Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Математический институт им. В.А. Стеклова Российской академии наук

На правах рукописи

Яшин Всеволод Игоревич

Приложения теории операторных систем и анализ числовых характеристик каналов передачи информации в некоммутативной теории вероятностей

Специальность 1.1.4 — «Теория вероятностей и математическая статистика»

Диссертация на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
д-р физ.-мат. наук, проф.
Амосов Григорий Геннадьевич

Москва — 2026

Оглавление

Стр.

Введение 6

Глава 1. Математические основания некоммутативной теории вероятностей 15

1.1. Некоторые сведения из функционального анализа 15

1.1.1. Банаховы пространства и двойственность 16

1.1.2. Упорядоченные векторные пространства 17

1.1.3. Функциональные системы 19

1.1.4. Гильбертовы пространства и пространства операторов . . . 20

1.1.5. C^*-алгебры и алгебры фон Неймана 21

1.1.6. Операторные пространства 22

1.1.7. Операторные системы 23

1.1.8. Инъективность и задача продолжения 27

1.1.9. Однопараметрические операторные полугруппы 28

1.2. Классические вероятностные модели в алгебраической формулировке 32

1.2.1. Модель фазового пространства 32

1.2.1.1. Подход C^*-алгебр 32

1.2.1.2. Подход алгебр фон Неймана 34

1.2.1.3. Дискретный случай 35

1.2.2. Марковские отображения 35

1.2.3. Каналы передачи информации 37

1.3. Некоммутативная теория вероятностей 38

1.3.1. Состояния и эффекты 39

1.3.2. Квантовые каналы 40

1.3.3. Измерения 42

1.3.4. Энтропия и информационные характеристики 43

1.3.5. Операторные системы и обобщённые вероятностные теории 44

Выводы по главе 1 45

Глава 2. Операторные системы и описание шумов в квантовых каналах 46

Стр.

2.1. Классическая и квантовая теория безошибочной передачи информации 46
2.1.1. Классические каналы связи 47
2.1.1.1. Математическая модель классических каналов связи 47
2.1.1.2. Протоколы передачи данных по каналам связи . . 49
2.1.2. Передача информации с нулевой ошибкой 50
2.1.3. Квантовые каналы связи 52
2.1.3.1. Обозначения и формализм 52
2.1.4. Передача информации по квантовым каналам с нулевой ошибкой 53
2.1.4.1. Классические каналы в квантовом описании . . . 54
2.1.4.2. Квантовый граф ошибок 55
2.2. Условия на то, чтобы операторная система являлась графом ошибок 58
2.2.1. Конечномерный случай 58
2.2.2. Бесконечномерный случай 60
Выводы по главе 2 62

Глава 3. Теория расширения динамики на операторных системах до динамики на C^*-алгебрах 64
3.1. Предварительные сведения 65
3.2. Результаты о расширении вполне положительных полугрупп 66
3.2.1. Расширение вполне положительных автоморфизмов 66
3.2.2. Расширение вполне положительных полугрупп на матричных системах 69
3.3. Обсуждение возможных приложений 76
3.3.1. Расширение вещественнозначной квантовой динамики . . . 77
3.3.1.1. Продолжение обратимой динамики 78
3.3.1.2. Продолжение диссипативной динамики 78
3.3.1.3. Вещественнозначная механика с произвольной размерностью 79
3.3.2. Приложения к теории некоммутативных графов 80
3.3.3. Изучение групп симметрий операторных систем 80
Выводы по главе 3 81

Стр.

Глава 4. Условно унитальные вполне положительные отображения и задача об их продолжении 82
4.1. Предварительные сведения 83
4.2. Условно унитально вполне положительные отображения 84
4.2.1. Генераторы унитальных вполне положительных полугрупп 84
4.2.2. Общие условно у.в.п. отображения 87
4.2.3. Условно у.в.п. отображения на C^*-алгебрах 89
4.3. Задача продолжения условно у.в.п. отображений 90
4.3.1. Двойственность Чоя–Ямиолковского 90
4.3.2. Задача продолжения для условно у.в.п. отображений 92
4.3.3. Частичный аналог теоремы Арвесона 93
Выводы по главе 4 97

Глава 5. Пропускная способность каналов гомодинного измерения бозонных мод 98
5.1. О проблематике теоретико-информационных свойств гауссовских каналов 98
5.2. Редукция энтропии при квантовых измерениях 100
5.3. Свойство гауссовских максимизаторов для редукции энтропии . . . 101
5.4. Пропускная способность с использованием сцепленности 109
5.5. Случай одной моды 111
Выводы по главе 5 114

Глава 6. Минимально информационно полные квазивероятностные представления в некоммутативной теории вероятностей . . . 115
6.1. Вероятностное представление с использованием MIC-POVM 118
6.1.1. Определения и обозначения 118
6.1.2. Представление состояний 120
6.1.3. Представление тензорных произведений 123
6.1.4. Представление каналов 123
6.1.5. Представление измерений 127
6.1.6. Переходы между представлениями на основе MIC-POVM . 129
6.2. Уравнения динамики 130
6.2.1. Уравнение Лиувилля–фон Неймана 130

Стр.

6.2.2. Уравнение Горини–Коссаковского–Сударшана–Линдблада 133
6.2.3. Уравнение Гейзенберга 134
Выводы по главе 6 134

Заключение 136

Список сокращений и условных обозначений 139

Список литературы 143

Введение

Актуальность и степень разработанности темы исследования. Некоммутативная теория вероятностей возникла в результате потребности построения математически строгого формализма, описывающего вероятностное поведение квантовых систем. Уже в ранних работах Дж. фон Неймана по математическим основаниям квантовой статистики были ясно видны отличия от классической статистики: если в классических вероятностных системах случайные величины описываются измеримыми функциями в аксиоматике Колмогорова и все случайные величины совместны, то в квантовых системах наблюдаемым отвечают самосопряжённые операторы на гильбертовом пространстве, которые могут не коммутировать. Последовательное развитие математического аппарата теории операторов привело к возникновению «алгебраического» взгляда на классическую теорию вероятностей как теорию коммутативных алгебр фон Неймана и нормальных унитальных положительных отображений между ними, а некоммутативной — как теории произвольных алгебр фон Неймана и вполне положительных отображений (квантовых каналов) [1; 2].

Ключевым для этой теории оказалось понятие вполне положительности [3; 4]. Требование положительности, достаточное в коммутативном случае, перестаёт быть таковым при переходе к составным системам: физически осмысленная динамика должна оставаться положительной при наличии окружения. Наиболее общими структурами, в терминах которых определено понятие вполне положительности, являются *операторные системы* — содержащие единицу самосопряжённые подпространства C^*-алгебр [5—8]. Их естественно воспринимать как некоммутативные аналоги функциональных систем и банаховых решёток [9; 10], а согласно недавним результатам Дэвидсона и Кеннеди [11] — как пространства аффинных функций на «некоммутативных выпуклых компактах», причём C^*-алгебры отвечают «некоммутативным симплексам Бауэра» [12].

Теория операторных систем активно развивается и находит приложения в самых разных областях: при описании ошибок в квантовых каналах связи и теории передачи информации с нулевой ошибкой [13; 14], в задачах полуопределённой оптимизации [15], в теории операторов и в вопросах, связанных с гипотезами Цирельсона о квантовых корреляциях [16; 17]. Отдельный интерес представляет программа обобщённых вероятностных теорий [18], изучающая, какие черты

квантовой механики являются следствием её вероятностной структуры, а какие — специфическими свойствами гильбертова пространства.

Дополнительную актуальность этому кругу задач придаёт бурное развитие квантовых вычислений и квантовых коммуникаций. Практические потребности — оценка пропускных способностей реальных каналов связи, описание шумов и коррекция ошибок, классическое моделирование квантовых схем — ставят вопросы, ответы на которые требуют аппарата некоммутативной теории вероятностей. Так, теоретико-информационный анализ гауссовских измерений в системах с непрерывными переменными [19—21] непосредственно связан с квантовой оптикой, а квазивероятностные представления квантовой механики [22; 23] — с задачами классической симуляции квантовых вычислений и с проблемой оценки сложности задач, не поддающихся эффективному классическому моделированию.

При этом ряд естественных вопросов остаётся недоисследованным. Некоммутативные графы ошибок изучались в основном в конечномерном случае. Свойства непрерывной вполне положительной динамики на операторных системах — в отличие от хорошо развитой теории полугрупп на C^*-алгебрах [24—26] — практически не рассматривались. Понятие условной вполне положительности, описывающее генераторы таких полугрупп, было определено лишь для C^*-алгебр. Наконец, для ряда физически важных классов гауссовских измерений информационные характеристики не были вычислены, и в рамках квазивероятностных представлений квантовой механики математический формализм уравнений динамики оставался недостаточно изученным. Настоящая диссертация посвящена этим вопросам.

Цели и задачи. Целью данной работы является исследование применимости теории операторных систем и вполне положительных отображений в некоммутативной теории вероятностей и вычисление числовых характеристик возникающих в этой теории квантовых каналов и измерений.

Для достижения поставленных целей было необходимо решить следующие задачи:

1. Развить аппарат описания некоммутативных графов ошибок для каналов над бесконечномерными сепарабельными гильбертовыми пространствами.

2. Исследовать вполне положительную динамику на операторных системах и её связь с динамикой на C^*-алгебрах.

3. Обобщить понятие условно унитальных вполне положительных отображений на случай произвольных операторных систем и изучить для них задачу продолжения.

4. Исследовать редукцию энтропии и пропускную способность с использованием сцепленности для приближённых измерений координаты в многомодовых бозонных системах.

5. Построить вероятностное представление квантовой механики на основе минимальных информационно полных измерений и вывести в нём уравнения динамики.

Научная новизна.

1. Изучены свойства бесконечномерных операторных графов ошибок и впервые предложен метод построения квантового канала связи, шумы в котором описываются заданным некоммутативным графом ошибок, в случае бесконечномерных сепарабельных гильбертовых пространств.

2. Впервые изучена проблема продолжения однопараметрических полугрупп унитальных вполне положительных отображений на операторных системах: в случае конечномерных гильбертовых пространств доказана теорема о возможности расширения такой полугруппы до полугруппы на конечномерных C^*-алгебрах и теорема о единственности расширения для обратимых полугрупп.

3. Впервые рассмотрено определение для условно унитальных вполне положительных отображений между операторными системами. Для случая конечномерных гильбертовых пространств доказана теорема типа Арвесона о возможности расширения условно унитального вполне положительного отображения со значениями в матричной алгебре при условии невырожденности.

4. В рамках программы по изучению пропускных способностей гауссовских измерений и каналов впервые рассмотрен случай шумного измерения координаты в многомодовых квантовых системах с непрерывными переменными. Доказана теорема о «гауссовском максимизаторе» величины редукции энтропии и написаны формулы в явном виде для нахождения пропускной способности с использованием сцепленности.

5. В рамках программы по изучению квазивероятностных представлений квантовой механики и некоммутативной статистики впервые изучен вопрос об описании динамики квантовых систем в вероятностных представлениях, основанных на минимальных информационно полных измерениях, выписаны явные уравнения динамики.

Теоретическая и практическая значимость работы. Работа носит теоретический характер; её результаты могут быть использованы в некоммутативной теории вероятностей, теории операторных алгебр и квантовой теории информации.

Характеризация бесконечномерных некоммутативных графов ошибок (глава 2) развивает теорию кодов коррекции ошибок для квантовых систем и позволяет переносить методы теории передачи информации с нулевой ошибкой на случай сепарабельных гильбертовых пространств. Теоремы о продолжении вполне положительной динамики и условно унитальных вполне положительных отображений (главы 3 и 4) развивают теорию однопараметрических полугрупп в некоммутативной теории вероятностей и устанавливают связь обобщённых вероятностных теорий с теорией операторов: они показывают, что марковская динамика на операторной системе допускает интерпретацию как ограничение обычной квантовой динамики. Полученные для приближённого измерения координаты формулы редукции энтропии и пропускной способности с использованием сцепленности (глава 5) применимы к оценке информационных характеристик реальных схем гомодинного детектирования в квантовой оптике и в задачах квантовых коммуникаций. Вероятностные представления на основе минимальных информационно полных измерений и выведенные в этом формализме уравнения динамики (глава 6) применимы к задачам классического моделирования и численной симуляции процессов квантовых вычислений.

Методология и методы исследования. В работе используются методы математического анализа задач некоммутативной теории вероятностей и статистики, опирающиеся на понятия функционального анализа, теории меры, теории операторов, общей алгебры и теоретической физики. Наряду с аналитическими методами используются численные методы и визуализация полученных данных.

Основные положения, выносимые на защиту:

1. Исследованы свойства бесконечномерных некоммутативных графов ошибок в квантовых каналах связи (некоммутативных марковских отображениях), для случая сепарабельных гильбертовых пространств доказано существование квантового канала связи, шумы в котором описываются заданной операторной системой.

2. Доказана теорема о возможности расширения однопараметрической полугруппы унитальных вполне положительных отображений до полугруппы унитальных вполне положительных отображений на инъективной оболочке в случае матричных систем и конечномерных C^*-алгебр; для обратимого случая доказана единственность расширения.

3. Предложено определение условно унитальных вполне положительных отображений между операторными системами и изучены их простейшие свойства, доказана теорема типа Арвесона о возможности расширения ограниченного условно унитального вполне положительного отображения со значениями в матричной $*$-алгебре.

4. Исследованы числовые характеристики каналов приближённого измерения координаты в многомодовых квантовых системах с непрерывными переменными: величина редукции энтропии и пропускная способность канала с использованием сцепленности. Для величины редукции энтропии доказано свойство «гауссовского максимизатора» и найдено явное выражение максимума этой величины в классе состояний с заданной матрицей ковариаций. На основе этого выражения получен способ вычисления пропускной способности канала измерения с использованием сцепленности, подробно рассмотрен случай одной бозонной моды.

5. Разработана теория динамики в формализме вероятностных представлений квантовой механики, основанных на использовании минимальных информационно полных измерений. Выписаны уравнения унитарной и марковской эволюции в таких представлениях.

Степень достоверности и апробация результатов. Достоверность полученных результатов обеспечивается строгостью используемых математических

методов: все утверждения работы снабжены полными доказательствами, опирающимися на классические результаты функционального анализа, теории операторных алгебр и теории операторных систем. Численные результаты воспроизводимы и согласуются с аналитическими предсказаниями. Полученные результаты находятся в соответствии с результатами, полученными другими авторами, и в частных случаях воспроизводят известные ранее утверждения. Основные результаты опубликованы в рецензируемых научных журналах и обсуждались на всероссийских и международных конференциях и научных семинарах.

Основные результаты работы прошли апробацию на следующих всероссийских и международных конференциях:

1. 62-я научная конференция МФТИ, Москва, Россия, 18–23 ноября 2019, устный доклад «Вероятностные представления квантовой механики с использованием информационно полных измерений».

2. Конференция отдела математических методов квантовых технологий МИАН, Москва (онлайн), Россия, 2–5 ноября 2020, устный доклад «О свойствах графов ошибок бесконечномерных квантовых каналов».

3. 63-я научная конференция МФТИ, Долгопрудный (онлайн), Россия, 23–28 ноября 2020, устный доклад «Quantum information aspects of approximate position measurement».

4. VI International Conference on Quantum Technologies (ICQT 2021), Москва (онлайн), Россия, 12–16 июля 2021, стендовый доклад «Simulating gate-based quantum computing using quasiprobability representations».

5. Теория функций, теория операторов и квантовая теория информации, Уфа, Россия, 4–7 октября 2021, устный доклад «О свойствах графов ошибок бесконечномерных квантовых каналов».

6. Complex Analysis and Related Topics, Казань, Россия, 30 июня–4 июля 2022, устный доклад «The extension of unital completely positive semigroups on operator systems to semigroups on C^*-algebras».

7. Математика в квантовых технологиях, Москва (онлайн), Россия, 5–8 декабря 2022, устный доклад «The extension of unital completely positive semigroups on operator systems to semigroups on C^*-algebras».

8. Теория функций, теория операторов и квантовая теория информации, Уфа, Россия, 1–3 июня 2023, устный доклад «Расширения условно вполне положительных отображений между операторными системами».

9. 32nd St. Petersburg Summer Meeting in Mathematical Analysis, Санкт-Петербург, Россия, 1–6 июля 2023, устный доклад «Extensions of conditionally completely positive maps between operator systems».

10. IV конференция математических центров России, Санкт-Петербург, Россия, 6–11 августа 2024, устный доклад «Теорема Арвесона о расширении для условно вполне положительных отображений».

11. 33rd St. Petersburg Summer Meeting in Mathematical Analysis, Санкт-Петербург, Россия, 12–17 августа 2024, устный доклад «Arveson's Extension Theorem for Conditionally Unital Completely Positive Maps».

и научных семинарах:

1. Семинар кафедры «Фундаментальные проблемы физики квантовых технологий», МФТИ, Долгопрудный, Россия, 17 октября 2019, доклад «Об общей теории коррекции ошибок».

2. Семинар группы «Квантовые информационные технологии», РКЦ, Москва, Россия, 9 апреля 2021, доклад «Estimating outcome probabilities of quantum circuits using quasiprobabilities».

3. Семинар кафедры «Методы современной математики», МФТИ, Москва, Россия, 16 ноября 2022, доклад «Об общем алгоритме симуляции квантовых схем при помощи квазивероятностных представлений квантовой механики».

4. Студенческий семинар по функциональному анализу, СПбГУ, Санкт-Петербург, Россия, 9 декабря 2024, доклад «О некоторых идеях теории операторных систем».

5. Семинар «Квантовая вероятность, статистика, информация», МИАН, Москва, Россия, 2021–2026, серия докладов.

Личный вклад. Все основные результаты, выносимые на защиту, получены автором лично или при его определяющем участии. Постановка главной задачи работы [27] принадлежит научному руководителю, задача была решена и оформлена автором диссертации. Результаты работ [28; 29] были полностью сформулированы и получены автором диссертации. В статье [30] оба автора внесли равноценный вклад в решение проблемы, сформулированной А.С. Холево. Постановка задачи работы [31] была произведена совместно с Е.О. Киктенко, в диссертации представлена та часть результатов этой работы, определяющий вклад в которую был сделан автором диссертации; результаты соавторов А.С. Мастюковой и А.К. Фёдорова в диссертацию не включены. С начала обучения в аспирантуре автор принял участие в 4 грантах, в том числе в 1 индивидуальном гранте (грант фонда «Базис» № 25-1-5-45-1).

Публикации. В ходе проведения работы над диссертационным исследованием было выпущено 10 печатных работ и 2 препринта. Основные результаты по теме диссертации изложены в 5 печатных работах, все они опубликованы в журналах, рекомендованных ВАК и индексируемых Web of Science и Scopus.

Публикации автора по теме диссертации:

1. *Yashin V. I.* Properties of operator systems, corresponding to channels // Quantum Information Processing. — 2020. — May. — Vol. 19, no. 7. — 195.
2. *Yashin V. I.* The Extension of Unital Completely Positive Semigroups on Operator Systems to Semigroups on C^*-Algebras // Lobachevskii Journal of Mathematics. — 2022. — July. — Vol. 43, no. 7. — P. 1778–1790.
3. *Яшин В. И.* Теорема Арвесона о продолжении для условно унитальных вполне положительных отображений // Труды Математического института имени В. А. Стеклова. — 2024. — Т. 324. — С. 277—291.
4. *Holevo A. S.*, *Yashin V. I.* Maximum information gain of approximate quantum position measurement // Quantum Information Processing. — 2021. — Vol. 20, no. 3. — 97.
5. *Yashin V. I.*, *Kiktenko E. O.*, *Mastiukova A. S.*, *Fedorov A. K.* Minimal informationally complete measurements for probability representation of quantum dynamics // New Journal of Physics. — 2020. — Oct. — Vol. 22, no. 10. — 103026.

Объём и структура работы. Диссертация состоит из введения, 6 глав и заключения. Полный объём диссертации составляет 157 страниц, включая 6 рисунков и 1 таблицу. Список литературы содержит 176 наименований.

Благодарности. Автор искренне благодарит научного руководителя Г.Г. Амосова за многолетнее плодотворное сотрудничество, сопровождение и поддержку, за многие обсуждения результатов работы. Автор благодарит А.С. Холево за постановку задач, ознакомление с передовыми направлениями исследований, передачу ценного опыта научной работы и интерес к результатам исследований. Автор благодарит Е.О. Киктенко за ценные замечания и научные дискуссии. Автор также благодарит коллег А.Е. Теретёнкова, М.А. Гавреева, А.К. Фёдорова, А.С. Мастюкову, А.В. Антипова, Т.Г. Батенёва за обсуждения на тему диссертации. Работа автора диссертации В.И. Яшина была выполнена при поддержке стипендии Президента Российской Федерации для аспирантов и адъюнктов, гранта фонда «Базис» (№ 25-1-5-45-1), проекта РНФ «Актуальные проблемы квантовой теории информации» № 24-11-00145.

Глава 1. Математические основания некоммутативной теории вероятностей

Настоящая глава носит вспомогательный характер: в ней фиксируются обозначения и собраны те известные определения и результаты, на которые опираются последующие главы. В разделе 1.1 вводится аппарат функционального анализа: упорядоченные векторные пространства, функциональные системы, пространства операторов, операторные пространства и системы, а также однопараметрические операторные полугруппы. В разделе 1.2 этот аппарат применяется к построению классических вероятностных моделей в алгебраической формулировке, удобной для последующего обобщения. Наконец, в разделе 1.3 строится некоммутативная (квантовая) теория вероятностей, которая получается из классической заменой коммутативной алгебры наблюдаемых на некоммутативную.

Ни один из результатов этой главы не является новым; ссылки на источники даются по ходу изложения. Читатель, знакомый с теорией операторных систем и с математическим формализмом квантовой механики, может обращаться к этой главе только за уточнением обозначений.

1.1. Некоторые сведения из функционального анализа

В этом разделе фиксируются обозначения и приводится краткий обзор используемых далее сведений. Подробное изложение теории упорядоченных векторных пространств дано в [32]; с основами функционального анализа и теории операторов можно ознакомиться по учебникам [33—35]; теория операторных пространств и операторных систем изложена в книгах [6—9] и в статье [10], связывающей операторные системы с упорядоченными векторными пространствами. Теория однопараметрических операторных полугрупп подробно изложена в [36], а теория положительных полугрупп на банаховых решётках — в [37]. Для введения в теорию категорий читатель может обратиться к [38; 39].

1.1.1. Банаховы пространства и двойственность

Все векторные пространства предполагаются комплексными, если явно не оговорено противное. Пусть $\mathscr{V}$ — банахово пространство с нормой $\|\cdot\|$. Через $\mathscr{V}^*$ обозначается пространство непрерывных линейных функционалов на $\mathscr{V}$, а каноническое спаривание $\mathscr{V}$ и $\mathscr{V}^*$ записывается как

$$\langle v, \rho\rangle = \rho[v], \qquad \text{где } v \in \mathscr{V},\ \rho \in \mathscr{V}^*. \tag{1.1}$$

Если для банахова пространства $\mathscr{V}$ существует такое банахово пространство $\mathscr{V}_*$, что $\mathscr{V}$ изометрически изоморфно $(\mathscr{V}_*)^*$, то $\mathscr{V}$ называется *дуальным* банаховым пространством, а $\mathscr{V}_*$ — его *преддвойственным* пространством.

На пространстве $\mathscr{V}$ мы будем рассматривать три топологии. *Топология нормы* s порождена самой нормой. *Слабая топология* w порождена системой преднорм $\|v\|_\rho = |\langle v, \rho\rangle|$ при $\rho \in \mathscr{V}^*$. Если $\mathscr{V}$ дуально, то $*$-*слабая топология* w* порождена преднормами $\|v\|_\sigma = |\langle v, \sigma\rangle|$ при $\sigma \in \mathscr{V}_*$. Эти топологии соотносятся как

$$\mathrm{w}^* \subseteq \mathrm{w} \subseteq \mathrm{s}. \tag{1.2}$$

По теореме Банаха–Алаоглу замкнутый единичный шар дуального пространства компактен в $*$-слабой топологии.

Пусть $\mathscr{V}$ и $\mathscr{W}$ — банаховы пространства. Через $\mathfrak{B}(\mathscr{V}, \mathscr{W})$ обозначается пространство ограниченных линейных операторов из $\mathscr{V}$ в $\mathscr{W}$, и $\mathfrak{B}(\mathscr{V}) = \mathfrak{B}(\mathscr{V}, \mathscr{V})$. Линейные отображения между функциональными пространствами мы обозначаем квадратными скобками, $\Phi[v]$, оставляя круглые скобки для действия функций на аргумент. На $\mathfrak{B}(\mathscr{V}, \mathscr{W})$ также определён ряд топологий. *Равномерная* топология s задаётся операторной нормой $\|\Phi\| = \sup_{\|v\|\leqslant 1}\|\Phi[v]\|$. *Сильная операторная топология* so — это поточечно сильная топология, порождённая семейством преднорм $\|\Phi\|_v = \|\Phi[v]\|$ при $v \in \mathscr{V}$. *Слабая операторная топология* wo порождена преднормами $\|\Phi\|_{v,\sigma} = |\langle\Phi[v], \sigma\rangle|$ при $v \in \mathscr{V}$ и $\sigma \in \mathscr{W}^*$. Если $\mathscr{W}$ дуально, то $*$-*слабая операторная топология* w*o порождена теми же преднормами, но при $\sigma \in \mathscr{W}_*$. Эти топологии соотносятся как

$$\mathrm{w}^*\mathrm{o} \subseteq \mathrm{wo} \subseteq \mathrm{so} \subseteq \mathrm{s}. \tag{1.3}$$

Замыкания выпуклых множеств совпадают в топологиях so и wo, однако, вообще говоря, не совпадают с замыканием в w*o [40]. Топология w*o сама является $*$-слабой топологией относительно двойственности

$$\mathfrak{B}(\mathscr{V}, \mathscr{W}) = \left(\mathscr{V} \otimes_\pi \mathscr{W}_*\right)^*, \tag{1.4}$$

где $\otimes_\pi$ — проективное тензорное произведение банаховых пространств [41].

