Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Математический институт им. В.А. Стеклова
Российской академии наук

На правах рукописи



Яшин Всеволод Игоревич

ПРИЛОЖЕНИЯ ТЕОРИИ ОПЕРАТОРНЫХ СИСТЕМ И АНАЛИЗ ЧИСЛОВЫХ ХАРАКТЕРИСТИК КАНАЛОВ ПЕРЕДАЧИ ИНФОРМАЦИИ В НЕКОММУТАТИВНОЙ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Специальность 1.1.4 — «Теория вероятностей и математическая статистика»

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Москва — 2026

Работа выполнена в отделе теории вероятностей и математической статистики Федерального государственного бюджетного учреждения науки Математический институт им. В.А. Стеклова Российской академии наук

Научный руководитель:
Амосов Григорий Геннадьевич — доктор физико-математических наук, профессор, ведущий научный сотрудник отдела теории вероятностей и математической статистики Федерального государственного бюджетного учреждения науки Математического института им. В.А. Стеклова Российской академии наук
(специальности 01.01.01, 01.04.02)

Официальные оппоненты:
Гумеров Ренат Нельсонович — доктор физико-математических наук, доцент, профессор кафедры математического анализа и приложений Института математики и механики им. Н.И. Лобачевского Федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «Казанский (Приволжский) федеральный университет»
(специальность 01.01.01)
Колокольцов Василий Никитич — доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры математической статистики факультета вычислительной математики и кибернетики Федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова»
(специальность 01.01.03)

Ведущая организация:
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»

Защита диссертации состоится 24.12.2026 в 14 час. на заседании диссертационного совета 24.1.167.01 при МИАН по адресу: г. Москва, ул. Губкина, д. 8.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке МИАН и на сайте `https://mi-ras.ru/dis/ref26/yashin/dis.pdf`

Автореферат разослан «» октября 2026 г.

Учёный секретарь диссертационного совета 24.1.167.01,
доктор физ.-мат. наук, профессор В.А. Ватутин



Общая характеристика работы

Актуальность и степень разработанности темы исследования. Некоммутативная теория вероятностей возникла как математически строгий формализм для описания вероятностного поведения квантовых систем. Уже в ранних работах Дж. фон Неймана проявилось принципиальное отличие от классической статистики: если в классических системах случайные величины описываются измеримыми функциями в аксиоматике Колмогорова и все величины совместны, то в квантовых системах наблюдаемым отвечают самосопряжённые операторы на гильбертовом пространстве, которые могут не коммутировать. Последовательное развитие аппарата теории операторов привело к «алгебраическому» взгляду на классическую теорию вероятностей как теорию коммутативных алгебр фон Неймана и нормальных унитальных положительных отображений между ними, а некоммутативную — как теорию произвольных алгебр фон Неймана и вполне положительных отображений (квантовых каналов) [6; 7].

Ключевым оказалось понятие вполне положительности [8; 9]. Наиболее общими структурами, в терминах которых оно определено, являются *операторные системы* — содержащие единицу самосопряжённые подпространства C^*-алгебр [10]. Их естественно воспринимать как некоммутативные аналоги функциональных систем и банаховых решёток [11], а согласно результатам Дэвидсона и Кеннеди [12] — как пространства аффинных функций на «некоммутативных выпуклых компактах».

Дополнительную актуальность придают развитие квантовых вычислений и квантовых коммуникаций, а также программа обобщённых вероятностных теорий [13]. При этом ряд естественных вопросов остаётся недоисследованным: некоммутативные графы ошибок изучались в основном в конечномерном случае; свойства непрерывной вполне положительной динамики на операторных системах — в отличие от хорошо развитой теории полугрупп на C^*-алгебрах [14] — практически не рассматривались; понятие условной вполне положительности было определено лишь для C^*-алгебр; для ряда физически важных гауссовских измерений информационные характеристики не были вычислены.

Цели и задачи. Целью данной работы является исследование применимости теории операторных систем и вполне положительных отображений в некоммутативной теории вероятностей и вычисление числовых характеристик возникающих в этой теории квантовых каналов и измерений.

Для достижения поставленных целей было необходимо решить следующие задачи:

1. Развить аппарат описания некоммутативных графов ошибок для каналов над бесконечномерными сепарабельными гильбертовыми пространствами.

2. Исследовать вполне положительную динамику на операторных системах и её связь с динамикой на C^*-алгебрах.

3. Обобщить понятие условно унитальных вполне положительных отображений на случай произвольных операторных систем и изучить для них задачу продолжения.

4. Исследовать редукцию энтропии и пропускную способность с использованием сцепленности для приближённых измерений координаты в многомодовых бозонных системах.

5. Построить вероятностное представление квантовой механики на основе минимальных информационно полных измерений и вывести в нём уравнения динамики.

Научная новизна.

1. Изучены свойства бесконечномерных операторных графов ошибок и впервые предложен метод построения квантового канала связи, шумы в котором описываются заданным некоммутативным графом ошибок, в случае бесконечномерных сепарабельных гильбертовых пространств.

