левую часть и заменив $\frac{h^n}{n!}$ интегралом, приходим к выводу, что
$$\int_x^{x+h} \frac{(x+h-t)^{n-1}}{(n-1)!}(g^{(n)}(t) - g^{(n)}(x))dt = o(h^{n+1}).$$

Знаменатель $(n-1)!$ в последнем интеграле можно опустить - всё равно это будет $o(h^{n+1})$. Замена $t = x + sh, \quad s \in [0,1]$ позволяет переписать этот интеграл как
$$\int_0^1 h^{n-1}(1-s)^{n-1}(g^{(n)}(x+sh) - g^{(n)}(x))hds =$$
$$= h^n \int_0^1 (1-s)^{n-1}(g^{(n)}(x+sh) - g^{(n)}(x))ds.$$
Это равно $o(h^{n+1})$, т.е.
$$\int_0^1 (1-s)^{n-1}(g^{(n)}(x+sh) - g^{(n)}(x))ds = o(h).$$

Согласно следствию из леммы, приведённой в а), отсюда вытекает, что $g^{(n)} = \text{const}$.

Замечание. По ходу доказательства теоремы мы фактически получили и использовали равенство
$$\sum_{k=0}^{n-1} g^{(k)}(x)\frac{h^k}{k!} = \int_0^x \frac{(x+h-t)^{n-1}}{(n-1)!}g^{(n)}(t)dt, \tag{55}$$
которые выглядит несколько загадочно. Следующее рассуждение если не вполне ликвидирует, то по крайней мере уменьшает эту загадочность.

Считая x фиксированным, введём функции
$$\overline{g}_n(u) = \begin{cases} g^{(n)}(u) & \text{при } u \leqslant x, \\ 0 & \text{при } u > x. \end{cases} \qquad \overline{g}(u) = \int_a^u \frac{(u-t)^{(n-1)}}{(n-1)!}\overline{g}_n(t)dt.$$

Функция $\overline{g}(u) \in C^{n-1}[a,b]$ и имеет n-ую производную в точках $u \neq x$, которая равна $\overline{g}_n(u)$, непрерывна на $[a,x)$ и $(x,b]$, а в точке $u = x$ претерпевает разрыв первого рода (т.е. существуют пределы $\lim_{u\to x,\ u<x} \overline{g}^{(n)}(u)$ и $\lim_{u\to x,\ u>x} \overline{g}^{(n)}(u)$). Это можно проверить путём непосредственного исследования выражения для $\overline{g}$, но мне кажется, что это будет более прозрачным, если пересмотреть с этой точки зрения рассуждения в б), связанные с дифференциальными уравнениями. Начинать, естественно, надо с п.5, а1). Если в системе $\dot{x} = Ax + \varphi(t)$ вектор-функция φ имеет в точке $t = c$ разрыв первого рода, то решение этой системы понимается как непрерывная функция $x(t)$, которая при $t \neq c$ дифференцируема и удовлетворяет данной системе. При $t = c$ её производная по t имеет пределы слева и справа $\dot{x}(t \mp 0)$, которые равны её односторонним левой и правой производным и для которых $\dot{x}(t \mp 0) = Ax(c) + \varphi(c \mp 0)$. Это решение по-прежнему даётся формулой (41) или её аналогом с начальным значением при $t = a$, в чём легко убедиться, заново просмотрев её вывод. Мы используем (41) с $A = J$ и

$$\varphi(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ \overline{g}_n(t) \end{pmatrix}$$

(кроме того, неизвестная теперь обозначена через y, роль f играет $\overline{g}$, а роль c — момент времени x). У φ только последняя координата разрывна при $t = x$. Поэтому при $k < n-1$ производные координат y_k вектор-функции y непрерывны также и в точке $t = x$, а ведь $y_k = \overline{g}^k$. Отсюда и получается, что $\overline{g} \in C^{n-1}[a,b]$, а утверждение о поведении $\overline{g}^{(n)}$ явствует просто из того, что $\overline{g}^{(n)}(t) = \overline{g}_n(t)$ при $t \neq x$.

$\overline{g}^{(n)}(t) = 0$ при $t > x$, так что при $h > 0$ функция $h \mapsto \overline{g}(x+h)$ является многочленом $(n-1)$-ой степени от h. Его производные по h при $h = 0$ суть $\overline{g}^{(k)}(x) = g^{(k)}(x)$. Значит, при $h > 0$

$$\overline{g}(x+h) = \sum_{k=0}^{n-1} g^{(k)}(x) \frac{h^k}{k!}.$$

А с другой стороны,

$$\overline{g}(x+h) = \int_x^{x+h} \frac{(x+h-t)^{n-1}}{(n-1)!} \overline{g}_n(t)dt = \int_0^x \frac{(x+h-t)^{n-1}}{(n-1)!} g^{(n)}(t)dt,$$

поскольку $\overline{g}_n(t) = 0$ при $t > x$ и $\overline{g}_n(t) = g^{(n)}(t)$ при $t < x$. Приравнивая друг к другу полученные выражения для $\overline{g}(x+h)$, мы приходим к (55) (сперва при $h > 0$, а затем и при всех h, поскольку речь идёт о равенстве двух многочленов от h).

8. Обратная теорема Тейлора для функции нескольких переменных.

Теорема 10. Пусть f — непрерывная функция, заданная в области $U \subset \mathbb{R}^k$, и пусть при всех $x \in U$ $f(x+h)$ представляется в виде суммы некоторого многочлена от $h = (h_1, \dots, h_k)$ порядка n и "остаточного члена" порядка $o(|h|^n)$ (коэффициенты многочлена и остаточный член зависят от x, что для этих коэффициентов явно указывается в обозначениях, а для остаточного члена — нет):

$$f(x+h) = \sum_{\substack{i_1+\ldots+i_k \leqslant n \\ 0 \leqslant i_1, \ldots, i_k \leqslant n}} \frac{1}{i_1! \ldots i_k!} \alpha_{i_1 \ldots i_k}(x) h_1^{i_1} \ldots h_k^{i_k} + o(|h|^n). \tag{56}$$

Если $\alpha_{i_1 \ldots i_k}(x)$ являются непрерывными функциями от x, то $f \in C^n(U)$ (т.е. f во всех точках области U имеет все частные производные вплоть до n-го порядка и эти производные непрерывны.)

Как известно, если частные производные непрерывны, то дифференцирования по различным переменным x_i можно выполнять в произвольном порядке. Это позволяет записывать частные производные $\frac{\partial^{i_1+\ldots+i_k} f}{\partial x_1^{i_1} \ldots \partial x_k^{i_k}}$ (вплоть до n-го порядка) таким образом, что мы указываем: i_1 раз осуществляется дифференцирование по x_1, …, i_k раз — по x_k, и не указываем, в каком порядке осуществляются эти дифференцирования. Известно также, что в этом случае возле любой точки $x \in U$

$$f(x+h) = \sum_{\substack{i_1+\ldots+i_k \leqslant n \\ 0 \leqslant i_1, \ldots, i_k \leqslant n}} \frac{1}{i_1! \ldots i_k!} \frac{\partial^{i_1+\ldots+i_k} f(x)}{\partial x_1^{i_1} \ldots \partial x_k^{i_k}} h_1^{i_1} \ldots h_k^{i_k} + o(|h|^n).$$

В записи (56) коэффициенты $\alpha_{i_1 \ldots i_k}$ многочлена, дающего приближённое представление для $f(x+h)$, написаны с множителями $\frac{1}{i_1! \ldots i_k!}$. Это, в общем, несущественно, но при таких множителях возникает аналогия между этими коэффициентами и частными производными (каковыми эти коэффициенты в конце-концов и оказываются).

В условиях теоремы на любой прямой $L = \{x = a + bt\}$ (точнее, на той части L, которая лежит в U) f как функция от t удовлетворяет условиям одномерного случая этой теоремы (т.е. теоремы 9). Действительно, считая, что вектор b имеет координаты b_i, давая t “приращение” s и применяя условие теоремы 10 к $x = a + bt,\ h = bs$, получаем

$$f(a+bt+bs) = \sum_{j=0}^{n} \sum_{\substack{i_1+\ldots+i_k=j \\ 0\leqslant i_1,\ldots,i_k\leqslant n}} \frac{1}{i_1!\ldots i_k!}\alpha_{i_1\ldots i_k}(a+bt)b_1^{i_1}\ldots b_k^{i_k}s^j + o(|s|^n),$$

так что для функции $\varphi(t) = f(a + bt)$ выполняется условие теоремы 9 (с очевидными изменениями в записи):

$$\varphi(t+s) = \sum_{j=0}^{k} \frac{1}{j!}\alpha_j(t)s^j + o(|s|^n), \tag{57}$$

где теперь

$$\alpha_j(t) = \sum_{\substack{i_1+\ldots+i_k=j \\ 0\leqslant i_1,\ldots,i_k}} \frac{1}{i_1!\ldots i_k!}\alpha_{i_1\ldots i_k}(a+bt)b_1^{i_1}\ldots b_k^{i_k}. \tag{58}$$

Теорема 9 гарантирует C^n-гладкость ограничения (сужения) $f|L$ функции f на любую прямую L. Но, как известно, одного этого ещё не достаточно для C^n-гладкости f в U, что явствует хотя бы из примеров

$$f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}, \qquad g(x,y) = \frac{x^2y}{x^2+y^2}.$$

Вне начала координат обе эти функции — гладкие класса C^∞, так что гладкость $f|L$ на прямых L, не проходящих через начало, обеспечена. На проходящей через $(0,0)$ прямой $x = at,\ y = bt$

$$f(at,bt) = \frac{ab}{a^2+b^2}, \qquad g(at,bt) = \frac{abt}{a^2+b^2}.$$

Левая функция от t постоянна, правая является линейной — обе они класса C^∞. Но когда $a = 0$ или $b = 0$, то $f(at, bt) = 0$, а когда $a = b \neq 0$, то $f(a,b) = \frac{1}{2}$. Таким образом, гладкость всевозможных ограничений $f|L$ не гарантирует даже непрерывности f. Непрерывность можно было бы привлечь как дополнительное условие на f (выполняющееся в условиях теоремы 10 — ведь $f(x) = \alpha_{0,\ldots,0}(x)$, а коэффициенты $\alpha_{i_1\ldots i_k}(x)$ предполагаются непрерывными по x), но это не спасло бы положения: функция $g(x,y)$, доопределённая как 0 в точке $(0,0)$, непрерывна (ибо $|x^2y| =\leqslant (x^2+y^2)|y|$, так что $|g(x,y)| \leqslant |y| \to 0$ при $(x,y) \to (0,0)$), а её производная Гато в нуле есть $(a,b) \mapsto \frac{ab}{a^2+b^2}$, что не является линейной функцией от (a,b).

Однако, как мы увидим, в условиях теоремы 10 можно ещё утверждать, что производные $\frac{d^j(a+bt)}{dt^j}$, $j = 0,1,\ldots,n$, выражаются через непрерывные в U функции $\alpha_{i_1\ldots i_k}$ согласно формуле (59) ниже, и этого оказывается уже достаточно.

Лемма. Пусть в области $U \subset \mathbb{R}^n$ задана функция f, ограничение которой на любую прямую $L = \{x = a + bt\}$ (точнее, на $U \cap L$) является гладкой функцией класса C^n на этой прямой, причём в U существуют такие непрерывные функции $\alpha_{i_1\ldots i_k}(x)$ (индексы пробегают неотрицательные целые числа, для которых $i_1 + \ldots + i_k \leqslant n$), что на любой прямой $L = \{x = a + bt\}$, где $b = (b_1, \ldots, b_k)$,

$$\frac{d^j f(a+bt)}{dt^j} = \sum_{\substack{i_1+\ldots+i_k=j \\ 0\leqslant i_1,\ldots,i_k}} \frac{j!}{i_1!\ldots i_k!}\alpha_{i_1\ldots i_k}(a+bt) b_1^{i_1}\ldots b_k^{i_k}. \tag{59}$$

Тогда f — гладкая функция класса C^n в U.

Лемма $\Longrightarrow$ теорема. Действительно, мы уже знаем, что в условиях теоремы $f|L$ — гладкая функция класса C^n, поэтому для $\varphi(t) = f(a+bt)$ по прямой теореме Тейлора справедлива формула (49) с независимой переменной t вместо x, её приращением s вместо h и с $\frac{d^j(a+bt)}{dt^j}$ вместо $\alpha_j(t)$ (бывшего $\alpha_j(x)$). С другой стороны, для той же $\varphi(t)$ имеет место формула (57). Но если два многочлена от s степени n совпадают с точностью до $o(|s|^n)$, то эти многочлены полностью совпадают — у них одинаковые коэффициенты. Поэтому

$$\frac{d^j f(a+bt)}{dt^j} = \alpha_j(t) = \text{ правая часть (58)},$$

а это и есть формула (59). Теперь лемма обеспечивает C^n-гладкость f.

Мы будем пользоваться часто применяемым в теории уравнений с частными производными приёмом “осреднения” или “сглаживания” путём свёртывания с колоколообразным ядром. Возьмём какую-нибудь функцию $K(r) \in C^\infty([0,\infty])$, для которой всюду $K(r) \geqslant 0$, $K(r) = 0$ вне отрезка $[0,1]$ и $K(r) = 1$ возле $r = 0$. Если F — какая-нибудь непрерывная функция, заданная в некоторой области V пространства $\mathbb{R}^k$, то через F^ε будем обозначать функцию

$$F^\varepsilon(x) = \frac{1}{A\varepsilon^k} \int_{\mathbb{R}^k} K\left(\frac{|x-y|}{\varepsilon}\right) F(y)dy, \tag{60}$$

где $A = \int_{\mathbb{R}^k} k(|x|)dx$. Оба последних интеграла — k-кратные, dx служит сокращённым обозначением для $dx_1 \dots dx_k$. В (60) подинтегральное выражение формально определено не всюду, но мы, естественно, считаем его нулём, если $K\left(\frac{|x-y|}{\varepsilon}\right) = 0$, так что на самом деле интегрирование при каждом x ведётся по шару $|y-x| \leqslant \varepsilon$. Поэтому данный интеграл определён при тех $x \in V$, которые отстоят от границы V более чем на ε, т.е. для которых $U_\varepsilon(x) \subset \operatorname{clos} V$. Множество таких x иногда условно обозначают через $V_{-\varepsilon}$. Это открытое множество, но не обязательно связное. С уменьшением ε оно увеличивается, и любая точка области V попадает в $V_{-\varepsilon}$ при всех достаточно малых ε (именно, когда ε меньше расстояния от x до границы V).

Приём "осреднения" или "сглаживания" путём свёртывания с колоколообразным ядром широко применяется в теории уравнений с частными производными (УрЧП). Если бы я был уверен, что читатель встречался с ним в соответствующем общеобязательном курсе, то здесь было бы достаточно только напомнить формулировку нескольких простых свойств осреднения, которые используются в теории УрЧП и которые нам тоже понадобятся. Но курс УрЧП не настолько стандартизирован, чтобы тут можно было быть уверенным. Поэтому я не только сформулирую, но и докажу нужные нам факты об осреднении.

Первый из них состоит в том, что при $\varepsilon \to 0$ осреднённая функция F^ε сходится к исходной функции F, причём сходимость является равномерной на каждом компактном подмножестве C области U. (Заметим, что расстояния точек C до границы U ограничены снизу некоторым положительным числом, так что C целиком содержится в множествах $V_{-\varepsilon}$ с достаточно малыми ε, и соответствующие F^ε определены на C.) Действительно, мы хотим доказать, что

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \quad |F^\delta(x) - F(x)| < \varepsilon \quad \text{во всех точках } x \in C.$$

Пусть $\delta > 0$ столь мало, что $|F(x) - F(y)| \leqslant \varepsilon$ при $x \in C, |x-y| < \delta$.

Поскольку $\frac{1}{\varepsilon^k A}\int K\left(\frac{|x-y|}{\varepsilon^k}\right)dy = 1$, то

$$F^\varepsilon(x) - F(x) = \frac{1}{\varepsilon^k A}\int K\left(\frac{|x-y|}{\varepsilon^k}\right)(F(y) - F(x))dy,$$

причём интегрирование фактически ведётся по шару $U_\varepsilon(x)$. В этом шаре всюду $|F(y) - F(x)| \leqslant \varepsilon$, поэтому

$$|F^\delta(x) - F(x)| < \frac{1}{\varepsilon^k A}\int K\left(\frac{|x-y|}{\varepsilon^k}\right)\varepsilon dy = \varepsilon,$$

так что и в самом деле на C при $\varepsilon \to 0$ имеет место равномерная сходимость $F^\varepsilon \rightrightarrows F$.

Далее, надо отметить некоторые свойства гладкости осреднённой функции F^ε. Их два — одно относится к общему случаю (когда F всего лишь непрерывна), другое — к тому случаю, когда осредняемая функция F сама имеет некоторые свойства дифференцируемости.

$K\left(\frac{|x-y|}{\varepsilon}\right)$ является бесконечно дифференцируемой функцией от x. В небольшом пояснении нуждается только дифференцируемость при $x = y$, потому что K зависит от $|x-y|$, а функция $|x-y|$ не дифференцируема при $x = y$. Однако при малых $|x-y|$ функция $K\left(\frac{|x-y|}{\varepsilon}\right)$ постоянна. Итак, подинтегральное выражение в (60) бесконечно дифференцируемо по x и его производные непрерывны по x. Интегрирование же фактически осуществляется в конечных пределах. Хорошо известно (и легко доказывается), что такой интеграл является бесконечно дифференцируемой функцией от x и что производная

$$\frac{\partial}{\partial x_i}F^\varepsilon(x) = \frac{1}{A\varepsilon^k}\int \frac{\partial}{\partial x_i}K\left(\frac{|x-y|}{\varepsilon}\right)F(y)dy.$$

Кроме того, так как $\frac{\partial}{\partial x_i}|x-y| = -\frac{\partial}{\partial y_i}|x-y|$, не считая точек (x, y) с $x = y$, то

$$\frac{\partial}{\partial x_i}F^\varepsilon(x) == -\frac{1}{A\varepsilon^k}\int \frac{\partial}{\partial y_i}K\left(\frac{|x-y|}{\varepsilon}\right)F(y)dy.$$

В том случае, когда $F(x)$ всюду в U имеет частную производную $\frac{\partial}{\partial x_i}F$, непрерывную по x, можно осуществить интегрирование по частям, подразумевая, что интегрирование осуществляется в конечных (но достаточно больших) пределах. Внеинтегральный член равен нулю, ибо там

$KF = 0$, и получается, что в $V_{-\varepsilon}$

$$\frac{\partial}{\partial x_i} F^\varepsilon(x) = \frac{1}{A\varepsilon^k} \int K\left(\frac{|x-y|}{\varepsilon}\right) \frac{\partial}{\partial y_i} F(y)dy = \left(\frac{\partial}{\partial x_i} F(x)\right)^\varepsilon. \tag{61}$$

Если же F всюду в U имеет какую-нибудь частную производную более высокого порядка, непрерывную по x, то та же частная производная от F^ε совпадает с результатом осреднения этой частной производной от F (применяем несколько раз равенство $\frac{\partial}{\partial x_i} F^\varepsilon(x) = \left(\frac{\partial}{\partial x_i} F(x)\right)^\varepsilon$).

И, наконец, посмотрим, как отражаются на осреднении некоторые специальные замены переменных. Пусть $B = (b_{ij})$ — ортогональная матрица k-го порядка с определителем 1. Сделаем замену переменных $x = Bu$ (в терминах координат $x_i = \sum_j b_{ij} u_j$). При этом функция $F(x)$ оказывается функцией от u: это есть функция $G(u) = F(Bu)$, короче $G = F \circ B$. Она определена в $B^{-1}(U)$. К ней можно применить то же самое осреднение посредством свёртки с тем же самым колоколообразным ядром, что и к F. Результаты осреднения F и G связаны простой формулой

$$(F \circ B)^\varepsilon = F^\varepsilon \circ B. \tag{62}$$

Действительно, $(F^\varepsilon \circ B)(u) = \frac{1}{A\varepsilon^k} \int K\left(\frac{|Bu-y|}{\varepsilon}\right) F(y)dy$. Сделаем замену переменной интегрирования $y = Bz$. Это преобразование сохраняет объём (формально: якобиан y по z равен 1), так что

$$(F^\varepsilon \circ B)(u) = \frac{1}{A\varepsilon^k} \int K\left(\frac{|Bu - Bz|}{\varepsilon}\right) F(Bz)dz.$$

А $|Bu - Bz| = |u - z|$ (B сохраняет длины векторов). Итак,

$$(F^\varepsilon \circ B)(u) = \frac{1}{A\varepsilon^k} \int K\left(\frac{|u-z|}{\varepsilon}\right) F(Bz)dz = (F \circ B)^\varepsilon(u).$$

Если бы мы знали, что остаточный член в (56) имеет порядок $o(|h|^n)$ равномерно по x, мы могли бы легко доказать теорему 10, не прибегая к лемме (и не делая замен координат). Мы просто осреднили бы по x левую и правую стороны (56) и получили бы

$$f^\varepsilon(x+h) = \sum_{\substack{i_1+\ldots+i_k \leqslant n \\ 0 \leqslant i_1,\ldots,i_k \leqslant n}} \frac{1}{i_1! \ldots i_k!} \alpha^\varepsilon_{i_1\ldots i_k}(x) h_1^{i_1} \ldots h_k^{i_k} + o(|h|^n).$$

В то же время ввиду бесконечной дифференцируемости функции f^ε, для неё имеет место прямая (обычная) теорема Тейлора, дающая точно такое же представление для $f(x+h)$, только с частными производными $\frac{\partial^{i_1+\ldots+i_k}}{\partial x_1^{i_1}\ldots\partial x_k^{i_k}} f^\varepsilon(x)$ вместо $\alpha^\varepsilon_{i_1\ldots i_k}(x)$. Сопоставив эти две формулы, мы могли бы заключить, что

$$\frac{\partial^{i_1+\ldots+i_k}}{\partial x_1^{i_1}\ldots\partial x_k^{i_k}} f^\varepsilon(x) = \alpha^\varepsilon_{i_1\ldots i_k}(x).$$

Отсюда уже легко прийти к выводу о надлежащей гладкости f (см. упражнения в самом конце настоящего п.).

Однако в теореме 10 нет условия равномерной малости остаточного члена. А тогда непонятно, получается ли при его осреднении величина порядка $o(|h|^n)$, и приведённое рассуждение не проходит. Мы пойдём другим путём, при котором осредняться будут равенства, которые вообще не содержат остаточных членов. Именно таким является равенство (59) в лемме. Само по себе оно касается только некоторой функции от t, и осреднять тут нечего, но мы перейдём от него к равенству, выполняющемуся не на прямой, а в области пространства $\mathbb{R}^k$, которое и подвергнем осреднению.

Итак, займёмся доказательством леммы. Из её условий следует, что когда $u_2,\ldots,u_k$ фиксированы, то функция $g(u) = (f\circ B)(u_1,u_2,\ldots,u_k)$ является гладкой функцией от u_1 класса C^n и

$$\frac{\partial^j g(u)}{\partial u_1^j} = \frac{\partial^j (f\circ B)}{\partial u_1^j} = \sum_{i_1+\ldots+i_k=j} \frac{j!}{i_1!\ldots i_k!}(\alpha_{i_1\ldots i_k}\circ B)(u) b_{11}^{i_1}\ldots b_{k1}^{i_k} \quad \text{при } j=0,\ldots,n. \tag{63}$$

В самом деле, когда из всех u_i изменяется только u_1, то $x = Bu$ изменяется на прямой $a + bu_1$, где $a = B(0,u_2,\ldots,u_k)$, а вектор b совпадает с первым столбцом матрицы B. Таким образом, изменение $f(Bu)$ при этом — это изменение f вдоль прямой $L = \{x = a+bt\}$, как в лемме, только параметр t вдоль прямой теперь обозначен через u_1. Мы видим, что производные $\frac{\partial^j(f\circ B)}{\partial u_1^j}$ — это записанные в других обозначениях производные $\frac{d^j f(a+bt)}{dt^j}$, о которых нам дано, что они существуют и непрерывны в U (при $0\leqslant j\leqslant k$), а (63) — это формула (59), переписанная в других обозначениях.

Выше мы видели, что если функция F имеет всюду в области U частную производную $\frac{\partial}{\partial x_i}F(x)$, непрерывную по x, то операции дифференцирования и осреднения перестановочны согласно (61) и что аналогичная перестановочность дифференцирования и осреднения имеет место и для какой-нибудь частной производной более высокого порядка, если она существует и непрерывна всюду в U. Применив это к функции $F = g = f \circ B$ (для которой роль области U играет V), заключаем, что при $0 \leqslant j \leqslant k$

$$\left(\frac{\partial^j g}{\partial u_1^j}\right)^{\varepsilon} = \frac{\partial^j g^{\varepsilon}}{\partial u_1^j}.$$

Ввиду (62), можно ещё добавить, что эта производная равна $\frac{\partial^j (f^{\varepsilon} \circ B)}{\partial u_1^j}$.