1.1.2. Упорядоченные векторные пространства

Пусть на векторном пространстве $\mathscr{V}$ задана сопряжённо-линейная инволюция $v \mapsto v^\dagger$; тогда $\mathscr{V}$ называется *$*$-векторным пространством*. Элемент $v \in \mathscr{V}$ называется *самосопряжённым* (эрмитовым), если $v = v^\dagger$. Подпространство самосопряжённых элементов обозначается

$$\mathscr{V}_{sa} = \left\{ v \in \mathscr{V} \;\middle|\; v = v^\dagger \right\}. \tag{1.5}$$

Конусом C называется подмножество $\mathscr{V}$, замкнутое относительно сложения и умножения на неотрицательные числа. Мы будем рассматривать конусы, для которых дополнительно выполнены условия:

1. самосопряжённость: $C \subseteq \mathscr{V}_{sa}$;
2. невырожденность: $C \cap (-C) = \{0\}$;
3. конус порождающий: $\operatorname{Span} C = \mathscr{V}$;
4. конус *архимедов*: если $v \in \mathscr{V}_{sa}$ и для некоторого $u \in C$ при всех $r > 0$ выполнено $v + ru \in C$, то $v \in C$.

Замечание 1.1. Последнее условие сформулировано в терминах порядка и не требует заранее заданной топологии на $\mathscr{V}$. Если конус обладает порядковой единицей $\mathbf{1}$ (см. п. 1.1.3), то достаточно проверять его при $u = \mathbf{1}$, и тогда архимедовость конуса — это в точности архимедовость единицы. Норма, порождённая единицей, задаёт на $\mathscr{V}$ топологию, в которой архимедовость равносильна замкнутости C; поэтому далее мы пользуемся обоими описаниями как взаимозаменяемыми, а само требование постулируется лишь один раз — здесь.

Конусы, для которых условие невырожденности не предполагается, называются *вырожденными*. Пара $(\mathscr{V}, \mathscr{V}_+)$, где $\mathscr{V}_+ = C$ — конус с перечисленными свойствами, называется *упорядоченным $*$-векторным пространством*; элементы $\mathscr{V}_+$ называются *положительными*. Для $u, v \in \mathscr{V}$ мы полагаем $u \leqslant v$ тогда и только тогда, когда $v - u \in \mathscr{V}_+$ — так определённое отношение является частичным порядком, трансляционно инвариантным и однородным относительно умножения на положительные числа.

Векторной решёткой называется упорядоченное векторное пространство, в котором любые два элемента u, v обладают наименьшей верхней гранью $u \vee v$. В этом случае модуль элемента определяется как $|v| = v \vee (-v)$. Векторная решётка называется *банаховой решёткой*, если из $|u| \leqslant |v|$ следует $\|u\| \leqslant \|v\|$. Типичные банаховы решётки — это пространства функций с поточечным порядком, например пространства p-интегрируемых функций $L_p(\Omega, \mu)$ или пространства непрерывных функций $C(\Omega)$.

Пример 1.2. Пространство непрерывно дифференцируемых функций $C^1([0,1])$ с поточечным порядком является упорядоченным векторным пространством, но не является векторной решёткой: поточечный максимум двух дифференцируемых функций, вообще говоря, не дифференцируем. Порядок задаёт на этом пространстве равномерную норму $\|\cdot\|_\infty$, пополнение по которой даёт банахову решётку $C([0,1])$.

Линейное отображение $\Phi\colon \mathscr{V} \to \mathscr{W}$ между упорядоченными $*$-векторными пространствами называется *положительным*, если $\Phi[\mathscr{V}_+] \subseteq \mathscr{W}_+$. Положительные отображения сохраняют инволюцию: $\Phi[v^\dagger] = (\Phi[v])^\dagger$. Если Φ обладает положительным обратным, то Φ называется *порядковым изоморфизмом*.

Инъективное отображение $\iota\colon \mathscr{V} \to \mathscr{W}$, задающее порядковый изоморфизм на свой образ, то есть такое, что $\iota[\mathscr{V}_+] = \iota[\mathscr{V}] \cap \mathscr{W}_+$, называется *вложением* и обозначается $\iota\colon \mathscr{V} \hookrightarrow \mathscr{W}$. Если задано вложение $\iota\colon \mathscr{V} \hookrightarrow \mathscr{W}$, то мы зачастую будем отождествлять $\mathscr{V}$ с его образом $\iota[\mathscr{V}]$. Заметим, что образ положительного отображения не обязан быть замкнутым, поэтому не любое инъективное положительное отображение является вложением. Сюръективное положительное отображение $\pi\colon \mathscr{W} \to \mathscr{V}$, для которого $\pi[\mathscr{W}_+] = \mathscr{V}_+$, называется *фактор-отображением* и обозначается $\pi\colon \mathscr{W} \twoheadrightarrow \mathscr{V}$.

1.1.3. Функциональные системы

Положительный элемент $\mathbf{1} \in \mathscr{V}_+$ называется *порядковой единицей*, если для каждого $v \in \mathscr{V}_{sa}$ найдётся такое число $r > 0$, что $v \leqslant r\mathbf{1}$. Порядковая единица называется *архимедовой* [42], если элемент $v \in \mathscr{V}_{sa}$ положителен всякий раз, когда $v + r\mathbf{1} \geqslant 0$ для всех $r > 0$. (Обратная импликация тривиальна: если $v \geqslant 0$, то $v + r\mathbf{1} \geqslant 0$ при любом $r > 0$, поскольку $\mathbf{1}$ положительна.) Упорядоченное $*$-векторное пространство с архимедовой порядковой единицей называется *функциональной системой* [42—44]. Если требуется указать пространство явно, единица обозначается $\mathbf{1}_{\mathscr{V}}$.

Состоянием на функциональной системе $\mathscr{V}$ называется положительный унитальный функционал $\rho \in \mathscr{V}^*$, то есть такой функционал, что

$$\langle \mathbf{1}, \rho \rangle = 1, \qquad \langle v, \rho \rangle \geqslant 0 \quad \text{для всех } v \in \mathscr{V}_+. \tag{1.6}$$

Пространство состояний обозначается $\mathfrak{S}(\mathscr{V})$. Оно выпукло и компактно в $*$-слабой топологии; его крайние точки называются *чистыми состояниями*.

Архимедова единица задаёт на $\mathscr{V}$ норму. На вещественном подпространстве $\mathscr{V}_{sa}$ она определяется как

$$\|v\|_{sa} = \inf \{\, r > 0 \mid -r\mathbf{1} \leqslant v \leqslant r\mathbf{1} \,\}, \tag{1.7}$$

а её продолжение на всё $\mathscr{V}$ может быть задано формулой

$$\|v\| = \sup \{\, |\langle v, \rho \rangle| \mid \rho \in \mathfrak{S}(\mathscr{V}) \,\}. \tag{1.8}$$

Продолжение нормы с $\mathscr{V}_{sa}$ на $\mathscr{V}$ при условиях $\|v\| = \|v^\dagger\|$ и совпадения нормы с $\|\cdot\|_{sa}$ на $\mathscr{V}_{sa}$ не единственно, однако все такие продолжения эквивалентны [42] и порождают одну и ту же топологию, естественно связанную с порядком [32, глава 2].

Отображение $\Phi\colon \mathscr{V} \to \mathscr{W}$ называется *унитальным*, если $\Phi[\mathbf{1}_{\mathscr{V}}] = \mathbf{1}_{\mathscr{W}}$. Отображения между функциональными системами мы по умолчанию предполагаем положительными и унитальными. Понятия вложения и фактор-отображения переносятся с упорядоченных пространств; теория фактор-пространств функциональных систем изложена в [42].

Классический результат Р. В. Кэдисона показывает, что функциональные системы суть в точности пространства аффинных функций на выпуклых компактах.

Теорема 1.3 (Кэдисон, [43]). *Пусть $\mathscr{V}$ — функциональная система с единицей* $\mathbf{1}$. *Тогда $\Omega = \mathfrak{S}(\mathscr{V})$ является хаусдорфовым компактом, и существует унитальное положительное вложение*

$$\iota\colon \mathscr{V} \hookrightarrow C(\Omega), \qquad v \longmapsto \big(\rho \mapsto \langle v, \rho\rangle\big). \tag{1.9}$$

При этом элементы $v \in \mathscr{V}$ отвечают непрерывным аффинным функциям на $\mathfrak{S}(\mathscr{V})$.

1.1.4. Гильбертовы пространства и пространства операторов

Гильбертовы пространства обозначаются $\mathcal{H}, \mathcal{K}, \mathcal{E}, \mathcal{X}, \mathcal{Y}, \mathcal{C}$, а их норма — $\|\cdot\|_2$. Мы пользуемся обозначениями Дирака: векторы записываются как кет-векторы $|\psi\rangle$, функционалы — как бра-векторы $\langle\psi|$, скалярное произведение $\langle\varphi|\psi\rangle$ линейно по второму аргументу и сопряжённо-линейно по первому. Тензорное произведение пространств обозначается $\mathcal{H} \otimes \mathcal{K}$.

Пространство ограниченных операторов на $\mathcal{H}$ обозначается $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$ и наделено операторной нормой

$$\|B\| = \sup_{\|\psi\|_2 \leqslant 1} \|B\psi\|_2 = \sup_{\substack{\|\varphi\|_2=1 \\ \|\psi\|_2=1}} |\langle\varphi|B|\psi\rangle|. \tag{1.10}$$

Тождественный оператор обозначается $\mathbf{1}$. На $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$ задано эрмитово сопряжение $B \mapsto B^\dagger$; подпространство самосопряжённых операторов обозначается $\mathfrak{B}(\mathcal{H})_{\text{sa}}$. Через $\mathfrak{K}(\mathcal{H})$ обозначается пространство компактных операторов, через $\mathfrak{T}(\mathcal{H})$ — пространство ядерных операторов с естественной нормой

$$\|\rho\|_1 = \operatorname{Tr}|\rho|, \qquad |\rho| = \sqrt{\rho^\dagger\rho}, \tag{1.11}$$

и с определённым на нём функционалом следа Tr. Подпространство самосопряжённых ядерных операторов обозначается $\mathfrak{T}(\mathcal{H})_{\text{sa}}$.

Эти пространства связаны цепочкой двойственностей: $\mathfrak{K}(\mathcal{H})^*$ изометрически изоморфно $\mathfrak{T}(\mathcal{H})$, а $\mathfrak{T}(\mathcal{H})^*$ изометрически изоморфно $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$. Таким образом, $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$ является дуальным банаховым пространством с преддвойственным $\mathfrak{T}(\mathcal{H})$, и двойственность задаётся билинейной формой

$$\mathfrak{T}(\mathcal{H}) \times \mathfrak{B}(\mathcal{H}) \longrightarrow \mathbb{C}, \qquad (\rho, B) \longmapsto \operatorname{Tr}(\rho B). \tag{1.12}$$

Соответствующая $*$-слабая топология на $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$ называется *ультраслабой* и обозначается w*o; она порождена преднормами $B \mapsto |\mathrm{Tr}(B\rho)|$ при $\rho \in \mathfrak{T}(\mathcal{H})$. Наряду с ней на $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$ рассматриваются сильная операторная топология so, порождённая преднормами $B \mapsto \|B\psi\|_2$ для $\psi \in \mathcal{H}$, и слабая операторная топология wo, порождённая преднормами $B \mapsto |\langle\varphi|B|\psi\rangle|$ для $\varphi, \psi \in \mathcal{H}$. В общем случае эти топологии различны, но их замкнутые ограниченные выпуклые множества совпадают [40, с. 67–71].

Конус положительных операторов задаётся условием

$$B \geqslant 0 \quad \Longleftrightarrow \quad B = B^\dagger \text{ и } \langle\psi|B|\psi\rangle \geqslant 0 \text{ для всех } \psi \in \mathcal{H}. \tag{1.13}$$

Эквивалентно, оператор положителен, если он самосопряжён и его спектр лежит в $\mathbb{R}_+$. Пространства $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$ и $\mathfrak{T}(\mathcal{H})$ с этим конусом являются упорядоченными $*$-векторными пространствами; $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$ — функциональная система.

Через $\mathbb{M}_{n\times m}(\mathbb{F})$ обозначается пространство $n \times m$-матриц над полем $\mathbb{F}$; мы пишем $\mathbb{M}_{n\times m} = \mathbb{M}_{n\times m}(\mathbb{C})$ и $\mathbb{M}_n = \mathbb{M}_{n\times n}$. Матричные единицы обозначаются $\mathbf{1}_{i,j}$. В конечномерном случае $\mathfrak{B}(\mathcal{H}) \cong \mathfrak{T}(\mathcal{H}) \cong \mathbb{M}_n$ при размерности $\dim \mathcal{H} = n$.

1.1.5. C^*-алгебры и алгебры фон Неймана

C^*-алгеброй называется ассоциативная банахова $*$-алгебра с операцией умножения $\cdot\colon \mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \mathcal{A}$, удовлетворяющей $\|a \cdot b\| \leqslant \|a\|\|b\|$ для всех $a, b \in \mathcal{A}$ и *C^*-тождеству* $\|a^\dagger a\| = \|a\|^2$; мы также предполагаем наличие единицы $\mathbf{1} \in \mathcal{A}$. Все рассматриваемые C^*-алгебры предполагаются содержащими единицу. Элемент $a \in \mathcal{A}$ называется *положительным*, если он представим в виде $a = b^\dagger b$ для некоторого $b \in \mathcal{A}$; множество таких элементов образует конус $\mathcal{A}_+$, и $(\mathcal{A}, \mathcal{A}_+)$ является функциональной системой.

По теореме Гельфанда–Наймарка всякая коммутативная C^*-алгебра с единицей изометрически $*$-изоморфна алгебре $C(\Omega)$ непрерывных функций на некотором хаусдорфовом компакте Ω, а всякая C^*-алгебра допускает изометрическое $*$-представление внутри $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$. *Алгеброй фон Неймана* называется $*$-подалгебра в $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$, содержащая $\mathbf{1}$ и замкнутая в ультраслабой топологии. По теореме С. Сакаи [45] C^*-алгебра $*$-изоморфна алгебре фон Неймана тогда и только тогда, когда она является дуальным банаховым пространством.

Теорема Шермана [46; 47] утверждает, что C^*-алгебра коммутативна тогда и только тогда, когда её конус положительных элементов является решёткой. Этот факт лежит в основе интуиции, согласно которой переход от классической теории вероятностей к некоммутативной состоит в отказе от решёточных свойств порядка.

Матрицы над C^*-алгеброй снова образуют C^*-алгебру: $\mathbb{M}_n(\mathcal{A})$ есть C^*-алгебра с покомпонентными операциями

$$(a \cdot b)_{i,j} = \sum_k a_{i,k} \cdot b_{k,j} \qquad \text{для матриц } a, b \in \mathbb{M}_n(\mathcal{A}). \tag{1.14}$$

Матрица $v = [v_{i,j}]_{i,j} \in \mathbb{M}_n(\mathcal{A})$ положительна тогда и только тогда, когда существует $a \in \mathbb{M}_n(\mathcal{A})$, для которой

$$v_{i,j} = (a^\dagger a)_{i,j} = \sum_k a^\dagger_{k,i} a_{k,j}, \tag{1.15}$$

что равносильно [48] выполнению неравенства

$$\sum_{i,j} a_i^\dagger v_{i,j} a_j \geqslant 0 \qquad \text{для всех } a_1, \ldots, a_n \in \mathcal{A}. \tag{1.16}$$

1.1.6. Операторные пространства

Конкретным операторным пространством называется замкнутое подпространство $\mathscr{V} \subseteq \mathfrak{B}(\mathcal{H})$. Абстрактная характеризация таких пространств [49] использует понятие матричных норм.

Для векторного пространства $\mathscr{V}$ обозначим через $\mathbb{M}_{n\times m}(\mathscr{V})$ пространство $n\times m$-матриц с элементами из $\mathscr{V}$; эквивалентно, $\mathbb{M}_{n\times m}(\mathscr{V}) = \mathbb{M}_{n\times m} \otimes \mathscr{V}$. Пространство $\mathbb{M}_n(\mathscr{V})$ называется *n-м матричным уровнем* над $\mathscr{V}$. Если $\mathscr{V}$ — $*$-векторное пространство, то инволюция

$$(\cdot)^\dagger \colon (v_{i,j})_{i,j} \longmapsto (v^\dagger_{j,i})_{i,j} \tag{1.17}$$

задаёт на $\mathbb{M}_n(\mathscr{V})$ структуру $*$-векторного пространства. Умножение $v \in \mathbb{M}_{n\times m}(\mathscr{V})$ слева на $\alpha \in \mathbb{M}_{s\times n}$ и справа на $\beta \in \mathbb{M}_{m\times p}$ определяется формулой

$$(\alpha v \beta)_{k,l} = \sum_{i,j} \alpha_{k,i} v_{i,j} \beta_{j,l} \in \mathbb{M}_{s\times p}(\mathscr{V}). \tag{1.18}$$

Матричной нормой называется последовательность норм $\|\cdot\|_n$ на уровнях $\mathbb{M}_n(\mathscr{V})$, удовлетворяющая аксиомам Руана [49]:

1. $\|\alpha v\beta\|_m \leqslant \|\alpha\|\|v\|_n\|\beta\|$ для всех $v \in \mathbb{M}_n(\mathscr{V})$, $\alpha \in \mathbb{M}_{m\times n}$, $\beta \in \mathbb{M}_{n\times m}$;

2. $\|u \oplus v\|_{n+m} = \max\{\|u\|_n, \|v\|_m\}$ для всех $u \in \mathbb{M}_n(\mathscr{V})$, $v \in \mathbb{M}_m(\mathscr{V})$.

Банахово пространство с матричной нормой называется *(абстрактным) операторным пространством*.

Пусть $\Phi\colon \mathscr{V} \to \mathscr{W}$ — ограниченное отображение операторных пространств. Его *n-м размножением* называется отображение $\Phi^{(n)} = \mathrm{Id}_n \otimes \Phi$, действующее поэлементно:

$$\Phi^{(n)}\left[\begin{bmatrix} v_{11} & \cdots & v_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{n1} & \cdots & v_{nn} \end{bmatrix}\right] = \begin{bmatrix} \Phi[v_{11}] & \cdots & \Phi[v_{1n}] \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \Phi[v_{n1}] & \cdots & \Phi[v_{nn}] \end{bmatrix}. \tag{1.19}$$

Нормы размножений образуют неубывающую последовательность

$$\|\Phi\| \leqslant \|\Phi^{(2)}\| \leqslant \cdots \leqslant \|\Phi^{(n)}\| \leqslant \cdots, \tag{1.20}$$

супремум которой называется *вполне ограниченной* (cb-) нормой:

$$\|\Phi\|_{cb} = \sup_n \|\Phi^{(n)}\|. \tag{1.21}$$

Если $\|\Phi\|_{cb} < \infty$, то Φ называется *вполне ограниченным*; пространство таких отображений обозначается $\mathrm{CB}(\mathscr{V}, \mathscr{W})$. Отображение называется *вполне сжимающим*, если $\|\Phi\|_{cb} \leqslant 1$, и *полной изометрией*, если каждое размножение $\Phi^{(n)}$ изометрично.

Лемма 1.4 (Лемма Смита, [50])**.** *Пусть $\mathscr{V}$ — операторное пространство и $\Phi\colon \mathscr{V} \to \mathbb{M}_n$ — ограниченное отображение. Тогда $\|\Phi\|_{cb} = \|\Phi^{(n)}\|$. В частности, всякое ограниченное отображение в $\mathbb{M}_n$ вполне ограничено.*

Теорема 1.5 (Руан, [49])**.** *Всякое абстрактное операторное пространство $\mathscr{V}$ вполне изометрически вкладывается в $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$ для некоторого гильбертова пространства $\mathcal{H}$.*

1.1.7. Операторные системы

Конкретной операторной системой называется замкнутое в операторной норме содержащее единицу $\mathbf{1}$ и замкнутое относительно эрмитова сопряжения

подпространство $\mathscr{S} \subseteq \mathfrak{B}(\mathcal{H})$. Абстрактная характеризация таких подпространств была получена М.-Д. Чоем и Э. Эффросом [5] в терминах матричного порядка.

Семейство конусов $\{C_n\}_n$, где $C_n \subseteq \mathbb{M}_n(\mathscr{V})_{sa}$, называется *матричным конусом* над $\mathscr{V}$, если

$$\alpha^\dagger C_n \alpha \subseteq C_m \qquad \text{для всех } \alpha \in \mathbb{M}_{n\times m}\,. \tag{1.22}$$

Мы будем писать $\mathbb{M}_n(\mathscr{V})_+ = C_n$. Матричный конус наделяет $\mathscr{V}$ структурой *матричного порядка*. Порядковая единица $\mathbf{1} \in \mathscr{V}_+$ называется *матричной порядковой единицей*, если элементы

$$\mathbf{1}^{(n)} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \mathbf{1} \end{bmatrix} = \mathbf{1}_n \otimes \mathbf{1} \tag{1.23}$$

являются порядковыми единицами на каждом уровне $\mathbb{M}_n(\mathscr{V})$; если все они архимедовы, то $\mathbf{1}$ называется *архимедовой матричной порядковой единицей*. Матричное $*$-векторное пространство с архимедовой матричной единицей называется *(абстрактной) операторной системой*.

Матричный порядок с архимедовой единицей порождает на операторной системе структуру матричной нормы: для $v \in \mathbb{M}_n(\mathscr{V})$

$$\|v\|_n = \inf\left\{ r > 0 \;\middle|\; \begin{bmatrix} r\mathbf{1}_n & v \\ v^\dagger & r\mathbf{1}_n \end{bmatrix} \in \mathbb{M}_{2n}(\mathscr{V})_+ \right\}. \tag{1.24}$$

Всякая C^*-алгебра является операторной системой с порядком и единицей, порождёнными алгебраической структурой. Операторные системы, вполне порядково изоморфные подсистемам в $\mathbb{M}_n$, называются *матричными системами* [51]; конечномерные C^*-алгебры мы называем *матричными $*$-алгебрами*.

Отображение $\Phi\colon \mathscr{V} \to \mathscr{W}$ между операторными системами называется *вполне положительным* (в.п.), если все его размножения $\Phi^{(n)}$ положительны, то есть переводят $\mathbb{M}_n(\mathscr{V})_+$ в $\mathbb{M}_n(\mathscr{W})_+$. Пространство унитальных вполне положительных (у.в.п.) отображений обозначается $\mathrm{UCP}(\mathscr{V}, \mathscr{W})$. Унитальные $*$-гомоморфизмы между C^*-алгебрами вполне положительны. Операторные системы и у.в.п. отображения образуют категорию, обозначаемую **OS**; она содержит подкатегорию C^*-алгебр и унитальных $*$-гомоморфизмов. Аналогично, функциональные системы и положительные унитальные отображения образуют категорию **FS**.

Всякое у.в.п. отображение является вполне сжимающим, причём $\|\Phi\|_{cb} = 1$; обратно, всякое унитальное вполне сжимающее отображение вполне положительно. Если у.в.п. отображение обладает вполне положительным обратным, оно

называется *унитальным вполне порядковым изоморфизмом*. Понятия вложения и фактор-отображения понимаются поуровнево: ι является вложением, если каждое $\iota^{(n)}$ является вложением. Теория фактор-отображений операторных систем изложена в [52].

Для унитального вполне положительного отображения $\Phi\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ между C^*-алгебрами выполнено *неравенство Кэдисона* [6, предложение 3.3]:

$$\Phi[a^\dagger]\Phi[a] \leqslant \Phi[a^\dagger a], \qquad a \in \mathcal{A}. \tag{1.25}$$

Отсюда следует, что унитальный вполне порядковый изоморфизм C^*-алгебр автоматически является алгебраическим $*$-изоморфизмом [53, следствие 3.2]. Отображение $\Phi\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ вполне положительно тогда и только тогда, когда

$$\sum_{i,j} b_i^\dagger \Phi[a_i^\dagger a_j] b_j \geqslant 0 \tag{1.26}$$

для всех $n \in \mathbb{N}$ и всех наборов $a_1, \ldots, a_n \in \mathcal{A}$, $b_1, \ldots, b_n \in \mathcal{B}$.

Структура у.в.п. отображений описывается теоремой Стайнспринга, согласно которой такие отображения суть «сжатия» $*$-гомоморфизмов.