2. Впервые изучена проблема продолжения однопараметрических полугрупп унитальных вполне положительных отображений на операторных системах: в случае конечномерных гильбертовых пространств доказана теорема о возможности расширения такой полугруппы до полугруппы на конечномерных C^*-алгебрах и теорема о единственности расширения для обратимых полугрупп.

3. Впервые рассмотрено определение для условно унитальных вполне положительных отображений между операторными системами. Для случая конечномерных гильбертовых пространств доказана теорема типа Арвесона о возможности расширения условно унитального вполне положительного отображения со значениями в матричной алгебре при условии невырожденности.

4. В рамках программы по изучению пропускных способностей гауссовских измерений и каналов впервые рассмотрен случай шумного измерения координаты в многомодовых квантовых системах с непрерывными переменными. Доказана теорема о «гауссовском максимизаторе»

величины редукции энтропии и написаны формулы в явном виде для нахождения пропускной способности с использованием сцепленности.

5. В рамках программы по изучению квазивероятностных представлений квантовой механики и некоммутативной статистики впервые изучен вопрос об описании динамики квантовых систем в вероятностных представлениях, основанных на минимальных информационно полных измерениях, выписаны явные уравнения динамики.

Теоретическая и практическая значимость работы. Работа носит теоретический характер; её результаты могут быть использованы в некоммутативной теории вероятностей, теории операторных алгебр и квантовой теории информации, в частности при оценке информационных характеристик реальных схем гомодинного детектирования и при классическом моделировании квантовых вычислений.

Методология и методы исследования. В работе используются методы математического анализа задач некоммутативной теории вероятностей и статистики, опирающиеся на понятия функционального анализа, теории меры, теории операторов, общей алгебры и теоретической физики. Наряду с аналитическими методами используются численные методы и визуализация полученных данных.

Основные положения, выносимые на защиту:

1. Исследованы свойства бесконечномерных некоммутативных графов ошибок в квантовых каналах связи, для случая сепарабельных гильбертовых пространств доказано существование квантового канала связи, шумы в котором описываются заданной операторной системой.

2. Доказана теорема о возможности расширения однопараметрической полугруппы унитальных вполне положительных отображений до полугруппы унитальных вполне положительных отображений на инъективной оболочке в случае матричных систем и конечномерных C^*-алгебр; для обратимого случая доказана единственность расширения.

3. Предложено определение условно унитальных вполне положительных отображений между операторными системами и изучены их простейшие свойства, доказана теорема типа Арвесона о возможности расширения ограниченного условно унитального вполне положительного отображения со значениями в матричной $*$-алгебре.

4. Исследованы числовые характеристики каналов приближённого измерения координаты в многомодовых квантовых системах с непрерывными

переменными: величина редукции энтропии и пропускная способность канала с использованием сцепленности. Для величины редукции энтропии доказано свойство «гауссовского максимизатора» и найдено явное выражение максимума этой величины в классе состояний с заданной матрицей ковариаций. На основе этого выражения получен способ вычисления пропускной способности канала измерения с использованием сцепленности, подробно рассмотрен случай одной бозонной моды.

5. Разработана теория динамики в формализме вероятностных представлений квантовой механики, основанных на использовании минимальных информационно полных измерений. Выписаны уравнения унитарной и марковской эволюции в таких представлениях.

Степень достоверности и апробация результатов. Достоверность полученных результатов обеспечивается строгостью используемых математических методов: все утверждения работы снабжены полными доказательствами, опирающимися на классические результаты функционального анализа, теории операторных алгебр и теории операторных систем. Численные результаты воспроизводимы и согласуются с аналитическими предсказаниями.

Основные результаты работы прошли апробацию на следующих всероссийских и международных конференциях: 62-я научная конференция МФТИ (Москва, 2019), конференция отдела математических методов квантовых технологий МИАН (Москва, 2020), 63-я научная конференция МФТИ (Долгопрудный, 2020), VI International Conference on Quantum Technologies (Москва, 2021), «Теория функций, теория операторов и квантовая теория информации» (Уфа, 2021), Complex Analysis and Related Topics (Казань, 2022), «Математика в квантовых технологиях» (Москва, 2022), «Теория функций, теория операторов и квантовая теория информации» (Уфа, 2023), 32nd St. Petersburg Summer Meeting in Mathematical Analysis (Санкт-Петербург, 2023), IV конференция математических центров России (Санкт-Петербург, 2024), 33rd St. Petersburg Summer Meeting in Mathematical Analysis (Санкт-Петербург, 2024); и научных семинарах: семинар кафедры «Фундаментальные проблемы физики квантовых технологий» (рук. Г.Б. Лесовик, МФТИ, 2019), семинар группы «Квантовые информационные технологии» (рук. Е.О. Киктенко, РКЦ, 2021), семинар кафедры «Методы современной математики» (рук. А.Н. Печень, МФТИ, 2022), студенческий семинар по функциональному анализу (рук. Т.Г. Батенёв, СПбГУ, 2024), семинар «Квантовая вероятность, статистика, информация» (рук. А.С. Холево, МИАН, 2021–2026).