Осредняя по u обе стороны равенства (63) и используя, что $(\alpha_{\ldots} \circ B)^{\varepsilon} = \alpha_{\ldots}^{\varepsilon} \circ B)$, имеем

$$\left(\frac{\partial^j g}{\partial u_1^j}\right)^{\varepsilon} == \sum_{\substack{i_1+\ldots+i_k=j\\ 0\leqslant i_1,\ldots,i_k}} \frac{j!}{i_1!\ldots i_k!}(\alpha_{i_1\ldots i_k}^{\varepsilon} \circ B) b_{11}^{i_1}\ldots b_{k1}^{i_k}.$$

Но $\left(\frac{\partial^j g}{\partial u_1^j}\right)^{\varepsilon} = \frac{\partial^j (f^{\varepsilon} \circ B)}{\partial u_1^j}$, так что

$$\frac{\partial^j (f^{\varepsilon} \circ B)}{\partial u_1^j} = \sum_{\substack{i_1+\ldots+i_k=j\\ 0\leqslant i_1,\ldots,i_k}} \frac{j!}{i_1!\ldots i_k!}(\alpha_{i_1\ldots i_k}^{\varepsilon} \circ B) b_{11}^{i_1}\ldots b_{k1}^{i_k}. \tag{64}$$

В то же время f^{ε} — бесконечно гладкая функция (определённая возле рассматриваемой точки $x \in U$, если ε достаточно мало). А вообще для любой бесконечно гладкой функции Φ

$$\frac{\partial^j (\Phi \circ B)}{\partial u_1^j} = \sum_{\substack{i_1+\ldots+i_k=j\\ 0\leqslant i_1,\ldots,i_k}} \frac{j!}{i_1!\ldots i_k!} \frac{\partial^j (\Phi \circ B)}{\partial x_1^{i_1}\ldots \partial x_k^{i_k}} b_{11}^{i_1}\ldots b_{k1}^{i_k} =$$

$$= \sum_{\substack{i_1+\ldots+i_k=j\\ 0\leqslant i_1,\ldots,i_k}} \frac{j!}{i_1!\ldots i_k!} \left(\frac{\partial^j \Phi}{\partial x_k^{i_k}} \circ B\right) b_{11}^{i_1}\ldots b_{k1}^{i_k}. \tag{65}$$

По сути дела, мы это уже получили, хотя, может быть, несколько косвенным образом и не совсем явно. Согласно прямой теореме Тейлора, для

$\Phi(x+h)$ имеет место представление в виде многочлена Тейлора по степеням $h_1,\dots,h_k$. Оно аналогично (56), только вместо $\alpha_{i_1\dots i_k}(x)$ в нём стоят $\beta_{i_1\dots i_k}(x) = \frac{\partial^{i_1+\dots+i_k}\Phi(x)}{\partial x_1^{i_1}\dots\partial x_k^{i_k}} h_1^{i_1}\dots h_k^{i_k}$. Мы видели, что уже из существования такого представления с непрерывными по x коэффициентами следует, что производные по t функции $\Phi(a+bt)$ выражаются согласно (59) через коэффициенты многочлена Тейлора функции $\Phi(x)$ и координаты b_i вектора b, — в (59) этими коэффициентами были $\alpha_{i_1\dots i_k}$, а теперь ими являются $\beta_{i_1\dots i_k}(x)$ (равные некоторым частным производным функции Φ). Ради полноты напишем формулу для Φ:

$$\frac{d^j\Phi(a+bt)}{dt^j} = \sum_{\substack{i_1+\dots+i_k=j\\ 0\leqslant i_1,\dots,i_k}} \frac{j!}{i_1!\dots i_k!}\beta_{i_1\dots i_k}(a+bt) b_1^{i_1}\dots b_k^{i_k},$$

где теперь

$$\beta_{i_1\dots i_k}(x) = \frac{\partial^{i_1+\dots+i_k}\Phi}{\partial x_1^{i_1}\dots\partial x_k^{i_k}}.$$

Потом мы перешли к координатам u и отметили, что частные производные по u_1 — это всё те же производные по t функции $\Phi(a+bt)$ с $a = B(0,u_2,\dots u_k)$, $b = (b_{11},\dots,b_{k1})$ и с заменой t на u_1. Формула для $\frac{d^j\Phi(a+bt)}{dt^j}$ переписалась в виде

$$\frac{d^j\Phi(Bu)}{du_1^j} = \sum_{\substack{i_1+\dots+i_k=j\\ 0\leqslant i_1,\dots,i_k}} \frac{j!}{i_1!\dots i_k!}\beta_{i_1\dots i_k}(Bu) b_1^{i_1}\dots b_k^{i_k}.$$

А это и есть нужная нам формула (65), если вспомнить, что для Φ коэффициенты $\beta_{\dots}$ суть соответствующие производные.

Применительно к f^ε приходим к выводу, что

$$\frac{\partial^j(f^\varepsilon\circ B)}{\partial u_1^j} = \sum_{\substack{i_1+\dots+i_k=j\\ 0\leqslant i_1,\dots,i_k}} \frac{j!}{i_1!\dots i_k!}\frac{\partial^j(f^\varepsilon\circ B)}{\partial x_1^{i_1}\dots\partial x_k^{i_k}} b_{11}^{i_1}\dots b_{k1}^{i_k} =$$

$$= \sum_{\substack{i_1+\dots+i_k=j\\ 0\leqslant i_1,\dots,i_k}} \frac{j!}{i_1!\dots i_k!}\left(\frac{\partial^j f^\varepsilon}{\partial x_k^{i_k}}\circ B\right) b_{11}^{i_1}\dots b_{k1}^{i_k}.$$

Но мы уже имели некоторое выражение для той же производной — см. (64). Значит,

$$\sum_{\substack{i_1+\ldots+i_k=j\\ 0\leqslant i_1,\ldots,i_k}} \frac{j!}{i_1!\ldots i_k!}\left(\frac{\partial^j f^\varepsilon}{\partial x_k^{i_k}} - \alpha^\varepsilon_{i_1\ldots i_k}\right)(Bu)b_{11}^{i_1}\ldots b_{k1}^{i_k} = 0. \tag{66}$$

Bu может быть любой точкой x области U. Далее, ортогональная матрица B у нас могла быть произвольной. Элементами её первого столбца могут быть любые числа $b_{11},\ldots,b_{k1}$, сумма квадратов которых равна 1. Если мы умножим $b_{11},\ldots,b_{k1}$ одновременно на одно и то же число, то (66) не нарушится. А при этом из прежнего $b_{11},\ldots,b_{k1}$ получится произвольный набор k чисел, не все из которых равны нулю. Итак, при любых числах $t_1,\ldots,t_k$[30]

$$\sum_{\substack{i_1+\ldots+i_k=j\\ 0\leqslant i_1,\ldots,i_k}} \frac{j!}{i_1!\ldots i_k!}\left(\frac{\partial^j f^\varepsilon}{\partial x_k^{i_k}} - \alpha^\varepsilon_{i_1\ldots i_k}\right)(x)t_1^{i_1}\ldots t_k^{i_k} = 0.$$

У многочлена (по t_i), равного нулю при всех t_i, все коэффициенты нулевые. Окончательно получаем, что

$$\frac{\partial^j f^\varepsilon(x)}{\partial x_k^{i_k}} = \alpha^\varepsilon_{i_1\ldots i_k}(x) \qquad \text{при всех } x\in U \text{ и } 0\leqslant i_1+\ldots+i_k=j\leqslant n. \tag{67}$$

Упражнение. Пусть на отрезке (a,b) имеются непрерывные функции f и α, и пусть известно, что

$$\frac{df^\varepsilon}{dx} = \alpha^\varepsilon.$$

Покажите, что f — гладкая класса C^1 на (a,b). (Указание. Зафиксируйте какую-нибудь точку $x_0\in(a,b)$ и начните с того, что

$$f^\varepsilon(x) = f^\varepsilon(x_0) + \int_{x_0}^x \alpha^\varepsilon(x)dx.)$$

Упражнение. Выведите из (67), что $f\in C^n(U)$.

[30]Вначале — при любых числах $t_1,\ldots,t_k$, не все из которых равны нулю, но если все они равны нулю, то приводимое равенство тривиально.

§4. Тензоры.

Как и в §3, здесь речь идёт только о конечномерном случае. Я время от времени упоминаю о “многообразии”, но так как речь идёт о локальных понятиях, то в этом параграфе не нужно владеть общим понятием многообразия. Сейчас достаточно наглядно представлять себе только маленький “искривлённый кусочек” многообразия. Это k-мерный аналог (причём только локальный аналог) несомненно известных читателю понятий “гладкая дуга (кривая)”, “гладкая поверхность”. Такой k-мерный “кусочек”в $\mathbb{R}^n$ может быть задан с помощью гладкого отображения $u \mapsto x(u) \in \mathbb{R}^n$ некоторой области $U \subset \mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^n$, удовлетворяющего нескольким естественным условиям, при выполнении которых образ $M = x(U)$ естественно считать “k-мерным гладким многообразием”, а подробнее — “k-мерным гладким подмногообразием пространства $\mathbb{R}^n$”, можно уточнить: “локальным подмногообразием” (повторяю, что это — k-мерный аналог гладкой кривой или поверхности, причём только некоторого “кусочка” таковой[31]:

а). Мы требуем некоторой невырожденности отображения $u \mapsto x(u)$: матрица $\left(\frac{\partial x_i}{\partial u_j}\right)$ имеет наибольший возможный ранг, т.е. ранг k. (Кстати, при выполнении одного только этого условия говорят, что отображение $X : U \to \mathbb{R}^n$ является “иммерсией”, или “погружением”.)

б). Мы рассматриваем набор k чисел $U = (u_1, \dots, u_k)$ как “(криволинейные, локальные) координаты” точки $x(u)$ на M. Естественно, мы хотим, чтобы у точки был только один набор координат. Поэтому мы требуем, чтобы различным наборам $u \in U$ отвечали различные точки $x(u)$ [32].

---

[31] Окружность или сфера, рассматриваемые целиком, под данное определение не подпадают. Для “кусочка кривой” имеется специальное название — “простая дуга” или “простая кривая”, причём в данном случае ещё и гладкая. Для “кусочка поверхности” особого названия, кажется, нет; впрочем, в этом или близком контексте я встречал название “элемент поверхности”, однако употребляют его редко.

[32] Данное свойство отображения $x(\,.\,)$ — не обязательно гладкого отображения области одного евклидова пространства в другое, а какого угодно отображения $x : A \to B$ произвольных множеств, — называют его “инъективностью”. В этом случае говорят также, что $x(\,.\,)$ является “взаимно-однозначным отображением в” (подробнее — “взаимно-однозначным отображением A в B”). Предлог “в” указывает, что образ $x(A)$ может быть только частью B, как оно наверняка и будет в нашем случае (гладкое отображение области $U \subset \mathbb{R}^k$ в $\mathbb{R}^n$ при $k < n$). Если $x(A) = B$, то говорят, что отображение $x(\,.\,)$ “сюръективно”, а также что оно является “отображением на” (подробнее

в). Всё это ещё не исключает возможности "причудливого" поведения отображения x при приближении x к границе области U (даже при $k = 1$ и $n = 2$ — читатель может сам пофантазировать на эту тему). Простейший способ избежать этого — сказать, что U является подобластью некоторой бо́льшей области $V \subset \mathbb{R}^k$, что даже замыкание $\operatorname{clos} U \subset V$, что это замыкание компактно и что отображение $x(\,.\,)$ в действительности задано и является гладким на всей бо́льшей области V, и что условия а) и б) остаются в силе при замене U на V. Но так как все наши рассмотрения относятся к окрестности какой-нибудь точки $x(u^0)$, $u^0 \in U$, то в) для нас не особенно важно: начав с U и $x(\,.\,)$, удовлетворяющих а) и б), мы можем затем принять сколь угодно малую окрестность точки u^0 за новую область U, а прежнюю U — за V.

Наряду с координатами $u = (u_1, \ldots, u_k)$ в M мы можем пользоваться другими координатами $w = (w_1, \ldots, w_k)$, которые в окрестности интересующей нас точки гладко зависят от u и через которые, обратно, гладко выражаются координаты u. А так как окрестность рассматриваемой точки можно уменьшать, то фактически всё, что требуется от w — это чтобы в некоторой окрестности точки u^0 эти w были заданы как гладкие функции от $u: \quad w = w(u)$ и чтобы якобиан $\left|\frac{\partial w_i(u^0)}{\partial w_j}\right| \neq 0$. Выходит, что хотя мы и представляем себе при случае какую-то "изогнутый кусочек гладкой k-мерной поверхности" в $\mathbb{R}^n$, но наши координаты u, w и т.д. можно рассматривать просто как криволинейные координаты в $\mathbb{R}^k$, заданные возле какой-то фиксированной точки u^0. (Первоначальные координаты u были у нас стандартными декартовыми координатами в $\mathbb{R}^k$, только рассматриваемыми не во всём $\mathbb{R}^k$, а в U. Но мы не отдаём им предпочтения перед прочими координатами w — при переходе к M от этой их "декартовости" ничего не остаётся.)

— "отображением A на B").

9. Касательные и кокасательные векторы к гладкому многообразию. Их связь с производными и дифференциалами.

Касательный вектор к M в точке $p = x(u^0)$ можно представлять себе как обычный вектор ("направленный отрезок") в $\mathbb{R}^n$ с началом в точке p, который касается M в этой точке, т.е. лежит в касательной плоскости T_pM к M в точке p. Касательную плоскость можно определять геометрически или формально-аналитически. Геометрически T_pM определяется, например, как k-мерная плоскость в $\mathbb{R}^n$, проходящая через p и обладающая таким свойством: расстояние $r(q)$ от точки $q \in M$, близкой к p, до этой плоскости есть $o(|q-p|)$ — так сказать, M возле p отклоняется от T_pM всего менее (по сравнению с прочими k-мерными плоскостями, проходящими через p). Формально-аналитически T_pM определяется как плоскость, "натянутая" на векторы

$$\frac{\partial x(u^0)}{\partial u_1}, \dots, \frac{\partial x(u^0)}{\partial u_1}.$$

Наглядно мы их тоже представляем себе "отложенными" от p, и тогда концы их всевозможных линейных комбинаций заполняют T_pM.

Эту касательную плоскость T_pM можно назвать "геометрической касательной плоскостью". Но часто мы не считаем обязательным представлять себе векторы, касающиеся M в p, "отложенными" от p. С равным успехом их можно откладывать от "начала координат" 0. А точнее, у нас есть два экземпляра пространства $\mathbb{R}^n$ — "точечное" $\mathbb{R}^n_{\text{pt}}$ и "векторное" $\mathbb{R}^n_{\text{vect}}$. "Кусочек многообразия" M состоит из точек и лежит в "точечном" пространстве $\mathbb{R}^n_{\text{pt}}$, там же находится геометрическая касательная плоскость T_pM, а "векторная" касательная плоскость (обозначаемая так же, потому что со временем именно она выходит на передний план) состоит из касательных векторов, которые, как вектору и положено, суть элементы $\mathbb{R}^n_{\text{vect}}$. А именно, это те элементы, которые геометрически получаются как $\overrightarrow{pq}$, где q — точка "точечной" касательной плоскости T_pM[33].

[33]Собственно, имеется ещё бесконечное число векторных пространств $T_p\mathbb{R}^n$ — касательных пространств во всевозможных точках $p \in \mathbb{R}^n$. Это не только математическая идея. В механике и физике различают "связанные" и "свободные" векторы. Связанный вектор навсегда "привязан" к некоторой точке p (говорят, что он "приложен к p"); когда его изображают направленным отрезком, начало отрезка обычно берут в этой самой точке, так что он изображается некоторым отрезком $\overrightarrow{pq}$. Свободный же

Если у нас имеется точка $x(t) \in \mathbb{R}^n_{\mathrm{pt}}$, гладко зависящая от параметра t, то производную $\dot{x}(t)$ в одних случаях естественно представлять себе как направленный отрезок с началом в $x(t)$ (это образ, связанный с $\mathbb{R}^n_{\mathrm{pt}}$), но в других случаях — как вектор из $\mathbb{R}^n_{\mathrm{vect}}$ (как бы исходящий из нуля этого пространства). Рассматривая векторы

$$\frac{\partial x(u^0)}{\partial u_1}, \dots, \frac{\partial x(u^0)}{\partial u_1}$$

как элементы $\mathbb{R}^n_{\mathrm{vect}}$, мы определяем "векторное касательное пространство" T_pM как подпространство $\mathbb{R}^n_{\mathrm{vect}}$, порождённое этими векторами, т.е. состоящее из их линейных комбинаций.

Упражнение. Являются ли эти векторы линейно независимыми? Останется ли "векторное касательное пространство" T_pM тем же самым, если мы вместо координат $u = (u_1, \dots, u_n)$ используем какие-нибудь другие гладкие координаты на M?

Это подготовляет нас к такому определению касательных векторов и касательного пространства, в котором, собственно, нет никакого лежащего в $\mathbb{R}^n$ "изогнутого кусочка многообразия", а есть просто криволинейные координаты в области $U \subset \mathbb{R}^k$ (не обязательно координаты во всей области U, а возле точки u^0). Его можно дать тремя способами. Формально определяемые при этом объекты различны, но между ними имеется естественное взаимно-однозначное соответствие, и говоря о "векторе в смысле определения i)", мы подразумеваем, что ему соответствует определённый "вектор в смысле определения j)", и мы готовы в любой момент мгновенно перейти к этому второму вектору. Мы даже не делаем между ними формального различия, кроме как при исходной формулировке.

вектор можно перенести в любую другую точку p', взяв вектор $\overrightarrow{p'q'}$, равный исходному вектору $\overrightarrow{pq}$. Связанные векторы, приложенные к p, образуют пространство $T_p\mathbb{R}^n$, а $\mathbb{R}^n_{\mathrm{vect}}$ — это пространство свободных векторов.

Наглядным примером связанного вектора является сила. Нагрузка в 1 кГ, приложенная к плечу взрослого человека, почти не заметна, а что, если её приложить к уху?

Разумеется, при каких-то вычислениях, построениях, рассуждениях часто со связанными векторами временно обращаются, как со свободными. Но это не ликвидирует весьма чувствительного различия между нагрузкой в 1 кГ, приложенной к плечу, и такой же нагрузкой, приложенной к уху.

Определение 1). Вектор из T_pM — это правило, сопоставляющее каждой системе координат[34] $x = (x_1, \dots, x_k)$ в M возле точки p (т.е. системе координат в U возле точки u^0) упорядоченный набор чисел $X = (X_1, \dots, X_k)$, причём наборы чисел $X = (X_1, \dots, X_k)$ и $Y = (Y_1, \dots, Y_k)$, сопоставляемых двум системам координат $x = (x_1, \dots, x_k)$ и $y = (y_1, \dots, y_k)$, связаны соотношением

$$Y_i = \sum_{j=0}^{k} \frac{\partial y_i(^0)}{\partial x_j} X_j, \tag{68}$$

где x^0 — это, конечно, координаты точки p (или точки u^0).

Числа $(X_1, \dots, X_k)$ называют координатами вектора X в координатной системе $x = (x_1, \dots, x_k)$. Я расположил их в виде строки, но это сделано ради удобства записи и набора текста; надо представлять себе, что на самом деле они должны быть расположены столбцом. (С помощью знака транспозиции $'$ можно было бы вполне корректно записать этот столбец как $(x_1, \dots, x_k)'$, но я позволяю себе известную небрежность и знаком транспозиции не пользуюсь, тем более что его можно спутать с обозначением производной). Условившись, что в матрице $\frac{\partial y_i(^0)}{\partial x_j}$ индекс i нумерует строки, а j — столбцы, можно записать эту матрицу в виде $\frac{dy}{dx}$ или $y'(x)$ (так она (или, точнее, описываемый ею линейный оператор) и записывалась в §3). Тогда (68) можно сокращённо записать в виде $Y = y'(x^0)X$.

Определение 2). Вектор из T_pM — это вектор скорости $\dot{x}(0)$ в момент времени $t = 0$ точки $p = p(t)$, гладко зависящей от t, движущейся по M и проходящей при $t = 0$ через p. Здесь мы обращаемся к исходным геометрическим понятиям (M в $\mathbb{R}^n_{\text{pt}}$), но рассматриваем вектор скорости $\dot{x}(0)$ как элемент $\mathbb{R}^n_{\text{vect}}$. Но можно "работать" в терминах криволинейных координат в U. Точка $p(t)$ изображается точкой $u(t)$, и можно говорить о векторе скорости $\dot{u}(0)$ в $\mathbb{R}^k$. Здесь мы фактически на один момент вспоминаем об особой роли исходной системы координат u на M. Но можно, никак её не выделяя, сказать, когда при движении двух точек по M согласно двум "гладким законам движения" $p(t)$ и $\overline{p}(t)$, предписывающим при $t = 0$ находиться в p [35], скорости этих точек при $t = 0$ одинаковы.

[34]Обращаю внимание, что раньше x_i были координатами в $\mathbb{R}^n$, но теперь, когда мы постепенно "отвлекаемся" от $\mathbb{R}^n$, "популярную" букву x можно использовать в другой роли.

[35]Это звучит чуть более геометрически, если говорить о движении по двум пара-

Это бывает тогда и только тогда, когда, в терминах какой-нибудь (а тогда и любой, — почему?) гладкой системы координат $y = (y_1, \ldots y_k)$ на M, координаты $y(t)$ и $\overline{y}(t)$ движущихся точек различаются на величину порядка $o(t)$ (или, что то же самое, когда $\dot{y}(0) = \frac{d}{dt}\overline{(}y)(0))$. Сказанное приводит к такому определению. Назовём две гладкие параметризованные кривые $p(t)$ и $\overline{p}(t)$ на M, проходящие при $t = 0$ через p, эквивалентными, если, в терминах $\mathbb{R}^n$, $|p(t) - \overline{p}(t)| = o(t)$, что без обращения к исходной геометрии можно сформулировать в терминах координат $y(t)$ и $\overline{y}(t)$ движущихся точек в какой-нибудь (а тогда и любой) гладкой системе координат: $y(t) - \overline{y}(t) = o(t)$ (или $\dot{y}(0) = \frac{d}{dt}\overline{y}(0))$. Тогда касательный вектор к M в точке p — это класс эквивалентности таких кривых.

Упражнение. Сопоставим параметризованной кривой с координатным представлением $y(t)$ набор чисел $(\dot{y}_1(0), \ldots, \dot{y}_k(0))$. По определению, при замене кривой на эквивалентную получится тот же самый набор чисел. Проверьте, что при использовании других координат получится набор чисел, служащий координатами того же вектора в смысле 1). Тем самым получается взаимно однозначное соответствие между векторами в смысле 2) и 1).

Будем говорить, что этот вектор есть вектор скорости, отвечающий данной параметризованной кривой при $t = 0$.

3). Вектор X, понимаемый согласно 1), определяет оператор (лучше сказать, функционал) дифференцирования D_X, сопоставляющий (при использовании координат x_i) заданной возле u^0 гладкой функции f число $D_X f = \sum_{i=0}^k X_i \frac{\partial f(u^0)}{\partial x_i}$. (Полагаю, что читателю известен геометрический смысл $D_x f$ — это производная $\frac{d}{dt}\big|_{t=0} f(u(t))$, где $u(t)$ — гладкая параметризованная кривая, которая проходит при $t = 0$ через u^0 и которой отвечает вектор скорости X.)

Упражнение. Проверьте, что при использовании другой системы координат получится то же самое $D_X f$.

метризованным кривым $p(t)$ и $\overline{p}(t)$, проходящих при $t = 0$ через p. Говоря о движении по такой кривой, я как раз и подразумеваю, что в момент t движущаяся точка занимает на параметризованной кривой положение, соответствующее значению параметра, равному t.

Говоря о p и $\overline{p}$, мы вспоминаем об исходном геометрическом смысле M. Но теперь можно говорить только в терминах, отвечающих координатам в U. Речь идёт о движении в U по двум параметризованным кривым $u(t)$ и $\overline{u}(t)$, проходящим при $t = 0$ через u^0.

После сказанного можно придать словам "касательный вектор" такой смысл: это есть дифференциальный оператор (точнее, функционал), сопоставляющий заданной возле u^0 гладкой функции f число, которое в терминах (каких-нибудь, а тогда и любых) локальных координат x_i выражается в виде $\sum_{i-0}^{k} X_i \frac{\partial f(u^0)}{\partial x_i}$ с какими-то (зависящими от используемых координат) числами X_i. Авторы, исходящие из такого определения, естественно, пишут не $D_X f$, а Xf. Другие авторы (включая меня) всё-таки пишут D_X, но есть одно исключение: векторы, которым отвечают операторы $\frac{\partial}{\partial x_i}$ (точнее, функционалы $\frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_{x^0}$), часто так и обозначаются, как эти самые операторы.

Упражнение. Завершите обсуждение эквивалентности трёх определений вектора. Как определить алгебраические операции в множестве T_pM касательных векторов в p, превращающие это множество в векторное пространство?

Определение 2), пожалуй, является самым наглядным. Однако оно не приводит к определению сложения касательных векторов столь же непосредственно, как два других определения.

Упражнение. Каковы координаты векторов векторов $\frac{\partial}{\partial x_i}$ (при использовании той же системы координат x_i, какая фигурирует в обозначении этих частных дифференцирований)? Докажите, что эти векторы образуют базис в T_pM и что те самые X_i, о которых выше говорилось как о координатах вектора X в координатной системе $(x_1, \ldots, x_k)$ — это его координаты в данном базисе.

Понятно, что при желании в T_pM можно использовать и другие координатные базисы $\{e_i\}$, по-прежнему "хорошо" (достаточно гладко) зависящие от p, но не являющиеся базисами вида $\{\frac{\partial}{\partial x^i}\}$ ни при каком выборе системы локальных координат $\{x^i\}$[36]. Вот простой (и неявно уже известный читателю) пример, появляющийся в связи с полярными координатами (r, φ) на плоскости (а не на каком-то жутко искривлённом многообразии, расположенным нивесть где). Пусть имеется некоторый вектор $\mathbf{u} = \overrightarrow{AB}$ (возвращаясь в наше "образовательное детство", я временно стал

[36]Такие базисы $\{e_i\}$ и отвечающие им декартовы координаты в T_pM называют неголономными (название связано с так называемыми неголономными связями в механике, но чтобы разъяснить это подробно, потребовало бы уделить слишком много места предметам, которые для нас, в конце-концов, являются посторонними). Базисы "привычного" вида $\{\frac{\partial}{\partial x^i}\}$ и соответствующие координаты именуются, естественноЮ, голономными.

обозначать векторы с помощью полужирного шрифта или стрелок, как это там было принято),“исходящий” из точки A, которая имеет полярные координаты (r, φ). Какое разложение вектора $\mathbf{u}$ на “компоненты” было бы самым тесным образом связано с используемыми полярными координатами? Едва ли можно представить себе что-нибудь более наглядное, чем ввести на минуту ортонормированную декартову систему координат с началом координат в A, первый базисный вектор которой $\mathbf{e}_1$ направлен по прямой OA в сторону возрастания r, а второй $\mathbf{e}_2$ касается окружности и направлен в сторону возрастания φ. Направления этих векторов перпендикулярны друг другу, а раз сказано, что система координат ортонормированная, то они оба имеют единичную длину. Поскольку в каждой точке A берутся свои базисные векторы и поскольку они тесно связаны с исходными полярными координатами, то я их переобозначу и буду писать $\mathbf{e}_r$ вместо $\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{e}_\varphi$ вместо $\mathbf{e}_2$.

Упражнение. а). Покажите, что векторы $\frac{\partial}{\partial r}$ и $\frac{\partial}{\partial \varphi}$ имеют то же направление, что и векторы $\mathbf{e}_r$ и $\mathbf{e}_\varphi$, но один из них (который?) имеет другую длину (какую?). Поэтому те координаты вектора $\mathbf{u}$, которые мы раньше назвали его координатами в координатной системе (r, φ), отличаются от его координат в координатной системе с базисом $\{\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\varphi\}$ (последние координаты принято обозначать через u_r, u_φ и называть радиальной и угловой компонентами вектора $\mathbf{u}$[37]). Как одни координаты вектора выражаются через другие, как связаны друг с другом векторы этих двух базисов?