Теорема 1.6 (Стайнспринг, [3])**.** *Пусть $\mathcal{A}$ — C^*-алгебра с единицей и $\Phi\colon \mathcal{A} \to \mathfrak{B}(\mathcal{H})$ — у.в.п. отображение. Тогда существуют гильбертово пространство $\mathcal{K}$, унитальный $*$-гомоморфизм $\Psi\colon \mathcal{A} \to \mathfrak{B}(\mathcal{K})$ и изометрия $V\colon \mathcal{H} \to \mathcal{K}$, такие что*

$$\Phi[a] = V^\dagger \Psi[a] V. \tag{1.27}$$

Теорема 1.7 (Чой–Эффрос, [5])**.** *Всякая абстрактная операторная система $\mathscr{V}$ унитально вполне порядково вкладывается в $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$ для некоторого гильбертова пространства $\mathcal{H}$. Вложение может быть задано формулой*

$$\mathscr{V} \hookrightarrow \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} \bigoplus_{\Phi\in \mathrm{UCP}(\mathscr{V},\mathbb{M}_n)} \mathbb{M}_n, \qquad v \longmapsto \big(\Phi[v]\big)_\Phi. \tag{1.28}$$

Операторная система называется *дуальной*, если она дуальна как банахово пространство. Всякая дуальная операторная система представима как содержащее единицу, самосопряжённое, ультраслабо замкнутое подпространство алгебры фон Неймана [54]; в частности, порядок дуальной операторной системы монотонно полон [55]. Отображение между дуальными операторными системами называется *нормальным*, если оно непрерывно относительно $*$-слабых топологий. Категория

операторных систем вкладывается в категорию дуальных операторных систем при помощи перехода к бидуальному пространству $\mathscr{V} \mapsto \mathscr{V}^{**}$.

У.в.п. отображение $\rho\colon \mathscr{V} \to \mathbb{M}_n$ называется *n-состоянием*; множество n-состояний обозначается $\mathfrak{S}_n(\mathscr{V}) = \mathrm{UCP}(\mathscr{V}, \mathbb{M}_n)$. Отображение $\rho\colon \mathscr{V} \to \mathbb{M}_n$ вполне положительно тогда и только тогда, когда положительно отображение $\sigma\colon \mathbb{M}_n(\mathscr{V}) \to \mathbb{C}$, заданное как

$$\sigma[v] = \frac{1}{n} \sum_{i,j} \big(\rho[v_{i,j}]\big)_{i,j} = \Omega\big[\rho^{(n)}[v]\big], \tag{1.29}$$

где $\Omega \in \mathfrak{S}(\mathbb{M}_n \otimes \mathbb{M}_n)$ — вполне запутанное состояние,

$$\Omega[m] = \langle m\,\omega, \omega\rangle, \qquad \omega = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_j e_j \otimes e_j, \tag{1.30}$$

а $\{e_j\}_j$ — ортонормированный базис в $\mathbb{C}^n$. Обратно, отображение ρ восстанавливается по σ формулой

$$\langle \rho[v], m\rangle = \mathrm{Tr}\big(\rho[v]\, m\big) = n \cdot \sigma[m^{\mathsf{T}} \otimes v], \qquad m \in \mathbb{M}_n, \tag{1.31}$$

где m^{T} — транспонированная матрица. Эта взаимосвязь между отображениями $\mathscr{V} \to \mathbb{M}_n$ и состояниями на $\mathbb{M}_n(\mathscr{V})$ называется *двойственностью Чоя–Ямиолковского* [6, глава 6]. Она широко используется в квантовой теории информации, однако не канонична по трём причинам. Во-первых, она не единственна: в (1.30) можно взять любое максимально запутанное состояние. Во-вторых, она не уважает унитальность: из унитальности ρ следует унитальность σ, но обратное требует более сильного условия

$$\sigma[\mathbf{1}_{i,j} \otimes \mathbf{1}] = \begin{cases} \frac{1}{n}, & i = j, \\ 0, & i \neq j, \end{cases} \tag{1.32}$$

где $\mathbf{1}_{i,j}$ — матрица с единственной единицей в ячейке (i,j). В-третьих, она не изометрична: для $\rho_1, \rho_2 \in \mathfrak{S}_n(\mathscr{V})$ и отвечающих им $\sigma_1, \sigma_2 \in \mathfrak{S}(\mathbb{M}_n(\mathscr{V}))$ выполнено

$$\|\sigma_1 - \sigma_2\| \leqslant \|\rho_1 - \rho_2\|_{cb} \leqslant n\|\sigma_1 - \sigma_2\|, \tag{1.33}$$

и это неравенство в общем случае неулучшаемо.

Подчеркнём различие между функциональными и операторными системами. Функциональные системы следует воспринимать как пространства аффинных

функций, тогда как операторные системы — как пространства операторов, наделённые дополнительной структурой матричного порядка. Всякая операторная система является функциональной, но на одной функциональной системе возможны, вообще говоря, различные матричные структуры [10]. Классическая теорема Ш. Какутани утверждает, что если полная по норме порядковой единицы функциональная система $\mathscr{V}$ является векторной решёткой, то она унитально порядково изоморфна $C(\Omega)$, где Ω — множество её чистых состояний [56; 57]. На банаховых решётках с порядковой единицей $C(\Omega)$ возможна лишь одна матричная структура [10, предложение 5.2]. Существует гипотеза, что единственность матричной структуры характеризует функциональные системы вида $C(\Omega)$; для конечномерного случая она доказана в [58] методами геометрии выпуклых тел, а её обобщение на бесконечномерный случай может быть связано с гипотезами Цирельсона о квантовых корреляциях [17].

1.1.8. Инъективность и задача продолжения

Инъективность — свойство объекта категории, выражающее разрешимость задачи продолжения морфизма в этот объект. Пусть $\mathscr{V}, \mathscr{W}, \mathscr{Z}$ — операторные системы и $\iota\colon \mathscr{V} \hookrightarrow \mathscr{W}$ — вложение. У.в.п. отображение $\Psi\colon \mathscr{W} \to \mathscr{Z}$ называется *продолжением* отображения $\Phi\colon \mathscr{V} \to \mathscr{Z}$, если $\Phi = \Psi \circ \iota$, то есть коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \mathscr{W} & & \\ {\scriptstyle\iota}\uparrow & \searrow^{\Psi} & \\ \mathscr{V} & \xrightarrow[\Phi]{} & \mathscr{Z} \end{array} \tag{1.34}$$

Операторная система $\mathscr{Z}$ называется *инъективной* (не путать с инъективностью отображений), если всякое у.в.п. отображение $\Phi\colon \mathscr{V} \to \mathscr{Z}$ продолжается на любую объемлющую систему $\mathscr{W}$. Аналогично определяется инъективность операторного пространства (с заменой у.в.п. отображений на вполне сжимающие); для операторных систем эти два понятия совпадают [6, предложение 15.1].

Теорема 1.8 (Арвесон, [44])**.** *Пусть $\mathcal{H}$ — гильбертово пространство, $\mathscr{V} \subseteq \mathscr{W}$ — операторные системы. Тогда всякое у.в.п. отображение $\Phi\colon \mathscr{V} \to \mathfrak{B}(\mathcal{H})$ продол-*

жается до у.в.п. отображения $\Psi\colon \mathscr{W} \to \mathfrak{B}(\mathcal{H})$. *Иными словами, алгебра* $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$ *инъективна.*

Конкретная операторная система $\mathscr{V} \subseteq \mathfrak{B}(\mathcal{H})$ инъективна тогда и только тогда, когда существует у.в.п. проекция $\pi\colon \mathfrak{B}(\mathcal{H}) \twoheadrightarrow \mathscr{V}$ с образом $\mathscr{V}$. Согласно результату Чоя и Эффроса, инъективные операторные системы допускают структуру C^*-алгебры.

Теорема 1.9 (Чой–Эффрос, [5])**.** *Пусть* $\mathscr{V} \subseteq \mathfrak{B}(\mathcal{H})$ *— инъективная конкретная операторная система и* $\pi\colon \mathfrak{B}(\mathcal{H}) \twoheadrightarrow \mathscr{V}$ *— у.в.п. проекция на* $\mathscr{V}$. *Тогда операция* $a \cdot b = \pi[ab]$ *единственным образом задаёт на* $\mathscr{V}$ *структуру* C^**-алгебры, вполне порядково изоморфной* $\mathscr{V}$. *Полученная алгебра монотонно полна.*

В частности, все конечномерные C^*-алгебры инъективны, и матричная система инъективна тогда и только тогда, когда она изоморфна матричной $*$-алгебре.

Расширением операторной системы $\mathscr{V}$ называется пара из операторной системы $\mathscr{W}$ и вложения $\iota\colon \mathscr{V} \hookrightarrow \mathscr{W}$. Расширение *инъективно*, если $\mathscr{W}$ инъективна; *существенно*, если отображение $\Psi\colon \mathscr{W} \to \mathscr{Z}$ является вложением тогда и только тогда, когда таковым является $\Psi \circ \iota$; *жёстко*, если из $\Psi \circ \iota = \iota$ для $\Psi\colon \mathscr{W} \to \mathscr{W}$ следует $\Psi = \mathrm{Id}_{\mathscr{W}}$. *Инъективной оболочкой* $\mathcal{I}(\mathscr{V})$ называется минимальное инъективное расширение $\mathscr{V}$: если $\mathscr{Z}$ инъективна и $\iota[\mathscr{V}] \subseteq \mathscr{Z} \subseteq \mathcal{I}(\mathscr{V})$, то $\mathscr{Z} = \mathcal{I}(\mathscr{V})$. Существование инъективной оболочки для произвольной операторной системы доказано М. Хаманой [59]. Инъективная оболочка всегда является существенным и жёстким расширением; обратно, инъективное жёсткое расширение является инъективной оболочкой. Всякое инъективное расширение операторной системы в смысле операторных пространств само является операторной системой [6, предложение 15.9], поэтому оба понятия инъективной оболочки совпадают.

1.1.9. Однопараметрические операторные полугруппы

Пусть $\mathscr{V}$ — банахово пространство. *Однопараметрической операторной полугруппой* называется гомоморфизм полугрупп $\Phi\colon \mathbb{R}_+ \to \mathfrak{B}(\mathscr{V})$, то есть семейство операторов $\{\Phi(t)\}_{t\geqslant 0}$, для которого

$$\Phi(0) = \mathrm{Id}, \qquad \Phi(s)\Phi(t) = \Phi(t+s), \qquad t, s \in \mathbb{R}_+. \tag{1.35}$$

Полугруппа называется *равномерно непрерывной*, если она непрерывна в топологии нормы,

$$\lim_{t\downarrow 0}\|\Phi(t)-\mathrm{Id}\|_{\mathfrak{B}(\mathscr{V})}=0, \tag{1.36}$$

и *сильно непрерывной*, если она непрерывна в топологии so, то есть

$$\lim_{t\downarrow 0}\|\Phi(t)[v]-v\|=0 \qquad \text{для всех } v\in\mathscr{V}. \tag{1.37}$$

Аналогично определяются слабая и $*$-слабая непрерывность. Полугруппа сильно непрерывна тогда и только тогда, когда она слабо непрерывна [36, глава I, теорема 5.8]; однако из $*$-слабой непрерывности не следует сильная непрерывность [60].

Генератором сильно непрерывной полугруппы называется плотно определённый замкнутый оператор $A\colon\ \mathrm{Dom}\,A\to\mathscr{V}$,

$$Av=\lim_{t\downarrow 0}\frac{\Phi(t)[v]-v}{t}, \qquad v\in\mathrm{Dom}\,A. \tag{1.38}$$

Полугруппа равномерно непрерывна тогда и только тогда, когда её генератор ограничен [36, с. 51]. Если $\mathrm{Dom}\,A$ плотна лишь в $*$-слабой топологии, то A отвечает $*$-слабо непрерывной полугруппе, причём генератор не всегда определяет такую полугруппу однозначно [60].

Спектром оператора A называется множество

$$\sigma(A)=\{\,\lambda\in\mathbb{C}\mid \lambda-A \text{ не имеет ограниченного обратного}\,\}, \tag{1.39}$$

а его дополнение $\rho(A)=\mathbb{C}\setminus\sigma(A)$ — *резольвентным множеством*. *Резольвентой* называется операторная функция

$$R_A(\lambda)=(\lambda-A)^{-1}, \qquad \lambda\in\rho(A). \tag{1.40}$$

Она голоморфна по λ и удовлетворяет тождеству Гильберта

$$R_A(\lambda)R_A(\omega)=-\frac{R_A(\lambda)-R_A(\omega)}{\lambda-\omega}. \tag{1.41}$$

Спектральной границей генератора и *границей возрастания* полугруппы называются величины

$$s(A)=\sup\{\,\mathrm{Re}\,\lambda\mid\lambda\in\sigma(A)\,\}, \qquad \omega_0=\inf_{t>0}\frac{\log\|\Phi(t)\|}{t}; \tag{1.42}$$

они связаны неравенствами [36, с. 58]

$$-\infty\leqslant s(A)\leqslant\omega_0<+\infty. \tag{1.43}$$

При $\operatorname{Re}\lambda > \omega_0$ резольвента представляется интегралом Лапласа (в смысле Бохнера)

$$R_A(\lambda) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\lambda t}\Phi(t)\,\mathrm{d}t. \tag{1.44}$$

Псевдорезольвентой называется любое семейство операторов, параметризованное подмножеством комплексных чисел и удовлетворяющее тождествам Гильберта.

Полугруппа называется *сжимающей*, если $\|\Phi(t)\| \leqslant 1$ при всех $t \geqslant 0$; для таких полугрупп $\omega_0 \leqslant 0$. Генераторы сжимающих полугрупп характеризуются теоремой Хилле–Йосиды [36, с. 73].

Теорема 1.10 (Хилле–Йосида)**.** *Оператор A на банаховом пространстве $\mathscr{V}$ является генератором сильно непрерывной сжимающей полугруппы тогда и только тогда, когда он плотно определён, замкнут, полуплоскость $\{\,\lambda \mid \operatorname{Re}\lambda > 0\,\}$ входит в резольвентное множество $\rho(A)$ и для всех λ с $\operatorname{Re}\lambda > 0$ выполнено*

$$\|R_A(\lambda)\| \leqslant \frac{1}{\operatorname{Re}\lambda}. \tag{1.45}$$

Доказательство использует приближения Йосиды — ограниченные операторы

$$A_n = nR_A(n)A = n^2R_A(n) - n, \tag{1.46}$$

для которых полугруппы $\Phi_n(t) = \mathrm{e}^{tA_n}$ сходятся в топологии so равномерно на отрезках $[0, T]$.

Полугруппа на упорядоченном векторном пространстве называется *положительной*, если все её операторы положительны:

$$\Phi(t)[v] \geqslant 0 \qquad \text{для всех } t \geqslant 0,\ v \in \mathscr{V}_+. \tag{1.47}$$

Пусть полугруппа положительна и сохраняет порядковую единицу, $\Phi(t)[\mathbf{1}] = \mathbf{1}$. Тогда она сжимающая: для $v \in \mathscr{V}_{sa}$ с $\|v\| \leqslant 1$ имеем $-\mathbf{1} \leqslant v \leqslant \mathbf{1}$, откуда по положительности $-\mathbf{1} \leqslant \Phi(t)[v] \leqslant \mathbf{1}$, то есть $\|\Phi(t)[v]\| \leqslant 1$; следовательно, $\|\Phi(t)\| \leqslant 1$ и $\omega_0 \leqslant 0$. С другой стороны, $\Phi(t)[\mathbf{1}] = \mathbf{1}$ даёт $\|\Phi(t)\| \geqslant 1$, поэтому $\|\Phi(t)\| = 1$ и $\omega_0 = 0$. Наконец, $A[\mathbf{1}] = 0$, так что 0 — собственное значение генератора и $s(A) \geqslant 0$; вместе с общей оценкой $s(A) \leqslant \omega_0$ это даёт $s(A) = \omega_0 = 0$. Генераторы таких полугрупп характеризуются *условной положительностью*: оператор A на функциональной системе $\mathscr{V}$ условно положителен, если

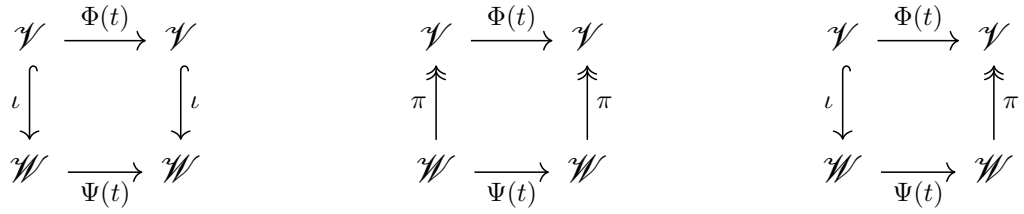
$$\langle v, \rho\rangle = 0 \quad\Longrightarrow\quad \langle Av, \rho\rangle \geqslant 0 \qquad \text{для всех } v \in \operatorname{Dom} A \cap \mathscr{V}_+,\ \rho \in (\mathscr{V}^*)_+. \tag{1.48}$$

Теорема 1.11 (Арендт–Чернов–Като, [61—63])**.** *Пусть $\mathscr{V}$ — функциональная система с порядковой единицей* $\mathbf{1}$*, а $\{\Phi(t)\}_{t\geqslant 0}$ — сильно непрерывная полугруппа с генератором A. Следующие условия эквивалентны:*

1. *полугруппа Φ положительна и сохраняет единицу;*
2. *генератор A условно положителен и $A[\mathbf{1}] = 0$;*
3. *резольвента $R_A(\lambda)$ положительна для всех $\lambda > 0$ и $R_A(\lambda)[\mathbf{1}] = \lambda^{-1}\mathbf{1}$.*

Если $\mathscr{V}$ — операторная система, то естественно требовать вполне положительности. Генератор A называется *условно вполне положительным* [25], если все его размножения $A^{(n)}$ условно положительны.

Наконец, введём понятия, описывающие связь между полугруппами на разных пространствах. Пусть $\iota\colon \mathscr{V} \hookrightarrow \mathscr{W}$ — вложение и Φ — полугруппа на $\mathscr{V}$. Полугруппа Ψ на $\mathscr{W}$ называется *расширением* Φ, если $\iota \circ \Phi(t) = \Psi(t) \circ \iota$ при всех $t \geqslant 0$. Если задано фактор-отображение $\pi\colon \mathscr{W} \twoheadrightarrow \mathscr{V}$ с $\pi \circ \iota = \mathrm{Id}_{\mathscr{V}}$, то Ψ называется *ко-расширением*, если $\pi \circ \Psi(t) = \Phi(t) \circ \pi$. Если выбраны вложение ι и фактор-отображение π, то *дилатацией* называется полугруппа Ψ на $\mathscr{W}$, для которой $\Phi(t) = \pi \circ \Psi(t) \circ \iota$. Если Ψ является расширением или ко-расширением, то он является дилатацией: $\pi \circ \Psi(t) \circ \iota = \pi \circ \iota \circ \Phi(t) = \Phi(t)$, и аналогично во втором случае. Обратное неверно: дилатация, вообще говоря, не является ни расширением, ни ко-расширением. Различие между этими понятиями поясняет рисунок 1.1.



а) расширение б) ко-расширение в) дилатация

Рисунок 1.1 — Коммутативные диаграммы, определяющие расширение, ко-расширение и дилатацию операторной полугруппы. Здесь $\iota\colon \mathscr{V} \hookrightarrow \mathscr{W}$ — унитальное вполне положительное вложение, $\pi\colon \mathscr{W} \twoheadrightarrow \mathscr{V}$ — унитальное вполне положительное фактор-отображение.

1.2. Классические вероятностные модели в алгебраической формулировке

В этом разделе аппарат функционального анализа применяется к построению классических вероятностных моделей в алгебраической формулировке. Рассматривается описание вероятностной модели в терминах пары двойственных банаховых пространств — соответствующих наблюдаемым и состояниям. Такой подход эквивалентен аксиоматике Колмогорова, но допускает более явное некоммутативное обобщение, которому посвящён раздел 1.3. Подробное изложение теории меры и вероятностей дано в учебниках [33; 34; 64; 65], а теории информации — в [66—69].

1.2.1. Модель фазового пространства

Классическая физическая система описывается в терминах *фазового пространства* — измеримого пространства $(\Omega, \mathcal{F})$, где Ω — множество элементарных исходов, а $\mathcal{F}$ — σ-алгебра его измеримых подмножеств. В зависимости от наличия дополнительных структур на фазовом пространстве, при алгебраическом описании теории вероятностей используются различные подходы.

1.2.1.1. Подход C^*-алгебр

Зачастую Ω обладает топологией и является хаусдорфовым компактом, в таком случае рассматривают $\mathcal{F} = \mathrm{Bor}(\Omega)$ — коллекцию борелевских множеств. При такой постановке удаётся использовать методы теории коммутативных C^*-алгебр для описания классической теории вероятностей. Точки фазового пространства $\omega \in \Omega$ задают описание состояния системы при полной определённости и в физической интерпретации называются *чистыми состояниями*, а измеримые подмножества $A \in \mathcal{F}$ — *событиями*.

Непрерывные наблюдаемые — это непрерывные вещественнозначные функции $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$; значение $f(\omega)$ интерпретируется как результат измерения

величины f, когда система находится в чистом состоянии ω. Такие функции порождают коммутативную C^*-алгебру $C(\Omega)$. Это коммутативная алгебра над комплексными числами с поточечными алгебраическими операциями, инволюцией поточечного комплексного сопряжения $f^\dagger(\omega) = \overline{f(\omega)}$, равномерной нормой $\|f\|_\infty$ и единицей $\mathbf{1}\colon \omega \mapsto 1$. Функции, принимающие неотрицательные значения, образуют конус положительных элементов; относительно него $C(\Omega)$ является банаховой решёткой.

Смешанные состояния — это вероятностные меры Радона на Ω. По теореме Рисса–Маркова–Какутани, пространство ограниченных функционалов $C(\Omega)^*$ изометрически изоморфно пространству комплекснозначных мер Радона конечной вариации $\mathfrak{M}(\Omega)$; при этом вероятностные меры соответствуют положительным функционалам $\rho\colon C(\Omega) \to \mathbb{C}$, сохраняющим единицу $\rho[\mathbf{1}] = 1$. Мы будем обозначать пространство смешанных состояний как $\mathfrak{P}(\Omega) \subseteq \mathfrak{M}(\Omega)$.

Двойственность между наблюдаемыми и состояниями задаётся интегрированием:

$$\langle f, \nu \rangle = \int_\Omega f(\omega)\, \nu(\mathrm{d}\omega), \tag{1.49}$$

то есть спаривание между пространством непрерывных функций $C(\Omega)$ и радоновских мер $\mathfrak{M}(\Omega)$ есть математическое ожидание наблюдаемой в данном состоянии. С алгебраической точки зрения (в постановке C^*-алгебр), вероятностные модели можно описывать при помощи пар банаховых пространств $C(\Omega), \mathfrak{M}(\Omega)$ с соответствующими структурами единицы, инволюции, порядка.

Множество $\mathfrak{P}(\Omega)$ выпукло и $*$-слабо компактно. Его крайними точками являются *дельта-меры* δ_ω, сосредоточенные в точках $\omega \in \Omega$:

$$\delta_\omega(A) = \begin{cases} 1, & \omega \in A, \\ 0, & \omega \notin A. \end{cases} \tag{1.50}$$

Всякое состояние единственным образом представляется как барицентр меры, сосредоточенной на множестве чистых состояний — это утверждение о том, что $\mathfrak{P}(\Omega)$ является *симплексом Бауэра* [70]. Единственность разложения на чистые состояния — ключевое свойство классической теории; оно нарушается при переходе к некоммутативному случаю.

1.2.1.2. Подход алгебр фон Неймана

В более общей постановке, допускается отсутствие выделенной топологии на фазовом пространстве Ω. В алгебраическом подходе к моделям классической теории вероятностей в таком случае используется теория коммутативных алгебр фон Неймана. Пусть $(\Omega, \mathcal{F})$ — измеримое пространство, и на нём задана σ-конечная положительная мера μ. Для любой σ-конечной меры μ выполнено, что банаховы пространства существенно ограниченных функций $L_\infty(\Omega, \mu)$ и абсолютно интегрируемых функций $L_1(\Omega, \mu)$ находятся в двойственности $L_\infty(\Omega, \mu) \cong L_1(\Omega, \mu)^*$ [33].

Ограниченными наблюдаемыми называют измеримые вещественнозначные функции $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$, определённые с точностью до μ-пренебрежимых множеств. Такие функции порождают коммутативную алгебру фон Неймана $L_\infty(\Omega, \mu)$, это комплексная коммутативная алгебра с поточечными операциями, инволюцией поточечного комплексного сопряжения $f^\dagger(\omega) = \overline{f(\omega)}$, равномерной нормой $\|f\|_\infty$ и единицей $\mathbf{1}\colon \omega \mapsto 1$. Функции, принимающие существенно неотрицательные значения, образуют конус положительных элементов, относительно которого $L_\infty(\Omega, \mu)$ является банаховой решёткой.

