Введение в аналитическую теорию непрерывных дробей

4 мая 2006 г.

Определение. Числовой непрерывной дробью называется выражение

$$\cfrac{a_1}{b_1 + \cfrac{a_2}{b_2 + \dots}} \tag{1}$$

где $a_1, b_1, a_2, b_2, \dots$ – некоторые отличные от нуля числа.

Непрерывная дробью называется конечной, если она имеет лишь конечное число звеньев. В противном случае непрерывная дробь называется бесконечной.

Определение. n-й подходящей дробью непрерывной дроби 1 называется конечная дробь

$$\cfrac{a_1}{b_1 + \cfrac{a_2}{b_2 + \dots + \cfrac{a_n}{b_n}}}$$

получаемая из непрерывной дроби 1 ее обрыванием на n-м шаге.

В этом определении неявно предполагается, что число звеньев непрерывной дроби 1 не меньше n. Очевидно, что n-я подходящая дробь принимает вполне определенное значение, которое получится, если над числами $a_1, b_1, \dots, a_n, b_n$ произвести операции деления и сложения в соответствующем порядке.

Утверждение. *Пусть* $\big(S_1 \circ \dots \circ S_n\big)(w)$ *- композиция дробно линейных преобразований*

$$S_n(w) = \frac{a_n}{b_n + w}, \quad , \quad n = 1, 2, \dots \tag{2}$$

Тогда $\big(S_1 \circ \dots \circ S_n\big)(0)$ *равно значению* n*-й подходящей дроби непрерывной дроби 1.*

Докажем теорему индукцией по числу n. Обозначим через F_n значение n-й подходящей дроби непрерывной дроби 1. При $n = 1$ равенство $F_1 = \frac{a_1}{b_1} = S_1(0)$ очевидно. Предположим, что утверждение верно для всех конечных непрерывных дробей с числом звеньев, не превосходящих n. Тогда

$$\cfrac{a_2}{b_2 + \cfrac{a_3}{b_3 + \cdots + \cfrac{a_{n+1}}{b_{n+1}}}} = \big(S_2 \circ \cdots \circ S_{n+1}\big)(0)$$

Следовательно,

$$F_{n+1} = \cfrac{a_1}{b_1 + \cfrac{a_2}{b_2 + \cdots + \cfrac{a_{n+1}}{b_{n+1}}}} = \cfrac{a_1}{b_1 + \big(S_2 \circ \cdots \circ S_{n+1}\big)(0)} =$$

$$S_1\big(S_2 \circ \cdots \circ S_{n+1}\big)(0) = \big(S_1 \circ S_2 \circ \cdots \circ S_{n+1}\big)(0)$$

Определение. Бесконечная непрерывная дробь 1 называется сходящейся, если сходится последовательность ее подходящих дробей. Значением непрерывной дроби 1 называется предел последовательности ее подходящих дробей.

Отметим два простых следствия доказанного утверждения.

Следствие 1. *Непрерывная дробь 1 сходится тогда и только тогда, когда сходится последовательность композиций* $\big(S_1 \circ \cdots \circ S_n\big)(0)$. *В случае сходимости значение непрерывной дроби 1 равно пределу* $\lim_{n\to\infty}\big(S_1 \circ \cdots \circ S_n\big)(0)$.

Следствие 2. *Пусть k - произвольное натуральное число. Непрерывная дробь 1 сходится (возможно к бесконечному значению) тогда и только тогда, когда сходится ее остаток*

$$\cfrac{a_{k+1}}{b_{k+1} + \cfrac{a_{k+2}}{b_{k+2} + \ldots}} \tag{3}$$

В случае сходимости значение F непрерывной дроби 1 и значение G^k k-го остатка 3 связаны между собой равенством

$$F = \cfrac{a_1}{b_1 + \cfrac{a_2}{b_2 + \cdots + \cfrac{a_k}{b_k + G^k}}} = S_1 \circ \cdots \circ S_k(G^k)$$

Пусть $\frac{P_n}{Q_n}$ - дробь, получаемая свертыванием (без каких-либо сокращений) n-й подходящей дроби непрерывной дроби 1. Имеет место следующая теорема.

Теорема 1. *Последовательности $\{P_n\}_{n=1}^{\infty}$ числителей и $\{Q_n\}_{n=1}^{\infty}$ знаменателей подходящих дробей непрерывной дроби 1 удовлетворяют одному и тому же разностному уравнению*

$$X_n = b_n X_{n-1} + a_n X_{n-2} \quad , \quad n = 1, 2, \ldots \tag{4}$$

со следующими начальными условиями $P_{-1} = 1$, $P_0 = 0$ и $Q_{-1} = 0$, $Q_0 = 1$.

Докажем теорему индукцией по числу n. При $n = 1$ имеем

$$P_1 = a_1 = b_1 P_0 + a_1 P_{-1} \quad , \quad Q_1 = b_1 = b_1 Q_0 + a_1 Q_{-1}$$

Предположим, что теорема верна при всех $k = 1, 2, \ldots, n$. Введем в рассмотрение новую непрерывную дробь, все коэффициенты которой до индекса $n-1$ включительно такие же, как у непрерывной дроби 1, а коэффициенты a_n и b_n меняются соответственно на $a_n^* = a_n b_{n+1}$ и $b_n^* = b_n b_{n+1} + a_{n+1}$. Заметим, что при соответствующих обозначениях $P_k = P_k^*$, $Q_k = Q_k^*$ при всех $k = 0, 1, \ldots, n-1$ и $P_{n+1} = P_n^*$, $Q_{n+1} = Q_n^*$. Применяя к P_n^* индуктивное предположение, получаем

$$P_{n+1} = P_n^* = b_n^* P_{n-1}^* + a_n^* P_{n-2}^* = (b_n b_{n+1} + a_{n+1}) P_{n-1} + a_n b_{n+1} P_{n-2} =$$

$$b_{n+1}(b_n P_{n-1} + a_n P_{n-2}) + a_{n+1} P_{n-1}$$

Еще раз пользуясь индуктивным предположением, но уже для числителя P_n исходной дроби, получаем требуемое равенство

$$P_{n+1} = b_{n+1} P_n + a_{n+1} P_{n-1}$$

Равенство

$$Q_{n+1} = b_{n+1} Q_n + a_{n+1} Q_{n-1}$$

получается аналогично.

Далее, если не оговорено противное, будем предполагать, что P_n и Q_n - это числитель и знаменатель непрерывной дроби 1, а $S_n(w)$ - дробно линейное преобразование 2, соответствующее непрерывной дроби 1.

Следующие три теоремы являются простыми следствиями доказанного разностного уравнения 4.

Теорема 2. *При всех* $n = 1, 2, \ldots$ *имеют место равенства*

$$S_1 \circ \cdots \circ S_n(w) = \frac{P_{n-1}w + P_n}{Q_{n-1}w + Q_n} \tag{5}$$

Доказательство теоремы проведем индукцией по числу n. При $n = 1$ имеем

$$S_1(w) = \frac{a_1}{w + b_1} = \frac{P_0 w + P_1}{Q_0 w + Q_1}$$

Предположим, что при индексе n равенство 5 выполняется. Тогда, пользуясь теоремой 1, получаем

$$S_1 \circ S_2 \circ \cdots \circ S_{n+1}(w) = S_1 \circ \cdots \circ S_n\big(S_{n+1}(w)\big) = \frac{P_{n-1}\frac{a_{n+1}}{w+b_{n+1}} + P_n}{Q_{n-1}\frac{a_{n+1}}{w+b_{n+1}} + Q_n} =$$

$$\frac{P_{n-1}a_{n+1} + P_n(w + b_{n+1})}{Q_{n-1}a_{n+1} + Q_n(w + b_{n+1})} = \frac{P_n w + (b_{n+1}P_n + a_{n+1}P_{n-1})}{Q_n w + (b_{n+1}Q_n + a_{n+1}Q_{n-1})} = \frac{P_n w + P_{n+1}}{Q_n w + Q_{n+1}}$$

то есть теорема верна и при $n + 1$.

Теорема 3. *При всех* $n = 1, 2, \ldots$ *имеет место равенство*

$$P_n Q_{n-1} - Q_n P_{n-1} = (-1)^{n-1} a_1 \ldots a_n \tag{6}$$

Доказательство теоремы проведем индукцией по числу n. При $n = 1$ имеем

$$P_1 Q_0 - Q_1 P_0 = a_1 \times 1 - b_1 \times 0 = a_1$$

Предположим, что при индексе n равенство 6 выполняется. Тогда, пользуясь теоремой 1, получаем

$$P_{n+1}Q_n - Q_{n+1}P_n = (b_{n+1}P_n + a_{n+1}P_{n-1})Q_n - (b_{n+1}Q_n + a_{n+1}Q_{n-1})P_n =$$

$$-a_{n+1}(P_n Q_{n-1} - Q_n P_{n-1}) = -a_{n+1}(-1)^{n-1} a_1 \ldots a_n = (-1)^n a_1 \ldots a_{n+1}$$

то есть теорема верна и при $n + 1$.

Разделив равенство 6 на $Q_{n-1}Q_n$, получим

Следствие 1.

$$\frac{P_n}{Q_n} - \frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}} = \frac{(-1)^{n-1} a_1 \ldots a_n}{Q_{n-1}Q_n} \tag{7}$$

Следствие 2. *Непрерывная дробь 1 сходится тогда и только тогда, когда сходится ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} a_1 \ldots a_n}{Q_{n-1}Q_n} \tag{8}$$

Действительно,

$$\frac{P_n}{Q_n} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{P_k}{Q_k} - \frac{P_{k-1}}{Q_{k-1}}\right)$$

Поэтому сходимость непрерывной дроби 1 эквивалентна сходимости ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{P_k}{Q_k} - \frac{P_{k-1}}{Q_{k-1}}\right)$$

совпадающего в силу равенства 7 с рядом 8.

Теорема 4. *При всех $n = 1, 2, \ldots$ имеет место равенство*

$$P_n Q_{n-2} - Q_n P_{n-2} = (-1)^n a_1 \ldots a_{n-1} b_n$$

Доказательство. По рекуррентным соотношениям 4

$$P_n = b_n P_{n-1} + a_n P_{n-2}$$

$$Q_n = b_n Q_{n-1} + a_n Q_{n-2}$$

Вычитая из первого равенства, умноженного на Q_{n-2} второе, умноженное на P_{n-2}, и учитывая предыдущую теорему, получим

$$P_n Q_{n-2} - Q_n P_{n-2} = b_n (P_{n-1} Q_{n-2} - Q_{n-1} P_{n-2}) = b_n (-1)^n a_1 \ldots a_{n-1}$$

Следствие.

$$\frac{P_n}{Q_n} - \frac{P_{n-2}}{Q_{n-2}} = \frac{(-1)^n a_1 \ldots a_{n-1} b_n}{Q_{n-2} Q_n} \tag{9}$$

Теорема 5. *Если непрерывная дробь 1 имеет положительные коэффициенты, то ее подходящие дроби четного порядка возрастают, а нечетного порядка убывают, причем всякая подходящая дробь нечетного порядка больше всякой подходящей дроби четного порядка.*

Доказательство. Так как знаменатели Q_n подходящих дробей удовлетворяют разностному уравнению 4, то при положительных коэффициентах непрерывной дроби имеют место неравенства $Q_n > 0$ при всех $n = 0, 1, \ldots$. Поэтому правая часть равенства 9 положительна при четных n и отрицательна при нечетных n. Следовательно,

$$\frac{P_{2n}}{Q_{2n}} - \frac{P_{2n-2}}{Q_{2n-2}} > 0 \Longrightarrow \left\{\frac{P_{2n}}{Q_{2n}}\right\}_{n=1}^{\infty} \quad - \quad \text{возрастает}$$

$$\frac{P_{2n+1}}{Q_{2n+1}} - \frac{P_{2n-1}}{Q_{2n-1}} < 0 \Longrightarrow \{\frac{P_{2n+1}}{Q_{2n+1}}\}_{n=0}^{\infty} \quad - \quad \text{убывает}$$

Аналогично, правая часть равенства 7 отрицательна при четных n и положительна при нечетных n. Следовательно,

$$\frac{P_{2n+1}}{Q_{2n+1}} - \frac{P_{2n}}{Q_{2n}} > 0$$

Поэтому, если $m = \max\{k, n\}$, то

$$\frac{P_{2k}}{Q_{2k}} < \frac{P_{2m}}{Q_{2m}} < \frac{P_{2m+1}}{Q_{2m+1}} < \frac{P_{2n+1}}{Q_{2n+1}}$$

Следствие. *Последовательность подходящих дробей четного порядка непрерывной дроби 1 с положительными коэффициентами возрастает и имеет предел F^-, последовательность подходящих дробей нечетного порядка убывает и имеет предел F^+ и при этом $F^- \leq F^+$. Если $F^- = F^+$, то непрерывная дробь 1 сходится.*

Применим полученные теоремы к частному случаю непрерывной дроби вида

$$b_0 + \cfrac{1}{b_1 + \cfrac{1}{b_2 + \dots}} \tag{10}$$

Для упрощения дальнейшей записи непрерывную дробь вида 10 будем обозначать через $[b_0; b_1, b_2, \dots]$.

Легко видеть, что добавление к непрерывной дроби начального слагаемого b_0 ничего не меняет в предыдущих рассуждениях. Единственное отличие состоит в том, что начальные условия для числителей непрерывной дроби

$$b_0 + \cfrac{a_1}{b_1 + \cfrac{a_2}{b_2 + \dots}}$$

теперь будут иметь следующий вид $P_{-1} = 1$, $P_0 = b_0$.

Теорема 6. *Непрерывная дробь 10 с положительными коэффициентами сходится тогда и только тогда, когда*

$$\lim_{n\to\infty} Q_n Q_{n+1} = \infty \tag{11}$$

Если непрерывная дробь 10 сходится к значению F, то при всех $n = 1, 2, \dots$ имеют место неравенства

$$\left| F - \frac{P_n}{Q_n} \right| \leq \frac{1}{Q_n Q_{n+1}} \tag{12}$$

Доказательство. По следствию 2 теоремы 3 с учетом того, что $a_n = 1$ при всех $n = 1, 2, \ldots$, непрерывная дробь 10 сходится тогда и только тогда, когда сходится ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{Q_{n-1}Q_n} \tag{13}$$

Так как коэффициенты непрерывной дроби 10 положительны, то, как уже отмечалось, $Q_n > 0$ при всех $n = 0, 1, \ldots$. Поэтому ряд 13 является знакочередующимся рядом. Так как

$$Q_{n+1} = b_{n+1}Q_n + Q_{n-1} \geq Q_{n-1}$$

то

$$Q_{n-1}Q_n \leq Q_nQ_{n+1}$$

то есть модуль общего члена ряда 13 монотонно убывает. Следовательно, знакочередующийся ряд 13 по теореме Лейбница сходится тогда и только тогда, когда его общий член $\frac{1}{Q_nQ_{n+1}}$ стремится к 0, то есть тогда и только тогда, когда выполняется условие 11. Неравенство 12 имеет место по причине того, что знакочередующийся ряд отличается от своей n-й частичной суммы не более чем на модуль первого отброшенного члена.

Пусть все коэффициенты непрерывной дроби 10 являются натуральными числами. Тогда $Q_n > 0$ при всех $n = 0, 1, \ldots$. Кроме того, так как $b_n \in \mathbb{N}$, и следовательно, $b_n \geq 1$, то

$$Q_n = b_nQ_{n-1} + Q_{n-2} \geq Q_{n-1} + Q_{n-2}$$

Отсюда следует, что $\lim_{n\to\infty} Q_n = \infty$. Поэтому как следствие предыдущей теоремы получаем утверждение.

Следствие. *Непрерывная дробь 10 с натуральными коэффициентами сходится и при всех $n = 1, 2, \ldots$ имеют место неравенства 12.*

В частности, непрерывная дробь

$$\cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \ldots}}} \tag{14}$$

сходится. Заметим, что разностное уравнение для числителей и знаменателей непрерывной дроби 14 имеет следующий вид

$$X_n = X_{n-1} + X_{n-2} \quad , \quad n = 1, 2, \ldots \tag{15}$$

Это означает, что если $f_1, f_2, \ldots$ - последовательность чисел Фибоначчи $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \ldots$ (каждое число в этой последовательности равно сумме двух предыдущих), то при всех $n = 1, 2, \ldots$ имеют место равенства $P_n = f_n$ и $Q_n = f_{n+1}$, где $\frac{P_n}{Q_n}$ - n-я подходящая дробь непрерывной дроби 14. Таким образом из сходимости непрерывной дроби 14 следует существование предела $\lim_{n\to\infty} \frac{f_n}{f_{n+1}}$ отношения двух последовательных чисел Фибоначчи. Найдем значение F этого предела. Из вышесказанного следует, что

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f_n}{f_{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{P_n}{Q_n} = F$$

где F - значение непрерывной дроби 14. Из вида непрерывной дроби 14 и следствия 2 утверждения 1 имеем равенство

$$F = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \ldots}}} = \frac{1}{1+F}$$

Следовательно, $F^2 + F - 1 = 0$, $F_{1,2} = \frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$. Так как $\frac{f_n}{f_{n+1}} > 0$ при всех $n = 1, 2, \ldots$, то и предел F этих отношений должен быть положительным числом, и следовательно, $F = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$. Это число в силу своей замечательности имеет собственное имя - оно называется золотым сечением. Иногда его называют еще гармоническим делением. Если от прямоугольника с отношением сторон, равным золотому сечению, отрезать квадрат со стороной, равной меньшей стороне прямоугольника, то оставшийся прямоугольник будет подобен исходному. Пропорция золотого сечения приятна человеческому глазу. Этот факт часто используется при создании архитектурных сооружений. Обычные почтовые открытки также чаще всего выпускают в виде прямоугольника с отношением сторон, равным золотому сечению. Золотое сечение было известно еще в древности. В античной литературе золотое сечение встречается впервые в "Началах"Евклида (3 век до н.э.) Термин золотое сечение ввел Леонардо да Винчи (конец 15-начало 16 вв.) Принципы золотого сечения или близкие ему легли в основу композиционного построения многих произведений мирового искусства.

Непрерывные дроби 10 с натуральными коэффициентами широко используются в теории чисел. Всякому положительному действительному числу α можно поставить в соответствие непрерывную дробь 10 с натуральными коэффициентами по следующему алгоритму

$$\alpha = [\alpha] + \{\alpha\} = [\alpha] + \frac{1}{\frac{1}{\{\alpha\}}} = [\alpha] + \frac{1}{[\frac{1}{\{\alpha\}}] + \{\frac{1}{\{\alpha\}}\}} = \ldots$$

Таким образом числу α ставится в соответствие конечная или бесконечная непрерывная дробь $[b_0; b_1, b_2, \dots]$ вида 10 с натуральными (за исключением начального коэффициента b_0, который может быть любым целым числом) коэффициентами $b_0 = [\alpha]$, $b_1 = [\frac{1}{\{\alpha\}}]$, ...

$$\alpha \sim [b_0; b_1, b_2, \dots] \tag{16}$$

Теорема 7. *Рациональному числу p/q ставится в соответствие конечная непрерывная дробь $[b_0; b_1, b_2, \dots b_n]$. Иррациональному числу α ставится в соответствие бесконечная непрерывная дробь $[b_0; b_1, b_2, \dots]$. При этом знак соответствия $\sim$ в выражении 16 можно заменить знаком равенства, то есть*

$$\frac{p}{q} = [b_0; b_1, b_2, \dots b_n]$$

$$\alpha = [b_0; b_1, b_2, \dots]$$

Если непрерывные дроби $[b_0; b_1, b_2, \dots]$ и $[b_0^*; b_1^*, b_2^*, \dots]$ вида 10 с натуральными коэффициентами сходятся к одному и тому же действительному числу, то $b_n = b_n^*$ при всех $n = 0, 1, \dots$.

Доказательство. Пусть $p, q \in \mathbb{N}$. Заметим, что приведенный выше алгоритм сопоставления действительному числу непрерывной дроби $[b_0; b_1, b_2, \dots]$ есть не что иное, как алгоритм Евклида нахождения наибольшего общего делителя двух натуральных чисел.

$$p = b_0 q + r_0 \quad \text{где} \quad 0 \le r_0 < q$$

$$q = b_1 r_0 + r_1 \quad \text{где} \quad 0 \le r_1 < r_0$$

$$r_0 = b_2 r_1 + r_2 \quad \text{где} \quad 0 \le r_2 < r_1$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$r_{n-2} = b_n r_{n-1}$$

(на каком-то шаге остаток r_n обратится в ноль, так как $q > r_0 > r_1 > \dots$ - убывающая последовательность целых неотрицательных чисел). Таким образом

$$\frac{p}{q} = \frac{b_0 q + r_0}{q} = b_0 + \frac{r_0}{q} = b_0 + \frac{1}{\frac{q}{r_0}} = b_0 + \frac{1}{\frac{b_1 r_0 + r_1}{r_0}} = b_0 + \frac{1}{b_1 + \frac{r_1}{r_0}} = \dots = [b_0; b_1, b_2, \dots b_n]$$

Итак, рациональное число p/q представляется в виде конечной непрерывной дроби.

Легко видеть, что, и наоборот, всякая конечная непрерывная дробь $[b_0; b_1, b_2, \dots b_n]$ равна рациональному числу. Следовательно, иррациональному числу α ставится в соответствие бесконечная непрерывная дробь 10 с натуральными коэффициентами, которая по следствию теоремы 5 сходится. Из алгоритма соответствия видно, что подходящие дроби $\frac{P_n}{Q_n}$ этой бесконечной дроби таковы, что

$$\frac{P_0}{Q_0} = b_0 = [\alpha] < [\alpha] + \{\alpha\} = \alpha$$

$$\frac{P_1}{Q_1} = b_0 + \frac{1}{b_1} = [\alpha] + \frac{1}{[\frac{1}{\{\alpha\}}]} > [\alpha] + \frac{1}{[\frac{1}{\{\alpha\}}] + \{\frac{1}{\{\alpha\}}\}} = \alpha$$

$$\frac{P_{2n}}{Q_{2n}} < \alpha \quad , \quad \frac{P_{2n+1}}{Q_{2n+1}} > \alpha \quad , \quad n = 1, 2, \dots$$

Из этих неравенств следует, что сходящаяся бесконечная непрерывная дробь $[b_0; b_1, b_2, \dots]$, соответствующая иррациональному числу α, сходится именно к числу α.

Если две непрерывные дроби $[b_0; b_1, b_2, \dots]$ и $[b_0^*; b_1^*, b_2^*, \dots]$ сходятся к одному и тому же действительному числу α, то

$$b_0 = b_0^* = [\alpha] \quad \text{и} \quad [0; b_1, b_2, \dots] = [0; b_1^*, b_2^*, \dots] = \{\alpha\}$$

то есть

$$b_0 = b_0^* \quad \text{и} \quad [b_1; b_2, b_3 \dots] = [b_1^*; b_2^*, b_3^* \dots] = \frac{1}{\{\alpha\}}$$

Аналогичным образом из последнего равенства следует, что

$$b_1 = b_1^* \quad \text{и} \quad [b_2; b_3, b_4 \dots] = [b_2^*; b_3^*, b_4^* \dots]$$

и т.д.

В качестве примера приведем следующие разложения

$$\sqrt{2} = 1 + (\sqrt{2} - 1) = 1 + \frac{1}{\sqrt{2} + 1} = 1 + \frac{1}{2 + (\sqrt{2} - 1)} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{\sqrt{2}+1}} = \dots = [1; 2, 2, 2, \dots]$$

$$\frac{\sqrt{5} - 1}{2} = \frac{1}{1 + \frac{\sqrt{5}-1}{2}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{1+\dots}} = [0; 1, 1, 1, \dots]$$

Таким образом еще раз получено представление "золотого сечения"в виде непрерывной дроби 14.

Далее, покажем, что квадратическим иррациональностям соответствуют периодические непрерывные дроби.

Определение. Число α называется квадратической иррациональностью, если α - иррациональный корень некоторого уравнения

$$Ax^2 + Bx + C = 0 \tag{17}$$

с целыми коэффициентами, одновременно не равными нулю.

Теорема (Лагранж). *Действительное положительное число является квадратической иррациональностью тогда и только тогда, когда соответствующая ему непрерывная дробь 10 с натуральными коэффициентами является периодической.*

Доказательство. Пусть $\alpha = [b_0; b_1, b_2, \dots]$.

1°. Предположим, что дробь $[b_0; b_1, b_2, \dots]$ является периодической с периодом m. Это означает, что $b_{n+m} = b_n$ при всех $n \geq n_1$. Положим $G = [0; b_{n_1+1}, b_{n_1+2}, \dots]$. По теореме 7 число G иррационально, так как ему соответствует бесконечная непрерывная дробь. По следствию утверждения 1

$$\alpha = b_0 + S_1 \circ \dots S_{n_1}(G) \tag{18}$$

$$G = S_{n_1+1} \circ \dots S_{n_1+m}(G) \tag{19}$$

где $S_n(w) = \frac{1}{b_n+w}$. Так как $b_n \in \mathbb{N}$, то $S_1 \circ \dots S_{n_1} = \frac{aw+b}{cw+d}$ и $S_{n_1+1} \circ \dots S_{n_1+m}(w) = \frac{ew+f}{gw+h}$ являются дробно линейными преобразованиями с целыми коэффициентами. Из равенства 19 следует, что $G = \frac{eG+f}{gG+h}$, то есть

$$gG^2 + (h-e)G - f = 0$$

Поэтому число G является квадратической иррациональностью. Легко видеть, что $G = \frac{P+\sqrt{D}}{Q}$, где P и Q целые, а D - целое неквадратное число. Из равенства 18 следует, что

$$\alpha = b_0 + \frac{a\frac{P+\sqrt{D}}{Q} + b}{c\frac{P+\sqrt{D}}{Q} + d}$$

Не составляет большого труда подобрать коэффициенты $A, B, C \in \mathbb{Z}$, одновременно не равные нулю и такие, что $A\alpha^2 + B\alpha + C = 0$. Следовательно, α является квадратической иррациональностью.

2°. Пусть α - квадратическая иррациональность. Легко видеть, что $\beta = \alpha - [\alpha]$ также является квадратической иррациональностью и, следовательно, β является корнем уравнения $f(x) = 0$, где

$$f(x) = Ax^2 + Bx + C \quad , \quad A, B, C \in \mathbb{Z}$$

Заметим, что β - простой корень уравнения $f(x) = 0$, так как в противном случае имели бы равенство

$$f'(\beta) = 2A\beta + B = 0$$

и, следовательно, β было бы рациональным числом, что невозможно. Пусть

$$\beta = [0; b_1, b_2, \dots] = \lim_{n\to\infty} \frac{P_n}{Q_n}$$

По теореме 5 число β заключено между двумя соседними подходящими дробями. Следовательно,

$$f\big(\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}\big) \times f\big(\frac{P_n}{Q_n}\big) < 0 \tag{20}$$

при всех достаточно больших n ($n \geq n_0$). По теореме 2

$$\beta = S_1 \circ \dots \circ S_n(G_n) = \frac{P_{n-1}G_n + P_n}{Q_{n-1}G_n + Q_n}$$

где $G_n = [0; b_{n+1}, b_{n+2}, \dots]$. Поэтому

$$0 = f(\beta) = A\left(\frac{P_{n-1}G_n + P_n}{Q_{n-1}G_n + Q_n}\right)^2 + B\left(\frac{P_{n-1}G_n + P_n}{Q_{n-1}G_n + Q_n}\right) + C =$$

$$\frac{A_nG_n^2 + B_nG_n + C_n}{\big(Q_{n-1}G_n + Q_n\big)^2}$$

где

$$A_n = AP_{n-1}^2 + BP_{n-1}Q_{n-1} + CQ_{n-1}^2 = Q_{n-1}^2 f\big(\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}\big)$$

$$B_n = 2AP_{n-1}P_n + B(P_{n-1}Q_n + Q_{n-1}P_n) + 2CQ_{n-1}Q_n$$

$$C_n = AP_n^2 + BP_nQ_n + CQ_n^2 = Q_n^2 f\big(\frac{P_n}{Q_n}\big)$$

Итак,

$$A_nG_n^2 + B_nG_n + C_n = 0 \tag{21}$$

и про коэффициенты A_n, B_n, C_n можно утверждать следующее

а) A_n, B_n, $C_n \in \mathbb{Z}$

Это свойство следует непосредственно из явного вида чисел A_n, B_n, C_n и того факта, что $A, B, C, P_n, Q_n \in \mathbb{Z}$.

б) $A_nC_n < 0$ при всех $n \geq n_0$.

Это свойство следует из явного вида чисел A_n и C_n и неравенства 20. Действительно,

$$A_nC_n = Q_{n-1}^2\big(\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}\big)Q_n^2 f\big(\frac{P_n}{Q_n}\big) < 0$$

В частности, $A_n \neq 0$, $C_n \neq 0$ при $n \geq n_0$

в) $B_n^2 - 4A_nC_n = B^2 - 4AC$ при всех $n = 1, 2, \ldots$.

Это равенство проверяется непосредственным вычислением с учетом равенств $(P_nQ_{n-1} - P_{n-1}Q_n)^2 = 1$ (см. теорему 3). Действительно,

$$B_n^2 - 4A_nC_n = \big(2AP_{n-1}P_n + B(P_{n-1}Q_n + Q_{n-1}P_n) + 2CQ_{n-1}Q_n\big)^2 -$$

$$4(AP_{n-1}^2 + BP_{n-1}Q_{n-1} + CQ_{n-1}^2)(AP_n^2 + BP_nQ_n + CQ_n^2) =$$

$$A^2[4P_{n-1}^2P_n^2 - 4P_{n-1}^2P_n^2] + B^2\big[(P_{n-1}Q_n + Q_{n-1}P_n)^2 - 4P_{n-1}Q_{n-1}P_nQ_n\big] + \cdots =$$

$$A^2 \times 0 + B^2(P_{n-1}Q_n - Q_{n-1}P_n)^2 + \cdots = B^2 + \cdots = B^2 - 4AC$$

г) $\max\{|A_n|, |B_n|, |C_n|\} \leq \max\{\sqrt{B^2 - 4AC}, \frac{B^2-4AC}{4}\}$ при всех $n \geq n_0$

Действительно, по свойству б) $A_nC_n < 0$ при $n \geq n_0$ и, следовательно, $B_n^2 - 4A_nC_n$ - это сумма двух положительных чисел. Поэтому каждое из них не превосходит их суммы, которая по свойству в) не зависит от n и равна $B^2 - 4AC > 0$, то есть $B_n^2 \leq B^2 - 4AC$ и $|4A_nC_n| \leq B^2 - 4AC$. Так как A_n и $C_n < 0$ - целые не равные нулю числа, то $|A_n| \geq 1$ и $|C_n| \geq 1$. Поэтому неравенство $|4A_nC_n| \leq B^2 - 4AC$ влечет за собой неравенства $A_n \leq \frac{B^2-4AC}{4}$ и $C_n \leq \frac{B^2-4AC}{4}$.

Завершим доказательство теоремы. Так как $A_n, B_n, C_n \in \mathbb{Z}$ и эти числа по свойству г) ограничены в совокупности не зависящей от n постоянной, то среди троек (A_n, B_n, C_n) имеется только лишь конечное число различных. Если

$$(A_{n_1}, B_{n_1}, C_{n_1}) = (A_{n_2}, B_{n_2}, C_{n_2}) = (A_{n_3}, B_{n_3}, C_{n_3})$$

где $n_1 < n_2 < n_3$, то, учитывая, что уравнение $A_nx^2 + B_nx + C_n = 0$ имеет только лишь два корня, один из которых в силу равенства 21 совпадает с G_n, то либо $G_{n_1} = G_{n_2}$, либо $G_{n_1} = G_{n_3}$, либо $G_{n_2} = G_{n_3}$. Пусть для определенности $G_{n_1} = G_{n_2}$. Тогда

$$[b_{n_1+1}; b_{n_1+2}, b_{n_1+3}, \ldots] = [b_{n_2+1}; b_{n_2+2}, b_{n_2+3}, \ldots]$$

Из единственности разложения действительного числа в непрерывную дробь вида 10 с натуральными коэффициентами (см. теорему 7) следует, что

$$b_{n_1+k} = b_{n_2+k} \quad \text{при всех} \quad k = 1, 2, \ldots$$

то есть $b_{n+m} = b_n$, где $m = n_2 - n_1$, при всех $n > n_1$. Следовательно, числу $\alpha = [\alpha] + \beta$ соответствует периодическая непрерывная дробь $[[\alpha]; b_1, b, \dots]$.

Итак, квадратическим иррациональностям и только им соответствуют периодические непрерывные дроби вида 10 с натуральными коэффициентами. В частности, все коэффициенты таких непрерывных дробей ограничены в совокупности. В этой связи естественным образом возникает следующий вопрос.

Задача. Верно ли, что натуральные коэффициенты разложения числа $\sqrt[3]{2}$ в непрерывную дробь 10 ограничены в совокупности.

Эта задача остается не решенной до сих пор.

Теорема (критерий Зейделя). *Непрерывная дробь 10 с положительными коэффициентами сходится тогда и только тогда, когда ряд* $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ *расходится.*

Доказательство. Предположим, что ряд $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ сходится. Тогда сходится и ряд $\sum_{n=n_0}^{\infty} \ln(1-b_n)$ (n_0 - тот индекс, начиная с которого выполняются неравенства $b_n < 1$; существование такого индекса следует из стремления к нулю общего члена сходящегося ряда $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$), а следовательно, сходится и бесконечное произведение $\prod_{n=n_0}^{\infty}(1-b_n)$. Покажем, что в этом случае последовательность знаменателей Q_n непрерывной дроби 10, удовлетворяющая разностному уравнению

$$Q_n = b_n Q_{n-1} + Q_{n-2} \tag{22}$$

растет не очень быстро, а именно, покажем, что при всех $n \geq n_0$ имеют место неравенства

$$Q_n \leq \frac{\max\{Q_{n-1}, Q_{n-2}\}}{1-b_n} \tag{23}$$

Рассмотрим случай $Q_n \geq Q_{n-1}$. В этом случае из разностного уравнения 22 получаем неравенство

$$Q_n = b_n Q_{n-1} + Q_{n-2} \leq b_n Q_n + Q_{n-2}$$

и следовательно, $(1-b_n)Q_n \leq Q_{n-2}$ то есть $Q_n \leq \frac{Q_{n-2}}{1-b_n}$ и тем самым неравенство 23 в этом случае доказано.

Рассмотрим теперь случай $Q_{n-1} \geq Q_n$. В этом случае имеем

$$Q_{n-1} \geq Q_n = b_n Q_{n-1} + Q_{n-2} \geq Q_{n-2}$$

и следовательно,

$$Q_n = b_n Q_{n-1} + Q_{n-2} \leq (b_n + 1)Q_{n-1} = \frac{1-b_n^2}{1-b_n} Q_{n-1} \leq \frac{Q_{n-1}}{1-b_n}$$

то есть неравенство 23 доказано и в этом случае.

Из неравенства 23 очевидным образом следует неравенство

$$\max\{Q_n, Q_{n-1}\} \le \frac{\max\{Q_{n-1}, Q_{n-2}\}}{1 - b_n}$$

итерируя которое, получим неравенство

$$\max\{Q_n, Q_{n-1}\} \le \cdots \le \frac{\max\{Q_{n_0}, Q_{n_0-1}\}}{(1 - b_n)\dots(1 - b_{n_0+1})} \le \frac{\max\{Q_{n_0}, Q_{n_0-1}\}}{\prod_{k=n_0+1}^{\infty}(1 - b_k)}$$

Таким образом при всех $n \ge n_0$ величина $\max\{Q_n, Q_{n-1}\}$ ограничена сверху некоторым не зависящим от n числом. Поэтому произведение $Q_n Q_{n-1}$ ограничено сверху квадратом этого числа и, следовательно, не стремится к бесконечности. По теореме 6 отсюда следует, что непрерывная дробь 10 расходится.

Предположим теперь, что ряд $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ расходится. Тогда по крайней мере один из двух рядов $\sum_{k=0}^{\infty} b_{2k}$ или $\sum_{k=0}^{\infty} b_{2k+1}$ тоже расходится. Докажем по индукции, что

$$Q_{2n-1} \ge b_1 + \cdots + b_{2n-1}$$

$$Q_{2n} \ge 1 + b_1(b_2 + \cdots + b_{2n})$$

При $n = 1$ эти неравенства очевидным образом выполняются, так как $Q_1 = b_1$, $Q_2 = 1 + b_1 b_2$. Предполагая, что эти неравенства выполняются для индекса n, из разностного уравнения 22 имеем

$$Q_{2n+1} = b_{2n+1}Q_{2n} + Q_{2n-1} \ge b_{2n+1} + Q_{2n-1} \ge b_1 + \cdots + b_{2n-1} + b_{2n+1}$$

$$Q_{2n+2} = b_{2n+2}Q_{2n+1} + Q_{2n} \ge b_{2n+2}b_1 + Q_{2n} \ge 1 + b_1(b_2 + \cdots + b_{2n} + b_{2n+2})$$

Так как один из двух рядов $\sum_{k=0}^{\infty} b_{2k}$ или $\sum_{k=0}^{\infty} b_{2k+1}$ расходится, то из полученных неравенств следует, что либо Q_{2n}, либо Q_{2n+1} стремится к бесконечности. Таким образом $\lim_{n\to\infty} Q_n Q_{n+1} = \infty$, и по теореме 6 непрерывная дробь 10 сходится.

Одним из самых первых критериев сходимости непрерывной дроби с *комплексными* коэффициентами является критерий Ворпицкого (1865 год).

Теорема (критерий Ворпицкого). *Непрерывная дробь*

$$\cfrac{a_1}{1 + \cfrac{a_2}{1 + \dots}} \tag{24}$$

сходится, если $|a_n| \le 1/4$ *при всех* $n = 1, 2, \dots$.

Критерий Ворпицкого был опубликован в годовой программе гимназии Фридриха и реального училища в Берлине. По всей видимости это была диссертация Ворпицкого. Долгое время эта работа оставалась неизвестной для широкого круга математиков. Лишь в 1905 году на эту работу Ворпицкого обратил внимание Ван Флек. В 1898 году Прингсхейм переоткрыл критерий Ворпицкого, причем в более общем виде.

Теорема (критерий Прингсхейма). *Непрерывная дробь 1 сходится, если при всех* $n = 1, 2, \ldots$

$$|a_n| + 1 \leq |b_n| \tag{25}$$

Докажем сначала критерий Прингсхейма, а затем как его следствие получим критерий Ворпицкого.