б). Докажите, что базис $\{\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\varphi\}$ — неголономный. (Указание. Рассуждая от противного, допустим, что хотя бы локально (возле некоторой точки A) существуют такие криволинейные координаты (x^1, x^2), что $\frac{\partial}{\partial x^1} = \mathbf{e}_r$, $\frac{\partial}{\partial x^2} = \mathbf{e}_\varphi$. Найдите выражения для частных производных этих гипотетических координат по r и φ в терминах r и φ и убедитесь, что выражения для частных производных от x^2 противоречат тому, что $\frac{\partial}{\partial r}\frac{\partial x^2}{\partial \varphi} = \frac{\partial}{\partial \varphi}\frac{\partial x^2}{\partial r}$[38].

[37]В механике и физике, особенно в их сравнительно более элементарных главах, именно u_r, u_φ играют роль “координат вектора $\mathbf{u}$”, что стоит иметь в виду на экзамене: студент, рискнувший сказать, что вектор скорости движущейся точки $A(t)$, полярные координаты которой суть $(r(t), \varphi(t))$, имеет компоненты $(\dot r, \dot\varphi)$, может так “понравиться” экзаменатору, что тот захочет продолжить знакомство с этим студентом путём повторной “беседы”.

[38]Последнее равенство предполагает, что x^2 — класса C^2. Когда мы говорим о локальных координатах, то заранее естественно предполагать только, что x^i — класса

Это рассуждение, пожалуй, выглядит несколько формальным. Вот более "содержательное" и уж во всяком случае более наглядное рассуждение. Исходя из выражений для $\frac{\partial x^2}{\partial r}$ и $\frac{\partial x^2}{\partial \varphi}$, придите к противоречию, проследив за изменением x^2 вдоль малого замкнутого контура $ABCD$, где A имеет полярные координаты (r, φ), B — $(r+a, \varphi)$, C — $(r+a, \varphi+b)$ и D — $(r, \varphi+b)$, дуги контура AB и CD суть прямые, а BC и DA лежат на окружностях с центром в "полюсе" рассматриваемой полярной системы координат (т.е. в той точке, откуда отсчитываются расстояния r и в которой начинаются полярные лучи, направления которых характеризуются углом φ) и с радиусами $r+a$ и r соответственно.)

В тензорном исчислении и смежных областях обычно используют следующую систему обозначений, предложенную А.Эйнштейном, который стремился упростить написание ряда формул в теории гравитации. Координаты обозначают с индексами наверху, например: $x^1, \ldots, x^k$. Координаты касательного вектора тоже обозначают с индексами наверху, например: $X^1, \ldots, X^k$. При суммировании по повторяющимся индексам (обычно тогда, когда один из них стоит наверху, а другой — внизу), пробегающим значения, отвечающие номерам координат (например, значения $1, \ldots, k$ в (68)) знак суммы опускают. Если имеется "дробь" (не настоящая дробь, а частная производная), то верхний и нижний индекс у буквы, стоящей в числителе, считаются расположенными, соответственно, наверху и внизу, но верхний индекс у буквы, стоящей в знаменателе, считается расположенным внизу, а нижний индекс у такой буквы — расположенным наверху. Например, (68) с учётом этих рацпредложений записывается так:

$$Y^i = \frac{\partial y^i(x^0)}{\partial x^j} X^j. \tag{69}$$

(Подразумевается ясным из контекста, что верхний индекс 0 указывает не номер координаты, а что-то иное.)[39]

C^1. Но из выражений для частных производных x^i по r и φ видно, что эти производные — тоже гладкие функции от r, φ.

[39]Ещё одно рацпредложение, сделанное позднее другими авторами, состоит в том, чтобы координаты одного и того же объекта (сейчас — касательного вектора, но позднее нам встретятся и другие объекты) всегда обозначались одной и той же буквой, а на различие между используемыми системами координат указывалось с помощью дополнительных значков при индексах. Так, у нас теперь будут не координаты $(x^1, \ldots, x^k)$ и $(y^1, \ldots, y^k)$ в U (или в M), а, скажем, те же $(x^1, \ldots, x^k)$ и $(x^{1'}, \ldots, x^{k'})$. Соответствующие координаты вектора X тогда надо будет обозначать через X^i и $X^{i'}$,

Индекс, по которому производится суммирование, часто называют "немым". Немой индекс можно заменить любой другой буквой, которая ранее не фигурировала в рассматриваемом выражении, а в окончательный результат он фактически не входит, если этот результат расписать подробнее. например, вместо (69) можно написать

$$Y^i = \frac{\partial y^i(x^0)}{\partial x^h} X^h. \tag{70}$$

Если, скажем, $n = 3$, то и (69), и (70) означают, что

$$Y^i = \frac{\partial y^i(x^0)}{\partial x^1} X^1 + \frac{\partial y^i(x^0)}{\partial x^2} X^2 + \frac{\partial y^i(x^0)}{\partial x^3} X^3.$$

Ни j, ни h здесь не фигурируют.

По историческим причинам касательные векторы называют "контравариантными векторами". Контравариантный — это значит "изменяющийся противоположным образом", видимо, противоположным по сравнению с какими-то "стандартными" объектами (см. ниже). Изменяются, правда, не сами векторы, а их координаты при переходе к новой системе координат, но это вполне приемлемая условность речи[40]. Теперь касательные векторы стали "самыми стандартными", и название утратило свой резон, но пересмотр давно сложившейся терминологии привёл бы не столько к облегчению для запоминания, сколько к путанице.

Теперь самое время остановиться на "ковариантных векторах", сокращённо "ковекторах".

а формула (69) примет вид

$$X^{i'} = \frac{\partial x^{i'}(\overset{0}{x})}{\partial x^i} X^i$$

(0 пришлось поставить над коренной буквой x, ибо этот 0 указывает не на номер координаты, а на некоторую точку.) Конечно, если решить следовать этому дополнительному соглашению, то к нему надо привыкнуть, на что требуется некоторое время. Когда приходится иметь много дела с формулами, куда входит много индексов, отчасти соответствующих различным координатным системам, это новое соглашение часто оказывается удобным и время, потраченное на привыкание к нему, вполне окупается. У нас таких формул немного, и сейчас мы не будем пользоваться этим соглашением, но в п.10 оно будет удобно.

[40]Сами векторы и другие объекты определённым образом изменяются под действием гладких отображений, но у нас это пока остаётся в стороне. Для терминологии, как я понимаю, имел значение всё-таки характер изменения координат.

Определение 1). Ковектор в точке p — это правило, сопоставляющее каждой системе координат $x = (x_1, \ldots, x_k)$ в M возле точки p (т.е. системе координат в U возле точки u^0) упорядоченный набор чисел $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_k)$, причём наборы чисел $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_k)$ и $\eta = (\eta_1, \ldots, \eta_k)$, сопоставляемых двум системам координат $x = (x_1, \ldots, x_k)$ и $y = y_1, \ldots, y_k)$, связаны соотношением (написанном с учётом эйнштейновского "рацпредложения")

$$\eta_i = \frac{\partial x^j(^0)}{\partial y^i}\xi_j. \tag{71}$$

Числа $(\xi_1, \ldots, \xi_k)$ называют координатами ковектора
xi в координатной системе $x = (x^1, \ldots, x^k)$. Они подразумеваются расположенными так же, как сейчас и написано — в виде строки. Тогда (71) можно сокращённо записать в виде $\eta = \xi x'(y^0)$, где y^0 — это координаты точки p (или u^0) в координатной системе y-ков.

Определение 2). Ковектор в точке p — это однородный линейный функционал ξ на векторном пространстве T_pM. По этой причине пространство ковекторов (очевидным образом превращённое в векторное пространство) является сопряжённым к T_pM и обозначается через T_p^*M.

Всякий ковектор ξ в смысле 1) определяет такой функционал: если его координаты суть ξ_i, а X^i — координаты вектора X, то $\xi(X) = \xi_i X^i$.

Упражнение. Координаты x^i являются гладкими функциями на U ($x^i(u)$ — это i-ая координата точки u в соответствующей координатной системе). Покажите, что дифференциалы dx^i этих функций в точке u^0 (в понятном смысле их можно называть дифференциалами в p) образуют базис пространства T_p^*M, взаимный к базису $\frac{\partial}{\partial x_i}$. (Пусть $a_1, \ldots, a_k$ — базис в векторном пространстве V, а $\alpha_1, \ldots .\alpha_k$ — базис в сопряжённом пространстве V^*. Эти базисы называются взаимными, если $\alpha_i(a_j) = \delta_{ij}$ (символ Кронекера; он равен 1 при $i = j$ и 0 в противном случае).

Базисы $\left\{\frac{\partial}{\partial x^i}\right\}$ в T_pM (или в каком-нибудь векторном пространстве V, где введены какие-то декартовы координаты x^i) и базис $\{dx^i\}$ в $T_p^*(M)$ (или в V^*) называют базисами, естественно связанными с координатами $\{x^i\}$. О соответствующих декартовых координатах в T_pM и T_p^*M тоже говорят, что они естественно связаны с исходными координатами $\{x^i\}$ в M. (Наборы чисел, фигурирующие в определении 1) вектора X и ковектора ξ — это как раз и есть такие координаты X и ξ). Таким образом, для вектора $X = \{X^i\}$ и ковектора $\xi = \{\xi_i\}$ (с указанными координатами) можно написать $X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$, $\xi = \xi_i dx^i$.

В обычном курсе анализа наряду с дифференциалом гладкой функции f (заданной в области $U \subset \mathbb{R}^n$) рассматривается ещё её градиент — вектор с координатами $\left(\frac{\partial f}{\partial x^1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x^n}\right)$. Но ведь такие же координаты $\frac{\partial f}{\partial x^i}$ имеет и дифференциал df (как ковектор). Следует ли считать, что градиент и дифференциал — это одно и то же, или между ними есть какая-то разница, на которой в курсе анализа не останавливаются?

Ответ таков: градиент естественно понимать как контравариантный вектор, определённым образом связанный с дифференциалом. Связь эта определяется обычной евклидовой метрикой в $\mathbb{R}^n$, точнее, соответствующим скалярным произведением $(. , .)$. Известно, что скалярное произведение в конечномерном векторном пространстве V позволяет установить изоморфизм между V и сопряжённым пространством V^*: функционалу $\xi \in V^*$ сопоставляется такой вектор $X \in V$, что $\xi(Y) = (X, Y)$ для всех $Y \in V$. Этот изоморфизм зависит от используемой метрики. Когда речь идёт об $\mathbb{R}^n$ со стандартными координатами и со стандартным скалярным произведением $(X, Y) = \sum X^i Y^i$, то дифференциалу сопоставляется как раз градиент. После ортогонального преобразования координат выражение для градиента остаётся тем же — его координаты суть частные производные f по используемым координатам. Но если сделать неортогональную замену координат, то в новых координатах y^i выражение для скалярного произведения примет отличный от прежнего вид $(X, Y) = \sum g_{ij} X^i Y^j$ (коэффициенты $g_{ij} = g_{ji}$), и легко проверить, что тогда градиент будет иметь координаты $(\operatorname{grad} f)^i = \sum_j g^{ij} \frac{\partial f}{\partial y^j}$. То же самое получится, если с самого начала используется метрика, которая в используемых координатах не выражается в виде $(X, Y) = \sum X^i Y^i$. Пока речь идёт о пространстве T_pM с одной какой-нибудь точкой p, можно в нём ввести координаты, в терминах которых (X, Y) имеет вид $\sum X^i Y^i$; в этих координатах у градиента такие же координаты, что у дифференциала. Но может случиться, что мы имеем дело с пространствами T_pM сразу для всех $p = x(u)$ с u из U (или из некоторой подобласти области U), и в каждом из них задана метрика, в известном смысле "хорошо" (очень гладко) зависящая от координат u точки p (в подобных случаях говорят о римановой метрике в M или в соответствующей части M). Тогда, вообще говоря, не существует таких координат возле точки p в M, при использовании которых (x, y) всюду приобретало бы вид $\sum X^i Y^i$. Вместо этого (X, Y) представляется как некоторая квадратичная форма от координат X^i и Y^i векторов $X, Y \in T_pM$, коэффициенты которой зависят от p (или от координат этой точки): $(X, Y) = \sum g_{ij}(p)X^iY^j$ с $g_{ij} = g_{ji}$. Тогда в точке p градиент функции f — это контравариантный вектор, который при использовании возле p координат y^i имеет координаты $(\operatorname{grad} f)^i = \sum_j g^{ij}(p)\frac{\partial f}{\partial y^j}$.

Пространство T_pM играет роль "исходного" векторного пространства, отправляясь от которого строятся некоторые другие пространства. (Первым примером служит сопряжённое к нему пространство T_p^*M. Другим примерам посвящён следующий п.) Эти построения являются чисто алгебраическими — для них несущественно, что исходное пространство образовано касательными векторами к M. Поэтому содержание следующего п. будет чисто алгебраическим, при этом "исходным" будет некоторое конечномерное векторное пространство V (или несколько таких пространств).

Наконец, можно пояснить, почему векторы "исходного" пространства T_pM называют "контравариантными", хотя, казалось бы, они играют роль "стандартных" объектов и преобразования координат других объектов должны бы сопоставляться с преобразованиями координат в T_pM. Причина в том, что векторы (даже обычная векторная алгебра) появились намного позже дифференциалов. Пусть трактовка последних долго оставалась, с нашей точки зрения, не совсем удовлетворительной, но всётаки они были всем привычны и потому преобразования координат для векторов и других объектов поначалу сопоставлялись с преобразованиями для дифференциалов, т.е. для элементов T_p^*M.

10. Тензоры. Тензорные произведения.

Тензоры можно определить несколькими способами.

1). Определение, принятое в старой литературе, — координатное, причём его формулируют в терминах замены координат в M, но на самом деле с такой заменой координат связана линейная однородная замена соответствующих декартовых координат в T_pM, и то, что при этом происходит с координатами тензора, описывается, по существу, именно в терминах этой замены координат в T_pM. Поэтому будем исходить из того, что у нас имеется некоторое конечномерное векторное пространство V и что в нём рассматриваются различные декартовы координатные системы с общим "началом отсчёта" — нулём 0. Однако преобразование от координат $x^1, \dots, x^n$ к координатам $y^1, \dots, y^n$ может оказаться удобным записывать не в обычном в линейной алгебре виде $y^i = a^i_j x^j$, где ${}^i_j$ — постоянные коэффициенты (и определитель $\det(a^i_j) \neq 0$), а в виде $y^i = \frac{\partial y^i}{\partial x^j} x^j$. Это, конечно, совершенно правильная запись, только в данном случае все эти частные производные постоянны (а именно, $\frac{\partial y^i}{\partial x^j} = a^i_j$).

Тензор валентности $k + l$ в n-мерном пространстве V, k раз контравариантный и l раз ковариантный, можно определить как правило, сопоставляющее каждой координатной системе в V (повторяю, сейчас координаты в V — декартовы и с началом координат в 0) набор n^{k+l} чисел ("координат" или "компонент" этого тензора) $T^{i_1,\dots,i_k}_{j_1,\dots,j_l}$, где индексы $i_1, \dots, i_k, j_1, \dots, j_l$ независимо друг от друга пробегают значения $1, \dots, n$, причём при замене координат эти числа заменяются другими числами так, как будет описано ниже. О верхних индексах говорят, что по ним тензор контравариантен, а о нижних — что по ним он ковариантен. Тензор представляется своими координатами, которые обозначаются той же буквой ("коренной буквой"), что и сам тензор, но с добавлением индексов; при этом часто говорят коротко "тензор $T^{i_1,\dots,i_k}_{j_1,\dots,j_l}$", а не "тензор T с координатами $T^{i_1,\dots,i_k}_{j_1,\dots,j_l}$". При переходе от координат $x^1, \dots, x^n$ в V к другим координатам $x^{1'}, \dots, x^{n'}$, — как видно, мы для второй системы координат ставим штрих у индексов, в соответствии с "рацпредложением" в одном из подстрочных примечаний в п. 9, — координаты тензора в новой системе координат обозначаются прежней буквой (ведь сам он не изменился), но у индексов ставим штрих. (Переход к третьей системе координат потребовал бы двух штрихов[41] или иных дополнительных значков как у

[41]"Что вы будете делать, когда дойдёте до тринадцатого цезаря?" спросил у сена-

самих координат, так и у координат тензора.) Теперь, наконец, можно написать общую формулу, выражающую для тензора $T^{i_1,\dots,i_k}_{j_1,\dots,j_l}$ его новые координаты $T^{i'_1,\dots,i'_k}_{j'_1,\dots,j'_l}$ через старые:

$$T^{i'_1,\dots,i'_k}_{j'_1,\dots,j'_l} = T^{i_1,\dots,i_k}_{j_1,\dots,j_l} \frac{\partial x^{i'_1}}{\partial x^{i_1}} \dots \frac{\partial x^{i'_k}}{\partial x^{i_k}} \frac{\partial x^{j_1}}{\partial x^{j'_1}} \dots \frac{\partial x^{j_l}}{\partial x^{j'_l}}. \qquad (72)$$

Прокомментируем её вид. Справа стоит сумма по повторяющимся индексам некоторых одночленов. Повторяются (сверху и снизу) все нештрихованные индексы $(i_1, \dots, i_k, j_1, \dots, j_l)$ (причём у коренной буквы нештрихованный индекс стоит на том же месте, в каком соответствующий штрихованный индекс стоит у коренной буквы слева), так что остаются свободными только штрихованные индексы. Каждый одночлен — это произведение старой координаты $T^{i_1,\dots,i_k}_{j_1,\dots,j_l}$ нашего тензора и частных производных одних координат по другим — новых координат по старым и старых координат по новым. Всего перемножается $k+l$ производных — столько же, сколько индексов у тензора. Хотя частная производная $\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^{i}}$ или $\frac{\partial x^{i}}{\partial x^{i'}}$ — не тензор (она определённым образом связана с двумя координатными системами $x^i, x^{i'}$ и не имеет самостоятельного значения), у неё тоже можно различать "верхний" индекс — это верхний индекс у буквы $x^{i'}$ или x^i, стоящей в "числителе", — и "нижний" индекс — это верхний индекс у буквы x^i или $x^{i'}$, стоящей в "знаменателе". В (72) каждому штрихованному индексу (верхнему, вида i'_h, или нижнему, вида j'_h), стоящему у коренной буквы слева, соответствует такой же (тоже штрихованный) индекс у одной из производных, расположенный так же, как в левой части, т.е. тоже сверху или тоже снизу. Второй индекс у этой производной — такой же нештрихованный индекс; его расположение (сверху или снизу) противоположно расположению соответствующего штрихованного индекса, а значит и положению того же нештрихованного индекса в первом множителе.

Говорят, что $T^{i_1,\dots,i_k}_{j_1,\dots,j_l}$ суть координаты тензора T в рассматриваемой системе координат в V или в соответствующем базисе $\{e_i\}$ этого пространства. При большом педантизме в этом можно усмотреть известную вольность речи — буквально выражения вроде "координаты в бази-

---

торов римский император Тиберий, когда сенат решил было переименовать в честь Тиберия один из месяцев (после того как ранее два других месяца были переименованы в честь Юлия Цезаря и Августа). В отличие от сенаторов, мы можем предложить ответ на аналогичный вопрос: мы напишем $x^{i^{(13)}}$.

се $\{e_i\}$" должны бы относиться только к координатам векторов, являющихся элементами V, а о $T^{i_1,\dots,i_k}_{j_1,\dots,j_l}$ надо бы говорить как-нибудь более осторожно, скажем, как о "координатах тензора T, отвечающих данной системе координат (с базисом $\{e_i\}$) в исходном векторном пространстве V". Но можно сказать и так, что мы расширили смысл слова "координаты". Это было сделано совершенно чётко и потому никакой вольности речи тут нет.

При $l = 0$ получается тензор, у координат которого $\{T^{i_1,\dots,i_k}\}$ нет нижних индексов. Его называют (чисто)-контравариантным. При $k = 0$ получается тензор $T = \{T_{j_1,\dots,j_l}\}$, который называют (чисто)-ковариантным. При $k > 0$, $l > 0$ у координат тензора имеются и верхние, и нижние индексы. Такой тензор называют смешанным.

2). Более инвариантным (не привлекающим координат) является определение, связанное с трактовкой тензоров как полилинейных функций на прямых произведениях нескольких экземпляров пространства V и сопряжённого к нему пространства V^*. (Напомню, что функция $f(w_1, \dots, w_r)$, определённая на прямом произведении $W_1 \times \ldots \times W_r$ векторных пространств $W_1, \dots, W_r$, называется полилинейной, если она линейна по каждому аргументу в отдельности.) Именно, тензор, k раз контравариантный и l раз ковариантный, можно определить как полилинейную функцию

$$\underbrace{V \times \ldots \times V}_{l \text{ раз}} \times \underbrace{V^* \times \ldots \times V^*}_{k \text{ раз}} \to \mathbb{R}$$

(или со значениями в другом основном поле).

Связь 1) и 2) даётся формулой (в которой, как обычно в "тензорном" контексте, используется правило суммирования по повторяющимся индексам)

$$T(\underset{1}{X}, \dots, \underset{l}{X}, \overset{1}{\xi}, \dots, \overset{k}{\xi}) = T^{i_1,\dots,i_k}_{j_1,\dots,j_l}\, \underset{1}{X}^{j_1} \dots \underset{l}{X}^{j_l}\, \overset{1}{\xi}_{i_1} \dots \overset{k}{\xi}_{i_k} \tag{73}$$

для полилинейной функции T от векторов $\underset{1}{X}, \dots, \underset{l}{X}$ и ковекторов $\overset{1}{\xi}, \dots, \overset{k}{\xi}$, имеющих координаты $\underset{1}{X}^i, \dots, \underset{k}{X}^i$ и $\overset{1}{\xi}_i, \dots, \overset{k}{\xi}_i$ [42], сопоставляемой тензору

[42] Здесь над "коренными буквами" ξ стоят номера — ξ с номером i есть i-ый ко-

$\{T^{i_1,\dots,i_k}_{j_1,\dots,j_l}\}$ (тензору в смысле 1)). Таким образом, числа $T^{i_1,\dots,i_k}_{j_1,\dots,j_l}$ суть коэффициенты в "координатном выражении" для функции T. Кроме того, если $\underset{1}{a},\dots,\underset{n}{a}$ — используемый базис в V, а $\overset{1}{\alpha},\dots,\overset{n}{\alpha}$ — взаимный базис в V^*, то

$$T^{i_1,\dots,i_k}_{j_1,\dots,j_l} = T(\underset{j_1}{a},\dots,\underset{j_l}{a},\overset{i_1}{\alpha},\dots,\overset{i_k}{\alpha}).$$

Чисто-ковариантный тензор — это полилинейная функция $V^k \to \mathbb{R}$, аргументы которой, как видно, — одни только векторы. Чисто-контравариантный тензор — это полилинейная функция $(V^*)^l \to \mathbb{R}$, аргументы которой — одни только ковекторы. Среди аргументов смешанного тензора имеются и векторы, и ковекторы.

Упражнение. В литературе, где исходным является определение 1), обычно приводят следующее условие, необходимое и достаточное для того, чтобы при сопоставлении всем координатным системам в V некоторых наборов чисел $\{T^{i_1,\dots,i_k}_{j_1,\dots,j_l}\}$ получался бы тензор: для любых l векторов $\underset{1}{X},\dots,\underset{l}{X}$ и k ковекторов $\overset{1}{\xi},\dots,\overset{k}{\xi}$ выражение $T^{i_1,\dots,i_k}_{j_1,\dots,j_l}\underset{1}{X}^{j_1}\dots\underset{l}{X}^{j_l}\overset{1}{\xi}_{i_1}\dots\overset{k}{\xi}_{i_k}$ инвариантно относительно замен координат, т.е. для любых двух координатных систем — "нештрихованной" и "штрихованной", — имеем

$$T^{i_1,\dots,i_k}_{j_1,\dots,j_l}\underset{1}{X}^{j_1}\dots\underset{l}{X}^{j_l}\overset{1}{\xi}_{i_1}\dots\overset{k}{\xi}_{i_k} = T^{i'_1,\dots,i'_k}_{j'_1,\dots,j'_l}\underset{1}{X}^{j'_1}\dots\underset{l}{X}^{j'_l}\overset{1}{\xi}_{i'_1}\dots\overset{k}{\xi}_{i'_k}\ .$$

Убедитесь, что это определение является перефразировкой определения 2).

вектор; аналогично под "коренными буквами" X стоят номера — X с номером i есть i-ый вектор. При последовательном использовании этого "способа коренных букв и индексов" индексы, стоящие справа внизу или справа вверху от коренной буквы, используются исключительно для координат, а всякие прочие номера стоят вверху или внизу от коренной буквы, как бы образуя с ней единое целое. Тот факт, что номера векторов стоят снизу от коренной буквы, а ковекторов — сверху, не имеет особого значения — просто я поместил эти номера подальше от того места, где можно ставить номера координат. Так, у векторов координаты ставятся справа вверху, вот я и поставил номер вектора внизу. Сперва я перечислил фигурирующие в (73) векторы и ковекторы, а потом заговорил об их координатах, для чего к комбинации коренной буквы и номера соответствующего вектора или ковектора добавлен ещё номер i его координаты.

Я не собираюсь педантично придерживаться этой системы обозначений, но привожу здесь и кое-где далее несколько примеров её использования.

3). В предыдущих определениях определялся, так сказать, "индивидуальный" тензор $\{T^{i_1,\dots,i_k}_{j_1,\dots,j_l}\}$ или $T(\underset{1}{X},\dots,\underset{l}{X},\overset{1}{\xi},\dots,\overset{k}{\xi})$. Ясно, что в совокупности всех тензоров, k раз контравариантных и l раз ковариантных, можно понятным образом определить операции суммы и умножения тензора на скаляр, и тем самым превратить эту совокупность в некоторое векторное пространство. В третьем определении определяется сразу это пространство, после чего об индивидуальных тензорах можно сказать, что они являются элементами этого пространства.