Смешанные состояния в такой постановке — это вероятностные меры ν на Ω, абсолютно непрерывные относительно μ. Согласно теореме Радона–Никодима, такие меры отождествляются с плотностями вероятностей

$$p \in L_1(\Omega, \mu), \quad p \geqslant 0, \quad \int_\Omega p(\omega)\, \mu(\mathrm{d}\omega) = 1. \tag{1.51}$$

Двойственность между наблюдаемыми и состояниями $L_\infty(\Omega, \mu) \cong L_1(\Omega, \mu)^*$ задаётся интегрированием:

$$\langle f, p \rangle = \int_\Omega f(\omega)\, p(\omega)\, \mu(\mathrm{d}\omega), \tag{1.52}$$

то есть спаривание между пространством плотностей мер $L_1(\Omega, \mu)$ и пространством функций $L_\infty(\Omega, \mu)$ есть математическое ожидание наблюдаемой в данном состоянии. С алгебраической точки зрения (в подходе алгебр фон Неймана), вероятностные модели можно описывать при помощи пар банаховых пространств $(L_\infty(\Omega, \mu), L_1(\Omega, \mu))$ с соответствующими структурами единицы, инволюции, порядка. Более подробные сведения о соотношениях между измеримыми пространствами и коммутативными алгебрами фон Неймана можно найти в [71].

Заметим, что в этой постановке дельта-мера δ_ω может быть сингулярной относительно μ. Также, если Ω — хаусдорфов компакт, и на $L_1(\Omega, \mu)$ задана топология $*$-слабой сходимости мер, определённая полунормами $|\langle f, \cdot\rangle|$ при всевозможных $f \in C(\Omega)$, то пространство смешанных состояний (плотностей вероятности) не обязано быть замкнутым и компактным.

1.2.1.3. Дискретный случай

Зачастую достаточно ограничиться рассмотрением дискретных измеримых пространств, при этом описание упрощается. Пусть $\Omega = \mathbb{X}$ — конечное или счётное множество (алфавит) с дискретной σ-алгеброй, на нём выбрана считающая мера. Пространство состояний лежит внутри пространства абсолютно суммируемых последовательностей $\ell_1(\mathbb{X})$ с нормой

$$\|p\|_1 = \sum_{x\in\mathbb{X}} |p(x)| \tag{1.53}$$

и конусом поточечно неотрицательных элементов. *Смешанным состоянием* называется распределение вероятностей

$$p \in \ell_1(\mathbb{X}), \quad p \geqslant 0, \quad \sum_{x\in\mathbb{X}} p(x) = 1, \tag{1.54}$$

множество таких элементов обозначается $\mathfrak{P}(\mathbb{X})$. Двойственным пространством наблюдаемых является $\ell_\infty(\mathbb{X})$ — коммутативная алгебра фон Неймана ограниченных функций на $\mathbb{X}$, а спаривание (1.52) принимает вид суммы $\langle f, p\rangle = \sum_{x\in\mathbb{X}} f(x)p(x)$. Крайние точки $\mathfrak{P}(\mathbb{X})$ — это *дельта-распределения*

$$\delta_x(x') = \begin{cases} 1, & x' = x, \\ 0, & x' \neq x. \end{cases} \tag{1.55}$$

1.2.2. Марковские отображения

Динамика и передача информации описываются отображениями между вероятностными моделями. Линейное отображение между дискретными моделями

$\Phi\colon \mathfrak{P}(\mathbb{X}) \to \mathfrak{P}(\mathbb{Y})$, продолженное по линейности до отображения $\ell_1(\mathbb{X}) \to \ell_1(\mathbb{Y})$, называется *марковским ядром* (или стохастическим отображением из $\mathbb{X}$ в $\mathbb{Y}$), если оно положительно и сохраняет сумму:

$$\sum_{y\in\mathbb{Y}} \Phi[p](y) = \sum_{x\in\mathbb{X}} p(x) \qquad \text{для всех } p \in \ell_1(\mathbb{X}). \tag{1.56}$$

Всякое такое отображение задаётся системой *переходных вероятностей* $\mathbb{P}(y|x)$:

$$\Phi[p](y) = \sum_{x\in\mathbb{X}} \mathbb{P}(y|x)\, p(x), \qquad \mathbb{P}(y|x) = \Phi[\delta_x](y). \tag{1.57}$$

В матричной записи Φ отвечает *стохастической матрице* — матрице с неотрицательными элементами, столбцы которой суммируются к единице. Если $\mathbb{X} = \mathbb{Y}$ и к единице суммируются также строки, матрица называется *бистохастической*; такое отображение оставляет неподвижным равномерное распределение.

Двойственным образом, марковское отображение можно описать в терминах эволюции наблюдаемых: сопряжённое отображение $\Phi^*\colon \ell_\infty(\mathbb{Y}) \to \ell_\infty(\mathbb{X})$ определяется условием

$$\langle \Phi^*[f], p\rangle = \langle f, \Phi[p]\rangle, \qquad \Phi^*[f](x) = \sum_{y\in\mathbb{Y}} f(y)\mathbb{P}(y|x), \tag{1.58}$$

и является положительным унитальным отображением, $\Phi^*[\mathbf{1}] = \mathbf{1}$. Сохранение нормировки в картине состояний равносильно унитальности в картине наблюдаемых.

При рассмотрении не-дискретных моделей, стохастические отображения аналогичным образом описываются теорией марковских ядер, формулирование которой нам не потребуется в данной работе.

Таким образом, классическую теорию случайных отображений можно описывать в терминах положительных унитальных нормальных (то есть непрерывных относительно $*$-слабых топологий) отображений между коммутативными алгебрами фон Неймана. Детерминированные преобразования отвечают в этой картине $*$-гомоморфизмам: отображение $\Phi^*[f] = f \circ T$, порождённое некоторым измеримым отображением $T\colon \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$, мультипликативно.

Непрерывная по времени однородная марковская динамика на вероятностной системе описывается однопараметрическими полугруппами марковских отображений в смысле подраздела 1.1.9. По теореме 1.11 генераторы таких полугрупп суть в точности условно положительные операторы, зануляющие единицу; в дискретном случае они задаются матрицами с неотрицательными внедиагональными элементами и нулевыми суммами столбцов.

1.2.3. Каналы передачи информации

Марковские отображения используются при описании протоколов передачи информации. Пусть есть два агента — отправитель и получатель — которые обладают алфавитами $\mathbb{X}$ и $\mathbb{Y}$ соответственно. *Классическим каналом связи* называется марковское отображение $\Phi\colon \ell_1(\mathbb{X}) \to \ell_1(\mathbb{Y})$, где $\mathbb{X}$ — входной алфавит отправителя, $\mathbb{Y}$ — выходной алфавит получателя, а $\mathbb{P}(y|x)$ — вероятность получить символ y при отправленном x.

Пример 1.12. *Бинарный симметричный канал* передаёт один бит ($\mathbb{X} = \mathbb{Y} = \{0, 1\}$), меняя его значение с вероятностью $q \in [0, 1]$:

$$\mathbb{P}(0|0) = 1 - q, \qquad \mathbb{P}(1|0) = q, \qquad \mathbb{P}(0|1) = q, \qquad \mathbb{P}(1|1) = 1 - q. \tag{1.59}$$

Передача слов длины n описывается алфавитом $\mathbb{X}^n$. В модели *канала без памяти* ошибки при передаче отдельных символов независимы, и переходные вероятности факторизуются:

$$\mathbb{P}^n(y_1, \ldots, y_n|x_1, \ldots, x_n) = \mathbb{P}(y_1|x_1) \cdots \mathbb{P}(y_n|x_n), \tag{1.60}$$

то есть n-кратное использование канала отвечает тензорной степени $\Phi^{\otimes n}$.

Основные информационные характеристики каналов связи выражаются через энтропию. *Энтропией Шеннона* распределения $p \in \mathfrak{P}(\mathbb{X})$ называется величина

$$\mathrm{H}(p) = -\sum_{x \in \mathbb{X}} p(x) \log p(x), \tag{1.61}$$

где основание логарифма равно 2. Энтропия распределения вероятностей характеризует среднее информационное содержание исходов. Если задано совместное распределение $p = p_{\mathbb{X}\mathbb{Y}} \in \mathfrak{P}(\mathbb{X} \times \mathbb{Y})$ с маргинальными распределениями вероятностей $p_{\mathbb{X}}(x) = \sum_y p(x, y)$ и $p_{\mathbb{Y}}(y) = \sum_x p(x, y)$, то *взаимной информацией* $I(\mathbb{X}\colon\mathbb{Y})$ называется величина

$$I(\mathbb{X}\colon\mathbb{Y}) = \mathrm{H}(p_{\mathbb{X}}) + \mathrm{H}(p_{\mathbb{Y}}) - \mathrm{H}(p_{\mathbb{X}\mathbb{Y}}). \tag{1.62}$$

Если задан канал $\Phi\colon \ell_1(\mathbb{X}) \to \ell_1(\mathbb{Y})$ с переходными вероятностями $\mathbb{P}(y|x)$ и распределение на входе $p_{\mathbb{X}} \in \mathfrak{P}(\mathbb{X})$, то взаимное распределение на входе и выходе равно $p_{\mathbb{X}\mathbb{Y}}(x, y) = \mathbb{P}(y|x)p_{\mathbb{X}}(x)$. Согласно теореме Шеннона о кодировании для

шумного канала [72], *пропускная способность* канала Φ равна максимуму взаимной информации между входом и выходом по всем входным распределениям и характеризует предельную скорость передачи информации со сколь угодно малой ошибкой при многократном использовании канала $n \to \infty$.

Наряду со стандартной постановкой проблемы передачи информации, в которой допускаются малые шумы, К. Шеннон рассмотрел и более жёсткую [73] постановку, в которой ошибка запрещена принципиально; мы поговорим об этом в главе 2. Здесь ограничимся замечанием, что в задачах передачи информации с нулевой ошибкой существенны не переходные вероятности $\mathbb{P}(y|x)$, а лишь их носители: *множеством достижимости* символа x называется

$$\mathbf{R}(x) = \{\, y \in \mathbb{Y} \mid \mathbb{P}(y|x) > 0 \,\}, \tag{1.63}$$

и два символа называются *трудноразличимыми*, $x \sim x'$, если $\mathbf{R}(x) \cap \mathbf{R}(x') \neq \varnothing$. Отношение $\sim$ задаёт на $\mathbb{X}$ *граф ошибок* канала, а коды с нулевой ошибкой суть независимые множества (антиклики) этого графа.

1.3. Некоммутативная теория вероятностей

Некоммутативная теория вероятностей занимается изучением вероятностного поведения систем, возникающих при рассмотрении квантовой механики. С точки зрения математического формализма, переход от классической теории вероятностей к квантовой теории вероятностей заключается в том, что структуры коммутативных алгебр обобщаются до структур некоммутативных алгебр, или, аналогично, структуры решёточных порядков ослабляются до не-решёточного случая. Более конкретно, пара двойственных функциональных пространств $(L_\infty(\Omega), L_1(\Omega))$ заменяется на пару пространств операторов $(\mathfrak{B}(\mathcal{H}), \mathfrak{T}(\mathcal{H}))$, положительные унитальные отображения — на вполне положительные унитальные отображения, симплекс распределений вероятностей — на выпуклое множество операторов плотности. Введение в некоммутативную теорию вероятностей можно найти в книгах [19; 74; 75]; понятие квантового канала передачи информации было впервые введено А.С. Холево [76].

1.3.1. Состояния и эффекты

В математическом описании квантовой механики каждой системе сопоставляется некоторое гильбертово пространство $\mathcal{H}$. Если заданы две системы $\mathcal{H}$ и $\mathcal{K}$, то их составной системе отвечает тензорное произведение $\mathcal{H} \otimes \mathcal{K}$.

Смешанным состоянием (оператором плотности) называется положительный оператор $\rho \in \mathfrak{T}(\mathcal{H})$ с единичным следом $\operatorname{Tr}\rho = 1$. Выпуклое множество смешанных состояний обозначается $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$. Эквивалентно, состояния суть ультраслабо непрерывные положительные унитальные функционалы на $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$, что согласуется с определением (1.6). Крайние точки $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$ называются *чистыми состояниями*; множество чистых состояний обозначается $\mathfrak{S}_{\mathrm{p}}(\mathcal{H})$. Чистые состояния описываются проекторами ранга 1, то есть операторами вида $|\psi\rangle\langle\psi|$ с $\|\psi\|_2 = 1$; равносильно, чистое состояние задаётся ненулевым вектором $\psi \in \mathcal{H}$ с единичной нормой $\|\psi\|_2 = 1$ с точностью до умножения на ненулевой скаляр. *Максимально смешанным состоянием* χ на конечномерном гильбертовом пространстве $\dim\mathcal{H} = d$ называется пропорциональный тождественному оператор плотности $\frac{1}{d}\mathbf{1}_d$.

Наблюдаемые на системе описываются ограниченными самосопряжёнными операторами $B \in \mathfrak{B}(\mathcal{H})_{sa}$. Пространство наблюдаемых и состояний обладает спариванием

$$\langle B, \rho\rangle = \operatorname{Tr}(\rho B), \tag{1.64}$$

которое является аналогом формулы (1.49) и показывает среднее значение наблюдаемой $B \in \mathfrak{B}(\mathcal{H})_{\mathrm{sa}}$ в состоянии ρ.

Отметим одно принципиальное отличие некоммутативной теории вероятностей от классического случая. Множество $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$ выпукло, однако, в отличие от симплекса $\mathfrak{P}(\Omega)$, разложение смешанного состояния в выпуклую комбинацию чистых, вообще говоря, не единственно.

Эффектом называется самосопряжённый оператор $E \in \mathfrak{B}(\mathcal{H})$, лежащий в интервале $0 \leqslant E \leqslant \mathbf{1}$. Пространство эффектов обозначается $\mathfrak{E}(\mathcal{H})$. Эффекты являются некоммутативным аналогом понятия нечётких множеств [77]. Так, в классической теории вероятностей чёткие события соответствуют индикаторам измеримых множеств (идемпотенты в алгебре $L_\infty(\Omega)$), в то время как нечёткие события можно описывать функциями со значениями в $[0, 1]$; в квантовом случае «острым» событиям отвечают ортогональные проекторы (самосопряжённые

идемпотенты в $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$), а произвольные эффекты допускают промежуточные значения. Эффекты можно описывать в терминах двойственности как положительные функционалы на $\mathfrak{T}(\mathcal{H})$, принимающие на состояниях значения из $[0,1]$.

Простейший нетривиальный пример квантовой системы — квантовый бит (кубит) — задаётся двумерным гильбертовым пространством $\dim\mathcal{H}=2$ с алгеброй наблюдаемых $\mathbb{M}_2$. В этой алгебре есть линейный базис $\mathrm{Span}\{\mathbf{1},\mathbf{X},\mathbf{Y},\mathbf{Z}\}$, где $\mathbf{1}$ — единичная матрица, а $\mathbf{X},\mathbf{Y},\mathbf{Z}$ — матрицы Паули

$$\mathbf{X}=\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix},\qquad \mathbf{Y}=\begin{bmatrix}0&-\mathrm{i}\\\mathrm{i}&0\end{bmatrix},\qquad \mathbf{Z}=\begin{bmatrix}1&0\\0&-1\end{bmatrix}. \tag{1.65}$$

Этот базис используется ниже, в частности в главах 3 и 6 при описании динамики кубита.

1.3.2. Квантовые каналы

Повторяя определения из раздела 1.1, линейное отображение $\Phi\colon\mathfrak{T}(\mathcal{H})\to\mathfrak{T}(\mathcal{K})$ называется *положительным*, если оно переводит положительные операторы в положительные, и *вполне положительным*, если для любого гильбертова пространства $\mathcal{E}$ положительно отображение

$$\Phi\otimes\mathrm{Id}_{\mathcal{E}}\colon\mathfrak{T}(\mathcal{H}\otimes\mathcal{E})\longrightarrow\mathfrak{T}(\mathcal{K}\otimes\mathcal{E}). \tag{1.66}$$

Требование полной положительности означает, что отображение остаётся физически осмысленным при действии на подсистему составной системы. Для коммутативных алгебр всякое положительное отображение автоматически вполне положительно, поэтому в классической теории различия между вполне и не-вполне положительными отображениями не проявляется.

Квантовым каналом называется вполне положительное сохраняющее след отображение $\Phi\colon\mathfrak{T}(\mathcal{H})\to\mathfrak{T}(\mathcal{K})$. Сопряжённое отображение $\Phi^{*}\colon\mathfrak{B}(\mathcal{K})\to\mathfrak{B}(\mathcal{H})$, определяемое равенством

$$\mathrm{Tr}\big(\rho\,\Phi^{*}[B]\big)=\mathrm{Tr}\big(\Phi[\rho]B\big), \tag{1.67}$$

вполне положительно и унитально $\Phi^{*}[\mathbf{1}]=\mathbf{1}$ — оно описывает динамику наблюдаемых в картине Гейзенберга. Сохранение следа отображением Φ равносильно унитальности Φ^{*}, в полном соответствии с классическим равенством (1.58).

Простейший квантовый канал — *канал забывания* $\mathrm{Tr}\colon \mathfrak{T}(\mathcal{H}) \to \mathbb{C}$ — обозначает забывание любой информации о системе. Сопряжённый к нему имеет вид $\lambda \mapsto \lambda\mathbf{1}$. *Частичным следом* называется канал $\mathrm{Tr}_{\mathcal{E}} = \mathrm{Id}_{\mathcal{H}} \otimes \mathrm{Tr}\colon \mathfrak{T}(\mathcal{H}\otimes\mathcal{E}) \to \mathfrak{T}(\mathcal{H})$, он обозначает забывание информации о подсистеме $\mathcal{E}$, сопряжённый частичному следу канал действует по правилу $B \mapsto B \otimes \mathbf{1}_{\mathcal{E}}$.

Структура каналов описывается теоремой Стайнспринга — частным случаем теоремы 1.6, записанным в картине Шрёдингера.

Теорема 1.13 (Представление Стайнспринга, [3])**.** *Пусть* $\Phi\colon \mathfrak{T}(\mathcal{H}) \to \mathfrak{T}(\mathcal{K})$ — *квантовый канал. Существуют гильбертово пространство* $\mathcal{E}$ *(окружение) и изометрия* $V\colon \mathcal{H} \to \mathcal{K}\otimes\mathcal{E}$*, такие что*

$$\Phi[\rho] = \mathrm{Tr}_{\mathcal{E}}\bigl(V\rho V^{\dagger}\bigr), \qquad \Phi^{*}[B] = V^{\dagger}(B\otimes\mathbf{1}_{\mathcal{E}})V. \tag{1.68}$$

Представление Стайнспринга можно переписать в другой форме:

Теорема 1.14 (Представление Крауса, [1; 4])**.** *Пусть* $\Phi\colon \mathfrak{T}(\mathcal{H}) \to \mathfrak{T}(\mathcal{K})$ — *квантовый канал между конечномерными пространствами размерностей* n *и* m*. Тогда существует набор операторов* $\{K_j\}_{j=1}^{d}$*,* $K_j\colon \mathcal{H} \to \mathcal{K}$*, для которого*

$$\Phi[\rho] = \sum_{j=1}^{d} K_j \rho K_j^{\dagger}, \qquad \sum_{j=1}^{d} K_j^{\dagger}K_j = \mathbf{1}_{\mathcal{H}}. \tag{1.69}$$

Минимальное число $d \leqslant nm$ *называется рангом Крауса. Если* $\{F_l\}_l$ *— другой набор операторов Крауса того же канала, то* $K_j = \sum_l u_{jl}F_l$ *для некоторой частичной изометрии* $(u_{jl})_{j,l}$*.*

Если у канала выбрано представление Стайнспринга, то *комплементарным* ему [78] называется канал

$$\widehat{\Phi}\colon \mathfrak{T}(\mathcal{H}) \longrightarrow \mathfrak{T}(\mathcal{E}), \qquad \rho \longmapsto \mathrm{Tr}_{\mathcal{K}}\bigl(V\rho V^{\dagger}\bigr), \tag{1.70}$$

описывающий утечку информации в окружение; сопряжённый к нему имеет вид $B \mapsto V^{\dagger}(\mathbf{1}_{\mathcal{K}}\otimes B)V$.

Непрерывная марковская динамика открытых квантовых систем описывается однопараметрическими полугруппами вполне положительных сохраняющих след отображений в смысле подраздела 1.1.9. Генераторы таких полугрупп

условно вполне положительны [25] и в конечномерном случае имеют вид Горини–Коссаковского–Сударшана–Линдблада (ГКСЛ) [24; 79]:

$$L[\rho] = -\mathbb{i}[H,\, \rho] + \sum_j \left(A_j \rho A_j^\dagger - \frac{1}{2}\{A_j^\dagger A_j,\, \rho\} \right), \tag{1.71}$$

где $H = H^\dagger$ — гамильтониан, а $\{A_j\}_j$ — набор операторов Линдблада.

1.3.3. Измерения

Пусть $(\Omega, \mathcal{F})$ — измеримое пространство исходов. *Положительной операторно-значной мерой* (POVM), или *измерением*, называется счётно-аддитивная в ультраслабой топологии функция $M\colon \mathcal{F} \to \mathfrak{E}(\mathcal{H})$ с $M(\Omega) = \mathbf{1}$. В дискретном случае $\Omega = \mathbb{X}$ измерение задаётся набором эффектов $\{E_x\}_{x\in\mathbb{X}}$, суммирующихся к единице

$$\sum_{x\in\mathbb{X}} E_x = \mathbf{1}. \tag{1.72}$$

Распределение исходов измерения в состоянии ρ определяется *правилом Борна*

$$p(x) = \mathrm{Tr}(\rho E_x), \qquad \text{соответственно} \qquad \mathbb{P}_\rho(A) = \mathrm{Tr}\big(\rho M(A)\big). \tag{1.73}$$

Измерение определяет отображение $\mathfrak{T}(\mathcal{H}) \to \ell_1(\mathbb{X})$ по правилу $\rho \mapsto \big(x \mapsto \mathrm{Tr}(\rho E_x)\big)$. Таким образом, измерение можно воспринимать как отображение, переводящее матрицы плотности (квантовую информацию) в распределения вероятностей (классическую информацию).

Измерение называется *информационно полным*, если отвечающее ему распределение однозначно определяет состояние, то есть эффекты $\{E_x\}$ порождают $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$ как линейное пространство. В конечномерном случае при $\dim\mathcal{H} = d$ минимальное число элементов информационно полного измерения равно d^2; измерение из ровно d^2 линейно независимых эффектов называется *минимальным информационно полным* (MIC-POVM). Важный частный случай — *симметрические информационно полные* измерения (SIC-POVM), элементы которых имеют вид $E_k^{\text{sym}} = \frac{1}{d}|\psi_k^{\text{sym}}\rangle\langle\psi_k^{\text{sym}}|$ и попарные перекрытия которых равны:

$$\big|\langle\psi_k^{\text{sym}}|\psi_l^{\text{sym}}\rangle\big|^2 = \frac{d\,\delta_{k,l} + 1}{d+1}. \tag{1.74}$$

Информационная полнота позволяет описывать состояния распределениями вероятностей; этот подход развивается в главе 6.

Математическое описание процессов измерения, в которых учитывается изменение состояния квантовой системы после измерения при различных исходах, осуществляется с помощью понятия *квантовых инструментов*. *Инструментом* называется мера $\mathcal{M} = \{\mathcal{M}(A)\}_{A\in\mathcal{F}}$ со значениями в супероператорах (отображениях между пространствами операторов), для которой каждый $\mathcal{M}(A)$ вполне положителен и не увеличивает след, и при этом $\mathcal{M}(\Omega)$ сохраняет след [80]. Инструменты преобразуют операторы плотности в ансамбли операторов плотности с заданными вероятностями исходов. Отвечающее инструменту измерение описывается положительной операторно-значной мерой $M(A) = \mathcal{M}(A)^*[\mathbf{1}]$. Как показано в [81], для каждого состояния существует семейство *апостериорных состояний* $\{\widehat{\rho}(x)\}_{x\in\mathcal{X}}$, для которого

$$\mathcal{M}(A)[\rho] = \int_A \widehat{\rho}(x)\,\mathbb{P}_\rho(\mathrm{d}x). \tag{1.75}$$

Квантовый инструмент называется *эффективным*, если в результате измерения чистого состояния при каждом исходе на квантовой системе остаётся чистое состояние. Эффективные инструменты описывают процессы измерения с минимальным шумом, простейший пример неэффективного измерения сопоставляет максимально смешанное состояние любому исходу.

1.3.4. Энтропия и информационные характеристики

Энтропией фон Неймана квантового состояния $\rho \in \mathfrak{S}(\mathcal{H})$ называется величина

$$\mathrm{H}(\rho) = -\operatorname{Tr}(\rho\log\rho), \tag{1.76}$$

основание логарифма равно 2. Эта величина обобщает энтропию Шеннона (1.61), поскольку совпадает с энтропией Шеннона распределения собственных значений ρ. В отличие от классического случая, для сцепленных состояний энтропия подсистемы (аналог маргинальных распределений) может превышать энтропию всей системы.