Личный вклад. Все основные результаты, выносимые на защиту, получены автором лично или при его определяющем участии. Постановка задачи [1] принадлежит научному руководителю, задача решена и оформлена автором.

Результаты работ [2; 3] полностью получены автором. В статье [4] оба автора внесли равноценный вклад. Постановка задачи работы [5] произведена совместно с Е.О. Киктенко, в диссертации представлена та часть, определяющий вклад в которую сделан автором.

Публикации. Основные результаты по теме диссертации изложены в 5 печатных работах, опубликованных в журналах, рекомендованных ВАК и индексируемых Web of Science и Scopus — см. список [1–5] в конце автореферата.

Объём и структура работы. Диссертация состоит из введения, 6 глав и заключения. Полный объём диссертации составляет 157 страниц, включая 6 рисунков и 1 таблицу. Список литературы содержит 176 наименований. Автореферат изложен на 16 страницах, содержит 1 рисунок и 1 таблицу.

Основное содержание работы

Во **введении** обоснована актуальность темы, сформулированы цели и задачи, перечислены положения, выносимые на защиту, и описана апробация результатов.

Первая глава носит вводный характер. В ней собраны необходимые сведения из функционального анализа (банаховы пространства и двойственность, упорядоченные $*$-векторные пространства, функциональные системы), теории гильбертовых пространств и C^*-алгебр, теории операторных пространств и операторных систем, классической и некоммутативной теории вероятностей (обсуждены понятия состояний, эффектов, измерений, квантовых каналов) и обобщённых вероятностных теорий. Глава не содержит новых результатов и служит справочным аппаратом для последующих глав.

Напомним, что *функциональная система* — это содержащее единицу замкнутое самосопряжённое подпространство $C(X)$, а *операторная система* — её некоммутативный аналог: содержащее единицу самосопряжённое подпространство $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$. Эти понятия также можно охарактеризовать в абстрактных терминах, используя определения упорядоченных векторных пространств, порядковых единиц и матричных конусов. Между операторными системами естественно рассматривать унитальные вполне положительные (у.в.п.) отображения. Операторная система называется *инъективной*, если для любого у.в.п. отображения со значениями в этой операторной системе решается задача о продолжении. Теорема Арвесона [15] гласит, что алгебра операторов $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$ является инъективной. Согласно результатам Хаманы [16], каждая операторная система $\mathcal{V}$ вкладывается в инъективную оболочку $\mathcal{I}(\mathcal{V})$. Аппарат операторных систем применим к обобщённым вероятностным теориям, где

состояния образуют выпуклые компакты, а каналы — аффинные отображения между ними.

Вторая глава посвящена изучению операторных графов квантовых каналов в бесконечномерном случае. Напомним, что квантовый канал — это вполне положительное сохраняющее след отображение $\Phi\colon \mathfrak{T}(\mathcal{H}) \to \mathfrak{T}(\mathcal{K})$. Если канал задан представлением Стайнспринга $\Phi[\rho] = \operatorname{Tr}_{\mathcal{E}} V\rho V^\dagger$ с изометрией $V\colon \mathcal{H} \to \mathcal{K}\otimes\mathcal{E}$, то комплементарный канал $\widehat{\Phi}\colon \mathfrak{T}(\mathcal{H}) \to \mathfrak{T}(\mathcal{E})$, $\widehat{\Phi}[\rho] = \operatorname{Tr}_{\mathcal{K}} V\rho V^\dagger$, описывает утечку информации в окружение. Классический граф ошибок канала строится по отношению трудноразличимости кодовых слов; его некоммутативный аналог определён в конечномерном случае как линейная оболочка $\operatorname{Span}\{K_j^\dagger K_l\}$ операторов Крауса.

Для бесконечномерных сепарабельных пространств мы принимаем следующее определение.

Определение 2.9. Операторным графом канала Φ называется операторная система

$$\mathscr{G}(\Phi) = \overline{\widehat{\Phi}^*[\mathfrak{B}(\mathcal{E})]}^{\mathrm{w^*o}}, \tag{1}$$

равная $*$-слабому замыканию полного образа отображения, сопряжённого к комплементарному каналу [17].

В этой главе рассматривается вопрос о том, верно ли, что каждая слабо замкнутая операторная система на сепарабельном гильбертовом пространстве соответствует некоторому квантовому каналу.

В конечномерном случае известен утвердительный ответ [18]:

Теорема 2.8. *Для любой конечномерной операторной системы $\mathscr{S} \subseteq \mathfrak{B}(\mathcal{H})$ существует канал $\Phi\colon \mathfrak{T}(\mathcal{H}) \to \mathfrak{T}(\mathcal{K})$, для которого $\mathscr{S} = \mathscr{G}(\Phi)$.*

Основным результатом главы является распространение этого утверждения на сепарабельный бесконечномерный случай.