Определение будет дано вначале в несколько иной общности, нежели выше. Для двух конечномерных векторных пространств E и F будет определено некое новое пространство $E \otimes F$, называемое их "тензорным произведением". Позднее мы увидим, что операция "тензорного перемножения" векторных пространств ассоциативна в том смысле, что имеется естественный, "стандартный" изоморфизм между $(E \otimes F) \otimes G$ и $E \otimes (F \otimes G)$, так что можно образовывать тензорные произведения нескольких векторных пространств $E_1 \otimes \ldots \otimes E_r$, несколько раз повторяя перемножение двух пространств, причём о расстановке скобок в получаемом произведении можно не заботиться, например,

$$(E_1 \otimes E_2) \otimes (E_3 \otimes E_4) = ((E_1 \otimes E_2) \otimes E_3) \otimes E_4 = \ldots \ .$$

Векторное пространство тензоров в V, k раз контравариантных и l раз ковариантных — это тензорное произведение k экземпляров V и l экземпляров V^*.

Пусть размерности $\dim E = k$, $\dim F = l$. Возьмём в E какой-нибудь базис $a_1, \dots, a_k$, а в F — какой-нибудь базис $b_1, \dots, b_l$. Возьмём какое-нибудь векторное пространство G размерности $\dim G = kl$ и возьмём в нём какой-нибудь базис. Последний состоит из kl векторов, которые мы пронумеруем не числами от 1 до kl, как обычно, а парами чисел i, j, где i и j независимо друг от друга пробегают значения от 1 до k и, соответственноЮ от 1 до l (всего получается как раз kl пар (i, j), сколько и требуется для нумерации элементов базиса в G). Элемент базиса, "пронумерованный" парой чисел i, j, обозначим через c_{ij}. Существует ровно одно билинейное отображение $f : E \times F \to G$, переводящее (a_i, b_j) в c_{ij} (почему?). Образ $f(x, y)$ пары $(x, y) \in E \times F$ при этом отображении обозначается через $x \otimes y$ и называется тензорным произведением элементов $x \in E$ и $y \in F$, а само G, рассматриваемое вместе с этим отображением, обозначается через $E \otimes F$ и называется тензорным произведением пространств E и F. (За исключением случая, когда один из сомножителей одномерен, G состоит не только из элементов вида $xotimesy$, но также из их линейных комбинаций. Ведь размерность $\dim(E \times F) = k + l$, а размерность $\dim G = kl$, что, за немногими исключениями, больше $k+l$. Правда, имеются непрерывные отображения, при которых размерность образа выше размерности отображаемого объекта (кривая Пеано), но эти отображения имеют “плохие свойства регулярности” и уж, во всяком случае, не могут быть гладкими, тогда как билинейное отображение f является гладким.

Упражнение. При натуральных k, l неравенство $kl \leqslant k + l$ возможно только тогда, когда либо одно из чисел k, l равно 1 (об этом случае уже говорилось), либо $k = l = 2$. (Почему?) В последнем случае $k + l = kl$, поэтому предыдущие соображения не исключают возможности, что $f(E \times F) = E \otimes F$. Докажите, что тем не менее в этом случае $f(E \times F)$ “значительно меньше”, чем $E \otimes F$, а именно, $f(E \times F)$ является квадратичной (т.е. имеющей уравнение второго порядка) гиперповерхностью в $E \otimes F$.

Желая сравнить это определение с определением 1), целесообразно модифицировать последнее применительно к такой же ситуации, как сейчас — к тензорному произведению $E \otimes F$ двух никак не связанных векторных пространств E и F. Пусть $a_1, \ldots, a_k$ — базис E, а $x^1, \ldots, x^k$ — соответствующие декартовы координаты (в E же). Далее, пусть $b_1, \ldots, b_k$ — базис F, а $y^1, \ldots, y^l$ — соответствующие координаты в F. Элемент $x \in E$ представляется в виде $x^i a_i$ (по-прежнему используется соглашение о суммировании по повторяющимся индексам), а элемент $y \in E$ — в виде $y^\alpha b_\alpha$ (нам теперь надо отличать индексы, относящиеся к E, от индексов, относящихся к F, поэтому последние будут обозначаться греческими буквами). Пространство $E \otimes F$ имеет базис $a_i \otimes b_\alpha$, а его элемент T представляется в виде $T = T^{i\alpha} a_i \otimes b_\alpha$. Мы можем перейти к новому базису $a_{i'}$ в E и к новому базису $b_{\alpha'}$ в F. У прежних x и y теперь будут новые координаты $x^{i'}$ и $y^{\alpha'}$: $x = x^{i'} a_{i'}, y = y^{\alpha'} b_{\alpha'}$. Новые координаты являются линейными функциями прежних. Хотя речь идёт о чисто алгебраической ситуации, мы, как и в 1), вправе говорить о частных производных вроде $\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}$ — это просто постоянные коэффициенты в формулах типа $x^{i'} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} x^i$. kl элементов $a_{i'} \otimes b_{\alpha'}$ образуют базис в $E \otimes F$. (Почему они линейно независимы? Потому что линейно независимые элементы

$a_i \otimes b_\alpha$ можно выразить как их линейные комбинации, см. ниже.) В этом базисе у прежнего элемента T будут новые координаты $T^{i'\alpha'}$, так что $T = T^{i'\alpha'} a_{i'} \otimes b_{\alpha'}$.

Упражнение. Докажите, что

$$a_i = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} a_{i'}, \quad b_\alpha = \frac{\partial y^{\alpha'}}{\partial y^\alpha} b_{\alpha'},$$

$$a_i \otimes b_\alpha = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} \frac{\partial y^{\alpha'}}{\partial y^\alpha} a_{i'} b_{\alpha'},$$

$$T^{i'\alpha'} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} \frac{\partial y^{\alpha'}}{\partial y^\alpha} T^{i\alpha}.$$

Обратно, как выражаются $a_{i'}$, $b_{\alpha'}$, $a_{i'} \otimes b_{\alpha'}$, x^i, y^α, $T^{i\alpha}$ через a_i, b_α, $a_i \otimes b_\alpha$, x^i, y^α, $T^{i'\alpha'}$? (В выражениях появляются производные $\frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}$ и $\frac{\partial y^\alpha}{\partial y^{\alpha'}}$.)

После этого мы вправе сказать, что $E \otimes F$ состоит из тензоров T, каждый из которых является правилом, сопоставляющим декартовым координатным системам в E и F набор kl чисел $T^{i\alpha}$, причём при замене координат — при переходе от "нештрихованных" координат к "штрихованным" — эти числа заменяются другими по правилу $T^{i'\alpha'} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} \frac{\partial y^{\alpha'}}{\partial y^\alpha} T^{i\alpha}$.

До сих пор E и F не имели отношения друг к другу и замены координат в этих пространствах тоже никак не были связаны друг с другом. Определение же 1), если говорить только о тензорах валентности 2, связано с тем случаем, когда каждое из перемножаемых пространств E и F является одним из пространств V и V^*. Когда $E = F$, мы, естественно, используем в обоих этих пространствах одни и те же базисы и одни и те же координаты. Когда $F = E^*$, мы используем в F базис, взаимный к используемому базису в E. В $E \otimes F$ по-прежнему используются базисы, элементы которых суть тензорные произведения элементов базисов в E и F (только теперь эти последние базисы связаны друг с другом согласно только что сказанному).

Упражнение. а). Покажите, что когда преобразование координат x^i в V имеет вид $x^{i'} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} x^i$, соответствующим преобразованием координат u_i в V^* является $u_{i'} = \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} u_i$.

б). Тензор валентности 2 в n-мерном пространстве V может быть дважды контравариантным, один раз контравариантным и один раз ковариантным, дважды ковариантным. Первые тензоры суть элементы $V \otimes V$, вторые — элементы $V \otimes V^*$ или $V^* \otimes V$ (при желании эти два пространства можно отождествить), третьи — элементы $V^* \otimes V^*$. Покажите, что координаты соответствующих тензоров преобразуются так, как указано в 1).

в). Подумайте об обобщении на тензоры более высокой валентности.

Упражнение. а). В евклидовом пространстве можно не отличать ковариантного вектора от контравариантного, если пользоваться ортонормированными базисами[43] Покажите, что в евклидовом пространстве тензоры бо́льшей валентности тоже можно свести к одним контравариантным тензорам. "Менее идейно" это означает, что можно не заботиться о том, ставить ли индексы вверху или внизу, если пользоваться только ортогональными (лучше сказать ортонормированными) координатами.

б). В евклидовом пространстве тензор валентности два, координаты которого имеют вид $T_{ij} = a_i b_j$, где a_i, b_i — координаты двух векторов a и b, называют диадой. Проверьте, что такая диада есть $a \otimes b$. Покажите, что каждый тензор валентности два является суммой нескольких диад. Каково минимальное число слагаемых-диад, суммой которых можно представить каждый тензор? Как выглядит матрица коэффициентов диады $a \otimes e_i$, где e_i — i-ый базисный вектор?

Чисто-ковариантные тензоры суть элементы тензорных произведений $(V^*)^{\otimes l} = \underbrace{V^* \otimes \ldots \otimes V^*}_{l \text{ раз}}$ (с различными l), а чисто-контравариантные — элементы тензорных произведений $V^{\otimes k} = \underbrace{V \otimes \ldots \otimes V}_{k \text{ раз}}$. Смешанные тензоры — элементы произведений, в которых перемножаются как пространства V, так и V^*.

4). Описанное в 3) построение $E \otimes F$ содержит элементы произвола — выбор базисов в E, F и G и нумерация их элементов. Однако этот произвол не оказывает существенного влияния, вроде того как свойства шахматной фигуры не зависят от того, сделана ли она из дерева или пластмассы. Потеряв ладью и желая всё-таки сыграть в шахматы, можно объявить ладьёй даже пуговицу! И эта пуговица сможет при случае не хуже настоящей ладьи поставить мат королю. Главное в шахматной

[43]Соответствующие декартовы координаты по традиции называют "ортогональными", хотя это название обращает внимание только на углы между базисными векторами, но не на их длины. Правильнее было бы говорить об ортонормированных координатах, но почему-то о базисах так говорят, а о координатах нет.

фигуре — не её материал и даже не её форма (пуговица! Значение формы фигуры состоит в том, что форма сразу показывает, какая это фигура, а насчёт пуговицы об этом надо специально помнить). Главными являются правила шахматной игры, указывающие, что и при каких обстоятельствах данная фигура может делать или, вернее, что с ней могут делать игроки.

Шахматная фигура может делать ходы, может съесть фигуру противника и, увы, быть съеденной самой — всё это при известных обстоятельствах, указанных в правилах. Ладью физически возможно передвинуть по диагонали, но такой ход правилами запрещён. Нечто в этом духе относится к тензорным произведениям. Они могут линейно отображаться в другие пространства, а те, в свою очередь, могут отображаться в них. Однако только некоторые из этих отображений специфичны для тензорных произведений, вроде как только некоторые из физически возможных перемещений специфичны для ладьи. Не то чтобы другие отображения совсем уж запрещались, как движение ладьи по диагонали, но к специфике тензорных произведений они не имеют отношения.

Так вот, при различных построениях тензорного произведения $E \otimes F$ имеется некоторое специфическое для него отображение и некоторые специфические правила насчёт других отображений. Тензорное произведение — это некоторое пространство вместе с этими отображением и правилами. Именно эти отображения и правила делают это пространство тензорным произведением, подобно тому как соглашение игроков плюс правила шахматной игры могут сделать ладьёй даже пуговицу.

Итак, привожу "абстрактное" определение тензорного произведения, основанное не на том, как оно построено (дерево? пластмасса? даже металл, если это пуговица?), а на его роли.

Тензорное произведение конечномерных векторных пространств E и F — это не просто какое-то векторное пространство G, а векторное пространство G вместе с билинейным отображением $f : E \times F \to G$ (т.е. пара (G, f)), если при этом выполняется следующее условие. Для любого векторного пространства H и любого билинейного отображения $g : E \times F \to H$ имеется ровно одно такое линейное отображение $h : G \to H$, что $g = h \circ f$. (Таким образом, тензорное произведение как бы "обслуживает" всевозможные билинейные отображения $E \times F$ куда угодно, и сверх того каждое такое отображение оно "обслуживает" единственным образом.) Через $x \otimes y$ по-прежнему обозначается $f(x, y)$.

Упражнение. Докажите, что тензорное произведение, построенное выше с использованием базисов и нумерации их элементов, является тензорным произведением в смысле “абстрактного” определения. (Таким образом, тензорные произведения в этом смысле существуют.)

Упражнение. Докажите, что тензорное произведения в абстрактном смысле единственно, если понимать единственность в духе этого определения — как взаимозаменяемость различных “конкретных реализаций” тензорного произведения в отношении играемых ими “ролей”, а более формально — понимая эту “единственность” в следующем смысле. Если (G, f) и (G_1, f_1) — тензорные произведения пространств E и F, то существует и притом единственный изоморфизм (обратимое линейное отображение) $i : G \to G_1$, обладающий такими свойствами:

$f_1 = \varphi \circ f$ (“с помощью φ можно перейти от одного из отображений f, f_1 к другому”);

для любого векторного пространства H и любого билинейного отображения $g : E \times F \to H$ те (единственные) линейные отображения $h : G \to H$ и $h_1 : G_1 \to H$, для которых $g = h \circ f$ и $g_1 = h_1 \circ f_1$, связаны с помощью φ: $g = g_1 \circ \varphi$.

Упражнение. Докажите ассоциативность тензорного произведения векторных пространств. А точнее, докажите следующее:

а). Определим тензорное произведение трёх векторных пространств E_1, E_2, E_3 как векторное пространство F вместе с трилинейным отображением $f : E_1 \times E_2 \times E_3 \to F$, обладающее тем свойством, что для любого векторного пространства G и любого трилинейного отображения $g : E_1 \times E_2 \times E_3 \to G$ имеется ровно одно такое линейное отображение $h : F \to G$, что $g = h \circ f$. (Таким образом, тензорное произведение $E_1 \otimes E_2 \otimes E_3$ как бы “обслуживает” всевозможные трилинейные отображения $E_1 \times E_2 \times E_3$ куда угодно, и сверх того каждое такое отображение оно “обслуживает” единственным образом.) Через $x \otimes y \otimes z$ обозначается $f(x, y, z)$.

б). Произведения $(E_1 \otimes E_2) \otimes E_3$ и $E_1 \otimes (E_2 \otimes E_3)$ являются тензорными произведениями E_1, E_2, E_3 в смысле определения из а).

Это, в частности, устанавливает “естественный” изоморфизм между всеми тремя произведениями. Во что переходит $(a \otimes b) \otimes c$ при этих изоморфизмах?

Собственно говоря, ассоциативность тензорного произведения векторных пространств отражает ассоциативность операции прямого перемножения множеств. По буквальному смыслу последнего понятия, множество $E_1 \times E_2 \times E_3$ состоит из троек (a, b, c) с $a \in E_1,\ b \in E_2,\ c \in E_3$, тогда как $(E_1 \times E_2) \times E_3$ — из пар $((a, b), c)$, первые элементы которых сами являются парами (a, b), а $E_1 \times (E_2 \times E_2)$ — из пар $(a, (b, c))$, вторые элементы которых сами являются парами (b, c). В буквальном смысле слова все эти три объекта

$$(a, b, c), \quad ((a, b), c) \quad \text{и } (a, (b, c)) \tag{74}$$

различны, так что множества

$$E_1 \times E_2 \times E_3, \quad (E_1 \times E_2) \times E_3 \quad \text{и } E_1 \times (E_2 \times E_2) \tag{75}$$

никак не могут совпадать друг с другом. Но между ними имеются естественные биекции, переводящие элементы (74) друг в друга. С помощью этих биекций мы "отождествляем множества (75) друг с другом". Это отождествление состоит в том, что мы можем заменять одно из этих множеств и его элементы другим из множеств (75) и его элементами. Мы делаем это автоматически, почти что бессознательно. Не в последнюю очередь этот автоматизм связан с единственностью используемых биекций — ведь если бы у нас было два "равноправных" способа совершить переход от $E_1 \times E_2 \times E_3$ и от (a, b, c) к $(E_1 \times E_2) \times E_3$ и к какой-то паре вида $((\,.\,,\,.\,),\,.\,)$, то, видимо, хотя бы иногда приходилось подумать, к какому из этих способов прибегнуть.

Прямое произведение двух множеств E и F тоже "коммутативно" в аналогичном смысле: заменяя пары (a, b) с $a \in E,\ b \in F$ парами (b, a), мы переходим от $E \times F$ к $F \times E$. При этом отображение

$$g : E \times F \to H \qquad (x, y) \mapsto g(x, y)$$

заменяется отображением

$$g_1 : F \times E \to H \qquad (y, x) \mapsto g_1(y, x) = g(x, y).$$

Если $E, F.H$ — векторные пространства и отображение g билинейно, то отображение g_1 тоже билинейно.

Упражнение. Исходя отсюда, докажите коммутативность тензорного умножения векторных пространств (что в основном сводится к пояснению, как эту коммутативность понимать).

Ассоциативность и коммутативность тензорного умножения позволяют заменить произведение нескольких пространств V и V^*, взятых в произвольном порядке, произведением того же числа пространств V и V^*, в котором сперва берутся "сомножители" V, а затем V^*. Скажем,

$$V \otimes V^* \otimes V^* \otimes V \otimes V = V \otimes V \otimes V \otimes V^* \otimes V^*.$$

Упражнение. Покажите, что прежние определения тензора в V в понятном (однако всё же каком?) смысле равносильно тому, что тензор, k раз контравариантный и l раз ковариантный, — это элемент пространства

$$V^{\otimes K} \otimes (V^*)^{\otimes l} = \underbrace{V \otimes \ldots \otimes V}_{k \text{ раз}} \otimes \underbrace{V^* \otimes \ldots \otimes V^*}_{l \text{ раз}}.$$

Упражнение. В 1) мы говорили о координатах $T^{i_1,\ldots,i_k}_{j_1,\ldots,j_l}$ тензора T в некоторой координатной системе (с базисом $\{e_i\}$) в исходном векторном пространстве V. Покажите, что это суть обычные координаты T как элемента соответствующего векторного пространства — пространства, являющегося надлежащим тензорным произведении пространств V и V^*, — в некоторой координатной системе в этом пространстве–тензорном произведении. Базис этой координатной системы состоит из всевозможных "произведений" $e_{i_1} \otimes \ldots \otimes e^*_{j_l}$, образованных k векторами базиса $\{e_i\}$ пространства V и l векторами взаимного базиса $\{e^*_i\}$ пространства V^*.

Стало быть, при использовании "дифференциальных" обозначений (особенно уместных, когда речь идёт о тензорах в T_pM)

$$T = T^{i_1,\ldots,i_k}_{j_1,\ldots,j_l} \frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \otimes \ldots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{i_k}} \otimes dx^{j_1} \otimes \ldots \otimes dx^{j_l}. \tag{76}$$

Подобная запись привлекается в различной степени для тензоров различных типов. Особенно часто она используется для чисто-ковариантных тензоров специального типа — так называемых антисимметрических. (Мы займёмся ими ниже. Наряду с обычным тензорным умножением для таких тензоров вводится ещё и другое умножение, специфически связанное с их антисимметричностью, и помимо формулы $T = T_{j_1,\ldots,j_l} dx^{j_1} \otimes \ldots \otimes dx^{j_l}$ (являющейся частным случаем (76) применительно к чисто-ковариантным тензорам) пишется аналогичная формула с использованием этого умножения.) Кроме того, нередко употребляется запись $X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ для векторов.

Упражнение. Пусть в n-мерном векторном пространстве V выбран некоторый базис. Зададимся произвольным набором n^{k+l} чисел $\{T^{i_1,\ldots,i_k}_{j_1,\ldots,j_l}\}$, "пронумерованных" индексами $i_1, \ldots, j_l$, каждый из которых может принимать всевозможные значения от 1 до n (независимо от остальных индексов). Существует ли тензор, координатами которого в данном базисе являются эти числа?

(Вопрос вполне резонный, и его уместно было бы задать ещё в 1), поскольку он связан как раз с данным там определением тензора. Ведь тензор в смысле 1) должен сопоставлять каждому базису некоторый набор чисел, а мы пока что сопоставили такой набор только одному-единственному базису. Можно, конечно, догадаться, какие наборы чисел надо сопоставить другим базисам, а потом проверить, что при этом получился действительно тензор. Это просто, но требует некоторой писанины. А теперь, имея несколько эквивалентных определений тензора, можно ответить на этот вопрос в уме, — как?)

Упражнение. Докажите, что тензорное произведение дистрибутивно в том смысле, что имеются естественные изоморфизмы

$$E \otimes (F \oplus G) = (E \otimes F) \oplus (E \otimes G), \qquad (E \oplus F) \otimes G = (E \otimes G) \oplus (F \otimes G).$$

(Здесь стоит знак равенства, а не знак изоморфизма $\approx$ или $\simeq$, потому что эти пространства не просто изоморфны, но между ними имеется некий "канонический", "стандартный" изоморфизм.)

Упражнение. Линейные операторы, действующие из конечномерного векторного пространства E в конечномерное векторное пространство F, сами естественным образом (каким именно?) образуют конечномерное векторное пространство $L(E, F)$. Докажите, что $L(E, F) = E^* \otimes F$. Учитывая указанные выше отождествления, можно сказать, что линейные отображения $V \to V$ являются тензорами в V валентности два, которые один раз контравариантны и один раз ковариантны.

Упражнение. Пусть $A : E \to E_1$, $B : F \to F_1$ — линейные отображения конечномерных векторных пространств. Придумайте отображение $A \otimes B : E \otimes F \to E_1 \otimes F_1$, "естественным образом" получающееся из этих A, B. Поскольку мы имеем различные определения тензорного произведения, то и $A \otimes B$ можно определять внешне по-разному, но если вам удалось найти правильные определения, они должны в конечном счёте совпадать (при отождествлении друг с другом определяемых по-разному тензорных произведений). Пусть $a_1, \ldots, a_k$ — базис E, $b_1, \ldots, b_l$

— базис F, $a'_1, \dots a'_{k'}$ — базис E_1 и $b'_1, \dots, b'_{l'}$ — базис F_1. Какую матрицу коэффициентов имеет отображение $A \oplus B$ при использовании базиса $\{a_i \otimes b_j\}$ в $E \otimes F$ и базиса $\{a'_i \otimes b'_j\}$ в $E_1 \otimes F_1$? (Поскольку элементы этих базисов нумеруются двумя индексами, то элементы последней матрицы естественно нумеровать четырьмя индексами (как?). Саму матрицу при этом иногда называют *произведением Кронекера* матриц A и B.)

Итак, если имеются линейные отображения конечномерных векторных пространств $A : E \to E_1$, $B : F \to F_1$, то с ними естественным образом связано отображение $A \otimes B : E \otimes F \to E_1 \otimes F_1$. Если $E = V$, $F = V^*$, $E_1 = W$, $F_1 = W^*$, то при заданном $A : V \to W$ автоматически привлекается $A^* : W^* \to V^*$. Когда A обратимо (изоморфизм векторных пространств), то A^* тоже обратимо, и мы помимо $A : E \to E_1$ имеем ещё $B = A^* : F \to F_1$, а потому приходим к

$$\begin{aligned} &\underbrace{A \otimes \ldots \otimes A}_{k \text{ раз}} \otimes \underbrace{A^* \otimes \ldots \otimes A^*}_{l \text{ раз}} : \\ &\quad \underbrace{V \otimes \ldots \otimes V}_{k \text{ раз}} \times \underbrace{V^* \otimes \ldots \otimes V^*}_{l \text{ раз}} \mapsto \underbrace{W \otimes \ldots \otimes W}_{k \text{ раз}} \times \underbrace{W^* \otimes \ldots \otimes W^*}_{l \text{ раз}}. \end{aligned} \tag{77}$$

Если же A не обратимо, то можно говорить только о

$$\underbrace{A \otimes \ldots \otimes A}_{k \text{ раз}} : \underbrace{V \otimes \ldots \otimes V}_{k \text{ раз}} \mapsto \underbrace{W \otimes \ldots \otimes W}_{k \text{ раз}}$$

и о

$$\underbrace{A^* \otimes \ldots \otimes A^*}_{l \text{ раз}} : \underbrace{W^* \otimes \ldots \otimes W^*}_{l \text{ раз}} \mapsto \underbrace{V^* \otimes \ldots \otimes V^*}_{l \text{ раз}}.$$

Упражнение. Когда A обратимо, то на отображение A можно посмотреть ещё и так, будто никакого отображения нет, а просто в V вводятся новые координаты. Скажем. в V с самого начала имеются координаты x^i, а в W — координаты y^i. Изоморфизм $A : V \to W$ позволяет рассматривать y^i как координаты в V: новыми координатами вектора $v \in V$ служат координаты вектора Av. Рассматривая координаты как функции на том векторном пространстве, можно сказать, что изоморфизм A позволяет ввести в V координаты $z^i = y^i \circ A$. Можно также сказать, что $z^i = A^* y^i$ (в этой записи мы рассматриваем y^i как однородные линейные функционалы на W).

а). Проверьте, что выражение для новых координат z^i вектора v через его старые координаты и матрицу коэффициентов отображения A

выглядит в точности так же, как формула, описывающая преобразование A в терминах координат x^i в V и y^i в W. (И что проверять тут нечего.)

б). Рассмотрите аналогичный вопрос для тензоров в V.

Выше я говорил об $\mathbb{R}^n$ как о евклидовом пространстве, подразумевая, что в случае надобности в этом пространстве используется скалярное произведение

$$\langle X, Y\rangle = \sum X^i Y^i \quad \text{для векторов } X = \sum X^i \frac{\partial}{\partial x^i}, \quad Y = \sum Y^i \frac{\partial}{\partial x^i}. \tag{78}$$

С более общей (по крайней мере, формально более общей) точки зрения евклидово пространство — это конечномерное векторное пространство V, снабжённое скалярным произведением $\langle\,.\,,\,.\,\rangle$. Скалярное произведение — это, в сущности, симметричная билинейная форма, обладающая тем дополнительным свойством, что $\langle X, X\rangle > 0$ при всех $X \neq 0$. В евклидовом пространстве имеются ортонормированные базисы, т.е. базисы $\{e_i\}$, для которых $\langle e_i, e_j\rangle = \delta_{ij}$, где уже встречавшийся нам "символ Кронекера" $\delta_{ij} = 0$ при $i \neq j$ и $\delta_{ii} = 1$. (Такой базис можно получить, применив процесс ортонормировки Грама–Шмидта к произвольному базису.) В ортонормированном базисе скалярное произведение имеет вид (78). Как уже говорилось, в соответствующих координатах различие между контра- и ковариантными тензорами исчезает. Если же не ограничиваться использованием таких координат, но и не забывать о скалярном произведении, то наряду с различием между контра- и ковариантными тензорами между ними возникает и некоторая связь. Она описывается с помощью так называемого "фундаментального (т.е. попросту основного) метрического тензора", представляющего собой просто следующую перефразировку скалярного произведения. Пусть при использовании декартовых координат с базисом $\{e_i\}$ билинейная форма $\langle\,.\,,\,.\,\rangle$ имеет коэффициенты g_{ij}:

$$\langle X, Y\rangle = g_{ij} X^i i Y^j \quad \text{для } X = X^i e_i,\ Y = Y^i e_i,$$

или, что равносильно, таковы коэффициенты квадратичной формы "квадрат длины":

$$\|X\|^2 = g_{ij} X^i X^j,$$

или, наконец, $g_{ij} = \langle e_i, e_j\rangle$. Тогда $\{g_{ij}\}$ — дважды ковариантный тензор, который и называется метрическим (а вдобавок ещё и фундаментальным).