Важной числовой характеристикой измерений служит *редукция энтропии* [81—84], которая показывает среднее понижение энтропии при измерении

состояния ρ инструментом $\mathcal{M}$:

$$\mathrm{ER}(\rho, \mathcal{M}) = \mathrm{H}(\rho) - \int_{\mathcal{X}} \mathrm{H}\big(\widehat{\rho}(x)\big)\, \mathbb{P}_\rho(\mathrm{d}x), \tag{1.77}$$

где апостериорные состояния определены формулой (1.75) и предполагается $\mathrm{H}(\rho) < \infty$. Эта величина вогнута, субаддитивна и полунепрерывна снизу как функция состояния [81; 84]. Эта величина оказывается неотрицательной для *эффективных* измерений, хотя если любое чистое состояние переводится в максимально смешанное, то $\mathrm{ER} = -\log d$. Супремум величины редукции энтропии по всевозможным состояниям оказывается равным *классической пропускной способности измерения с использованием сцепленности* $\mathrm{C_{ea}}$ [21; 74; 85; 86], описывающей предельное количество классической информации, извлекаемое измерением при наличии дополнительной сцепленности со вспомогательной системой. Эти числовые величины исследуются в главе 5.

1.3.5. Операторные системы и обобщённые вероятностные теории

Изложенные понятия позволяют описать место операторных систем в этой картине. Классическая теория вероятностей есть теория нормальных положительных унитальных отображений между *коммутативными* алгебрами фон Неймана, недетерминированные отображения соответствуют положительным отображениям. В некоммутативной теории вероятностей шумные эволюции описываются при помощи у.в.п. отображений (квантовых каналов) между алгебрами фон Неймана [1; 2]. В обеих картинах $*$-гомоморфизмы отвечают детерминированным преобразованиям.

Операторные системы — наиболее общие структуры, в терминах которых определено математическое понятие полной положительности. Поэтому естественно рассматривать обобщение вероятностных теорий в категории (дуальных) операторных систем и нормальных у.в.п. отображений между ними. Такой подход близок к программе *обобщённых вероятностных теорий* [18] с тем отличием, что последняя обычно ограничивается функциональными системами, не задействуя высшие матричные уровни. Согласно результатам Дэвидсона и Кеннеди [11; 12], операторные системы суть пространства аффинных функций на «некоммутативных выпуклых компактах», причём C^*-алгебры отвечают «некоммутативным

симплексам Бауэра». Тем самым, единственность «разложения» на чистые состояния — свойство, отличающее C^*-алгебры среди операторных систем, — оказывается прямым аналогом свойства симплекса из подраздела 1.2.1. Именно оно позволяет строить содержательную теорию информации [74]; для произвольных операторных систем могут возникать аномалии, например ненулевое информационное содержание чистых состояний [87].

С другой стороны, благодаря свойствам инъективности, теория операторных систем может вкладываться в теорию C^*-алгебр. Если $\mathscr{V} \subseteq \mathfrak{B}(\mathcal{H})$ и $\mathscr{W} \subseteq \mathfrak{B}(\mathcal{K})$ — операторные системы, то по теореме Арвесона 1.8 всякое у.в.п. отображение $\Phi\colon \mathscr{V} \to \mathscr{W}$ продолжается до у.в.п. отображения $\Psi\colon \mathfrak{B}(\mathcal{H}) \to \mathfrak{B}(\mathcal{K})$:

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{B}(\mathcal{H}) & \xrightarrow{\Psi} & \mathfrak{B}(\mathcal{K}) \\ \uparrow & & \uparrow \\ \mathscr{V} & \xrightarrow[\Phi]{} & \mathscr{W} \end{array} \tag{1.78}$$

Такое вложение не обязано быть единственным. Вопрос о том, переносится ли возможность вложения на *непрерывную* динамику, составляет содержание главы 3, а описание инфинитезимальных приращений у.в.п. отображений составляет содержание главы 4.

Выводы по главе 1

В этой главе зафиксированы обозначения и собраны сведения, используемые в последующих главах. Изложение построено вокруг «алгебраического» взгляда на аксиоматику теории вероятностей: вероятностная модель задаётся парой двойственных пространств — пространством наблюдаемых и пространством состояний, — а преобразования модели суть положительные унитальные отображения наблюдаемых, двойственные к сохраняющим нормировку отображениям состояний. Классическая теория вероятностей отвечает коммутативным алгебрам наблюдаемых, некоммутативная — произвольной алгебре фон Неймана. При этом операторные системы задают наиболее общий контекст, в котором определено понятие полной положительности.

Глава 2. Операторные системы и описание шумов в квантовых каналах

В данной главе обсуждается роль операторных систем в теории безошибочной передачи информации по квантовым каналам связи. Любому квантовому каналу связи может быть сопоставлена операторная система, которая описывает ошибки при передаче информации по этому каналу. С другой стороны, интересно изучить, налагает ли способность описывать ошибки в каналах какие-либо необходимые и достаточные свойства на операторную систему. В конечномерном случае известно, что операторные системы всегда описывают ошибки в некотором квантовом канале. Мы изучим случай бесконечномерных пространств и увидим, что для слабо замкнутых операторных систем на сепарабельном гильбертовом пространстве можно построить квантовый канал с шумами, описываемыми этой операторной системой.

Глава имеет следующую структуру. В разделе 2.1 мы обсудим понятия классических и квантовых каналов связи, протокол коммуникации с нулевой ошибкой в таких каналах и понятие графов ошибок. Для того чтобы описывать квантовые графы ошибок, мы обсудим математическое определение конкретных операторных систем. Более обстоятельное введение в понятие операторных систем и их роль в некоммутативной теории вероятностей было дано в главе 1, также обсуждение продолжится в главах 3 и 4. В разделе 2.2 мы обсудим конструкцию, доказывающую, что любая слабо замкнутая операторная система является графом ошибок некоторого канала в бесконечномерном случае.

2.1. Классическая и квантовая теория безошибочной передачи информации

Клод Шеннон ввёл теорию передачи информации с нулевой ошибкой по шумному каналу связи в работе [73]. В предложенном им протоколе оптимальной передачи информации с нулевой ошибкой используется некоторый код, для построения которого достаточно знать так называемый граф ошибок данного канала и уметь строить в этом графе независимые множества (антиклики). Пропускной способностью с нулевой ошибкой канала Шеннон назвал регуляризацию чис-

ла независимости графа при возведении графа в сильное прямое произведение нескольких его копий.

Впервые это понятие обобщили на случай квантовых каналов в работе [88]. Авторы статьи [13] сформулировали задачу нахождения кодов для безошибочной передачи по квантовому каналу в терминах «некоммутативной теории графов»: они ввели понятие некоммутативного графа ошибок в терминах теории операторных систем [5; 6; 89] и исследовали задачу об оценке пропускной способности с нулевой ошибкой, а задачу построения кода переформулировали как задачу о поиске квантовой антиклики в некоммутативном графе. Эта работа стала основой для дальнейшего исследования свойств и построения конкретных примеров квантовых антиклик [90—98]. Также оказалось, что многие понятия классической теории графов естественным образом обобщаются на случай некоммутативной теории: теория Рамсея [99], проблема Турана [100], число Ловаса [13] и хроматические числа [101].

Этот раздел посвящён введению и краткому обсуждению понятий, необходимых для начала разговора о некоммутативной теории графов.

2.1.1. Классические каналы связи

Математическая теория передачи информации была предложена Клодом Шенноном [72] и получила широкое распространение в связи с прикладными вопросами хранения и передачи информации по каналам связи. В этом подразделе мы введём основные понятия этой теории для случая классических каналов. Для полноценного введения в предмет можно обратиться к классическим [66; 67] или более современным [68; 69] учебникам.

2.1.1.1. Математическая модель классических каналов связи

Рассмотрим ситуацию, когда в некотором протоколе коммуникации участвуют два агента — отправитель и получатель. Отправитель способен пользоваться символами из некоторого дискретного набора $\mathbb{X}$, который называется входным

алфавитом, а получатель в результате коммуникации получает некоторый символ из выходного алфавита $\mathbb{Y}$, при наличии шумов этот процесс будет вероятностным. Канал передачи информации описывается системой переходных вероятностей $\mathbb{P}(y|x)$, определяющих вероятность получения символа $y \in \mathbb{Y}$ в результате отправления $x \in \mathbb{X}$.

Пример 2.1. Простым, но важным примером шумного канала передачи информации является бинарный симметричный канал, который передаёт один бит информации ($\mathbb{X} = \mathbb{Y} = \{0, 1\}$), меняя значение бита с вероятностью $q \in [0, 1]$:

$$\mathbb{P}(0|0) = 1 - q, \qquad \mathbb{P}(1|0) = q, \qquad \mathbb{P}(0|1) = q, \qquad \mathbb{P}(1|1) = 1 - q. \tag{2.1}$$

Зачастую полезно считать, что отправитель пользуется вероятностной стратегией, при которой он выбирает символ $x \in \mathbb{X}$ для отправления с вероятностью $p(x)$ — такая стратегия описывается распределением вероятностей p. Для описания множества распределений вероятностей над дискретным алфавитом $\mathbb{X}$, полезно рассматривать пространство абсолютно суммируемых последовательностей $\ell_1(\mathbb{X})$, индексируемых множеством $\mathbb{X}$ и наделённых естественной ℓ_1-нормой

$$\|p\|_1 = \sum_{x \in \mathbb{X}} |p(x)|, \tag{2.2}$$

а также конусом положительных элементов ($p \geqslant 0$ тогда и только тогда, когда $p(x) \geqslant 0$ для всех $x \in \mathbb{X}$) [33; 64]. Распределения вероятностей являются положительными элементами $p \in \ell_1(\mathbb{X})$, суммирующимися к единице: $\sum_{x \in \mathbb{X}} p(x) = 1$. В таком случае классический канал связи можно рассматривать как линейное отображение $\Phi\colon \ell_1(\mathbb{X}) \to \ell_1(\mathbb{Y})$, действующее на распределение вероятностей $p \in \ell_1(\mathbb{X})$ по формуле

$$\Phi[p](y) = \sum_{x \in \mathbb{X}} \mathbb{P}(y|x)\, p(x), \tag{2.3}$$

и обладающее свойством положительности (если $p \geqslant 0$, то $\Phi[p] \geqslant 0$) и сохранения суммы:

$$\sum_{y \in \mathbb{Y}} \Phi[p](y) = \sum_{x \in \mathbb{X}} p(x) \qquad \text{для всех } p \in \ell_1(\mathbb{X}). \tag{2.4}$$

В обратную сторону переходные вероятности можно узнать из равенства

$$\mathbb{P}(y|x) = \Phi[\delta_x](y), \tag{2.5}$$

где $x \in \mathbb{X}$, $y \in \mathbb{Y}$, а $\delta_x \in \ell_1(\mathbb{X})$ — дельта-распределение в точке x:

$$\delta_x(x') = \begin{cases} 1, & \text{если } x' = x, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases} \tag{2.6}$$

Отправитель способен побуквенно передавать слова, пользуясь каналом связи несколько раз. Множество слов длины $n \in \mathbb{N}$ описывается прямым произведением $\mathbb{X}^n = \mathbb{X} \times \cdots \times \mathbb{X}$. В простейшей модели каналов без памяти считается, что возникающие при передаче символов алфавита ошибки независимы. В таком случае передача сообщения длины n описывается переходными вероятностями $\mathbb{P}^n(\,\cdot|\cdot\,)$ слова $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{X}^n$ в слово $(y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{Y}^n$ по формуле

$$\mathbb{P}^n(y_1, \ldots, y_n | x_1, \ldots, x_n) = \mathbb{P}(y_1|x_1) \cdots \mathbb{P}(y_n|x_n). \tag{2.7}$$

Эти определения обобщаются на теорию каналов передачи над недискретными символами, для этого необходимо владение аппаратом теории меры [34; 65].

2.1.1.2. Протоколы передачи данных по каналам связи

Математическая теория коммуникаций призвана решать проблему нахождения наилучшего способа передачи сообщений по заданным каналам связи. Если в канале присутствуют шумы, ставится вопрос о построении протоколов коммуникации, пользуясь которыми получатель сможет надёжно распознать сообщение, которое ему послали.

Такой протокол может выглядеть следующим образом. Пусть отправитель выбрал некоторое подмножество $\mathbb{C} \subseteq \mathbb{X}^n$ слов длины $n \in \mathbb{N}$ из входного алфавита $\mathbb{X}$, мы будем называть его *кодом*, а n — *длиной кода*. Во время коммуникации отправитель будет пользоваться только словами из кода $\mathbb{C}$; процедура составления сообщения по символам из кода называется кодированием. Получив сообщение в результате использования канала передачи информации, получатель может декодировать слова, чтобы узнать передаваемое сообщение. Диаграмма этого протокола изображена на рисунке 2.1.

Пример 2.2. Рассмотрим простейший протокол, пригодный для передачи информации при использовании бинарного симметричного канала из примера 2.1. Для

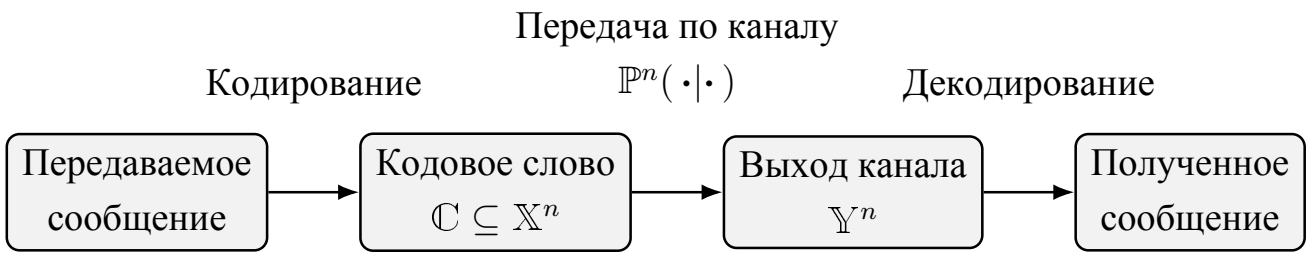


Рисунок 2.1 — Протокол передачи сообщения по шумному каналу связи.

передачи одного бита информации будем использовать слова длины 3, выберем код $\mathbb{C} = \{000, 111\}$ и будем кодировать сообщение «0» как 000, а «1» как 111. Это сообщение передаётся по каналу $\mathbb{P}^3(\cdot|\cdot)$, после чего получатель декодирует полученное слово как кодовое слово, отличающееся от переданного не более чем в одном бите. Например, слову 010 получатель сопоставит 000, а слову 011 — 111. Тогда, если вероятность ошибки при передаче одной буквы равна q, то в результате использования кода вероятность ошибки оказывается порядка q^2.

2.1.2. Передача информации с нулевой ошибкой

В результате использования кодов коррекции ошибок, таких как код из примера 2.2, вероятность ошибки при передаче данных значительно сокращается, однако не является нулевой: остаётся сколь угодно малая вероятность того, что полученное сообщение не равно тому, что было отправлено. В 1956 году Клод Шеннон [73] предложил рассматривать более строгую постановку задачи построения кодов, при которой от протокола требуется принципиальная невозможность допустить ошибку при передаче сообщения. В таком случае исследуются протоколы коммуникации с нулевой ошибкой. На практике такая постановка может возникать, если ошибки при передаче информации имеют очень высокую цену или если имеется значительное ограничение на число использований канала, но для многих задач она неестественна. Зато, исследование кодов с нулевой ошибкой оказывается удобным с теоретической точки зрения, поскольку открывает возможности использования методов теории графов, комбинаторики и теории сложности вычислений.

Сформулируем идею Шеннона для решения задачи передачи информации с нулевой ошибкой. Допустим, отправитель способен передавать информацию по

каналу $\mathbb{P}(\,\cdot|\cdot\,)$, преобразующему символы входного алфавита $\mathbb{X}$ в символы выходного алфавита $\mathbb{Y}$. В частности, Шеннон рассматривал канал, изображённый на рисунке 2.2 как двудольный граф, иллюстрирующий, с какой вероятностью символ входного алфавита $\mathbb{X} = \{a, b, c, d, e\}$ переходит в символ выходного алфавита $\mathbb{Y} = \{A, B, C, D, E, F\}$.

Выберем символ $x \in \mathbb{X}$ и назовём *множеством достижимости* $\mathbf{R}(x)$ те символы, в которые он может перейти:

$$\mathbf{R}(x) = \{\, y \in \mathbb{Y} \mid \mathbb{P}(y|x) > 0 \,\}. \tag{2.8}$$

В рассматриваемом примере множество достижимости символа c равно $\mathbf{R}(c) = \{B, C, D\}$. Если множества достижимости двух букв входного алфавита x_1, x_2 пересекаются и оба символа используются в коде, то существует возможность, что получатель получит символ из пересечения $y \in \mathbf{R}(x_1) \cap \mathbf{R}(x_2)$, и в таком случае не сможет с вероятностью 1 правильно выбрать x_1 или x_2.

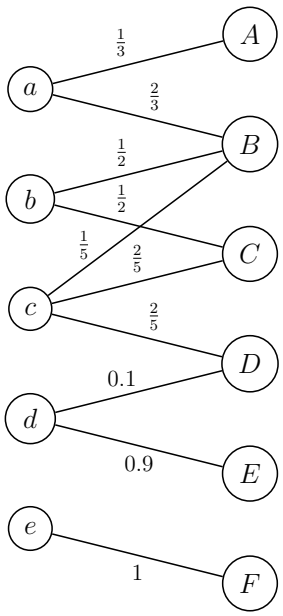


Рисунок 2.2 — Двудольный граф из статьи Клода Шеннона [73], изображающий действие некоторого канала из алфавита $\{a, b, c, d, e\}$ в алфавит $\{A, B, C, D, E, F\}$.

Назовём такие два символа *трудноразличимыми* и будем обозначать $x_1 \sim x_2$:

$$x \sim x' \quad \Longleftrightarrow \quad \mathbf{R}(x) \cap \mathbf{R}(x') \neq \varnothing. \tag{2.9}$$

Отношение трудноразличимости $\sim$ определяет граф ошибок канала связи: вершины графа — это символы входного алфавита $\mathbb{X}$, и все пары трудноразличимых символов соединены рёбрами. Граф ошибок задаёт ограничение для

построения кодов коррекции с нулевой ошибкой, поскольку код не может содержать трудноразличимые символы. Без ограничения общности будем считать, что каждое кодовое слово состоит из одной буквы, $n = 1$; при необходимости можно переопределить $\mathbb{X}' = \mathbb{X}^n$. Подмножество вершин графа, никакая пара различных вершин из которого не соединена рёбрами, называется *независимым множеством* или *антикликой* графа. Множество кодовых слов $\mathbb{C}$, передающих сообщения с нулевой ошибкой, обязано быть независимым множеством для графа ошибок канала. В примере с рисунка 2.2 можно выбрать код $\{b, d, e\}$. Поскольку в результате передачи сообщения из кодовых слов множества достижимости не пересекаются, любой элемент из $\mathbf{R}(x)$ единственным образом декодируется как x.

Итак, построение кода, решающего задачу коммуникации с нулевой ошибкой, сводится к задаче нахождения независимых множеств в графах ошибок каналов. Задача нахождения максимальной антиклики является NP-трудной [102].

2.1.3. Квантовые каналы связи

Теперь обсудим математическое описание квантовых каналов связи и сформулируем вопрос о построении кодов с нулевой ошибкой в некоммутативном случае.

Понятие квантового канала передачи информации было введено А. С. Холево в 1972 году [76] благодаря использованию теории вполне положительных отображений между пространствами операторов. Это понятие оказалось центральным при построении некоммутативной теории вероятностей и квантовой теории информации. В этом подразделе мы обобщим определения из предыдущего подраздела на некоммутативный случай.

2.1.3.1. Обозначения и формализм

Мы пользуемся обозначениями и формализмом, введёнными в главе 1. Напомним кратко наиболее существенное для этой главы. Квантовой системе отвечает гильбертово пространство $\mathcal{H}$, пространства ограниченных и ядерных опе-

раторов на нём обозначаются $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$ и $\mathfrak{T}(\mathcal{H})$ и находятся в двойственности (1.12) (подраздел 1.1.4). Состояния, эффекты и измерения определены в подразделах 1.3.1 и 1.3.3, квантовые каналы — в подразделе 1.3.2. В дальнейшем существенно используются представление Стайнспринга (теорема 1.13), представление Крауса (теорема 1.14) и понятие комплементарного канала (1.70), а также определение конкретной операторной системы из подраздела 1.1.7.

Для ознакомления с математическими вопросами квантовой теории информации можно воспользоваться учебниками [19; 75], теории передачи квантовой информации с нулевой ошибкой посвящена книга [14].

2.1.4. Передача информации по квантовым каналам с нулевой ошибкой

Теория коммуникации с нулевой ошибкой обобщается на случай квантовых каналов связи. Некоммутативным аналогом входного алфавита является входное гильбертово пространство $\mathcal{X}$, с которым может работать отправитель. Получатель, в свою очередь, работает с гильбертовым пространством $\mathcal{Y}$.

Если между этими системами определён канал $\Phi\colon \mathfrak{T}(\mathcal{X}) \to \mathfrak{T}(\mathcal{Y})$, то по нему можно производить коммуникацию: отправитель способен готовить входные состояния $\rho \in \mathfrak{T}(\mathcal{X})$, которые после отправления по каналу окажутся равны $\Phi[\rho]$ в системе получателя. Если рассматривается протокол с многими раундами коммуникации, то его можно описывать тензорной степенью $\Phi^{\otimes n} = \Phi \otimes \cdots \otimes \Phi$.

Квантовым кодом мы будем называть некоторое гильбертово подпространство входного алфавита $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{X}$; это подпространство также можно определить в терминах самосопряжённого проектора $\Pi_{\mathcal{C}}$. Оператор плотности $\rho \in \mathfrak{T}(\mathcal{X})$ называется кодовым словом для квантового кода, если его образ лежит в этом коде, то есть $\Pi_{\mathcal{C}}\rho\Pi_{\mathcal{C}} = \rho$.

Допустим, мы закодировали некоторую информацию в коде $\mathcal{C}$ и передали её по каналу. Код $\mathcal{C}$ передаёт эту информацию с нулевой ошибкой, если получатель может построить восстанавливающий квантовый канал $\mathcal{R}\colon \mathfrak{T}(\mathcal{Y}) \to \mathfrak{T}(\mathcal{X})$, который идеально декодирует любое кодовое слово:

$$(\mathcal{R} \circ \Phi)[\rho] = \rho \qquad \text{для всех } \rho = \Pi_{\mathcal{C}}\rho\Pi_{\mathcal{C}}. \tag{2.10}$$

2.1.4.1. Классические каналы в квантовом описании

Обсудим, как классические каналы можно исследовать, пользуясь терминологией некоммутативной теории вероятностей. Мы будем следовать обсуждению из [90]. Пусть у отправителя есть конечный классический алфавит $\mathbb{X}$, и он задаёт ортонормированный базис в системе $\mathcal{X}$:

$$\mathcal{X} = \text{Span}\{\, |x\rangle \mid x \in \mathbb{X} \,\}, \tag{2.11}$$

где под Span понимается линейная оболочка. Аналогично, пусть получатель обладает алфавитом $\mathbb{Y}$, и этот алфавит задаёт ортонормированный базис в $\mathcal{Y}$. Каждому входному символу $x \in \mathbb{X}$ соответствует чистое состояние $|x\rangle\langle x|$, и аналогично для выходных символов. Распределения вероятностей $p \in \ell_1(\mathbb{X})$ соответствуют смешанным состояниям $\rho \in \mathfrak{T}(\mathcal{X})$, диагональным в соответствующем ортонормированном базисе.

Пусть классический канал задан переходными вероятностями $\mathbb{P}(y|x)$. Тогда соответствующий квантовый канал определяется как

$$\Phi[\rho] = \sum_{x\in\mathbb{X}} \sum_{y\in\mathbb{Y}} \mathbb{P}(y|x)\, |y\rangle\langle x|\rho|x\rangle\langle y|. \tag{2.12}$$

Такой квантовый канал переводит диагональные операторы в диагональные, и он действует на символ $x \in \mathbb{X}$ как

$$\Phi[|x\rangle\langle x|] = \sum_{y\in\mathbb{Y}} \mathbb{P}(y|x)|y\rangle\langle y|, \tag{2.13}$$

что соответствует ожидаемому распределению вероятностей на выходном алфавите.

Пронаблюдаем, как для такого канала можно ввести граф ошибок. Семейство операторов Крауса для Φ принимает вид $K_{x,y} = \sqrt{\mathbb{P}(y|x)}\, |y\rangle\langle x|$. Область достижимости $x \in \mathbb{X}$ можно описать как линейную оболочку

$$\begin{aligned} \mathbf{R}(|x\rangle) &= \text{Span}\{\, |y\rangle \mid y \in \mathbb{Y},\ \mathbb{P}(y|x) > 0 \,\} \\ &= \text{Span}\{\, \mathbf{1}_{y,x}|x\rangle \mid y \in \mathbb{Y},\ \mathbb{P}(y|x) > 0 \,\}, \end{aligned} \tag{2.14}$$

где $\mathbf{1}_{y,x} = |y\rangle\langle x|$. Это пространство не зависит от выбора конкретных операторов Крауса. Если некоторое чистое состояние $|\psi\rangle \in \mathcal{Y}$ из системы получателя лежит

в области достижимости двух состояний, $|\psi\rangle \in \mathbf{R}(|x_1\rangle) \cap \mathbf{R}(|x_2\rangle)$, то оно может быть представлено как

$$|\psi\rangle = K_1|x_1\rangle = K_2|x_2\rangle, \tag{2.15}$$

где K_1 и K_2 — некоторые линейные комбинации операторов Крауса. Его норма равна

$$\langle\psi|\psi\rangle = \langle x_1|K_1^\dagger K_2|x_2\rangle. \tag{2.16}$$

Для того, чтобы символы x_1 и x_2 не являлись трудноразличимыми, достаточно, чтобы для любых линейных комбинаций операторов Крауса было выполнено $\langle x_1|K_1^\dagger K_2|x_2\rangle = 0$, ведь в таком случае $\langle\psi|\psi\rangle = 0$.