Теорема 2.11. *Пусть $\mathscr{S} \subset \mathfrak{B}(\mathcal{H})$ — ультраслабо замкнутая операторная система над сепарабельным $\mathcal{H}$. Тогда существует канал $\Phi\colon \mathfrak{T}(\mathcal{H}) \to \mathfrak{T}(\mathcal{K})$, для которого $\mathscr{S} = \mathscr{G}(\Phi)$.*

Доказательство строит тотальную в $\mathscr{S}$ последовательность эффектов $\{A_k\}_{k=1}^{\infty}$, образующую дискретную операторно-значную меру, сумма которых сходится к тождественному оператору в w*o-топологии. Благодаря этой последовательности в явном виде строится канал Φ, такой что $\mathscr{S} = \mathscr{G}(\Phi)$.

Третья глава посвящена задаче продолжения унитальной вполне положительной (у.в.п.) динамики с операторной системы на объемлющую C^*-алгебру. Пусть $\mathscr{V} \subseteq \mathbb{M}_d$ — матричная система, $\mathscr{W}$ — её инъективная оболочка (конечномерная C^*-алгебра), $\iota\colon \mathscr{V} \hookrightarrow \mathscr{W}$ — вложение. Ставится вопрос о том,

верно ли, что если на $\mathscr{V}$ задана у.в.п. динамическая полугруппа, то её можно продолжить до у.в.п. динамической полугруппы на $\mathscr{W}$.

Для дискретного времени продолжение существует без дополнительных предположений: для построения продолжения полугруппы достаточно продолжить порождающий элемент. Основной результат касается случая полугрупп с непрерывным временем.

Теорема 3.5. *Пусть $\mathscr{V} \subseteq \mathbb{M}_d$ — матричная операторная система, $\mathscr{W}$ — её инъективная оболочка и $\Phi\colon \mathbb{R}_+ \to \mathrm{UCP}(\mathscr{V})$ — непрерывная у.в.п. полугруппа на $\mathscr{V}$. Тогда существует продолжающая её полугруппа $\Psi\colon \mathbb{R}_+ \to \mathrm{UCP}(\mathscr{W})$.*

Идея доказательства состоит в следующем: для каждой точки $\lambda > 0$ резольвента $\lambda R_A(\lambda) \in \mathrm{UCP}(\mathscr{V})$ продолжается до какого-то у.в.п. оператора $F(\lambda) \in \mathrm{UCP}(\mathscr{W})$, множество таких продолжений компактно. При различных λ эти пространства образуют проективную последовательность, соединяющие отображения которой соответствуют тождеству Гильберта. Проективный предел направленности непустых хаусдорфовых компактов не пуст. Взяв точку этого предела и воспользовавшись жёсткостью расширения $\mathscr{W}$, строится резольвента расширенной полугруппы.

При этом, для обратимой динамики продолжение оказывается единственным, вследствие жёсткости инъективной оболочки и результатов Хаманы [19]:

Следствие 3.10. *Если $\Phi\colon \mathbb{R} \to \mathrm{Aut}(\mathscr{V})$ — непрерывная группа у.в.п. автоморфизмов, то продолжение $\Psi\colon \mathbb{R} \to \mathrm{Aut}(\mathscr{W})$ существует и единственно.*

Также для бесконечномерного случая доказана теорема о том, что если изначальная полугруппа была сильно непрерывной, и для неё построено $*$-слабо измеримое продолжение на дуальном пространстве, которое состоит из нормальных отображений, то это продолжение $*$-слабо непрерывно.

Четвёртая глава посвящена понятию условно унитальных вполне положительных отображений. В ней предлагается обобщение понятия условной вполне положительности с C^*-алгебр на произвольные операторные системы. Такие отображения возникают как инфинитезимальные приращения (касательные векторы) у.в.п. отображений и описывают генераторы полугрупп из предыдущей главы.

Определение 4.2. Пусть $\mathscr{V}, \mathscr{W}$ — операторные системы, $\Phi\colon \mathscr{V} \to \mathscr{W}$ — у.в.п. отображение. Отображение $A\colon \mathscr{V} \to \mathscr{W}$ называется Φ-*условно положительным*, если оно сохраняет эрмитово сопряжение и для всех $v \in \mathscr{V}_+$ и $\rho \in \mathfrak{S}(\mathscr{W})$ из $\langle \Phi[v], \rho\rangle = 0$ следует $\langle A[v], \rho\rangle \geqslant 0$. Отображение A называется Φ-*условно у.в.п.*, если $A[\mathbf{1}] = 0$ и все размножения $A^{(n)}$ являются $\Phi^{(n)}$-условно положительными.

Пара (Φ, A) называется условно у.в.п. парой отображений. Разность двух у.в.п. отображений и производная дифференцируемого однопараметрического семейства у.в.п. отображений являются условно у.в.п. Введённый класс замкнут относительно композиции с у.в.п. отображениями.