Сходимость непрерывной дроби 1 эквивалентна сходимости ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{P_k}{Q_k} - \frac{P_{k-1}}{Q_{k-1}}\right) \tag{26}$$

Поэтому для сходимости непрерывной дроби 1 достаточно доказать сходимость ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left|\frac{P_k}{Q_k} - \frac{P_{k-1}}{Q_{k-1}}\right|$$

Из равенства $Q_k = b_k Q_{k-1} + a_k Q_{k-2}$ и неравенства 25 следует, что

$$|Q_k| - |Q_{k-1}| \geq |b_k Q_{k-1}| - |a_k Q_{k-2}| - |Q_{k-1}| = (|b_k| - 1)|Q_{k-1}| - |a_k||Q_{k-2}| \geq$$

$$|a_k|\big(|Q_{k-1}| - |Q_{k-2}|\big)$$

Итерируя это неравенство, получим неравенство

$$|Q_k| - |Q_{k-1}| \geq |a_1| \ldots |a_k|\big(|Q_0| - |Q_{-1}|\big) = |a_1| \ldots |a_k| \tag{27}$$

Из теоремы 2 и этого неравенства следует, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left|\frac{P_k}{Q_k} - \frac{P_{k-1}}{Q_{k-1}}\right| = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|a_1| \ldots |a_k|}{|Q_k Q_{k-1}|} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|Q_k| - |Q_{k-1}|}{|Q_k Q_{k-1}|} = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{|Q_{k-1}|} - \frac{1}{|Q_k|}\right) =$$

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{|Q_{k-1}|} - \frac{1}{|Q_k|}\right) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{|Q_0|} - \frac{1}{|Q_n|}\right)$$

Последовательность $\frac{1}{|Q_0|} - \frac{1}{|Q_n|}$ не убывает, так как по неравенству 27

$$|Q_n| \geq |Q_{n-1}| + |a_1| \ldots |a_k| \geq |Q_{n-1}|$$

и ограничена сверху числом $\frac{1}{|Q_0|}$, и следовательно, имеет предел. Таким образом ряд 26 сходится, а следовательно, непрерывная дробь **??** тоже сходится.

Получим теперь критерий Ворпицкого как следствие критерия Прингсхейма. Предварительно введем понятие эквивалентных непрерывных дробей.

Определение. Непрерывная дробь 1 и непрерывная дробь

$$\cfrac{a_1^*}{b_1^* + \cfrac{a_2^*}{b_2^* + \dots}}$$

называются эквивалентными, если существует последовательность ненулевых чисел $r_0 = 1, r_1, r_2, \dots$ такая, что при всех $n = 1, 2, \dots$ имеют место равенства

$$a_n^* = r_{n-1} r_n a_n \quad \text{и} \quad b_n^* = r_n b_n$$

Утверждение. *Если непрерывные дроби эквивалентны, то числители и знаменатели их подходящих дробей связаны между собой равенствами*

$$P_n^* = r_1 \dots r_n P_n \quad u \quad Q_n^* = r_1 \dots r_n Q_n$$

Действительно, при $n = 1$ эти равенства очевидны. Если эти равенства выполнены при всех $k = 1, \dots, n$, то, пользуясь разностным уравнением 4, получим

$$P_{n+1}^* = b_{n+1}^* P_n^* + a_{n+1}^* P_{n-1}^* = r_{n+1} b_{n+1} (r_1 \dots r_n P_n) + r_n r_{n+1} a_{n+1} (r_1 \dots r_{n-1} P_{n-1}) =$$

$$r_1 \dots r_{n+1} (b_{n+1} P_n + a_{n+1} P_{n-1}) = r_1 \dots r_{n+1} P_{n+1}$$

Равенство для Q_{n+1}^* получается аналогично.

Из этого утверждения следует, что подходящие дроби эквивалентных непрерывных дробей совпадают. Следовательно, эквивалентные непрерывные дроби сходятся или расходятся одновременно, а если сходятся, то к одному и тому же значению. Легко видеть, что эквивалентные непрерывные дроби получаются друг из друга при помощи следующей процедуры

$$\cfrac{a_1}{b_1 + \cfrac{a_2}{b_2 + \dots}} = \cfrac{r_1 a_1}{r_1 b_1 + \cfrac{r_1 a_2}{b_2 + \dots}} = \cfrac{r_1 a_1}{r_1 b_1 + \cfrac{r_1 r_2 a_2}{r_2 b_2 + \cfrac{r_2 a_3}{b_3 + \dots}}} = \dots$$

Чтобы получить критерий Ворпицкого как следствие критерия Прингсхейма, преобразуем непрерывную дробь $\cfrac{a_1}{1+\cfrac{a_2}{1+\dots}}$ в непрерывную дробь $\cfrac{a_1^*}{2+\cfrac{a_2^*}{2+\dots}}$, где $a_1^* = 2a_1$, $a_n^* = 4a_n$ при $n = 2, 3, \dots$ (в качестве последовательности $r_1, r_2, r_3, \dots$, фигурирующей в определении эквивалентных непрерывных дробей, берется последовательность $2, 2, 2, \dots$). Так как $|a_n| \le 1/4$ при всех $n = 1, 2, \dots$, то $|a_n^*| \le 1$. Поэтому для эквивалентной непрерывной дроби выполняется условие 25 Прингсхейма $|b_n^*| = 2 \ge 1 + |a_n^*|$ при всех $n = 1, 2, \dots$. Следовательно, обе дроби сходятся.

Перейдем к изложению одного из центральных результатов теории непрерывных дробей - теореме Ван Флека о сходимости непрерывной дроби с предельно постоянными коэффициентами

Определение. Непрерывная дробь 1 называется непрерывной дробью с предельно постоянными коэффициентами, если существуют пределы $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ и $\lim_{n\to\infty} b_n = b$.

Вопрос о сходимости непрерывной дроби с предельно постоянными коэффициентами тесно связан с вопросом о поведении решений разностного уравнения 4 с предельно постоянными коэффициентами. Так как такой вопрос возникает не только в задачах теории непрерывных дробей, но и во многих других задачах анализа, то мы не будем ограничиваться рассмотрением разностного уравнения 4 второго порядка, а будем рассматривать разностные уравнения

$$X_{n+k} + \alpha_{n,1} X_{n+k-1} + \dots + \alpha_{n,k} X_n = 0, \quad n = 0, 1, \dots \tag{28}$$

произвольного порядка k.

Последовательность $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ называется решением разностного уравнения, если равенства 28 имеют место при всех $n = 0, 1, \dots$. Легко видеть, что всякое решение $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ однозначно определяется (рекуррентным образом при помощи равенств 28) своими начальными условиями $f_0, \dots, f_{k-1}$, а множество решений разностного уравнения 28 образует k-мерное векторное пространство с естественными операциями сложения решений и умножения на число.

Разностное уравнение 28 называется уравнением с предельно постоянными коэффициентами, если существуют пределы $\lim_{n\to\infty} \alpha_{n,i} = \alpha_i$, $i = 1, \dots, k$. В этом случае многочлен $z^k + \alpha_1 z^{k-1} + \dots + \alpha_k$ называется характеристическим многочленом разностного уравнения 28.

Одной из самых тонких теорем в теории линейных разностных уравнений является следующая теорема Пуанкаре.

Теорема (Пуанкаре). *Пусть последовательность* $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ *является решением разностного уравнения 28 с предельно постоянными коэффициентами, корни характеристического многочлена которого различны по модулю. Тогда либо* $f_n = 0$ *при всех* $n \geq n_0$*, либо существует предел* $\lim_{n\to\infty} f_{n+1}/f_n$*, и этот предел равен одному из корней характеристического многочлена.*

Простые примеры показывают, что условия теоремы Пуанкаре нельзя ослабить, не нарушив утверждающей части теоремы, а утверждающую часть нельзя усилить, не потребовав дополнительных предположений.

Теорема Пуанкаре очень легко доказывается в случае разностных уравнений с постоянными коэффициентами, так как в этом случае легко находится общий вид решения разностного уравнения 28, а именно, если $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ - простые корни характеристического многочлена, то

$$\{f_n\}_{n=0}^{\infty} = C_1\{\lambda_1^n\}_{n=0}^{\infty} + \cdots + C_k\{\lambda_k^n\}_{n=0}^{\infty}$$

где $C_1, \ldots, C_k$ - произвольные постоянные. Так, например, характеристический многочлен рассмотренного ранее разностного уравнения 15 равен $z^2 - z - 1$ и решения разностного уравнения 15 в общем виде записываются как

$$\{f_n\}_{n=0}^{\infty} = C_1\{\lambda_1^n\}_{n=0}^{\infty} + C_2\{\lambda_2^n\}_{n=0}^{\infty}$$

где $\lambda_{1,2} = \frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$. Для конкретного решения разностного уравнения 15, определяющего последовательность чисел Фибоначчи $f_0 = 0$, $f_1 = 1$, $f_2 = 1$, $f_3 = 2$, $\ldots$, постоянные C_1 и C_2 находятся из начальных условий

$$f_0 = 0 = C_1 + C_2 \quad , \quad f_1 = 1 = C_1\frac{1+\sqrt{5}}{2} + C_2\frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

Отсюда еще раз может быть найден предел

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f_n}{f_{n+1}} = \lim_{n\to\infty}\frac{\lambda_1^n\left(1+\frac{C_2}{C_1}\frac{\lambda_2^n}{\lambda_1^n}\right)}{\lambda_1^{n+1}\left(1+\frac{C_2}{C_1}\frac{\lambda_2^{n+1}}{\lambda_1^{n+1}}\right)} = \frac{1}{\lambda_1} = \frac{2}{1+\sqrt{5}} = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

равный "золотому сечению".

В случае не постоянных коэффициентов, найти решение разностного уравнения не представляется возможным, и теорему Пуанкаре о существовании предела $\lim_{n\to\infty}\frac{f_{n+1}}{f_n}$ без преувеличения можно назвать жемчужиной теории разностных уравнений.

Доказательство теоремы Пуанкаре. Пусть $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ корни характеристического многочлена, упорядоченные в порядке возрастания их модулей $|\lambda_1| < \cdots < |\lambda_k|$. Для каждого $n \in \mathbb{N}$ определим величины $u_{n,1}, \ldots, u_{n,k}$ как решение линейной системы уравнений

$$\begin{array}{ccccccc} u_{n,1} & + & \ldots & + & u_{n,k} & = & f_n \\ \lambda_1 u_{n,1} & + & \ldots & + & \lambda_k u_{n,k} & = & f_{n+1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \lambda_1^{k-1} u_{n,1} & + & \ldots & + & \lambda_k^{k-1} u_{n,k} & = & f_{n+k-1} \end{array} \tag{29}$$

Определитель системы уравнений 29 отличен от нуля, так как это определитель Вандермонда попарно различных чисел $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$. Поэтому система уравнений 29 имеет единственное решение $u_{n,1}, \ldots, u_{n,k}$. Положим $u_n = \max_{1 \le i \le k} |u_{n,i}|$ и покажем, что при всех $i = 1, \ldots, k$

$$u_{n,i} = \lambda_i^{\pm 1} u_{n \mp 1, i} + o(u_{n \mp 1}) \tag{30}$$

Действительно, величины $u_{n+1,1}, \ldots, u_{n+1,k}$ связаны с величинами $u_{n,1}, \ldots, u_{n,k}$ следующими очевидными $k-1$ равенствами

$$\begin{array}{c} \lambda_1 u_{n,1} + \cdots + \lambda_k u_{n,k} = f_{n+1} = u_{n+1,1} + \cdots + u_{n+1,k} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \lambda_1^{k-1} u_{n,1} + \cdots + \lambda_k^{k-1} u_{n,k} = f_{n+k-1} = \lambda_1^{k-2} u_{n+1,1} + \cdots + \lambda_k^{k-2} u_{n+1,k} \end{array} \tag{31}$$

а также еще одним равенством, которое получим, воспользовавшись, во-первых, тем, что $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ корни характеристического многочлена, во-вторых, уравнениями 29 и, в-третьих, разностным уравнением 28

$$\lambda_1^k u_{n,1} + \cdots + \lambda_k^k u_{n,k} = -(\alpha_1 \lambda_1^{k-1} + \cdots + \alpha_k) u_{n,1} - \cdots - (\alpha_1 \lambda_k^{k-1} + \cdots + \alpha_k) u_{n,k} =$$

$$-\alpha_1 (\lambda_1^{k-1} u_{n,1} + \cdots + \lambda_k^{k-1} u_{n,k}) - \cdots - \alpha_k (u_{n,1} + \cdots + u_{n,k}) = -\alpha_1 f_{n+k-1} - \cdots - \alpha_k f_n =$$

$$f_{n+k} + \alpha_{n,1} f_{n+k-1} + \cdots + \alpha_{n,k} f_n - \alpha_1 f_{n+k-1} - \cdots - \alpha_k f_n =$$

$$f_{n+k} + (\alpha_{n,1} - \alpha_1) f_{n+k-1} + \cdots + (\alpha_{n,k} - \alpha_k) f_n$$

так как $\lim_{n \to \infty} \alpha_{n,i} = \alpha_i$, $i = 1, \ldots, k$ и имеют место равенства 29, то правая часть полученного равенства равна $f_{n+k} + o(u_n)$. Кроме того, из последнего из равенств 29 для индекса $n+1$ имеем

$$\lambda_1^{k-1} u_{n+1,1} + \cdots + \lambda_k^{k-1} u_{n+1,k} = f_{n+k}$$

Поэтому

$$\lambda_1^k u_{n,1} + \cdots + \lambda_k^k u_{n,k} = \lambda_1^{k-1} u_{n+1,1} + \cdots + \lambda_k^{k-1} u_{n+1,k} + o(u_n)$$

Добавляя это равенство к системе $k-1$ равенств 31, получим систему равенств

$$\lambda_1 u_{n,1} + \cdots + \lambda_k u_{n,k} = u_{n+1,1} + \cdots + u_{n+1,k}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\lambda_1^{k-1} u_{n,1} + \cdots + \lambda_k^{k-1} u_{n,k} = \lambda_1^{k-2} u_{n+1,1} + \cdots + \lambda_k^{k-2} u_{n+1,k}$$
$$\lambda_1^{k} u_{n,1} + \cdots + \lambda_k^{k} u_{n,k} = \lambda_1^{k-1} u_{n+1,1} + \cdots + \lambda_k^{k-1} u_{n+1,k} + o(u_n)$$

Решив эту систему равенств относительно $u_{n+1,1}, \ldots, u_{n+1,k}$, получим равенства

$$u_{n+1,i} = \lambda_i u_{n,i} + o(u_n) \quad , \quad i = 1, \ldots, k$$

Равенства

$$u_{n-1,i} = \lambda_i^{-1} u_{n,i} + o(u_n) \quad , \quad i = 1, \ldots, k$$

получаются аналогичным образом.

Обозначим через j_n тот индекс, на котором достигается максимум величин $|u_{n,1}|, \ldots, |u_{n,k}|$, то есть $u_n = |u_{n,j_n}|$ (если таких индексов несколько, то берем наибольший из них). Пусть δ - произвольное положительное число, не превосходящее $\frac{1}{3}\min_{2\le j\le k}\{|\lambda_j| - |\lambda_{j-1}|\}$, и пусть n_0 - индекс, начиная с которого имеют место неравенства

$$|u_{n+1,i} - \lambda_i u_{n,i}| \le \delta u_n \tag{32}$$

(такой индекс существует в силу равенств 30). Покажем, что при всех $n \ge n_0$ имеют место неравенства $j_{n+1} \ge j_n$. Если $j_n = 1$, то неравенство $j_{n+1} \ge 1 = j_n$ очевидно, в противном случае с учетом неравенства 32 и определения числа δ при всех $i = 1, \ldots, j_n - 1$ имеем неравенство

$$|u_{n+1,i}| \le |\lambda_i u_{n,i}| + \delta u_n < (|\lambda_i| + \delta) u_n < (|\lambda_{j_n}| - \delta) u_n =$$

$$|\lambda_{j_n} u_{n,j_n}| - \delta u_n \le |u_{n+1,j_n}|$$

Отсюда следует, что $j_{n+1} \ge j_n$.

Таким образом $\{j_n\}_{n=n_0}^{\infty}$ - это неубывающая, ограниченная сверху числом k последовательность натуральных чисел. Следовательно, эта последовательность, начиная с некоторого индекса n_1, стабилизируется, то есть $j_n = l$ при всех $n \ge n_1$. Поэтому $u_n = u_{n,l}$ при всех $n \ge n_1$.

Покажем, что при всех $i \ne l$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n,i}}{u_{n,l}} = 0 \tag{33}$$

Положим

$$\nu_i = \overline{\lim}_{n\to\infty} \frac{|u_{n,i}|}{u_n} = \lim_{n\in\Gamma_i} \frac{|u_{n,i}|}{u_n}$$

и рассмотрим два случая $i < l$ и $i > l$. В первом случае для всякого положительного ε при всех достаточно больших $n \geq n(\varepsilon)$ из равенства 30 имеем неравенство

$$\left|\frac{u_{n,i}}{u_{n,l}}\right| \leq \frac{|\lambda_i u_{n-1,i}| + \varepsilon u_{n-1}}{|\lambda_l| u_{n-1} - \varepsilon u_{n-1}} = \frac{\left|\frac{\lambda_i}{\lambda_l}\right| \frac{|u_{n-1,i}|}{u_{n-1}} + \frac{\varepsilon}{|\lambda_l|}}{1 - \frac{\varepsilon}{|\lambda_l|}}$$

Устремляя n к бесконечности по подпоследовательности Γ_i, получаем неравенство

$$\nu_i \leq \frac{\left|\frac{\lambda_i}{\lambda_l}\right| \nu_i + \frac{\varepsilon}{|\lambda_l|}}{1 - \frac{\varepsilon}{|\lambda_l|}}$$

Так как число ε в этом неравенстве может принимать сколь-угодно малые значения, то $\nu_i \leq \left|\frac{\lambda_i}{\lambda_l}\right| \nu_i$. Так как $\left|\frac{\lambda_i}{\lambda_l}\right| < 1$ при $i < l$, то отсюда следует, что $\nu_i = 0$.

Во случае $i > l$ аналогичным образом з равенства 30 имеем неравенство

$$\left|\frac{u_{n,i}}{u_{n,l}}\right| \leq \frac{|\lambda_i^{-1} u_{n+1,i}| + \varepsilon u_{n+1}}{|\lambda_l^{-1}| u_{n+1} - \varepsilon u_{n+1}} = \frac{\left|\frac{\lambda_i^{-1}}{\lambda_l^{-1}}\right| \frac{|u_{n+1,i}|}{u_{n+1}} + \frac{\varepsilon}{|\lambda_l^{-1}|}}{1 - \frac{\varepsilon}{|\lambda_l^{-1}|}}$$

из которого следует, что $\nu_i = 0$.

Из равенств 29 и 33 получаем требуемое утверждение

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f_{n+1}}{f_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\lambda_1 u_{n,1} + \cdots + \lambda_k u_{n,k}}{u_{n,1} + \cdots + u_{n,k}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{\lambda_1 u_{n,1} + \cdots + \lambda_k u_{n,k}}{u_{n,l}}}{\frac{u_{n,1} + \cdots + u_{n,k}}{u_{n,l}}} = \lambda_l$$

Имеется целый ряд результатов, в том или ином направлении уточняющих теорему Пуанкаре. Так, например, в связи с теоремой Пуанкаре естественным образом возникает следующий вопрос. Пусть задано разностное уравнение 28 с предельно постоянными коэффициентами. Верно ли, что для всякого наперед заданного корня λ характеристического многочлена найдется решение разностного уравнения 28 такое, что $\lim_{n\to\infty} \frac{f_{n+1}}{f_n} = \lambda$. Так, например, для разностных уравнений с постоянными коэффициентами все решения выписываются в явном виде, и ответ на вопрос, очевидно, положительный. В общем же случае ответ на вопрос зависит от того, будет ли разностное уравнение 28 вырожденным или невырожденным.

Определение. Разностное уравнение 28 называется невырожденным, если $\alpha_{n,k} \neq 0$ при всех $n = 0, 1, \ldots$.

Невырожденность уравнения 28 означает возможность его решения в "другую сторону", то есть возможность однозначного определения значения f_n при известных значениях $f_{n+1}, \ldots, f_{n+k}$.

Легко сообразить, что для вырожденных разностных уравнений ответ на вышепоставленный вопрос будет отрицательным. Однако совсем не очевидно, что для невырожденных разностных уравнений ответ будет положительным. В 1902 году О.Перрон доказал следующую теорему.

Теорема (Перрон). *Пусть корни характеристического многочлена невырожденного разностного уравнения 28 с предельно постоянными коэффициентами различны по модулю. Тогда для всякого корня λ характеристического многочлена найдется решение $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ разностного уравнения 28 такое, что* $\lim_{n\to\infty} f_{n+1}/f_n = \lambda$.

Доказательство. Первоначальное доказательство теоремы Перрона было очень сложным и занимало свыше 100 страниц текста. Позже М.Евграфов указал значительно более простое доказательство, которое мы здесь и воспроизводим. Доказательство теоремы проведем индукцией по порядку k разностного уравнения. При $k = 1$ утверждение теоремы Перрона (как и утверждение теоремы Пуанкаре) тривиально.

Покажем сначала, что существует решение $\{h_n\}_{n=0}^{\infty}$ разностного уравнения 28 такое, что $h_n \neq 0$ при всех $n = 0, 1, \ldots$. Пусть $\{f_n^1\}_{n=0}^{\infty}, \ldots, \{f_n^k\}_{n=0}^{\infty}$ - k линейно независимых решений разностного уравнения 28. Заметим, что при всех $l = 0, 1, \ldots$ имеет место неравенство

$$|f_l^1| + \cdots + |f_l^k| > 0 \tag{34}$$

Действительно, в противном случае имели бы $\det(f_{l+j-1}^i)_{i,j=1,\ldots,k} = 0$. Поэтому существовали бы постоянные $C_1, \ldots, C_k$, одновременно не обращающиеся в ноль, такие, что

$$C_1 f_{l+j-1}^1 + \cdots + C_k f_{l+j-1}^k = 0 \quad \text{при всех} \quad j = 1, \ldots, k$$

Это означало бы, что решение

$$\{g_n\}_{n=0}^{\infty} = C_1\{f_n^1\}_{n=0}^{\infty} + \cdots + C_k\{f_n^k\}_{n=0}^{\infty}$$

обращается в 0 при $n = l, l+1, \ldots, l+k-1$. Из разностного уравнения 28 тогда получаем, что $g_n = 0$ при всех $n \geq l$, а из невырожденности уравнения следует, что $g_n = 0$ и при $n = l, l-1, \ldots, 0$, то есть решение $\{g_n\}_{n=0}^{\infty}$ является тривиальным, что противоречит линейной независимости решений $\{f_n^1\}_{n=0}^{\infty}, \ldots, \{f_n^k\}_{n=0}^{\infty}$.

Выберем постоянную C_1 не равной ни одному из чисел $-\frac{f_n^1}{f_n^2}$, $n = 0, 1, \ldots$. Тогда решение $\{g_n^1\}_{n=0}^{\infty} = \{f_n^1\}_{n=0}^{\infty} + C_1\{f_n^2\}_{n=0}^{\infty}$ не обращается в нуль ни при каких n, за исключением тех, при которых $f_n^1 = f_n^2 = 0$. Выберем затем постоянную C_2 не равной ни одному из чисел $-\frac{g_n^1}{f_n^3}$, $n =$

$0, 1, \ldots$. Тогда решение $\{g_n^2\}_{n=0}^{\infty} = \{g_n^1\}_{n=0}^{\infty} + C_2\{f_n^3\}_{n=0}^{\infty}$ не обращается в нуль ни при каких n, за исключением тех, при которых $f_n^3 = g_n^1 = f_n^1 = f_n^2 = 0$. Повторяя рассуждения, построим решение $\{g_n^{k-1}\}_{n=0}^{\infty}$, не обращающееся в нуль ни при каких n, за исключением тех, при которых $f_n^1 = f_n^2 = \cdots = f_n^k = 0$, но таких индексов n не существует в силу неравенства 34.

Итак, пусть $\{h_n\}_{n=0}^{\infty}$ - решение разностного уравнения 28 такое, что $h_n \neq 0$ при всех $n = 0, 1, \ldots$. По теореме Пуанкаре существует предел $\lim_{n\to\infty} \frac{h_{n+1}}{h_n}$, равный одному из корней характеристического многочлена. Если этот корень совпал с λ, то все доказано. Поэтому предположим, что $\lim_{n\to\infty} \frac{h_{n+1}}{h_n} = \tau$, где $\tau \neq \lambda$. Положим $d_n = \frac{h_n}{\tau^n}$ и заметим, что $d_n \neq 0$ при всех $n = 0, 1, \ldots$ и $\lim_{n\to\infty} \frac{d_{n+1}}{d_n} = 1$.

Заметим, что $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ - решение разностного уравнения 28 тогда и только тогда, когда $\{f_n^*\}_{n=0}^{\infty} = \{\frac{f_n}{d_n}\}_{n=0}^{\infty}$ - решение разностного уравнения

$$Y_{n+k} + \alpha_{n,1}\frac{d_{n+k-1}}{d_{n+k}}Y_{n+k-1} + \cdots + \alpha_{n,k}\frac{d_n}{d_{n+k}}Y_n = 0, \quad n = 0, 1, \ldots \tag{35}$$

При этом

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f_{n+1}}{f_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{f_{n+1}^*}{f_n^*} \quad ,$$

а разностное уравнение 35 является разностным уравнением с предельно постоянными коэффициентами и характеристическим многочленом, совпадающим с характеристическим многочленом разностного уравнения 28. Поэтому для доказательства теоремы достаточно найти решение $\{f_n^*\}_{n=0}^{\infty}$ разностного уравнения 35, для которого

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f_{n+1}^*}{f_n^*} = \lambda \tag{36}$$

Одним из решений разностного уравнения 35 является последовательность $\{\tau^n\}_{n=0}^{\infty} = \{\frac{h_n}{d_n}\}_{n=0}^{\infty}$. Поэтому

$$\tau^k + \alpha_{n,1}\frac{d_{n+k-1}}{d_{n+k}}\tau^{k-1} + \cdots + \alpha_{n,k}\frac{d_n}{d_{n+k}} = 0 \quad , \quad n = 0, 1, \ldots$$

Отсюда следует, что при всех $n = 0, 1, \ldots$

$$z^k + \alpha_{n,1}\frac{d_{n+k-1}}{d_{n+k}}z^{k-1} + \cdots + \alpha_{n,k}\frac{d_n}{d_{n+k}} = (z-\tau)(z^{k-1} + \beta_{n,1}z^{k-2} + \cdots + \beta_{n,k-1}) \tag{37}$$

где коэффициенты $\beta_{n,j}$ имеют пределы $\lim_{n\to\infty} \beta_{n,j} = \beta_j$ такие, что многочлен $(z-\tau)(z^{k-1} + \beta_1 z^{k-2} + \cdots + \beta_{k-1})$ совпадает с характеристическим

многочленом разностного уравнения 28. Из равенства 37 следует, что разностное уравнение 35 можно переписать в виде

$$(Y_{n+k}-\tau Y_{n+k-1})+\beta_{n,1}(Y_{n+k-1}-\tau Y_{n+k-2})+\cdots+\beta_{n,k-1}(Y_{n+1}-\tau Y_n)=0 \quad , \quad n=0,1,\ldots \tag{38}$$

Из индуктивного предположения следует, что существует решение $\{g_n\}_{n=0}^{\infty}$ разностного уравнения

$$Z_{n+k-1}+\beta_{n,1}Z_{n+k-2}+\cdots+\beta_{n,k-1}Z_n=0 \quad , \quad n=0,1,\ldots$$

такое, что

$$\lim_{n\to\infty}\frac{g_{n+1}}{g_n}=\lambda \tag{39}$$

Если $|\lambda|>|\tau|$, то положим

$$f_0^*=0 \quad , \quad f_n^*=g_{n-1}+\tau g_{n-2}+\cdots+\tau^{n-1}g_0 \quad , \quad n=1,2,\ldots$$

Легко проверяется, что

$$f_{n+1}^*-\tau f_n^*=(g_n+\tau g_{n-1}+\cdots+\tau^n g_0)-(\tau g_{n-1}+\tau^2 g_{n-2}+\cdots+\tau^n g_0)=g_n$$

Если $|\lambda|<|\tau|$, то положим

$$f_n^*=-(\frac{g_n}{\tau}+\frac{g_{n+1}}{\tau^2}+\ldots) \quad , \quad n=0,1,\ldots$$

(ряд сходится, так как $\lim_{n\to\infty}\frac{g_{n+1}}{g_n}=\lambda$). Легко проверяется, что

$$f_{n+1}^*-\tau f_n^*=-(\frac{g_{n+1}}{\tau}+\frac{g_{n+2}}{\tau^2}+\ldots)+(g_n+\frac{g_{n+1}}{\tau}+\ldots)=g_n$$

Таким образом в любом случае последовательность $\{f_n^*\}_{n=0}^{\infty}$ является решением разностного уравнения 38, а следовательно, и решением разностного уравнения 35. Для завершения доказательства теоремы остается проверить равенство 36. С учетом равенства 39 для этого достаточно доказать, что существует предел $\lim_{n\to\infty}\frac{f_n^*}{g_n}$.

Покажем, что в случае $|\lambda|<|\tau|$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f_n^*}{g_n}=-\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{g_{n+k}}{g_n\tau^{k+1}}=-\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{\tau^{k+1}} \tag{40}$$

Действительно,

$$\left|\sum_{k=0}^{\infty}\frac{g_{n+k}}{g_n\tau^{k+1}}-\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{\tau^{k+1}}\right|\leq$$

$$\Big|\sum_{k=0}^{k_0}\big(\frac{g_{n+k}}{g_n}-\lambda^k\big)\frac{1}{\tau^{k+1}}\Big|+\sum_{k=k_0+1}^{\infty}\Big(\big|\frac{g_{n+k}}{g_n\tau^{k+1}}\big|+\big|\frac{\lambda^k}{\tau^{k+1}}\big|\Big) \tag{41}$$

Фиксируем некоторое положительное число $\delta < |\tau| - |\lambda|$. Из существования предела $\lim_{n\to\infty}\frac{g_{n+1}}{g_n} = \lambda$ следует, что

$$\big|\frac{g_{n+1}}{g_n}\big| \le |\lambda| + \delta \quad \text{при всех} \quad n \ge n_1$$

Таким образом

$$\big|\frac{g_{n+k}}{g_n}\big| \le (|\lambda| + \delta)^k \quad \text{при всех} \quad n \ge n_1 \quad , \quad k = 0, 1, \dots$$

Следовательно, при $n \ge n_1$ второе слагаемое в правой части неравенства 41 не превосходит $\sum_{k=k_0+1}^{\infty}\frac{(|\lambda|+\delta)^k+|\lambda|^k}{|\tau|^{k+1}}$ и может быть сделано меньше любого наперед заданного сколь-угодно малого числа ε при соответствующем выборе числа k_0. Так как $\lim_{n\to\infty}\frac{g_{n+k}}{g_n} = \lambda^k$ при $k = 0, \dots, k_0$, то первое слагаемое в правой части неравенства 41 также может быть сделано не превосходящим ε при всех $n \ge n_2$, где $n_2 \ge n_1$. Это означает, что левая часть неравенства 41 стремится к нулю при $n \to \infty$, то есть равенство 41 доказано.

Покажем, что в случае $|\lambda| > |\tau|$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f_n^*}{g_n} = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{g_{n-k}\tau^{k-1}}{g_n} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\tau^{k-1}}{\lambda^k} \tag{42}$$

Действительно,

$$\Big|\sum_{k=1}^{n}\frac{g_{n-k}\tau^{k-1}}{g_n}-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\tau^{k-1}}{\lambda^k}\Big| \le \Big|\sum_{k=1}^{n}\big(\frac{g_{n-k}}{g_n}-\frac{1}{\lambda^k}\big)\tau^{k-1}\Big|+\sum_{k=k_0+1}^{n}\big|\frac{g_{n-k}}{g_n}\tau^{k-1}\big|+\sum_{k=k_0+1}^{\infty}\big|\frac{\tau^{k-1}}{\lambda^k}\big| \tag{43}$$

Фиксируем некоторое положительное число $\delta < |\tau|^{-1} - |\lambda|^{-1}$. Из существования предела $\lim_{n\to\infty}\frac{g_{n+1}}{g_n} = \lambda$ следует, что

$$\big|\frac{g_{n-1}}{g_n}\big| \le |\lambda|^{-1} + \delta \quad \text{при всех} \quad n \ge n_1$$

Таким образом при всех $n \ge n_1$ и всех $k = 0, 1, \dots n - n_1$ имеем неравенства

$$\big|\frac{g_{n-k}}{g_n}\big| \le (|\lambda|^{-1} + \delta)^k$$

а при $k = n - n_1 + 1, \dots, n$ имеем неравенства

$$\big|\frac{g_{n-k}}{g_n}\big| \le (|\lambda|^{-1} + \delta)^{n-n_1}\frac{\max\{|g_0|, \dots, |g_{n_1}|\}}{|g_{n_1}|} \le (|\lambda|^{-1} + \delta)^k C(\delta, n_1)$$

где $C(\delta, n_1)$ - некоторая постоянная, зависящая от δ и n_1. Следовательно, при $n \geq n_1$ второе слагаемое в правой части неравенства 43 не превосходит $C(\delta, n_1) \sum_{k=k_0+1}^{\infty} (|\lambda|^{-1} + \delta)^k \tau^{k-1}$ и может быть сделано как-угодно малым за счет выбора индекса k_0. Дальнейшие рассуждения аналогичны вышеприведенным.

Таким образом для решения $\{f_n^*\}_{n=0}^{\infty}$ разностного уравнения 35 имеет место равенство 36, что и завершает доказательство теоремы.

Отметим, одно простое, но очень важное следствие теоремы Перрона.

Следствие. Пусть корни характеристического многочлена невырожденного разностного уравнения 28 с предельно постоянными коэффициентами различны по модулю. Тогда существует единственное (с точностью до постоянного множителя) решение $\{h_n\}_{n=0}^{\infty}$ разностного уравнения 35 такое, что для всякого другого решения $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ имеет место равенство $\lim_{n\to\infty} \frac{h_n}{f_n} = 0$.

Другими словами существует единственное решение минимального роста. Действительно, пусть $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ - корни характеристического многочлена, упорядоченные в порядке возрастания их модулей $|\lambda_1| < \cdots < |\lambda_k|$. По теореме Перрона существуют k решений $\{f_n^j\}_{n=0}^{\infty}$ разностного уравнения такие, что $\lim_{n\to\infty} \frac{f_{n+1}^j}{f_n^j} = \lambda^j$, $j = 1, \ldots, k$. Следовательно,

$$\lim_{n\to\infty} |f_n^1|^{1/n} = |\lambda_1| < \cdots < \lim_{n\to\infty} |f_n^k|^{1/n} = |\lambda_k|$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f_n^1}{f_n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{f_n^2}{f_n^3} = \cdots = \lim_{n\to\infty} \frac{f_n^{k-1}}{f_n^k} = 0 \tag{44}$$

Положим $\{h_n\}_{n=0}^{\infty} = \{f_n^1\}_{n=0}^{\infty}$. Так как решения $\{f_n^j\}_{n=0}^{\infty}$, $j = 1, \ldots, k$ линейно независимы (это следует, например, из равенства 44), то всякое решение $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$, не пропорциональное $\{h_n\}_{n=0}^{\infty}$ имеет вид

$$\{f_n\}_{n=0}^{\infty} = C_1\{f_n^1\}_{n=0}^{\infty} + \cdots + C_k\{f_n^k\}_{n=0}^{\infty}$$

где по крайней мере одна из постоянных $C_2, \ldots, C_k$ отлична от нуля. Поэтому из равенств 44 следует, что $\lim_{n\to\infty} \frac{h_n}{f_n} = 0$.

Теорема (Пинкерле). *Пусть разностное уравнение*

$$X_n - b_n X_{n-1} - a_n X_{n-2} \quad , \quad n = 1, 2, \ldots \tag{45}$$

соответствующее непрерывной дроби 1 имеет единственное (с точностью до постоянного множителя) решение $\{h_n\}_{n=-1}^{\infty}$ минимального роста, то есть для всякого другого решения $\{f_n\}_{n=-1}^{\infty}$ имеет место равенство $\lim_{n\to\infty} \frac{h_n}{f_n} = 0$. Тогда непрерывная дробь 1 сходится к конечному или бесконечному значению, равному $-\frac{h_0}{h_{-1}}$.

Доказательство. Легко видеть, что начальные условия $P_{-1} = 1$, $P_0 = 0$ и $Q_{-1} = 0$, $Q_0 = 1$ обеспечивают линейную независимость решений $\{P_n\}_{n=-1}^{\infty}$ и $\{Q_n\}_{n=-1}^{\infty}$, совпадающих с числителями и знаменателями подходящих дробей непрерывной дроби 1. Поэтому решение $\{h_n\}_{n=-1}^{\infty}$ минимального роста можно представить в виде линейной комбинации

$$\{h_n\}_{n=-1}^{\infty} = C_1\{P_n\}_{n=-1}^{\infty} + C_2\{Q_n\}_{n=-1}^{\infty} = h_{-1}\{P_n\}_{n=-1}^{\infty} + h_0\{Q_n\}_{n=-1}^{\infty}$$

Возможны два случая $h_{-1} \neq 0$ и $h_{-1} = 0$. В первом случае решение $\{h_n\}_{n=-1}^{\infty}$ минимального роста не пропорционально решению $\{Q_n\}_{n=-1}^{\infty}$ и, следовательно,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{P_n}{Q_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{h_{-1}}(h_n - h_0 Q_n)}{Q_n} = -\frac{h_0}{h_{-1}}$$

Во втором случае решение $\{h_n\}_{n=-1}^{\infty}$ минимального роста пропорционально решению $\{Q_n\}_{n=-1}^{\infty}$. В этом случае

$$\lim_{n\to\infty} \frac{P_n}{Q_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{h_0 P_n}{h_n} = \infty$$

Таким образом в любом случае непрерывная дробь 1 сходится к конечному или бесконечному значению $-\frac{h_0}{h_{-1}}$.

Как следствие теорем Перрона и Пинкерле получаем одну из важнейших теорем теории непрерывных дробей.

Теорема (Ван Флека). *Пусть непрерывная дробь 1 такова, что*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \quad , \quad \lim_{n\to\infty} b_n = b$$

и корни многочлена $z^2 - bz - a$ различны по модулю. Тогда непрерывная дробь 1 сходится.

Доказательство. Из условий теоремы Ван Флека следуют все предположения теоремы Перрона для разностного уравнения 45. Поэтому по следствию теоремы Перрона существует единственное (с точностью до постоянного множителя) решение $\{h_n\}_{n=-1}^{\infty}$ разностного уравнения 45 такое, что для всякого другого решения $\{f_n\}_{n=-1}^{\infty}$ имеет место равенство $\lim_{n\to\infty} \frac{h_n}{f_n} = 0$. Поэтому по теореме Пинкерле непрерывная дробь 1 сходится.