Рассмотрим пространство $\mathscr{G}(\Phi) = \text{Span}\{K_1^\dagger K_2\}$, где K_1 и K_2 — произвольные линейные комбинации операторов Крауса, и назовём это пространство операторным графом ошибок классического канала Φ. Тогда для любой пары $x_1, x_2 \in \mathbb{X}$ выполнено: $x_1 \sim x_2$ тогда и только тогда, когда $\langle x_1|\mathscr{G}(\Phi)|x_2\rangle \neq \{0\}$, что можно переформулировать как $|x_1\rangle\langle x_2| \in \mathscr{G}(\Phi)$. Условие о том, что код $\mathcal{C}$ исключает ошибки, формулируется следующим образом: для любых кодовых слов $c_1 \neq c_2 \in \mathbb{C}$ выполнено $\langle c_1|\mathscr{G}(\Phi)|c_2\rangle = \{0\}$.

Здесь речь шла о безошибочной передаче классических сообщений, представленных выбранными базисными состояниями. Для исправления произвольных состояний квантового кода, включая их когерентные суперпозиции, требуется более сильное условие, которое формулируется ниже в критерии Нилла–Лафламма (теорема 2.4).

2.1.4.2. Квантовый граф ошибок

Только что мы обосновали введение операторного графа ошибок для случая классических каналов. Введённое определение естественным образом обобщается на случай произвольного квантового канала связи. Рассмотрим квантовый канал $\Phi\colon \mathfrak{T}(\mathcal{X}) \to \mathfrak{T}(\mathcal{Y})$ между конечномерными гильбертовыми пространствами и пусть у него зафиксированы операторы Крауса $\{K_j\}_{j=1}^d$.

Определение 2.3. Операторным графом канала Φ [13] называется векторное подпространство операторов в $\mathfrak{B}(\mathcal{X})$

$$\mathscr{G}(\Phi) = \text{Span}\left\{ K_j^\dagger K_l \;\middle|\; 1 \leqslant j, l \leqslant d \right\}. \tag{2.17}$$

Это понятие также можно обосновать безотносительно выбора квантового канала [90; 103].

Необходимые и достаточные условия на то, что квантовый код $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{X}$ порождает коммуникацию с нулевой ошибкой, были найдены Ниллом и Лафламмом [104].

Теорема 2.4 (Критерий Нилла–Лафламма исправления ошибок)**.** *Квантовый код $\mathcal{C}$ исправляет ошибки в канале Φ с операторами Крауса $\{K_j\}_{j=1}^{d}$ тогда и только тогда, когда*

$$\Pi_{\mathcal{C}} K_j^{\dagger} K_l \Pi_{\mathcal{C}} = \lambda_{j,l} \Pi_{\mathcal{C}} \qquad \textit{для всех } 1 \leqslant j, l \leqslant d, \tag{2.18}$$

где $\lambda_{j,l} \in \mathbb{C}$ — некоторый комплексный скаляр.

Обсуждение и доказательство этого утверждения можно найти в [19, теорема 9.1.1]. При доказательстве явным образом строятся восстанавливающий канал $\mathcal{R}$ и его операторы Крауса.

Условие Нилла–Лафламма можно переписать в виде

$$\Pi_{\mathcal{C}} \mathscr{G}(\Phi) \Pi_{\mathcal{C}} = \mathbb{C} \Pi_{\mathcal{C}}. \tag{2.19}$$

Это условие интерпретируется как независимость «множества вершин» $\mathcal{C}$ в графе ошибок $\mathscr{G}(\Phi)$, поэтому проектор $\Pi_{\mathcal{C}}$, удовлетворяющий (2.19), принято называть квантовой антикликой.

Пример 2.5. Рассмотрим тривиальный пример кода, исправляющего ошибки в канале частичного следа. Пусть $\mathrm{Tr}_{\mathcal{E}} \colon \mathfrak{T}(\mathcal{H} \otimes \mathcal{E}) \to \mathfrak{T}(\mathcal{H})$ — канал, забывающий подсистему $\mathcal{E}$ и сохраняющий подсистему $\mathcal{H}$. Некоммутативный граф ошибок этого канала имеет вид $\mathscr{G}(\mathrm{Tr}_{\mathcal{E}}) = \mathbf{1}_{\mathcal{H}} \otimes \mathfrak{B}(\mathcal{E})$. Пусть $|\varphi\rangle \in \mathcal{E}$ — некоторое чистое состояние, рассмотрим код $\Pi_{\mathcal{C}} = \mathbf{1}_{\mathcal{H}} \otimes |\varphi\rangle\langle\varphi|$. Такой код удовлетворяет условиям Нилла–Лафламма, а восстанавливающий канал имеет вид $\mathcal{R}[\rho] = \rho \otimes |\varphi\rangle\langle\varphi|$.

Операторным графам можно дать более абстрактную характеризацию с точки зрения комплементарных каналов.

Предложение 2.6. *Пусть задан квантовый канал $\Phi \colon \mathfrak{T}(\mathcal{H}) \to \mathfrak{T}(\mathcal{K})$ между конечномерными пространствами с представлением Стайнспринга $\Phi[\rho] = \mathrm{Tr}_{\mathcal{E}}(V \rho V^{\dagger})$. Операторный граф $\mathscr{G}(\Phi)$ канала Φ является полным образом канала, сопряжённого к комплементарному:*

$$\mathscr{G}(\Phi) = \widehat{\Phi}^{*}[\mathfrak{B}(\mathcal{E})]. \tag{2.20}$$

Возможная интерпретация этого выражения заключается в следующем: некоммутативный граф ошибок показывает, какие квантовые наблюдаемые способно измерять окружение. Эта характеризация была дана в работе [13, лемма 1]; обсудим её доказательство.

Доказательство. Пусть канал $\Phi\colon \mathfrak{T}(\mathcal{H}) \to \mathfrak{T}(\mathcal{K})$ имеет разложение Крауса

$$\Phi[\rho] = \sum_{j=1}^{d} K_j \rho K_j^\dagger. \tag{2.21}$$

Рассмотрим d-мерное гильбертово пространство $\mathcal{E}$ с ортонормированным базисом $\{|j\rangle\}_{j=1}^{d}$ и определим изометрию

$$V\colon \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{K} \otimes \mathcal{E}, \qquad |\varphi\rangle \longmapsto \sum_{j=1}^{d} (K_j|\varphi\rangle) \otimes |j\rangle. \tag{2.22}$$

Эта изометрия задаёт представление Стайнспринга канала:

$$\begin{aligned} \Phi[\rho] &= \mathrm{Tr}_{\mathcal{E}}(V\rho V^\dagger) \\ &= \mathrm{Tr}_{\mathcal{E}} \left[\sum_{j,l=1}^{d} (K_j \rho K_l^\dagger) \otimes |j\rangle\langle l| \right] = \sum_{j=1}^{d} K_j \rho K_j^\dagger. \end{aligned} \tag{2.23}$$

В таком случае комплементарный канал равен

$$\widehat{\Phi}[\rho] = \mathrm{Tr}_{\mathcal{K}}(V\rho V^\dagger) = \sum_{j,l=1}^{d} \mathrm{Tr}(K_j \rho K_l^\dagger)\, |j\rangle\langle l|, \tag{2.24}$$

а сопряжённый к нему имеет вид

$$\widehat{\Phi}^*[B] = \sum_{j,l=1}^{d} \langle l|B|j\rangle\, K_l^\dagger K_j. \tag{2.25}$$

Подставляя в это выражение всевозможные $B \in \mathfrak{B}(\mathcal{E})$, мы видим, что

$$\widehat{\Phi}^*[\mathfrak{B}(\mathcal{E})] = \mathrm{Span}\left\{ K_j^\dagger K_l \;\middle|\; 1 \leqslant j, l \leqslant d \right\} = \mathscr{G}(\Phi). \tag{2.26}$$

□

Обсудим некоторые простейшие свойства операторных графов. Так как $\widehat{\Phi}^*$ сохраняет единицу, операторный граф $\mathscr{G}(\Phi)$ содержит $\mathbf{1}$; так как $\widehat{\Phi}^*$ сохраняет

эрмитово сопряжение, то $\mathscr{G}(\Phi)$ является симметричным относительно инволюции: если $B \in \mathscr{G}(\Phi)$, то $B^\dagger \in \mathscr{G}(\Phi)$. Векторные подпространства с такими свойствами играют важную роль в современном функциональном анализе [5; 6; 89]. Как было обсуждено в главе 1, такие пространства операторов называются *конкретными операторными системами*.

2.2. Условия на то, чтобы операторная система являлась графом ошибок

Мы ввели определение операторных графов и показали, что они являются операторными системами. Однако, является ли произвольная операторная система некоммутативным графом ошибок для некоторого канала? В конечномерном случае на этот вопрос был дан утвердительный ответ в работе [105]. Мы постараемся найти достаточные условия на то, чтобы заданная операторная система являлась графом ошибок некоторого канала.

2.2.1. Конечномерный случай

Прежде всего обсудим конечномерный случай. Пусть дано конечномерное гильбертово пространство $\mathcal{H}$ и фиксирована операторная система $\mathscr{S} \subseteq \mathfrak{B}(\mathcal{H})$. Построим квантовый канал $\Phi\colon \mathfrak{T}(\mathcal{H}) \to \mathfrak{T}(\mathcal{K})$, для которого $\mathscr{G}(\Phi) = \mathscr{S}$, следуя идеям [105] и [106]. Нам будет полезна небольшая лемма.

Лемма 2.7 ([105, лемма 2])**.** *В любой конечномерной операторной системе $\mathscr{S}$ существует базис векторов $\{A_k\}_{k=1}^d$, для которого выполнено $0 \leqslant A_k \leqslant \mathbf{1}$ и $\sum_k A_k = \mathbf{1}$.*

Доказательство. Пусть $d = \dim \mathscr{S}$ — линейная размерность операторной системы. Зафиксируем в $\mathscr{S}$ какой-то базис из эрмитовых элементов $\{B_k\}_{k=1}^d$ и предположим, что в разложении $\mathbf{1} = \sum_{j=1}^d c_j B_j$ было $c_1 \neq 0$ (при необходимости перенумеруем). Подберём достаточно малую константу $\alpha > 0$, при которой все операторы $F_k = \mathbf{1} + \alpha B_k$ положительны. Затем подберём достаточно малую константу $\beta > 0$, при которой оператор $A_1 := \mathbf{1} - \beta \sum_{k=2}^d F_k$ является положительным, и положим $A_k := \beta F_k$ при всех $k > 1$. Полученные операторы положительны

и суммируются к единице. Поскольку $c_1 \neq 0$, семейство $\{\mathbf{1}, B_2, \ldots, B_d\}$ линейно независимо. При $\alpha, \beta > 0$ имеем

$$\mathrm{Span}\{A_1, \ldots, A_d\} = \mathrm{Span}\{\mathbf{1}, F_2, \ldots, F_d\} = \mathrm{Span}\{\mathbf{1}, B_2, \ldots, B_d\} = \mathscr{S}. \qquad (2.27)$$

Следовательно, операторы $\{A_k\}_{k=1}^d$ образуют базис $\mathscr{S}$. □

Выбрав такой базис, легко построить канал с заданным графом ошибок [106].

Теорема 2.8. *Для любой конечномерной операторной системы $\mathscr{S} \subseteq \mathfrak{B}(\mathcal{H})$ существует канал $\Phi\colon \mathfrak{T}(\mathcal{H}) \to \mathfrak{T}(\mathcal{K})$, для которого $\mathscr{S} = \mathscr{G}(\Phi)$.*

Доказательство. Выберем, следуя лемме 2.7, линейный базис $\{A_k\}_{k=1}^d$ в $\mathscr{S}$, который одновременно составляет операторно-значную меру. Рассмотрим d-мерное окружение $\mathcal{E}$ с ортонормированным базисом $\{|k\rangle\}_{k=1}^d$ и построим сопряжённый канал

$$\Psi\colon \mathfrak{B}(\mathcal{E}) \longrightarrow \mathfrak{B}(\mathcal{H}), \qquad B \longmapsto \sum_{k=1}^{d} \langle k|B|k\rangle A_k. \qquad (2.28)$$

Полный образ этого отображения порождает операторную систему

$$\Psi[\mathfrak{B}(\mathcal{E})] = \mathrm{Span}\,\{\, A_k \mid 1 \leqslant k \leqslant d \,\} = \mathscr{S}. \qquad (2.29)$$

Можно выбрать канал Φ так, что $\widehat{\Phi}^* = \Psi$. Значит, $\mathscr{S} = \mathscr{G}(\Phi)$.

Теперь построим канал Φ в терминах его операторов Крауса более явным образом. Рассмотрим прямую сумму копий гильбертова пространства $\mathcal{K} = \mathcal{H}^{\oplus d}$ с набором изометрических вложений

$$\iota_k\colon \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{K}, \qquad |\psi\rangle \longmapsto (0, \ldots, |\psi\rangle, \ldots, 0). \qquad (2.30)$$

Для этих вложений верно $\iota_j^\dagger \iota_k = \delta_{j,k}\mathbf{1}$. Определим операторы Крауса как $K_j = \iota_j \sqrt{A_j}$. Тогда $K_j^\dagger K_l = \delta_{j,l} A_j$ и $\sum_{j=1}^d K_j^\dagger K_j = \sum_{j=1}^d A_j = \mathbf{1}$. Соответствующий канал имеет вид

$$\Phi\colon \mathfrak{T}(\mathcal{H}) \longrightarrow \mathfrak{T}(\mathcal{K}), \qquad \rho \longmapsto \sum_{j=1}^{d} K_j \rho K_j^\dagger, \qquad (2.31)$$

и снова верно, что $\mathscr{S} = \mathscr{G}(\Phi)$. □

2.2.2. Бесконечномерный случай

Наша задача — обобщить теорию для рассмотрения бесконечномерных пространств. Пусть теперь $\mathcal{H}$ и $\mathcal{K}$ являются бесконечномерными сепарабельными гильбертовыми пространствами. Определим в этом случае операторный граф, следуя предложению 2.6.

Определение 2.9. Операторным графом канала Φ называется операторная система, равная $*$-слабому замыканию полного образа канала, сопряжённого к комплементарному:

$$\mathscr{G}(\Phi) = \overline{\widehat{\Phi}^*[\mathfrak{B}(\mathcal{E})]}^{\mathrm{w}^*\mathrm{o}}. \tag{2.32}$$

Причина, по которой принято налагать требование ультраслабой замкнутости (см. например [90]), обосновывается тем, что понятие трудноразличимости определяется с точностью до пренебрежимых множеств, то есть в сущности опирается на структуру измеримости, которая в некоммутативном случае описывается в терминах теории алгебр фон Неймана и слабо замкнутых подпространств в них. Кроме того, если задействовать интерпретацию операторного графа как набора наблюдаемых, которые способно измерить окружение, то слабая замкнутость соответствует возможности окружения «реализовывать борелевское исчисление» от своих наблюдаемых. Ультраслабое замыкание не меняет условия квантовой антиклики: при фиксированном проекторе $\Pi_{\mathcal{C}}$ множество операторов B, для которых $\Pi_{\mathcal{C}} B \Pi_{\mathcal{C}} \in \mathbb{C}\Pi_{\mathcal{C}}$, ультраслабо замкнуто.

Теперь убедимся, что любая слабо замкнутая операторная система в сепарабельном случае описывает ошибки в каком-то канале — для этого модифицируем лемму 2.7 и теорему 2.8.

Зафиксируем $\mathscr{S}$ — слабо замкнутую операторную систему над сепарабельным гильбертовым пространством $\mathcal{H}$. Семейство векторов $\{v_\alpha\}_\alpha$ в топологическом векторном пространстве называется *тотальным*, если его линейная оболочка всюду плотна в этом пространстве. Мы будем строить множество векторов, тотальное в операторном графе $(\mathscr{S}, \mathrm{w}^*\mathrm{o})$ и задающее дискретную операторно-значную меру.

Лемма 2.10. *Внутри слабо замкнутой операторной системы $\mathscr{S}$, наделённой $*$-слабой операторной топологией* $\mathrm{w}^*\mathrm{o}$*, можно найти тотальную последовательность операторов $\{A_k\}_{k=1}^{\infty}$, для которой выполнено $0 \leqslant A_k \leqslant \mathbf{1}$ и $\sum_{k=1}^{\infty} A_k = \mathbf{1}$.*

Доказательство. Рассмотрим пространство самосопряжённых элементов операторной системы $\mathscr{S}_{sa} = \mathscr{S} \cap \mathfrak{B}(\mathcal{H})_{sa}$. Алгебра ограниченных операторов $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$ сопряжена с $\mathfrak{T}(\mathcal{H})$, и w*o задаёт $*$-слабую топологию на этом пространстве. Поэтому по теореме Банаха–Алаоглу [35, с. 325, теорема 5] единичный шар в $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$ компактен в ультраслабой топологии w*o.

Рассмотрим множество X — пересечение пространства самосопряжённых элементов операторной системы $\mathscr{S}_{sa}$ и шара радиуса $1/2$ с центром в тождественном операторе $\mathbf{1}$:

$$X = \left\{ B \in \mathscr{S}_{sa} \;\middle|\; \|B - \mathbf{1}\| \leqslant \frac{1}{2} \right\}. \tag{2.33}$$

Это пространство компактно и метризуемо в w*o (шар в $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$ метризуем в w*o, поскольку $\mathfrak{T}(\mathcal{H})$ сепарабельно), а также $\overline{\operatorname{Span} X}^{\text{w*o}} = \mathscr{S}$. Метризуемые компакты сепарабельны, поэтому выберем в X всюду плотную последовательность $\{\mathbf{1}, \widetilde{A}_2, \widetilde{A}_3, \ldots\}$ — она также будет тотальной в $\mathscr{S}$. При желании, из этой последовательности можно выделить линейно независимую подпоследовательность. Все элементы последовательности положительны, так как $\|\mathbf{1} - \widetilde{A}_k\| \leqslant 1/2$; отсюда также следует, что $\|\widetilde{A}_k\| \leqslant 3/2$.

Определим для всех $k > 1$ операторы $A_k = \widetilde{A}_k / 2^k$, а для $k = 1$ положим $A_1 = \mathbf{1} - \sum_{k=2}^{\infty} A_k$. Тогда $\|A_k\| \leqslant \frac{3/2}{2^k}$ для всех $k > 1$, и при этом

$$\|\mathbf{1} - A_1\| \leqslant \sum_{k=2}^{\infty} \frac{3/2}{2^k} = \frac{3}{4} < 1, \tag{2.34}$$

значит также $A_1 \geqslant 0$. Получается, последовательность $\{A_k\}_{k=1}^{\infty}$ образует дискретную положительную операторно-значную меру и является тотальной в $(\mathscr{S}, \text{w*o})$. □

Заметим, что если операторная система $\mathscr{S}$ бесконечномерна, семейство векторов $\{A_k\}_{k=1}^{\infty}$ можно выбрать алгебраически линейно независимым, но такая конструкция не гарантирует хороших топологических свойств последовательности, например, свойства быть базисом Шаудера. Впрочем, для доказательства следующей теоремы линейная независимость не понадобится.

Теперь мы обобщим теорему 2.8 на случай сепарабельных гильбертовых пространств — доказательство не потребует больших изменений.

Теорема 2.11. *Пусть дана слабо замкнутая операторная система $\mathscr{S} \subset \mathfrak{B}(\mathcal{H})$ над сепарабельным гильбертовым пространством $\mathcal{H}$. Существует канал $\Phi\colon \mathfrak{T}(\mathcal{H}) \to \mathfrak{T}(\mathcal{K})$, ошибки в котором описывает эта операторная система: $\mathscr{S} = \mathscr{G}(\Phi)$.*

Доказательство. Следуя лемме 2.10, зафиксируем тотальную последовательность $\{A_k\}_{k=1}^{\infty}$, которая образует дискретную операторно-значную меру. Рассмотрим гильбертово пространство $\mathcal{E}$ с ортонормированным базисом $\{|k\rangle\}_{k=1}^{\infty}$ и сопряжённый канал

$$\Psi\colon \mathfrak{B}(\mathcal{E}) \longrightarrow \mathfrak{B}(\mathcal{H}), \qquad B \longmapsto \sum_{k=1}^{\infty} \langle k|B|k\rangle A_k. \tag{2.35}$$

Сумма ряда в этом выражении понимается как предел в w*o-топологии. Замыкание полного образа Ψ равно

$$\overline{\Psi[\mathfrak{B}(\mathcal{E})]}^{\text{w*o}} = \overline{\text{Span}\{\, A_k \mid k \in \mathbb{N}\,\}}^{\text{w*o}} = \mathscr{S}. \tag{2.36}$$

Поэтому можно выбрать канал Φ так, что $\widehat{\Phi}^* = \Psi$, тогда $\mathscr{S} = \overline{\widehat{\Phi}^*[\mathfrak{B}(\mathcal{E})]}^{\text{w*o}} = \mathscr{G}(\Phi)$.

Теперь построим канал Φ в терминах его операторов Крауса. Рассмотрим прямую сумму счётного числа копий гильбертова пространства $\mathcal{K} = \mathcal{H}^{\oplus\infty}$ с набором изометрических вложений

$$\iota_k\colon \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{K}, \qquad |\psi\rangle \longmapsto (0, \ldots, |\psi\rangle, \ldots, 0, \ldots). \tag{2.37}$$

Для этих вложений верно $\iota_j^\dagger \iota_k = \delta_{j,k}\mathbf{1}$. Определим операторы Крауса как $K_j = \iota_j\sqrt{A_j}$. Тогда $K_j^\dagger K_l = \delta_{j,l}A_j$ и $\sum_{j=1}^{\infty} K_j^\dagger K_j = \sum_{j=1}^{\infty} A_j = \mathbf{1}$, сходимость по норме. Соответствующий канал имеет вид

$$\Phi\colon \mathfrak{T}(\mathcal{H}) \longrightarrow \mathfrak{T}(\mathcal{K}), \qquad \rho \longmapsto \sum_{j=1}^{\infty} K_j \rho K_j^\dagger, \tag{2.38}$$

и снова верно, что $\mathscr{S} = \overline{\widehat{\Phi}^*[\mathfrak{B}(\mathcal{E})]}^{\text{w*o}} = \mathscr{G}(\Phi)$. □

Выводы по главе 2

Мы обсудили основания теории коммуникаций с нулевой ошибкой в классическом и квантовом случаях, в частности ввели и обсудили определение некоммутативных графов ошибок для квантовых каналов. Мы доказали, что для слабо замкнутых операторных систем над сепарабельными гильбертовыми

пространствами всегда найдётся канал, ошибки в котором описываются этой операторной системой, где граф ошибок определён как ультраслабое замыкание полного образа канала, сопряжённого к комплементарному.

Глава 3. Теория расширения динамики на операторных системах до динамики на C^*-алгебрах

Изучение стохастических марковских процессов на физических моделях образует обширную и хорошо разработанную область математической физики [107]. Стандартный аппарат для описания марковской эволюции используют операторные полугруппы на банаховых пространствах, теория которых развита весьма подробно благодаря многочисленным приложениям [36]. Как правило, в контексте классической теории вероятностей, физически содержательные и аналитически наиболее богатые примеры доставляют положительные полугруппы, действующие на банаховых решётках [37].

Анализ оснований квантовой теории и развитие методов некоммутативной теории вероятностей привели к пониманию того, что эволюцию открытой системы следует описывать вполне положительными отображениями [1]. Независимо от этого, вполне положительные отображения исследовались в контексте функционального анализа и теории представлений, и из этих исследований выросла теория операторных систем [5; 6]. Образуемая ими категория, морфизмами которой служат вполне положительные отображения, хорошо приспособлена к задаче продолжения морфизмов [5] — в частности в ней «достаточно много» инъективных объектов: каждая операторная система обладает инъективной оболочкой [59]. Сами операторные системы уместно трактовать как некоммутативный аналог банаховых решёток [9]. Если принять такую точку зрения, то вполне положительные полугруппы на операторных системах предстают как наиболее широкий класс структур, пригодный для описания вполне положительной динамики вероятностных систем.

Вполне положительные динамические полугруппы над C^*-алгебрами имеют давнюю историю исследований [26]. К числу центральных достижений этой теории принадлежит характеризация ограниченных генераторов, полученная Горини, Коссаковским, Сударшаном и Линдбладом (ГКСЛ) [24], а также теоремы Бхата о дилатации вполне положительных полугрупп до полугрупп $*$-гомоморфизмов [108; 109]. В этой главе мы установим, что — во всяком случае в конечномерной, а точнее матричной ситуации — теория вполне положительных полугрупп на операторных системах вкладывается в соответствующую теорию над C^*-алгебрами. А именно, всякая вполне положительная динамическая полугруппа

на матричной системе продолжается до полугруппы на конечномерной C^*-алгебре с сохранением непрерывности; для обратимой динамики такое продолжение к тому же единственно.