Для отображений со значениями в матричной алгебре получен аналог двойственности Чоя–Ямиолковского [9].

Теорема 4.8 (Двойственность Чоя–Ямиолковского)**.** *Отображение $A\colon \mathscr{V} \to \mathbb{M}_n$ является ρ-условно в.п. тогда и только тогда, когда соответствующее ему отображение $B\colon \mathbb{M}_n(\mathscr{V}) \to \mathbb{C}$, $B[v] = \Omega \circ A^{(n)}[v]$, является σ-условно положительным, где $\sigma = \Omega \circ \rho^{(n)}$ и Ω — максимально запутанное состояние.*

С помощью этой двойственности задачу продолжения условно у.в.п. отображений можно свести к задаче продолжения положительных функционалов. Для ограниченных отображений получен аналог теоремы Арвесона:

Теорема 4.11. *Пусть $\iota\colon \mathscr{V} \hookrightarrow \mathscr{W}$ — вложение, $\Phi\colon \mathscr{V} \to \mathbb{M}_n$ — n-состояние и $\Psi\colon \mathscr{W} \to \mathbb{M}_n$ — его продолжение. Пусть $A\colon \mathscr{V} \to \mathbb{M}_n$ — ограниченное Φ-условно у.в.п. отображение и пара $(\mathbb{M}_n(\mathscr{V}), \sigma)$ невырождена. Тогда существует ограниченное Ψ-условно у.в.п. продолжение $B\colon \mathscr{W} \to \mathbb{M}_n$.*

Здесь для состояния ρ на операторной системе $\mathscr{W}$ мы обозначаем $(N_\rho)_+ = \mathrm{Ker}(\rho) \cap \mathscr{W}_+$, $N_\rho = \overline{\mathrm{Span}\,(N_\rho)_+}$; пара $(\mathscr{V}, \rho)$ называется *невырожденной*, если в $\mathscr{V} \cap (N_\rho)_+$ есть внутренняя относительно N_ρ точка и сумма $\mathscr{V}_{sa} + (N_\rho)_{sa}$ замкнута.

Доказательство использует двойственность Чоя–Ямиолковского и модификацию теоремы Крейна о продолжении положительных функционалов. Тем самым, построен аппарат условно у.в.п. отображений, обобщающий аппарат условно вполне положительных отображений для C^*-алгебр.

Пятая глава посвящена изучению теоретико-информационных характеристик многомодового шумного измерения координаты. Эта задача возникла в рамках программы по изучению информационных характеристик гауссовских измерений. Канал шумного гомодинирования задаётся POVM с плотностью

$$m(y) = \frac{1}{(2\pi)^{s/2}(\det\beta)^{1/2}}\, D(y,0)\, \exp(-q^\top \beta^{-1} q/2)\, D(y,0)^\dagger, \qquad (2)$$

где $D(y,0)$ — операторы сдвига координаты, $\beta > 0$ — матрица шумов измерения, $q = (q_1, \ldots, q_s)$ — операторы координат.

Для состояния ρ величина редукции энтропии эффективного инструмента определяется как

$$\mathrm{ER}(\rho, M) = \mathrm{H}(\rho) - \int_{\mathbb{R}^s} p_\rho(x)\, \mathrm{H}(\widehat{\rho}(x))\, \mathrm{d}^s x, \qquad (3)$$

где $\mathrm{H}(\rho) = -\operatorname{Tr}(\rho \log \rho)$ — энтропия фон Неймана, $p_\rho(x) = \operatorname{Tr}(\rho\, m(x))$ — плотность распределения исходов, а $\widehat{\rho}(x) = p_\rho(x)^{-1} V(x) \rho V(x)^\dagger$ — апостериорные состояния. Для гауссовского измерения M величина $\mathrm{H}(\widehat{\rho}(x))$ зависит только от $m(x)$, то есть $\mathrm{ER}(\rho, M)$ — функция наблюдаемой M, а не выбора инструмента. Для матрицы ковариаций α обозначим через $\mathfrak{S}(\alpha)$ множество состояний с этой матрицей ковариаций и положим

$$\mathrm{ER}(M; \alpha) = \sup_{\rho \in \mathfrak{S}(\alpha)} \mathrm{ER}(\rho, M). \tag{4}$$

Введём также функцию $g(x) = (x+1)\log(x+1) - x \log x$.

Основной результат главы заключается в следующем:

Теорема 5.3 (Свойство гауссовского максимизатора)**.** *Супремум в* (4) *достигается на гауссовском состоянии ρ_α и равен*

$$\mathrm{ER}(M; \alpha) = \tfrac{1}{2}\Big[\operatorname{Sp} g(|\Delta^{-1}\alpha| - \tfrac{1}{2}\mathbf{1}_{2s}) - \operatorname{Sp} g(|\Delta^{-1}\widehat{\alpha}| - \tfrac{1}{2}\mathbf{1}_{2s})\Big], \tag{5}$$

где $\widehat{\alpha}$ — апостериорная матрица ковариаций, Δ — симплектическая форма.