Упражнение. а). Уже говорилось, что скалярное произведение определяет изоморфизм векторных пространств $V \to V^*$, переводящий вектор $X \in V$ в однородный линейный функционал $\xi : Y \to \langle X.Y \rangle$. Проверьте, что $\xi_i = g_{ij}X^i$.

б). Покажите, что норма линейного функционала ξ (отвечающая норме $|\,.\,|$ в V: $|\xi| = \sup_{X \neq 0} \frac{\xi(X)}{|X|}$) тоже выражается как квадратный корень из некоторой квадратичной формы на пространстве V^*. Коэффициенты последней обозначим через g^{ij}, так что $|\xi|^2 = g^{ij}\xi_i\xi_j$. Докажите, что

$$g_{ij}g^{jk} = 0 \text{ при } i \neq k \ \text{ и } = 1 \text{ при } i = k.$$

Отсюда следует, что если $\xi_i = g_{ij}X^j$, то $X^i = g^{ij}\xi_j$.

Пользуясь введённым выше символом Кронекера δ_{ij}, можно было бы сказать, что $g_{ij}g^{jk} = \delta_{ik}$. Но так как в левой части индекс i расположен внизу, а k — вверху, то вдобавок к прежнему δ_{ij} мы введём ещё обозначение δ_i^j для той же самой системы величин, т.е. примем, что δ_i^j равно 0 при $i \neq j$ и равно 1 при $i = j$.

в). Сопоставим каждой координатной системе в V набор чисел $\{\delta_j^i\}$. Докажите, что тем самым определяется некоторый тензор валентности два, который в полном соответствии с расположением его индексов является один раз контравариантным и один раз ковариантным. Такие тензоры соответствуют линейным отображениям $V \to V$. Какому отображению отвечает тензор δ_j^i?

г). Пусть $\{T_{j_1,\ldots,j_l}^{i_1,\ldots,i_k}\}$ — смешанный тензор в V, контравариантный $k \neq 0$ раз и ковариантный $l \neq 0$ раз. Ограничиваясь для начала только ортогональными (ортонормированными!) координатами в V, мы “не чувствуем” различия между его контра- и ковариантными индексами. Это можно выразить, в частности, такими словами: если (при ограничении только ортогональными (...-нормальными!) координатами) те же самые числа переобозначить через $\{T_{i_1,\ldots,i_k,j_1,\ldots,j_l}\}$, то при переходе от одной ортогональной (!) системы координат к другой новая система чисел преобразуется так, как должны преобразовываться координаты ковариантного тензора. Покажите, что имеется ковариантный тензор, координаты которого $\{T_{i_1,\ldots,i_k,j_1,\ldots,j_l}\}$ в ортогональной (!) координатной совпадают с координатами $\{T_{j_1,\ldots,j_l}^{i_1,\ldots,i_k}\}$ исходного тензора. В общем же случае координаты нового тензора

$$T_{i_1,\ldots,i_k,j_1,\ldots,j_l} = g_{i_1h_1}\ldots g_{i_kh_k}T_{j_1,\ldots,j_l}^{h_1,\ldots,h_k}.$$

д). Аналогично можно перейти и к чисто-контравариантному тензору, используя тензор g^{ij}. Как это делается?

Мы "спустили вниз" все верхние индексы тензора $\{T^{i_1,\ldots,i_k}_{j_1,\ldots,j_l}\}$. Можно было бы "спустить вниз" только часть этих индексов и, при желании, одновременно "поднять вверх" часть его нижних индексов. Собственно, при этом надо заранее условиться, на какое место внизу (вверху) мы будем опускать (поднимать) тот или иной верхний (нижний) индекс. Обычно это место фиксируется посредством следующего соглашения. В произведении пространств V и V^* мы теперь берём эти сомножители в произвольном порядке и больше не переставляем их, собирая все V^* в конце. Перемещение индекса соответствует тому, что соответствующий сомножитель V или V^* заменяется на изоморфный ему сомножитель V^* или V, стоящий на том же месте (изоморфизм, о котором идёт речь, — это, разумеется, изоморфизм между V и V^*, отвечающий используемому скалярному произведению; "замена" множителя на изоморфный ему множитель подразумевает, что одно тензорное произведение изоморфно отображается на другое посредством изоморфизма, являющегося тензорным произведением тождественных изоморфизмов неизменяемых сомножителей и указанного изоморфизма сомножителя, подлежащего замене). В общем случае и особенно при использовании координатных обозначений это выглядело бы громоздко, но вполне достаточно пояснения на конкретном примере. Рассмотрим тензор, трижды контравариантный и дважды ковариантный. Это должен быть элемент пространства $W_1 \otimes W_2 \otimes W_3 \otimes W_4 \otimes W_5$, где каждое W_i есть V или V^*, причём имеется три сомножителя V и два сомножителя V^*. Теперь мы уточняем, какие именно сомножители суть V и какие — V^*. Например, пусть $W_2 = W_3 = V^*$, а остальные $W_i = V$. Отразим это в записи компонент соответствующих тензоров: будем писать не $T^{j_1,j_2}_{i_1,i_2,i_3}$, а $T^{i_1,\cdot,\cdot,i_2,i_3}_{\cdot,j_1,j_2,\cdot,\cdot}$. Точка, стоящая над нижним индексов или под верхним индексом, указывает, на какое именно место этот индекс может подниматься (соответственно, опускаться). Когда в тензорном произведении второй сомножитель $W_2 = V^*$ заменяется (с помощью метрического тензора, т.е. скалярного произведения) на V и на соответствующие тензоры действует естественное отображение

$$V \otimes V^* \otimes V^* \otimes V \otimes V \to V \otimes V \otimes V^* \otimes V \otimes V,$$

то у координат нижний индекс j_1 поднимается вверх на второе место (а там, где он стоял раньше, ставится точка); получается

$$T^{i_1,j_1,.,i_2,i_3}_{.,.,j_2,.,.} = g^{j_1,h} T^{i_1,.,.,i_2,i_3}_{.,h,j_2,.,.}.$$

Подняв вверх оба нижних индекса у $T^{i_1,.,.,i_2,i_3}_{.,j_1,j_2,.,.}$ и опустив вних первй верхний, получим тензор $\{T^{.,j_1,j_2,i_2,.}_{i_1,.,.,.,i_3}\}$, а опустив вниз все индексы, кроме первого, получим тензор $\{T^{i_1,.,.,.,.}_{.,j_1,j_2,i_2,i_3}\}$.

Упражнение. а). Как выражаются последние два тензора через исходный тензор и метрический тензор?

б). Сколько всего новых тензоров может получиться из исходного $\{T^{i_1,.,.,i_2,i_3}_{.,j_1,j_2,.,.}\}$? Указание: речь идёт о том, сколькими способами можно расположить часть из пяти индексов i_1, j_1, j_2, i_2, i_3 внизу, а остальную часть — вверху, не изменяя их порядка.)

Эти операции “подъёма” и “опускания” индексов получили несколько ироническое название ”жонглирования индексами”.

Упражнение. Покажите, что если в V введено скалярное произведение $\langle , . , \rangle$, то его можно перенести во все пространства $V^{\otimes k} \otimes (V^*)^{\otimes l}$ любым из следующих способов, которые равносильны друг другу (причём в некоторых из них привлекаются координаты и потому при этом способе надо бы доказывать независимость результата от конкретного выбора координатной системы, но в других никакие координаты не используются).

а). Пусть $\{g_{ij}\}$ — метрический тензор, отвечающий данному скалярному произведению (а $\{g^{ij}\}$, как обычно, состоит из коэффициентов матрицы, обратной к матрице (g_{ij})). Для тензоров S и T, k раз контравариантных и l раз ковариантных, полагаем

$$\langle S, T \rangle = g_{i_1,h_1} \ldots g_{i_k,h_k} g^{j_1,m_1} \ldots g^{j_l,m_l} S^{i_1,\ldots,i_k}_{j_1,\ldots,j_l} T^{h_1,\ldots,h_k}_{m_1,\ldots,m_l}.$$

Это равносильно тому, что с помощью “жонглирования индексами” мы превращаем один из перемножаемых тензоров, — скажем, S, — в чисто-ковариантный тензор $\widetilde{S}$, другой — в чисто-контравариантный тензор $\widetilde{T}$, а затем образуем тензорное произведение $\widetilde{S} \otimes \widetilde{T}$ и производим в нём свёртывание по всем индексам, взятым в надлежащем порядке.

б). Пусть $\{e_i\}$ — ортонормированный базис в V, а $\{e^{*i}\}$ — взаимный с ним базис в V^* (он тоже ортонормированный). Объявляем базис $e_{i_1} \otimes \ldots \otimes e_{i_k} \otimes e^{*j_1} \otimes \ldots \otimes \otimes e^{*j_l}$ пространства $V^{\otimes k} \otimes (V^*)^{\otimes l}$ ортонормированным.

в). Функция

$$V^k \times (V^*)^l \times V^k \times (V^*)^l \to \mathbb{R}$$

$$(\underset{1}{X},\ldots,\underset{k}{X},\overset{1}{\xi},\ldots,\overset{l}{\xi},\underset{1}{Y},\ldots,\underset{k}{Y},\overset{1}{\eta},\ldots,\overset{l}{\eta}\mapsto\prod_{i=1}^{k}\langle\underset{i}{X},\underset{i}{Y}\rangle\prod_{j=1}^{l}\langle\underset{j}{\xi},\underset{j}{\eta}\rangle$$

является полилинейной. Исходя отсюда, перейдите сперва к некоторой линейной функции

$$V^{\otimes k}\otimes(V^*)^{\otimes l}\otimes V^{\otimes k}\otimes(V^*)^{\otimes l}\to\mathbb{R},$$

а затем — к билинейной функции (линейной по тензорным произведениям, заключённым в скобки)

$$(V^{\otimes k}\otimes(V^*)^{\otimes l})\times(V^{\otimes k}\otimes(V^*)^{\otimes l})\to\mathbb{R},$$

которая и принимается за нужное нам скалярное произведение в $V^{\otimes k}\otimes(V^*)^{\otimes l}$ (почему она имеет те свойства, которыми должно обладать скалярное произведение?).

Замечание. Тензор $T=\{T^i_j\}$, один раз ковариантный и один раз контравариантный, можно рассматривать как линейный оператор в основном пространстве V (переводящий вектор $X=\{X^i\}$ в $Y=\{Y^i\}$, где $Y^i=T^i_jX^j$). Пусть V снабжено скалярным произведением $\langle\,.\,,\,.\,\rangle$. Тогда можно говорить как о норме $\|T\|$ оператора T (она равна $\sup_{X\neq0}\frac{|TX|}{|X|}$), так и о скалярном произведении $\langle\,.\,,\,.\,\rangle$ в $V\otimes V^*$, определяемом на основании скалярного произведения в V так, как описано выше. Тогда $\sqrt{\langle T,T\rangle}$ — некоторая норма в пространстве $V\otimes(V^*)$. Следует предупредить, что эти две нормы, вообще говоря, различны.

Упражнение. Приведите пример, подтверждающий, что, вообще говоря, $\|T\|\neq\sqrt{\langle T,T\rangle}$. Какая из этих двух норм больше (или, может быть, для одних T больше одна норма, а для других — другая?).

Помимо сказанного выше об евклидовых пространствах, имеется также более общий случай, когда в V выделена симметричная билинейная форма, для которой квадратичная форма $\langle X,X\rangle$ является знакопеременной, при этом требуют, чтобы она была невырожденной. Последнее свойство допускает две эквивалентные формулировки: а) матрица коэффициентов этой формы — невырожденная; б) отображение $V\to V$, переводящее вектор X в линейный функционал $Y\mapsto\langle X,Y\rangle$, является изоморфизмом. (Почему они равносильны?) В этом случае говорят о псевдоевклидовом пространстве; впрочем, приставку "псевдо" часто опускают. Саму форму форму $\langle\,.\,,\,.\,\rangle$ называют псевдоскалярным произведением;

здесь приставку “псевдо” опускают ещё чаще. Вместо ортонормированных базисов в этом случае особую роль играют базисы, в которых $\langle X, Y\rangle$ приводится к виду $\sum_i \varepsilon_i X^i Y^i$ с $\varepsilon_i = \pm 1$, причём обычно предписывают, чтобы в последней сумме сперва шли ε_i с одним знаком, а затем — с другим. При использовании таких базисов различия между контра- и ковариантными тензорами хотя и не совсем исчезают, но …

Упражнение. К чему сводится это различие в координатных системах указанного типа?

11. Об алгебраических операциях над тензорами.

Очевидно, что тензоры одного типа (одинаковое число раз контра- и ковариантные или, в бóльшей общности, принадлежащие одному и тому же пространству вида $E_1 \otimes \ldots \otimes E_m$) можно складывать друг с другом и умножать на скаляры — они образуют векторное пространство. Но есть операции, специфические для тензоров. О таких операциях не приходится говорить применительно к элементам произвольного векторного пространства. Некоторые из них выполняются в пределах одного тензорного произведения нескольких векторных пространств, в другое операции одновременно вовлекаются тензоры из разных тензорных произведений. А есть операции, действующие на каждый тензор по отдельности. В общей теории алгебраических систем такие операции называют *унарными*, тогда как *бинарные операции* производятся над двумя тензорами (или иными объектами, когда речь идёт не о тензорах, а о чём-то ещё). В векторных пространствах тоже имеются общие для всех них унарные операции, как и бинарные. Фактически и те, и другие уже упоминались. Основными унарными операциями там являются операции умножения векторов на фиксированные скаляры[44], а основная бинарная операция — сложение двух векторов. Этот п. посвящён некоторым унарным операциям, специфическим для тензоров. Что касается бинарных операций, то в основную специфически тензорную операцию — операцию тензорного умножения — вовлекаются тензоры различных типов (принадлежащие различным пространствам $V^{\otimes k} \otimes (V^*)^{\otimes l}$)[45]. Она нам фактически уже

[44]Впрочем, умножение векторов на скаляры можно рассматривать как своеобразную бинарную операцию, аргументы которой принадлежат различным множествам — полю скаляров и векторному пространству. Если же говорить об унарных операциях, отвечающих различным скалярам, то закон дистрибутивности

$$\forall \lambda \in \mathbb{R},\ \forall x, y \in V \qquad \lambda(x+y) = \lambda x + \lambda y$$

надо считать свойством каждой из этих операций, а другой закон дистрибутивности

$$\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R},\ \forall x \in V \qquad (\lambda+\mu)x = \lambda x + \mu x \text{ —}$$

свойством, связывающим три унарные операции (умножение на λ, на μ и на $\lambda + \mu$). Такая точка зрения вполне допустима и, возможно, в некоторых случаях вполне уместна, но всё-таки кажется неестественным считать оба эти закона качественно отличными друг от друга.

[45]Из-за этого я, собственно говоря, фактически употребляю термин “бинарная операция” не совсем в том смысле, как это принято в теории алгебраических систем. В

знакома. Если исходить из определения 4), то речь идёт об отображении

$$\big(V^{\otimes k}\otimes(V^*)^{\otimes l}, V^{\otimes h}\otimes(V^*)^{\otimes m}\big)\to$$
$$\to\big(V^{\otimes k}\otimes(V^*)^{\otimes l}\big)\otimes\big(V^{\otimes h}\otimes(V^*)^{\otimes m}\big)=V^{\otimes k+h}\otimes(V^*)^{\otimes l+m}$$

$$(T,S)\mapsto T\oplus S\ .$$

Упражнение. Покажите, что в терминах определения 1) понятия тензора эта операция описывается так. Пусть $T=\{T^{i_1,\dots,i_k}_{j_1,\dots,j_l}\}$, $S=\{S^{p_1,\dots,p_h}_{q_1,\dots,q_m}\}$. Тогда $T\otimes S=R$, где R имеет координаты

$$R^{i_1,\dots,i_k,p1,\dots,p_h}_{j_1,\dots,j_l,q_1,\dots,q_m}=T^{i_1,\dots,i_k}_{j_1,\dots,j_l}S^{p_1,\dots,p_h}_{q_1,\dots,q_m}.$$

Как описать её в терминах определения 2)? (В терминах определения 3), по-моему, короткого и более или менее изящного описания не получается.

Теперь мы опишем два типа унарных операций над тензорами. (Собственно, это целые два семейства операций.)

Первая из них называется свёртыванием. Она применяется к смешанным тензорам.

Пусть имеется смешанный тензор $T=\{T^{i_1,\dots,i_k}_{j_1,\dots,j_l}\}$ валентности $k+l$, k раз контравариантный и l раз ковариантный. Свёртывание этого тензора по r-му верхнему и s-му нижнему индексам состоит в том, что мы приравниваем эти индексы друг другу и производим суммирование по полученному тем самым повторяющемуся сверху и снизу индексу. В результате получается тензор S с координатами

$$S^{i_1,\dots,i_{k-1}}_{j_1,\dots,j_{l-1}}=T^{i_1,\dots,i_{r-1},h,i_r,\dots,i_{k-1}}_{j_1,\dots,j_{s-1},h,j_s,\dots,j_{l-1}}\ , \tag{79}$$

$k-1$ раз контравариантный и $l-1$ раз ковариантный. (Справа в (79) на r-м месте сверху и на s-м месте снизу стоит один и тот же индекс h. Так как этот индекс повторяется сверху и снизу, то, согласно обычному правилу, по этому индексу производится суммирование. Так как

последней бинарная операция действует в некотором множестве A (“основном множестве или носителе алгебраической системы”), будучи отображением $A\times A\to A$. У нас же речь идёт об отображении типа $A_1\times A_2\to A_3$ с (вообще говоря) различными A_i.

Аналогичное замечание можно сделать в связи с использованием ниже термина “унарная операция” — в теории алгебраических систем таковая должна быть некоторым отображением $A\to A$, а одна из наших унарных операций действует из одного пространства тензоров в другое.

по нему производится суммирование, то в окончательном результате S этот индекс не упоминается. В $T^{i_1,\dots,i_k}_{j_1,\dots,j_l}$ на $(r+1)$-м месте справа стоит i_{r+1}, но в правой части (79) первые r индексов вверху суть $i_1,\dots,i_{r-1},h$, и после них мы, естественно, пишем i_r, так что этот индекс оказывается на $(r+1)$-м месте. Далее нумерация вверху в правой части (79) стоят следующие по порядку i_{r+2} (на $(r+1)$-м месте),…,i_{k-1} (на последнем, т.е. k-м, месте). Аналогично внизу на s-м месте стоит h, и потому номера следующих нижних индексов в (79) на 1 меньше, чем в $T^{i_1,\dots,i_k}_{j_1,\dots,j_l}$.)

Как обычно, когда определение даётся в терминах координат, надо убедиться в его независимости от используемой координатной системы. (Читатель может проделать это в качестве полезного упражнения, отправляясь от определения тензоров согласно 1).) И, как это часто бывает, определение можно перефразировать таким образом, что координаты и координатные системы в нём вообще не будут использоваться.

Начнём с полилинейного отображения (а оно и правда полилинейно?)

$$V^k \times (V^*)^l \to V^{k-1} \otimes (V^*)^{l-1} \tag{80}$$

$$(\underset{1}{X},\dots,\underset{k}{X},\overset{1}{\xi},\dots,\overset{l}{\xi}) \mapsto$$
$$\mapsto \overset{s}{\xi}(\underset{r}{X})\,\underset{1}{X}\otimes\dots\otimes\underset{r-1}{X}\otimes\underset{r+1}{X}\otimes\dots\otimes\underset{k}{X}\otimes\overset{1}{\xi}\otimes\dots\otimes\overset{s-1}{\xi}\otimes\overset{s+1}{\xi}\otimes\dots\otimes\overset{l}{\xi} \tag{81}$$

(где при $r=1,\ s=1,\ r=k$ или $s=l$ правую часть надо понимать не совсем буквально, напр. при $r=1$ стоящее в начале произведения выражение $\underset{1}{X}\otimes\dots\otimes\underset{r-1}{X}$ отсутствует. Иногда в подобных случаях прибегают к такому соглашению: если в некотором упорядоченном наборе (размещении) символов[46] какие-то из них надо опустить, то над ними ставят знак$\widehat{\ }$(“крышку”). При таком соглашении (81) можно записать в виде

$$(\underset{1}{X},\dots,\underset{k}{X},\overset{1}{\xi},\dots,\overset{l}{\xi}) \mapsto \overset{s}{\xi}(\underset{r}{X})\,\underset{1}{X}\otimes\dots\otimes\widehat{\underset{r}{X}}\otimes\dots\otimes\underset{k}{X}\otimes\overset{1}{\xi}\otimes\dots\otimes\widehat{\overset{s}{\xi}}\otimes\dots\otimes\overset{l}{\xi}\,. \tag{82}$$

[46]Пользуюсь случаем напомнить терминологию. Как уже сказано, упорядоченные наборы нескольких символов называют их размещениями. Если символы берутся из некоторого множества, состоящего из l элементов, то говорят о размещении l элементов (символов) по k. При этом не обязательно, чтобы все символы из данного множества входили в размещение. Оно может быть размещением с повторениями, т.е. допускается, что при каких-то $j \neq h$ будет $a_j = a_h$.

У нас не будет нужды часто прибегать к этому соглашению, но стоит иметь его в виду.)

Упражнение. Полилинейное отображение (80) обычным образом определяет некоторое линейное отображение $V^{\otimes k} \otimes (V^*)^{\otimes l} \to V^{\otimes k-1} \otimes (V^*)^{\otimes l-1}$. Покажите, что оно совпадает со свёртыванием тензоров $\{T^{i_1,\dots,i_k}_{j_1,\dots,j_l}\}$ по r-ому верхнему и s-ому нижнему индексу.

Чаще всего свёртывание выступает совместно с операцией тензорного произведения тензоров: сперва из двух тензоров T, S получается тензор $T \otimes S$, а затем его свёртывают по некоторому верхнему и нижнему индексам, причём один из этих индексов в $T \otimes S$ фигурирует как индекс у координат T, а другой — как индекс у координат S. Например, линейное отображение $A : V \to V$ является тензором, один раз ковариантным и один раз контравариантным; координаты этого тензора суть элементы привычной матрицы коэффициентов (a^i_j) этого преобразования. Для вектора X (с координатами X^i) i-ая координата вектора AX равна $a^i_j X^j$. Очевидно, это есть результат свёртывания тензора $A \otimes X$ по единственному нижнему индексу у координат тензора A и единственному верхнему индексу у координат тензора X.

Упражнение. Покажите, что произведение AB линейных отображений $A, B : V \to V$ получается при некотором свёртывании тензора $A \otimes B$.

Другую унарную операцию мы опишем, ограничиваясь на некоторое время только чисто контравариантными или чисто ковариантными тензорами (к которым она применяется чаще всего).

У такого тензора $\{T^{i_1,\dots,i_k}\}$ или $\{T_{i_1,\dots,i_k}\}$ можно переставить индексы, что, вообще говоря, приводит к новому тензору. Здесь я исходил из определения 1). Исходя из определения 2), надо переставлять аргументы у полилинейной функции, а исходя из определений 3) и 4) — переставлять множители V или V^* в тензорном произведении

$$V^{\otimes k} = \underbrace{V \otimes \ldots \otimes V}_{k \text{ раз}}, \quad \text{соответственно, } (V^*)^{\otimes k} = \underbrace{V^* \otimes \ldots \otimes V^*}_{k \text{ раз}}.$$

С этим, как говорилось, связан определённый гомоморфизм (в данном случае — автоморфизм) пространства V^n или $(V^*)^n$ — само оно не меняется, но его элементы, вообще говоря, отображаются в другое элементы.

Когда индексы (или аргументы у полилинейной функции, сомножители V или V^*) переставляются, то говорят, что на эти индексы (или аргументы, сомножители …) действуют подстановки. Последние, стало быть, действуют и на тензоры.

При определении действия подстановки на тензоры возможны (и даже напрашиваются, а потому и встречаются в литературе) два варианта. (На самом деле два варианта возникают и раньше — при определении действия подстановки на индексы, аргументы и т.д.) Впрочем, нас интересуют такие тензоры, которые под действием подстановки либо переходят в себя, либо иногда переходят в себя, а иногда меняют знак, причём это зависит от чёткости подстановки. Таковые оказываются одними и теми же тензорами при обоих вариантах определения действия подстановок на тензоры. Значит, для наших целей выбор варианта в конечном счёте не важен. Но ради определённости надо же сделать какой-нибудь выбор. И во то же время хочется, чтобы читатель не испытывал недоумения, столкнувшись с другим выбором. Поэтому я остановился на этих вопросах довольно подробно, "раскладывая всё по полочкам". В результате активный читатель вполне может прийти к выводу, что всё это тривиально и незачем тратить столько времени и места на такую ерунду. Я согласен с первым, но не со вторым — пусть активный читатель вспомнит, было ли это ерундой с самого начала или же будучи, действительно, не особенно сложным с самого начала, ерундой стало по прочтении?

Сперва два слова об умножении в группе подстановок (по другой терминологии — перестановок[47]) степени k, обозначаемой через $\mathfrak{S}_k$. Принято считать, что по "первичному" определению подстановки степени k действуют на множестве $\{1, 2, \ldots, k\}$, при этом подстановку α, переводящую 1 в i_1, 2 — в i_2, …, k — в i_k, обозначают через

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & k \\ i_1 & i_2 & \ldots & i_k \end{pmatrix}. \tag{83}$$

Замечу, что в принципе ту же подстановку можно обозначить и иначе, выписав в верхней строчке символы $1, 2, \ldots, k$ в произвольном порядке и подписав в нижней строчке под каждым символом j тот символ i_j, в который символ j переводится данной подстановкой. Имеется некоторое

[47] Я придерживаюсь более детализированной терминологии, при которой название "перестановка" употребляется только для размещений без повторения n элементов по n. Впрочем, менее формально я порой говорю о перестановке между собой двух или более объектов.