Раздел 3.1 закрепляет обозначения и содержит вводный материал по операторным системам и однопараметрическим полугруппам операторов. Основные результаты собраны в разделе 3.2, а их обсуждение вместе с возможными приложениями вынесено в раздел 3.3.

3.1. Предварительные сведения

Все используемые в этой главе понятия уже были введены в главе 1, кратко напомним о них.

Упорядоченные $*$-векторные пространства, положительные отображения, вложения $\hookrightarrow$ и фактор-отображения $\twoheadrightarrow$ определены в подразделе 1.1.2; функциональные системы с архимедовой порядковой единицей — в подразделе 1.1.3; операторные пространства и вполне ограниченная норма — в подразделе 1.1.6; операторные системы, вполне положительные отображения и теорема Чоя–Эффроса о характеризации — в подразделе 1.1.7. Топологии на пространствах операторов зафиксированы в подразделе 1.1.1.

Теория однопараметрических операторных полугрупп, генераторы A, резольвенты $R_A(\lambda)$ и тождество Гильберта (1.41), теорема Хилле–Йосиды (теорема 1.10), а также характеризация генераторов положительных унитальных полугрупп (теорема 1.11) изложены в подразделе 1.1.9. Там же даны определения расширения, ко-расширения и дилатации полугруппы (рисунок 1.1).

Понятия инъективного объекта, инъективной оболочки $\mathcal{I}(\mathscr{V})$, теорема Арвесона о продолжении (теорема 1.8) и теорема Чоя–Эффроса о произведении (теорема 1.9), согласно которой всякая инъективная операторная система несёт структуру C^*-алгебры, собраны в подразделе 1.1.8.

3.2. Результаты о расширении вполне положительных полугрупп

Пусть на операторной системе $\mathscr{V}$ задана вполне положительная динамическая полугруппа Φ. Наша задача будет состоять в том, чтобы построить продолжающую её полугруппу Ψ, действующую на расширяющей операторную систему C^*-алгебре. Настоящий раздел показывает, что такое продолжение всегда возможно.

В случае дискретного времени, это свойство следует немедленно из теоремы Арвесона.

Предложение 3.1. *Пусть $\mathscr{V}$ — операторная система, $\mathscr{W}$ — её инъективное расширение (и значит, $\mathscr{W}$ является C^*-алгеброй), а $\iota\colon \mathscr{V} \hookrightarrow \mathscr{W}$ — вложение. Пусть $\Phi\colon \mathbb{Z}_+ \to \mathrm{UCP}(\mathscr{V})$ — полугруппа с дискретным временем на $\mathscr{V}$. Тогда полугруппа может быть продолжена до полугруппы $\Psi\colon \mathbb{Z}_+ \to \mathrm{UCP}(\mathscr{W})$.*

Доказательство. Дискретная полугруппа полностью восстанавливается по одному оператору $\Phi(1)$: справедливо $\Phi(n) = \Phi(1)^n$. Инъективность $\mathscr{W}$ позволяет продолжить $\Phi(1)\colon \mathscr{V} \to \mathscr{V}$ до некоторого $\Psi(1)\colon \mathscr{W} \to \mathscr{W}$; остаётся положить $\Psi(n) = \Psi(1)^n$, тогда

$$\Psi(n) \circ \iota = \Psi(1)^n \circ \iota = \iota \circ \Phi(1)^n = \iota \circ \Phi(n). \tag{3.1}$$

□

Более содержательным является вопрос о том, возможно ли конструировать расширения при непрерывном времени.

3.2.1. Расширение вполне положительных автоморфизмов

Прежде всего, обсудим частный случай вопроса — о продолжении вполне положительных автоморфизмов (то есть обратимых преобразований) операторных систем. Начнём со вспомогательного утверждения о жёстких расширениях.

Лемма 3.2. *Пусть $\mathscr{V}$ — некоторая операторная система, а $\mathscr{W}$ — её жёсткое расширение с вложением $\iota\colon \mathscr{V} \hookrightarrow \mathscr{W}$. Если $\Phi_1, \Phi_2\colon \mathscr{V} \to \mathscr{V}$ — взаимно обратные*

отображения,

$$\Phi_1 \circ \Phi_2 = \Phi_2 \circ \Phi_1 = \mathrm{Id}_{\mathscr{V}}, \tag{3.2}$$

то любые их расширения $\Psi_1, \Psi_2 \colon \mathscr{W} \to \mathscr{W}$*, такие что* $\Psi_1 \circ \iota = \iota \circ \Phi_1$ *и* $\Psi_2 \circ \iota = \iota \circ \Phi_2$*, тоже взаимно обратны:*

$$\Psi_1 \circ \Psi_2 = \Psi_2 \circ \Psi_1 = \mathrm{Id}_{\mathscr{W}}. \tag{3.3}$$

В частности, обратимое отображение продолжается не более чем одним способом.

Доказательство. Отображения $\Psi_1 \circ \Psi_2$ и $\Psi_2 \circ \Psi_1$ расширяют тождественное отображение $\mathrm{Id}_{\mathscr{V}}$:

$$\Psi_1 \circ \Psi_2 \circ \iota = \Psi_2 \circ \Psi_1 \circ \iota = \iota \circ \mathrm{Id}_{\mathscr{V}} = \iota, \tag{3.4}$$

поэтому по свойству жёсткости они равны $\mathrm{Id}_{\mathscr{W}}$, то есть Ψ_1 и Ψ_2 взаимно обратны.

Пусть теперь (Ψ_1, Ψ_2) и $(\widetilde{\Psi}_1, \widetilde{\Psi}_2)$ — два взаимно обратных продолжения пары (Φ_1, Φ_2). По доказанному взаимно обратными оказываются и «перекрёстные» пары $(\Psi_1, \widetilde{\Psi}_2)$, $(\widetilde{\Psi}_1, \Psi_2)$. Так как обратный элемент определяется однозначно, продолжения (Ψ_1, Ψ_2) совпадают с $(\widetilde{\Psi}_1, \widetilde{\Psi}_2)$. □

Таким образом, при переходе к жёсткому расширению, автоморфизм продолжается однозначно, и притом снова до автоморфизма. Отметим, что данная лемма применима к объектам произвольной категории, в которой возможно рассматривать жёсткие расширения.

Приведённая лемма примыкает к теореме Хаманы [110] о продолжении групп автоморфизмов (ср. также [55, следствие 8.1.23]). Обозначим $\mathrm{Aut}(\mathscr{V})$ группу унитальных вполне положительных автоморфизмов операторной системы $\mathscr{V}$. Если операторная система $\mathscr{W}$ является C^*-алгеброй, то $\mathrm{Aut}(\mathscr{W})$ является группой алгебраических $*$-автоморфизмов $\mathscr{W}$ [53, следствие 3.2].

Предложение 3.3 (Хамана, [110])**.** *Пусть* $\mathscr{V}$ *— операторная система, а* $\mathscr{W}$ *— её инъективная оболочка с вложением* $\iota \colon \mathscr{V} \hookrightarrow \mathscr{W}$*. Тогда существует инъективный гомоморфизм групп* $\chi \colon \mathrm{Aut}(\mathscr{V}) \hookrightarrow \mathrm{Aut}(\mathscr{W})$*, то есть группа у.в.п. автоморфизмов системы* $\mathscr{V}$ *вкладывается в группу алгебраических* $*$*-автоморфизмов алгебры* $\mathscr{W}$*. При этом, любой автоморфизм* $\Psi \in \mathrm{Aut}(\mathscr{W})$*, для которого подпространство* $\mathscr{V}$ *инвариантно, имеет вид* $\chi(\Psi|_{\mathscr{V}})$*.*

Доказательство. Построим отображение χ. Для этого зафиксируем некоторое $\Phi \in \mathrm{Aut}(\mathscr{V})$. Так как расширение $\mathscr{W}$ инъективно, то существует некоторое продолжение $\Psi\colon \mathscr{W} \to \mathscr{W}$, такое что $\Psi \circ \iota = \iota \circ \Phi$. Поскольку расширение $\mathscr{W}$ жёсткое, по лемме 3.2 продолжение Ψ единственно. Значит, положим $\chi(\Phi) = \Psi$:

$$\begin{array}{ccc} \mathscr{V} & \xrightarrow{\Phi} & \mathscr{V} \\ {\scriptstyle\iota}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle\iota} \\ \mathscr{W} & \xrightarrow[\chi(\Phi)]{} & \mathscr{W} \end{array} \tag{3.5}$$

Полученное отображение χ является гомоморфизмом. Действительно, $\chi(\mathrm{Id}_{\mathscr{V}}) = \mathrm{Id}_{\mathscr{W}}$ благодаря жёсткости расширения ι, и для любых $\Phi_1, \Phi_2 \in \mathrm{Aut}(\mathscr{V})$ оба автоморфизма $\chi(\Phi_2 \circ \Phi_1)$ и $\chi(\Phi_2) \circ \chi(\Phi_1)$ расширяют $\Phi_2 \circ \Phi_1$, поэтому они равны. Отображение χ инъективно, поскольку если $\chi(\Phi_1) = \chi(\Phi_2)$, то выполнена следующая цепочка равенств:

$$\begin{aligned} \chi(\Phi_1) &= \chi(\Phi_2), \\ \chi(\Phi_1) \circ \iota &= \chi(\Phi_2) \circ \iota, \\ \iota \circ \Phi_1 &= \iota \circ \Phi_2, \\ \Phi_1 &= \Phi_2. \end{aligned} \tag{3.6}$$

Если $\Psi \in \mathrm{Aut}(\mathscr{W})$ сохраняет подпространство $\mathscr{V}$, то $\Psi = \chi(\Psi|_{\mathscr{V}})$ в силу единственности продолжения $\Psi|_{\mathscr{V}}$. □

Следствие 3.4. *Пусть $\mathscr{V}$ — операторная система. Тогда всякий автоморфизм $\Phi \in \mathrm{Aut}(\mathscr{V})$ экстремален в выпуклом пространстве* $\mathrm{UCP}(\mathscr{V})$.

Доказательство. Пусть $\Phi \in \mathrm{Aut}(\mathscr{V})$ и $\Phi = (\Phi_1 + \Phi_2)/2$ для некоторых унитальных вполне положительных $\Phi_1, \Phi_2 \in \mathrm{UCP}(\mathscr{V})$. Пусть $\mathscr{W}$ — инъективная оболочка $\mathscr{V}$, а $\iota\colon \mathscr{V} \hookrightarrow \mathscr{W}$ — вложение. Продолжим Φ_1 и Φ_2 до некоторых $\Psi_1, \Psi_2 \in \mathrm{UCP}(\mathscr{W})$. Тогда $\Psi = (\Psi_1 + \Psi_2)/2$ продолжает Φ, и в силу единственности $\Psi = \chi(\Phi) \in \mathrm{Aut}(\mathscr{W})$ является алгебраическим автоморфизмом. Тогда для любого

самосопряжённого элемента $a \in \mathscr{W}_{sa}$ алгебры $\mathscr{W}$ верно

$$\begin{aligned}\Psi[a]^2 &= \left(\frac{\Psi_1[a] + \Psi_2[a]}{2}\right)^2 \\ &= \frac{\Psi_1[a]^2 + \Psi_2[a]^2}{2} - \frac{(\Psi_1[a] - \Psi_2[a])^2}{4} \\ &\leqslant \frac{\Psi_1[a]^2 + \Psi_2[a]^2}{2} \\ &\leqslant \frac{\Psi_1[a^2] + \Psi_2[a^2]}{2} = \Psi[a^2] = \Psi[a]^2.\end{aligned} \tag{3.7}$$

Полученная цепочка вынуждает все неравенства обратиться в равенства, откуда $\Psi_1 = \Psi_2 = \Psi$, а потому и $\Phi_1 = \Phi_2 = \Phi$. □

Итак, автоморфизм χ переносит каждую симметрию системы $\mathscr{V}$ — причём ровно одним способом — в симметрию её инъективной оболочки $\mathscr{W}$. Вопрос о непрерывности $\chi\colon \mathrm{Aut}(\mathscr{V}) \hookrightarrow \mathrm{Aut}(\mathscr{W})$ относительно тех или иных топологий остаётся открытым. Тем не менее далее мы убедимся, что при определённых предположениях, непрерывность однопараметрической полугруппы всё же наследуется её продолжением.

3.2.2. Расширение вполне положительных полугрупп на матричных системах

Цель настоящего подраздела — установить, что всякая полугруппа, заданная на матричной операторной системе, продолжается до полугруппы на конечномерной C^*-алгебре.

Теорема 3.5. *Пусть $\mathscr{V} \subseteq \mathbb{M}_d$ — матричная операторная система, $\mathscr{W}$ — её инъективная оболочка, $\iota\colon \mathscr{V} \hookrightarrow \mathscr{W}$ — соответствующее вложение, и пусть на $\mathscr{V}$ задана непрерывная у.в.п. полугруппа $\Phi\colon \mathbb{R}_+ \to \mathrm{UCP}(\mathscr{V})$. Тогда существует продолжающая её полугруппа $\Psi\colon \mathbb{R}_+ \to \mathrm{UCP}(\mathscr{W})$.*

Доказательству предпошлём несколько вспомогательных наблюдений.

Начнём с того, что совокупность всех продолжений фиксированного $\Phi \in \mathrm{UCP}(\mathscr{V})$ образует замкнутое подмножество в $\mathrm{UCP}(\mathscr{W})$.

Наблюдение 3.6. Пусть $\mathscr{V}$ — матричная система, $\mathscr{W}$ — её расширение, а $\iota\colon \mathscr{V} \hookrightarrow \mathscr{W}$ — вложение. Пусть $\Phi \in \mathrm{UCP}(\mathscr{V})$ — некоторое отображение на $\mathscr{V}$. Тогда

множество его продолжений

$$\{\, \Psi \in \mathrm{UCP}(\mathscr{W}) \mid \Psi \circ \iota = \iota \circ \Phi \,\} \tag{3.8}$$

замкнуто в $\mathrm{UCP}(\mathscr{W})$.

Доказательство. Пусть $\{\Psi_\alpha\}_\alpha$ — сходящаяся к $\Psi \in \mathrm{UCP}(\mathscr{W})$ направленность таких $\Psi_\alpha \in \mathrm{UCP}(\mathscr{W})$, что $\Psi_\alpha \circ \iota = \iota \circ \Phi$. Тогда

$$\Psi \circ \iota = \left(\lim_\alpha \Psi_\alpha\right) \circ \iota = \lim_\alpha (\Psi_\alpha \circ \iota) = \lim_\alpha (\iota \circ \Phi) = \iota \circ \Phi. \tag{3.9}$$

□

Наблюдение 3.7. Если G — генератор унитальной вполне положительной полугруппы на $\mathscr{W}$, то для любого $\lambda > 0$ для резольвенты выполнено $\lambda R_G(\lambda) \in \mathrm{UCP}(\mathscr{W})$. Если $\lambda, \mu \in \mathbb{R}_+$ — вещественные числа, такие что $0 < \lambda \leqslant \mu$, то в силу тождества Гильберта резольвенты связаны как

$$\lambda R_G(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda}{\mu} \left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right)^k \big(\mu R_G(\mu)\big)^{k+1}. \tag{3.10}$$

Зафиксируем вещественное β из полуинтервала $(0, 1]$ и рассмотрим нелинейное отображение H_β, свойства которого нам понадобятся ниже:

$$\begin{aligned} H_\beta \colon \mathrm{UCP}(\mathscr{W}) &\longrightarrow \mathrm{UCP}(\mathscr{W}), \\ \Phi &\longmapsto \sum_{k=0}^{\infty} \beta(1-\beta)^k \Phi^{k+1}. \end{aligned} \tag{3.11}$$

Из самой конструкции ясно, что H_β не выводит за пределы класса вполне положительных операторов. Сохранение порядковой единицы также проверяется непосредственно:

$$H_\beta[\Phi][\mathbf{1}] = \sum_{k=0}^{\infty} \beta(1-\beta)^k \Phi^{k+1}[\mathbf{1}] = \sum_{k=0}^{\infty} \beta(1-\beta)^k \mathbf{1} = \mathbf{1}. \tag{3.12}$$

Если $\beta_1, \beta_2 \in (0, 1]$, то $H_{\beta_1\beta_2} = H_{\beta_1} \circ H_{\beta_2}$.

Наблюдение 3.8. Для отдельных значений $\beta > 1$ выражение, задающее H_β, также имеет смысл, хотя его положительность при этом может теряться. Если рассмотреть H_β на пространстве вполне ограниченных операторов $\mathrm{CB}(\mathscr{W})$, то можно убедиться, что на подмножестве вполне сжимающих операторов $\mathrm{CB}_1(\mathscr{W})$ отображение $H_\beta \colon \mathrm{CB}(\mathscr{W}) \to \mathrm{CB}(\mathscr{W})$ ограничено и непрерывно.

Доказательство. Пусть $\Phi \in \mathrm{CB}_1(\mathscr{W})$. Тогда

$$\|H_\beta[\Phi]\|_{cb} \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} \beta|1-\beta|^k \|\Phi^{k+1}\|_{cb} \leqslant \frac{\beta}{1-|1-\beta|}, \tag{3.13}$$

значит, H_β ограничено при $0 < \beta < 2$.

Пусть направленность $\{\Phi_\alpha\}_\alpha$ унитальных вполне положительных отображений $\Phi_\alpha \in \mathrm{UCP}(\mathscr{W})$ сходится к $\Phi \in \mathrm{UCP}(\mathscr{W})$, то есть $\lim_\alpha \|\Phi - \Phi_\alpha\|_{cb} = 0$. Тогда

$$\begin{aligned} \|\Phi^{k+1} - \Phi_\alpha^{k+1}\|_{cb} &= \left\| \sum_{l=0}^{k} \Phi^{k-l}(\Phi - \Phi_\alpha)\Phi_\alpha^l \right\|_{cb} \\ &\leqslant (k+1)\|\Phi - \Phi_\alpha\|_{cb}, \end{aligned} \tag{3.14}$$

и значит,

$$\begin{aligned} \|H_\beta[\Phi] - H_\beta[\Phi_\alpha]\|_{cb} &\leqslant \sum_{k=0}^{\infty} \beta|1-\beta|^k \|\Phi^{k+1} - \Phi_\alpha^{k+1}\|_{cb} \\ &\leqslant \sum_{k=0}^{\infty} \beta|1-\beta|^k (k+1)\|\Phi - \Phi_\alpha\|_{cb} \\ &= \frac{\beta}{(1-|1-\beta|)^2}\|\Phi - \Phi_\alpha\|_{cb}. \end{aligned} \tag{3.15}$$

Значит, $\lim_\alpha H_\beta[\Phi_\alpha] = H_\beta[\Phi]$. □

Отсюда вытекает и равномерная непрерывность H_β на каждом отрезке $[\varepsilon_1, \varepsilon_2]$ с $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_2 < 2$. Подчеркнём, что речь идёт о непрерывности относительно нормы на $\mathrm{CB}_1(\mathscr{W})$, в бесконечномерии для более слабых топологий непрерывность может не выполняться.

Итак, если $\beta \leqslant 1$, то H_β вполне сжимающее, и если $\Phi \in \mathrm{UCP}(\mathscr{W})$, то $H_\beta[\Phi] \in \mathrm{UCP}(\mathscr{W})$.

Наблюдение 3.9. При $\beta \in (0, 1]$ отображение H_β инъективно на $\mathrm{CB}_1(\mathscr{W})$.

Доказательство. Для доказательства этого наблюдения, воспользуемся теоремой об отображении спектра. При $\beta = 1$ ряд в (3.11) вырождается в единственное слагаемое и $H_1 = \mathrm{Id}$, поэтому утверждение тривиально. Будем считать, что $\beta \in (0, 1)$, так что $1 - \beta \neq 0$. Пусть $\Psi = H_\beta[\Phi]$ для некоторого $\Phi \in \mathrm{CB}_1(\mathscr{W})$, для доказательства инъективности H_β достаточно показать, что по Ψ единственным образом находится Φ. Из определения (3.11) вытекает соотношение

$$\Psi = \big(\beta\mathrm{Id} + (1-\beta)\Psi\big)\Phi, \tag{3.16}$$

значит нам достаточно показать обратимость оператора $\beta\mathrm{Id} + (1-\beta)\Psi$, то есть проверить, что $-\beta/(1-\beta)$ не принадлежит спектру $\sigma(\Psi)$. Обозначим через

$$h_\beta(z) = \frac{\beta z}{1-(1-\beta)z} \tag{3.17}$$

функцию комплексного переменного, действующую соответственно H_β. Эта функция рациональна и имеет единственный полюс $1/(1-\beta) > 1$, поэтому по теореме об отображении спектра

$$\sigma(\Psi) = h_\beta(\sigma(\Phi)). \tag{3.18}$$

При этом h_β не принимает значение $-\beta/(1-\beta)$: обратная к ней функция имеет вид

$$w \mapsto \frac{w}{\beta + (1-\beta)w}. \tag{3.19}$$

Следовательно, оператор $\beta\mathrm{Id} + (1-\beta)\Psi$ обратим и

$$\Phi = \big(\beta\mathrm{Id} + (1-\beta)\Psi\big)^{-1}\Psi. \tag{3.20}$$

□

Итак, при $\beta \leqslant 1$ отображение H_β непрерывно и инъективно, а потому задаёт гомеоморфизм компакта $\mathrm{UCP}(\mathscr{W})$ на некоторое замкнутое подмножество компакта $\mathrm{UCP}(\mathscr{W})$.

Доказательство теоремы 3.5. Пусть A — генератор полугруппы $\Phi\colon \mathbb{R}_+ \to \mathrm{UCP}(\mathscr{V})$. Определим для $\omega > 0$ множество G_ω функций $(0,\omega] \to \mathrm{UCP}(\mathscr{W})$, которые продолжают $\lambda \mapsto \lambda R_A(\lambda)$ и удовлетворяют аналогу тождества Гильберта (1.41) вплоть до значения ω:

$$G_\omega = \left\{ F\colon (0,\omega] \to \mathrm{UCP}(\mathscr{W}) \;\middle|\; \begin{array}{r} F(\lambda)\circ\iota = \iota\circ\lambda R_A(\lambda), \quad \lambda\in(0,\omega], \\ \dfrac{\lambda F(\mu) - \mu F(\lambda)}{\lambda-\mu} = F(\lambda)F(\mu), \quad \lambda,\mu\in(0,\omega] \end{array} \right\}. \tag{3.21}$$

Построить такие функции можно следующим образом. Возьмём произвольное $\omega > 0$ и выберем какое-нибудь продолжение $F(\omega) \in \mathrm{UCP}(\mathscr{W})$ оператора $\omega R_A(\omega)$. Тождество Гильберта восстанавливает по нему всю функцию F:

$$F(\lambda) = H_{\lambda/\omega}[F(\omega)]. \tag{3.22}$$

Тем самым, множество G_ω непусто. В обратную сторону, каждая функция $F \in G_\omega$ определяет продолжение $F(\omega)$ оператора $\omega R_A(\omega)$. Возникающая биекция $F \mapsto F(\omega)$ приводит к рассмотрению множества расширений $\omega R_A(\omega)$: определим

$$K_\omega = \{\, \Psi \in \mathrm{UCP}(\mathscr{W}) \mid \Psi\circ\iota = \iota\circ\omega R_A(\omega) \,\}, \tag{3.23}$$

так что $G_\omega \cong K_\omega$. Множество K_ω непусто в силу инъективности $\mathscr{W}$ и компактно благодаря конечномерности. Топология на G_ω при этом задана как топология равномерной сходимости на отрезках $[\varepsilon, \omega]$ с произвольным $\varepsilon > 0$.

Для пары $\omega_1 \leqslant \omega_2$ заметим, что отображение $\Psi \mapsto H_{\omega_1/\omega_2}[\Psi]$ переводит элементы K_{ω_2} в элементы K_{ω_1}, поскольку

$$H_{\omega_1/\omega_2}[\Psi] \circ \iota = \iota \circ H_{\omega_1/\omega_2}[\omega_2 R_A(\omega_2)] = \iota \circ (\omega_1 R_A(\omega_1)) \,. \tag{3.24}$$

Кроме того, если $\omega_1 \leqslant \omega_2 \leqslant \omega_3$, то $H_{\omega_1/\omega_3} = H_{\omega_1/\omega_2} \circ H_{\omega_2/\omega_3}$.

Тем самым, пара $\big(K_\omega, H_{\omega_1/\omega_2}\big)$ образует *проективную систему* непустых компактных хаусдорфовых пространств над направленностью $(0, \infty)$. По классической теореме о проективном пределе непустых компактных хаусдорфовых пространств, этот предел образует непустой компакт [111]. Назовём этот проективный предел, определённый как подпространство прямого произведения пространств $\mathrm{UCP}(\mathscr{W})$, как

$$G_\infty = \varprojlim_\omega K_\omega \subseteq \prod_{\omega \in (0,\infty)} K_\omega. \tag{3.25}$$

Зафиксируем какой-нибудь элемент $F \in G_\infty$ этого проективного предела — это будет функция $F(\omega)$, определённая на всём $(0, \infty)$ и принимающая значения в $\mathrm{UCP}(\mathscr{W})$. Она удовлетворяет тождеству Гильберта (то есть соответствует псевдорезольвенте) и продолжает $\lambda \mapsto \lambda R_A(\lambda)$.