Идея доказательства состоит в вычислении аналитических формул действия инструмента на гауссовские состояния и использовании аппарата энтропийных неравенств.

Апостериорные состояния гауссовского состояния ρ_α также являются гауссовскими:

$$\widehat{\rho}_\alpha(x) = D(G_q x, G_p x) \rho_{\widehat{\alpha}} D(G_q x, G_p x)^\dagger, \tag{6}$$

где $G_q = \alpha_{qq}(\alpha_{qq} + \beta)^{-1}$, $G_p = \alpha_{pq}(\alpha_{qq} + \beta)^{-1}$, а центрированное состояние $\rho_{\widehat{\alpha}}$ имеет матрицу ковариаций

$$\begin{aligned} \widehat{\alpha}_{qq} &= (\alpha_{qq}^{-1} + \beta^{-1})^{-1}, \\ \widehat{\alpha}_{pp} &= \alpha_{pp} - \alpha_{pq}(\alpha_{qq} + \beta)^{-1}\alpha_{qp} + \tfrac{1}{4}\beta^{-1}, \\ \widehat{\alpha}_{qp} &= (\alpha_{qq}^{-1} + \beta^{-1})^{-1}\alpha_{qq}^{-1}\alpha_{qp}. \end{aligned} \tag{7}$$

Энтропия фон Неймана гауссовского состояния равна [20, формула (12.110)]

$$\mathrm{H}(\rho_\alpha) = \tfrac{1}{2} \operatorname{Sp}\, g\big(|\Delta^{-1}\alpha| - \tfrac{1}{2}\mathbf{1}_{2s}\big)\,. \tag{8}$$

Она входит в формулу для пропускной способности с использованием сцепленности при ограничении на энергию: для осцилляторного гамильтониана $H = (q^2 + p^2)/2$ ограничение сводится к $\alpha_{qq} + \alpha_{pp} \leqslant 2E$, и $\mathrm{C_{ea}}(M; H, E)$ вычисляется как максимум $\mathrm{ER}(M; \alpha)$ по блочно-диагональным α с $\alpha_{qp} = 0$. Подробно разобран случай одной бозонной моды. График зависимости $\mathrm{C_{ea}}(E)$ при различных β приведён на рисунке 1.

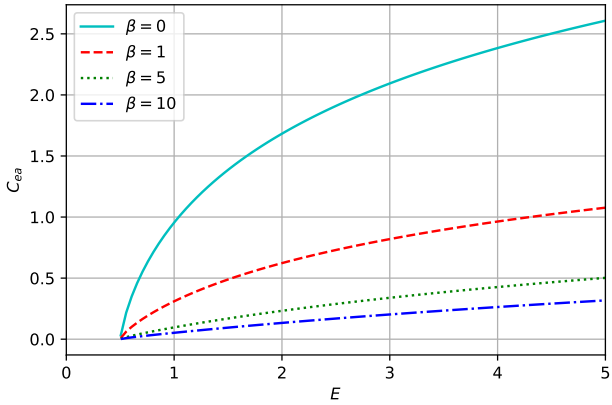


Рисунок 1 — Пропускная способность с использованием сцепленности $\mathrm{C_{ea}}(E)$ для одной моды при $\beta = 0, 1, 5, 10$.

Шестая глава посвящена построению вероятностного представления конечномерной квантовой механики на основе минимальных информационно полных измерений (MIC-POVM).

Пусть $\mathcal{H} \simeq \mathbb{C}^d$, $E = \{E_i\}_{i=1}^{d^2}$ — MIC-POVM [21; 22], то есть набор операторов $E_i \geqslant 0$, $\sum_i E_i = \mathbf{1}$, линейно независимый и полный. При выборе такого измерения, можно построить квазивероятностную модель квантовой механики: состоянию ρ сопоставляется вероятностный вектор $p \in \mathfrak{P}(E)$, $p_i = \operatorname{Tr} \rho E_i$; обратное отображение задаётся двойственным базисом $\{e_i\}$, $\rho = \sum_i p_i e_i$. Квантовому каналу Φ отвечает квазистохастическая матрица $\mathbf{S}$ по формуле $\mathbf{S}_{lk} = \operatorname{Tr}\left[E_l^{\mathrm{out}} \Phi[e_k^{\mathrm{in}}]\right]$, измерению $\{M_j\}$ — квазистохастическая матрица переходов $\mathbf{M}_{ij} = \operatorname{Tr}(M_i e_j)$. Соответствие представлено в таблице 1.

Для такого формализма исследуется возможность определения положительности квантовых операторов и каналов в терминах произведения Мойала на векторах вероятностей.