несоответствие между обычным обозначением для композиции функций и распространённым обозначением для произведения подстановок. Пусть $\alpha, \beta \in \mathfrak{S}_k$. Согласно “функциональному” обозначению, $\alpha\beta$ должно обозначать подстановку $i \mapsto \alpha(\beta(i))$. А для подстановок чаще принимают, что $\alpha\beta$ переводит i в $\beta(\alpha(i))$. Это связано с правилом перемножения символов типа (83):

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & k \\ i_1 & i_2 & \dots & i_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & i_k \\ j_1 & j_2 & \dots & j_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & k \\ j_{i_1} & j i_2 & \dots & j_{i_k} \end{pmatrix}.$$

Словесное описание данного правила таково. Пусть в обозначении $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & k \\ i_1 & i_2 & \dots & i_k \end{pmatrix}$ для α под числом h, написанном в верхней строке, в нижней строке стоит i_h (т.е. $\alpha(h) = i_h$). Найдём число i_h в верхней строке обозначения $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & i_k \\ j_1 & j_2 & \dots & j_k \end{pmatrix}$ для β. Тогда то число j_{i_h}, которое стоит в нижней строке этого обозначения для β под i_h, и есть $(\alpha\beta)(h)$, т.е. это число стоит в нижней строке обозначении для $\alpha\beta$ под h. Иными словами, если записать вторую подстановку β в виде

$$\beta = \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \dots & i_k \\ h_1 & h_2 & \dots & h_k \end{pmatrix}$$

(где, разумеется, $h_j = \beta(i_j)$), то

$$\alpha\beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & k \\ i_1 & i_2 & \dots & i_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \dots & i_k \\ h_1 & h_2 & \dots & h_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & k \\ h_1 & h_2 & \dots & h_k \end{pmatrix}. \tag{84}$$

Я буду пользоваться именно этим правилом, лишь эпизодически в нескольких ближайших абзацах вспоминая о другом.

Начиная с действия $\mathfrak{S}_k$ на $\{1, 2, \dots, k\}$[48], мы определим действие $\mathfrak{S}_k$ на других множествах, состоящих из упорядоченных наборов символов, из функций на $\{1, 2, \dots, k\}$ или на тех же упорядоченных наборах, из тензоров .... Здесь, как уже говорилось, возникают варианты (в конечном счёте из-за двух вариантов действия $\mathfrak{S}_k$ на $\{1, 2, \dots, k\}$). Например, что понимать под действием подстановки α вида (83) на упорядоченный набор (размещение) каких-то k символов (не обязательно чисел от

[48]Собственно, даже с двух действий. Забавная ситуация: элементы множества $\mathfrak{S}_k$ действуют на $\{1, 2, \dots, k\}$ в обоих случаях одинаково, а действия различны, потому что различны умножения в $\mathfrak{S}_k$.

1 до k[49]) $(a_1, a_2, \dots, a_k)$? Здесь имеются две возможности (вроде двух возможностей для произведения подстановок). Можно принять, что при этом действии символ a_j, стоящий на j-м месте, в новом размещении оказывается на i_j-м (т.е. на $\alpha(j)$-ом) месте. А на j-ое место в размещении $\alpha(a_1, a_2, \dots, a_k)$ при этом перейдёт $a_{\alpha^{-1}(j)}$. Но не менее естественно принять, что в результате этого действия в размещении $\alpha(a_1, a_2, \dots, a_k)$ на j-ое место попадает символ $a_{\alpha(j)}$. Таким образом, мы имеем два варианта действия подстановки α вида (83) на упорядоченный набор (размещение) $(a_1, a_2, \dots, a_k)$:

$$\alpha(a_1, a_2. \dots, a_k) = (a_{\alpha^{-1}(1)}, a_{\alpha^{-1}(2)}, \dots, a_{\alpha^{-1}(k)}), \tag{85}$$

$$\alpha(a_1, a_2. \dots, a_k) = (a_{\alpha(1)}, a_{\alpha(2)}, \dots, a_{\alpha(k)}). \tag{86}$$

Вокруг этих соглашений можно развести некую науку. Левое (правое) действие группы G на множестве M — это такое отображение

$$G \times M \to M \quad \text{(образ пары } (g, m) \text{ обозначается через } gm\text{)},$$

соответственно,

$$M \times G \to M \quad \text{(образ пары } (m, g) \text{ обозначается через } mg\text{)},$$

что $\forall g, h \in G \ \forall m \in M$

$$(gh)m = g(hm), \quad \text{соответственно}, \quad m(gh) = (mg)h.$$

Упражнение. Проверьте, что от левого действия можно перейти к правому, приняв, что при последнем образом пары (m, g) служит[50] $m{\cdot}g = g^{-1}m$. А как перейти от правого действия к левому?

Упражнение. а). Проверьте, что при "функциональном" перемножении подстановок мы фактически имеем дело с левым, а при обычном перемножении (84) — с правым действием группы $\mathfrak{S}_k$ на множестве $\{1, 2, \dots, k\}$.

---

[49]На самом деле у нас далее символы a_i чаще всего будут натуральными числами, могущими принимать значения от 1 до n, так что мы будем иметь дело с размещениями n символов $\{1, \dots, n\}$ по k. Но пока что это не важно.

[50]Я на минуту изменил обозначение, добавив точку, дабы с одного взгляда было ясно, что речь идёт о некоем новом действии.

б). Заметим, что в этих двух случаях мы имеем дело с различными умножениями в одном и том же множестве $\mathfrak{S}_k$, т.е. формально, с двумя разными группами. Укажите естественный изоморфизм между ними. (В предыдущем упражнении мы изменяли смысл выражения "образ элемента $m \in M$ под действием элемента g группы G", сейчас же оно не меняется, а меняется умножение в группе.)

в). Как, пользуясь обычным перемножением подстановок (84), ввести всё-таки не правое, а левое действие $\mathfrak{S}_k$ на $\{1, 2, \dots, k\}$? (Указание. См. предыдущее упражнение. Ответ: $\alpha \cdot j = \alpha^{-1}(j)$. В отличие от б), теперь изменён смысл выражения "образ элемента $i \in \{1, 2, \dots, k\}$ под действием элемента α группы $\mathfrak{S}_k$", зато в самой группе ничего не изменилось.)

Обратившись на момент к "функциональному" перемножению подстановок, я больше не буду им пользоваться — в дальнейшем подстановки перемножаются согласно (84). Само определение подстановки выдвигает на первый план правое действие $(j, \alpha) \mapsto \alpha(j)$ группы $\mathfrak{S}_k$ на $\{1, 2, \dots, k\}$, хотя надо иметь в виду и левое действие $(\alpha, j) \mapsto \alpha^{-1}(j)$. Было бы последовательнее вместо $\alpha(j)$ писать $j\alpha$, но я пишу $\alpha(j)$, уступая традиции, хотя при этом получается, что

$$(\alpha\beta)(j) = \beta(\alpha(j)), \quad \text{т.е. } \alpha\beta = \beta \circ \alpha \tag{87}$$

(справа α и β рассматриваются как отображения множества $\{1, 2, \dots, k\}$ на себя и берётся их композиция в указанном порядке). Что поделаешь — традиция имеет свои права[51]. Резюмирую:

$$\begin{aligned} (\alpha, j) &\mapsto \alpha^{-1}(j) \text{ — левое действие } \mathfrak{S}_r \text{ на } \{1, 2, \dots, k\}; \\ (j, \alpha) &\mapsto \alpha(j) \text{ — правое действие } \mathfrak{S}_k \text{ на } \{1, 2, \dots, k\}. \end{aligned} \tag{88}$$

заметим, что преобразования $\{1, 2, \dots, k\} \to \{1, 2, \dots, k\}$, получающиеся при левом и правом действии подстановки α, взаимно обратны.

[51] О несогласованности речи по другому поводу было сказано (третья глава "Евгения Онегина"):

Как уст румяных без улыбки,

Без грамматической ошибки

Я русской речи не люблю.

Другой классик сказал: "Если на клетке слона написано "буйвол", не верь глазам своим". У нас такой же случай: глаза видят, что элемент α действующей группы $\mathfrak{S}_k$ стоит слева от j, но написано, что действие — правое, значит, вопреки видимости подразумевается, что α действует на j справа.

Упражнение. Пусть B^M — множество функций на множестве M со значениями в каком-нибудь множестве B[52]. Пусть задано правое (левое) действие группы G на M. Определим для функции $\varphi : M \to B$ и для $g \in G$ новую функцию $g\varphi$, соответственно, φg:

$$\begin{aligned} (g\varphi)(m) &= \varphi(mg) \text{ в случае правого действия } G \text{ на } M, \\ (\varphi g)(m) &= \varphi(gm) \text{ в случае левого действия } G \text{ на } M, \end{aligned} \tag{89}$$

Проверьте, что тем самым определено левое, соответственно, правое действие G на B^M.

Часто такие действия рассматривают не на всём B^M, а на некотором подмножестве $\Phi \subset B^M$, которое инвариантно относительно этого действия (т.е. если $\varphi \in \Phi$, $g \in G$, то и $\varphi g \in \Phi$ или $g\varphi \in \Phi$). Вместо $g\varphi$ или φg часто пишут что-нибудь вроде $g^*\varphi$ или $T(g)\varphi$. Обозначение типа $T(g)$ особенно употребительно, когда, во-первых, $B = \mathbb{R}, \mathbb{C}$, так что B^M — векторное пространство функций на M, и, во-вторых, Φ является векторным подпространством пространства B^M, В этом случае $T(g)$ суть линейные операторы в Φ, а отображение $g \mapsto T(g)$ является гомоморфизмом или антигомоморфизмом[53] группы G в группу линейных отображений $\Phi \to \Phi$, смотря по тому, является ли исходное действие G на M правым или левым.

Упражнение. Докажите последнее утверждение о $T(g)$.

(На самом деле для бесконечных групп (особенно несчётных) M (а часто и G) бывают наделены дополнительной структурой (чаще всего это топологические пространства или (и) пространства с мерой), с которой в каком-то отношении согласовано групповое действие. В этом случае подпространство Φ выделяется тоже с учётом этой структуры — например, Φ может состоять из непрерывных функций или функций, интегрируемых с квадратом.)

[52]Основанием для такого обозначения является аналогия со случаем конечного M. Последнее можно считать конечным множеством натуральных чисел $\{1, 2, \ldots, m\}$ (пронумеруем элементы M и будем вместо самих элементов говорить об их номерах). Тогда каждая функция $\varphi : M \to B$, по существу, неотличима от упорядоченного набора (размещения) $\{b_1, b_2, \ldots, b_m\}$, где $b_j = \varphi(j)$. А множество таких размещений — это

$$\underbrace{B \times B \times \ldots \times B}_{m \text{ раз}} = B^m.$$

[53]Антигомоморфизм отличается от гомоморфизма тем, что для антигомоморфизма $T(gh) = T(h)T(g)$.

Упражнение. Покажите, что (85) определяет правое действие группы $\mathfrak{S}_k$ на множестве A^k (так что вместо (85) лучше писать

$$(a_1, a_2, \dots, a_k)\alpha = (a_{\alpha^{-1}(1)}, a_{\alpha^{-1}(2)}, \dots, a_{\alpha^{-1}(k)}) - \tag{90}$$

в данном случае, кажется, нет сложившейся традиции, которую мы рисковали бы нарушить), а (86) — левое действие. (Указание. Уже отмечалось (в связи с обозначением B^M), что упорядоченный набор символов $(a_1, a_2, \dots, a_k)$, будучи, по существу, правилом, сопоставляющим номеру j символ a_j, можно рассматривать как отображение

$$\mathfrak{a} : \{1, 2, \dots, k\} \to A \qquad \mathfrak{a}(j) = a_j.$$

Как в этих терминах, привлекая действие $\mathfrak{S}_k$ на $\{1, 2, \dots, k\}$ и композицию отображений, перефразировать (86) и (90)?

Как из (86) и (90), так и из замечания, следующего за (88), следует, что преобразования $A^k \to A^k$, отвечающие левому и правому действиям подстановки α, взаимно обратны.

Теперь легко "пройтись" по различным определениям тензоров (напоминаю, что сейчас они должны быть чисто-контравариантные или чисто-ковариантными) и посмотреть, как на основании этих определений получаются действия $\mathfrak{S}_k$ на $V^{\otimes k}$ и $(V^*)^{\otimes k}$. Оба эти случая совершенно аналогичны друг другу; займёмся, скажем, ковариантными тензорами.

1). "Координатное" определение. При фиксированной системе декартовых координат в V ковариантный тензор валентности k — это набор чисел $\{T_{i_1, i_2, \dots, i_k}\}$, где индексы независимо от друга принимают значения от 1 до n. Упорядоченный набор индексов (т.е. размещение n символов по k) $\{i_1, i_1, \dots, i_k\}$ — это элемент множества $\{1, 2, \dots, n\}^k = \{1, 2, \dots, n\}^{\{1,2,\dots,k\}}$. А если каждому размещению $\{i_1, i_2, \dots, i_k\} \in \{1, 2, \dots, n\}^k$ сопоставлено число $T_{i_1, i_2, \dots, i_k}$, то, значит, мы имеем дело с функцией $T : \{1, 2, \dots, n\}^k \to \mathbb{R}$.

Раз $\mathfrak{S}_k$ действует на множестве $\{1, 2, \dots, k\}$ (двумя способами — слева и справа), то $\mathfrak{S}_k$ действует и на $\{1, 2, \dots, n\}^k$ (соответственно, справа и слева; мы уже знаем, что эти действия суть (90) и (86)), а затем и на $\mathbb{R}^{(\{1,2,\dots,n\}^k)}$ (соответственно, слева и справа).

Упражнение. а). Покажите, что при левом действии

$$(\alpha T)_{i_1, i_2, \dots, i_k} = T_{i_{\alpha^{-1}(1)}, i_{\alpha^{-1}(2)}, \dots, i_{\alpha^{-1}(k)}}, \tag{91}$$

а при правом —
$$(T\alpha)_{i_1,i_2,\ldots,i_k} = T_{i_{\alpha(1)},i_{\alpha(2)},\ldots,i_{\alpha(k)}}. \tag{92}$$
Заметим, что преобразования в пространстве ковариантных тензоров валентности k, получающиеся при левом и правом действиях подстановке α, взаимно обратно. (На сей раз эти преобразования являются линейными преобразованиями в соответствующих пространствах, из можно обозначить через $L(\alpha)$ и $R(\alpha)$; при этом $R(\alpha) = L^{-1}(\alpha) = L(\alpha^{-1})$, $\quad L(\alpha) = R^{-1}(\alpha) = R(\alpha^{-1})$.)

б). Так и подмывает написать в индексах что-нибудь вроде $\alpha(i_1)$. Почему так писать нельзя?

Упражнение. Мы определили действие подстановок на систему чисел (с индексами) $T = \{T_{i_1,i_2,\ldots,i_k}\}$; она образована координатами некоего тензора в какой-то декартовой системе координат в V. При переходе к другой системе координатной системе тот же тензор имеет другие координаты $\{T_{i'_1,i'_2,\ldots,i'_k}\}$ ("штрихованные координаты"); чуть отступая на минуту от обычных обозначений, обозначим последний набор проиндексированных чисел через T'. Для обоих наборов T, T' и для $\alpha \in \mathfrak{S}_k$ определены $\alpha T, T\alpha, \alpha T', T'\alpha$, Верно ли, что набор $\alpha T'$ образован "штрихованными" координатами того же тензора, "нештрихованные" координаты которого образуют набор αT? Тот же вопрос насчёт $T'\alpha$ и $T\alpha$.

Положительный ответ на эти вопросы позволяет говорить о действии подстановок не на размещения чисел (наборы чисел с индексами), а на соответствующие тензоры.

Упражнение. Пусть V — конечномерное евклидово пространство, T — чисто-ковариантный тензор, а чисто-контравариантный тензор S получается из T при " подъёме индексов" с помощью соответствующего метрического тензора g^{ij} в V^*. Верно ли, что αSи $S\alpha$ получаются аналогичным образом из αT и $T\alpha$? Аналогичный вопрос можно задать и в связи с действием α на чисто-контравариантный тензор T (являющийся теперь исходным) и на чисто-ковариантный тензор S, получающийся из T при "опускании индексов".

2). Определение с полилинейными функциями от векторов и ковекторов. Левое (правое) действие $\mathfrak{S}_k$ на $\{1, 2, \ldots, k\}$ определяет сперва правое (левое) действие $\mathfrak{S}_k$ на V^k, а затем — левое (правое) действие на векторном пространстве $\mathbb{R}^{(V^k)}$. Полилинейные функции образуют в последнем пространстве векторное подпространство, которое инвариантно относительно обоих действий, ибо при перестановке аргументов из полилинейной функции получается снова полилинейная функция.

Упражнение. Покажите, что при левом действии

$$(\alpha T)(\underset{1}{X}, \underset{2}{X}, \ldots, \underset{k}{X}) = T(\underset{\alpha^{-1}(1)}{X}, \underset{\alpha^{-1}(2)}{X}, \ldots, \underset{\alpha^{-1}(k)}{X}),$$

а при правом действии

$$(T\alpha)(\underset{1}{X}, \underset{2}{X}, \ldots, \underset{k}{X}) = T(\underset{\alpha(1)}{X}, \underset{\alpha(2)}{X}, \ldots, \underset{\alpha(k)}{X}).$$

Упражнение. Как мы знаем, определения 1) и 2) равносильны: полилинейной функции F на V^k отвечает набор её коэффициентов $\{T_{i_1,i_2,\ldots,i_k}\}$, являющихся координатами некоторого тензора T в смысле 1). Покажите, что коэффициенты полилинейных функций $\alpha F, F\alpha$ суть координаты тензоров αT и $T\alpha$. (Мы сейчас на минуту стали очень педантичными, обозначая полилинейную функцию и соответствующий тензор в смысле 1) разными буквами, ибо довольно нелепо звучали бы формулировки вроде "набор коэффициентов полилинейной функции αT — это координаты тензора αT".)

В определении 2) никакие координаты не привлекаются, поэтому последнее упражнение делает излишним одно из предыдущих упражнений (какое?). Вот ещё пример "автоматической инвариантности относительно замен координат", обеспечиваемой определением 2). В терминах полилинейных функций переход от чисто-ковариантного тензора T к чисто-контравариантному тензору S (при наличии евклидовой метрики в V) описывается так: S определяется по формуле

$$S(\overset{1}{\xi}, \overset{2}{\xi}, \ldots, \overset{k}{\xi}) = T(\underset{1}{X}, \underset{2}{X}, \ldots, \underset{k}{X}),$$

где векторы $\underset{i}{X}$ соответствуют ковекторам $\overset{i}{\xi}$ таким образом, что $\forall Y \in V$ $\langle \underset{i}{X}, Y\rangle = \overset{i}{\xi}(Y)$. Убедитесь, что координаты S получаются из координат T путём опускания индексов с помощью метрического тензора, отвечающего скалярному произведению. Это делает излишними "координатные" проверки, во-первых, инвариантности перехода от T к S и, во-вторых, связи между $\alpha T, T\alpha$ и $\alpha S, S\alpha$. Однако небесполезно иметь в виду различные точки зрения на один и тот же предмет, даже тривиальный.

3). Определение ковариантных тензоров валентности k как элементов тензорной "степени" $(V^*)^{\otimes k}$ пространства V^*, которая определяется с использованием базисов. Мы отправляемся от некоторого базиса $\{\overset{i}{b}\}$ в V^* (на сей раз неудобно обозначать ковекторы греческими буквами, ибо таковыми обозначаются подстановки) и определяем $(V^*)^{\otimes k}$ как n^k-мерное векторное пространство с базисом $B = \{b^{i_1,i_2,\dots,i_k}\}$[54], элементы которого "пронумерованы" размещениями (упорядоченными наборами) $\{1, 2, \dots, k\} \in \{1, 2, \dots n\}^k$ (а позднее, когда помимо тензорного умножения векторных пространств вводится тензорное перемножение их элементов, оно определяется так, что $b^{i_1,i_2,\dots,i_k} = \overset{i_1}{b} \otimes \overset{i_2}{b} \otimes \dots \otimes \overset{i_k}{b}$). Коль скоро каждому элементу множества $\{1, 2, \dots, n\}^k$ сопоставлен вектор, то мы имеем дело с отображением этого множества в $(V^*)^{\otimes k}$, т.е. с элементом множества $(V^*)^{(\{1,2,\dots,n\}^k)}$. (В данный момент не важно, что базисы B пространства $(V^*)^{\otimes k}$ — это не все элементы последнего множества, а те, которые удовлетворяют определённому условию — условию линейной независимости системы векторов $\{b^{i_1,i_2,\dots,i_k}\}$). Рассуждаем по отработанной схеме:

левое (правое) действие $\mathfrak{S}_k$ (описываемое (88)) определяет (согласно (90) и (86)) правое (левое) действие $\mathfrak{S}_k$ на $\{1, 2, \dots, n\}^k$;

это действие определяет левое (правое) действие $\mathfrak{S}_k$ на $(V^*)^{(\{1,2,\dots,n\}^k)}$ (которое нам нужно только на базисах, но определяются оно одинаково для любых наборов векторов, "пронумерованных" размещениями $(i_1, i_2, \dots, i_k)$). Временно обозначим для краткости размещение индексов $(i_1, i_2, \dots, i_k)$ через I. Тогда можно сказать, что при левом (правом) действии α базис B переходит в новый базис $C = \{c^I\} = \{c^{i_1,i_2,\dots,i_k}\}$, где

$$\begin{aligned} c^I &= c^{i_1,i_2,\dots,i_k} = b^{I\alpha} = b^{i_{\alpha^{-1}(1)},i_{\alpha^{-1}(2)},\dots,i_{\alpha^{-1}(k)}} \quad \text{при } C = \alpha B, \\ c^I &= c^{i_1,i_2,\dots,i_k} = b^{\alpha I} = b^{i_{\alpha(1)},i_{\alpha(2)},\dots,i_{\alpha(k)}} \quad \text{при } C = B\alpha. \end{aligned} \tag{93}$$

Если мы хотим, чтобы каждое α определяло линейное преобразование пространства $(V^*)^{\otimes k}$ в себя, при которых базисные векторы преобразуются согласно (93), то это можно сделать единственным образом.

[54]Собственно, при последовательном проведении "системы коренных букв ми индексов" последние следовало бы ставить сверху от коренной буквы b, но $\overset{i_1,i_2,\dots,i_k}{b}$ выглядит неуклюже.

Надо принять, что при первом из вариантов (93) вектор $\sum T_I b^I$ переходит в $\sum T_I c^I = \sum T_I b^{I\alpha}$, а при втором — в $\sum T_I c^I = \sum T_I b^{\alpha I}$. Остаётся посмотреть, какое координаты эти два новых вектора имеют в старом базисе $B = \{b^I\}$. При обоих действиях, правом и левом, вектор b^I является одним из векторов базиса C, только уже не I-м, а $I\alpha^{-1}$-м в первом случае (когда $C = \alpha B,\ c^I = b^{I\alpha}$) и $\alpha^{-1}I$-м во втором случае (когда $C = B\alpha,\ c^I = b^{\alpha I}$), т.е.

$$b^I = c^{I\alpha^{-1}}, \qquad \text{соответственно, } b^I = c^{\alpha^{-1}I}.$$

Этот вектор входит в линейную комбинацию $T_I c^I$ с коэффициентом $T_{I\alpha^{-1}}$ в первом случае и $T_{\alpha^{-1}I}$ во втором. Таков, значит, коэффициент при b^I в линейной комбинации $T_I c^I$. Мы уже отмечали, что правое действие α на размещения символов совпадает с левым действием α^{-1}, а левое действие α — с правым действием α^{-1}. Поэтому указанные коэффициенты суть также $T_{\alpha I}$ в первом случае и $T_{I\alpha}$ во втором. Таков, значит, коэффициент при b^I в линейной комбинации $T_I c^I$. Получается, что в первом случае тензор $T = \{T_I\}$ переходит в тензор $S = \{S_I\}$, где $S_I = T_{\alpha I}$ в первом случае и $S_I = T_{I\alpha}$ во втором. Обсуждая, как определить действие подстановок на тензоры в свете определения 1), мы пришли к определению, по которому в первом случае S_I — это тензор $T\alpha$, а во втором — αT.

Итак, мы получили два уже известных нам действия $\mathfrak{S}_k$ на ковариантные тензоры валентности k. Различие только в том, что раньше, отправляясь от левого действия $\mathfrak{S}_k$ на $\{1, 2, \ldots, k\}$, мы пришли к левому же действию подстановок на тензоры, а теперь пришли к правому; отправляясь же от правого действия $\mathfrak{S}_k$ на $\{1, 2, \ldots, k\}$, мы раньше пришли к правому действию подстановок на тензоры, а теперь — к левому. Причина этого различия состоит в том, что раньше переход от действия $\mathfrak{S}_k$ на $\{1, 2, \ldots, k\}$ делался в два шага, а теперь — в три. На каждом из этих шагов мы имели вначале левое (правое) действие $\mathfrak{S}_k$ на какие-то объекты и строили правое (левое) действие этой группы на какие-то новые объекты. При двух шагах из левого действия получается левое же действие, а при трёх — правое.

4). Определение ковариантных тензоров валентности k как элементов тензорной "степени" $(V^*)^{\otimes k}$ пространства V^*, которая определяется "абстрактно" — как некое новое векторное пространство G вместе с некоторым полилинейным отображением $f : (V^*)^k \to G$, причём должны выполняться определённые условия (которые я через скоро повторю). Раз мы собираемся проследить за чем-то, связанным с перестановками множителей, желательно из отличать друг от друга, хотя в конечном счёте нас интересует случай, когда они все одинаковы. Поэтому на время вместо $(V^*)^{\otimes k}$ будем говорить о $V_1 \otimes V_2 \otimes \ldots \otimes V_k$.