Следствие. Непрерывная дробь

$$\cfrac{a_1 z}{1 + \cfrac{a_2 z}{1 + \ldots}} \tag{46}$$

с предельно постоянными коэффициентами $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ сходится при всех $z \in \mathbb{C} \setminus \Gamma$, где $\Gamma = \{z : \ \arg(1+4az) < \pi\}$ (легко видеть, что Γ - это луч $[-\frac{1}{4a}, \infty]$, продолжение которого проходит через точку 0).

Действительно, разностное уравнение 45 применительно к непрерывной дроби 46 имеет следующий вид

$$X_n - X_{n-1} - a_n z X_{n-2} \quad , \quad n = 1, 2, \ldots \tag{47}$$

Характеристический многочлен разностного уравнения 47 с предельно постоянными коэффициентами - это многочлен $w^2 - w - az$. Легко видеть, что корни $w_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+4az}}{2}$ характеристического многочлена равны по модулю тогда и только тогда, когда $z \in \Gamma$. Поэтому по теореме Ван Флека непрерывная дробь 46 сходится при всех $z \in \mathbb{C} \setminus \Gamma$.

Ниже будет показано, что функция f, к которой сходится непрерывная дробь 46, мероморфна в $\mathbb{C} \setminus \Gamma$, и сходимость равномерна на любом компакте, лежащем в $\mathbb{C} \setminus \Gamma$ и не содержащем полюсов функции f. (Собственно говоря, именно это утверждение и называется теоремой Ван Флека). Более того будет доказано важное дополнение к теореме Ван Флека, сделанное А.Гончаром и состоящее в том, что функция f, к которой сходится непрерывная дробь 46, не может быть мероморфной функцией ни в какой области, строго содержащей $\mathbb{C} \setminus \Gamma$.

Теорема Ван Флека - это одна из центральных теорем теории непрерывных дробей. Эта теорема допускает целый ряд различного рода уточнений. Приведем некоторые из них.

Теорема (Трона-Воделанда). *Пусть в условиях теоремы Ван Флека непрерывная дробь 1 сходится к конечному значению S и пусть λ - меньший по модулю из корней характеристического многочлена разностного уравнения 45, соответствующего непрерывной дроби 1. Тогда существуют пределы*

$$\lim_{n\to\infty} S_1 \circ \cdots \circ S_n(-\lambda) = S \quad и \quad \lim_{n\to\infty} \frac{S_1 \circ \cdots \circ S_n(-\lambda) - S}{S_1 \circ \cdots \circ S_n(0) - S} = 0$$

Другими словами, теорема Трона-Воделанда утверждает, что значения композиций $S_1 \circ \cdots \circ S_n(w)$ дробно линейных преобразований $S_n(w) = \frac{a_n}{w+b_n}$, взятые в точке $w = -\lambda$ стремятся к значению непрерывной дроби 1 быстрее, чем к нему стремятся значения подходящих дробей. Этот эффект Трон и Воделанд назвали эффектом ускорения сходимости непрерывной дроби.

Теорема (Перрон).

$$\lim_{m\to\infty} \lim_{n\to\infty} S_m \circ \cdots \circ S_n(-\lambda) = -\lambda$$

Теорема (Перрон). *Пусть комплексные числа a и b таковы, что корни многочлена z^2-bz-a различны по модулю. Тогда существуют достаточно малые положительные числа ε_1 и ε_2 такие, что всякая непрерывная дробь 1, где $|a_n - a| \le \varepsilon_1$, $|b_n - b| \le \varepsilon_2$, $n = 1, 2, \ldots$, сходится.*

Легко видеть, что если теорема Ван Флека требует предельного постоянства коэффициентов непрерывной дроби 1, то теорема Перрона - это близкий к предельному, но все-таки допредельный вариант теоремы Ван Флека. Ниже мы докажем, причем при более слабых предположениях, как теорему Трона-Воделанда, так и обе теоремы Перрона. Из вышеприведенного доказательства теоремы Ван Флека видно, что в доказательстве используется только лишь следствие теоремы Перрона о существовании единственного исключительного решения, имеющего минимальный рост по сравнению со всеми другими решениями и практически совсем не используется утверждение теоремы Пуанкаре о существовании пределов $\lim_{n\to\infty} \frac{f_{n+1}}{f_n}$. Это наводит на мысль о возможности ослабления условий теорем Пуанкаре-Перрона с возможной потерей утверждения о существовании пределов $\lim_{n\to\infty} \frac{f_{n+1}}{f_n}$, но с сохранением утверждения о существовании исключительного решения минимального роста. Это в некоторой степени удается сделать для разностного уравнения любого порядка, но наиболее естественно и просто полученный результат выглядит в случае разностных уравнений 2-го порядка, которые как раз и представляют наибольший интерес с точки зрения теории непрерывных дробей. Имеет место следующая теорема, аналогичная теоремам Пуанкаре и Перрона, но формулируемая в векторном виде и при более слабых предположениях.

Теорема. *Пусть имеется невырожденная линейная система уравнений 2-го порядка*

$$\begin{cases} \omega_n^1 = a_n\omega_{n-1}^1 + b_n\omega_{n-1}^2 \\ \omega_n^2 = c_n\omega_{n-1}^1 + d_n\omega_{n-1}^2 \end{cases}, \quad n = 1, 2, \ldots \tag{48}$$

и пусть при всех $n = 1, 2, \ldots$

$$|a_n| + |b_n| + |c_n| \le q|d_n| \tag{49}$$

где $q < 1$. Тогда

1°. Для всякого решения $\{\overline{\omega}_n\}_{n=0}^{\infty} = \{(\omega_n^1, \omega_n^2)\}_{n=0}^{\infty}$ системы разностных уравнений 48 любое неравенство $|\omega_{n_1}^2| > |\omega_{n_1}^1|$ влечет за собой неравенства $|\omega_n^2| > |\omega_n^1|$ при всех $n \ge n_1$.

2°. *Существует единственное (с точностью до постоянного множителя) нетривиальное решение* $\{\overline{\nu}_n\}_{n=0}^{\infty} = \{(\nu_n^1, \nu_n^2)\}_{n=0}^{\infty}$ *системы разностных уравнений 48 такое, что*

$$|\nu_n^1| \geq |\nu_n^2| \quad \textit{при всех} \quad n = 0, 1, \ldots$$

При этом если $\lim_{n\to\infty} \frac{c_n}{|d_n|-|b_n|} = 0$, *то* $\lim_{n\to\infty} \nu_n^2/\nu_n^1 = 0$.

3°. *Для всякого решения* $\{\overline{u}_n\}_{n=0}^{\infty} = \{(u_n^1, u_n^2)\}_{n=0}^{\infty}$, *отличного от исключительного решения* $\{\overline{\nu}_n\}_{n=0}^{\infty}$, *существует индекс* n_0 *такой, что*

$$|u_{n_0}^2| > |u_{n_0}^1| \tag{50}$$

При этом если $\lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{|d_n|-|c_n|} = 0$, *то* $\lim_{n\to\infty} u_n^1/u_n^2 = 0$.

4°. *Для исключительного решения* $\{\overline{\nu}_n\}_{n=0}^{\infty}$ *и любого другого решения* $\{\overline{u}_n\}_{n=0}^{\infty}$ *имеют место неравенства*

$$\left|\frac{\nu_n^1}{u_n^2}\right| \leq q^{n-n_0}\left|\frac{\nu_{n_0}^1}{u_{n_0}^2}\right| \tag{51}$$

где n_0 *- любой из индексов, для которых выполняется неравенство 50,* $n \geq n_0$.

Доказательство. Докажем утверждение 1° теоремы. Пусть $\{\overline{\omega}_n\}_{n=0}^{\infty} = \{(\omega_n^1, \omega_n^2)\}_{n=0}^{\infty}$ - решение системы разностных уравнений 48 и пусть $|\omega_{n_1}^2| > |\omega_{n_1}^1|$. Покажем, что тогда $|\omega_n^2| > |\omega_n^1|$ при всех $n \geq n_1$. Действительно,

$$|\omega_{n_1+1}^1| \leq |a_{n_1}||\omega_{n_1}^1| + |b_{n_1}||\omega_{n_1}^2| \leq (|a_{n_1}| + |b_{n_1}|)|\omega_{n_1}^2| \tag{52}$$

$$|\omega_{n_1+1}^2| \geq |d_{n_1}||\omega_{n_1}^2| - |c_{n_1}||\omega_{n_1}^1| \geq (|d_{n_1}| - |c_{n_1}|)|\omega_{n_1}^2| \tag{53}$$

Из неравенств 52-53 и неравенства 49 следует неравенство $|\omega_{n_0+1}^1| < |\omega_{n_0+1}^2|$ (неравенство здесь строгое, так как a_n и c_n одновременно не обращаются в ноль в силу невырожденности системы 48), которое в свою очередь аналогичным образом влечет неравенство $|\omega_{n_0+2}^1| < |\omega_{n_0+2}^2|$ и т.д. Таким образом утверждение 1° доказано.

Докажем утверждение 2° теоремы. Будем говорить, что решение $\{\overline{\omega}_n\}_{n=0}^{\infty} = \{(\omega_n^1, \omega_n^2)\}_{n=0}^{\infty}$ системы разностных уравнений 48 является решением первого или второго типов, если соответственно найдется индекс n_0 такой, что $|\omega_{n_0}^2| > |\omega_{n_0}^1|$ или такого индекса не существует, то есть $|\omega_{n_0}^2| \leq |\omega_{n_0}^1|$ при всех $n = 0, 1, \ldots$. Покажем, что решение второго типа существует и единственно с точностью до постоянного множителя. Обозначим через A_n линейный оператор, переводящий вектор $\overline{\omega}_n = (\omega_n^1, \omega_n^2)$ в вектор $A_n\overline{\omega} = (a_n\omega^1 + b_n\omega^2, c_n\omega^1 + d_n\omega^2)$. Положим $\overline{e}_n = A_1^{-1} \ldots A_n^{-1}\overline{e}$, где

$\overline{e} = (1, 0)$. Из последовательности векторов $\frac{\overline{e}_n}{\|\overline{e}_n\|}$, $n = 1, 2, \ldots$ (под нормой вектора понимается максимум модуля его координат) выберем сходящуюся подпоследовательность: $\lim_{n\in\Lambda} \frac{\overline{e}_n}{\|\overline{e}_n\|} = \overline{\nu}$ и покажем, что последовательность $\{A_n \ldots A_1\overline{\nu}\}_{n=1}^{\infty}$ - искомое решение второго типа. Предположим противное, а именно, предположим, что $|\nu_{n_0}^2| > |\nu_{n_0}^1|$ при некотором n_0. Так как $A_{n_0} \ldots A_1$ - непрерывный оператор, то найдется вектор $\frac{\overline{e}_{n_1}}{\|\overline{e}_{n_1}\|}$, $n_1 \in \Lambda$, $n_1 \geq n_0$ столь близкий к вектору $\overline{\nu}$, что

$$\|A_{n_0} \ldots A_1\big(\frac{\overline{e}_{n_1}}{\|\overline{e}_{n_1}\|} - \overline{\nu}\big)\| < \frac{|\nu_{n_0}^2| - |\nu_{n_0}^1|}{2}$$

Тогда вторая координата вектора $A_{n_0} \ldots A_1 \frac{\overline{e}_{n_1}}{\|\overline{e}_{n_1}\|}$ по модулю строго больше первой. По уже доказанному отсюда следует, что при любом $n \geq n_0$ вторая координата вектора

$$A_n \ldots A_{n_0+1} A_{n_0} \ldots A_1 \frac{\overline{e}_{n_1}}{\|\overline{e}_{n_1}\|} = A_n \ldots A_1 \frac{A_1^{-1} \ldots A_{n_1}^{-1}\overline{e}}{\|\overline{e}_{n_1}\|}$$

по модулю строго больше первой. В частности, при $n = n_1$ отсюда следует, что вторая координата вектора $\frac{\overline{e}}{\|\overline{e}_{n_1}\|} = \frac{(1,0)}{\|\overline{e}_{n_1}\|}$ по модулю строго больше первой, что невозможно. Полученное противоречие показывает, что $|\nu_n^2| \leq |\nu_n^1|$ при всех $n = 0, 1, \ldots$, то есть решение второго типа существует.

Докажем утверждение 4°. Точнее, докажем неравенство 51, в котором $\{\overline{\nu}_n\}_{n=0}^{\infty}$ - *произвольное* решение второго типа, $\{\overline{u}_n\}_{n=0}^{\infty}$ - *произвольное* решение первого типа. Действительно, для решения $\{\overline{\nu}_n\}_{n=0}^{\infty}$ второго типа при всех $n = 0, 1, \ldots$ имеют место неравенства

$$|\nu_{n+1}^1| \leq |a_n||\nu_n^1| + |b_n||\nu_n^2| \leq (|a_n| + |b_n|)|\nu_n^1| \tag{54}$$

а для решения $\{\overline{u}_n\}_{n=0}^{\infty}$ первого типа - при всех $n \geq n_0$ неравенства 53. Поэтому, учитывая неравенство 49, получаем неравенство

$$\left|\frac{\nu_n^1}{\omega_n^2}\right| \leq \frac{|a_n| + |b_n|}{|d_n| - |c_n|}\left|\frac{\nu_{n-1}^1}{\omega_{n-1}^2}\right| \leq q\left|\frac{\nu_{n-1}^1}{\omega_{n-1}^2}\right| \leq \cdots \leq q^{n-n_0}\left|\frac{\nu_{n_0}^1}{\omega_{n_0}^2}\right|$$

Докажем единственность найденного решения $\{\overline{\nu}_n\}_{n=0}^{\infty}$. Предположим, что наряду с решением $\{\overline{\nu}_n\}_{n=0}^{\infty}$ второго типа имеется другое, линейно независимое с ним решение $\{\overline{\mu}_n\}_{n=0}^{\infty}$ второго типа. Тогда решение $\{\overline{\kappa}_n\}_{n=0}^{\infty}$, совпадающее при $n = 0$ с вектором $(0, 1)$, и следовательно, являющееся решением первого типа (с индексом $n_0 = 0$) можно представить в виде

$$\{\overline{\kappa}_n\}_{n=0}^{\infty} = C_1\{\overline{\nu}_n\}_{n=0}^{\infty} + C_2\{\overline{\mu}_n\}_{n=0}^{\infty}$$

Отсюда, пользуясь доказанным неравенством 51, при всех $n = 0, 1, \ldots$ получаем неравенство

$$1 = \left| C_1 \frac{\nu_n^2}{\kappa_n^2} + C_2 \frac{\mu_n^2}{\kappa_n^2} \right| \leq \left| C_1 \frac{\nu_n^1}{\kappa_n^2} \right| + \left| C_2 \frac{\mu_n^1}{\kappa_n^2} \right| \leq q^n (|C_1 \nu_0^1| + |C_2 \mu_0^1|)$$

которое невозможно, так как $q^n \to \infty$ при $n \to \infty$. Таким образом найденное решение $\{\overline{\nu}_n\}_{n=0}^{\infty}$ второго типа единственно с точностью до постоянного множителя.

Из равенства $\overline{\nu}_{n+1} = A_{n+1}\overline{\nu}_n$ следует равенство $\overline{\nu}_n = A_{n+1}^{-1}\overline{\nu}_{n+1}$, где

$$A_{n+1}^{-1} = \frac{1}{D_{n+1}} \begin{pmatrix} d_{n+1} & -b_{n+1} \\ -c_{n+1} & a_{n+1} \end{pmatrix} \quad , \quad D_{n+1} = a_{n+1}d_{n+1} - b_{n+1}c_{n+1}$$

Поэтому

$$\left| \frac{\nu_n^2}{\nu_n^1} \right| \leq \frac{|c_{n+1}| + |a_{n+1}| \left| \frac{\nu_{n+1}^2}{\nu_{n+1}^1} \right|}{|d_{n+1}| - |b_{n+1}|} \tag{55}$$

Если $\lim_{n\to\infty} \frac{c_n}{|d_n| - |b_n|} = 0$, то, устремляя n к бесконечности по подпоследовательности Λ, для которой

$$\rho = \overline{\lim}_{n\to\infty} \left| \frac{\nu_n^2}{\nu_n^1} \right| = \lim_{n\in\Lambda} \left| \frac{\nu_n^2}{\nu_n^1} \right|$$

и учитывая, что по неравенству 49 $\frac{|a_{n+1}|}{|d_{n+1}| - |b_{n+1}|} \leq q$, из неравенства 55 получаем неравенство $\rho \leq q\rho$. Так как $q < 1$, то отсюда следует, что $\rho = 0$. Таким образом $\lim_{n\to\infty} \frac{\nu_n^2}{\nu_n^1} = 0$, что завершает доказательство утверждения 2°.

Утверждение 3° доказывается аналогично. Из неравенств 52-53 следует, что

$$\left| \frac{u_n^1}{u_n^2} \right| \leq \frac{|a_n| \left| \frac{u_n^1}{u_n^2} \right| + |b_n|}{|d_n| - |c_n|}$$

Если $\lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{|d_n| - |c_n|} = 0$, то, как и выше, отсюда следует, что $\lim_{n\to\infty} \frac{u_n^1}{\nu_n^2} = 0$. Таким образом все утверждения теоремы доказаны.

Применительно к вопросам поведения разностных уравнений второго порядка и к вопросам сходимости непрерывных дробей отметим следующие следствия доказанной теоремы.

Следствие 1. Пусть $a_n \neq 0$ при всех $n = 1, 2, \ldots$ и корни $\lambda_{n,1}$ и $\lambda_{n,2}$ многочленов $z^2 - b_n z - a_n$ таковы, что $\lim_{n\to\infty} \lambda_{n,1} = \lambda$ и $\overline{\lim}_{n\to\infty} |\lambda_{n,2}| < |\lambda|$. Тогда

1°. Для всякого решения $\{f_n\}_{n=-1}^{\infty}$ разностного уравнения 45 за исключением единственного (с точностью до постоянного множителя) решения $\{h_n\}_{n=-1}^{\infty}$ существует предел $\lim_{n\to\infty} f_{n+1}/f_n = \lambda$. При этом $\lim_{n\to\infty} h_n/f_n = 0$.

2°. Непрерывная дробь 1 сходится.

Действительно, фиксируем число q такое, что $\frac{\overline{\lim}_{n\to\infty}|\lambda_{n,2}|}{|\lambda|} < q < 1$ и число θ такое, что $\theta < q|\lambda| - \overline{\lim}_{n\to\infty}|\lambda_{n,2}|$. Пусть $\{f_n\}_{n=-1}^{\infty}$ - решение разностного уравнения 45. Тогда при всех $n = 0, 1, \ldots$

$$f_{n+1} - \lambda f_n = (b_{n+1} - \lambda)f_n + a_{n+1}f_{n-1}$$

или, что то же самое

$$\theta^{-1}(f_{n+1} - \lambda f_n) = \theta^{-1}(b_{n+1} - \lambda)(f_n - \lambda f_{n-1}) + \theta^{-1}(a_{n+1} + b_{n+1}\lambda - \lambda^2)f_{n-1}$$

Поэтому вектор

$$\{(\omega_n^1, \omega_n^2)\}_{n=-1}^{\infty} = \{(\theta^{-1}(f_{n+1} - \lambda f_n), f_n)\}_{n=-1}^{\infty}$$

является решением системы уравнений 2-го порядка

$$\begin{cases} \omega_n^1 = (b_{n+1} - \lambda)\omega_{n-1}^1 + \theta^{-1}(a_{n+1} + b_{n+1}\lambda - \lambda^2)\omega_{n-1}^2 \\ \omega_n^2 = \theta\omega_{n-1}^1 + \lambda\omega_{n-1}^2 \end{cases} \quad , \quad n = 0, 1, \ldots \tag{56}$$

И наоборот, если $\{(\omega_n^1, \omega_n^2)\}_{n=-1}^{\infty}$ - решение системы уравнений 56, то последовательность $\{f_n\}_{n=-1}^{\infty} = \{\omega_n^2\}_{n=0}^{\infty}$ является решением разностного уравнения 45. Действительно,

$$f_{n+1} = \omega_{n+1}^2 = \theta\omega_n^1 + \lambda\omega_n^2 = \theta(b_{n+1} - \lambda)\omega_{n-1}^1 + (a_{n+1} + b_{n+1}\lambda - \lambda^2)\omega_{n-1}^2 + \lambda\omega_n^2 =$$

$$(b_{n+1} - \lambda)(\omega_n^2 - \lambda\omega_{n-1}^2) + (a_{n+1} + b_{n+1}\lambda - \lambda^2)\omega_{n-1}^2 + \lambda\omega_n^2 = b_{n+1}\omega_n^2 + a_{n+1}\omega_{n-1}^2 = b_{n+1}f_n + a_{n+1}f_{n-1}$$

По условиям следствия 1 с учетом теоремы Виета и выбора числа θ имеет место неравенство

$$\overline{\lim}_{n\to\infty}\big(|b_n - \lambda| + \theta^{-1}|a_{n+1} + b_{n+1}\lambda - \lambda^2|\big) = \overline{\lim}_{n\to\infty}\big(|\lambda_{n,1} + \lambda_{n,2} - \lambda| + \theta^{-1}|(\lambda_{n,1} - \lambda)(\lambda_{n,2} - \lambda)|\big) \leq$$

$$\overline{\lim}_{n\to\infty}\big(|\lambda_{n,1} - \lambda| + |\lambda_{n,2}| + \theta^{-1}|\lambda_{n,1} - \lambda|(|\lambda_{n,2}| + |\lambda|)\big) = \overline{\lim}_{n\to\infty}|\lambda_{n,2}| < q|\lambda| - \theta$$

Следовательно, при достаточно больших n коэффициенты системы уравнений 56 удовлетворяют неравенствам

$$|b_n - \lambda| + \theta^{-1}|a_{n+1} + b_{n+1}\lambda - \lambda^2| + \theta \leq q|\lambda| \quad , \quad n \geq n_0$$

то есть для системы уравнений 56 при $n \geq n_0$ имеют место предположения теоремы. Кроме того,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\theta^{-1}|a_{n+1} + b_{n+1}\lambda - \lambda^2|}{|\lambda| - \theta} = \frac{\theta^{-1}}{|\lambda| - \theta} \lim_{n\to\infty} |\lambda_{n,1} - \lambda|(|\lambda_{n,2}| + |\lambda|) = 0$$

Заметим, что условие $a_n \neq 0$, $n = 1, 2, \ldots$, означает невырожденность системы уравнений 56 и, следовательно, всякое решение $\{\overline{\omega}_n\}_{n=n_0}^{\infty}$ может быть однозначно продолжено до решения $\{\overline{\omega}_n\}_{n=n_{-1}}^{\infty}$. По теореме для всех решений $\{\omega_n^1, \omega_n^2)\}_{n=-1}^{\infty}$ системы уравнений 56, за исключением единственного решения $\{(\nu_n^1, \nu_n^2)\}_{n=-1}^{\infty}$ существует предел $\lim_{n\to\infty} \frac{\omega_n^1}{\omega_n^2} = 0$. Это означает, что для всех решений $\{f_n\}_{n=-1}^{\infty}$ разностного уравнения 45, за исключением единственного решения $\{h_n\}_{n=-1}^{\infty}$ существует предел $\lim_{n\to\infty} \frac{\theta^{-1}(f_{n+1} - \lambda f_n)}{f_n} = 0$. Это эквивалентно существованию предела $\lim_{n\to\infty} \frac{f_{n+1}}{f_n} = \lambda$.

Далее, для единственного решения $\{(\nu_n^1, \nu_n^2)\}_{n=-1}^{\infty}$ системы уравнений 56 по теореме существует предел $\lim_{n\to\infty} \frac{\nu_n^1}{\omega_n^2} = 0$. Так как $|\nu_n^2| \leq |\nu_n^1|$, то $\lim_{n\to\infty} \frac{\nu_n^2}{\omega_n^2} = 0$. Это означает, что для единственного решения $\{h_n\}_{n=-1}^{\infty}$ существует предел $\lim_{n\to\infty} \frac{h_n}{f_n} = 0$. Таким образом утверждение 1° доказано.

Так как решение $\{h_n\}_{n=-1}^{\infty}$ является решением минимального роста, то по теореме Пинкерле непрерывная дробь 1 сходится. Таким образом утверждение 2° доказано.

Следствие 2. Пусть $a_n \neq 0$ при всех $n = 1, 2, \ldots$ и корни $\lambda_{n,1}$ и $\lambda_{n,2}$ многочленов $z^2 - b_n z - a_n$ таковы, что $\lim_{n\to\infty} \lambda_{n,1} = \lambda$ и $\underline{\lim}_{n\to\infty} |\lambda_{n,2}| > |\lambda|$. Тогда

1°. Существует единственное (с точностью до постоянного множителя) решение $\{h_n\}_{n=-1}^{\infty}$ такое, что существует предел $\lim_{n\to\infty} h_{n+1}/h_n = \lambda$. При этом $\underline{\lim}_{n\to\infty} |f_{n+1} - \lambda f_n| > 0$ и $\lim_{n\to\infty} \frac{h_{n+1} - \lambda h_n}{f_{n+1} - \lambda f_n} = 0$ для всякого другого решения $\{f_n\}_{n=-1}^{\infty}$.

2°. Существует предел $\lim_{n\to\infty} S_1 \circ \cdots \circ S_n(-\lambda) = S$. При этом если S конечно, то существует предел

$$\lim_{n\to\infty} \frac{S_1 \circ \cdots \circ S_n(-\lambda) - S}{S_1 \circ \cdots \circ S_n(0) - S} = 0$$

а если $S = \infty$, то существует предел

$$\lim_{n\to\infty} \frac{S_1 \circ \cdots \circ S_n(0)}{S_1 \circ \cdots \circ S_n(-\lambda)} = 0$$

3°. Существует предел

$$\lim_{m\to\infty}\lim_{n\to\infty} S_1\circ\cdots\circ S_n(-\lambda) = -\lambda$$

Утверждение 2° означает, что последовательность $S_1\circ\cdots\circ S_n(-\lambda)$ стремится к своему конечному или бесконечному пределу быстрее, чем к нему стремится последовательность $S_1\circ\cdots\circ S_n(0)$ (которая при рассматриваемых в следствии 2 достаточно слабых предположениях, вообще говоря, может и не иметь предела). Это утверждение совпадает с утверждением теоремы Трона-Воделанда (требующей в своих предположениях наличия обоих пределов $\lim_{n\to\infty}\lambda_{n,1} = \lambda$, $\lim_{n\to\infty}\lambda_{n,2} = \lambda^*$, $|\lambda^*| > |\lambda|$. Утверждение 3° - это утверждение теоремы Перрона, также полученное при более слабых предположениях.

Задача. а. Указать пример расходящейся непрерывной дроби 1, для коэффициентов a_n и b_n которой имеют место предположения следствия 2.

б. Показать, что непрерывная дробь 1 сходится, если предположение $\underline{\lim}_{n\to\infty}|\lambda_{n,2}| > |\lambda|$ следствия 2 заменить более сильным предположением $\underline{\lim}_{n\to\infty}|\lambda_{n,2}| > 2|\lambda|$.

Доказательство. Так как по предположению $|\lambda| < \underline{\lim}_{n\to\infty}|\lambda_{n,2}|$, то существует число q такое, что $\frac{|\lambda|}{\underline{\lim}_{n\to\infty}|\lambda_{n,2}|} < q < 1$ и число θ такое, что $\theta < q\underline{\lim}_{n\to\infty}|\lambda_{n,2}| - |\lambda|$. При доказательстве следствия 1 было показано, что последовательность $\{f_n\}_{n=-1}^{\infty}$ является решением разностного уравнения 45 тогда и только тогда, когда последовательность векторов $\{(\theta^{-1}(f_{n+1} - \lambda f_n), f_n)\}_{n=-1}^{\infty}$ является решением системы уравнений 56, то есть (после перестановки местами координат этих векторов) когда последовательность векторов $\{(\omega_n^1, \omega_n^2)\}_{n=-1}^{\infty} = \{(f_n, \theta^{-1}(f_{n+1} - \lambda f_n))\}_{n=-1}^{\infty}$ является решением системы уравнений

$$\begin{cases} \omega_n^1 = \lambda\omega_{n-1}^1 + \theta\omega_{n-1}^2 \\ \omega_n^1 = \theta^{-1}(a_{n+1} + b_{n+1}\lambda - \lambda^2)\omega_{n-1}^1 + (b_{n+1} - \lambda)\omega_{n-1}^2 \end{cases} \quad , \quad n = 0, 1, \ldots \tag{57}$$

По теореме Виета с учетом выбора числа θ имеет место неравенство

$$\underline{\lim}_{n\to\infty}\big(|\lambda - b_{n+1}| - q^{-1}\theta^{-1}|a_{n+1} + b_{n+1}\lambda - \lambda^2|\big) \geq$$

$$\underline{\lim}_{n\to\infty}\big(|\lambda_{n,2}| - |\lambda - \lambda_{n,1}| - q^{-1}\theta^{-1}|\lambda - \lambda_{n,1}|(|\lambda| + |\lambda_{n,2}|)\big) \geq$$

$$\underline{\lim}_{n\to\infty}|\lambda_{n,2}|\big(1 - q^{-1}\theta^{-1}|\lambda - \lambda_{n,1}|\big) = \underline{\lim}_{n\to\infty}|\lambda_{n,2}| > \frac{|\lambda| + \theta}{q}$$

Следовательно, при достаточно больших n коэффициенты системы уравнений 57 удовлетворяют неравенствам

$$|\lambda| + \theta + \theta^{-1}|a_{n+1} + b_{n+1}\lambda - \lambda^2| \leq q|\lambda - b_{n+1}| \quad , \quad n \geq n_0$$

то есть для системы уравнений 57 при $n \geq n_0$ имеют место предположения теоремы. Кроме того,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\theta^{-1}(a_{n+1} + b_{n+1}\lambda - \lambda^2)}{|\lambda - b_{n+1}| - \theta} = \lim_{n\to\infty} \frac{\theta^{-1}|\lambda - \lambda_{n,1}||\lambda - \lambda_{n,2}|}{|\lambda_{n,2}| - |\lambda - \lambda_{n,1}| - \theta} = 0$$

Поэтому по теореме существует исключительное решение $\{(\nu_n^1, \nu_n^2)\}_{n=-1}^{\infty}$ системы уравнений 57, для которого существует предел $\lim_{n\to\infty} \frac{\nu_n^2}{\nu_n^1} = 0$, в то время как для всех других решений $\{(\omega_n^1, \omega_n^2)\}_{n=-1}^{\infty}$ выполняются неравенства $|\omega_n^2| \geq |\omega_n^1|$ при всех достаточно больших n. Это означает, что существует исключительное решение $\{h_n\}_{n=-1}^{\infty}$ разностного уравнения 45, для которого существует предел $\lim_{n\to\infty} \frac{\theta^{-1}(h_{n+1} - \lambda h_n)}{h_n} = 0$, то есть существует предел

$$\lim_{n\to\infty} \frac{h_{n+1}}{h_n} = \lambda \tag{58}$$

в то время как для всех других решений $\{f_n\}_{n=-1}^{\infty}$ разностного уравнения 45 выполняются неравенства $\left|\frac{\theta^{-1}(f_{n+1} - \lambda f_n)}{f_n}\right| \geq 1$ при всех достаточно больших n, то есть

$$\underline{\lim}_{n\to\infty} \left|\frac{f_{n+1}}{f_n} - \lambda\right| > 0 \tag{59}$$

Кроме того, по теореме $\lim_{n\to\infty} \frac{\nu_n^1}{\omega_n^2} = 0$. Так как $|\nu_n^2| \leq |\nu_n^1|$, то предел $\lim_{n\to\infty} \frac{\nu_n^2}{\omega_n^2}$ также существует и равен нулю и, следовательно,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{h_{n+1} - \lambda h_n}{f_{n+1} - \lambda f_n} = 0 \tag{60}$$

Таким образом утверждение 1° доказано.

Докажем утверждения 2° и 3°. Пусть $\{P_n\}_{n=-1}^{\infty}$ и $\{Q_n\}_{n=-1}^{\infty}$ - решения разностного уравнения 45, удовлетворяющие начальным условиям $P_{-1} = 1$, $P_0 = 0$ и $Q_{-1} = 0$, $Q_0 = 1$, то есть $\{P_n\}_{n=-1}^{\infty}$ и $\{Q_n\}_{n=-1}^{\infty}$ - это последовательности числителей и знаменателей подходящих дробей непрерывной дроби 1 и, следовательно,

$$S_1 \circ \cdots \circ S_{n+1}(w) = \frac{P_n w + P_{n+1}}{Q_n w + Q_{n+1}} \tag{61}$$

Повторяя вышеприведенную схему доказательства теоремы Пинкерле, заметим, что решения $\{P_n\}_{n=-1}^{\infty}$ и $\{Q_n\}_{n=-1}^{\infty}$ линейно независимы, и следовательно, исключительное решение $\{h_n\}_{n=-1}^{\infty}$ можно представить в виде их линейной комбинации

$$\{h_n\}_{n=-1}^{\infty} = C_1\{P_n\}_{n=-1}^{\infty} + C_2\{Q_n\}_{n=-1}^{\infty} = h_{-1}\{P_n\}_{n=-1}^{\infty} + h_0\{Q_n\}_{n=-1}^{\infty}$$

Из этого представления следует, что если $h_{-1} \neq 0$, то при всех $n = 1, 2, \ldots$

$$\frac{P_n}{Q_n} + \frac{h_0}{h_{-1}} = \frac{h_n}{h_{-1}Q_n} \tag{62}$$

и

$$\frac{P_{n+1} - \lambda P_n}{Q_{n+1} - \lambda Q_n} + \frac{h_0}{h_{-1}} = \frac{h_{n+1} - \lambda h_n}{h_{-1}(Q_{n+1} - \lambda Q_n)} \tag{63}$$

а если $h_{-1} = 0$, то

$$\frac{Q_n}{P_n} = \frac{h_n}{h_0 P_n} \quad \text{и} \quad \frac{Q_{n+1} - \lambda Q_n}{P_{n+1} - \lambda P_n} = \frac{h_{n+1} - \lambda h_n}{h_0(P_{n+1} - \lambda P_n)} \tag{64}$$

В первом случае из равенств 61, 63 и 60 имеем равенство

$$\lim_{n\to\infty} S_1 \circ \cdots \circ S_{n+1}(-\lambda) = \lim_{n\to\infty} \frac{P_{n+1} - \lambda P_n}{Q_{n+1} - \lambda Q_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{h_{n+1} - \lambda h_n}{h_{-1}(Q_{n+1} - \lambda Q_n)} - \frac{h_0}{h_{-1}} = -\frac{h_0}{h_{-1}} \tag{65}$$

а из равенств 61, 62-63, 58 и 59 - равенство

$$\lim_{n\to\infty} \frac{S_1 \circ \cdots \circ S_{n+1}(-\lambda) + \frac{h_0}{h_{-1}}}{S_1 \circ \cdots \circ S_{n+1}(0) + \frac{h_0}{h_{-1}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{h_{n+1} - \lambda h_n}{h_{-1}(Q_{n+1} - \lambda Q_n)}}{\frac{h_n}{h_{-1}Q_n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{h_{n+1} - \lambda h_n}{h_n}}{\frac{Q_{n+1} - \lambda Q_n}{Q_n}} = 0$$

Во втором случае, пользуясь вместо равенств 62-63 равенствами 64, аналогичным образом получаем

$$\lim_{n\to\infty} \big(S_1 \circ \cdots \circ S_{n+1}(-\lambda)\big)^{-1} = \lim_{n\to\infty} \frac{Q_{n+1} - \lambda Q_n}{P_{n+1} - \lambda P_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{h_{n+1} - \lambda h_n}{h_0(P_{n+1} - \lambda P_n)} = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{S_1 \circ \cdots \circ S_{n+1}(-\lambda)}{S_1 \circ \cdots \circ S_{n+1}(0)} \right)^{-1} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{h_{n+1} - \lambda h_n}{h_0(P_{n+1} - \lambda P_n)}}{\frac{h_n}{h_0 P_n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{h_{n+1} - \lambda h_n}{h_n}}{\frac{P_{n+1} - \lambda P_n}{P_n}} = 0$$

Таким образом утверждение 2° (усиленный вариант теоремы Трона-Воделанда) доказано.

Переходя к доказательству утверждения 3°, заметим, что

$$S_m \circ \cdots \circ S_n(w) = \frac{P_{n-1}^{(m)} w + P_n^{(m)}}{Q_{n-1}^{(m)} w + Q_n^{(m)}}$$

где $\{P_n^{(m)}\}_{n=-1}^{\infty}$ и $\{Q_n^{(m)}\}_{n=-1}^{\infty}$ - это решения разностного уравнения 45, удовлетворяющее условиям $P_{m-2}^{(m)} = 1$, $P_{m-1}^{(m)} = 0$ и $Q_{m-2}^{(m)} = 0$, $Q_{m-1}^{(m)} = 1$, то есть $P_m^{(m)}, P_{m+1}^{(m)}, \ldots$ и $Q_m^{(m)}, Q_{m+1}^{(m)}, \ldots$ - это соответственно числители

и знаменатели подходящих дробей непрерывной дроби $\cfrac{a_m}{b_m + \cfrac{a_{m+1}}{b_{m+1} + \dots}}$, а $P_{m-1}^{(m)}, \dots, P_{-1}^{(m)}$ и $Q_{m-1}^{(m)}, \dots, Q_{-1}^{(m)}$ восстанавливаются при помощи разностного уравнения 45 его решением в обратную сторону (это возможно в силу невырожденности разностного уравнения 45). Тогда

$$\{h_n\}_{n=-1}^{\infty} = h_{m-2}\{P_n\}_{n=-1}^{\infty} + h_{m-1}\{Q_n\}_{n=-1}^{\infty}$$

Рассуждениями, аналогичными тем, которые использовались при доказательстве равенства 65, отсюда получаем, что

$$\lim_{n\to\infty} S_m \circ \dots \circ S_n(-\lambda) = -\frac{h_{m-1}}{h_{m-2}}$$

Из этого равенства и равенства 58 следует, что

$$\lim_{m\to\infty}\lim_{n\to\infty} S_m \circ \dots \circ S_n(-\lambda) = \lim_{m\to\infty} -\frac{h_{m-1}}{h_{m-2}} = -\lambda$$

Таким образом утверждение 3° (усиленный вариант теоремы Перрона) доказано.

Теорема о сходимости композиций последовательности дробно линейных преобразований с предельно постоянными голоморфными по параметру коэффициентами.

Перед формулировкой теоремы напомним некоторые определения и введем необходимые обозначения.

Определение. Точка w_1 называется неподвижной точкой дробно линейного преобразования

$$S(w) = \frac{aw + b}{cw + d} \tag{66}$$

если $S(w_1) = w_1$.