Результатом работы является выписывание уравнений динамики в таком формализме. Унитарная эволюция с гамильтонианом $H = H^\dagger$ описывается уравнением Лиувилля–фон Неймана

$$\dot{\rho}(t) = -\mathbb{i}[H, \rho(t)] \tag{9}$$

(постоянная Планка положена равной единице). Подставляя разложение $\rho = \sum_k p_k e_k$, умножая на E_l и беря след, получаем

$$\dot{p}(t) = \mathbf{H}\, p(t), \qquad \mathbf{H}_{lk} = \mathbb{i} \operatorname{Tr}(H[E_l, e_k])\,, \tag{10}$$

Таблица 1 — Соответствие между стандартным формализмом и формализмом на основе минимальных информационно полных измерений.

	Стандартный формализм	**MIC-формализм**
Состояние	матрица плотности $\rho \in \mathfrak{S}(\mathcal{H})$	вероятностный вектор $p \in \mathfrak{P}(E)$
Эволюция	квантовый канал $\Phi\colon \mathfrak{S}(\mathcal{H}^{\text{in}}) \to \mathfrak{S}(\mathcal{H}^{\text{out}})$	квазистохастическая матрица $\mathbf{S} \in \mathbb{M}_{d_{\text{out}}^2 \times d_{\text{in}}^2}(\mathbb{R})$
Измерение	POVM $M = \{M_i\}$, $M_i \in \mathfrak{E}(\mathcal{H})$	квазистохастическая матрица $\mathbf{M} \in \mathbb{M}_{m \times d^2}(\mathbb{R})$
Тензорное произведение	$\rho^{AB} = \rho^A \otimes \rho^B$, $\Phi^{AB} = \Phi^A \otimes \Phi^B$	$p^{AB} = p^A \otimes p^B$, $\mathbf{S}^{AB} = \mathbf{S}^A \otimes \mathbf{S}^B$

где E_l — элементы MIC-POVM, а e_k — двойственный базис (ср. [23]). Матрица $\mathbf{H}$ вещественна, и сумма элементов каждого её столбца равна нулю. Для марковской диссипативной эволюции с генератором Горини–Коссаковского–Сударшана–Линдблада

$$\mathcal{L}[\rho] = -\mathbb{i}[H, \rho] + \sum_j \Big(K_j \rho K_j^\dagger - \tfrac{1}{2}\{K_j^\dagger K_j, \rho\} \Big), \tag{11}$$

где $\{\cdot,\cdot\}$ — антикоммутатор, уравнение в MIC-представлении принимает вид

$$\dot{p}(t) = \mathbf{L}\, p(t), \qquad \mathbf{L} = \mathbf{H} + \mathbf{D}, \tag{12}$$

где $\mathbf{H}$ — из (10), а матрица $\mathbf{D}$ отвечает диссипативной части и выражается через матрицу $\mathbf{S}_{ij} = \mathrm{Tr}[E_i \Psi[e_j]]$ отображения $\Psi[M] = \sum_j K_j M K_j^\dagger$. Матрица $\mathbf{D}$ вещественна, и сумма элементов каждого её столбца также равна нулю.

Таким образом, построен полный формализм вероятностного представления, обобщающий известный SIC-подход [21] на произвольные MIC-измерения.

Заключение

Основные результаты работы состоят в следующем.

1. Исследованы свойства некоммутативных графов ошибок квантовых каналов связи в бесконечномерном случае. Для сепарабельных гильбертовых пространств доказано, что всякой ультраслабо замкнутой операторной системе отвечает квантовый канал, шумы в котором описываются в точности этой операторной системой.

2. Развита теория продолжения унитальной вполне положительной динамики с операторных систем на объемлющие C^*-алгебры. Доказано, что всякая непрерывная однопараметрическая унитальная вполне положительная полугруппа на матричной операторной системе продолжается на инъективную оболочку. Для обратимой динамики продолжение единственно: однопараметрическая группа автоморфизмов матричной системы единственным образом расширяется до группы $*$-автоморфизмов инъективной оболочки.

3. Предложено определение условно унитальных вполне положительных отображений между произвольными операторными системами, обобщающее понятие условной полной положительности со случая C^*-алгебр. Показано, что такие отображения суть инфинитезимальные приращения унитальных вполне положительных отображений и что предложенное определение согласовано с композицией. Для условно у.в.п. отображений доказана двойственность Чоя–Ямиолковского, а для ограниченных отображений со значениями в матричных $*$-алгебрах — аналог теоремы Арвесона о продолжении.

4. В рамках программы изучения информационных характеристик гауссовских измерений рассмотрен случай приближённого измерения координаты в многомодовых бозонных системах, отвечающий шумному гомодинированию. Для величины редукции энтропии доказано свойство гауссовского максимизатора и найдено явное выражение её максимума в классе состояний с заданной матрицей ковариаций. На основе этого выражения получен способ вычисления пропускной способности с использованием сцепленности; подробно разобран случай одной бозонной моды.

