

Недавно сотрудник Отдела теории функций О.В.Бесов успешно защитил докторскую диссертацию, посвященную теоремам вложения классов дифференцируемых функций.

Меня спрашивают, в чем заключаются научные достижения Олега Владимировича. Постараюсь ответить.

Прежде всего Олег Владимирович предложил (ввел в науку) замечательное семейство классов функций, зависящее от произвольного положительного вектора $\vec{\alpha}$, двух параметров p и θ $(1 \le p, \theta \le \infty)$ и произвольной n-мерной области Ω. Мы обозначаем это семейство через $B^{\vec{\alpha}}_{p\theta}(\Omega)$. Каждому допустимому θ соответствует определенное частное семейство, где можно еще менять $\vec{\alpha}, p, \Omega$

Одно из этих семейств соответствующее $\theta = \infty$ представляет собой совокупность классов функций, заданных на области Ω и имеющих на ней интегрируемые в p-тых степенях производные определенных порядков, удовлетворяющих к тому же условию Гёльдера заданных степеней или видоизмененному условию Гёльдера (первая разность заменяется на вторую). Для этого семейства были ранее доказаны теоремы вложения и было обнаружено, что они являются замкнутыми в себе. Что это значит, отчасти будет видно ниже.

Семейства О.В.Бесова соответствующие конечным θ определяется несколько хитрее, и я не буду пытаться описывать их словесно. Во всяком случае роль неравенств Гёльдера здесь играют некоторые их видоизменения, требующие дополнительного интегрирования. Олег Владимирович доказал для своих классов основные теоремы вложения и показал, что в его случаях эти теоремы также являются замкнутыми в себе.

Но важная роль классов Бесова была осознана несколько позднее, после того как была полностью решена проблема следов функций Соболевских классов W_p^r. Я ограничусь теперь формулировками, относящимися только к изотропным классам, которые характеризуются числом r вместо вектора $\vec{r}$.

Допустим, что задан некоторый класс функций $\Lambda(\Omega_n)$, определенных на n-мерной области и пусть Ω_m есть принадлежащее к Ω_n достаточно гладкое многообразие или граница Ω_n измерения $m < n$. Задача о следах заключается в том, что надо узнать (охарактеризовать) свойства следов функций $f \in \Lambda(\Omega_n)$ на Ω_m. Если Λ есть один из B - классов ($B(\Omega_n)$), то для него эта задача решается исчерпывающим образом и притом в терминах B-классов ($B(\Omega_m)$). В частности, в этом проявляется замкнутость теорем вложения для B-классов.

Очень важно было решить эту задачу для классов W_p^r. Теоремы вложения Соболева не решали этот вопрос до конца. Над решением этой задачи работали весьма активно у нас в семинаре (О.В.Бесов, П.И.Лизоркин, С.В.Успенский) в Ленинграде (Л.Н.Слободецкий, В.М. Бабич) и еще в Америке (Ароншайн) и в Италии (Гальярдо). Я не собираюсь здесь описывать историю вопроса, она описана в моем обзоре в УМН (1961). Могу только сказать, что эта тонкая задача была наконец полностью решена и завершающие результаты по ней принадлежат О.В.Бесову. Оказалось, что следы функций Соболевских классов полностью характеризуются в терминах B-классов. Основные результаты по теоремам вложения сначала были получены либо для достаточно простых областей, Ω либо для всего пространства ($\Omega = R_n$). Прямоугольник со сторонами, параллельными осям координат, во всех подобных задачах оказывался также простым, как все пространство. Область с гладкой границей не всегда. В анизотропных случаях, когда дифференциальные свойства функций заданного класса различны по разным направлениям, уже шар является довольно таки неприятной областью. Так или иначе естественно возник вопрос об описании тех областей Ω, для которых та или иная теорема вложения звучит также, как в случае, когда областью Ω является все n-мерное пространство. Решение этой трудной задачи требует развития специальных методов. Сейчас эта задача значительно продвинута вперед благодаря работам О.В.Бесова и В.П.Ильина (ЛОМИ).

С.М.Никольский