Если дробно линейное преобразование 66 отлично от тождественного, то оно имеет ровно две неподвижные точки, определяемые квадратным уравнением

$$cw^2 + (d - a)w - b = 0$$

то есть

$$w_{1,2} = \frac{a - d \pm \sqrt{(a-d)^2 + 4bc}}{2c} = \frac{a - d \pm \sqrt{I^2 - 4\Delta}}{2c} \tag{67}$$

где $I = a + d$ - след матрицы $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $\Delta = ad - bc$ - определитель этой матрицы. (Если $c = 0$, то неподвижными являются точки $w_1 = \infty$ и $w_2 = \frac{b}{d-a}$).

Определение. Неподвижная точка w_1 называется притягивающей, нейтральной или отталкивающей неподвижной точкой дробно линейного преобразования 66, если соответственно

$$|S'(w_1)| < 1 \quad , \quad |S'(w_1)| = 1 \quad , \quad |S'(w_1)| > 1$$

Утверждение. *Пусть $w_{1,2}$ - неподвижные точки дробно линейного преобразования 66. Тогда $|S'(w_1)S'(w_2)| = 1$. Если неподвижная точка w_1 является притягивающей, нейтральной или отталкивающей неподвижной точкой, то другая неподвижная точка w_2 является соответственно отталкивающей, нейтральной или притягивающей неподвижной точкой.*

Действительно, из равенства 67 следует, что

$$S'(w_{1,2}) = \frac{\Delta}{(cw_{1,2} + d)^2} = \frac{4\Delta}{(a + d \pm \sqrt{I^2 - 4\Delta})^2} = \frac{4\Delta}{(I \pm \sqrt{I^2 - 4\Delta})^2}$$

Поэтому

$$|S'(w_1)S'(w_2)| = \left| \frac{(4\Delta)^2}{(I^2 - (I^2 - 4\Delta))^2} \right| = 1$$

Утверждение. *Пусть w_1 - притягивающая (отталкивающая или нейтральная) неподвижная точка дробно линейного преобразования $S(w)$ и пусть $z_1 = T(w_1)$, где $T(w)$ - невырожденное дробно линейное преобразование. Тогда точка z_1 является притягивающей (отталкивающей или нейтральной) неподвижной точкой дробно линейного преобразования $R(w) = T \circ S \circ T^{-1}(w)$.*

Действительно,

$$R(z_1) = T^{-1}(z_1) = T \circ S \circ (w_1) = T(w_1) = z_1$$

и

$$|R'(z_1)| = |(T^{-1})'(w_1)S'(w_1)T'(z_1)| = |S'(w_1)| < 1 \quad (> 1 \text{ или } = 1)$$

Утверждение. *Пусть w_1 и w_2 - притягивающая и отталкивающая неподвижные точки дробно линейного преобразования $S(w)$. Тогда при всех $w \in \overline{\mathbb{C}}$ существует предел $\lim_{n\to\infty}(\underbrace{S \circ \cdots \circ S}_{n})(w)$, равный w_1, если $w \neq w_2$, и равный w_2, если $w = w_2$.*

Действительно, утверждение очевидно, если $w_1 = 0$, $w_2 = \infty$, так как в этом случае $S(w) = \alpha w$, где $|\alpha| < 1$. В общем случае введем в рассмотрение дробно линейное преобразование $T(w)$, переводящее точки w_1 и w_2 соответственно в точки 0 и ∞. Тогда по предыдущему утверждению точки 0 и ∞ являются притягивающей и отталкивающей неподвижными точками дробно линейного преобразования $R(w) = (T \circ S \circ T^{-1})(w)$. Поэтому при всех $w \neq \infty$

$$\lim_{n\to\infty} (\underbrace{R \circ \cdots \circ R}_{n})(w) = 0$$

Так как

$$(\underbrace{S \circ \cdots \circ S}_{n})(w) = (T^{-1} \circ \underbrace{R \circ \cdots \circ R}_{n} \circ T)(w)$$

и $T(w) \neq \infty$ при всех $w \in \overline{\mathbb{C}} \setminus \{w_2\}$, то при всех $w \in \overline{\mathbb{C}} \setminus \{w_2\}$

$$\lim_{n\to\infty} (\underbrace{S \circ \cdots \circ S}_{n})(w) = T^{-1}(\lim_{n\to\infty} \underbrace{R \circ \cdots \circ R}_{n}(Tw)) = T^{-1}(0) = w_1$$

При $w = w_2$ и всех $n = 1, 2, \ldots$ имеет место очевидное равенство $(\underbrace{S \circ \cdots \circ S}_{n})(w) = w_2$, и следовательно,

$$\lim_{n\to\infty} (\underbrace{S \circ \cdots \circ S}_{n})(w_2) = w_2$$

Задача 1. Пусть $w_1 = w_2$. Доказать, что $\lim_{n\to\infty}(\underbrace{S \circ \cdots \circ S}_{n})(w) = w_1$ при всех $w \in \overline{\mathbb{C}}$.

Задача 2. Пусть w_1 и w_2 - не равные между собой нейтральные точки не тождественного дробно линейного преобразования $S(w)$. Доказать, что предел последовательности $(\underbrace{S \circ \cdots \circ S}_{n})(w)$ композиций существует только лишь при $w = w_1$ или $w = w_2$.

Теорема. *Пусть* $S_n(w) = \frac{\alpha_n w + \beta_n}{\gamma_n w + \delta_n}$, $n = 1, 2, \ldots$ - *предельно постоянная последовательность дробно линейных преобразований и пусть* p *и* p^* *отталкивающая и притягивающая неподвижные точки предельного дробно линейного преобразования* $S(w) = \lim_{n\to\infty} S_n(w)$. *Тогда*

1°. *При всех* $w \in \overline{\mathbb{C}} \setminus \{p\}$ *существует не зависящий от* w *предел* $\lim_{n\to\infty}(S_1 \circ \cdots \circ S_n)(w) = S$.

2°. *При всех* $w \in \overline{\mathbb{C}} \setminus \{w_0\}$ *существует не зависящий от* w *предел* $\lim_{n\to\infty}(S_n \circ \cdots \circ S_1)(w) = p^*$.

Обратим внимание, что в отличие от чисто постоянного случая в утверждении 1° по вполне понятным причинам ничего нельзя сказать о значении предела S, а в утверждении 2° ничего нельзя сказать о значении исключительной точки w_0. Доказательству теоремы предпошлем несколько лемм.

Лемма 1. *Пусть* $S_n(w) = \frac{\alpha_n w+\beta_n}{\gamma_n w+\delta_n}$, $n = 1, 2, \ldots$ - *последовательность дробно линейных преобразований и пусть*

$$\{\overline{P}_n\}_{n=0}^{\infty} = \{(P_n^1, P_n^2)\}_{n=0}^{\infty} \quad и \quad \{\overline{Q}_n\}_{n=0}^{\infty} = \{(Q_n^1, Q_n^2)\}_{n=0}^{\infty} \quad , \quad n = 1, 2, \ldots$$

- *два решения системы разностных уравнений*

$$\begin{cases} \omega_n^1 = \alpha_n \omega_{n-1}^1 + \gamma_n \omega_{n-1}^2 \\ \omega_n^2 = \beta_n \omega_{n-1}^1 + \delta_n \omega_{n-1}^2 \end{cases} \quad , \quad n = 1, 2, \ldots \tag{68}$$

с начальными условиями $\overline{P}_0 = (1, 0)$ *и* $\overline{Q}_0 = (0, 1)$, *а*

$$\{\overline{\varphi}_n\}_{n=0}^{\infty} = \{(\varphi_n^1, \varphi_n^2)\}_{n=0}^{\infty} \quad и \quad \{\overline{\psi}_n\}_{n=0}^{\infty} = \{(\psi_n^1, \psi_n^2)\}_{n=0}^{\infty} \quad , \quad n = 1, 2, \ldots$$

- *два решения системы разностных уравнений*

$$\begin{cases} \omega_n^1 = \alpha_n \omega_{n-1}^1 + \beta_n \omega_{n-1}^2 \\ \omega_n^2 = \gamma_n \omega_{n-1}^1 + \delta_n \omega_{n-1}^2 \end{cases} \quad , \quad n = 1, 2, \ldots \tag{69}$$

с начальными условиями $\overline{\varphi}_0 = (1, 0)$ *и* $\overline{\psi}_0 = (0, 1)$. *Тогда*

$$S_1 \circ \cdots \circ S_n(w) = \frac{P_n^1 w + P_n^2}{Q_n^1 w + Q_n^2} \tag{70}$$

$$S_n \circ \cdots \circ S_1(w) = \frac{\varphi_n^1 w + \psi_n^1}{\varphi_n^2 w + \psi_n^2} \tag{71}$$

Докажем лемму индукцией по n. При $n = 1$ в силу равенств 68 имеем равенства

$$(P_n^1, P_n^2) = (\alpha_1 \times 1 + \gamma_1 \times 0, \beta_1 \times 1 + \delta_1 \times 0) = (\alpha_1, \beta_1)$$

$$(Q_n^1, Q_n^2) = (\alpha_1 \times 0 + \gamma_1 \times 1, \beta_1 \times 0 + \delta_1 \times 1) = (\gamma_1, \delta_1)$$

а в силу равенств 69 - равенства

$$(\varphi_n^1, \varphi_n^2) = (\alpha_1 \times 1 + \beta_1 \times 0, \gamma_1 \times 1 + \delta_1 \times 0) = (\alpha_1, \gamma_1)$$

$$(\psi_n^1, \psi_n^2) = (\alpha_1 \times 0 + \beta_1 \times 1, \gamma_1 \times 0 + \delta_1 \times 1) = (\beta_1, \delta_1)$$

то есть равенства 70 и 71 при $n = 1$ выполняются. Предполагая, что равенства 70 и 71 выполняются для индекса $n-1$, и, пользуясь разностными уравнениями 68 и 69, получим равенства

$$\big(S_1 \circ \cdots \circ S_n\big)(w) = \big(S_1 \circ \cdots \circ S_{n-1}\big)(S_n(w)) = \frac{P_{n-1}^1 \frac{\alpha_n w + \beta_n}{\gamma_n w + \delta_n} + P_{n-1}^2}{Q_{n-1}^1 \frac{\alpha_n w + \beta_n}{\gamma_n w + \delta_n} + Q_{n-1}^2} =$$

$$\frac{(\alpha_n P_{n-1}^1 + \gamma_n P_{n-1}^2)w + (\beta_n P_{n-1}^1 + \delta_n P_{n-1}^2)}{(\alpha_n Q_{n-1}^1 + \gamma_n Q_{n-1}^2)w + (\beta_n Q_{n-1}^1 + \delta_n Q_{n-1}^2)} = \frac{P_n^1 w + P_n^2}{Q_n^1 w + Q_n^2}$$

$$\big(S_n \circ \cdots \circ S_1\big)(w) = S_n\big(S_{n-1} \circ \cdots \circ S_1(w)\big) = \frac{\alpha_n \frac{\varphi_{n-1}^1 w + \psi_{n-1}^1}{\varphi_{n-1}^2 w + \psi_{n-1}^2} + \beta_n}{\gamma_n \frac{\varphi_{n-1}^1 w + \psi_{n-1}^1}{\varphi_{n-1}^2 w + \psi_{n-1}^2} + \delta_n} =$$

$$\frac{(\alpha_n \varphi_{n-1}^1 + \beta_n \varphi_{n-1}^2)w + (\alpha_n \psi_{n-1}^1 + \beta_n \psi_{n-1}^2)}{(\gamma_n \varphi_{n-1}^1 + \delta_n \varphi_{n-1}^2)w + (\gamma_n \psi_{n-1}^1 + \delta_n \psi_{n-1}^2)} = \frac{\varphi_n^1 w + \psi_n^1}{\varphi_n^2 w + \psi_n^2}$$

то есть равенства 70 и 71 имеют место и для индекса n. Лемма доказана.

Лемма 2. *Пусть имеется последовательность невырожденных дробно линейных преобразований*

$$S_n(w) = \frac{\alpha_n w + \beta_n}{\gamma_n w + \delta_n} \quad , \quad n = 1, 2, \ldots$$

такая, что при всех $n = 1, 2, \ldots$ имеют место неравенства

$$|\alpha_n| + |\gamma_n| + |\beta_n| \le q|\delta_n| \tag{72}$$

где $0 < q < 1$. Тогда

1°. *Для всякого w такого, что $|w| < 1$, существует предел $\lim_{n\to\infty} \big(S_1 \circ \cdots \circ S_n\big)(w) = S$. При этом S не зависит от w, $|S| < 1$ и*

$$\big|\big(S_1 \circ \cdots \circ S_n\big)(w) - S\big| \le q^n \frac{1 + |w|}{1 - |w|}$$

2°. *Для всякого $w \in \overline{\mathbb{C}} \setminus \{w_0\}$, где $|w_0| \ge 1$ - некоторое исключительное значение, при всех $n \ge n_0(w)$ имеют место неравенства*

$$|S_n \circ \cdots \circ S_1(w)| \le 1$$

3°. *Если $\lim_{n\to\infty} \frac{\gamma_n}{|\delta_n| - |\beta_n|} = 0$, то предел $\lim_{n\to\infty} \big(S_1 \circ \cdots \circ S_n\big)(w) = S$, где $|S| < 1$, существует и не зависит от w при всех $w \in \overline{\mathbb{C}} \setminus \{\infty\}$.*

4°. *Если $\lim_{n\to\infty} \frac{\beta_n}{|\delta_n| - |\gamma_n|} = 0$, то при всех $w \in \overline{\mathbb{C}} \setminus \{w_0\}$ существует предел $\lim_{n\to\infty} \big(S_n \circ \cdots \circ S_1\big)(w) = 0$.*

Задача. Существует ли предел $\lim_{n\to\infty}\big(S_1\circ\cdots\circ S_n\big)(0)$, если неравенства 72 заменить более слабыми неравенствами

$$|\alpha_n|+|\beta_n|+|\gamma_n|\le|\delta_n|\quad,\quad n=1,2,\dots$$

Доказательство. Заметим, что условие 72 теоремы совпадает с условием 49 теоремы как для системы разностных уравнений 68, так и для системы разностных уравнений 69. Поэтому по теореме существует единственное нетривиальное решение $\{\overline{\nu}_n\}_{n=0}^{\infty}=\{(\nu_n^1,\nu_n^2)\}_{n=0}^{\infty}$ системы разностных уравнений 68 такое, что $|\nu_n^1|\ge|\nu_n^2|$ при всех $n=0,1,\dots$ и существует единственное нетривиальное решение $\{\overline{\mu}_n\}_{n=0}^{\infty}=\{(\mu_n^1,\mu_n^2)\}_{n=0}^{\infty}$ системы разностных уравнений 68 такое, что $|\mu_n^1|\ge|\mu_n^2|$ при всех $n=0,1,\dots$. Представим решения $\{\overline{\nu}_n\}_{n=0}^{\infty}$ и $\{\overline{\mu}_n\}_{n=0}^{\infty}$ в виде линейных комбинаций

$$\{\overline{\nu}_n\}_{n=0}^{\infty}=\nu_0^1\{\overline{P}_n\}_{n=0}^{\infty}+\nu_0^2\{\overline{Q}_n\}_{n=0}^{\infty}\tag{73}$$

$$\{\overline{\mu}_n\}_{n=0}^{\infty}=\mu_0^1\{\overline{\varphi}_n\}_{n=0}^{\infty}+\mu_0^2\{\overline{\psi}_n\}_{n=0}^{\infty}\tag{74}$$

линейно независимых пар решений $\{\overline{P}_n\}_{n=0}^{\infty}$ и $\{\overline{Q}_n\}_{n=0}^{\infty}$ и $\{\overline{\varphi}_n\}_{n=0}^{\infty}$ и $\{\overline{\psi}_n\}_{n=0}^{\infty}$.

Докажем утверждение 1°. Заметим, что из неравенства $|\nu_0^1|\ge|\nu_0^2|$ следует, во-первых, неравенство $\nu_0^1\ne0$ (так как иначе решение $\{\overline{\nu}_n\}_{n=0}^{\infty}$ было бы тривиальным), во-вторых, неравенство $|S|<1$, где $S=-\frac{\nu_0^2}{\nu_0^1}$ и, в-третьих, что решение $\{\overline{Q}_n\}_{n=0}^{\infty}$ не пропорционально решению $\{\overline{\nu}_n\}_{n=0}^{\infty}$. Для решения $\{\overline{Q}_n\}_{n=0}^{\infty}$ фигурирующий в утверждении 2° теоремы о векторном разностном уравнении индекс n_0 равен нулю, так как $|Q_0^2|=1>0=|Q_0^1|$. Из равенств 70, 73 и утверждения 4° теоремы о векторном разностном уравнении при $|w|<1$ получаем неравенство

$$\big|S_1\circ\cdots\circ S_n(w)-S\big|=\left|\frac{P_n^1w+P_n^2}{Q_n^1w+Q_n^2}+\frac{\nu_0^2}{\nu_0^1}\right|=\left|\frac{\nu_n^1w+\nu_n^2}{\nu_0^1(Q_n^1w+Q_n^2)}\right|\le$$

$$\frac{|\nu_n^1|(1+|w|)}{|\nu_0^1Q_n^2|(1-|w|)}\le\frac{1}{|\nu_0^1|}\frac{|\nu_0^1|}{|Q_0^2|}q^n\frac{1+|w|}{1-|w|}=q^n\frac{1+|w|}{1-|w|}\tag{75}$$

Из этого неравенства следует утверждение 1°.

Докажем утверждение 3°. Если $\lim_{n\to\infty}\frac{\gamma_n}{|\delta_n|-|\beta_n|}=0$, то по теореме существует предел $\lim_{n\to\infty}Q_n^1/Q_n^2=0$. В этом случае неравенство 75 можно уточнить следующим образом

$$\big|S_1\circ\cdots\circ S_n(w)-S\big|\le q^n\frac{1+|w|}{1-|wQ_n^1/Q_n^2|}$$

Отсюда следует существование независящего от w предела $\lim_{n\to\infty}S_1\circ\cdots\circ S_n(w)$, равного S, $|S|<1$, при всех $w\in\mathbb{C}$.

Докажем утверждение 2°. Пусть $w_0 = \frac{\mu_0^1}{\mu_0^2}$. Тогда $|w_0| \geq 1$ и при всех $w \in \overline{\mathbb{C}} \setminus \{w_0\}$ решение

$$\{\overline{\omega}_n\}_{n=0}^{\infty} = w\{\overline{\varphi}_n\}_{n=0}^{\infty} + \{\overline{\psi}_n\}_{n=0}^{\infty}$$

системы разностных уравнений 69 не пропорционально исключительному решению $\{\overline{\mu}_n\}_{n=0}^{\infty}$. Поэтому из равенства 71 и утверждения 3° теоремы о векторном разностном уравнении при всех $w \in \overline{\mathbb{C}} \setminus \{w_0\}$ и всех достаточно больших n ($n \geq n_0(w)$) получаем неравенство

$$\left|S_n \circ \cdots \circ S_1(w)\right| = \left|\frac{\varphi_n^1 w + \psi_n^1}{\varphi_n^2 w + \psi_n^2}\right| = \left|\frac{\omega_n^1}{\omega_n^2}\right| \leq 1$$

Докажем утверждение 4°. Если $\lim_{n\to\infty} \frac{\beta_n}{|\delta_n| - |\gamma_n|} = 0$, то по теореме для всякого решения $\{\overline{\omega}_n\}_{n=0}^{\infty}$, не пропорционального исключительному решению $\{\overline{\mu}_n\}_{n=0}^{\infty}$, существует предел $\lim_{n\to\infty} \omega_n^1/\omega_n^2 = 0$. В этом случае из последнего равенства $S_n \circ \cdots \circ S_1(w) = \frac{\omega_n^1}{\omega_n^2}$ следует, что $\lim_{n\to\infty} S_n \circ \cdots \circ S_1(w) = 0$ при всех $w \in \overline{\mathbb{C}} \setminus \{w_0\}$. Лемма доказана.

Доказательство теоремы о предельно постоянной последовательности дробно линейных преобразований. Докажем утверждение 1° теоремы для случая $p = \infty$. В этом случае $S(w) = \frac{\alpha w + \beta}{\gamma w + \delta}$, где $\gamma = 0$ и $|\alpha| < |\delta|$. Пусть $T(w) = \theta^{-1} w$,

$$R_n(w) = T^{-1} \circ S_n \circ T(w) = \frac{\alpha_n w + \theta\beta_n}{\theta^{-1}\gamma_n w + \delta_n} \tag{76}$$

Из неравенства $|\alpha| < |\delta|$ следует, что существуют числа $q < 1$ и $\theta > 0$ такие, что $|\alpha| + \theta|\beta| < q|\delta|$. Так как

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = \alpha\,,\ \lim_{n\to\infty} \beta_n = \beta\,,\ \lim_{n\to\infty} \gamma_n = \gamma = 0\,,\ \lim_{n\to\infty} \delta_n = \delta \ \text{ и } \ |\alpha| + \theta|\beta| < q|\delta|$$

то при всех $n \geq n_0$ выполняются неравенства

$$|\alpha_n| + \theta|\beta_n| + \theta^{-1}|\gamma_n| < q|\delta_n| \tag{77}$$

и равенство

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\theta^{-1}\gamma_n}{|\delta_n| - \theta|\beta_n|} = 0 \tag{78}$$

По утверждению 3° леммы 2 из условий 77-78 на коэффициенты дробно линейных преобразований $R_n(w)$, определенных равенством 76, следует,

что при всех $w \in \overline{\mathbb{C}} \setminus \{\infty\} = w \in \overline{\mathbb{C}} \setminus \{p\}$ существует предел $\lim_{n\to\infty} \big(R_1 \circ \cdots \circ R_n\big)(w) = R$, а следовательно, существует и предел

$$\lim_{n\to\infty} \big(S_1 \circ \cdots \circ S_n\big)(w) = \lim_{n\to\infty} \big(T \circ R_1 \circ \cdots \circ R_n\big)\big(T^{-1}(w)\big) = T(R)$$

Аналогичным образом доказывается и утверждение 2° теоремы для случая $p^* = 0$. В этом случае $S(w) = \frac{\alpha w+\beta}{\gamma w+\delta}$, где $\beta = 0$ и $|\alpha| < |\delta|$. Тогда неравенства 77 имеют место при некотором $q < 1$ и достаточно большом θ, а также имеет место равенство

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\theta\beta_n}{|\delta_n| - \theta^{-1}|\gamma_n|} = 0 \tag{79}$$

По утверждению 4° леммы 2 из условий 77 и 79 на коэффициенты дробно линейных преобразований $R_n(w)$, определенных равенством 76, следует, что при всех $w \in \overline{\mathbb{C}}\setminus\{w_0\}$ существует предел $\lim_{n\to\infty} \big(R_1\circ\cdots\circ R_n\big)(w) = 0$, а следовательно, существует и предел

$$\lim_{n\to\infty} \big(S_1 \circ \cdots \circ S_n\big)(w) = \lim_{n\to\infty} \big(T \circ R_1 \circ \cdots \circ R_n\big)\big(T^{-1}(w)\big) = T(0) = 0$$

Таким образом утверждения 1° и 2° теоремы доказаны в частных случаях $p = \infty$ и $p^* = 0$ соответственно. В общем случае теорема сводится к доказанным частным случаям при помощи перехода от дробно линейных преобразований $S_n(w) = \frac{\alpha_n w+\beta_n}{\gamma_n w+\delta_n}$ к дробно линейным преобразованиям $R_n(w) = Q^{-1} \circ S_n \circ Q(w)$ при надлежащем выборе $Q(w)$. Подобрать надлежащее дробно линейное преобразование $Q(w)$ и доказать утверждение 2° теоремы в общем случае слушателям предлагается в виде упражнения. Общий случай утверждения 1° теоремы будет доказан ниже, причем в усиленном виде (равномерном по параметру) для дробно линейных преобразований, коэффициенты которых голоморфно зависят от параметра. Именно этот усиленный вариант нам и будет нужен в дальнейшем. Но сначала отметим следующее простое следствие утверждения 1° леммы 2 о равномерности сходимости в критерии Ворпицкого.

Теорема. *Пусть правильная C-дробь*

$$\cfrac{a_1 z}{1 + \cfrac{a_2 z}{1 + \ldots}} \tag{80}$$

такова, что $a_n \le 1$ при всех $n = 1, 2, \ldots$. Тогда C-дробь 80 сходится в круге $\{|z| < 1/4\}$ к функции $f(z)$ равномерно на любом компакте, лежащем в этом круге. При этом функция $f(z)$ голоморфна в круге $\{|z| < 1/4\}$ и $|f(z)| \le 1$.

Доказательство. Сходимость С-дроби 80 в круге $\{|z| < 1/4\}$ к функции $f(z)$ следует из критерия Ворпицкого. Чтобы доказать равномерность сходимости, повторим схему вывода критерия Ворпицкого из критерия Прингсхейма и рассмотрим непрерывную дробь

$$\cfrac{2a_1 z}{2 + \cfrac{4a_2 z}{2 + \dots}}$$

эквивалентную С-дроби 80, и соответствующие ей дробно линейные преобразования

$$S_1(w,z) = \frac{2a_1 z}{w+2} \quad , \quad S_n(w,z) = \frac{4a_n z}{w+2} \quad , \quad n = 2,3,\dots$$

Если $|z| \le r < 1/4$, то

$$|4a_n z| + 1 \le 4r + 1 = 2q \quad , \quad \text{где} \quad q = \frac{4r+1}{2} < 1$$

Поэтому по утверждению 1° леммы 2 последовательность композиций $S_1 \circ \dots \circ S_n(w,z)$ сходится при $n \to \infty$ к независящей от w функции $f(z)$ такой, что $|f(z)| \le 1$ и

$$|S_1 \circ \dots \circ S_n(w,z) - f(z)| \le q^n \frac{1+|w|}{1-|w|} \quad , \quad |z| \le r \quad , \quad n = 1,2,\dots$$

В частности, при $w = 0$ имеем

$$\left| \frac{P_n(z)}{Q_n(z)} - f(z) \right| \le q^n \tag{81}$$

то есть равномерность сходимости С-дроби 80 на любом круге $\{|z| \le r\}$, где $r < 1/4$, к функции $f(z)$ доказана. Из неравенства 81 и неравенства $|f(z)| \le 1$ следует, что рациональная функция $\frac{P_n(z)}{Q_n(z)}$ ограничена в круге $\{|z| \le r\}$ числом $1 + q^n$ и, следовательно, голоморфна в круге $\{|z| \le r\}$. Поэтому функция $f(z)$ также голоморфна в круге $\{|z| \le r\}$ как равномерный предел голоморфных функций, а в силу произвольности числа $r < 1/4$ функция $f(z)$ голоморфна и в круге $\{|z| < 1\}$.

Лемма 3. *Пусть дробно линейные преобразования*

$$S_n(w) = \frac{\alpha_n w + \beta_n}{\gamma_n w + \delta_n} \quad , \quad n = 1,2,\dots$$

таковы, что при некоторых $p \in \mathbb{C}$, $0 < q < 1$ *и* $\theta > 0$ *выполняются неравенства*

$$|\delta_n + p\gamma_n| + \theta^{-1}|\gamma_n p^2 + (\delta_n - \alpha_n)p - \beta_n| + \theta|\gamma_n| \le q|\alpha_n - p\gamma_n|\,,\ n = 1, 2, \dots \quad (82)$$

Тогда при всех w *таких, что* $|w-p| > \theta$ *существует предел* $\lim_{n\to\infty}\big(S_1 \circ \cdots \circ S_n\big)(w) = S$. *При этом* S *не зависит от* w, $|S - p| \ge \theta$ *и*

$$\Big|\big(S_1 \circ \cdots \circ S_n(w) - p\big)^{-1} - (S-p)^{-1}\Big| \le q^n \frac{|w-p| + \theta}{|w-p| - \theta}\theta^{-1}$$

Действительно, положим $R_n(w) = T^{-1} \circ S_n \circ T(w)$, где $T(w) = \frac{\theta}{w} + p$. Тогда

$$S_n(T(w)) = \frac{\alpha_n(\frac{\theta}{w} + p) + \beta_n}{\gamma_n(\frac{\theta}{w} + p) + \delta_n} = \frac{(\alpha_n p + \beta_n)w + \alpha_n\theta}{(\gamma_n p + \delta_n)w + \gamma_n\theta}$$

$T^{-1}(w) = \frac{\theta}{w-p}$ и

$$R_n(w) = T^{-1}\big(S_n(T(w))\big) = \frac{\theta}{S_n(T(w)) - p} = \frac{\theta}{\frac{(\alpha_n p+\beta_n)w+\alpha_n\theta}{(\gamma_n p+\delta_n)w+\gamma_n\theta} - p} =$$

$$\frac{(\delta_n + \gamma_n p)w + \theta\gamma_n}{\theta^{-1}(-\gamma_n p^2 + (\alpha_n - \delta_n)p + \beta_n)w + (\alpha_n - \gamma_n p)}$$

Неравенства 82 означают, что коэффициенты дробно линейных преобразований $R_n(w)$ удовлетворяют условию 72 леммы 2. Поэтому по утверждению 1° леммы 2 при всех $|w| < 1$ существует не зависящий от w предел $\lim_{n\to\infty}\big(R_1 \circ \cdots \circ R_n\big)(w) = R$. При этом $|R| \le 1$ и

$$\Big|\big(R_1 \circ \cdots \circ R_n\big)(w) - R\Big| \le q^n \frac{1 + |w|}{1 - |w|} \quad , \quad |w| < 1 \quad , \quad n = 1, 2, \dots$$

Так как $S_1 \circ \cdots \circ S_n(w) = T \circ R_1 \circ \cdots \circ R_n \circ T^{-1}(w)$, то отсюда следует, что при всех w таких, что $|T^{-1}(w)| = \frac{\theta}{|w-p|} < 1$, существует не зависящий от w предел $\lim_{n\to\infty}\big(S_1 \circ \cdots \circ S_n\big)(w) = S = T(R)$. При этом $1 \ge R = |T^{-1}(S)| = \frac{\theta}{|S-p|}$ и

$$|T^{-1} \circ S_1 \circ \cdots \circ S_n(w) - T^{-1}(S)| = |R_1 \circ \cdots \circ R_n \circ T^{-1}(w) - R| \le$$

$$q^n \frac{1 + |T^{-1}(w)|}{1 - |T^{-1}(w)|} = q^n \frac{1 + \frac{\theta}{|w-p|}}{1 - \frac{\theta}{|w-p|}} \quad , \quad n = 1, 2, \dots$$

Другими словами, при всех w таких, что $|w-p|>\theta$ существует не зависящий от w предел $\lim_{n\to\infty}\big(S_1\circ\cdots\circ S_n\big)(w)=S$ такой, что $|S-p|\ge\theta$ и

$$\left|\frac{\theta}{S_1\circ\cdots\circ S_n(w)-p}-\frac{\theta}{S-p}\right|\le q^n\frac{|w-p|+\theta}{|w-p|-\theta}$$

Лемма доказана.

Перед тем, как переходить к завершению доказательства утверждения 1° теоремы, отметим любопытное следствие леммы 3.

Утверждение. *Пусть непрерывная дробь 1 такова, что*

$$\overline{\lim}_{n\to\infty}|b_n-1|+2\overline{\lim}_{n\to\infty}|a_n+b_n-1|^{1/2}<1 \tag{83}$$

Тогда непрерывная дробь 1 сходится.

Задача. Останется ли утверждение верным, если неравенство 83 заменить неравенствами

$$|b_n-1|+2|a_n+b_n-1|^{1/2}\le 1\quad\text{при всех}\quad n=1,2,\dots$$

Доказательство. Положим

$$B=\overline{\lim}_{n\to\infty}|b_n-1|\quad,\quad H=\overline{\lim}_{n\to\infty}|a_n+b_n-1|^{1/2}+\varepsilon$$

где положительное число ε можно выбрать в силу неравенства 83 столь малым, чтобы имело место неравенство $B+2H<1$. Из этого неравенства следует, что

$$H+\sqrt{B+H^2}<H+\sqrt{1-2H+H^2}=1 \tag{84}$$

Положим $\theta=\frac{H}{H+\sqrt{B+H^2}}$. Легко видеть, что $0<\theta\le 1/2$. Кроме того, заметим, что

$$B+\theta^{-1}H^2+\theta=B+(H+\sqrt{B+H^2})H+\frac{H}{H+\sqrt{B+H^2}}=$$

$$\sqrt{B+H^2}(\sqrt{B+H^2}+H)+\frac{H}{H+\sqrt{B+H^2}}=\frac{\sqrt{B+H^2}(H+\sqrt{B+H^2})^2+H}{H+\sqrt{B+H^2}} \tag{85}$$

Из этой цепочки равенств и неравенства 84 получаем неравенство

$$B+\theta^{-1}H^2+\theta\le q<1$$

совпадающее с неравенствами

$$|\delta_n+p\gamma_n|+\theta^{-1}|\gamma_np^2+(\delta_n-\alpha_n)p-\beta_n|+\theta|\gamma_n|\le q|\alpha_n-p\gamma_n|$$

при $\alpha_n = 0$, $\beta_n = a_n$, $\gamma_n = 1$, $\delta_n = b_n$, $p = -1$ и всех $n \geq n_0$, то есть с неравенствами 82 применительно к дробно линейным преобразованиям $S_n(w) = \frac{a_n}{w+b_n}$. Поэтому по лемме 3 получаем, что композиции $S_1 \circ \cdots \circ S_n(w)$ сходятся к независящему от w пределу S при всех $|w - p| > \theta$ и, в частности, при $w = 0$ (так как $\theta \leq 1/2$, $p = -1$). Это означает, что непрерывная дробь 1 сходится.

Следствие. Пусть корни $\lambda_{n,1}$ и $\lambda_{n,2}$ многочлена $z^2 - b_n z - a_n$ таковы, что

$$\overline{\lim}_{n\to\infty}\left|\frac{\lambda_{n,2}}{\lambda_{n,1}}\right| + 2\overline{\lim}_{n\to\infty}\left|\frac{\lambda_{n,2}}{\lambda_{n,1}} - \frac{\lambda_{n,2}}{\lambda_{n-1,1}}\right|^{1/2} < 1 \tag{86}$$

Тогда непрерывная дробь 1 сходится.

Действительно, пусть

$$\cfrac{a_1^*}{b_1^* + \cfrac{a_2^*}{b_2^* + \ldots}} \tag{87}$$

- непрерывная дробь, эквивалентная непрерывной дроби 1, построенная при помощи последовательности $r_n = \lambda_{n,1}^{-1}$, $n = 1, 2, \ldots$, то есть

$$b_n^* = r_n b_n = \frac{\lambda_{n,1} + \lambda_{n,2}}{\lambda_{n,1}} = 1 + \frac{\lambda_{n,2}}{\lambda_{n,1}}$$

$$a_n^* = r_{n-1} r_n a_n = \frac{-\lambda_{n,1}\lambda_{n,2}}{\lambda_{n-1,1}\lambda_{n,1}} = -\frac{\lambda_{n,2}}{\lambda_{n-1,1}}$$

Из тих равенств и неравенства 86 имеем

$$\overline{\lim}_{n\to\infty}|b_n^* - 1| + 2\overline{\lim}_{n\to\infty}|a_n^* + b_n^* - 1|^{1/2} = \overline{\lim}_{n\to\infty}\left|\frac{\lambda_{n,2}}{\lambda_{n,1}}\right| + 2\overline{\lim}_{n\to\infty}\left|\frac{\lambda_{n,2}}{\lambda_{n,1}} - \frac{\lambda_{n,2}}{\lambda_{n-1,1}}\right|^{1/2} < 1$$

Поэтому по предыдущему утверждению непрерывная дробь 87, а следовательно, и эквивалентная ей непрерывная дробь 1 сходятся.

Легко видеть, что если λ_1 и λ_2 - два не равных по модулю числа, то найдутся положительные числа ε_1 и ε_2 такие, что неравенство 86 выполняется при всех $\lambda_{n,1}$ и $\lambda_{n,2}$ таких, что $|\lambda_{n,1} - \lambda_1| \leq \varepsilon_1$ и $|\lambda_{n,2} - \lambda_2| \leq \varepsilon_2$, то есть сформулированная ранее теорема Перрона является следствием доказанного утверждения. Более того, как нетрудно заметить, неравенство 86 выполняется и в том случае если неравенство $|\lambda_{n,2} - \lambda_2| \leq \varepsilon_2$ заменить более слабым неравенством $|\lambda_{n,2}| \leq |\lambda_2| + \varepsilon_2$, а неравенство $|\lambda_{n,1} - \lambda_1| \leq \varepsilon_1$ заменить парой более слабых неравенств $|\lambda_{n,1}| \geq |\lambda_1| - \varepsilon_1$ и $|\lambda_{n,1} - \lambda_{n-1,1}| \leq \varepsilon_1$.

Сформулируем наконец и докажем усиленный (равномерный по параметру) вариант утверждения 1° теоремы о предельно постоянной последовательности дробно линейных преобразований.

Теорема. *Пусть дробно линейные (по w) преобразования*

$$S_n(w,z)=\frac{\alpha_n(z)w+\beta_n(z)}{\gamma_n(z)w+\delta_n(z)} \tag{88}$$

таковы, что коэффициенты $\alpha_n(z),\beta_n(z),\gamma_n(z),\delta_n(z)$ являются голоморфными по z функциями в некоторой области Ω комплексной плоскости и имеют равномерные на компактах, лежащих в Ω, пределы

$$\begin{array}{ll}\lim_{n\to\infty}\alpha_n(z)=\alpha(z) & , \quad \lim_{n\to\infty}\beta_n(z)=\beta(z)\\ \lim_{n\to\infty}\gamma_n(z)=\gamma(z) & , \quad \lim_{n\to\infty}\delta_n(z)=\delta(z)\end{array} \tag{89}$$

и пусть Γ - множество тех $z\in\Omega$, при которых неподвижные точки предельного дробно линейного преобразования $S(w,z)=\frac{\alpha(z)w+\beta(z)}{\gamma(z)w+\delta(z)}$ нейтральны. Тогда последовательность композиций $S_1\circ\cdots\circ S_n(w,z)$, $n=1,2,\ldots$, сходится при $n\to\infty$ к независящей от w мероморфной по z в области $\Omega\setminus\Gamma$ функции $S(z)$ равномерно в сферической метрике на любом множестве из $\mathbb{C}^2$ вида $K\times\{|w-p(z)|\geq\varepsilon\}$, где K - произвольный компакт, лежащий в области $\Omega\setminus\Gamma$, $p(z)$ - отталкивающая неподвижная точка дробно линейного преобразования $S(w,z)$, ε - произвольное сколь-угодно малое положительное число.