Начнём с правого действия $\mathfrak{S}_k$ на $\{1, 2, \ldots, k\}$ (напоминаю, что определения левого и правого действий резюмированы в (88)), при котором под действием α число i переходит в $\alpha(i)$. От него мы переходим к левому действию (86) той же группы на размещения символов. В качестве символов теперь вроде бы надо взять векторные пространства V_i. Раз $\alpha(V_1, V_2, \ldots, V_k) = (V_{\alpha(1)}, V_{\alpha(2)}, \ldots, V_{\alpha(k)})$, то разумно принять, что под действием α из прямого произведения $V_1 \times V_2 \times \ldots V_k$ получается $(V_{\alpha(1)} \times V_{\alpha(2)} \times \ldots \times V_{\alpha(k)})$. Но это не том, что нам нужно. Здесь “действие подстановки α” означает просто, что одно пространство (являющееся некоторым произведением пространств) заменяется другим; непосредственно это не означает никакого действия α на элементы этих пространств — на размещения векторов $(v_1, v_2, \ldots, v_k)$ [55]. Однако естественно принять, что с заменой произведения $V_1 \times V_2 \times \ldots \times V_k$ на произведение $V_{\alpha(1)} \times V_{\alpha(2)} \times \ldots \times V_{\alpha(k)}$ связан и переход от элемента $(v_1, v_2, \ldots, v_k)$ первого произведения к элементу $\alpha(v_1, v_2, \ldots, v_k) = (v_{\alpha(1)}, v_{\alpha(2)}, \ldots, v_{\alpha(k)})$ второго произведения. Когда (как у нас) $V_1 = V_2 = \ldots = V_k = V^*$, при так называемой “замене”одного произведения пространств другим ничего не меняется, так как переставляемые сомножители одинаковы. Однако при соответствующем отображении

$$V_1 \times V_2 \times \ldots \times V_k = (V^*)^k \to V_{\alpha(1)} \times V_{\alpha(2)} \times \ldots \times V_{\alpha(k)} = (V^*)^k$$

“кое-что” меняется — размещение векторов $(v_1, v_2, \ldots, v_k)$ переходит в $\alpha(v_1, v_2, \ldots, v_k) = (v_{\alpha(1)}, v_{\alpha(2)}, \ldots, v_{\alpha(k)})$. Далее часто будет неудобно обозначать это отображение $(V^*)^k \to (V^*)^k$ через α (хотя при случае я всё-таки буду говорить о $\alpha(v_1, v_2, \ldots, v_k)$). Я буду обозначать это отображение через $\lambda(\alpha)$. Итак, $\lambda(\alpha)$ есть отображение

$$\lambda(\alpha) : (V^*)^k \to (V^*)^k \qquad \lambda(\alpha)(v_1, v_2, \ldots, v_k) = (v_{\alpha(1)}, v_{\alpha(2)}, \ldots, v_{\alpha(k)})^{56}.$$

[55] Если два мешка поменяли местами, то ведь это не означает, что элементам одного мешка сопоставлены элементы другого.

[56] При случае я буду говорить и об отображении

$$\lambda(\alpha) : V_1 \times V_2 \times \ldots \times V_k \to V_{\alpha(1)} \times V_{\alpha(2)} \times \ldots \times V_{\alpha(k)},$$

При различных $\alpha \in \mathfrak{S}_k$ это отображение переводит $(V^*)^k$. так что определены композиции вида $\lambda(\alpha)\lambda(\beta)$. Заметим, что

$$\lambda(\alpha)\lambda(\beta) = \lambda(\alpha\beta) \tag{94}$$

(почему?).

Это ещё не действие подстановок на тензоры, но теперь таковое сразу же появляется в соответствии с определением тензорного произведения. На минуту опять будем различать сомножители. $V_1 \otimes V_2 \otimes \ldots \otimes V_k$ — это векторное пространство G, рассматриваемое вместе с полилинейным отображением $f : V_1 \times V_2 \times \ldots \times V_k \to G$, причём эта пара (G, f) удовлетворяет следующему условию: всякий раз, когда имеется какое-нибудь полилинейное отображение $g : V_1 \times V_2 \times \ldots \times V_k \to H$ нашего прямого произведения в какое-нибудь векторное пространство H, существует ровно одно линейное отображение $h : G \to H$, для которого $h \circ f = g$.Это G и обозначается через $V_1 \otimes V_2 \otimes \ldots \otimes V_k$ (а элемент $f(v_1, v_2, \ldots, v_k)$ этого пространства — через $v_1 \otimes v_2 \otimes \ldots \otimes v_k$). Обозначим через f_1 полилинейное отображение

$$f_1 : V_{\alpha(1)} \times V_{\alpha(2)} \times \ldots \times V_{\alpha(k)} \to V_{\alpha(1)} \otimes V_{\alpha(2)} \otimes \ldots \otimes V_{\alpha(k)},$$

которое должно фигурировать при применении данного определения к $V_{\alpha(1)} \otimes V_{\alpha(2)} \otimes \ldots \otimes V_{\alpha(k)}$. (Элемент $f_1(v_{\alpha(1)}, v_{\alpha(2)}, \ldots, v_{\alpha(k)})$ последнего пространства обозначается через $v_{\alpha(1)} \otimes v_{\alpha(2)} \otimes \ldots \otimes v_{\alpha(k)}$.) Композиция

$$V_1 \times V_2 \times \ldots \times V_k \xrightarrow{\lambda(\alpha)} V_{\alpha(1)} \times V_{\alpha(2)} \times \ldots \times V_{\alpha(k)} \xrightarrow{f_1} V_{\alpha(1)} \otimes V_{\alpha(2)} \otimes \ldots \otimes V_{\alpha(k)}$$

является полилинейным отображением (это ясно?). Значит, имеется единственное линейное отображение $h : V_1 \otimes V_2 \otimes \ldots \otimes V_k \to V_{\alpha(1)} \otimes V_{\alpha(2)} \otimes \ldots \otimes V_{\alpha(k)}$, для которого $h \circ f = f_1 \circ \lambda(\alpha)$.

Применим это к случаю $V_1 = V_2 = \ldots = V_k = V^*$. Получается, что существует единственное линейное отображение $h : (V^*)^{\otimes k} \to (V^*)^{\otimes k}$, для которого $h \circ f = f \circ \lambda(\alpha)$. Это отображение h зависит от α, так что мы обозначим его через $L(\alpha)$. Поскольку при всех $\alpha \in \mathfrak{S}_k$ речь идёт о линейных отображениях одного и того же пространства $(V^*)^{\otimes l}$ в себя, то можно говорить о произведениях вида $L(\alpha)L(\beta)$.

действие которого на $(v_1, v_2, \ldots, v_k)$ описывается той же формулой, которая написана для $V_1 = V_2 = \ldots = V_k = V^*$.

Упражнение. Докажите, что

$$L(\alpha)L(\beta) = L(\alpha\beta)$$

(ср. с (94)).

Мы уже знакомы с одним левым действием $\mathfrak{S}_k$ на $(V^*)^{\otimes k}$ — см. (91). Возникает подозрение, что теперь мы пришли к тому же левому действию, т.е. что $L(\alpha)T = \alpha T$, где αT — то же, что в (91).

Пусть $\overset{1}{\xi}, \overset{2}{\xi}, \dots, \overset{k}{\xi} \in V^*$ — k ковекторов. Координаты j-го из них суть $\overset{j}{\xi}_1, \overset{j}{\xi}_2, \dots, \overset{j}{\xi}_k$. Их тензорное произведение $\overset{1}{\xi} \otimes \overset{2}{\xi} \otimes \dots \otimes \overset{k}{\xi}$ — это некоторый ковариантный тензор T валентности k. Его координаты $T_{i_1,i_2,\dots,i_k} = \overset{1}{\xi}_{i_1} \overset{2}{\xi}_{i_2} \dots \overset{k}{\xi}_{i_k}$. Под действием $L(\alpha)$ тензор T переходит в тензор $L(\alpha)T == \overset{\alpha(1)}{\xi} \otimes \overset{\alpha(2)}{\xi} \otimes \dots \otimes \overset{\alpha(k)}{\xi}$ с координатами $(L(\alpha)T)_{i_1,i_2,\dots,i_k} = \overset{\alpha(1)}{\xi}_{i_1} \overset{\alpha(2)}{\xi}_{i_2} \dots \overset{\alpha(k)}{\xi}_{i_k}$. В этом произведении номера $\alpha(h)$ пробегают значения от 1 до k, только не в порядке возрастания, а в некотором другом порядке. В частности, для любого $j \in \{1, 2, \dots, k\}$ в произведении имеется ровно один множитель вида $\overset{j}{\xi}_l$ с каким-то l. Найдём это l. Когда множитель $\overset{\alpha(h)}{\xi}_{i_h}$ есть $\overset{j}{\xi}_l$? Это возможно тогда и только тогда, когда $\alpha(h) = j,\ h = \alpha^{-1}(j)$, при этом $\overset{j}{\xi}_{i_h} = \overset{j}{\xi}_{i_{\alpha^{-1}(j)}}$. Стало быть,

$$\begin{aligned}(L(\alpha)T)_{i_1,i_2,\dots,i_k} &= \overset{1}{\xi}_{i_{\alpha^{-1}(1)}} \overset{2}{\xi}_{i_{\alpha^{-1}(2)}} \dots \overset{k}{\xi}_{i_{\alpha^{-1}(k)}} = \\ &= T_{i_{\alpha^{-1}(1)}, i_{\alpha^{-1}(2)}, \dots, i_{\alpha^{-1}(k)}} = (\alpha T)_{i_1,i_2,\dots,i_k}.\end{aligned}$$

Все координаты тензоров $L(\alpha)T$ и αT совпадают, так что $L(\alpha)T = \alpha T$.

Пока что равенство $L(\alpha)T = \alpha T$ доказано только для тензоров специального вида — вида $\overset{1}{\xi} \otimes \overset{2}{\xi} \otimes \dots \otimes \overset{k}{\xi}$. Но ясно (насколько ясно?), что если такое равенство имеет место для некоторых тензоров, то оно справедливо и для любой линейной комбинации этих тензоров. А между тем любой тензор из $(V^*)^{\otimes k}$ является линейной комбинацией некоторых тензоров вида $\overset{1}{\xi} \otimes \overset{2}{\xi} \otimes \dots \otimes \overset{k}{\xi}$. Ведь если $\overset{1}{\eta}, \overset{2}{\eta}, \dots, \overset{k}{\eta}$ — базис в V^*, то тензоры $\overset{i_1}{\eta} \otimes \overset{i_2}{\eta} \otimes \dots \otimes \overset{i_k}{\eta}$ образуют базис в $(V^*)^{\otimes k}$.

Мы отправлялись от правого действия $\mathfrak{S}_k$ на $\{1, 2, \dots, k\}$ и пришли к левому действию $\mathfrak{S}_k$ на $(V^*)^{\otimes k}$. Раньше, пользуясь определениями 10 и 2), мы приходили к левому действию тогда, когда отправлялись от левого действия $\mathfrak{S}_k$ на $\{1, 2, \dots, k\}$. Причина этого различия состоит в том, что теперь мы сделали ровно один шаг такого типа, при котором от левого действия переходят к правому, а от правого — к левому (это был сразу же сделанный переход к левому действию подстановок на размещения векторов $(\overset{1}{\xi}, \overset{2}{\xi}, \dots, \overset{k}{\xi})$. Дальнейшие построения не меняли "стороны, с которой действует $\mathfrak{S}_k$"). Когда же использовались определения 1) и 2), оба раза делалось по два таких шага. (Аналогичное обстоятельство отмечалось в связи с использованием определения 3) — там делалось три шага, изменяющих "сторону, с которой действует $\mathfrak{S}_k$".)

Упражнение. Отправляясь от левого действия подстановок α на $\{1, 2, \dots, k\}$, придите, используя определение 4), к представлению $\alpha \mapsto R(\alpha)$ группы $\mathfrak{S}_k$ линейными преобразованиями в пространстве $(V^*)^{\otimes k}$, описывающему правое действие этой группы на этом пространстве.

Упражнение. Чисто-ковариантный тензор $T = \{T^{i_1,\dots,i_k}_{j_1,\dots,j_l}\}$ называется симметрическим, если ни одна из его координат не меняется, когда любые два индекса меняются местами, и кососимметрическим или антисимметрическим, если при перестановке любых двух индексов у любой координаты $T^{i_1,\dots,i_k}_{j_1,\dots,j_l}$ изменяется знак. Перефразируйте это определение в духе определения 2). Покажите, что для симметрического тензора T

$$\alpha T = T\alpha = T \qquad \text{при любой подстановке } \alpha \in \mathfrak{S}_k,$$

а для кососимметрического тензора T

$$\alpha T = T\alpha = \operatorname{sign}(\alpha) T \qquad \text{при любой подстановке } \alpha \in \mathfrak{S}_k,$$

где

$$\operatorname{sign}(\alpha) = \begin{cases} 1, & \text{когда подстановка } \alpha \text{ чётная}, \\ -1, & \text{когда подстановка } \alpha \text{ нечётная}. \end{cases}$$

Всё сказанное дословно относится и к чисто-контравариантным тензорам. У смешанного тензора можно переставлять отдельно нижние и отдельно верхние индексы. (Независимость этих операций от используемых координат легко проверяется с помощью определения 2) или 4).) Перестановка нижних индексов с верхними не имеет разумного смысла. Наконец, понятный смысл имеет выражение, что такой-то тензор симметричен (или антисимметричен) по такой-то части своих индексов (эта часть должна быть расположена вся внизу или вся вверху).

Упражнение. Очевидно, симметрические и антисимметрические ковариантные (или контравариантные) тензоры валентности k образуют векторное подпространство в пространстве $(V^*)^{\otimes k}$ всех ковариантных (соответственно, в пространстве $V^{\otimes k}$ всех контравариантных) тензоров этой валентности. Каковы размерность подпространства антисимметрических тензоров (считая, как обычно, что размерность $\dim V = n$)? Найдите также размерность пространства симметрических тензоров по крайней мере при $k = 2$, а также при каких-нибудь небольших k (скажем, $k = 3$) и n (скажем, $n = 2$). (В следующем п. мы найдём эту размерность для любых k, n.)

Решая эту задачу, читатель, вероятно, будет молчаливо предполагать, что $k > 1$. Что касается до случаев $k = 0, 1$, то приходится считать, что все скаляры, векторы и ковекторы являются одновременно симметрическими и антисимметрическими. Ведь тензор называется симметрическим или антисимметрическим, если всякий раз, когда мы меняем местами два его индекса, выполняется некоторое условие. А если "всякого раза" не бывает — нечего переставлять, — то нет и никаких условий. Но эти три случая — исключительные: при $k \geqslant 2$ ненулевой тензор не может быть одновременно симметрическим и антисимметрическим.

Получив ответ к предыдущему упражнению, читатель увидит, что при $k = 2$ сумма размерностей пространств симметрических и антисимметрических тензоров равна размерности пространства $(V^*)^{\otimes 2}$ (чему же именно равны эти три размерности?) и потому последнее пространство является прямой суммой двух предыдущих. Это, несомненно, известно читателю в равносильной форме: каждая матрица однозначно представляется в виде суммы симметрической и антисимметрической матриц.

Упражнение. Покажите, что при $k > 2$ не всякий тензор из $(V^*)^{\otimes k}$ можно представить в виде суммы симметрического и антисимметрического тензоров.

Векторное пространство $(V^*)^{\otimes k}$, как оказывается, разлагается в прямую сумму векторных подпространств, инвариантных относительно действия $\mathfrak{S}_k$ (безразлично, правого или левого), причём эти "слагаемые" можно подобрать так, что ни в одном из них собственных инвариантных подпространств уже не будет. (Наши пространства симметрических и антисимметрических тензоров этим свойством ещё не обладают — их можно разлагать далее на инвариантные прямые слагаемые.) Исследование относящихся сюда вопросов — задача теории представлений и теории инвариантов (здесь эти две теории практически сливаются). Мы вынуждены оставить их в стороне. Из всего сказанного выше о действии подстановок на тензоры нам будут нужны только понятия симметрического и антисимметрического тензоров, причём, как уже говорилось и как теперь должно быть совершенно ясно, таковыми при обоих вариантов действия подстановок — правом и левом — оказываются одни и те же тензоры.

В заключение введём три связанные с действием подстановок операции — симметрирование, циклирование и альтернирование.

Ⓢ, Ⓡ

Симметрирование — это переход от тензора $T = \{T_{i_1,\ldots,i_k}\}$ (ради определённости мы считаем его чисто ковариантным; чисто контравариантный случай совершенно аналогичен) к тензору

$$S = \frac{1}{k!}\sum_{\alpha\in\mathfrak{S}_k}\alpha T = \frac{1}{k!}\sum_{\alpha\in\mathfrak{S}_k}T\alpha$$

(почему это одно и то же?) В координатных терминах новый тензор чаще обозначают не какой-то новой буквой, а беря в круглые скобки индексы координат тензора T, так что (на момент всё-таки пользуясь обозначением S)

$$S_{i_1,\ldots,i_k} = T_{(i_1,\ldots,i_k)} = \frac{1}{k!}\sum_{\alpha\in\mathfrak{S}_k}T_{\alpha(i_1,\ldots,i_k)} = \frac{1}{k!}\sum_{\alpha\in\mathfrak{S}_k}T_{(i_1,\ldots,i_k)\alpha}$$

(вот беда — в обозначениях $\alpha(i_1,\ldots,i_k)$ и $(i_1,\ldots,i_k)\alpha$ тоже имеются круглые скобки, которые никакого альтернирования не обозначают, а обозначают размещения индексов, на которые (размещения) действуют подстановки согласно (86) и (90)). Когда же координаты не привлекаются, то, видимо, уместно обозначать симметрирование какой-нибудь подходящей буквой, скажем, готической буквой $\mathfrak{S}$, т.е. писать $S = \mathfrak{S}T$. (Надеюсь, не возникнет путаницы между этим $\mathfrak{S}$ и $\mathfrak{S}_k$.)

Симметрирование легко описывается и в терминах определения 2): чтобы получить $(\mathfrak{S}Y)(\overset{1}{X},\ldots,\overset{k}{X})$, надо взять среднее из значений полилинейной функции T на таких размещениях k векторов, которые получаются при действии всевозможных подстановок (безразлично, справа или слева) на размещение векторов $(\overset{1}{X},\ldots,\overset{k}{X})$ (т.е. надо всеми возможными способами переставлять между собой все k векторов, стоящих в аргументе у T, сложить получающиеся при этом числа и разделить сумму на $k!$).

Очевидно, что при симметрировании получается симметрический тензор (возможно, нулевой). Симметрические тензоры суть те, которые не меняются при симметрировании. Когда матрицу A представляют в виде суммы симметрической и кососимметрической матриц, то первая получается из A как раз с помощью симметрирования.

В $\mathfrak{S}_k$ имеется циклическая подгруппа $\mathfrak{C}_k$, состоящая из k подстановок — степеней подстановки

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & k-1 & k \\ 2 & 3 & \dots & k & 1 \end{pmatrix}.$$

При этой подстановке каждое из чисел i, на которые действуют наши подстановки, переходит в $i+1$, кроме числа K, которое переходит в 1. Если представить себе числа $\{1, 2, \dots, k\}$ стоящими в вершинах правильного k-угольника, вписанного в окружность, то подстановка α получается при повороте окружности на $\frac{1}{k}$-ую долю её длины в направлении от 2 к 1, так что после поворота на место 1 стало 2, на место 2 — 3, и т.д. Операция циклирования — это переход от тензора $T = \{T_{i_1,\dots,i_k}\}$ к тензору

$$\mathfrak{C}T = \frac{1}{k}\sum_{\beta\in\mathfrak{C}_k}\beta T = \frac{1}{k}\sum_{j=0}^{k-1}\alpha^j T = \frac{1}{k}\sum_{\beta\in\mathfrak{C}_k} T\beta = \frac{1}{k}\sum_{j=0}^{k-1} T\alpha^j.$$

В терминах координат

$$(\mathfrak{C}T)_{i_1,i_2,\dots,i_{k-1},i_k} = \frac{1}{k}\big(T_{i_1,i_2,\dots,i_{k-1},i_k} + T_{i_2,i_3,\dots,i_k,i_1} + \\ + T_{i_3,i_4,\dots,i_1,i_2} + \ldots + T_{i_k,i_1,\dots,i_{k-2},i_{k-1}}\big).$$

Описание циклирования в терминах определения 2) очевидно и предоставляется читателю.

И, наконец, альтернирование отличается от симметрирования тем, что слагаемое αT или $T\alpha T$ берётся со знаком плюс или минус в зависимости от того, является ли подстановка чётной или нечётной. Обозначая эту операцию знаком $\mathfrak{A}$, имеем

$$\mathfrak{A}T = \frac{1}{k!}\sum_{\alpha\in\mathfrak{S}_k}\operatorname{sign}(\alpha)\alpha T = \frac{1}{k!}\sum_{\alpha\in\mathfrak{S}_k}\operatorname{sign}(\alpha) T\alpha$$

(тот же вопрос, что и при определении симметрирования: почему это одно и то же?). В координатных терминах тензор $\mathfrak{A}T$ чаще обозначают, беря в квадратные скобки индексы координат тензора T, так что

$$(\mathfrak{A}T)_{i_1,\ldots,i_k} = T_{[i_1,\ldots,i_k]} = \frac{1}{k!}\sum_{\alpha\in\mathfrak{S}_k} \operatorname{sign}(\alpha) T_{\alpha(i_1,\ldots,i_k)} = \frac{1}{k!}\sum_{\alpha\in\mathfrak{S}_k} \operatorname{sign}(\alpha) T_{(i_1,\ldots,i_k)\alpha}$$

(здесь уместно вновь отметить, что в последней формуле круглые скобки не имеют отношения к симметрированию, а обозначают размещения индексов, на которые (размещения) действуют подстановки согласно (86) и (90)). Читатель без труда перефразирует определение альтернирования применительно к трактовке тензоров как полилинейных функций.

Очевидно, что при альтернировании получается антисимметрический тензор (возможно, нулевой). Антисимметрические тензоры суть те, которые не меняются при альтернировании. Когда матрицу A представляют в виде суммы симметрической и кососимметрической матриц, то вторая получается из A как раз с помощью альтернирования.

Понятно, что симметрировать, циклировать и альтернировать можно и по части индексов, которая должна находиться целиком вверху или целиком внизу.

Упражнение. а). Пусть $T \in (V^*)^{\otimes k}$ (или $T \in V^{\otimes k}$) и $\alpha \in \mathfrak{S}_k$. Покажите, что $\mathfrak{S}(\alpha T) = \mathfrak{S}(T\alpha) = \mathfrak{S}T$. (Указание. Когда β пробегает $\mathfrak{S}_k$, произведение $\beta\alpha$ тоже пробегает $\mathfrak{S}_k$, принимая каждое значение по одному разу.)

б). Пусть T — чисто ковариантный (или чисто контравариантный) тензор валентности p и $1 \leqslant q < p$. Покажите, что если сперва просимметризовать T по первым q индексам, а затем полученный тензор просимметризовать по всем индексам, то полученный тензор совпадает с результатом симметризации исходного тензора сразу по всем индексам. Запись (в ковариантном случае — индексы внизу):

$$T_{((i_1,\ldots,i_q),i_{q+1},\ldots,i_p)} = T_{(i_1,\ldots,i_q,i_{q+1},\ldots,i_p)}.$$

12. Симметрические ковариантные тензоры.

Сами симметрические ковариантные тензоры, за очень немногими исключениями (вроде тензоров валентности два), не очень нужны ... потому что фактически они постоянно используются, а точнее, потому что совершенно привычным образом постоянно используется нечто формально иное, но по существу, как мы увидим, равносильное — однородные многочлены. (Кстати, однородные многочлены в алгебре называют *формами*, употребляя, таким образом, это слово совсем не в том смысле, как в разговорном языке, когда говорят о чём-нибудь вроде "форме фигуры", — последнее выражение не имеет точного смысла, но при всей своей неопределённости касается геометрии, а не алгебры.) Значение этого п. — методическое: на примере симметрических ковариантных тензоров я хочу познакомить читателя с двумя-тремя понятиями и приёмами, аналоги которых будут постоянно использоваться, когда позднее мы займёмся антисимметрическими тензорами. Начинать такое знакомство лучше с симметрических тензоров, потому что здесь всё, что будет делаться, оказывается "дублированием" на другом языке хорошо известных вещей, относящихся к однородным многочленам (формам). Когда же мы перейдём к антисимметрическим тензорам, наши понятия и приёмы уже не будут своего рода перефразировками чего-то привычного, зато это можно будет сравнивать с тем, что говорилось о симметрических тензорах.

Обычное тензорное произведение двух симметрических тензоров, вообще говоря, не является симметрическим. Это понятно уже для произведения двух ковекторов $\xi = \{\xi_i\}$, $\eta = \{\eta_j\}$: сами ξ и η являются (или хотя бы считаются) симметрическими, но с какой стати должны выполняться равенства $\xi_i\eta_j = \xi_j\eta_i$? Однако можно изменить понятие произведения таким образом, чтобы при перемножении симметрических тензоров T и S снова получался бы симметрический тензор: надо просто провести симметризацию тензорного произведения $T \otimes S$. Обозначая эту новую операцию "симметричного тензорного произведения" знаком Ⓢ, имеем

$$T Ⓢ S = \mathfrak{S}(T \otimes S), \qquad (T Ⓢ S)_{i_1,\ldots,i_{k+l}} = T_{(i_1,\ldots,i_k} S_{i_{k+1},\ldots,i_{k+l})}.$$

Раз используется знак Ⓢ, то естественно пространство всех симметрических ковариантных тензоров валентности k обозначить через $(V^*)^{Ⓢk}$ (а для пространства симметрических контравариантных тензоров валентности k надо бы ввести обозначение $V^{Ⓢk}$, но с ними мы вообще не будем иметь дела).

Очевидно, что операция симметричного тензорного умножения дистрибутивна.

Упражнение. Докажите, что эта операция коммутативна и ассоциативна, т.е. $T \circledS S = S \circledS T$ и $(T \circledS S) \circledS R = T \circledS (S \circledS R)$. (Указание. В связи с ассоциативностью см. последнее упражнение в предыдущем п.)

Ассоциативность позволяет пользоваться записью вроде

$$A \circledS B \circledS C \circledS \ldots \circledS D$$

вместо выражений, в которых посредством скобок указывается порядок перемножения этих же сомножителей.

Упражнение. Покажите, что $(V^*)^{\circledS k} = \underbrace{V^* \circledS \ldots \circledS V^*}_{k \text{ раз}}$.