5. Построено вероятностное представление конечномерной квантовой механики на основе минимальных информационно полных измерений, обобщающее известный подход, использующий симметрические измерения. Выписаны уравнения динамики как для унитарной эволюции фон Неймана, так и для марковской диссипативной эволюции с генератором ГКСЛ.

Публикации автора по теме диссертации

1. *Yashin V. I.* Properties of operator systems, corresponding to channels // Quantum Information Processing. — 2020. — May. — Vol. 19, no. 7. — 195.

2. *Yashin V. I.* The Extension of Unital Completely Positive Semigroups on Operator Systems to Semigroups on C^*-Algebras // Lobachevskii Journal of Mathematics. — 2022. — July. — Vol. 43, no. 7. — P. 1778–1790.
3. *Яшин В. И.* Теорема Арвесона о продолжении для условно унитальных вполне положительных отображений // Труды Математического института имени В. А. Стеклова. — 2024. — Т. 324. — С. 277—291.
4. *Holevo A. S.*, *Yashin V. I.* Maximum information gain of approximate quantum position measurement // Quantum Information Processing. — 2021. — Vol. 20, no. 3. — 97.
5. *Yashin V. I.*, *Kiktenko E. O.*, *Mastiukova A. S.*, *Fedorov A. K.* Minimal informationally complete measurements for probability representation of quantum dynamics // New Journal of Physics. — 2020. — Oct. — Vol. 22, no. 10. — 103026.

Список литературы

6. *Kraus K.*, *Böhm A.*, *Dollard J. D.*, *Wootters W. H.* States, effects, and operations: fundamental notions of quantum theory : lectures in mathematical physics at the University of Texas at Austin. — Berlin : Springer-Verlag, 1983. — 151 p. — (Lecture notes in physics).
7. *Holevo A. S.* Probabilistic and Statistical Aspects of Quantum Theory. — Pisa : Edizioni della Normale Pisa, 2011. — 167 p. — (Publications of the Scuola Normale Superiore).
8. *Stinespring W. F.* Positive functions on C^*-algebras // Proceedings of the American Mathematical Society. — 1955. — Vol. 6, no. 2. — P. 211–216.
9. *Choi M.-D.* Completely positive linear maps on complex matrices // Linear Algebra and its Applications. — 1975. — Vol. 10, no. 3. — P. 285–290.
10. *Paulsen V. I.* Completely Bounded Maps and Operator Algebras. — Cambridge : Cambridge University Press, 2003. — 300 p. — (Cambridge Studies in Advanced Mathematics).
11. *Хелемский А. Я.* Квантовый функциональный анализ в бескоординатном изложении. — Москва : МЦНМО, 2009. — 308 с. — (Новые математические дисциплины).
12. *Davidson K. R.*, *Kennedy M.* Noncommutative Choquet Theory. Vol. 316. — Providence, RI : American Mathematical Society, 2025. — 83 p. — (Memoirs of the American Mathematical Society ; 1608).

13. *Plávala M.* General probabilistic theories: an introduction // Physics Reports. — 2023. — Vol. 1033. — P. 1–64.

14. *Lindblad G.* On the generators of quantum dynamical semigroups // Communications in Mathematical Physics. — 1976. — Vol. 48, no. 2. — P. 119–130.

15. *Arveson W. B.* Subalgebras of C^*-algebras // Acta Mathematica. — 1969. — Vol. 123. — P. 141–224.

16. *Hamana M.* Injective envelopes of operator systems // Publications of the Research Institute for Mathematical Sciences. — 1979. — Vol. 15, no. 3. — P. 773–785.

17. *Weaver N.* Quantum Graphs as Quantum Relations // Journal of Geometric Analysis. — 2021. — Vol. 31, no. 9. — P. 9090–9112.

18. *Duan R.* Super-activation of zero-error capacity of noisy quantum channels. — 2009. — arXiv: 0906.2527 [quant-ph]. — (Visited on 09/15/2026).

19. *Hamana M.* Injective envelopes of C^*-dynamical systems // Tohoku Mathematical Journal, Second Series. — 1985. — Vol. 37, no. 4. — P. 463–487.

20. *Holevo A. S.* Quantum Systems, Channels, Information: A Mathematical Introduction. Vol. 16. — 2nd ed. — Berlin, Germany : Walter de Gruyter GmbH & Co KG, 2019. — 359 p. — (De Gruyter Studies in Mathematical Physics).

21. *Caves C. M.*, *Fuchs C. A.*, *Schack R.* Unknown quantum states: The quantum de Finetti representation // Journal of Mathematical Physics. — 2002. — Sept. — Vol. 43, no. 9. — P. 4537–4559.

22. *Appleby M.*, *Fuchs C. A.*, *Stacey B. C.*, *Zhu H.* Introducing the Qplex: a novel arena for quantum theory // The European Physical Journal D. — 2017. — Vol. 71, no. 7. — 197.

23. *Weigert S.* Quantum Time Evolution in Terms of Nonredundant Probabilities // Physical Review Letters. — 2000. — Jan. — Vol. 84, no. 5. — P. 802–805.