В явном виде множество Γ записывается как множество

$$\Gamma=\left\{z\in\mathbb{C}:\ (\alpha(z)+\delta(z))^2=4t(\alpha(z)\delta(z)-\beta(z)\gamma(z))\,,\ 0\leq t\leq 1\right\} \tag{90}$$

а для $p(z)$ имеет место явная формула

$$p(z)=\frac{\alpha(z)-\delta(z)-(\alpha(z)+\delta(z))\sqrt{1-4\frac{4(\alpha(z)\delta(z)-\beta(z)\gamma(z))}{(\alpha(z)+\delta(z))^2}}}{2\gamma(z)} \quad , \quad z\in\Omega\setminus\Gamma \tag{91}$$

где при любом $z\in\mathbb{C}\setminus[-\infty,0]$, принадлежащем комплексной плоскости с разрезом по отрицательной полуоси под $\sqrt{z}$ понимается то значение корня, при котором $|1+\sqrt{z}|>|1-\sqrt{z}|$. Если $p=\infty$, то под множеством $\{|w-p|\geq\varepsilon\}$ понимается множество $\{|w|\leq\varepsilon^{-1}\}$.

Доказательство. Напомним, что неподвижные точки $w_{1,2}(z)$ дробно линейного преобразования $S(w,z)$ определяются равенством

$$w_{1,2}(z)=\frac{\alpha(z)-\delta(z)\pm\sqrt{I(z)^2-4\Delta(z)}}{2\gamma(z)}$$

где $I(z)=\alpha(z)+\delta(z)$, $\Delta(z)=\alpha(z)\delta(z)-\beta(z)\gamma(z)$. Для производных (по w) имеют место равенства

$$\frac{\partial S(w_{1,2}(z),z)}{\partial w}=\frac{4\Delta(z)}{\left(I(z)\pm\sqrt{I(z)^2-4\Delta(z)}\right)^2}\,,\ \left|\frac{\partial S(w_1(z),z)}{\partial w}\times\frac{\partial S(w_2(z),z)}{\partial w}\right|=1$$

Поэтому неподвижные точки $w_{1,2}(z)$ нейтральны тогда и только тогда, когда

$$|I(z)+\sqrt{I^2(z)-4\Delta(z)}|=|I(z)-\sqrt{I^2(z)-4\Delta(z)}|$$

Таким образом множество Γ совпадает с множеством

$$\{z\in\mathbb{C}:\,|1+\sqrt{1-4\Delta(z)I^{-2}(z)}|=|1-\sqrt{1-4\Delta(z)I^{-2}(z)}|\}\bigcup\{z\in\mathbb{C}:\,I(z)=0\}$$

или, что то же самое, с множеством

$$\{z\in\mathbb{C}:\,1-4\Delta(z)I^{-2}(z)=t\quad,\quad t\le 0\}\bigcup\{z\in\mathbb{C}:\,I(z)=0\}$$

В другом виде это множество определяется равенством 90.

С учетом вышевведенного выбора ветви функции $\sqrt{z}$ функция $\sqrt{1-4\Delta(z)I^{-2}(z)}$ определена при всех $z\in\Omega\setminus\Gamma$ и при этом

$$\left|I(z)-\sqrt{I(z)^2-4\Delta(z)}\right|<\left|I(z)+\sqrt{I(z)^2-4\Delta(z)}\right|\quad,\quad z\in\Omega\setminus\Gamma\quad(92)$$

а отталкивающая неподвижная точка дробно линейного преобразования $S(w,z)$ определяется равенством 171 (притягивающая неподвижная точка дробно линейного преобразования $S(w,z)$ определяется тем же равенством 171, но с заменой знака корня на противоположный). Из неравенства 92 с учетом равенств

$$\delta(z)+\gamma(z)p(z)=\frac{I(z)(1-\sqrt{1-4\Delta(z)I^{-2}(z)})}{2}$$

и

$$\alpha(z)-\gamma(z)p(z)=\frac{I(z)(1+\sqrt{1-4\Delta(z)I^{-2}(z)})}{2}$$

получаем неравенство

$$\left|\delta(z)+\gamma(z)p(z)\right|<\left|\alpha(z)-\gamma(z)p(z)\right|\quad,\quad z\in\Omega\setminus\Gamma\qquad(93)$$

Фиксируем компакт K, лежащий в $\Omega\setminus\Gamma$ и $\varepsilon>0$. Положим

$$\tau=\min_{z\in K}|\alpha(z)-\gamma(z)p(z)|\ ,\ \ r=\max_{z\in K}\left|\frac{\delta(z)+\gamma(z)p(z)}{\alpha(z)-\gamma(z)p(z)}\right|\ ,\ \ M=\max_{z\in K}|\gamma(z)|$$

Из неравенства 93 следует, что $\tau>0$, $r<1$. Предположим сначала, что $\gamma(z)\neq 0$ при всех $z\in K$. Тогда функция $p(z)$, определенная равенством 171 голоморфна в некоторой окрестности компакта K, и следовательно, голоморфные функции

$$\gamma_n(z)\,,\ \alpha_n(z)-\gamma_n(z)p(z)\,,\ \delta_n(z)+\gamma_n(z)p(z)\,,\ \gamma_n(z)p^2(z)+(\delta_n(z)-\alpha_n(z))-\beta_n(z)$$

стремятся соответственно к функциям

$$\gamma(z)\,,\ \alpha(z)-\gamma(z)p(z)\,,\ \delta(z)+\gamma(z)p(z)\,,\ \gamma(z)p^2(z)+(\delta(z)-\alpha(z))-\beta(z)\equiv 0$$

равномерно на K. Поэтому найдется индекс N такой, что при всех $n\geq N$ и всех $z\in K$ имеют место неравенства

$$|\gamma_n(z)|\leq 2M\ \ ,\ \ |\alpha_n(z)-\gamma_n(z)p(z)|\geq\frac{\tau}{2}\ \ ,\ \ \left|\frac{\delta_n(z)+\gamma_n(z)p(z)}{\alpha_n(z)-\gamma_n(z)p(z)}\right|\leq\frac{1+2r}{3}$$

$$|\gamma_n(z)p^2(z)+(\delta_n(z)-\alpha_n(z))-\beta_n(z)|\leq\frac{(1-r)\tau}{12}\theta$$

где $\theta=\min\{\frac{(1-r)\tau}{24M},\frac{\varepsilon}{2}\}$ Из этих неравенств при всех $n\geq N$ и $z\in K$ получаем неравенства

$$|\delta_n(z)+\gamma_n(z)p(z)|+\theta^{-1}|\gamma_n(z)p^2(z)+(\delta_n(z)-\alpha_n(z))-\beta_n(z)|+\theta\gamma_n(z)|\leq$$

$$\big(\frac{1+2r}{3}\big)|\alpha_n(z)-\gamma_n(z)p(z)|+\frac{(1-r)\tau}{12}+2M\frac{(1-r)\tau}{24M}\leq$$

$$\big(\frac{1+2r}{3}\big)|\alpha_n(z)-\gamma_n(z)p(z)|+\frac{(1-r)}{3}|\alpha_n(z)-\gamma_n(z)p(z)|=q|\alpha_n(z)-\gamma_n(z)p(z)|$$

где $q=\frac{2+r}{3}<1$. Таким образом при всех $n\geq N$ и всех $z\in K$ имеют место предположения 82 леммы 3. Поэтому по лемме 3 при всех $z\in K$ и всех w таких, что $|w-p(z)|>\theta$, а следовательно, при всех w таких, что $|w-p(z)|\geq\varepsilon$ (напомним, что $\theta\leq\varepsilon/2$) существует независящий от w предел

$$\lim_{n\to\infty}S_N\circ\cdots\circ S_n(w,z)=f_N(z)$$

такой, что

$$|f_N(z)-p(z)|\geq\theta \tag{94}$$

и

$$\left|\frac{1}{S_N\circ\cdots\circ S_n(w,z)-p(z)}-\frac{1}{f_N(z)-p(z)}\right|\leq$$

$$q^n\frac{1+\frac{\theta}{|w-p(z)|}}{1-\frac{\theta}{|w-p(z)|}}\theta^{-1}\leq q^n\frac{1+1/2}{1-1/2}\theta^{-1}=3q^n\theta^{-1} \tag{95}$$

Заметим, что при любом фиксированном w_0 таком, что

$$|w_0|\geq\max_{z\in K}|p(z)|+\varepsilon$$

при всех $z\in K$ выполняются неравенства $|w_0-p(z)|\leq\varepsilon$, а мероморфные по z функции $\frac{1}{S_N\circ\cdots\circ S_n(w_0,z)-p(z)}$ ограничены по модулю на K в силу

неравенств 94-95 числом $\theta^{-1}(1+3q^n)$, а следовательно, являются голоморфными на K функциями. Так как эти функции равномерно сходятся на K в силу неравенства 95 к функции $\frac{1}{f_N(z)-p(z)}$, то предельная функция

$$g_N(z) = \frac{1}{f_N(z) - p(z)}$$

голоморфна на K, а функция

$$f_N(z) = p(z) + \frac{1}{g_N(z)}$$

мероморфна на K. Так как голоморфные по z функции

$$\frac{1}{S_N \circ \cdots \circ S_n(w,z) - p(z)} \quad \text{сходятся к функции} \quad \frac{1}{f_N(z) - p(z)}$$

равномерно на $K \times \{|w - p(z)| \geq \varepsilon\} \in \mathbb{C}^2$, то мероморфные по z функции $S_N \circ \cdots \circ S_n(w,z)$ сходятся к функции $f_N(z)$ равномерно в сферической метрике на $K \times \{|w - p(z)| \geq \varepsilon\} \in \mathbb{C}^2$. Поэтому и функции

$$S_1 \circ \cdots \circ S_n(w,z) = S_1 \circ \cdots \circ S_{N-1}\big(S_N \circ \cdots \circ S_n(w,z)\big)$$

сходятся к функции

$$S_1 \circ \cdots \circ S_{N-1}(f_N(z), z)$$

равномерно в сферической метрике на $K \times \{|w - p(z)| \geq \varepsilon\} \in \mathbb{C}^2$. Таким образом теорема доказана в предположении, что функция $\gamma(z)$ не имеет нулей на K.

Покажем, что теорема верна и без этого предположения. Заметим, что равенства $\gamma(z) = 0$ и $\alpha(z) - \delta(z) = 0$ могут одновременно выполняться только лишь при $z \in \Gamma$ и, следовательно, не выполняются одновременно ни при каком $z \in K$. Поэтому для каждой точки $z_0 \in K$ найдутся числа t и ε, зависящие от z_0, такие, что

$$\gamma(z)t^2 + (\delta(z) - \alpha(z))t - \beta(z) \neq 0 \quad \text{при всех} \quad z \in K \bigcap \{|z - z_0| \leq \varepsilon\}$$

Из покрытия компакта K кругами $\{|z - z_0| < \varepsilon(z_0)/2\}$, $z_0 \in K$, выберем конечное подпокрытие, состоящее из кругов $\{|z - z_j| < \varepsilon(z_j)/2\}$, $j = 1, \ldots, m$. Положим

$$t_j = t(z_j) \quad , \quad T_j(w) = \frac{1}{w} + t_j \quad , \quad R_{n,j}(w,z) = T_j^{-1} \circ S_n \circ T_j(w,z) =$$

$$\frac{(\delta(z) + \gamma(z)t_j)w + \gamma(z)}{(-\gamma(z)t_j^2 + (\alpha(z) - \delta(z))t_j + \beta(z))w + (\alpha(z) - \gamma(z)t_j)} \tag{96}$$

(см. соответствующую формулу, использованную при доказательстве леммы 3, при $p = t$ и $\theta = 1$). По уже доказанному на каждом из компактов $K_j = K \bigcap \{|z - z_j| \le \varepsilon(z_j)\}$, $j = 1, \dots, m$ имеет место равномерная сходимость композиций дробно линейных преобразований $R_{1,j} \circ \dots \circ R_{n,j}(w, z)$. Отсюда легко можно получить, что на каждом из множеств $K_j \times \{|w - p(z)| \ge \varepsilon\}$ имеет место равномерная сходимость композиций дробно линейных преобразований $S_1 \circ \dots \circ S_n(w, z)$. При этом предельные мероморфные функции, полученные на каждом из компактов K_j, "склеиваются"естественным образом на всем компакте K в единую мероморфную функцию. Таким образом теорема доказана.

Применим полученные результаты к получению разложений элементарных (и других) функций в правильные С-дроби

$$\cfrac{a_1 z}{1 + \cfrac{a_2 z}{1 + \dots}} \tag{97}$$

Предварительно отметим некоторые простейшие свойства таких дробей.

Далее всегда будем предполагать, что $a_n \ne 0$ при всех $n = 1, 2, \dots$. Как обычно, через $\{P_n(z)\}_{n=-1}^{\infty}$ и $\{Q_n(z)\}_{n=-1}^{\infty}$ будем обозначать решения разностного уравнения

$$X_n(z) = X_{n-1}(z) + a_n z X_{n-2}(z) \quad , \quad n = 1, 2, \dots \tag{98}$$

соответствующего непрерывной дроби 97, с начальными условиями $P_{-1}(z) = 1$, $P_0(z) = 0$ и $Q_{-1}(z) = 0$, $Q_0(z) = 1$. Другими словами, $\{P_n(z)\}_{n=-1}^{\infty}$ и $\{Q_n(z)\}_{n=-1}^{\infty}$ - это последовательности числителей и знаменателей подходящих дробей непрерывной дроби 97. Напомним также полученное на одной из первых лекций равенство

$$P_n(z)Q_{n-1}(z) - Q_n(z)P_{n-1}(z) = (-1)^{n-1} a_1 \dots a_n z^n \quad , \quad n = 1, 2, \dots \tag{99}$$

Утверждение. *$P_n(z)$ - многочлен степени не выше $[(n+1)/2]$ и нулевым коэффициентом при свободном члене. $Q_n(z)$ - многочлен степени не выше $[n/2]$ и единичным коэффициентом при свободном члене. Многочлены $P_n(z)$ и $Q_n(z)$ не имеют общих корней.*

Первая часть этого утверждения легко следует по индукции из разностного уравнения 98, а вторая часть об отсутствии общих нулей - из равенства 99.

Утверждение. *Правильной C-дроби 97 можно поставить в соответствие формальный степенной ряд* $F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ *такой, что при всех* $n = 1, 2, \ldots$ *имеют место равенства*

$$\frac{P_n(z)}{Q_n(z)} - F(z) = Az^{n+1} + \ldots \quad , \quad z \to 0 \tag{100}$$

Равенство 100 означает, что первые $(n+1)$ коэффициентов (при степенях $z^0, \ldots, z^n$) разложения n-й подходящей дроби $\frac{P_n(z)}{Q_n(z)}$ (голоморфной в точке $z = 0$, так как $Q_n(0) = 1$) в ряд Тейлора в точке $z = 0$ совпадают с коэффициентами $c_0, \ldots, c_n$ ряда $F(z)$. Чтобы доказать утверждение, разложим $\frac{P_n(z)}{Q_n(z)}$ в ряд $\frac{P_n(z)}{Q_n(z)} = \sum_{k=0}^{\infty} t_{n,k} z^k$ и положим

$$c_n = t_{n-1,n} + (-1)^{n-1} a_1 \ldots a_n \tag{101}$$

Проверим индукцией по n, что для ряда $F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ имеют место равенства 100. При $n = 1$ равенство 100 выполняется, так как

$$c_1 = t_{0,1} + a_1 = a_1 \quad \text{и} \quad \frac{P_1(z)}{Q_1(z)} = a_1 z$$

Предполагая, что равенство 100 выполняется при $n-1$, из равенства 99, равенств $Q_{n-1}(0) = Q_n(0) = 1$ и равенства 101 получаем равенство

$$\frac{P_n(z)}{Q_n(z)} - F(z) = \left(\frac{P_n(z)}{Q_n(z)} - \frac{P_{n-1}(z)}{Q_{n-1}(z)}\right) + \left(\frac{P_{n-1}(z)}{Q_{n-1}(z)} - F(z)\right) =$$

$$\frac{(-1)^{n-1} a_1 \ldots a_n z^n}{Q_{n-1}(z) Q_n(z)} + \sum_{k=n}^{\infty} (t_{n-1,k} - c_k) z^n = Az^{n+1} + \ldots$$

Отметим, что равенство 100 имеет интерпретацию в терминах аппроксимаций Паде степенного ряда.

Определение. Аппроксимацией Паде типа (n, m) степенного ряда $F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ (возможно формального) называется рациональная функция $\frac{p_{n,m}(z)}{q_{n,m}(z)}$ такая, что

$$\deg p_{n,m} \leq n \quad , \quad \deg q_{n,m} \leq m \quad , \quad q_{n,m} \neq 0 \tag{102}$$

и

$$(q_{n,m} F - p_{n,m})(z) = Az^{n+m+1} + \ldots \quad , \quad z \to 0 \tag{103}$$

Отметим некоторые простейшие свойства аппроксимаций Паде, вытекающие непосредственно из их определения.

1°. *Аппроксимации Паде существуют при всех* $n, m = 0, 1, \ldots$.

Действительно, линейная система m уравнений

$$\begin{cases} c_{n+1}t_0 + \cdots + c_{n+1-m}t_m = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ c_{n+m}t_0 + \cdots + c_n t_m = 0 \end{cases} \tag{104}$$

с $m+1$ неизвестными $t_o, \ldots, t_m$ всегда имеет ненулевое решение. Поэтому, взяв в качестве многочлена $(q_{n,m}(z)$ многочлен $t_m z^m + \cdots + t_0$, а в качестве многочлена $p_{n,m}(z)$ многочлен степени не выше n, коэффициенты которого совпадают с первыми $n+1$ коэффициентами ряда $q_{n,m}F$, получим требуемые равенства 103.

2°. *Аппроксимация Паде единственна, как рациональная функция, при всех* $n, m = 0, 1, \ldots$.

Действительно, пусть для другой рациональной функции $\frac{p^*_{n,m}}{q^*_{n,m}}$ выполняются условия 102 и 103. Тогда

$$q^*_{n,m}(q_{n,m}F - p_{n,m})(z) = A_1 z^{n+m+1} + \ldots$$

$$q_{n,m}(q^*_{n,m}F - p^*_{n,m})(z) = A_2 z^{n+m+1} + \ldots$$

Вычитая первое равенство из второго, получим равенство

$$(p_{n,m}q^*_{n,m} - p^*_{n,m}q_{n,m})(z) = A_3 z^{n+m+1} + \ldots$$

Так как в левой части полученного равенства стоит многочлен, степени не выше $n+m$, то

$$(p_{n,m}q^*_{n,m} - p^*_{n,m}q_{n,m})(z) \equiv 0$$

что совпадает с равенством $\frac{p_{n,m}}{q_{n,m}} = \frac{p^*_{n,m}}{q^*_{n,m}}$.

3°. *Аппроксимация Паде типа* (n, m) *является наилучшим локальным приближением степенного ряда* $F(z)$ *в классе всех рациональных функций* $\mathcal{R}_{n,m}$*, то есть если через* $ord(\,)$ *обозначить порядок нуля степенного ряда, стоящего внутри скобок, и предположить, что* $\min_{r\in\mathcal{R}_{n,m}} ord(r-F)$ *достигается на некоторой функции* $\frac{P}{Q} \in \mathcal{R}_{n,m}$*, то* $\frac{P}{Q} = \frac{p_{n,m}}{q_{n,m}}$.

Действительно, пусть $q_{n,m}(z) = z^d q^*_{n,m}(z)$, где d - порядок нуля многочлена $q_{n,m}(z)$. Легко видеть, что порядок нуля многочлена $p_{n,m}(z)$ не меньше d, то есть многочлен $p_{n,m}(z)$ можно записать в виде $p_{n,m}(z) = z^d p^*_{n,m}(z)$. В этом случае, разделив равенство 103 на $q_{n,m}(z)$, получим равенство

$$\Big(\frac{p^*_{n,m}}{q^*_{n,m}} - F\Big)(z) = A_1 z^{n+m+1-d} + \ldots \tag{105}$$

Предположим, что для какой-то рациональной функции $r = \frac{P}{Q} \in \mathcal{R}_{n,m}$ ее порядок касания с рядом F меньше или равен $n + m - d$, то есть

$$\big(\frac{P}{Q} - F\big)(z) = A_2 z^{n+m+1-d} + \dots$$

(где коэффициент A_2, возможно, равен нулю). Вычитая последнее равенство из равенства 105, получим равенство

$$\big(\frac{p^*_{n,m}}{q^*_{n,m}} - \frac{P}{Q}\big)(z) = A_3 z^{n+m+1-d} + \dots$$

Следовательно,

$$(p^*_{n,m}Q - q^*_{n,m}P)(z) = A_4 z^{n+m+1-d} + \dots$$

В левой части полученного равенства стоит многочлен, степени не выше $n + m - d$. Поэтому этот многочлен тождественно равен нулю. Следовательно, $\frac{p^*_{n,m}}{q^*_{n,m}} = \frac{P}{Q}$.

Отметим, что третье свойство аппроксимаций Паде можно взять за их определение, однако определение, задаваемое равенством 103 удобнее с вычислительной точки зрения, так как сводит нахождение аппроксимаций к решению линейной системы уравнений.

Понятие аппроксимации Паде можно встретить в работах Якоби и Фробениуса. Все аппроксимации Паде степенного ряда $F(z)$ можно естественным образом расположить в виде таблицы $\{\frac{p_{n,m}}{q_{n,m}}\}_{n,m=0,1,\dots}$. Впервые понятие такой таблицы ввел Фробениус в 1881 году. В 1890 году С.Эрмит поставил задачу своему ученику Г.Паде исследовать свойства и взаимосвязь элементов этой таблицы. В 1892 году Г.Паде защитил диссертацию на эту тему. С тех пор таблицы аппроксимаций стали называть таблицами Паде. Возможно это связано с тем, что к тому времени именами его великих предшественников было названо много других математических объектов и понятий.

Наиболее интересными объектами таблицы Паде являются m-я строка (m - фиксировано, $n = 0, 1, \dots$) и диагональ ($m = n = 0, 1, \dots$). Очевидно, что нулевая строка таблицы Паде - это последовательность многочленов Тейлора степенного ряда $F(z)$. К некоторым вопросам и проблемам теории аппроксимаций Паде мы вернемся позднее, а сейчас отметим, что приведенные выше утверждения о С-дробях допускают следующую переформулировку.

Утверждение. *Правильной С-дроби 97 можно поставить в соответствие степенной ряд $F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ такой, что последовательность*

$$\frac{P_0(z)}{Q_0(z)}, \frac{P_1(z)}{Q_1(z)}, \frac{P_2(z)}{Q_2(z)}, \frac{P_3(z)}{Q_3(z)}, \frac{P_4(z)}{Q_4(z)}, \dots$$

подходящих дробей C-дроби 97 совпадает с последовательностью аппроксимаций Паде

$$\frac{p_{0,0}(z)}{q_{0,0}(z)}, \frac{p_{1,0}(z)}{q_{1,0}(z)}, \frac{p_{1,1}(z)}{q_{1,1}(z)}, \frac{p_{2,1}(z)}{q_{2,1}(z)}, \frac{p_{2,2}(z)}{q_{2,2}(z)}, \dots$$

этого степенного ряда.

Утверждение. *Пусть правильная C-дробь 97 сходится к некоторой функции $f(z)$ равномерно на компактах, лежащих в некоторой области $D \ni 0$. Тогда функция $f(z)$ голоморфна в D и ее ряд Тейлора в точке $z = 0$ соответствует C-дроби 97, то есть*

$$\frac{P_n(z)}{Q_n(z)} - f(z) = Az^{n+1} + \dots$$

Действительно, голоморфность в D функции $f(z)$ следует из уже не раз использованного рассуждения об отсутствии в D полюсов подходящих дробей (в силу их равномерной сходимости к $f(z)$). Кроме того, так как

$$\frac{P_n(z)}{Q_n(z)} = \sum_{k=0}^{\infty} t_{n,k} z^k \rightrightarrows f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k z^k$$

при $|z| \le r$, где r - некоторое достаточно малое число, то $\lim_{n\to\infty} t_{n,k} = f_k$ при всех $k = 0, 1, \dots$. Но непосредственно из определения ряда $\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$, соответствующего C-дроби 97, следует, что $t_{n,k} = c_k$ при всех $n \ge k$, $k = 0, 1, \dots$. Поэтому $\lim_{n\to\infty} t_{n,k} = c_k$. Таким образом $c_k = f_k$, $k = 0, 1, \dots$.

Теорема. *Пусть $\{H_n(z)\}_{n=1,2,\dots}$ - последовательность формальных степенных рядов с единичным свободным членом такая, что*

$$H_{n-1}(z) = 1 + \frac{a_n z}{H_n(z)} \quad , \quad n = 1, 2, \dots \tag{106}$$

Тогда правильной C-дроби

$$1 + \cfrac{a_1 z}{1 + \cfrac{a_2 z}{1 + \dots}} \tag{107}$$

соответствует ряд $H_0(z)$.

Доказательство. Из равенств 106 следует цепочка равенств

$$H_0(z) = 1 + \frac{a_1 z}{H_1(z)} = 1 + \cfrac{a_1 z}{1 + \cfrac{a_2 z}{H_2(z)}} = \dots = 1 + \cfrac{a_1 z}{1 + \frac{a_2 z}{1 + \dots + \frac{a_N z}{H_N(z)}}} \tag{108}$$

Перепишем полученное равенство в следующем виде

$$H_0(z) - 1 = S_1 \circ \cdots \circ S_{N-1}\big(\frac{a_N z(z)}{H_N(z)}, z\big)$$

где $S_n(w,z) = \frac{a_n z}{w+1}$. Учитывая, что

$$S_1 \circ \cdots \circ S_{N-1}(w,z) = \frac{P_{N-2}(z)w + P_{N-1}(z)}{Q_{N-2}(z)w + Q_{N-1}(z)}$$

имеем равенство

$$H_0(z) - 1 = \frac{P_{N-2}(z)a_N z + P_{N-1}(z)H_N(z)}{Q_{N-2}(z)a_N z + Q_{N-1}(z)H_N(z)}$$

Вычитая $\frac{P_{N-1}(z)}{Q_{N-1}(z)}$ из обеих частей этого равенства и учитывая равенство 99 и равенства $Q_{N-1}(0) = 1$, $H_N(0) = 1$, получим

$$H_0(z) - 1 - \frac{P_{N-1}(z)}{Q_{N-1}(z)} = \frac{(P_{N-2}(z)Q_{N-1}(z) - Q_{N-2}(z)P_{N-1}(z))a_N z}{Q_{N-1}(z)(Q_{N-2}(z)a_N z(z) + Q_{N-1}(z)H_N(z))} =$$

$$\frac{(-1)^{N-1}a_1 \dots a_N z^N}{Q_{N-1}(z)(Q_{N-2}(z)a_N z + Q_{N-1}(z)H_N(z))} = Az^N + \dots$$

Так как полученное равенство выполняется при любом $N = 1, 2, \dots$, то тем самым теорема доказана.

Следствие 1. Пусть $\{H_n(z)\}_{n=1,2,\dots}$ - последовательность формальных степенных рядов с единичным свободным членом такая, что имеют место равенства 106 и пусть правильная С-дробь 107 сходится к некоторой функции $f(z)$ равномерно на компактах, лежащих в некоторой области $D \ni 0$. Тогда ряд $H_0(z)$ имеет ненулевой радиус сходимости, а определяемая им функция $H_0(z)$ совпадает в некоторой окрестности нуля с голоморфной в D функцией $f(z)$.

Обратим внимание, что таким образом функция $f(z)$ осуществляет голоморфное продолжение функции $H_0(z)$, голоморфной в некоторой окрестности нуля, в область D.

Следствие 2. Пусть $\{F_n(z)\}_{n=1,2,\dots}$ - последовательность формальных степенных рядов с единичным свободным членом такая, что

$$F_n(z) = F_{n+1}(z) + a_n z F_{n+2}(z) \quad , \quad n = 1, 2, \dots \tag{109}$$

Тогда правильной С-дроби 107 соответствует ряд $\frac{F_1(z)}{F_2(z)}$.

Действительно, это следует из доказанной теоремы, если равенства 109 разделить на $F_{n+1}(z)$ и положить $H_{n-1}(z) = \frac{F_n(z)}{F_{n+1}(z)}$, $n = 1, 2, \dots$.

Итак, каждой правильной С-дроби 107 можно поставить в соответствие степенной ряд $F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ такой, что при всех $n = 1, 2, \ldots$ имеют место равенства 100. Наоборот, всякому степенному ряду $F(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n$ можно поставить в соответствие общую С-дробь

$$1 + \cfrac{a_1 z^{\alpha_1}}{1 + \cfrac{a_2 z^{\alpha_2}}{1 + \ldots}} \tag{110}$$

где $a_n \neq 0$, $\alpha_n \in \mathbb{N}$ при всех $n = 1, 2, \ldots$ по следующему алгоритму: пусть c_k - первый ненулевой коэффициент в последовательности коэффициентов $c_1, c_2, \ldots$. Тогда

$$F(z) = 1 + \frac{a_1 z^{\alpha_1}}{F_1(z)}$$

где

$$a_1 = c_k \quad , \quad \alpha_1 = k \quad , \quad \frac{1}{F_1(z)} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{k+n}}{c_k} z^n$$

Повторяя это же рассуждение с рядом $F_1(z)$ и т.д., получим общую С-дробь 110. Легко видеть, что случай, когда $\alpha_j = 1$ при всех $j = 1, 2, \ldots$, является случаем общего положения. В этом случае получаемая С-дробь является правильной и по предыдущей теореме (впрочем, аналогичную теорему нетрудно доказать и для общих С-дробей) соответствует исходному степенному ряду, так как возникающие в процессе построения дроби ряды $F_n(z)$ имеют единичный свободный член и связаны между собой равенствами $F_{n-1}(z) = 1 + \frac{a_n z}{F_n(z)}$, $n = 1, 2, \ldots$.

Разложение элементарных функций в непрерывные дроби

Определение. Ряд

$$F(c; z) = 1 + \frac{1}{c}\frac{z}{1!} + \frac{1}{c(c+1)}\frac{z^2}{2!} + \frac{1}{c(c+1)(c+2)}\frac{z^3}{3!} + \ldots$$

называется вырожденным гипергеометрическим рядом. Легко видеть, что вырожденный гипергеометрический ряд $F(c; z)$ определен при $c \neq 0, -1, -2, \ldots$ и сходится во всей комплексной плоскости.

В частности,

$$F\big(\frac{1}{2}; -\frac{z^2}{4}\big) = 1 - \frac{1}{\frac{1}{2}}\frac{z^2}{4^1 1!} + \frac{1}{\frac{1}{2}\frac{3}{2}}\frac{z^4}{4^2 2!} - \frac{1}{\frac{1}{2}\frac{3}{2}\frac{5}{2}}\frac{z^6}{4^3 3!} + \cdots = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \cdots = \cos z$$

$$F\big(\frac{3}{2}; -\frac{z^2}{4}\big) = 1 - \frac{1}{\frac{3}{2}}\frac{z^2}{4^1 1!} + \frac{1}{\frac{3}{2}\frac{5}{2}}\frac{z^4}{4^2 2!} - \frac{1}{\frac{3}{2}\frac{5}{2}\frac{7}{2}}\frac{z^6}{4^3 3!} + \cdots = 1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \frac{z^6}{7!} + \cdots = \frac{\sin z}{z}$$

Из этих равенств следует, что

$$\operatorname{tg} z = z\frac{F(\frac{3}{2};-\frac{z^2}{4})}{F(\frac{1}{2};-\frac{z^2}{4})} \tag{111}$$

Утверждение. *Пусть* $c \neq 0, -1, -2, \ldots$. *Тогда*

$$F(c;z) = F(c+1;z) + \frac{1}{c(c+1)} zF(c+2;z) \tag{112}$$

Действительно, для доказательства утверждения достаточно выписать коэффициенты, стоящие при степени z^n, и убедиться в справедливости равенств

$$\frac{1}{c(c+1)\ldots(c+n-1)}\frac{1}{n!} = \frac{1}{(c+1)\ldots(c+n)}\frac{1}{n!} - \frac{1}{c(c+1)}\frac{1}{(c+2)\ldots(c+n)}\frac{1}{(n-1)!}$$

Из этого утверждения и следствий 1 и 2 теоремы получаем равенство

$$\frac{F(c;z)}{F(c+1;z)} = 1 + \cfrac{\frac{1}{c(c+1)}z}{1 + \cfrac{\frac{1}{(c+1)(c+2)}z}{1+\ldots}} \quad , \quad z \in \mathbb{C}$$

Действительно, так как коэффициенты С-дроби, стоящей в правой части этого равенства стремятся к нулю, то эта С-дробь сходится к мероморфной функции $\frac{F(c;z)}{F(c+1;z)}$ равномерно на любом компакте комплексной плоскости, не содержащем полюсов функции.

В частности, при $c = \frac{1}{2}$ имеем равенство

$$\frac{F(\frac{1}{2};-\frac{z^2}{4})}{F(\frac{3}{2};-\frac{z^2}{4})} = 1 - \cfrac{\frac{1}{\frac{1}{2}\times\frac{3}{2}}\frac{z^2}{4}}{1 - \cfrac{\frac{1}{\frac{3}{2}\times\frac{5}{2}}\frac{z^2}{4}}{1-\ldots}} = 1 - \cfrac{\frac{z^2}{1\times 3}}{1 - \cfrac{\frac{z^2}{3\times 5}}{1-\ldots}} = 1 - \cfrac{z^2}{3 - \cfrac{z^2}{5 - \cfrac{z^2}{7-\ldots}}}$$

Отсюда и равенства 111 получаем равенство

$$\operatorname{tg} z = \cfrac{z}{\frac{F(\frac{1}{2};-\frac{z^2}{4})}{F(\frac{3}{2};-\frac{z^2}{4})}} = \cfrac{z}{1 - \cfrac{z^2}{3 - \cfrac{z^2}{5 - \cfrac{z^2}{7-\ldots}}}}$$

$$\operatorname{th} z = \frac{e^z - e^{-z}}{e^z + e^{-z}} = \frac{1}{i}\operatorname{tg} iz = \frac{1}{i}\cfrac{iz}{1 + \cfrac{z^2}{3 + \cfrac{z^2}{5 + \cfrac{z^2}{7+\ldots}}}} = \cfrac{z}{1 + \cfrac{z^2}{3 + \cfrac{z^2}{5\,\cfrac{z^2}{7+\ldots}}}}$$

В частности, при $z = 1$ отсюда следует, что число $\frac{e-e^{-1}}{e+e^{-1}}$ представляется бесконечной непрерывной дробью $[0; 1, 3, 5, 7 \dots]$ и, следовательно, является иррациональным числом. Очевидно, что тогда и число e также иррационально.

Определение. Ряд

$$F(b, c; z) = 1 + \frac{b}{c}\frac{z}{1} + \frac{b(b+1)}{c(c+1)}\frac{z^2}{2!} + \frac{b(b+1)(b+2)}{c(c+1)(c+2)}\frac{z^3}{3!} + \dots$$

называется вырожденным гипергеометрическим рядом.

Легко видеть, что вырожденный гипергеометрический ряд $F(b, c; z)$ определен при $c \neq 0, -1, -2, \dots$ и сходится во всей комплексной плоскости. При $b = 0, -1, -2, \dots$ ряд $F(b, c; z)$ лишь конечное число ненулевых членов и, следовательно, является многочленом.

Утверждение. *Пусть* $c \neq 0, -1, -2, \dots$. *Тогда*

$$F(b, c; z) = F(b+1, c+1; z) - \frac{c-b}{c(c+1)} z F(b+1, c+2; z) \tag{113}$$

$$F(b+1, c+1; z) = F(b+1, c+2; z) + \frac{b+1}{(c+1)(c+2)} z F(b+2, c+3; z) \tag{114}$$

Действительно, для доказательства утверждения достаточно выписать коэффициенты, стоящие при степени z^n, и убедиться в справедливости равенств

$$\frac{b(b+1)\dots(b+n-1)}{c(c+1)\dots(c+n-1)}\frac{1}{n!} = \frac{(b+1)\dots(b+n)}{(c+1)\dots(c+n)}\frac{1}{n!} - \frac{c-b}{c(c+1)}\frac{(b+1)\dots(b+n-1)}{(c+2)\dots(c+n)}\frac{1}{(n-1)!}$$

и

$$\frac{(b+1)\dots(b+n)}{(c+1)\dots(c+n)}\frac{1}{n!} = \frac{(b+1)\dots(b+n)}{(c+2)\dots(c+n+1)}\frac{1}{n!} + \frac{(b+1)}{(c+1)(c+2)}\frac{(b+2)\dots(b+n)}{(c+3)\dots(c+n+1)}\frac{1}{(n-1)!}$$

Пусть $H(b, c; z) = \frac{F(b,c;z)}{F(b+1,c+1;z)}$. Для удобства последующих выкладок выделим следующее равенство

$$H(b, c; z) = 1 + \frac{-\frac{c-b}{c(c+1)} z}{1 + \frac{\frac{b+1}{(c+1)(c+2)} z}{H(b+1,c+2;z)}} \tag{115}$$

Равенство 115 следует из последовательного использования равенства 113, деленного на $F(b+1, c+1; z)$, и равенства 114, деленного на $F(b+1, c+2; z)$.

Из теоремы и равенства 115 следует равенство $\frac{F(b,c;z)}{F(b+1,c+1;z)} =$

$$1-\frac{\frac{c-b}{c(c+1)}z\Big|}{\Big|1}+\frac{\frac{b+1}{(c+1)(c+2)}z\Big|}{\Big|1}-\frac{\frac{c+1-b}{(c+2)(c+3)}z\Big|}{\Big|1}+\frac{\frac{b+1}{(c+3)(c+4)}z\Big|}{\Big|1}-\frac{\frac{c+2-b}{(c+4)(c+5)}z\Big|}{\Big|1}+\frac{\frac{b+2}{(c+5)(c+6)}z\Big|}{\Big|1}+\dots \tag{116}$$

Так как коэффициенты полученной C-дроби стремятся к нулю, то C-дробь сходится к функции $H(b,c;z)$ равномерно на любом компакте комплексной плоскости, не содержащем полюсов функции $H(b,c;z)$. Полагая $b=0$ в равенстве 116 и учитывая, что $F(0,c;z)=1$, получаем равенство $\frac{1}{F(1,c+1;z)} =$

$$1-\frac{\frac{c}{c(c+1)}z\Big|}{\Big|1}+\frac{\frac{1}{(c+1)(c+2)}z\Big|}{\Big|1}-\frac{\frac{c+1}{(c+2)(c+3)}z\Big|}{\Big|1}+\frac{\frac{2}{(c+3)(c+4)}z\Big|}{\Big|1}-\frac{\frac{c+2}{(c+4)(c+5)}z\Big|}{\Big|1}+\frac{\frac{3}{(c+5)(c+6)}z\Big|}{\Big|1}+\dots$$

Заменяя полученную C-дробь ей эквивалентной, последнее равенство можно переписать в виде

$$\frac{1}{F(1,c+1;z)} = 1-\frac{z\Big|}{\Big|c+1}+\frac{z\Big|}{\Big|c+2}-\frac{(c+1)z\Big|}{\Big|c+3}+\frac{2z\Big|}{\Big|c+4}-\frac{(c+2)z\Big|}{\Big|c+5}+\frac{3z\Big|}{\Big|c+6}+\dots$$

Заменив число $c+1$ в полученном равенстве на число c и заменив дроби в левой и правой частях равенства на им обратные, получим следующее утверждение.