В качестве базиса $(V^*)^{\otimes k}$ можно взять тензорные произведения $dx^{i_1} \otimes dx^{i_2} \otimes \ldots \otimes dx^{i_k}$ со всевозможными размещениями $(i_1, i_2, \ldots, i_k)$, где все $i_j \in \{1, 2, \ldots, k\}$. (Почему?) При симметризации получаются произведения $dx^{i_1} \circledS dx^{i_2} \circledS \ldots \circledS dx^{i_k}$, которые, следовательно, порождают $\mathfrak{S}(V^*)^{\otimes k} = (V^*)^{\circledS k}$. Переставляя сомножители таких произведений, получаем систему симметричных произведений

$$\underset{k_1, k_2, \ldots, k_n}{T} = (dx^1)^{\circledS k_1} \circledS (dx^2)^{\circledS k_2} \circledS \ldots \circledS (dx^n)^{\circledS k_n}, \tag{95}$$

где размещения $(k_1, k_2, \ldots, k_n)$ удовлетворяют условиям: все $k_j \geqslant 0$ и $\sum k_j = k$. Такое произведение получается при симметризации любого тензорного произведения $dx^{i_1} \otimes \ldots \otimes dx^{i_k}$, для которого размещение $(i_1, \ldots, i_k)$ удовлетворяет условию: ровно k_1 из номеров i_j равно 1, ровно k_2 из номеров i_j равно 2, ..., ровно k_n из номеров i_j равно n. При действии подстановки α на размещение это условие не нарушается, а любые два размещения, которые ему удовлетворяют, переходят друг в друга под действием некоторой подстановки (почему?). Для любого размещения $(i_1, i_2, \ldots, i_k)$, удовлетворяющего указанному условию,

$$dx^{i_1} \otimes dx^{i_2} \otimes \ldots \otimes dx^{i_n}(X, X, \ldots, X) = X^{i_1} X^{i_2} \ldots X^{i_n} = (X^1)^{k_1} (X^2)^{k_2} \ldots (X^n)^{k_n}$$

(X^i — координаты вектора X). Таким образом, $T_{k_1, k_2, \ldots, k_n}(X, X, \ldots, X)$ равно произведению $\frac{1}{k!}$ на сумму $k!$ одинаковых слагаемых, равных

$$(X^1)^{k_1} (X^2)^{k_2} \ldots (X^n)^{k_n},$$

т.е.

$$\underset{k_1,k_2,\ldots,k_n}{T}\underbrace{(X,X,\ldots,X)}_{k\text{ раз}} = (X^1)^{k_1}(X^2)^{k_2}\ldots(X^n)^{k_n}.$$

Одночлены такого вида линейно независимы и образуют базис в пространстве всех форм степени k от X. Значит, линейно независимы и симметрические полилинейные функции $\underset{k_1,k_2,\ldots,k_n}{T}$ (если бы какая-то из линейная комбинация равнялась нулю, то она тем более равнялась бы нулю на наборе $(X,X,\ldots,X)$, а тогда соответствующие одночлены были бы линейно зависимыми). Итак, симметричные произведения (95) образуют базис пространства $(V^*)^{\circledS k}$.

Одновременно мы видим, что если каждому симметрическому ковариантному тензору T валентности k, рассматриваемому как полилинейная функция $T(\underset{1}{X},\ldots,\underset{k}{X})$ на V^k, симметричная по своим аргументам, сопоставить однородный многочлен k-ой степени $T(\underbrace{X,\ldots,X}_{k\text{ раз}})$ от n координат $X^1,\ldots,X^n$) вектора X, то тем самым получается биективное соответствие между ковариантными симметрическими тензорами валентности k в n-мерном векторном пространстве и формами степени k от координат $X^1,\ldots,X^n$ векторов $X\in V$ (я буду говорить далее о формах от X). Симметрическую полилинейную функцию от k векторов, из которой указанным способом получается форма k-ой степени форма $f(X)$, называют *полярной* для этой формы. Говорить о формах более "экономно" в том отношении, что форма зависит от n переменных X^i, тогда как полилинейная функция $T(\underset{1}{X},\ldots,\underset{k}{X})$ зависит от координат k векторов, т.е. от nk переменных. Однако из обычного курса линейной алгебры известно, что иногда приходится говорить о симметричных билинейных функциях от двух векторов, а не о квадратичных формах.

При указанном соответствии

$$(V^*)^{\circledS k} \to \text{ формы степени } k \text{ от } X\in V$$
$$T\mapsto f(X) = T(X,\ldots,X)$$

симметричное произведение переходит в обычное произведение многочленов. Действительно, пусть $S\in(V^*)^{\circledS k}$, $T\in(V^*)^{\circledS l}$ и $S\mapsto f(X)$, $T\mapsto g(X)$. Для любой подстановки $\alpha\in\mathfrak{S}_{k+l}$

$$\alpha\underbrace{(X.\ldots,X)}_{k+l\text{ раз}} = (X,\ldots,X)$$

(при перестановке одинаковых элементов ничего не меняется),

$$((S\otimes T)\alpha)(X,\dots,X)=(S\otimes T)(\alpha(X,\dots,X))=(S\otimes T)(X,\dots,X)$$
$$=S(X,\dots,X)T(X,\dots,X)=f(X)g(X),$$

поэтому и

$$(S\circledS T)(X,\dots,X)=(\mathfrak{S}(S\otimes T))(X,\dots,X)=f(X)g(X).$$

Стало быть, в симметрических ковариантных тензорах мы встречаем как бы загримированных старых знакомых — симметрические полилинейные функции от векторов взаимно однозначно соответствуют однородным многочленам, причём это соответствие сохраняет умножение (не говоря уже о сложении). Сейчас мы определим ещё одну операцию над симметрическими ковариантными тензорами и вновь убедимся, что при переходе к многочленам получается нечто хорошо известное.

Операция, которую я собираюсь ввести, аналогична некоторой операции, встречающейся в теории антисимметрических ковариантных тензоров (ради этой аналогии я и собираюсь познакомить с ней читателя). В этой теории она называется "внутренним умножением тензора T на вектор X из основного векторного пространства V"; результат такого умножения там обозначается через i_XT. Её аналог для симметрических ковариантных тензоров, кажется, не имеет особого названия и обозначения, поэтому я просто заимствую название и обозначение из "антисимметрической" теории. По определению, при внутреннем умножении симметрической полилинейной функции k-ой степени (т.е. функции от k векторов) на вектор $X\in V$ получается симметрическая полилинейная функция $(k-1)$-ой степени i_XT, принимающая на векторах $\underset{1}{X},\dots,\underset{k-1}{X}$ значение

$$(i_XT)(\underset{1}{X},\dots,\underset{k-1}{X})=T(X,\underset{1}{X},\dots,\underset{k-1}{X})\ .$$

Очевидно, что определённая таким образом функция на V^{k-1} полилинейна. Ясно также, что она симметрична — её значение не меняется при любой перестановке векторов $\underset{1}{X},\dots,\underset{k-1}{X}$ между собой, поскольку это частный случай перестановки между собой всех k векторов $X,\underset{1}{X},\dots,\underset{k-1}{X}$, при которой не меняется значение функции T.

Найдём, чему равно $\left(i_Y \underset{k_1,\dots,k_n}{T}\right)\underbrace{(X,\dots,X)}_{k-1\text{ раз}}$. (Я теперь обозначаю вектор, на который производится внутреннее умножение полилинейной функции T, через Y, чтобы избежать путаницы с аргументом X однородного многочлена, получающегося при $\underset{1}{X} = \ldots = \underset{k-1}{X} = X$ из $\left(i_Y \underset{k_1,\dots,k_n}{T}\right)(\underset{1}{X},\dots,\underset{k-1}{X})$.) Как мы знаем, $\underset{k_1,\dots,k_n}{T}$ можно получить путём симметрировании такого тензорного произведения $dx^{i_1}\otimes\otimes dx^{i_n}$, для которого размещение $(i_1,i_2,\dots,i_n)$ удовлетворяет условию: при любом $j=1,\dots,n$ в размещении имеется ровно k_j чисел i_h, равных j. Зафиксируем какое-нибудь такое размещение (например, в нём можно расположить числа i_h в таком порядке, чтобы с увеличением h они не уменьшались, однако на самом деле сейчас конкретный выбор размещения для нас не важен). Имеем

$$\underset{k_1,k_2,\dots,k_n}{T} = \frac{1}{k!}\sum_{\alpha\in\mathfrak{S}_k} dx^{i_{\alpha(1)}}\otimes dx^{i_{\alpha(2)}}\otimes\ldots\otimes dx^{i_{\alpha(n)}}.$$

Посмотрим, что получается при применении фигурирующих здесь слагаемых к набору векторов $(Y,X,\dots,X)$. При применении слагаемого, отвечающего подстановке α, получается

$$Y^{i_{\alpha(1)}}X^{i_{\alpha(2)}}\ldots X^{i_{\alpha(n)}}. \tag{96}$$

Когда все аргументы у симметрической полилинейной функции были равны друг другу, получались одинаковые слагаемые. Но теперь один из аргументов равен Y, а другие X, поэтому слагаемые не одинаковые. Обозначим через J_i (где i может равняться $1,2,\dots,n$ множество тех номеров h, для которых $i_h=j$. В каждом J_i имеется ровно k_i элементов. Различие между слагаемыми (96), как мы увидим, всецело обусловлено различиями в первом множителе $Y^{i_{\alpha(1)}}$, т.е. тем, чему равно число $i_{\alpha(1)}$. Если оно принимает значение i, то чисел $h\geqslant 2$ с $\alpha(h)\in J_i$ имеется ровно k_i-1. Чисел же $h\geqslant 2$ с $\alpha(h)\in J_j$ с $j\neq i$ имеется по-прежнему k_j. Поэтому в произведении (96) имеется k_i-1 множитель X^i, а для $j\neq i$ в нём имеется k_j множителей X^j. Значит,

$$\left(i_Y \underset{k_1,k_2,\ldots,k_n}{T}\right)(X,\ldots,X) = \underset{k_1,k_2,\ldots,k_n}{T}(Y,X,\ldots,X)$$
$$= \frac{1}{k!}\sum_{i=1}^{n}\sum_{\substack{\alpha\in\mathfrak{S}_k\\ \alpha(1)=i}} Y^i(X^i)^{k_i-1}\prod_{j\neq i}(X^j)^{k_j}.$$

В полученной сумме всем подстановкам α, для которых $\alpha(1) = j$, отвечают одинаковые слагаемые. поэтому надо найти число таких слагаемых, т.е. число соответствующих подстановок.

Упражнение. Покажите, что число подстановок $\alpha \in \mathfrak{S}_k$, для которых $\alpha(1)$ рано данному фиксированному числу l, равно $(k-1)!$.

В интересующей нас сумме одинаковые слагаемые получаются, когда $\alpha(1) \in J_i$, иными словами, когда $\alpha(1)$ равно любому из тех чисел l, которые входят в J_i. Таких чисел l у нас k_i, а для каждого из них имеется $(k-1)!$ слагаемых. Следовательно,

$$\left(i_Y \underset{k_1,k_2,\ldots,k_n}{T}\right)(X,\ldots,X) = \frac{1}{k!}\sum_{i=0}^{n} k_i(k-1)!Y^i(X^i)^{k_i-1}\prod_{j\neq i}(X^j)^{k_j} =$$
$$= \frac{1}{k}\sum_{i=0}^{n} k_iY^i(X^i)^{k_i-1}\prod_{j\neq i}(X^j)^{k_j}.$$

Если ещё заметить, что

$$k_i(X^i)^{k_i-1}\prod_{j\neq i}(X^j)^{k_j} = \frac{\partial}{\partial X^i}\prod_{j=1}^{n}(X^j)^{k_j},$$

то наша сумма становится хорошо знакомой величиной

$$\sum_{i=1}^{n} Y^i\frac{\partial}{\partial X^i}\prod_{j=1}^{n}(X^j)^{k_j} = D_Y((X^1)^{k_1}\ldots(X^i)^{k_i}\ldots(X^n)^{k_n})$$

(D_Y — производная по направлению вектора Y). Наконец, вспомним, что любая симметрическая полилинейная функция степени k является суммой функций $\underset{k_1,\ldots,k_n}{T}$ с некоторыми коэффициентами (и с $k_1+\ldots+k_n = k$). Поэтому окончательно для любой такой функции T

$$(i_YT)(X,\ldots,X) = \frac{1}{k}D_Y(T(X,\ldots,X)).$$

Как и утверждалось, при переходе от ковариантных антисимметрических тензоров к однородным многочленам внутреннее умножение $T \mapsto i_Y T$ сводится, с точностью до множителя, к хорошо известной операции — к дифференцированию многочлена по направлению вектора Y.

Найдём размерность $\dim(V^*)^{\circledS k}$ пространства симметрических ковариантных тензоров степени k в n-мерном пространстве V. Из сказанного о базисе в $\dim(V^*)^{\circledS k}$ ясно, что размерность этого пространства равна числу способов, какими можно разбить число k в сумму $k_1 + \ldots + k_n$ неотрицательных слагаемых. Мимоходом также отмечалось, что такому размещению $(k_1, k_2, \ldots, k_n)$ можно сопоставить такое размещение $(i_1, i_2, \ldots, i_k)$, для которого $1 \leqslant i_1 \leqslant i_2 \leqslant \ldots \leqslant i_k \leqslant n$ и при любом $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ во втором размещении имеется ровно k_j чисел i_h, равных j. Это можно сделать единственным образом. (Продумайте это место!) Поэтому достаточно найти число таких размещений $(i_1, i_2, \ldots, i_k)$, для которых $1 \leqslant i_1 \leqslant i_2 \leqslant \ldots \leqslant i_k \leqslant n$. Сопоставим такому размещению $(i_1, i_2, \ldots, i_k)$ размещение

$$(j_1, j_2, \ldots, j_k) = (i_1 + 0, i_2 + 1, \ldots, i_k + n - 1).$$

Для последнего размещения все j_i различны между собой, и все они принадлежат множеству $\{1, 2, \ldots, k + n - 1\}$. Обратно, для любого подмножества $\{j_1, j_2, \ldots, j_k\} \subset \{1, 2, \ldots, k+n-1\}$, считая j_i пронумерованными в порядке возрастания, можно единственным образом определить такое размещение $(i_1, i_2, \ldots, i_k)$, для которого $1 \leqslant i_1 \leqslant i_2 \leqslant \ldots \leqslant i_k \leqslant n$ и все $j_h = i_h + h - 1$ (почему?). Выходит, интересующее нас число равно числу подмножеств $\{j_1, j_2, \ldots, j_k\}$ множества $\{1, 2, \ldots, k + n - 1\}$, состоящих из k элементов, т.е. числу сочетаний $C^k_{k+n-1} = \binom{k+n-1}{k}$, так что

$$\dim(V^*)^{\circledS k} = C^k_{k+n-1} = \binom{k + n - 1}{k}.$$

Упражнение. а). Сколько различных тензорных произведений $dx^{i_1} \otimes \ldots \otimes dx^{i_k}$ входит в $T_{k_1,\ldots,k_n}$? (Ответ. $\frac{k!}{k_1! \ldots k_n!}$.)

б). Пусть V снабжено скалярным произведением, которое по описанному в предыдущем п. способу перенесено на тензоры. Используем ортонормированные декартовы координаты в V. Чему равны скалярные произведения $\langle T_{k_1,\ldots,k_n}, T_{l_1,\ldots,l_n} \rangle$?

К сказанному примыкает один вопрос, не столько содержательный, сколько терминологический (впрочем, терминологическим он становится после содержательных разъяснений, хотя и простых). Мы много раз говорили о координатах $\{T_{i_1,\dots,i_k}\}$ чисто ковариантного тензора T. Они фигурируют в разложении тензора T как вектора пространства $(V^*)^{\otimes k}$ по базису $\{dx^{i_1} \otimes \dots \otimes dx^{i_n}\}$ этого пространства. Этот базис я называю базисом, “естественно связанным’"с используемыми координатами $(x^1, \dots, x^n)$ в основном (или исходном) векторном пространстве V (тогда это декартовы координаты) или на многообразии M (тогда это криволинейные координаты, но с ними связаны декартовы координаты в касательном пространстве T_pM, которое фактически и является исходным пространством при определении тензоров). Видимо, нет сомнений, что использование базиса $\{dx^{i_1} \otimes \dots \otimes dx^{i_n}\}$ естественно по крайней мере вначале (когда вводятся исходные определения; другое дело, что позднее при исследовании тех или иных конкретных вопросов могут пригодиться и другое базисы).

Однако если мы занимаемся симметрическими ковариантными тензорами, т.е. симметрическими полилинейными функциями на V^k, то в соответствующем пространстве $(V^*)^{\circledS k}$ естественнее всего (опять-таки по крайней мере вначале) использовать базис

$$\{T_{k_1,\dots,k_n} = (dx^1)^{\circledS k_1} \circledS \dots \circledS (dx^n)^{\circledS k_n}\}$$

(где, конечно, $(dx^j)^{\circledS h} = \underbrace{dx_j \circledS \dots \circledS dx^j}_{h \text{ раз}}$). Его “неформальная естественность” проявляется при переходе к формам, поскольку многочлены на первых порах представляются (даже определяются) как суммы одночленов $(X^1)^{k_1} \dots (X^n)^{k_n}$ с какими-то коэффициентами $f_{k_1,\dots,k_n}$, так что эти одночлены образуют естественный базис в пространстве всех многочленов, фигурирующий в самом определении последних (хотя позднее могут появиться другие базисы). А ведь при переходе от тензоров к однородным многочленам в эти одночлены переходят как раз тензоры $\underset{k_1,\dots,k_n}{T}$. Тогда естественно понимать под “координатами T” координаты в разложении T по базису $\{\underset{k_1,\dots,k_n}{T}\}$. Сейчас я буду обозначать эти коэффициенты так же, как и для многочленов — через $f_{k_1,\dots,k_n}$, так что $T = \sum f_{k_1,\dots,k_n} \underset{k_1,\dots,k_n}{T}$. А если в V введено скалярное произведение и используются ортонормированные декартовы координаты, то, возможно, стоит в $(V^*)^{\circledS k}$ произвести ортонормировку базиса $\{\underset{k_1,\dots,k_n}{T}\}$.

Как видно, при различном понимании выражения “координаты тензора T” число этих координат оказывается различным, а сами они могут различаться по величине, как видно из следующего примера.

Упражнение. Пусть $n = 2,\ k = 2$. Пусть, как обычно, тензор $T \in (V^*)^{\circledS 2}$ имеет в базисе $dx^i \otimes dx^j$ объемлющего пространства $(V^*)_{\otimes 2}$ координаты $T_{1,1},\ T_{1,2},\ T_{2,1} = T_{1,2},\ T_{2,2}$. Проверьте, что в базисе $\underset{2,0}{T},\ \underset{1,1}{T},\ \underset{0,2}{T}$ пространства $(V^*)^{\circledS 2}$ он имеет координаты $f_{2,0} = T_{2,0},\ f_{1,1} = 2T_{1.2}.\ f_{0,2} = T_{1,1}$. Если же этот базис ортонормировать ($V = \mathbb{R}^2$ с обычной метрикой), то координатами T станут числа $T_{2,0},\ 2\sqrt{2}T_{1,1},\ T_{0,2}$.

Ничего специфически "симметрического" или вообще "тензорного" в подобной ситуации нет. Аналогичный вопрос возникает всякий раз, когда мы сосредотачиваем внимание на каком-то векторном подпространстве L рассматривавшегося ранее векторного пространства W: как понимать тогда "координаты векторов из L" — как координаты этих векторов в W или как их координаты в какой-то координатной системе в L? Тривиальный пример (который ввиду своей тривиальности даже не воспринимается как пример чего бы то ни были, пока специально об этом не скажешь): $W = \mathbb{R}^2$, а L — биссектриса первого и третьего квадрантов, уравнение которой есть $X^1 = X^2$. Если мы какое-то время рассматриваем только векторы из L, то что понимать под "координатами такого вектора" — пара чисел (X^1, X^1), одно число X^1 (это единственная существенная переменная в паре (X^1, X^1) и одновременно координата вектора X в базисе прямой L, состоящем из единственного вектора $(1,1)$) или число $\sqrt{2}X^1$ (это координата X в базисе, состоящем из вектора единичной длины $\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)$)? Очевидно, нельзя сказать, будто один ответ правилен, а другое нет, — просто в данной ситуации выражение "координата вектора X" требует уточнения.

В нашем случае (тензоры из $(V^*)^{\circledS k}$), как мне кажется, их координаты как координаты в $(V^*)^{\otimes k}$ в базисе $\{dx^{i_1} \otimes \ldots \otimes dx^{i_n}\}$ стоит при необходимости уточнения называть их "тензорными координатами". Для "координат в $(V^*)^{\circledS k}$" я ничего лучше самого этого словосочетания не вижу (но, конечно, оно подразумевает известным, какой базис мы намерены использовать в $(V^*)^{\circledS k}$).

В заключение вернёмся к формуле для симметрического произведения симметрических полилинейных функций $S \in (V^*)^{\circledS k},\ T \in (V^*)^{\circledS L}$:

$$(S \circledS T)(\underset{1}{X}, \ldots, \underset{k+l}{X}) = \frac{1}{(k+l)!} \sum_{\alpha \in \mathfrak{S}_{k+l}} S(\underset{\alpha(1)}{X}, \ldots, \underset{\alpha(k)}{X}) T(\underset{\alpha(k+1)}{X}, \ldots, \underset{\alpha(k+l)}{X}) \tag{97}$$

(представляющей собой дословную расшифровку определения $S \circledS T = \mathfrak{S}(S \otimes T)$). В её правой части имеется $(k+l)!$ слагаемых. В известном смысле большинство из них излишне, ибо многие из них равны друг другу ввиду симметричности S и T. Получим более "экономный" вариант этой формулы.

Рассмотрим все подстановки α, для которых множество номеров $\{\alpha(1), \ldots, \alpha(k)\}$ является каким-нибудь фиксированным подмножеством множества $\{1, \ldots, k+l\}$. Расположим элементы этого подмножества в порядке возрастания. Пусть это будут $\{i_1, i_2, \ldots, i_k\}$, где $1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leqq k+l$. Элементы же множества $\{\alpha(k+1), \ldots, \alpha(k+l)\}$, тоже расположенные в порядке возрастания, обозначим через $\{j_1, \ldots, j_l\}$; здесь $1 \leqslant j_1 < j_2 < \ldots < j_l \leqslant K+l$ и ни одно из чисел i_p не равно ни одному из j_q. Подстановка

$$\beta = \begin{pmatrix} 1, \ldots, k, & k+1, \ldots, k+l \\ i_1, \ldots, i_k & j_1, \ldots, j_l \end{pmatrix} \tag{98}$$

— одна из тех подстановок, для которых $\{\alpha(1), \ldots, \alpha(k)\} = \{i_1, \ldots, i_k\}$ (и, значит, $\{\alpha(k+1), \ldots, \alpha(k+l)\} = \{j_1, \ldots, j_l\}$). Для всех таких подстановок аргументы $(\underset{\alpha(1)}{X}, \ldots, \underset{\alpha(k)}{X}$ у S в правой части (97) отличаются только порядком фигурирующих там векторов, а потому значения $S(\underset{\alpha(1)}{X}, \ldots, \underset{\alpha(k)}{X})$ для них одни и те же — они совпадают с $S(\underset{i_1}{X}, \ldots, \underset{i_k}{X})$. Аналогично все $T(\underset{\alpha(k+1)}{X}, \ldots, \underset{\alpha(k+l)}{X})$ для таких α равны $S(\underset{j_1}{X}, \ldots, \underset{j_l}{X})$. Число же различных подстановок такого типа равно $k!l!$, потому что их можно получить, если, во-первых, переставлять между собой числа $i_1, \ldots, i_k$ в нижнем ряду у $\begin{pmatrix} 1, \ldots, k, & k+1, \ldots, k+l \\ i_1, \ldots, i_k & j_1, \ldots, j_l \end{pmatrix}$ и, во-вторых, (независимо от этого) переставлять между собой числа $j_1,' ldots, j_l$ в том же ряду. Получается формула

$$(S \circledS T)(\underset{1}{X}, \ldots, \underset{k+l}{X}) = \frac{k!l!}{(k+l)!} \sum_{\substack{1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leqslant k+l \\ 1 \leqslant j_1 < j_2 < \ldots < j_l \leqslant k+l \\ \text{все } i_p \neq j_q}} S(\underset{i_1}{X}, \ldots, \underset{i_k}{X}) T(\underset{j_1}{X}, \ldots, \underset{j_l}{X}) \quad . \tag{99}$$

Назовём подстановку (98) *тасующей*, если, как и раньше, $i_1 < i_2 < \ldots i_k$ и $j_1 < j_2 < \ldots j_l$ (а раз это подстановка, то можно добавить, что

$1 \leqslant i_p, j_q \leqslant k+l$ и все $i_p \neq j_q$). Основание для данного названия таково. Вообразим колоду карт, на которых вместо обычных изображений написаны номера от 1 до $k+l$. Вначале карты расположены в порядке возрастания номеров. При тасовании сперва в одну руку (скажем, левую) берётся начало колоды — первые k из этих карт, а в другую руку (правую) — остальные l карт. В отличие от того, что на самом деле делают при тасовании карт, мы предписываем, чтобы в левой руке было именно k карт (а в правой, значит, l). Пока что карты в левой и правой руках расположены в порядке возрастания номеров. Затем происходит главное: карты "левой" части колоды, сохраняя свой порядок, вставляются между картами "правой" части. Элемент случайности при тасовании карт связан с различными возможностями для того, на какие именно места попадут k карт "левой" части. Пусть карта с номером h попадёт на i_h-ое место, так что $1 \leqslant i_1 < i_2 <\leqslant< i_k \leqslant k+l$. Неравенство "$i_p < i_q$ при $p < q$" как раз и означает, что относительный порядок между картами "левой" части колоды не нарушен. Номер же того места, на котором теперь окажется h-ая карта "правой" части колоды, обозначим через j_h, так что $1 \leqslant j_1 < j_2 <\leqslant< j_l \leqslant k+l$. Получается, что при (однократном) тасовании карт действительно над ними осуществляется подстановка вида (98) с указанными ранее ограничениями на i_p и j_q.

Договорившись о названии, мы можем сказать: отличие (99) от (97) состоит в том, что в (99) среднее берётся только по тасующим подстановкам, т.е.

$$S \circledS T = \frac{k!l!}{(k+l)!} \sum_{\text{тасующие } \beta \in \mathfrak{S}_{k+l}} (S \otimes T)\beta,$$

$$(S \circledS T)(\underset{1}{X}, \ldots, \underset{k+l}{X}) = \frac{k!l!}{(k+l)!} \sum_{\text{тасующие } \beta \in \mathfrak{S}_{k+l}} S(\underset{\beta(1)}{X}, \ldots, \underset{\beta(k)}{X}) T(\underset{\beta(k+1)}{X}, \ldots, \underset{\beta(k+l)}{X}).$$

Упражнение. а). Докажите с помощью перехода к многочленам, что при $X \in V,\ S \in (V^*)^{\circledS k},\ T \in (V^*)^{\circledS l}$

$$i_X(S \circledS T) = \frac{k}{k+l}(i_X S) \circledS T + \frac{l}{k+l} S \circledS i_X T.$$

б). Докажите то же самое, оперируя непосредственно с полилинейными симметрическими функциями и используя (99).