Утверждение. *Пусть $c \neq 0, -1, -2, \dots$. Тогда*

$$F(1,c;z) = \frac{1\Big|}{\Big|1} - \frac{z\Big|}{\Big|c} + \frac{z\Big|}{\Big|c+1} - \frac{cz\Big|}{\Big|c+2} + \frac{2z\Big|}{\Big|c+3} - \frac{(c+1)z\Big|}{\Big|c+4} + \frac{3z\Big|}{\Big|c+5} + \dots$$

При этом C-дробь сходится к целой функции $F(1,c;z)$ равномерно на любом компакте комплексной плоскости.

Пример.

$$e^z = F(1,1;z) = \frac{1\Big|}{\Big|1}-\frac{z\Big|}{\Big|1}+\frac{z\Big|}{\Big|2}-\frac{z\Big|}{\Big|3}+\frac{2z\Big|}{\Big|4}-\frac{2z\Big|}{\Big|5}+\frac{3z\Big|}{\Big|6}+\cdots = \frac{1\Big|}{\Big|1}-\frac{z\Big|}{\Big|1}+\frac{z\Big|}{\Big|2}-\frac{z\Big|}{\Big|3}+\frac{z\Big|}{\Big|2}-\frac{z\Big|}{\Big|5}+\frac{z\Big|}{\Big|3}+\dots$$

Отметим также и равенство

$$e^z = \frac{1}{e^{-z}} = 1 + \frac{z\Big|}{\Big|1} - \frac{z\Big|}{\Big|2} + \frac{z\Big|}{\Big|3} - \frac{z\Big|}{\Big|2} + \frac{z\Big|}{\Big|5} - \frac{z\Big|}{\Big|2} + \frac{z\Big|}{\Big|7} + \dots$$

Определение. Ряд

$$F(a,b,c;z) = 1+\frac{ab}{c}\frac{z}{1}+\frac{a(a+1)b(b+1)}{c(c+1)}\frac{z^2}{2!}+\frac{a(a+1)(a+2)b(b+1)(b+2)}{c(c+1)(c+2)}\frac{z^3}{3!}+\dots$$

называется гипергеометрическим рядом.

Легко видеть, что гипергеометрический ряд $F(a,b,c;z)$ определен при $c \neq 0,-1,-2,\dots$. Если a или b совпадают с одним из чисел $0,-1,-2,\dots$, то $F(a,b,c;z)$ - это многочлен. В противном случае радиус сходимости гипергеометрического ряда равен 1 (например, по признаку Даламбера), а функция $F(a,b,c;z)$ называется гипергеометрической функцией.

Утверждение. *Пусть* $c \neq 0,-1,-2,\dots$. *Тогда*

$$F(a,b,c;z) = F(a,b+1,c+1;z) - \frac{a(c-b)}{c(c+1)}zF(a+1,b+1,c+2;z) \quad (117)$$

Действительно, для доказательства утверждения достаточно выписать коэффициенты, стоящие при степени z^n, и убедиться в справедливости равенства

$$\frac{a(a+1)\dots(a+n-1)b(b+1)\dots(b+n-1)}{c(c+1)\dots(c+n-1)}\frac{1}{n!} =$$

$$\frac{a(a+1)\dots(a+n-1)(b+1)\dots(b+n)}{(c+1)\dots(c+n)}\frac{1}{n!} -$$

$$\frac{a(c-b)}{c(c+1)}\frac{(a+1)\dots(a+n-1)(b+1)\dots(b+n-1)}{(c+2)\dots(c+n)}\frac{1}{(n-1)!}$$

Далее будем предполагать, что $a,b,c,c-a,c-b \neq 0,-1,-2,\dots$. Так как числа a и b входят в определение гипергеометрического ряда симметричным образом, то из равенства 117 получаем также и равенство

$$F(a,b+1,c+1;z) = F(b+1,a+1,c+2;z) - \frac{(b+1)(c+1-a)}{(c+1)(c+2)}zF(b+2,a+1,c+3;z)$$

Следовательно,

$$\frac{F(a,b,c;z)}{F(a,b+1,c+1;z)} = 1 - \frac{\frac{a(c-b)}{c(c+1)}z|}{|1} - \frac{\frac{(b+1)(c+1-a)}{(c+1)(c+2)}z|}{|1} - \frac{\frac{(a+1)(c+1-b)}{(c+2)(c+3)}z|}{|1} - \frac{\frac{(b+2)(c+2-a)}{(c+3)(c+4)}z|}{|1} - \dots \quad (118)$$

Легко видеть, что коэффициенты $a_1, a_2 \dots$ C-дроби, стоящей в правой части равенства 118, вычисляются по формулам

$$a_{2n+1} = -\frac{(a+n)(c+n-b)}{(c+2n)(c+2n+1)} \quad , \quad n = 0,1,\dots$$

$$a_{2n} = -\frac{(b+n)(c+n-a)}{(c+2n-1)(c+2n)} \quad , \quad n = 1, 2, \dots$$

Следовательно, $\lim_{n\to\infty} a_n = -\frac{1}{4}$. Поэтому по теореме Ван Флека C-дробь, стоящая в правой части равенства 118, сходится во всей комплексной плоскости с разрезом по лучу $[1, \infty]$ к мероморфной функции, совпадающей в круге $\{|z| < 1\}$ с функцией $\frac{F(a,b,c;z)}{F(a,b+1,c+1;z)}$. При этом сходимость равномерна на компактах, лежащих в $\mathbb{C} \setminus [1, \infty]$ и не содержащих полюсов предельной функции.

Пример 1. $a = 1/2$, $b = 0$, $c = 1/2$. В этом случае имеем

$$a_{2n+1} = -\frac{(n+\frac{1}{2})^2}{(2n+\frac{1}{2})(2n+\frac{3}{2})} = -\frac{(2n+1)^2}{(4n+1)(4n+3)} \quad , \quad n = 0, 1, \dots$$

$$a_{2n} = -\frac{n^2}{(2n-\frac{1}{2})(2n+\frac{1}{2})} = -\frac{(2n)^2}{(4n-1)(4n+1)} \quad , \quad n = 1, 2, \dots$$

$$\frac{F(1/2, 0, 1/2; z)}{F(1/2, 1, 3/2; z)} = \frac{1}{F(1/2, 1, 3/2; z)} =$$

$$1 - \frac{\frac{1^2}{1\times 3}z|}{|1} - \frac{\frac{2^2}{3\times 5}z|}{|1} - \frac{\frac{3^2}{5\times 7}z|}{|1} - \frac{\frac{4^2}{7\times 9}z|}{|1} - \dots = 1 - \frac{1^2 z|}{|3} - \frac{2^2 z|}{|5} - \frac{3^2 z|}{|7} - \frac{4^2 z|}{|9} - \dots$$

Так как

$$F(1/2, 1, 3/2; z) = 1 + \frac{\frac{1}{2}\times 1}{\frac{3}{2}}\frac{z}{1!} + \frac{\frac{1}{2}\times\frac{3}{2}\times 2!}{\frac{3}{2}\times\frac{5}{2}}\frac{z^2}{2!} + \frac{\frac{1}{2}\times\frac{3}{2}\times\frac{5}{2}\times 2!}{\frac{3}{2}\times\frac{5}{2}\times\frac{7}{2}}\frac{z^3}{3!} + \dots =$$

$$1 + \frac{z}{3} + \frac{z^2}{5} + \frac{z^3}{7} + \dots + \frac{z^n}{(2n+1)} + \dots$$

то полученное равенство можно переписать в следующем виде

$$1 + \frac{z}{3} + \frac{z^2}{5} + \frac{z^3}{7} + \dots = \frac{1|}{|1} - \frac{1^2 z|}{|3} - \frac{2^2 z|}{|5} - \frac{3^2 z|}{|7} - \frac{4^2 z|}{|9} - \dots$$

C-дробь, стоящая в правой части этого равенства, сходится в $\mathbb{C} \setminus [1, \infty]$. Заменяя в этом равенстве z на $-z^2$, получим

$$1 - \frac{z^2}{3} + \frac{z^4}{5} - \frac{z^6}{7} + \dots = \frac{1|}{|1} + \frac{1^2 z^2|}{|3} + \frac{2^2 z^2|}{|5} + \frac{3^2 z^2|}{|7} + \frac{4^2 z^2|}{|9} + \dots$$

Умножая обе части этого равенства на z, получим равенство

$$\operatorname{arctg} z = z - \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} - \frac{z^7}{7} + \dots = \frac{z|}{|1} + \frac{1^2 z^2|}{|3} + \frac{2^2 z^2|}{|5} + \frac{3^2 z^2|}{|7} + \frac{4^2 z^2|}{|9} + \dots$$

Заметим, что если ряд для $\operatorname{arctg} z$ сходится только в единичном круге, то полученная непрерывная дробь для $\operatorname{arctg} z$ сходится во всей комплексной плоскости с разрезами вдоль мнимой оси от точки i до точки ∞ и от точки $-i$ до точки $-\infty$.

В частности, при $z = 1$ имеем

$$\frac{\pi}{4} = \operatorname{arctg} 1 = \frac{1|}{|1} + \frac{1^2|}{|3} + \frac{2^2|}{|5} + \frac{3^2|}{|7} + \frac{4^2|}{|9} + \dots$$

Обратим внимание, что для вычисления числа $\frac{\pi}{4}$ с точностью до 10^{-7} достаточно взять девятую подходящую дробь полученного разложения в то время, как для вычисления $\frac{\pi}{4}$ с той же точностью при помощи ряда требуется примерно $\frac{10^{-7}}{2}$ членов ряда (ошибка не превосходит первого отброшенного члена знакочередующегося ряда).

Пример 2. $a = 1$, $b = 0$, $c = 1$. В этом случае имеем

$$a_{2n+1} = -\frac{(n+1)^2}{(2n+1)(2n+2)} = \quad , \quad n = 0, 1, \dots$$

$$a_{2n} = -\frac{n^2}{2n(2n+1)} = \quad , \quad n = 1, 2, \dots$$

$$\frac{F(1,0,1;z)}{F(1,1,2;z)} = \frac{1}{F(1,1,2;z)} = \frac{1}{1 + \frac{1!1!}{2!}\frac{z}{1!} + \frac{2!2!}{3!}\frac{z^2}{2!} + \dots} = \frac{1}{1 + \frac{z}{2} + \frac{z^2}{3} + \dots}$$

$$1 - \frac{\frac{1^2}{1\times 2}z|}{|1} - \frac{\frac{1^2}{2\times 3}z|}{|1} - \frac{\frac{2^2}{3\times 4}z|}{|1} - \frac{\frac{2^2}{4\times 5}z|}{|1} - \dots = 1 - \frac{1^2 z|}{|2} - \frac{1^2 z|}{|3} - \frac{2^2 z|}{|4} - \frac{2^2 z|}{|5} - \dots$$

Меняя в полученном равенстве z на $-z$ и замечая, что

$$\frac{1}{1 - \frac{z}{2} + \frac{z^2}{3} - \dots} = \frac{z}{\ln(1+z)}$$

получаем равенство

$$\ln(1+z) = \frac{z|}{|1} + \frac{1^2 z|}{|2} + \frac{1^2 z|}{|3} + \frac{2^2 z|}{|4} + \frac{2^2 z|}{|5} + \dots$$

Полученная непрерывная дробь для $\ln(1+z)$ сходится во всей комплексной плоскости с разрезом вдоль вещественной оси от точки -1 до точки $-\infty$.

Определение. Ряд

$$\Phi(a,b;z) = 1+ab\frac{z}{1}+a(a+1)b(b+1)\frac{z^2}{2!}+a(a+1)(a+2)b(b+1)(b+2)\frac{z^3}{3!}+\dots$$

называется вырожденным гипергеометрическим рядом.

Легко видеть, что если a или b совпадают с одним из чисел $0, -1, -2, \dots$, то вырожденный гипергеометрический ряд $\Phi(a,b;z)$ - это многочлен. В противном случае этот ряд является формальным рядом (то есть радиус сходимости этого ряда равен нулю).

Утверждение. *Пусть* $a, b \neq 0, -1, -2, \dots$. *Тогда*

$$\Phi(a,b;z) = \Phi(a,b+1;z) - az\Phi(a+1,b+1;z) \tag{119}$$

Действительно, для доказательства утверждения достаточно выписать коэффициенты, стоящие при степени z^n, и убедиться в справедливости равенства

$$a(a+1)\dots(a+n-1)b(b+1)\dots(b+n-1)\frac{1}{n!} =$$

$$a(a+1)\dots(a+n-1)(b+1)\dots(b+n)\frac{1}{n!} -$$

$$a(a+1)\dots(a+n-1)(b+1)\dots(b+n-1)\frac{1}{(n-1)!}$$

Так как числа a и b входят в определение ряда $\Phi(a,b;z)$ симметричным образом, то из равенства 119 следует также и равенство

$$\Phi(a,b+1;z) = \Phi(a+1,b+1;z) - (b+1)z\Phi(a+1,b+2;z)$$

Поэтому ряду $\frac{\Phi(a,b;z)}{\Phi(a,b+1;z)}$ соответствует непрерывная дробь

$$1 - \frac{az|}{|1} - \frac{(b+1)z|}{|1} - \frac{(a+1)z|}{|1} - \frac{(b+2)z|}{|1} - \frac{(a+2)z|}{|1} - \frac{(b+3)z|}{|1} - \dots$$

Из критерия Зейделя сходимости непрерывных дробей с положительными коэффициентами следует (после эквивалентного преобразования дроби), что полученная непрерывная дробь сходится при отрицательных z. Более того, можно показать, что полученная непрерывная дробь сходится во всей комплексной плоскости с разрезом по положительной полуоси.

При $b = 0$ имеем

$$\frac{1}{\Phi(a,1;z)} \sim 1 - \frac{az|}{|1} - \frac{z|}{|1} - \frac{(a+1)z|}{|1} - \frac{2z|}{|1} - \frac{(a+2)z|}{|1} - \frac{3z|}{|1} - \dots$$

При $a = 1$ полученное соответствие имеет следующий вид

$$\Phi(1,1;z) = 1+z+2!z^2+3!z^3+\cdots \sim \frac{1|}{|1} - \frac{z|}{|1} - \frac{z|}{|1} - \frac{2z|}{|1} - \frac{2z|}{|1} - \frac{3z|}{|1} - \frac{3z|}{|1} - \dots$$

Можно показать, что при всех $z \in \mathbb{C} \setminus [0, -\infty]$ последняя непрерывная дробь сходится к функции $\int_0^\infty \frac{e^{-t}}{1-zt} dt$. Таким образом разложение ряда в непрерывную дробь является одним из методов суммирования расходящихся рядов.

Некоторые вопросы сходимости аппроксимаций Паде.

Как уже отмечалось, непрерывные дроби различных типов, в частности, правильные C-дроби тесно связаны с понятием аппроксимации Паде. Аппроксимации Паде с успехом применялись и продолжают применяться в теории чисел, в теории разностных уравнений и ортогональных многочленов, в квадратурных формулах, в проблеме моментов и т.д. Но очень широкую известность и распространение аппроксимации Паде получили в 1960-1970 годы по той причине, что аппроксимации Паде позволяют решать очень важную в физических приложениях задачу о локализации особенностей функции по коэффициентам ряда Тейлора этой функции. Так, например, сам ряд Тейлора не позволяет сказать практически ничего о поведении функции за пределами круга сходимости, в то время как после соответствующей обработки коэффициентов удается ответить на многие из возникающих вопросов. Естественно, возможность таких ответов требует строгого математического обоснования.

Теория сходимости аппроксимаций Паде достаточно сложна. Наиболее интересные вопросы связаны со сходимостью строк и диагонали таблицы Паде. Более подробно мы остановимся на вопросах сходимости диагонали (из-за их тесной связи с подходящими дробями непрерывных дробей). Как было показано, имеются примеры степенных рядов, с нулевым радиусом сходимости, для которых подходящие дроби соответствующей ряду C-дроби (а следовательно, и диагональ таблицы аппроксимаций Паде ряда) сходятся при $n \to \infty$ к функции, голоморфной во всей комплексной плоскости с разрезом по некоторому лучу, соединяющему точки 0 и ∞. С другой стороны имеются примеры целых функций, для которых диагональные аппроксимации Паде не сходятся при любых $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Следует отметить, что примеры, в которых нет равномерной сходимости аппроксимаций Паде, достаточно легко строятся по следующей причине: равномерная сходимость в некоторой области невозможна, если аппроксимации имеют полюсы в этой области, а радиус сходимости степенного ряда $F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ задается формулой $R = \overline{\lim}_{n\to\infty} |c_n|^{1/n}$, не являю-

щейся сильным сдерживающим фактором в построении аппроксимаций, полюсы которых время от времени могут находиться где-угодно.

Таким образом равномерной сходимости диагональных аппроксимаций Паде для *произвольной* голоморфной функции нет. Для того, чтобы такая сходимость имелась, необходимы те или иные дополнительные условия на функцию. Вместе с тем было замечено, что для *произвольного* степенного ряда F практически всегда удается выделить такую подпоследовательность $\Lambda = \Lambda(F)$ натуральных чисел, на которой диагональные аппроксимации Паде не имеют полюсов в круге сходимости ряда. Это позволило Бейкеру, Гаммелю и Уиллсу выдвинуть в 1961 году следующую гипотезу.

Гипотеза (Бейкер–Гаммель–Уиллс). *Пусть функция f голоморфна в некоторой окрестности точки $z = 0$ и мероморфна в единичном круге $D = \{|z| < 1\}$. Тогда найдется бесконечная подпоследовательность $\Lambda = \Lambda(f)$ натуральных чисел такая, что $[n/n]_f \to f$ при $n \to \infty$, $n \in \Lambda$, равномерно на компактах, лежащих в D и не содержащих полюсов f.*

Здесь и всюду в дальнейшем через $[n/m]_f$ будем обозначать аппроксимацию Паде типа (n, m) функции f. Некоторые недостаточно четко сформулированные высказывания, близкие к гипотезе Бейкера–Гаммеля–Уиллса, можно найти уже в работах Паде, опубликованных им в конце 19–начале 20 столетия. Впоследствии гипотеза Бейкера–Гаммеля–Уиллса приобрела широкую известность под названием Паде-гипотезы (Pade conjecture).

Отметим, что гипотеза Бейкера–Гаммеля–Уиллса сформулирована для общего класса мероморфных в D функций. Вместе с тем вполне содержательные (и более достоверные) варианты Паде-гипотезы могут быть получены, если ограничиться более узкими классами функций. Наиболее естественным и также имеющим принципиальное значение является голоморфный вариант Паде-гипотезы, в котором гипотеза формулируется в классе голоморфных в D функций. В течение 40 лет вплоть до 2001 года Паде-гипотезу ни в ее общей постановке, ни ее голоморфный вариант не удавалось ни доказать, ни опровергнуть. Результаты положительного характера были получены за этот период времени только лишь для некоторых специальных классов функций.

В 1997 году Г. Шталь высказал два специальных варианта Паде-гипотезы. В одном из этих вариантов на функцию f накладывается дополнительное условие ее алгебраичности, а во втором – еще более сильное условие ее гиперэллиптичности. Напомним, что *гиперэллиптической* называется алгебраическая функция вида $f(z) = r_1(z) + r_2(z)\sqrt{h(z)}$,

где h – многочлен (с простыми нулями), r_1, r_2 – рациональные функции. Приведем здесь формулировку второй (более специализированной и, следовательно, более достоверной) из гипотез Шталя.

Гипотеза (Шталь). *Пусть функция f гиперэллиптична и мероморфна в единичном круге $D = \{|z| < 1\}$. Тогда найдется бесконечная подпоследовательность $\Lambda = \Lambda(f)$ натуральных чисел такая, что $[n/n]_f \to f$ при $n \to \infty$, $n \in \Lambda$, равномерно на компактах, лежащих в D и не содержащих полюсов f.*

Заметим, что Г. Шталь, высказывая свои гипотезы, имел серьезные аргументы в их поддержку. Один из веских аргументов в пользу гипотез – это доказанная Г. Шталем в 1995 году теорема о сходимости по (логарифмической) емкости диагональных аппроксимаций Паде алгебраических функций. Еще более веский аргумент заключается в том, что вышеприведенная гипотеза доказана Г. Шталем в 1996 году в ситуации "общего положения" и при некотором дополнительном условии на нули и полюсы рациональных функций r_1 и r_2.

В 2001 году Д. Любински показал, что мероморфная функция $H_q(z)$, задаваемая непрерывной дробью Роджерса–Рамануджана

$$1 + \cfrac{qz}{1 + \cfrac{q^2 z}{1 + \dots}} \tag{120}$$

при $q = \exp\left(\dfrac{4\pi i}{99 + \sqrt{5}}\right)$ опровергает Паде-гипотезу. Пример основан на свойствах непрерывной дроби 120, которая впервые была исследована независимо друг от друга Роджерсом и Рамануджаном в двадцатых годах прошлого столетия. К изучению свойств непрерывной дроби Роджерса–Рамануджана мы сейчас и приступим.

Следуя Роджерсу и Рамануджану, при всех q, не совпадающих с корнями из единицы, введем функцию Роджерса–Рамануджана

$$G_q(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{n^2}}{(q)_n} z^n \quad \text{, где} \quad (q)_0 = 1\,,\ (q)_n = (1-q)\dots(1-q^n) \tag{121}$$

Радиус сходимости ряда, определяющего функцию G_q, равен бесконечности, если $|q| < 1$, равен нулю, если $|q| > 1$, и, как мы увидим ниже, может принимать любое значение из интервала $[0, 1]$, если $|q| = 1$. Функция $G_q(z)$, определенная равенством 121, называется функцией Роджерса–Рамануджана и удовлетворяет следующему функциональному уравнению

$$G_q(z) = G_q(qz) + qzG_q(q^2 z) \tag{122}$$

Чтобы убедиться в справедливости равенства 122, достаточно проверить совпадение коэффициентов при z^n в обеих частях равенства, а именно,

$$\frac{q^{n^2}}{(q)_n} = \frac{q^{n^2}}{(q)_n} q^n + q \frac{q^{(n-1)^2}}{(q)_{n-1}} q^{2(n-1)}$$

Полагая

$$H_q(z) = \frac{G_q(z)}{G_q(qz)} \tag{123}$$

из функционального равенства 122 получаем функциональное равенство

$$H_q(z) = 1 + \frac{qz}{H_q(qz)} \tag{124}$$

из которого следует, что при всех q, не совпадающих с корнями из единицы

$$H_q(z) \sim 1 + \cfrac{qz}{1 + \cfrac{q^2 z}{1 + \ldots}}$$

Из критерия Ворпицкого следует, что непрерывная дробь 120 Роджерса–Рамануджана сходится при всех $|q| < 1$ и всех $z \in \mathbb{C}$, а также при $|q| = 1$ и всех $|z| \le 1/4$. Разложение в нуле в ряд Тейлора предельной функции совпадает с рядом $H_q(z)$.

Прямое доказательство сходимости непрерывной дроби 120 к функции H_q при $|q| < 1$ было дано в 1972 году М.Хиршхорном, который сумел найти явные формулы для числителя $P_{q,n}(z)$ и знаменателя $Q_{q,n}(z)$ n-й подходящей дроби непрерывной дроби Роджерса–Рамануджана

$$P_{q,n}(z) = \sum_{k=0}^{[(n+1)/2]} z^k q^{k^2} \frac{(q)_{n+1-k}}{(q)_k (q)_{n+1-2k}} \quad , \quad Q_{q,n}(z) = P_{q,n-1}(qz) \tag{125}$$

В справедливости формул 125 можно убедиться индукцией по числу n, используя рекуррентные соотношения

$$P_{q,n}(z) = P_{q,n-1}(z) + q^n z P_{q,n-2}(z) \quad , \quad Q_{q,n}(z) = Q_{q,n-1}(z) + q^n z Q_{q,n-2}(z)$$

Очевидно, что при $|q| < 1$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(q)_{n+1-k}}{(q)_{n+1-2k}} = \lim_{n\to\infty} (1 - q^{n+2-2k}) \ldots (1 - q^{n+1-k}) = 1$$

и следовательно,

$$\lim_{n\to\infty} P_{q,n}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k q^{k^2} \frac{1}{(q)_k} = G_q(z) \quad , \quad \lim_{n\to\infty} Q_{q,n}(z) = G_q(qz)$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{P_{q,n}(z)}{Q_{q,n}(z)} = H_q(z) \quad \text{при} \quad |q|<1$$

Наиболее интересные эффекты сходимости непрерывной дроби Роджерса–Рамануджана возникают в случае $|q|=1$. Исследуем сначала вопрос о радиусе R_q голоморфности функции Роджерса–Рамануджана. При $|q|=1$ непосредственно из определения 121 функции Роджерса–Рамануджана и формулы Коши-Адамара следует, что $R_q = \underline{\lim}_{n\to\infty}|(q)_n|^{1/n}$.

Утверждение (Харди и Литтлвуд). *При всех $q=\exp(2\pi i\tau)$, где τ иррациональное число, имеет место равенство*

$$R_q = \underline{\lim}_{n\to\infty}|1-q^n|^{1/n} \tag{126}$$

Доказательство основано на тождестве

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{(1-q)\dots(1-q^n)} = \exp\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n(1-q^n)}\right)$$

Возможно, это тождество было известно и до Харди и Литтлвуда. Харди и Литтлвуд заметили, что радиусы сходимости рядов, стоящих в правой и левой частях тождества, равны между собой. Поэтому требуемое равенство следует из формулы Коши-Адамара.

Утверждение (Любински).

1°. *$R_q=1$ при почти всех $|q|=1$.*

2°. *Для всякого $\alpha\in[0,1]$ существует q такое, что $|q|=1$ и $R_q=\alpha$.*

Доказательство. Пусть $q=\exp(2\pi i\tau)$. Так как

$$|1-q^n| = |1-\exp(2\pi i n\tau)| = 2|\sin\pi n\tau| = 2|\sin\pi(n\tau-m)|$$

где m - произвольное целое число, то равенство 126 можно переписать в виде равенства

$$R_q = \underline{\lim}_{n\to\infty}\|n\tau\|^{1/n} \tag{127}$$

где $\|n\tau\|^{1/n}$ - расстояние от $n\tau$ до ближайшего целого числа.

Не теряя в общности, можно считать, что $\tau\in(0,1)$. Разложим иррациональное число $\tau\in(0,1)$ в бесконечную непрерывную дробь

$$\tau = \cfrac{1}{b_1+\cfrac{1}{b_2+\dots}} \quad , \quad b_1,b_2,\dots\in\mathbb{N} \tag{128}$$

В дальнейшем доказательстве выделим (хорошо известные) самостоятельные утверждения о приближении иррационального числа τ подходящими дробями $\frac{P_n}{Q_n}$ непрерывной дроби 128.

Лемма (1).

$$\frac{1}{Q_n(Q_n+Q_{n+1})} < \left|\tau - \frac{P_n}{Q_n}\right| < \frac{1}{Q_nQ_{n+1}}$$

Действительно, ранее было показано, что имеют место неравенства

$$0 = \frac{P_0}{Q_0} < \frac{P_2}{Q_2} < \frac{P_4}{Q_4} < \cdots < \tau < \cdots < \frac{P_3}{Q_3} < \frac{P_1}{Q_1} = \frac{1}{b_1} \tag{129}$$

Поэтому при всех $n = 0, 1, \ldots$ имеют место включения

$$\tau \in \left(\frac{P_n}{Q_n}, \frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}}\right) \quad \text{и} \quad \frac{P_{n+2}}{Q_{n+2}} \in \left(\tau, \frac{P_n}{Q_n}\right)$$

Отсюда следует неравенство

$$\left|\tau - \frac{P_n}{Q_n}\right| < \left|\frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}} - \frac{P_n}{Q_n}\right| = \frac{1}{Q_nQ_{n+1}}$$

и (с учетом равенства $P_{n+2}Q_n - Q_{n+2}P_n = (-1)^n b_n$) неравенство

$$\left|\tau - \frac{P_n}{Q_n}\right| > \left|\frac{P_{n+2}}{Q_{n+2}} - \frac{P_n}{Q_n}\right| = \frac{b_{n+2}}{Q_nQ_{n+2}} = \frac{b_{n+2}}{Q_n(b_{n+2}Q_{n+1}+Q_n)} \geq \frac{1}{Q_n(Q_n+Q_{n+1})}$$

Лемма (2). *Пусть*

$$\left|\tau - \frac{m}{n}\right| < \frac{1}{2n^2} \tag{130}$$

Тогда дробь $\frac{m}{n}$ является наилучшим приближением (второго рода) числа τ.

По определению дробь $\frac{m}{n}$ является наилучшим приближением (второго рода) числа τ, если неравенства

$$|q\tau - p| \leq |n\tau - m| \quad \text{и} \quad q \leq n \tag{131}$$

влекут за собой равенство $\frac{p}{q} = \frac{m}{n}$.

Доказательство. Предполагая противное, а именно, что при $\frac{p}{q} \neq \frac{m}{n}$ имеют место неравенства 131 и учитывая неравенство 130, напишем цепочку неравенств

$$\frac{1}{qn} \leq \left|\frac{p}{q} - \frac{m}{n}\right| \leq \left|\tau - \frac{p}{q}\right| + \left|\tau - \frac{m}{n}\right| = \frac{1}{q}|q\tau - p| + \frac{1}{n}|n\tau - m| < \left(\frac{1}{q} + \frac{1}{n}\right)\frac{1}{2n} = \frac{q+n}{2qn^2}$$

Отсюда получаем неравенство $2n < q + n$, которое противоречит неравенству $q \leq n$. Полученное противоречие показывает, что $\frac{p}{q} = \frac{m}{n}$.

Лемма (3). *Всякое наилучшее приближение (второго рода) числа τ совпадает с некоторой подходящей дробью числа τ.*

Предположим противное. Тогда из неравенств 129 следует, что возможен один из трех случаев - либо $\frac{m}{n} < 0$, либо $\frac{m}{n} > \frac{P_1}{Q_1}$, либо $\frac{m}{n} \in (\frac{P_{s-1}}{Q_{s-1}}, \frac{P_{s+1}}{Q_{s+1}})$ при некотором $s = 1, 2, \ldots$.

Первый случай невозможен, так как в этом случае

$$|n\tau - m| = |n\tau| + |m| > \tau = |1 \cdot \tau - 0|$$

Второй случай невозможен, так как в этом случае $\frac{m}{n} > \frac{P_1}{Q_1} = \frac{1}{b_1} > \tau$ и, следовательно,

$$|n\tau - m| = n\Big|\tau - \frac{m}{n}\Big| > n\left|\frac{P_1}{Q_1} - \frac{m}{n}\right| = \frac{|P_1 n - Q_1 m|}{Q_1} \geq \frac{1}{Q_1} = \frac{1}{b_1} > |1 \cdot \tau - 0|$$

Чтобы показать, что третий случай также невозможен, предположим для определенности, что s - четное число. В этом случае из неравенств 129 следуют неравенства

$$\frac{P_s}{Q_s} \leq \tau < \frac{P_{s+1}}{Q_{s+1}} < \frac{m}{n} < \frac{P_{s-1}}{Q_{s-1}}$$

Отсюда по лемме 1 получаем неравенство

$$|n\tau - m| = n\Big|\tau - \frac{m}{n}\Big| \geq n\left|\frac{P_{s+1}}{Q_{s+1}} - \frac{m}{n}\right| = \frac{|nP_{s+1} - mQ_{s+1}|}{Q_{s+1}} \geq \frac{1}{Q_{s+1}} > |Q_s\tau - P_s|$$

При этом $Q_s < n$, так как

$$\frac{1}{Q_s Q_{s-1}} = \left|\frac{P_s}{Q_s} - \frac{P_{s-1}}{Q_{s-1}}\right| > \left|\frac{m}{n} - \frac{P_{s-1}}{Q_{s-1}}\right| \geq \frac{1}{nQ_{s-1}}$$

Таким образом и в этом случае дробь $\frac{m}{n}$ не является наилучшим приближением (второго рода) числа τ.

Полученное противоречие показывает, что дробь $\frac{m}{n}$ совпадает с некоторой подходящей дробью $\frac{P_s}{Q_s}$ числа τ.

Следствие лемм 2 и 3.

Пусть $\left|\tau - \frac{m}{n}\right| < \frac{1}{2n^2}$. Тогда дробь $\frac{m}{n}$ совпадает с некоторой подходящей дробью числа τ.

Обратной по отношению к лемме 3 является следующая лемма.

Лемма (4). *Всякая подходящая дробь иррационального числа τ является наилучшим приближением (второго рода) числа τ.*

(Заметим, что незначительным дополнением нижеприводимого доказательства можно показать, что утверждение леммы верно и для рациональных τ, за единственным тривиальным исключением полуцелого τ.)

Доказательство. Фиксируем некоторую подходящая дробь $\frac{P_n}{Q_n}$ числа τ и пусть $\frac{m_0}{k_0}$ - дробь, на которой достигается минимум $|k\tau - m|$, взятый по всем $k = 1, 2, \ldots, Q_n$, $m \in \mathbb{Z}$. Если этот минимум достигается на нескольких k, то выбираем наименьшее из них. Заметим, что число m_0 выбирается при этом однозначным образом, так как если $|k_0\tau - m_0| = |k_0\tau - m_0^*|$, то $k_0\tau - m_0 = \pm(k_0\tau - m_0^*)$ и, следовательно, либо $m_0 = m_0^*$, либо $\tau = \frac{m_0+m_0^*}{2k_0}$, что противоречит иррациональности числа τ. Очевидно, что по построению дробь $\frac{m_0}{k_0}$ несократима и является наилучшим приближением (второго рода) числа τ. Поэтому по лемме 3 дробь $\frac{m_0}{k_0}$ совпадает с некоторой подходящей дробью $\frac{P_s}{Q_s}$ числа τ. Так как по построению $k_0 \leq Q_n$, то $s \leq n$. Покажем, что $s = n$. Предполагая противное, а именно, что $s \leq n-1$, по лемме 1 получим неравенство

$$\frac{1}{Q_{n-1} + Q_n} \leq \frac{1}{Q_s + Q_{s+1}} < |Q_s\tau - P_s| = |k_0\tau - m_0| \leq |Q_n\tau - P_n| < \frac{1}{Q_{n+1}}$$

что противоречит неравенству $Q_{n+1} \geq Q_n + Q_{n-1}$. Таким образом $s = n$, то есть $\frac{m_0}{k_0} = \frac{P_n}{Q_n}$ и, следовательно, подходящая дробь $\frac{P_n}{Q_n}$ является наилучшим приближением (второго рода) числа τ.

Следствие.

$$\|Q_n\tau\| = |Q_n\tau - P_n| \tag{132}$$

Действительно, очевидно, что

$$|Q_n\tau - P_n| \geq \min_{m\in\mathbb{Z}} |Q_n\tau - m| = \|Q_n\tau\|$$

С другой стороны, по лемме 4

$$|Q_n\tau - P_n| = \min_{k=1,\ldots,Q_n;\, m\in\mathbb{Z}} |k\tau - m| \leq \min_{m\in\mathbb{Z}} |Q_n\tau - m| = \|Q_n\tau\|$$

Лемма (5).

$$\underline{\lim}_{n\to\infty} \|n\tau\|^{1/n} = \underline{\lim}_{n\to\infty} \|Q_n\tau\|^{\frac{1}{Q_n}} \tag{133}$$

Пусть Λ - подпоследовательность натуральных чисел, состоящая из знаменателей $Q_1, Q_2, \ldots$ подходящих дробей непрерывной дроби 128 и пусть Γ - подпоследовательность натуральных чисел такая, что

$$\lim_{n\in\Gamma} \|n\tau\|^{1/n} = \underline{\lim}_{n\to\infty} \|n\tau\|^{1/n}$$

Очевидно, что для доказательства леммы достаточно доказать неравенство

$$\underline{\lim}_{n\in\Lambda}\|n\tau\|^{\frac{1}{n}} \le \lim_{n\in\Gamma}\|n\tau\|^{1/n} \tag{134}$$

Можно считать, что последовательность $\Gamma\bigcap\Lambda$ содержит лишь конечное число членов, так как иначе все доказано. Кроме того, можно считать, что последовательность Γ содержит лишь конечное число натуральных индексов таких, что $\|n\tau\| \ge \frac{1}{2n}$, так как иначе правая часть равенства 134 была бы равна 1, а левая часть по очевидным причинам не превосходит 1. Таким образом, не теряя в общности, можно считать, что если $n \in \Gamma$, то $n \notin \Lambda$ и $\|n\tau\| = |n\tau - m_n| < \frac{1}{2n}$. По следствию лемм 2 и 3 из последнего неравенства получаем, что дробь $\frac{m_n}{n}$ совпадает с некоторой подходящей дробью $\frac{P_{l_n}}{Q_{l_n}}$, причем $n \ne Q_{l_n}$, так как $n \notin \Lambda$. Поэтому $m_n = t_n P_{l_n}$, $n = t_n Q_{l_n}$, где натуральное число t_n строго больше единицы. Таким образом

$$\lim_{n\in\Gamma}\|n\tau\|^{1/n} = \lim_{n\in\Gamma}|n\tau - m_n|^{1/n} = \lim_{n\in\Gamma}\left(t_n|Q_{l_n}\tau - P_{l_n}|\right)^{\frac{1}{n}} \tag{135}$$

Рассмотрим далее два случая. В первом можно выделить подпоследовательность $\Gamma^* \subset \Gamma$ такую, что $l_n \to \infty$ при $n \in \Gamma^*$. Так как $t_n \ge 2$, то в этом случае правая часть неравенства 135 не меньше, чем

$$\underline{\lim}_{n\in\Gamma^*}|Q_{l_n}\tau - P_{l_n}|^{\frac{1}{n}} \ge \underline{\lim}_{n\in\Gamma^*}|Q_{l_n}\tau - P_{l_n}|^{\frac{1}{Q_{l_n}}} \ge \underline{\lim}_{n\in\Lambda}\|n\tau\|^{\frac{1}{n}}$$

Во втором случае $l_n \le c$ при всех $n \in \Gamma$. В этом случае величина $|Q_{l_n}\tau - P_{l_n}|$ принимает лишь конечное число строго положительных значений. Поэтому правая часть неравенства 135 равна 1. Таким образом в обоих случаях $\lim_{n\in\Gamma}\|n\tau\|^{1/n} \ge \underline{\lim}_{n\in\Lambda}\|n\tau\|^{\frac{1}{n}}$. Тем самым лемма доказана.

Лемма (6).

$$R_q = \underline{\lim}_{n\to\infty}\Big(\frac{1}{Q_{n+1}}\Big)^{1/Q_n} \tag{136}$$

где Q_n - знаменатель n-й подходящей дроби непрерывной дроби 128.

Действительно, по лемме 1

$$\frac{1}{2Q_{n+1}} \le \frac{1}{Q_n + Q_{n+1}} \le |Q_n\tau - P_n| \le \frac{1}{Q_{n+1}}$$

Учитывая равенство 132, эти неравенства можно переписать в виде неравенств

$$\frac{1}{2Q_{n+1}} \le \|Q_n\tau\| \le \frac{1}{Q_{n+1}}$$

Следовательно,

$$\underline{\lim}_{n\to\infty}\|Q_n\tau\|^{1/Q_n} = \underline{\lim}_{n\to\infty}\left(\frac{1}{Q_{n+1}}\right)^{1/Q_n} \tag{137}$$

Из равенств 127, 133 и 137 получаем равенство

$$R_q = \underline{\lim}_{n\to\infty}\|n\tau\|^{1/n} = \underline{\lim}_{n\to\infty}\|Q_n\tau\|^{1/Q_n} = \underline{\lim}_{n\to\infty}\left(\frac{1}{Q_{n+1}}\right)^{1/Q_n}$$

Таким образом лемма доказана.

Доказательство утверждения Любински. По теореме Хинчина при почти всех $\tau \in [0,1]$ имеет место равенство

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln Q_n}{n} = \frac{\pi^2}{12\ln 2}$$

Из этого равенства и равенства 136 получаем равенство

$$\ln R_q = -\lim_{n\to\infty}\frac{\ln Q_{n+1}}{Q_n} = -\lim_{n\to\infty}\frac{\ln Q_{n+1}}{n+1}\cdot\frac{n+1}{Q_n} = 0$$

то есть $R_q = 1$ при почти всех $\tau \in [0,1]$.

Докажем теперь вторую часть утверждения Любински. Пусть $\alpha \in (0,1)$. Положим $c = \ln\frac{1}{\alpha} > 0$ и фиксируем некоторое достаточно большое натуральное число B такое, что $\left[\frac{e^{cx}}{x}\right] \geq 2x$ при всех $x \geq B$. Построим число

$$\tau = \cfrac{1}{b_1 + \cfrac{1}{b_2 + \dots}} \quad , \quad b_n \in \mathbb{N}$$

последовательно определяя его коэффициенты так, что

$$b_1 = B \quad , \quad Q_0 = 1 \quad , \quad Q_1 = b_1$$

$$b_n = \left[\frac{e^{cQ_{n-1}}}{Q_{n-1}}\right] \quad , \quad Q_n = b_nQ_{n-1} + Q_{n-2} \quad , \quad n = 2,3,\dots$$

Легко видеть, что

$$Q_1 \geq B \ , \ b_2 \geq B \ , \ Q_2 \geq b_2Q_1 \geq B \ , \ b_3 \geq B \ , \ Q_3 \geq b_3Q_2 \geq B \ , \ \dots$$

Следовательно, $b_n \in \mathbb{N}$ при всех $n = 1,2,\dots$ и $\lim_{n\to\infty} Q_n = \infty$. Кроме того, имеют место неравенства

$$Q_{n+1} = b_{n+1}Q_n + Q_{n-1} \leq 2b_{n+1}Q_n \leq 2\frac{e^{cQ_n}}{Q_n}Q_n = 2e^{cQ_n}$$

$$Q_{n+1} \geq b_{n+1}Q_n \geq \big(\frac{e^{cQ_n}}{Q_n} - 1\big)Q_n = e^{cQ_n} - Q_n \geq \frac{1}{2}e^{cQ_n}$$

Таким образом

$$cQ_n - \ln 2 \leq \ln Q_{n+1} \leq cQ_n + \ln 2$$

Следовательно, $\lim_{n\to\infty} \frac{\ln Q_{n+1}}{Q_n} = c$. По лемме 6 отсюда следует, что

$$\ln R_q = -\lim_{n\to\infty} \frac{\ln Q_{n+1}}{Q_n} = -c = \ln \alpha$$

Таким образом вторая часть утверждения Любински доказана при всех $\alpha \in (0, 1]$. При $\alpha = 1$ вторая часть утверждения следует из первой, а при $\alpha = 0$ (то есть при $c = \infty$) соответствующее число τ строится аналогичным образом.

Докажем следующее интересное свойство функции Роджерса–Рамануджана.

Теорема. *Окружность $\{|z| = R_q\}$ является естественной границей голоморфности функции G_q.*

Доказательству теоремы предпошлем следующую лемму.

Лемма (7). *При любом $l = 0, 1, \ldots$ имеет место следующее функциональное равенство*

$$G_q\big(\frac{z}{q^l}\big) = P_l\big(\frac{z}{q^l}\big)G_q(qz) + qzP_{l-1}\big(\frac{z}{q^l}\big)G_q(q^2z) \tag{138}$$

Докажем лемму индукцией по числу l. Так как $P_{-1}(z) = P_0(z) = 1$, то при $l = 0$ равенство 138 совпадает с уже проверенным равенством 122. Предположим, что равенство 138 верно для индексов $0, 1, \ldots, l$. Используя сначала разностное уравнение для $P_{l+1}(z)$, затем равенство 138 для индекса $l = 0$ (то есть равенство 122), а затем равенство 138 для индекса l и переменной z/q, получим цепочку равенств

$$P_{l+1}\big(\frac{z}{q^{l+1}}\big)G_q(qz) + qzP_l\big(\frac{z}{q^{l+1}}\big)G_q(q^2z) =$$

$$\bigg(P_l\big(\frac{z}{q^{l+1}}\big) + q^{l+1}\frac{z}{q^{l+1}}P_{l-1}\big(\frac{z}{q^{l+1}}\big)\bigg)G_q(qz) + qzP_l\big(\frac{z}{q^{l+1}}\big)G_q(q^2z) =$$

$$P_l\big(\frac{z}{q^{l+1}}\big)G_q(z) + zP_{l-1}\big(\frac{z}{q^{l+1}}\big)G_q(qz) =$$

$$P_l\big(\frac{z/q}{q^l}\big)G_q\big(q\frac{z}{q}\big) + q\frac{z}{q}P_{l-1}\big(\frac{z/q}{q^l}\big)G_q\big(q^2\frac{z}{q}\big) = G_q\big(\frac{z}{q^{l+1}}\big)$$

Таким образом равенство 138 верно и для индекса $l+1$, то есть лемма доказана.

Доказательство теоремы. Предположим, что точка z_0, лежащая на окружности $\{|z| = R_q\}$ является регулярной точкой функции G_q, то есть функция G_q голоморфна в некотором круге $U = \{|z - z_0| < \varepsilon\}$. Заменяя аргумент z в равенстве 138 на z/q, получим равенство

$$G_q(qz) = \frac{G_q\big(\frac{z}{q^{l+1}}\big) - P_l\big(\frac{z}{q^{l+1}}\big)G_q(z)}{zP_{l-1}\big(\frac{z}{q^{l+1}}\big)} \tag{139}$$

Заметим, что существует последовательность Λ натуральных чисел такая, что $\frac{1}{q^{l+1}} \to 1$ при $l \in \Lambda$, $l \to \infty$. Поэтому при любом фиксированном $z_1 \in U$ найдется $l \in \Lambda$ такое, что правая часть равенства 139 является мероморфной функцией в некоторой окрестности точки z_1. Это означает, что (не зависящая от l) функция $G_q(qz)$ мероморфна в круге U. Следовательно, функция $G_q(z)$ мероморфна в круге qU. Повторяя это же рассуждение, получим, что функция $G_q(z)$ мероморфна в каждом из кругов U, qU, $q^2U, \dots$. Отсюда следует, что функция $G_q(z)$ мероморфна в круге $\{|z| < R + \varepsilon\}$.

На окружности $\{|z| = R_q\}$ функция $G_q(z)$ может иметь лишь конечное число полюсов $\tau_1, \dots, \tau_k$. Выберем точку z_0, отличной от полюсов $\tau_1, \dots, \tau_k$ и точек полюсов $q^{-1}\tau_1, \dots, q^{-1}\tau_k$. Положим

$$\delta = \min\{\varepsilon, |z_0 - \tau_1|, \dots, |z_0 - \tau_k|, |z_0 - q^{-1}\tau_1|, \dots, |z_0 - q^{-1}\tau_k|\}$$

Тогда каждая из функций $G_q(z)$ $G_q(qz)$ голоморфна в круге $V = \{|z - z_0| < \delta\}$. Из функционального равенства 122 следует, что функция $G_q(q^2z)$, а также все функции $G_q(q^nz)$, $n = 1, 2, \dots$ голоморфны в круге V. Это означает, что функция $G_q(z)$ голоморфна в каждом из кругов V, qV, $q^2V, \dots$, а следовательно, и в круге $\{|z| < R + \delta\}$, что противоречит определению радиуса голоморфности функции G_q.

Обозначим через ρ_q радиус мероморфности функции H_q, то есть радиус максимального круга с центром в нуле, в который функция $H_q(z) = \frac{G_q(z)}{G_q(qz)}$ допускает мероморфное продолжение. Очевидно, что $\rho_q \geq R_q$. Кроме того, так как непрерывная дробь 120 Роджерса–Рамануджана сходится по критерию Ворпицкого при всех $|z| \leq 1/4$, то $\rho_q \geq 1/4$. Таким образом

$$\rho_q \geq \max\{R_q, \frac{1}{4}\}$$

Теорема. *Окружность $\{|z| = \rho_q\}$ является естественной границей мероморфности функции H_q.*

Доказательство. Предположим противное, а именно, предположим, что функция H_q мероморфна в некотором круге $U = \{|z - z_0| < \varepsilon\}$, где $|z_0| = \rho$. Из функционального равенства 124 следует, что тогда функция H_q мероморфна и в кругах $U, qU, q^2U, \ldots$, а значит, и в круге $\{|z| < \rho_q + \varepsilon\}$, что противоречит определению радиуса мероморфности функции H_q.

Теорема. *При всех $|q| = 1$ имеет место неравенство $\rho_q \leq 1$.*

Доказательству теоремы предпошлем несколько лемм и введем следующее обозначение. Если $F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ - степенной ряд, то

$$\Delta_{0,m} = 1 \quad , \quad \Delta_{n,m} = \Delta_{n,m}(F) = \begin{vmatrix} c_m & \ldots & c_{m+n-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ c_{m+n-1} & \ldots & c_{m+2n-2} \end{vmatrix} \tag{140}$$

Определители 140 называются ганкелевыми определителями степенного ряда F.

Лемма.

1°. *Пусть C-дроби*

$$1 + \cfrac{a_1 z}{1 + \cfrac{a_2 z}{1 + \ldots}} \tag{141}$$

соответствует степенной ряд $1 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k z^k$. Тогда $\Delta_{n,1} \cdot \Delta_{n,2} \neq 0$ при всех $n = 1, 2, \ldots$ и

$$a_1 = c_1 \quad , \quad a_{2n} = -\frac{\Delta_{n,2}\Delta_{n-1,1}}{\Delta_{n,1}\Delta_{n-1,2}} \quad , \quad a_{2n+1} = -\frac{\Delta_{n+1,1}\Delta_{n-1,2}}{\Delta_{n,2}\Delta_{n,1}} \tag{142}$$

2°. *Если степенной ряд $1 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k z^k$ таков, что $\Delta_{n,1} \cdot \Delta_{n,2} \neq 0$ при всех $n = 1, 2, \ldots$, то этому ряду соответствует C-дробь с коэффициентами, определяемыми равенствами 142.*

Доказательство. Напомним, что степенной ряд $1 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k z^k$ соответствует C-дроби 141 тогда и только тогда, когда при всех $n = 1, 2, \ldots$ имеют место равенства

$$\frac{P_n(z)}{Q_n(z)} - \big(1 + \sum_{k=1}^{n} c_k z^k\big) = A z^{n+1} + \ldots \tag{143}$$

Покажем, что из равенств 143 следуют равенства 142. Ранее было показано, что

$$\deg P_n \leq \big[\frac{n+1}{2}\big] \quad , \quad \deg Q_n \leq \big[\frac{n}{2}\big] \quad , \quad P_n(0) = Q_n(0) = 1 \quad , \quad n = 1, 2, \ldots$$

Уточним это утверждение и докажем по индукции, что

$$P_{2m-1}(z) = 1 + \cdots + a_1 \cdot a_3 \cdot \cdots \cdot a_{2m-1} z^m \tag{144}$$

$$Q_{2m}(z) = 1 + \cdots + a_2 \cdot a_4 \cdot \cdots \cdot a_{2m} z^m \tag{145}$$

Действительно, при $m = 1$ равенства 144 и 145 выполняются, так как $P_1(z) = 1 + a_1 z$, $Q_2(z) = 1 + a_2 z$. Поэтому, предполагая, что индуктивное предположение верно, из разностного уравнения для числителей и знаменателей подходящих дробей и неравенств $\deg P_{2m} \leq m$, $\deg Q_{2m+1} \leq m$ имеем равенства

$$P_{2m+1}(z) = P_{2m}(z) + a_{2m+1} z P_{2m-1}(z) = 1 + \cdots + a_1 \ldots a_{2m-1} \cdot a_{2m+1} z^{m+1}$$

$$Q_{2m+2}(z) = Q_{2m+1}(z) + a_{2m+2} z Q_{2m}(z) = 1 + \cdots + a_2 \ldots a_{2m} \cdot a_{2m+2} z^{m+1}$$

Умножая равенство 143 на $Q_n(z)$, получим равенство

$$P_n(z) - Q_n(z)(1 + c_1 z + \cdots + c_n z^n) = A z^{n+1} + \ldots$$

Это равенство означает, что

$$\left[P_n(z) - Q_n(z)(1 + c_1 z + \cdots + c_n z^n)\right]_k = 0 \quad , \quad k = 0, 1, \ldots, n \tag{146}$$

Рассмотрим по отдельности случаи четного и нечетного n. В первом случае $n = 2m$, $\deg P_n = \deg Q_n = m$. Следовательно, $\left[P_{2m}(z)\right]_k = 0$ при $k = m{+}1, \ldots, 2m$. Поэтому из системы равенств 146 при $k = m{+}1, \ldots, 2m$ получаем равенства

$$\begin{gathered} c_1 q_{2m,m} + \cdots + c_m q_{2m,1} + c_{m+1} = 0 \\ c_2 q_{2m,m} + \cdots + c_{m+1} q_{2m,1} + c_{m+2} = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ c_m q_{2m,m} + \cdots + c_{2m-1} q_{2m,1} + c_{2m} = 0 \end{gathered}$$

где $Q_{2m}(z) = 1 + q_{2m,1} z + \cdots + q_{2m,m} z^m$. Из этих равенств и равенства 145 следует равенство

$$\Delta_{m,2} = \begin{vmatrix} c_2 & \ldots & c_{m+1} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ c_{m+1} & \ldots & c_{2m} \end{vmatrix} = (-1)^m q_{2m,m} \Delta_{m,1} = (-1)^m a_2 \ldots a_{2m} \Delta_{m,1} \quad , \quad m = 1, 2, \ldots \tag{147}$$

Во втором случае $n = 2m - 1$, $\deg P_n = m$, $\deg Q_n = m - 1$. Следовательно, $\left[P_{2m-1}(z)\right]_m = p_{2m-1,m}$ и $\left[P_{2m-1}(z)\right]_k = 0$ при $k = m{+}1, \ldots, 2m{-}1$.

Поэтому из системы равенств 146 при $k = m, \dots, 2m-1$ получаем равенства

$$\left|\begin{array}{c} c_1 q_{2m-1,m-1} + \dots + c_{m-1} q_{2m-1,1} + c_m = p_{2m-1,m} \\ c_2 q_{2m-1,m-1} + \dots + c_m q_{2m-1,1} + c_{m+1} = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ c_m q_{2m-1,m-1} + \dots + c_{2m-2} q_{2m-1,1} + c_{2m-1} = 0 \end{array}\right|$$

где $p_{2m-1,m}$ - коэффициент при z^m многочлена $P_{2m-1}(z)$. Из этих равенств и равенства 144 следует равенство

$$\Delta_{m,1} = \begin{vmatrix} c_1 & \dots & c_m \\ \dots & \dots & \dots \\ c_m & \dots & c_{2m-1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c_1 & \dots & c_{m-1} & p_{2m-1,m} \\ \dots & \dots & \dots & 0 \\ c_m & \dots & c_{2m-2} & 0 \end{vmatrix} =$$

$$(-1)^{m-1} p_{2m-1,m} \Delta_{m-1,2} = (-1)^{m-1} a_1 \dots a_{2m-1} \Delta_{m-1,2} \quad , \quad m = 1, 2, \dots \tag{148}$$

Итак, при $m = 1, 2, \dots$ имеем равенства

$$\Delta_{m,1} = (-1)^{m-1} a_1 \dots a_{2m-1} \Delta_{m-1,2} \quad , \quad \Delta_{m,2} = (-1)^m a_2 \dots a_{2m} \Delta_{m,1} \tag{149}$$

Так как $\Delta_{0,2} = 1$ и $a_n \neq 0$, $n = 1, 2, \dots$, то из равенств 149 последовательно при $m = 1, 2, \dots$ получаем, что

$$\Delta_{1,1} \neq 0 \quad , \quad \Delta_{1,2} \neq 0 \quad , \quad \Delta_{2,1} \neq 0 \quad , \quad \Delta_{2,2} \neq 0 \quad , \quad \dots$$

Из равенств 149 следуют также и равенства $a_1 = \Delta_{1,1} = c_1$,

$$a_{2m} = \frac{a_2 \dots a_{2m}}{a_2 \dots a_{2m-2}} = -\frac{\Delta_{m,2}}{\Delta_{m,1}} \Big/ \frac{\Delta_{m-1,2}}{\Delta_{m-1,1}}$$

$$a_{2m+1} = \frac{a_1 \dots a_{2m+1}}{a_1 \dots a_{2m-1}} = -\frac{\Delta_{m+1,1}}{\Delta_{m,2}} \Big/ \frac{\Delta_{m,1}}{\Delta_{m-1,2}}$$

совпадающие с равенствами 142.

Наоборот, если ряд $F(z) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k z^k$ таков, что $\Delta_{n,1} \cdot \Delta_{n,2} \neq 0$ при всех $n = 1, 2, \dots$, то можно рассмотреть С-дробь с коэффициентами, определяемыми равенствами 142. Этой С-дроби соответствует некоторый степенной ряд $F^*(z) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k^* z^k$. При этом

$$\Delta_{1,1} = \Delta_{1,1}^* = a_1 \, , \, \frac{\Delta_{1,2}}{\Delta_{1,1}} = \frac{\Delta_{1,2}^*}{\Delta_{1,1}^*} = -a_2 \, , \, \frac{\Delta_{2,1}}{\Delta_{1,2}} = \frac{\Delta_{2,1}^*}{\Delta_{1,2}^*} = -a_1 a_3 \, , \, \frac{\Delta_{2,2}}{\Delta_{2,1}} = \frac{\Delta_{2,2}^*}{\Delta_{2,1}^*} = -a_2 a_4 \, , \, \dots$$

Отсюда последовательно получаем равенства

$$\Delta_{1,1} = \Delta_{1,1}^* \, , \quad \Delta_{1,2} = \Delta_{1,2}^* \, , \, \Delta_{2,1} = \Delta_{2,1}^* \, , \, \Delta_{2,2} = \Delta_{2,2}^* \, , \, \dots$$

из которых в свою очередь следуют равенства

$$c_1 = c_1^*\,,\ c_2 = c_2^*\,,\ c_3 = c_3^*\,,\ c_4 = c_4^*\,,\ \ldots$$

Таким образом лемма доказана.

Следствие. Пусть степенной ряд $1+\sum_{k=1}^{\infty} c_k z^k$ соответствует С-дроби 141 такой, что $\lim_{n\to\infty} |a_n| = a > 0$. Тогда существует предел

$$\lim_{n\to\infty} |\Delta_{n,1}(F)|^{1/n^2} = a \tag{150}$$

Действительно, по доказанной лемме

$$|\Delta_{n,1}(F)| = \prod_{k=1}^{n} \left| \frac{\Delta_{k,1}}{\Delta_{k-1,2}} \cdot \frac{\Delta_{k-1,2}}{\Delta_{k-1,1}} \right| = \prod_{k=1}^{n} |a_1 \ldots a_{2k-1} \cdot a_2 \ldots a_{2k-2}|$$

Отсюда и существования предела $\lim_{n\to\infty} |a_n| = a > 0$ следует равенство 150.

Из этого следствия, примененного к ряду H_q, соответсвующего непрерывной дроби Роджерса–Рамануджана, следует, что при $|q| = 1$

$$\lim_{n\to\infty} |\Delta_{n,1}(H_q)|^{1/n^2} = 1 \tag{151}$$

(Более того, те же рассуждения показывают, что не только предел равен единице, но и $|\Delta_{n,1}(H_q)| = 1$ при всех $n = 1, 2, \ldots$.)

Далее мы покажем, что неравенство $\rho_q > 1$ влечет за собой неравенство

$$\overline{\lim}_{n\to\infty} |\Delta_{1,1}(H_q)|^{1/n^2} < 1 \tag{152}$$

противоречащее равенству 151. Неравенство 152 является частным случаем теоремы Полиа об оценке ганкелевых определителей голоморфной функции посредством трансфинитного диаметра множества ее особенностей.

Теорема (Полиа). *Пусть функция F голоморфна в области $D \ni 0$. Тогда*

$$\overline{\lim}_{n\to\infty} |\Delta_{n,1}(F)|^{1/n^2} \le d \tag{153}$$

где d - трансфинитный диаметр множества $\{z :\ z^{-1} \in \mathbb{C} \setminus D\}$.

Определение. Пусть K - бесконечное ограниченное замкнутое множество на комплексной плоскости. Трансфинитным диаметром множества K называется число

$$d(K) = \lim_{n\to\infty} \max_{z_1,\ldots,z_n \in K} \Big(\prod_{k,l=1;k<l}^{n} |z_k - z_l| \Big)^{\frac{2}{(n-1)n}}$$

Покажем, что этот предел существует. Для упрощения записи введем следующие обозначения

$$V(z_1,\dots,z_n)=\prod_{k,l=1;k<l}^{n}(z_k-z_l)\quad,\quad V_n(K)=\max_{z_1,\dots,z_n\in K}|V(z_1,\dots,z_n)|$$

Очевидно, что $V(z_1,\dots,z_n)$ - это определитель Вандермонда чисел $z_1,\dots,z_n$, а введенный максимум существует в силу непрерывной зависимости определителя Вандермонда от его аргументов и замкнутости множества K.

Положим $d_n=V_n(K)^{\frac{2}{(n-1)n}}$ и покажем, что d_n не возрастает с возрастанием n. Действительно, если $V_{n+1}(K)=\big|V(\xi_1,\dots,\xi_{n+1})\big|$, то при всех $k=1,\dots,n+1$ имеем неравенства

$$V_{n+1}(K)=\big|(\xi_k-\xi_1)\dots(\xi_k-\xi_{k-1})(\xi_k-\xi_{k+1})\dots(\xi_k-\xi_{n+1})V(\xi_1,\dots,\xi_{k-1},\xi_{k+1},\dots,\xi_{n+1})\big|\le$$

$$\big|(\xi_k-\xi_1)\dots(\xi_k-\xi_{k-1})(\xi_k-\xi_{k+1})\dots(\xi_k-\xi_{n+1})\big|V_n(K)$$

Перемножая эти неравенства по k от единицы до $n+1$, получим неравенство

$$V_{n+1}^{n+1}(K)\le V_{n+1}^{2}(K)V_n^{n+1}(K)$$

совпадающее с неравенством

$$V_{n+1}^{n-1}(K)\le V_n^{n+1}(K)$$

или, что то же самое, с неравенством

$$V_{n+1}^{\frac{2}{n(n+1)}}(K)\le V_n^{\frac{2}{n(n-1)}}(K)$$

Таким образом положительная величина d_n не возрастает с возрастанием n и, следовательно, имеет предел $d(K)$, называемый трансфинитным диаметром множества K.

Если множество K состоит из конечного числа точек, то по определению $d(K)=0$.

Определение. Многочлен $t_n(z)=z^n+c_1z^{n-1}+\dots+c_n$ называется многочленом Чебышева для K, если

$$\max_{z\in K}|t_n(z)|\le\max_{z\in K}|p_n(z)|$$

для всякого другого многочлена $p_n(z)=z^n+\dots$.

Нетрудно показать, что многочлен Чебышева существует для всякого компакта K.

Наряду с многочленом $t_n(z)$ введем в рассмотрение многочлен $t_n^*(z) = z^n + \ldots$, имеющий наименьший модуль на K по сравнению со всеми многочленами $p_n(z) = z^n + \ldots$, имеющими нули только на K. Многочлен $t_n^*(z)$ также будем называть многочленом Чебышева для K.

Положим

$$m_n = \max_{z\in K} |t_n(z)| \ , \ m_n^* = \max_{z\in K} |t_n^*(z)| \ , \ \tau_n = m_n^{1/n} \ , \ \tau_n^* = (m_n^*)^{1/n}$$

и покажем, что существуют пределы $\lim_{n\to\infty} \tau_n = \tau(K)$ и $\lim_{n\to\infty} \tau_n^* = \tau^*(K)$.

Действительно, заметим, что последовательность τ_n ограничена, так как

$$\tau_n \le (\max_{z\in K} |z - z_0|^n)^{1/n} = \max_{z\in K} |z - z_0| \le D$$

где z_0 - произвольная точка компакта K, D - диаметр компакта K.

Пусть

$$\underline{\lim}_{n\to\infty}\tau_n = \alpha \quad , \quad \overline{\lim}_{n\to\infty}\tau_n = \beta$$

Очевидно, что $\alpha \le \beta$. Покажем, что $\beta \le \alpha$. Для всякого $\varepsilon > 0$ подберем индекс n_0 такой, что $\tau_{n_0} \le \alpha + \varepsilon$. Если $n = kn_0 + l$, где $0 \le l < n_0$, то

$$\tau_n \le \max_{z\in K} |(z - z_0)^l (t_{n_0}(z))^{kn_0}|^{1/n} \le D^{l/n}(\alpha + \varepsilon)^{kn_0/n}$$

При $n \to \infty$ отсюда следует, что $\overline{\lim}_{n\to\infty}\tau_n \le \alpha + \varepsilon$. Так как число ε произвольно, то это означает, что $\alpha = \beta$ и, следовательно, предел $\lim_{n\to\infty} \tau_n$ существует. Существование предела $\lim_{n\to\infty} \tau_n^*$ доказывается точно так же.

Теорема. $\tau(K) = \tau^*(K) = d(K)$

Доказательство. Если множество K состоит из конечного числа точек, то $\tau(K) = \tau^*(K) = d(K) = 0$. Поэтому далее будем предполагать, что множество K бесконечно. Докажем сначала неравенства

$$m_n \le \frac{V_{n+1}(K)}{V_n(K)} \le (n+1)m_n \tag{154}$$

Действительно, если $V_n(K) = |V(\xi_1, \ldots, \xi_n)|$, то

$$m_n \le \max_{z\in K} |(z - \xi_1)\ldots(z - \xi_n)| \max_{z\in K} \Big|\frac{V(z, \xi_1, \ldots, \xi_n)}{V(\xi_1, \ldots, \xi_n)}\Big| \le \frac{V_{n+1}(K)}{V_n(K)}$$

С другой стороны имеем неравенство

$$V_{n+1}(K) = |V(\xi_1, \dots, \xi_{n+1}| = \begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \xi_1 & \dots & \xi_{n+1} \\ \dots & \dots & \dots \\ \xi_1^{n-1} & \dots & \xi_{n+1}^{n-1} \\ \xi_1^n & \dots & \xi_{n+1}^n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \xi_1 & \dots & \xi_{n+1} \\ \dots & \dots & \dots \\ \xi_1^{n-1} & \dots & \xi_{n+1}^{n-1} \\ t_n(\xi_1) & \dots & t_n(\xi_{n+1}) \end{vmatrix} \leq$$

$$\sum_{k=1}^{n+1} |t_n(\xi_k)| \cdot |V(\xi_1, \dots, \xi_{k-1}, \xi_{k+1}, \dots \xi_{n+1})| \leq (n+1) m_n V_n(K)$$

Таким образом неравенства 154 доказаны. Перепишем эти неравенства в следующем виде

$$\tau_n^n \leq \frac{V_{n+1}(K)}{V_n(K)} \leq (n+1)\tau_n^n$$

Полагая здесь $n = 2, \dots, n$ и перемножая полученные неравенства, получим неравенства

$$\tau_2^2 \dots \tau_n^n V_2(K) \leq V_{n+1}(K) \leq (n+1)! \tau_2^2 \dots \tau_n^n V_2(K)$$

или, что то же самое, неравенства

$$(\tau_2^2 \dots \tau_n^n)^{\frac{2}{n(n+1)}} V_2^{\frac{2}{n(n+1)}} \leq d_{n+1} \leq \big((n+1)!\big)^{\frac{2}{n(n+1)}} (\tau_2^2 \dots \tau_n^n)^{\frac{2}{n(n+1)}} V_2^{\frac{2}{n(n+1)}}$$

(здесь для упрощения записи опущена зависимость величин от множества K.) Заметим, что

$$\lim_{n\to\infty} V_2^{\frac{2}{n(n+1)}} = 1 \quad , \quad \lim_{n\to\infty} \big((n+1)!\big)^{\frac{2}{n(n+1)}} = 1 \quad , \quad \lim_{n\to\infty} (\tau_2^2 \dots \tau_n^n)^{\frac{2}{n(n+1)}} = \tau$$

Отсюда следует, что $\tau(K) = d(K)$. Легко видеть, что в приведенном рассуждении многочлены $t_n(z)$ можно заменить на многочлены $t_n^*(z)$. Поэтому $\tau^*(K) = d(K)$. Таким образом теорема доказана.

Следствия.

1. Если множеству K принадлежит вся граница некоторой ограниченной области, то трансфинитный диаметр не изменится, если к K присоединить и внутренние точки этой области.

2. Трансфинитный диаметр любого круга равен его радиусу.

Действительно, так как трансфинитный диаметр не меняется при параллельном переносе, то утверждение достаточно проверить для круга $K = \{|z| \leq R\}$. Заметим, что $\max_{z\in K} |z^n| = R^n$. Следовательно, $m_n \leq R^n$.

С другой стороны, для всякого многочлена $p_n(z) = z^n + c_1 z^{n-1} + \cdots + c_n$ имеет место неравенство

$$\max_{z\in K} |p_n(z)|^2 \geq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |p_n(Re^{it})|^2 dt = R^{2n} + |c_1|R^{2(n-1)} + \cdots + |c_n| \geq R^{2n}$$

Следовательно, $m_n \geq R^n$. Таким образом, $m_n = R^n$. Поэтому $d(K) = \lim_{n\to\infty} m_n^{1/n} = R$.

3. Трансфинитный диаметр любого отрезка равен четверти его длины. Утверждение достаточно проверить для отрезка $[-1, 1]$, для которого многочлены Чебышева $t_n(z) = \frac{1}{2^{n-1}}\cos(n \arccos z) = z^n + \ldots$, а следовательно, и величина $\tau = \frac{1}{2}$, известны.

Доказательство теоремы Полиа. Пусть $K = \{z : z^{-1} \in \overline{\mathbb{C}} \setminus D\}$. Тогда функция

$$f(z) = F\big(\frac{1}{z}\big) = 1 + c_1\frac{1}{z} + c_2\frac{1}{z^2} + \ldots \tag{155}$$

голоморфна в $\mathbb{C} \setminus K$.

Будем пользоваться, не приводя доказательства (для "хороших"множеств K доказательства и не нужны) следующим утверждением: для всякого $\varepsilon > 0$ существует множество K^* такое, что $K^* \supset K$, $\mathbb{C} \setminus K^*$ - область, ограниченная конечным числом замкнутых аналитических кривых Γ, принадлежащих $\mathbb{C} \setminus K$, и $d(K^*) \leq d(K) + \varepsilon$.

Для этого же ε выберем число N, существующее по определению трансфинитного диаметра, такое, что

$$V_n^{\frac{2}{n(n-1)}}(K^*) \leq d(K^*) + \varepsilon \quad \text{при всех} \quad n \geq N$$

Тогда для любого набора точек $(z_1, \ldots, z_n)$, $n \geq N$, лежащих на K^*, имеет место неравенство

$$\prod_{k,l=1;k<l}^{n} |z_k - z_l| \leq \big(d(K) + 2\varepsilon\big)^{\frac{n(n-1)}{2}} \tag{156}$$

Из равенства 155 следует, что

$$c_n = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma f(z) z^{n-1} dz$$

Поэтому

$$\Delta_{n,1}(F) = \begin{vmatrix} c_1 & \ldots & c_n \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ c_n & \ldots & c_{2n-1} \end{vmatrix} =$$

$$\frac{1}{(2\pi i)^n}\int_\Gamma\dots\int_\Gamma f(z_1)\dots f(z_n)\begin{vmatrix}1 & z_2 & \dots & z_n^{n-1}\\ z_1 & z_2^2 & \dots & z_n^n\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ z_1^{n-1} & z_2^n & \dots & z_n^{2n-2}\end{vmatrix}dz_1\dots dz_n=$$

$$\frac{1}{(2\pi i)^n}\int_\Gamma\dots\int_\Gamma f(z_1)\dots f(z_n)z_1^0z_2^1\dots z_n^{n-1}V(z_1,\dots,z_n)dz_1\dots dz_n$$

Сделав под интегралом все возможные $n!$ перестановок из $z_1,\dots,z_n$, от которых интеграл не меняет своего значения, и взяв сумму всех полученных интегралов, получим равенство

$$n!\Delta_{n,1}(F)=\frac{1}{(2\pi i)^n}\int_\Gamma\dots\int_\Gamma f(z_1)\dots f(z_n)V^2(z_1,\dots,z_n)dz_1\dots dz_n$$

Из этого равенства и неравенства 156 следует неравенство

$$|\Delta_{n,1}(F)|\le\frac{1}{(2\pi)^n n!}M^nL^n\big(d(K)+2\varepsilon\big)^{n(n-1)}\le M^nL^n\big(d(K)+2\varepsilon\big)^{n(n-1)}$$

где $M=\max_{z\in\Gamma}|f(z)|$, L - длина Γ. Отсюда получаем неравенство

$$\overline{\lim}_{n\to\infty}|\Delta_{n,1}(F)|^{1/n^2}\le d(K)+2\varepsilon$$

Так как число ε можно выбрать сколь-угодно малым, то отсюда получаем требуемое неравенство 153. Теорема доказана.

Заметим, что теорема Полиа верна и для мероморфных в области D функций, так как полюсы мероморфной функции образуют дискретное множество точек.

Завершение доказательства неравенства $\rho_q\le 1$. Предположим противное, а именно, что функция H_q мероморфна в круге $\{|z|<\rho_q\}$, где $\rho_q>1$. Тогда трансфинитный диаметр множества

$$\{z:\,|z^{-1}|\ge\rho_q\}=\{z:\,|z|\le\rho_q^{-1}\}$$

равен $\rho_q^{-1}<1$. Поэтому по теореме Полиа получаем неравенство 152, которое противоречит равенству 151. Следовательно, $\rho_q\le 1$.

Итак,

$$\max\{R_q,\frac{1}{4}\}\le\rho_q\le 1$$

Покажем, что $\rho_q=1$ при всех $|q|=1$, не совпадающих с корнями из единицы. При $l\in\mathbb{Z}$ положим

$$V_{q,l}(z)=1+\sum_{n=1}^{\infty}z^n\frac{q^{n^2}}{(q)_n}\prod_{j=1}^{n}(1-q^{-l-2n+j})$$

и проверим функциональное равенство

$$V_{q,l}(z) = V_{q,l+1}(qz) + qzV_{q,l+2}(q^2z) \tag{157}$$

Для этого достаточно проверить совпадение коэффициентов при n-х степенях, то есть равенство

$$\frac{q^{n^2}}{(q)_n}\prod_{j=1}^{n}(1-q^{-l-2n+j}) = q^n\frac{q^{n^2}}{(q)_n}\prod_{j=1}^{n}(1-q^{-l-1-2n+j})+qq^{2(n-1)}\frac{q^{(n-1)^2}}{(q)_{n-1}}\prod_{j=1}^{n-1}(1-q^{-l-2-2(n-1)+j})$$

совпадающее с равенством

$$(1-q^{-l-2n+n}) = q^n(1-q^{-l-2n}) + (1-q^n)$$

Из функционального равенства 157 следует, что

$$\frac{V_{q,l}(z)}{V_{q,l+1}(qz)} = 1 + \frac{qz}{\frac{V_{q,l+1}(qz)}{V_{q,l+2}(q^2z)}} = 1 + \cfrac{qz}{1+\cfrac{q^2z}{1+\ldots}}$$

Как ранее было показано, полученное равенство означает, что ряд $\frac{V_{q,l}(z)}{V_{q,l+1}(qz)}$ соответствует непрерывной дроби Роджерса–Рамануджана и, следовательно, при любом $l \in \mathbb{Z}$ имеет место равенство

$$H_q(z) = \frac{V_{q,l}(z)}{V_{q,l+1}(qz)}$$

Покажем, что при $l = 0$ это равенство можно переписать в следующем виде

$$H_q(z) = \frac{V_q(z)}{V_q(z) + V_q(qz) - 1} \tag{158}$$

где

$$V_q(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n q^{-\frac{n(n-1)}{2}}\frac{(q)_{2n-1}}{(q)_{n-1}(q)_n}z^n \tag{159}$$

Действительно, из равенств

$$\frac{q^{n^2}}{(q)_n}\prod_{j=1}^{n}(1-q^{-2n+j}) = \frac{q^{n^2}}{(q)_n}(-1)^n q^{-2n^2+\frac{n(n+1)}{2}}(1-q^{2n-1})\ldots(1-q^n) =$$

$$(-1)^n q^{-\frac{n(n-1)}{2}}\frac{(q)_{2n-1}}{(q)_{n-1}(q)_n}$$

$$\frac{q^{n^2}}{(q)_n}\prod_{j=1}^{n}(1-q^{-1-2n+j}) = \frac{q^{n^2}}{(q)_n}(-1)^n q^{-(2n+1)n+\frac{n(n+1)}{2}}(1-q^{2n})\dots(1-q^{n+1}) =$$

$$(-1)^n q^{-\frac{n(n+1)}{2}}\frac{(q)_{2n}}{(q)_n(q)_n} = (-1)^n q^{-\frac{n(n-1)}{2}}q^{-n}\frac{1-q^{2n}}{1-q^n}\frac{(q)_{2n-1}}{(q)_{n-1}(q)_n} =$$

$$(-1)^n q^{-\frac{n(n-1)}{2}}(1+q^{-n})\frac{(q)_{2n-1}}{(q)_{n-1}(q)_n}$$

следуют равенства

$$V_{q,0}(z) = V_q(z) \quad \text{и} \quad V_{q,1}(z) = V_q(z) + V_q(q^{-1}z) - 1$$

Таким образом равенство 158 доказано.

Приведем далее без доказательства следующее утверждение.

Утверждение. При всех $|q| = 1$, не совпадающих с корнями из единицы, имеет место равенство

$$\overline{\lim}_{n\to\infty}\left|\frac{(q)_{2n-1}}{(q)_{n-1}(q)_n}\right|^{1/n} = 1$$

Из этого утверждения следует, что при всех $|q| = 1$, не совпадающих с корнями из единицы, функция V_q голоморфна в круге $\{|z| < 1\}$, а функция H_q в силу равенства 158 мероморфна в этом же круге $\{|z| < 1\}$. Таким образом $\rho_q = 1$ при всех $|q| = 1$, не совпадающих с корнями из единицы.

Покажем теперь, что при некоторых $|q| = 1$ функция H_q является контрпримером к Паде-гипотезе. Предварительно сформулируем и докажем некоторые вспомогательные утверждения.

Теорема (q-биномиальная теорема). *Имеет место следующее равенство*

$$\prod_{j=1}^{n}(b+wq^j) = \sum_{j=0}^{n}\frac{(q)_n}{(q)_j(q)_{n-j}}b^{n-j}q^{\frac{j(j+1)}{2}}w^j$$

Доказательство проведем индукцией по числу n. При $n = 1$ теорема, очевидно, верна. Предполагая, что теорема верна при n, получаем

$$\prod_{j=1}^{n+1}(b+wq^j) = b\sum_{j=0}^{n}\frac{(q)_n}{(q)_j(q)_{n-j}}b^{n-j}q^{\frac{j(j+1)}{2}}w^j + wq^{n+1}\sum_{j=0}^{n}\frac{(q)_n}{(q)_j(q)_{n-j}}b^{n-j}q^{\frac{j(j+1)}{2}}w^j =$$

$$\sum_{j=0}^{n}\frac{(q)_n}{(q)_j(q)_{n+1-j}}b^{n+1-j}q^{\frac{j(j+1)}{2}}w^j(1-q^{n+1-j}) +$$

$$w\sum_{i=1}^{n}\frac{(q)_n}{(q)_i(q)_{n+1-i}}b^{n+1-i}q^{\frac{i(i+1)}{2}}q^{-i+n+1}w^i(1-q^i)=\sum_{j=0}^{n+1}\frac{(q)_{n+1}}{(q)_j(q)_{n+1-j}}b^{n+1-j}q^{\frac{j(j+1)}{2}}w^j$$

Лемма (1). *Для числителя $P_{q,n}(z)$ непрерывной дроби Роджерса–Рамануджана имеет место равенство*

$$P_{q,n}(z)=\sum_{j=0}^{\left[\frac{n+1}{2}\right]}\frac{q^{-j^2}}{(q^{-1})_j}(zq^{n+1})^j\sum_{l=0}^{\left[\frac{n+1}{2}\right]-j}\frac{q^{l^2}}{(q)_l}z^l \tag{160}$$

Доказательство. По q-биномиальной теореме имеет место равенство

$$\frac{(q)_{n+1-k}}{(q)_k(q)_{n+1-2k}}=\frac{1}{(q)_k}\prod_{j=1}^{k}(1-q^{n+1-2k+j})=$$

$$\frac{1}{(q)_k}\sum_{j=0}^{k}\frac{(q)_k}{(q)_j(q)_{k-j}}q^{\frac{j(j+1)}{2}}q^{(n+1-2k)j}(-1)^j=\sum_{j=0}^{n}\frac{1}{(q)_j(q)_{k-j}}q^{\frac{j(j+1)}{2}+(n+1-2k)j}(-1)^j$$

Из этого равенства и формулы 125 Хиршхорна следует равенство

$$P_{q,n}(z)=\sum_{k=0}^{[(n+1)/2]}z^kq^{k^2}\frac{(q)_{n+1-k}}{(q)_k(q)_{n+1-2k}}=$$

$$\sum_{k=0}^{[(n+1)/2]}z^kq^{k^2}\sum_{j=0}^{k}\frac{1}{(q)_j(q)_{k-j}}q^{\frac{j(j+1)}{2}+(n+1-2k)j}(-1)^j=$$

$$\sum_{j=0}^{[(n+1)/2]}\frac{(-1)^jq^{\frac{j(j+1)}{2}+(n+1)j}z^j}{(q)_j}\sum_{k=j}^{[(n+1)/2]}\frac{q^{(k-j)^2-j^2}}{(q)_{k-j}}z^{k-j}$$

Учитывая равенство

$$(q)_j=(1-q)\dots(1-q^j)=q^{\frac{j(j+1)}{2}}(-1)^j(1-q^{-1})\dots(1-q^{-j})$$

последнее равенство можно переписать в виде равенства 160.

Лемма (2). *Пусть Λ^β - подпоследовательность натуральных чисел такая, что $\lim_{n\in\Lambda}q^n=\beta$. Тогда равномерно на компактах, лежащих в круге $\{|z|<R_q\}$, существуют пределы*

$$\lim_{n\in\Lambda^\beta}P_{q,n}(z)=G_q(z)\overline{G_q(\overline{q\beta z})} \tag{161}$$

$$\lim_{n\in\Lambda^\beta}Q_{q,n}(z)=G_q(qz)\overline{G_q(\overline{q\beta z})} \tag{162}$$

Действительно, фиксируем число $m \in \mathbb{N}$ и заметим, что существует равномерный на компактах, лежащих в круге $\{|z| < R_q\}$, предел

$$\lim_{n\in\Lambda^\beta} \sum_{j=0}^{m} \frac{q^{-j^2}}{(q^{-1})_j} (zq^{n+1})^j \sum_{l=0}^{\left[\frac{n+1}{2}\right]-j} \frac{q^{l^2}}{(q)_l} z^l = \sum_{j=0}^{m} \frac{q^{-j^2}}{(q^{-1})_j} (zq\beta)^j \sum_{l=0}^{\infty} \frac{q^{l^2}}{(q)_l} z^l =$$

$$G_q(qz) \overline{\sum_{j=0}^{m} \frac{q^{j^2}}{(q)_j} (\overline{q\beta z})^j} \tag{163}$$

Заметим также, что для всякого положительного числа ε существует N такое, что при всех $m \geq N$ и всех $|z| < r < R_q$ выполняются неравенства

$$\left| G_q(qz) \overline{\sum_{j=0}^{m} \frac{q^{j^2}}{(q)_j} (\overline{q\beta z})^j} - G_q(qz) \overline{G_q(\overline{q\beta z})} \right| \leq \varepsilon \tag{164}$$

и

$$\left| \sum_{j=m+1}^{[(n+1)/2]} \frac{q^{-j^2}}{(q^{-1})_j} (zq^{n+1})^j \sum_{l=0}^{\left[\frac{n+1}{2}\right]-j} \frac{q^{l^2}}{(q)_l} z^l \right| \leq \sum_{j=m+1}^{\infty} \frac{r^j}{|(q)_j|} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{r^l}{|(q)_l|} \leq \varepsilon \tag{165}$$

Из равенства 163 и неравенств 164-165 получаем равенство 161.

Так как $\lim_{n\in\Lambda^\beta} q^{n-1} = \frac{\beta}{q}$, то из равенств 125 и 161 получаем также и равенство

$$\lim_{n\in\Lambda^\beta} Q_{q,n}(z) = \lim_{n\in\Lambda^\beta} P_{q,n-1}(qz) = G_q(qz) \overline{G_q(\overline{q\frac{\beta}{q}qz})}$$

совпадающее с равенством 162.

Следствие 1. Пусть Λ^β - подпоследовательность натуральных чисел такая, что $\lim_{n\in\Lambda} q^n = \beta$. Тогда равномерно на компактах, лежащих в множестве $\{|z| < R_q\} \setminus \{F_q \bigcup \overline{q^2\beta F_q}\}$, где F_q - множество полюсов функции $H_q(z)$ (или, что то же самое, нулей функции $G_q(qz)$), существует предел

$$\lim_{n\in\Lambda^\beta} \frac{P_{q,n}(z)}{Q_{q,n}(z)} = H_q(z)$$

Следствие 2. Непрерывная дробь Роджерса–Рамануджана сходится к функции H_q равномерно на компактах, лежащих в множестве $\{|z| < R_q\} \setminus \Omega_q$, где Ω_q - множество всех окружностей с центром в точке ноль, проходящих через полюсы функции H_q.

В частности, если функция H_q не имеет полюсов в круге $\{|z| < R_q\}$, то непрерывная дробь Роджерса–Рамануджана сходится к функции H_q равномерно на компактах, лежащих в этом круге. Так как $[n/n]_{H_q}(z) = \frac{P_{q,2n}(z)}{Q_{q,2n}(z)}$, то это означает, что при таких q функция H_q не является контрпримером к Паде-гипотезе. Легко видеть, что функция H_q не может являться контрпримером к Паде-гипотезе и в том случае, когда функция H_q имеет в круге $\{|z| < R_q\}$ только один полюс или несколько полюсов, аргументы которых совпадают, так как в этом случае

$$\overline{q^2\beta F_q} = F_q \quad \text{при} \quad \beta = q^{-2}e^{-2i\varphi}$$

где φ - общий аргумент всех полюсов функции H_q, и следовательно,

$$[n/n]_{H_q}(z) = \frac{P_{q,2n}(z)}{Q_{q,2n}(z)} \to H_q(z)$$

равномерно на компактах, лежащих в $\{|z| < R_q\} \setminus F_q$ при $2n \in \Lambda^\beta$, $\beta = q^{-2}e^{-2i\varphi}$. Легко видеть, что функция H_q не может являться контрпримером к Паде-гипотезе и в том случае, когда функция H_q имеет в круге $\{|z| < R_q\}$ ровно два полюса, равных по модулю.

Следствие 3. Пусть число $|q| = 1$ таково, что функция H_q имеет в круге $\{|z| < r\}$, где $r < R_q$, ровно два полюса z_1 и z_2 такие, что $|z_1| \neq |z_2|$ и $\arg z_1 - \arg z_2 \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Тогда функция H_q является контрпримером к Паде-гипотезе.

Заметим, что по условиям следствия 3 при всех $|\beta| = 1$ имеет место неравенство $\overline{q^2\beta F_q} \neq F_q$, где $F_q = \{z_1, z_2\}$ - множество полюсов функции H_q в круге $\{|z| < r\}$. Действительно, равенство $\overline{q^2\beta F_q} = F_q$ эквивалентно либо паре равенств $\overline{q^2\beta z_1} = z_1$, $\overline{q^2\beta z_2} = z_2$, либо паре равенств $\overline{q^2\beta z_1} = z_2$, $\overline{q^2\beta z_2} = z_1$. Первая пара равенств совпадает с равенствами $\beta = q^{-2}e^{-2iargz_1}$, $\beta = q^{-2}e^{-2iargz_2}$, которые одновременно не могут выполняться по предположению $\arg z_1 - \arg z_2 \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, а вторая пара равенств невозможна по предположению $|z_1| \neq |z_2|$.

Предположим, что функция H_q не является контрпримером к Паде-гипотезе. Тогда существует подпоследовательность $\Lambda = \Lambda(H_q)$ натуральных чисел такая, что $[n/n]_{H_q}(z) = \frac{P_{q,2n}(z)}{Q_{q,2n}(z)} \to H_q(z)$ при $n \in \Lambda$ равномерно на компактах, лежащих в $\{|z| < r\} \setminus F_q$. Выберем из последовательности Λ подпоследовательность $\Lambda^\beta \subseteq \Lambda$ такую, что $q^{2n} \to \beta$ при $n \in \Lambda^\beta$. Так как множество $\overline{q^2\beta F_q} \setminus F_q$ непусто при при всех $|\beta| = 1$, то существует точка $z_0 \in \overline{q^2\beta F_q} \setminus F_q$. Из равенства 162 следует, что точка z_0 является предельной для полюсов рациональных функций $\frac{P_{q,2n}(z)}{Q_{q,2n}(z)}$, $n \in \Lambda^\beta$. Следовательно, в окрестности точки z_0 не может быть равномерной сходимо-

сти $\frac{P_{q,2n}(z)}{Q_{q,2n}(z)} \to H_q(z)$ при $n \in \Lambda$. Полученное противоречие показывает, что функция H_q является контрпримером к Паде-гипотезе.

Утверждение. При $q = \exp\left(\frac{4\pi i}{99+\sqrt{5}}\right)$ функция H_q имеет в круге $\{|z| < 0.46\}$ ровно два полюса z_1 и z_2 таких, что $|z_1| \neq |z_2|$ и $\arg z_1 - \arg z_2 \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Утверждение проверяется непосредственными вычислениями при помощи компьютерной программы.

Подытоживая все вышесказанное, имеем следующее утверждение.

Контрпример Любински к Паде-гипотезе. Функция H_q при $q = \exp\left(\frac{4\pi i}{99+\sqrt{5}}\right)$ опровергает Паде-гипотезу.

Заметим, что в контрпримере Любински функция H_q не является алгебраической функцией и, следовательно, не опровергает гипотезу Шталя. Кроме того, функция H_q не опровергает (и, как было отмечено, не может опровергнуть ни при каком q) голоморфный вариант Паде-гипотезы. Ниже мы покажем, что функция

$$f(z) = \frac{-27 + 6z^2 + 3(9+j)z^3 + \sqrt{81(3-(3+j)z^3)^2 + 4z^6}}{2z(9 + 9z + (9+j)z^2)} \tag{166}$$

где $j = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ и выбрана та ветвь функции, при которой $f(0) = 0$, одновременно опровергает как гипотезу Шталя, так и голоморфный вариант Паде-гипотезы. В основе указанного контрпримера лежит тот факт, что функцию 166 можно разложить в периодическую (с периодом 3, так как $j^3 = 1$) непрерывную дробь

$$\frac{z|}{|3 - 3j^2 z} + \frac{jz^2|}{|3 - 3j^4 z} + \frac{j^2 z^2|}{|3 - 3j^6 z} + \frac{j^3 z^2|}{|3 - 3j^8 z} + \cdots \tag{167}$$

Заметим, что подходящие дроби $\frac{P_n(z)}{Q_n(z)}$ непрерывной дроби 167 совпадают с диагональными аппроксимациями Паде функции 166. Действительно, индукцией по n нетрудно показать, что $\deg P_n \leq n$, $\deg Q_n \leq n$. При этом имеет место равенство

$$f(z) - \frac{P_n(z)}{Q_n(z)} = \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{P_{n+k}(z)}{Q_{n+k}(z)} - \frac{P_{n+k-1}(z)}{Q_{n+k-1}(z)}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_1 z a_2 z^2 \dots a_{n+k} z^2}{Q_{n+k}(z) Q_{n+k-1}(z)} = Az^{2n+1} + \dots$$

Ниже будет показано, что функция $f(z)$ голоморфна в единичном круге $D = \{|z| < 1\}$. Отсутствие равномерной сходимости на компактах, лежащих в круге D, будет основано на усиленном варианте ранее доказанной теоремы о сходимости композиций последовательности дробно

линейных преобразований с предельно постоянными голоморфными по параметру коэффициентами. Напомним ранее введенные обозначения и введем некоторые дополнительные обозначения.

Пусть $m \in \mathbb{N}$, дробно линейные (по w) преобразования

$$S_n(w,z) = \frac{\alpha_n(z)w + \beta_n(z)}{\gamma_n(z)w + \delta_n(z)} \tag{168}$$

таковы, что коэффициенты $\alpha_n(z), \beta_n(z), \gamma_n(z), \delta_n(z)$ являются голоморфными по z функциями в некоторой области Ω комплексной плоскости и имеют (периодические) равномерные на компактах, лежащих в Ω, пределы

$$\begin{array}{l} \lim_{n\to\infty} \alpha_{nm+l}(z) = \alpha^l(z) \quad , \quad \lim_{n\to\infty} \beta_{nm+l}(z) = \beta^l(z) \\ \lim_{n\to\infty} \gamma_{nm+l}(z) = \gamma^l(z) \quad , \quad \lim_{n\to\infty} \delta_{nm+l}(z) = \delta^l(z) \end{array}, \; l = 1, \ldots, m \tag{169}$$

Пусть

$$S^l(w,z) = \frac{\alpha^l(z)w + \beta^l(z)}{\gamma^l(z)w + \delta^l(z)} \quad , \quad S(w,z) = S^1 \circ \cdots \circ S^m(w,z) = \frac{\alpha(z)w + \beta(z)}{\gamma(z)w + \delta(z)}$$

$$I(z) = \alpha(z) + \delta(z) \quad , \quad \Delta(z) = \alpha(z)\delta(z) - \beta(z)\gamma(z)$$

Γ - множество тех $z \in \Omega$, при которых неподвижные точки предельного дробно линейного преобразования $S(w,z)$ нейтральны, то есть

$$\Gamma = \{z \in \mathbb{C} : \; I^2(z) = 4t\Delta(z)) \, , \, 0 \le t \le 1\} \tag{170}$$

$\sqrt{z}$ - голоморфная ветвь, определенная при $z \in \mathbb{C} \setminus [-\infty, 0]$ и такая, что $|1 + \sqrt{z}| > |1 - \sqrt{z}|$, $p(z)$ - отталкивающая неподвижная точка дробно линейного преобразования $S(w,z)$, то есть

$$p(z) = \frac{\alpha(z) - \delta(z) - I(z)\sqrt{1 - \frac{4\Delta(z)}{I^2(z)}}}{2\gamma(z)} \quad , \quad z \in \Omega \setminus \Gamma \tag{171}$$

$$p^l(z) = S^l \circ \cdots \circ S^m(p(z), z) \quad , \quad l = 1, \ldots, m$$

$$\Lambda = \{(w,z) \in \overline{\mathbb{C}}^2 \times (\Omega \setminus \Gamma) : w \neq p^1(z), \ldots, w \neq p^m(z)\}$$

Теорема. *Во введенных выше предположениях и обозначениях имеют место следующие утверждения*

1°. *Последовательность композиций $S_1 \circ \cdots \circ S_n(w,z)$ сходится к функции $f(z)$ при $n \to \infty$ равномерно в сферической метрике на любом множестве из $\mathbb{C}^2$ вида $K \times \bigcap_{l=1}^m \{|w - p^l(z)| \ge \varepsilon\}$, где K - произвольный компакт, лежащий в области $\Omega \setminus \Gamma$, $\varepsilon > 0$.*

2°. *Предельная функция $f(z)$ не зависит от w и является мероморфной по z функцией на множестве $\Omega \setminus \Gamma$.*

Доказательство. Теорема ранее была доказана при $m = 1$. Пусть Γ^l, $l = 1, \dots, m$, - множество тех $z \in \Omega$, для которых нейтральны неподвижные точки дробно линейного преобразования

$$T^l(w, z) = S^l \circ \cdots \circ S^m \circ S^1 \circ \cdots \circ S^{l-1}(w, z)$$

Так как след и определитель произведения матриц не меняются при их круговой перестановке, то множество Γ^l не зависит от l и совпадает с множеством Γ. Легко видеть, что $p^l(z)$ при $z \in \Omega$ является отталкивающей неподвижной точкой дробно линейного преобразования $T^l(w, z)$. Так как

$$\lim_{n\to\infty} S_{(n-1)m+l+1} \circ \cdots \circ S_{nm+l}(w, z) = T^{l+1}(w, z)$$

то по доказанной при $m = 1$ теореме каждая из последовательностей $S_1 \circ \cdots \circ S_{nm+l}(w, z) =$

$$(S_1 \circ \cdots \circ S_l) \circ (S_{l+1} \circ \cdots \circ S_{n+l}) \circ \cdots \circ (S_{(n-1)m+l+1} \circ \cdots \circ S_{nm+l})(w, z)\,,\ l = 1, \dots, m$$

сходится к независящей от w мероморфной по z на множестве $\Omega \setminus \Gamma$ функции $f^l(z)$ равномерно в сферической метрике на любом множестве из $\mathbb{C}^2$ вида $K \times \{|w - p^{l+1}(z)| \geq \varepsilon\}$. Поэтому для доказательства теоремы остается лишь показать, что $f^1(z) = \cdots = f^m(z)$. Для этого заметим, что

$$\lim_{n\to\infty} S_{nm+1} \circ \cdots \circ S_{nm+l}(w, z) = S^1 \circ \cdots \circ S^l(w, z)$$

$$S^1 \circ \cdots \circ S^l(p^{l+1}(z), z) = p(z)$$

и следовательно,

$$\left|S_{nm+1} \circ \cdots \circ S_{nm+l}(w, z) - p(z)\right| \geq \frac{\varepsilon}{2}$$

при всех достаточно больших n и всех w таких, что $|w - p^{l+1}(z)| \geq \varepsilon$. Поэтому при $l = 1, \dots, m-1$ имеет место равенство

$$f^l(z) = \lim_{n\to\infty} S_1 \circ \cdots \circ S_{nm+l}(w, z) =$$

$$\lim_{n\to\infty} (S_1 \circ \cdots \circ S_m) \circ \cdots \circ (S_{(n-1)m+1} \circ \cdots \circ S_{nm}) \big(S_{nm+1} \circ \cdots \circ S_{nm+l}(w, z)\big) = f^m(z)$$

Теорема доказана.

Применим полученную теорему (точнее ее простейший чисто периодический вариант) к периодической с периодом $m = 3$ непрерывной дроби 167, точнее, к дробно линейным преобразованиям

$$S_n(w, z) = \frac{j^{n-1} z^2}{w + 3 - 3j^{2n} z}\,,\ n = 1, 2, \dots \tag{172}$$

где $j = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ $(j^3 = 1)$.

Для таких дробно линейных преобразований имеем

$$S(w,z) = S_1 \circ S_2 \circ S_3(w,z) = \cfrac{z^2}{3 - 3j^2 z + \cfrac{jz^2}{3 - 3jz + \cfrac{j^2 z^2}{3 - 3z + w}}}$$

Полагая $S(w,z) = \frac{\alpha(z)w + \beta(z)}{\gamma(z)w + \delta(z)}$, отсюда находим

$$\alpha(z) = 3z^2(1 - jz) \quad , \quad \beta(z) = z^2[9 + 9j^2 z + j(9 + j)z^2]$$

$$\gamma(z) = 9 + 9z + (9 + j)z^2 \quad , \quad \delta(z) = 27 - 3z^2 - 3(9 + 2j)z^3$$

Следовательно,

$$I(z) = \alpha(z) + \delta(z) = 27 - (27 + 9j)z^3$$

$$\Delta(z) = \alpha(z)\delta(z) - \beta(z)\gamma(z) = \prod_{l=1}^{3}(-j^{l-1}z^2) = -z^6$$

$$\Gamma = \{z \in \mathbb{C} : \, 27 - (27 + 9j)z^3 = \pm 2itz^3 \, , \, 0 \le t \le 1\} =$$

$$\{z \in \mathbb{C} : \, z = 3(27 + 9j \pm 2it)^{-1/3} \, , \, 0 \le t \le 1\}$$

Непосредственный подсчет показывает, что

$$\min_{z \in \Gamma} |z| = \min_{0 \le t \le 1} 3|27 + 9j \pm 2it|^{-1/3} = 3|27 + 9j + 2i|^{-1/3} =$$

$$3\left(22.5^2 + \left(\frac{9\sqrt{3}}{2} + 2\right)^2\right)^{-1/6} > 1.032 > 1$$

Это означает, что множество Γ лежит вне единичного круга $D = \{|z| < 1\}$.

Притягивающая неподвижная точка $p^*(z)$ дробно линейного преобразования $S(w,z)$ задается равенством

$$p^*(z) = \frac{\alpha(z) - \delta(z) + \sqrt{I^2(z) - 4\Delta(z)}}{2\gamma(z)} =$$

$$\frac{-27 + 6z^2 + 3(9 + j)z^3 + \sqrt{81(3 - (3 + j)z^3)^2 + 4z^6}}{2(9 + 9z + (9 + j)z^2)}$$

и равна $zf(z)$, где функция $f(z)$ определяется равенством 166 (множитель z здесь появляется по той причине, что первый этаж непрерывной

дроби 167 отличается на этот множитель от дробно линейного преобразования $S_1(w,z)$). Отталкивающая неподвижная точка $p(z)$ получается другим выбором ветви гиперэллиптической функции.

Найдем множество тех $z \in \mathbb{C} \setminus \Gamma$, при которых $p(z) = 0$. Очевидно, что множество $\{p(z) = 0\}$ полностью определяется двумя условиями $S(0,z) = 0$ (это условие означает, что точка $w = 0$ является неподвижной точкой дробно линейного преобразования $S(w,z)$) и $\left|\frac{\partial S(0,z)}{\partial w}\right| > 1$ (это условие означает, что неподвижная точка $w = 0$ является отталкивающей). Следовательно,

$$\{p(z) = 0\} = \{z \in \mathbb{C} \setminus \Gamma : \beta(z) = 0\,, \left|\frac{\alpha(z)}{\delta(z)}\right| > 1\}$$

Заметим, что корень $z = 0$ многочлена $\beta(z)$ не принадлежит множеству $\{p(z) = 0\}$, так как $\alpha(0) = 0$. Непосредственный подсчет двух других корней z_1 и z_1^* многочлена $\beta(z)$, то есть корней многочлена $9+9j^2z+j(9+j)z^2$, показывает, что $z_1 \approx 0.993587-0.0646718i$, $|z_1| < 0.9957$, $|z_1^*| > 1.057$. Кроме того,

$$\left|\frac{\alpha(z_1)}{\delta(z_1)}\right| = \left|\frac{3z_1^2(1-jz_1)}{\delta(z_1)+3\beta(z_1)(j^2z_1-1)/z_1^2}\right| = \left|\frac{3z_1^2(1-jz_1)}{3z_1^2j(1-z_1)}\right| = \left|\frac{z_1-j^2}{z_1-1}\right| > 1$$

Таким образом $z_1 \in \{p(z) = 0\} \bigcap D$, $z_1^* \notin D$. (Для полноты картины можно проверить, что точка z_1^* является притягивающей неподвижной точкой, то есть не принадлежит множеству $\{p(z) = 0\}$, но этот факт нам не потребуется.)

Легко видеть, что $S_l(w,z) = S_1(w, j^{2(l-1)}z)$, $l = 1,2,3$. Поэтому

$$S_2 \circ S_3 \circ S_1(w,z) = S(w,j^2z) \quad , \quad S_3 \circ S_1 \circ S_2(w,z) = S(w,jz)$$

Следовательно,

$$E \bigcap D = \left(\bigcup_{l=1}^{3}\{p^l(z) = 0\}\right) \bigcap D = \{z_1, jz_1, j^2z_1\}$$

Заметим далее, что множество F полюсов функции f является подмножеством множества корней многочлена $\gamma(z)$ и что $\gamma(z) = \beta(jz)/(jz)^2$. Это означает, что $F \subseteq \{j^2z_1, j^2z_1^*\}$. Покажем, что в точке $z_2 = j^2z_1$ функция f не имеет полюса, то есть покажем, что

$$\alpha(z_2) - \delta(z_2) + \sqrt{I^2(z_2) - 4\Delta(z_2)} = 0 \tag{173}$$

Действительно, так как z_2 - корень многочлена $\gamma(z)$, то

$$I^2(z_2) - 4\Delta(z_2) = \big(\alpha(z_2) - \delta(z_2)\big)^2 + 4\beta(z_2)\gamma(z_2) = \big(\alpha(z_2) - \delta(z_2)\big)^2$$

Следовательно,

$$\sqrt{I^2(z_2)-4\Delta(z_2)}=\pm\big(\alpha(z_2)-\delta(z_2)\big) \tag{174}$$

Заметим, что в равенстве 174 знак должен быть выбран так, чтобы

$$|I(z_2)+\sqrt{I^2(z_2)-4\Delta(z_2)}|>|I(z_2)-\sqrt{I^2(z_2)-4\Delta(z_2)}|$$

Так как

$$\left|\frac{I(z_2)-\big(\alpha(z_2)-\delta(z_2)\big)}{I(z_2)+\big(\alpha(z_2)-\delta(z_2)\big)}\right|=\left|\frac{\big(\alpha(z_2)+\delta(z_2)\big)-\big(\alpha(z_2)-\delta(z_2)\big)}{\big(\alpha(z_2)+\delta(z_2)\big)+\big(\alpha(z_2)-\delta(z_2)\big)}\right|=\left|\frac{\delta(z_2)}{\alpha(z_2)}\right|=$$

$$\left|\frac{\delta(z_2)+3\gamma(z_2)(z_2-1)}{3z_2^2(1-jz_2)}\right|=\left|\frac{3jz_2^2(j-z_2)}{3z_2^2(1-jz_2)}\right|=\left|\frac{z_2-j}{z_2-j^2}\right|=$$

$$\left|\frac{j^2z_1-j}{j^2z_1-j^2}\right|=\left|\frac{z_1-j^2}{z_1-1}\right|>1$$

то в равенстве 174 знак $\pm$ следует заменить знаком $-$ и получить тем самым равенство 173. (Для полноты картины можно проверить, что точка $z_2^*=j^2z_1^*$, лежащая вне единичного круга, является полюсом функции $f(z)$). Таким образом гиперэллиптическая функция $f(z)$ голоморфна в единичном круге D.

Итак, подходящие дроби непрерывной дроби 167 (то есть диагональные аппроксимации Паде функции $f(z)$) сходятся во всех точках множества $D\setminus E=D\setminus\{z_1,jz_1,j^2z_1\}$ к гиперэллиптической голоморфной в единичном круге D функции $f(z)$. В точке z_1 подходящие дроби $\frac{P_{3n}}{Q_{3n}}$ равны $f^*(z_1)$, в точке jz_1 подходящие дроби $\frac{P_{3n+2}}{Q_{3n+2}}$ равны $f^*(jz)$, в точке j^2z_1 подходящие дроби $\frac{P_{3n+1}}{Q_{3n+1}}$ равны $f^*(j^2z)$, где $f^*(z)$ - другая ветвь гиперэллиптической функции $f(z)$. Легко видеть, что $f^*(z)\neq f(z)$ при всех $z\notin\Gamma$, и в частности при $z=z_1,jz_1,j^2z_1$, так как $f(z)$ и $f^*(z)$ - это притягивающая и отталкивающая точки дробно линейного преобразования $S(w,z)$, которые не могут совпасть между собой (иначе они были бы нейтральными неподвижными точками). Таким образом никакая подпоследовательность подходящих дробей не может равномерно сходиться к функции $f(z)$ ни на каком компакте круга D, содержащем точки z_1,jz_1,j^2z_1. Таким образом функция $f(z)$ одновременно является контрпримером и к гипотезе Шталя и к голоморфному варианту Паде-гипотезы.

Укажем еще одно приложение вышедоказанной теоремы о сходимости композиций дробно линейных преобразований с предельно периодическими коэффициентами. Применительно к С-дробям, то есть дробно линейным преобразованиям $S_n(w,z)=\frac{a_n z}{w+1}$ доказанная теорема допускает следующее уточнение.

Теорема. *Пусть С-дробь*

$$1+\cfrac{a_1 z}{1+\cfrac{a_2 z}{1+\dots}} \tag{175}$$

имеет предельно периодические с периодом m коэффициенты $\lim_{n\to\infty} a_{nm+l}(z)=a^l$. Тогда

1°. *С-дробь 175 сходится к функции $f(z)$ на содержащем точку $z=0$ множестве $D=\mathbb{C}\setminus(\Gamma\bigcup E)$, где*

$$\Gamma=\Gamma(a^1,\dots,a^m)=\{z\in\mathbb{C}:\ z^{-m}I^2(z;a^1,\dots,a^m)\in[0,4(-1)^m a^1\dots a^m]\}$$

$$I(z;a^1,\dots,a^m)=Tr\left(\begin{pmatrix}0 & a^1z\\ 1 & 1\end{pmatrix}\times\dots\times\begin{pmatrix}0 & a^mz\\ 1 & 1\end{pmatrix}\right)$$

- алгебраический многочлен степени не выше $[m/2]$ с единичным свободным членом, $E=E(a^1,\dots,a^m)$ - конечное множество, состоящее из не более, чем $m[(m-1)/2]$ точек (в частности, E - пустое множество при $m=1,2$.

2°. *Функция $f(z)$ мероморфна в D и сходимость равномерна на компактах, лежащих в D и не содержащих полюсов функции $f(z)$.*

3°. *Функция $f(z)$ допускает мероморфное продолжение в $\mathbb{C}\setminus\Gamma$.*

4°. *Функция $f(z)$ не может быть мероморфно продолжена ни в какую область вида $(\mathbb{C}\setminus\Gamma)\bigcup\{|z-z_0|<\varepsilon\}$, где $z_0\in\Gamma$, ε - произвольное положительное число.*

5°. *Множество Γ зависит только от $a^1,\dots,a^m$ и обладает тем свойством, что функция $\sqrt{I^2(z;a^1,\dots,a^m)-4(-1)^m a^1\dots a^m z^m}$ является однозначной на множестве $\mathbb{C}\setminus\Gamma$ функцией и для любого компакта K, обладающего этим же свойством, имеет место неравенство $d(K^{-1})\geq d(\Gamma^{-1})$, где $d()$ - трансфинитный диаметр.*

Доказательство. Так как сходимость С-дроби 175 эквивалентна сходимости композиций $S_1\circ\dots\circ S_n(0,z)$, где $S_n(w,z)=\frac{a_n z}{w+1}$ и так как для таких дробно линейных преобразований в предыдущих обозначениях $\Delta(z)=(-1)^m a^1\dots a^m z^m$, то

$$\Gamma=\{z\in\Omega:\ I^2(z)=4t\Delta(z)\,,\,0\leq t\leq 1\}=\{z\in\mathbb{C}:\ I^2(z;a^1,\dots,a^m)=$$

$$4t(-1)^m a^1 \dots a^m)\,,\ 0 \le t \le 1\} =$$
$$\{z \in \mathbb{C} :\ z^{-m} I^2(z; a^1, \dots, a^m) \in [0, 4(-1)^m a^1 \dots a^m]\} = \Gamma(a^1, \dots, a^m)$$

По теореме С-дробь 175 сходится на множестве $D = \mathbb{C} \setminus (\Gamma \bigcup E)$, где $E = \bigcup_{l=1}^{m} \{z \in \mathbb{C} :\ 0 = p^l(z)\}$, к функции $f(z)$, мероморфной в $\mathbb{C} \setminus \Gamma$, равномерно на компактах, лежащих в D и не содержащих полюсов функции $f(z)$. По критерию Ворпицкого $0 \in D$.

По индукции нетрудно показать, что

$$\begin{pmatrix} 0 & a^1 z \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \times \dots \times \begin{pmatrix} 0 & a^m z \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^1 z t_{1,1}(z) & a^1 z t_{1,2}(z) \\ t_{2,1}(z) & t_{2,2}(z) \end{pmatrix}$$

где

$$\deg t_{1,1} \le \left[\frac{m-1}{2}\right] - 1\,,\ \deg t_{1,2} \le \left[\frac{m}{2}\right]\,,\ \deg t_{2,1} \le \left[\frac{m-1}{2}\right]\,,\ \deg t_{2,2} \le \left[\frac{m}{2}\right]$$

$t_{2,2}(0) = 1$. Так как $p(z)$ - это неподвижная точка дробно линейного преобразования

$$S(w, z) = \frac{a^1 z t_{1,1}(z) w + a^1 z t_{1,2}(z)}{t_{2,1}(z) w + t_{2,2}(z)}$$

то

$$\{p(z) = 0\} \subset \{S(0, z) = 0\} = \{a^1 z t_{1,2}(z) = 0\} = \{0\} \bigcup \{t_{1,2}(z) = 0\}$$

Так как $0 \in D$, то $0 \notin E$ и, следовательно, множество $\{p(z) = 0\}$ содержится в множестве $\{t_{1,2}(z) = 0\}$, состоящем из не более, чем $[(m-1)/2]$ точек. Аналогичное утверждение верно и для каждого из множеств $\{p^l(z) = 0\}$, $l = 1, \dots, m$. Таким образом множество $E = \bigcup_{l=1}^{m} \{z \in \mathbb{C} :\ 0 = p^l(z)\}$ состоит из не более, чем $m[(m-1)/2]$ точек. В частности, множество E пусто при $m = 1, 2$.

По теореме, позволяющей выразить ганкелевы определители функции, к которой сходится С-дробь, через коэффициенты С-дроби, и предположения о существовании периодических пределов имеет место равенство

$$\lim_{n \to \infty} |\Delta_{n,1}|^{1/n^2} = |a^1 \dots a^m|^{1/m} \tag{176}$$

Пусть K - компакт такой, что росток функции $f(z)$, взятый в окрестности точки $z = 0$, допускает мероморфное продолжение в $\mathbb{C} \setminus K$. Тогда по теореме Полиа

$$d(K^{-1}) \ge \overline{\lim}_{n \to \infty} |\Delta_{n,1}|^{1/n^2} \tag{177}$$

Из неравенства 177 и равенства 176 следует, что

$$d(K^{-1}) \ge |a^1 \dots a^m|^{1/m} \tag{178}$$

С другой стороны, заметим, что $I(z; a^1, \ldots, a^m) = a^1 z t_{1,1}(z) + t_{2,2}(z)$ - многочлен степени не выше $[m/2]$ и $I(0) = 1$. Следовательно, $t_m(z) = z^m I^2(z^{-1}; a^1, \ldots, a^m)$ - многочлен степени m с единичным старшим коэффициентом. Поэтому по хорошо известным свойствам трансфинитного диаметра имеет место равенство

$$d(\Gamma^{-1}) = d(\{t_m(z) \in [0, 4(-1)^m a^1 \ldots a^m]\} = d^{1/m}([0, 4(-1)^m a^1 \ldots a^m]) =$$

$$|a^1 \ldots a^m|^{1/m} \tag{179}$$

Из неравенства 178 и равенства 179 следует неравенство

$$d(\Gamma^{-1}) \leq d(K^{-1}) \tag{180}$$

Так как трансфинитный диаметр множества $\left(\Gamma \setminus \{|z - z_0| < \varepsilon\}\right)^{-1}$ строго меньше трансфинитного диаметра множества Γ^{-1}, то из неравенства 180 получаем утверждение 4° теоремы.

Кроме того, так как неравенство 180 имеет место и в чисто периодическом случае ($a_{nm+l} = a^l$ при всех $n = 0, 1, \ldots$, $l = 1, \ldots m$), в котором функция $f(z)$ легко находится как притягивающая неподвижная точка дробно линейного преобразования $S(w, z)$, то тем самым утверждение 5° теоремы также является следствием неравенства 180.