Покажем, что функция $F(\lambda)$ стремится к $\mathrm{Id}_{\mathscr{W}}$ при $\lambda \to \infty$. Пусть $\{\lambda_\alpha\}_\alpha$ — некоторая возрастающая направленность положительных чисел с $\lambda_\alpha \to \infty$, такая что $F(\lambda_\alpha)$ сходится к некоторому J. Такие направленности существуют ввиду компактности $\mathrm{UCP}(\mathscr{W})$. Тогда выполнено

$$\begin{aligned} J \circ \iota &= \Big(\lim_\alpha F(\lambda_\alpha)\Big) \circ \iota = \lim_\alpha \big(F(\lambda_\alpha) \circ \iota\big) \\ &= \lim_\alpha \big(\iota \circ \lambda_\alpha R_A(\lambda_\alpha)\big) = \iota \circ \Big(\lim_\alpha \lambda_\alpha R_A(\lambda_\alpha)\Big) \\ &= \iota \circ \mathrm{Id}_{\mathscr{V}}. \end{aligned} \tag{3.26}$$

Значит, ввиду жёсткости расширения $\iota \colon \mathscr{V} \hookrightarrow \mathscr{W}$ выполнено $J = \mathrm{Id}_{\mathscr{W}}$. Получается, любая сходящаяся поднаправленность $\{F(\lambda_\alpha)\}_\alpha$ сходится к $\mathrm{Id}_{\mathscr{W}}$ в компакте $\mathrm{UCP}(\mathscr{W})$, а значит, $F(\lambda) \to \mathrm{Id}_{\mathscr{W}}$ при $\lambda \to \infty$.

Согласно результатам из теории псевдорезольвент [112, теорема 2.5.13], функция $\lambda \mapsto \frac{1}{\lambda} F(\lambda)$ образует резольвенту некоторой у.в.п. полугруппы. Тем не менее, мы аккуратно проведём основные проверки.

Убедимся в обратимости оператора $F(\lambda)$ при каждом $\lambda > 0$. Пусть $0 < \lambda \leqslant \mu$ и $\beta = \lambda/\mu \in (0, 1]$. Из (3.22) вытекает

$$F(\lambda) = \beta F(\mu)\big(\mathrm{Id}_{\mathscr{W}} - (1-\beta)F(\mu)\big)^{-1}, \tag{3.27}$$

в котором обратный оператор из правой части существует согласно ряду Неймана, поэтому для всех чисел $\lambda \leqslant \mu$ операторы $F(\lambda)$ и $F(\mu)$ обратимы одновременно. Так как $F(\lambda) \to \mathrm{Id}_{\mathscr{W}}$ при $\lambda \to \infty$, хотя бы один $F(\lambda)$ окажется обратим, а значит и все.

Можно определить генератор расширенной полугруппы G как

$$G = \lambda\big(\mathrm{Id}_{\mathscr{W}} - F(\lambda)^{-1}\big). \tag{3.28}$$

Тождество Гильберта показывает, что результат не зависит от выбора λ. Оператор G ограничен ввиду конечномерности $\mathscr{W}$, и по построению $F(\lambda) = \lambda R_G(\lambda)$. Проверим, что этот генератор расширяет искомую полугруппу. Оператор $\lambda R_A(\lambda)$ обратим, а из $F(\lambda) \circ \iota = \iota \circ (\lambda R_A(\lambda))$ следует $F(\lambda)^{-1} \circ \iota = \iota \circ (\lambda R_A(\lambda))^{-1}$, откуда

$$G \circ \iota = \lambda\big(\iota - F(\lambda)^{-1} \circ \iota\big) = \iota \circ \lambda\big(\mathrm{Id}_{\mathscr{V}} - (\lambda R_A(\lambda))^{-1}\big) = \iota \circ A. \tag{3.29}$$

Наконец, посмотрим на полугруппу $\Psi(t) = \mathrm{e}^{tG}$. Она расширяет Φ, поскольку G расширяет A, и является вполне положительной, так как её элементы можно выразить в терминах предела у.в.п. отображений [36]

$$\Psi(t) = \mathrm{e}^{tG} = \lim_{n\to\infty} \Big(\frac{n}{t} R_G\Big(\frac{n}{t}\Big)\Big)^n = \lim_{n\to\infty} F\Big(\frac{n}{t}\Big)^n. \tag{3.30}$$

□

Заметим, что приведённое доказательство утверждает чуть больше, чем существование хотя бы одного расширения полугруппы — оно описывает хаусдорфов компакт G_∞ всех таких полугрупп.

Следствие 3.10. *Пусть $\mathscr{V} \subseteq \mathbb{M}_d$ — матричная операторная система, $\mathscr{W}$ — её инъективная оболочка, $\iota\colon \mathscr{V} \to \mathscr{W}$ — вложение, и пусть $\Phi\colon \mathbb{R} \to \mathrm{Aut}(\mathscr{V})$ — непрерывная однопараметрическая группа у.в.п. автоморфизмов системы $\mathscr{V}$. Тогда продолжение Φ до группы $\Psi\colon \mathbb{R} \to \mathrm{Aut}(\mathscr{W})$ существует и единственно.*

Доказательство. По теореме 3.5, существуют полугруппы $\Psi_+, \Psi_-\colon \mathbb{R}_+ \to \mathrm{UCP}(\mathscr{W})$, такие что

$$\Psi_+(t) \circ \iota = \iota \circ \Phi(t), \qquad \Psi_-(t) \circ \iota = \iota \circ \Phi(-t) \qquad \text{для всех } t \geqslant 0. \tag{3.31}$$

Согласно лемме 3.2, построенные полугруппы взаимно обратны: $\Psi_-(t) \circ \Psi_+(t) = \mathrm{Id}_{\mathscr{W}}$ при всех $t \geqslant 0$. Склеивая их, получаем непрерывную однопараметрическую группу $\Psi\colon \mathbb{R} \to \mathrm{Aut}(\mathscr{W})$, для которой $\Psi(t) = \Psi_+(t)$ и $\Psi(-t) = \Psi_-(t)$ при $t \geqslant 0$. Единственность обеспечивается предложением 3.3, причём

$$\Psi = \chi \circ \Phi\colon \mathbb{R} \to \mathrm{Aut}(\mathscr{W}). \tag{3.32}$$

□

Добавим, что генератор G полученной группы служит дифференцированием алгебры $\mathscr{W}$, а сама группа переводит чистые состояния в чистые.

Доказательство теоремы 3.5 опирается на конечномерность $\mathscr{W}$ и компактность $\mathrm{UCP}(\mathscr{W})$ по норме. Для бесконечномерной $\mathscr{W}$, являющейся дуальным банаховым пространством, компактность сохраняется лишь в поточечной $*$-слабой топологии w*o. Этого, однако, достаточно, чтобы установить $*$-слабую непрерывность продолжений, измеримых в $*$-слабом смысле — при условии, что они вообще существуют. (Полугруппа $\Psi\colon \mathbb{R}_+ \to \mathrm{UCP}(\mathscr{W})$ *$*$-слабо измерима*, если для всех $v \in \mathscr{W}$, $\rho \in \mathscr{W}_*$ матричные элементы $t \mapsto \langle \Psi(t)[v], \rho\rangle$ измеримы.)

Теорема 3.11. *Пусть $\mathscr{V}$ — операторная система, а $\mathscr{W}$ — её жёсткое расширение с вложением $\iota\colon \mathscr{V} \to \mathscr{W}$. Предположим также, что $\mathscr{W}$ является дуальным банаховым пространством. Пусть $\Phi\colon \mathbb{R}_+ \to \mathrm{UCP}(\mathscr{V})$ — сильно непрерывная унитальная вполне положительная однопараметрическая полугруппа на $\mathscr{V}$. Пусть существует некоторая вполне положительная и $*$-слабо измеримая полугруппа нормальных отображений $\Psi\colon \mathbb{R}_+ \to \mathrm{UCP}(\mathscr{W})$ на $\mathscr{W}$, расширяющая Φ. Тогда полугруппа Ψ является $*$-слабо непрерывной.*

Доказательство. Определим псевдорезольвенту $F(\lambda)$ для всех $\lambda > 0$ как $*$-слабый интеграл Гельфанда:

$$\langle F(\lambda)[v], \rho\rangle = \int_0^\infty \lambda \mathrm{e}^{-\lambda t} \langle \Psi(t)[v], \rho\rangle \,\mathrm{d}t \tag{3.33}$$

для всех $v \in \mathscr{W}$, $\rho \in \mathscr{W}_*$. Из построения видно, что операторы $F(\lambda)$ унитальные и вполне положительные для всех $\lambda > 0$, что $F(\lambda)$ продолжает резольвенту $\lambda R_A(\lambda)$ и удовлетворяет тождеству Гильберта. Покажем, что функция $F(\lambda)$ стремится к $\mathrm{Id}_{\mathscr{W}}$ при $\lambda \to \infty$ в топологии w*o. Пусть $\{\lambda_\alpha\}_\alpha$ — некоторая возрастающая направленность положительных чисел, такая что $F(\lambda_\alpha)$ сходится к некоторому J; такая направленность существует ввиду компактности $(\mathrm{UCP}(\mathscr{W}), \text{w*o})$.

Заметим, что отображения

$$\begin{aligned} &\cdot \circ \iota \colon (\mathrm{UCP}(\mathscr{W}, \mathscr{W}), \mathrm{w}^*\mathrm{o}) \longrightarrow (\mathrm{UCP}(\mathscr{V}, \mathscr{W}), \mathrm{w}^*\mathrm{o}), \\ &\iota \circ \cdot \colon (\mathrm{UCP}(\mathscr{V}, \mathscr{V}), \mathrm{so}) \longrightarrow (\mathrm{UCP}(\mathscr{V}, \mathscr{W}), \mathrm{w}^*\mathrm{o}) \end{aligned} \tag{3.34}$$

являются непрерывными. Поэтому выполнено

$$\begin{aligned} J \circ \iota &= \Big(\lim_\alpha F(\lambda_\alpha)\Big) \circ \iota = \lim_\alpha \big(F(\lambda_\alpha) \circ \iota\big) \\ &= \lim_\alpha \big(\iota \circ \lambda_\alpha R_A(\lambda_\alpha)\big) = \iota \circ \Big(\lim_\alpha \lambda_\alpha R_A(\lambda_\alpha)\Big) \\ &= \iota \circ \mathrm{Id}_{\mathscr{V}}. \end{aligned} \tag{3.35}$$

В силу жёсткости расширения $\iota \colon \mathscr{V} \hookrightarrow \mathscr{W}$ выполнено $J = \mathrm{Id}_{\mathscr{W}}$. Получается, любая сходящаяся поднаправленность $\{F(\lambda_\alpha)\}_\alpha$ сходится к $\mathrm{Id}_{\mathscr{W}}$ в компакте $\mathrm{UCP}(\mathscr{W})$, а значит, $F(\lambda) \to \mathrm{Id}_{\mathscr{W}}$ при $\lambda \to \infty$. Поэтому, в соответствии с общей теорией $*$-слабо непрерывных полугрупп [60; 113], Ψ является $*$-слабо непрерывной. □

Когда $\mathscr{V}$ тоже является дуальным банаховым пространством, требование сильной непрерывности Φ можно ослабить до $*$-слабой непрерывности. Однако, снова, рассуждение теоремы 3.5 не переносится на этот случай и не говорит о существовании продолжения: в топологии $\mathrm{w}^*\mathrm{o}$ умножение операторов не является совместно непрерывным.

3.3. Обсуждение возможных приложений

Изучение вполне положительных полугрупп на C^*-алгебрах составляет классический сюжет квантовой теории вероятностей и теории квантовых стохастических процессов [1; 107]. Одним из главных достижений в этой области является описание генераторов вполне положительной динамики в форме Горини–Коссаковского–Сударшана–Линдблада [24; 79]. При этом, структура полугрупп с неограниченными генераторами гораздо труднее [114]. Другое направление связано с изучением дилатаций: известно, что для вполне положительных полугрупп на C^*-алгебрах можно делать дилатации до полугрупп $*$-гомоморфизмов [108; 109; 115].

Категорию операторных систем разумно мыслить как расширение категории C^*-алгебр с унитальными вполне положительными отображениями в качестве

морфизмов, а геометрию их пространств состояний — как «некоммутативный» вариант выпуклого анализа [11; 12]. Отметим также, что функциональные системы, а вместе с ними и операторные, возникают при рассмотрении обобщённых вероятностных теорий [18; 58].

Из теоремы 3.5 и предложения 3.1 вытекает, что динамика на операторной системе допускает физическую интерпретацию в терминах марковских случайных процессов. Разберём эту мысль на простейшем примере.

3.3.1. Расширение вещественнозначной квантовой динамики

Обратимся к простейшей ситуации — конкретным операторным системам, лежащим в пространстве 2×2-матриц $\mathbb{M}_2$. Пусть $\mathbf{1}, \mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z}$ обозначают матрицы Паули:

$$\mathbf{1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{X} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{Y} = \begin{bmatrix} 0 & -\mathbb{i} \\ \mathbb{i} & 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{Z} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}. \tag{3.36}$$

Пусть $\mathscr{V}$ — операторная система, а $\mathscr{W}$ — её инъективная оболочка. Существует всего четыре различных случая операторных систем внутри $\mathbb{M}_2$.

1. $\dim \mathscr{V} = 1$. Тогда $\mathscr{V} = \mathrm{Span}\{\mathbf{1}\}$ и $\mathscr{W} = \mathbb{C}$. Это тривиальный случай.

2. $\dim \mathscr{V} = 2$. Например, $\mathscr{V} = \mathrm{Span}\{\mathbf{1}, \mathbf{Z}\}$ — операторная система диагональных 2×2-матриц. Её оболочка равна $\mathscr{W} = \mathbb{C}^2$, и эта система не обладает «квантовостью».

3. $\dim \mathscr{V} = 3$. Например, $\mathscr{V} = \mathrm{Span}\{\mathbf{1}, \mathbf{X}, \mathbf{Z}\}$ — операторная система, порождённая симметричными 2×2-матрицами с вещественными коэффициентами. За такой системой закрепилось название ребита (real bit). Её инъективная оболочка равна $\mathscr{W} = \mathbb{M}_2$.

4. $\dim \mathscr{V} = 4$. Тогда $\mathscr{V} = \mathrm{Span}\{\mathbf{1}, \mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z}\} = \mathbb{M}_2$ — система одного кубита, $\mathscr{W} = \mathbb{M}_2$.

Из четырёх случаев наиболее примечателен случай ребита

$$\mathscr{V} = \mathrm{Span}\{\mathbf{1}, \mathbf{X}, \mathbf{Z}\}. \tag{3.37}$$

Множество положительных элементов ребита имеет вид

$$\mathscr{V}_+ = \left\{ a\mathbf{1} + b\mathbf{X} + c\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} a+c & b \\ b & a-c \end{bmatrix} \,\middle|\, a,b,c \in \mathbb{R},\ b^2 + c^2 \leqslant a^2 \right\}. \tag{3.38}$$

С геометрической точки зрения, множество состояний $\mathfrak{S}(\mathscr{V})$ ребита есть круг, граничная окружность которого состоит из вещественнозначных чистых состояний. Теорема 3.5 показывает, что диссипативная эволюция ребита всегда индуцируется эволюцией кубита, оставляющей инвариантным подпространство вещественных матриц; для обратимой динамики такое продолжение по следствию 3.10 единственно.

3.3.1.1. Продолжение обратимой динамики

Однопараметрическая группа на ребите — это в точности вращение круга $\mathfrak{S}(\mathscr{V})$. Её генератор A записывается как

$$\begin{aligned} A[a\mathbf{1} + b\mathbf{X} + c\mathbf{Z}] &= \omega(-c\mathbf{X} + b\mathbf{Z}), \\ \Phi(t)[a\mathbf{1} + b\mathbf{X} + c\mathbf{Z}] &= a\mathbf{1} + \big(b\cos(\omega t) - c\sin(\omega t)\big)\mathbf{X} \\ &\quad + \big(b\sin(\omega t) + c\cos(\omega t)\big)\mathbf{Z}, \end{aligned} \tag{3.39}$$

где $\omega \in \mathbb{R}$ — скорость вращения.

По следствию 3.10, продолжение такой динамики до группы унитарных автоморфизмов Ψ кубита $\mathscr{W} = \mathbb{M}_2$ существует и единственно, а её генератор равен $G = \mathbb{i}\frac{\omega}{2}[\mathbf{Y}, \cdot]$. Иначе говоря, симметрии ребита порождаются гамильтонианом, кратным $\mathbf{Y}$.

3.3.1.2. Продолжение диссипативной динамики

Пусть на ребите задана диссипативная динамика, соответствующая деполяризации и имеющая вид

$$\begin{aligned} A[a\mathbf{1} + b\mathbf{X} + c\mathbf{Z}] &= -\Delta b\mathbf{X} - \Delta c\mathbf{Z}, \\ \Phi(t)[a\mathbf{1} + b\mathbf{X} + c\mathbf{Z}] &= a\mathbf{1} + b\,\mathrm{e}^{-\Delta t}\mathbf{X} + c\,\mathrm{e}^{-\Delta t}\mathbf{Z}. \end{aligned} \tag{3.40}$$

Теорема 3.5 говорит о том, что существует расширение до диссипативной динамики на кубите. Например, ГКСЛ-генератор G_1:

$$G_1[B] = \Delta\left(\frac{1}{2}\mathbf{X}B\mathbf{X} + \frac{1}{2}\mathbf{Z}B\mathbf{Z} - B\right), \tag{3.41}$$

или генератор G_2 вида

$$G_2[B] = \frac{3}{4}\Delta\left(\frac{1}{3}\mathbf{X}B\mathbf{X} + \frac{1}{3}\mathbf{Y}B\mathbf{Y} + \frac{1}{3}\mathbf{Z}B\mathbf{Z} - B\right). \tag{3.42}$$

На элементах ребита оба генератора дают один и тот же результат, но они действуют по-разному на оператор $\mathbf{Y}$:

$$\begin{gathered} A[a\mathbf{1} + b\mathbf{X} + c\mathbf{Z}] = G_1[a\mathbf{1} + b\mathbf{X} + c\mathbf{Z}] = G_2[a\mathbf{1} + b\mathbf{X} + c\mathbf{Z}], \\ G_1[\mathbf{Y}] = -2\Delta\mathbf{Y}, \qquad G_2[\mathbf{Y}] = -\Delta\mathbf{Y}. \end{gathered} \tag{3.43}$$

Итак, продолжение генератора A с ребита на кубит определено неоднозначно. При этом норма расширения $\|G_1\|$ превосходит норму $\|A\|$, это наблюдение позволяет ожидать, что в бесконечномерии полугруппы могут обладать разрывными продолжениями.

3.3.1.3. Вещественнозначная механика с произвольной размерностью

В более общем случае, если задано d-мерное гильбертово пространство, можно рассматривать операторную систему, порождённую вещественными матрицами:

$$\mathscr{V} = \text{Span}\left\{\, v \in \mathbb{M}_d \mid v \text{ — вещественная симметричная матрица} \,\right\}. \tag{3.44}$$

Эту систему можно воспринимать как «вещественнозначную» квантовую механику размерности d. Инъективной оболочкой такой системы является система комплексных $d \times d$-матриц $\mathscr{W} = \mathbb{M}_d$. Теорема 3.5 означает, что «вещественнозначные» системы соответствуют частичной информации о сохраняющей комплексное сопряжение динамике «комплекснозначных» систем $\mathbb{M}_d$. С другой стороны, известно, что любое квантовое вычисление над кубитами можно воспроизвести как вычисление на ребитах [116; 117], поэтому «вещественнозначная» и «комплекснозначная» некоммутативные теории вероятностей эквивалентны с точки зрения вычислительной силы.

3.3.2. Приложения к теории некоммутативных графов

Операторные системы можно воспринимать как «некоммутативные» аналоги графов [13], и эта точка зрения применима к приложениям квантовой теории коррекции ошибок [95; 97; 98]. Представленные теоремы могут быть интересны с точки зрения изучения динамики на таких графах.

3.3.3. Изучение групп симметрий операторных систем

Другое интересное направление — изучение приложений предложения 3.3 и следствия 3.10. Они говорят о том, что любые группы симметрий (как глобальных, так и инфинитезимальных) на операторной системе индуцированы группой автоморфизмов её инъективной оболочки. Поэтому свойства вложения операторных систем [15] связаны с их группами унитальных вполне положительных автоморфизмов.

Пусть $\mathscr{V}$ и $\mathscr{W}$ — операторные системы и задано вложение $\iota\colon \mathscr{V} \hookrightarrow \mathscr{W}$. Обозначим $\mathrm{Aut}_{\mathscr{V}}(\mathscr{W})$ множество автоморфизмов $\mathscr{W}$, оставляющих $\mathscr{V}$ инвариантным. Если $\mathscr{W}$ — инъективная оболочка $\mathscr{V}$, то по предложению 3.3 выполнено $\mathrm{Aut}(\mathscr{V}) \cong \mathrm{Aut}_{\mathscr{V}}(\mathscr{W})$. Также обозначим $\mathrm{Fix}_{\mathscr{V}}(\mathscr{W})$ множество автоморфизмов, действующих на $\mathscr{V}$ тривиально. Очевидно выполнено $\mathrm{Fix}_{\mathscr{V}}(\mathscr{W}) \trianglelefteq \mathrm{Aut}_{\mathscr{V}}(\mathscr{W})$ и $\mathrm{Aut}_{\mathscr{V}}(\mathscr{W})/\mathrm{Fix}_{\mathscr{V}}(\mathscr{W}) \subseteq \mathrm{Aut}(\mathscr{V})$. Если расширение $\mathscr{W}$ жёсткое, то группа $\mathrm{Fix}_{\mathscr{V}}(\mathscr{W}) = 1$ тривиальна.

Интересно пронаблюдать связь операторных подсистем $\mathscr{V}$ в $\mathscr{W} = \mathbb{M}_2$ и групп их симметрий. Прежде всего заметим, что всякий автоморфизм $\mathbb{M}_2$ имеет вид $B \mapsto U\,B\,U^\dagger$ с унитарной матрицей U, с точностью до фазы. Рассмотрим группы операторных систем из 2×2-матриц:

1. $\dim \mathscr{V} = 1$. Группа симметрий $\mathrm{Aut}(\mathscr{V}) = 1$ тривиальна и $\mathrm{Aut}_{\mathscr{V}}(\mathscr{W}) = \mathrm{Fix}_{\mathscr{V}}(\mathscr{W}) = \mathrm{Aut}(\mathscr{W}) \cong \mathrm{SO}(3)$.

2. $\dim \mathscr{V} = 2$, например $\mathscr{V} = \mathrm{Span}\{\mathbf{1}, \mathbf{Z}\}$. Тогда группа симметрий $\mathscr{V}$ имеет вид $\mathrm{Aut}(\mathscr{V}) \cong \mathbb{Z}_2$ и соответствует перестановке координат в $\mathbb{C}^2$. В терминах $\mathbb{M}_2$, такие инволюции имеют вид вращения сферы Блоха вокруг

некоторой оси на угол π. Также $\mathrm{Fix}_{\mathscr{V}}(\mathscr{W}) \cong \mathbb{T}$ содержит вращения сферы Блоха вокруг оси z. Тогда $\mathrm{Aut}_{\mathscr{V}}(\mathscr{W}) \cong \mathbb{T} \rtimes \mathbb{Z}_2$.

3. $\dim \mathscr{V} = 3$, например $\mathscr{V} = \mathrm{Span}\{\mathbf{1}, \mathbf{X}, \mathbf{Z}\}$. Группа унитальных вполне положительных симметрий соответствует вращениям плоскости x–z, то есть равна $\mathrm{Aut}(\mathscr{V}) = \mathrm{Aut}_{\mathscr{V}}(\mathscr{W}) \cong \mathbb{T}$.

4. $\dim \mathscr{V} = 4$. Тогда $\mathscr{V} = \mathrm{Span}\{\mathbf{1}, \mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z}\} = \mathbb{M}_2$ — система одного кубита, и $\mathrm{Aut}(\mathscr{V}) = \mathrm{Aut}_{\mathscr{V}}(\mathscr{W}) = \mathrm{Aut}(\mathscr{W})$.

В этом примере разобрано, как операторные подсистемы внутри $\mathscr{W}$ соответствуют некоторым подгруппам $\mathrm{Aut}_{\mathscr{V}}(\mathscr{W}) \subseteq \mathrm{Aut}(\mathscr{W})$. Здесь же видна и обратная связь: некоторым подгруппам $G \subseteq \mathrm{Aut}(\mathscr{W})$ может быть сопоставлена операторная подсистема, инвариантная относительно G.

Наконец, интересно заметить, что матричные системы можно воспринимать в качестве спектраэдров, то есть областей определения задач полуопределённой оптимизации [15; 118].

Выводы по главе 3

В этой главе изложена теория расширения унитальной вполне положительной динамики на операторных системах до динамики на объемлющих C^*-алгебрах. Показано, что всякая полугруппа с дискретным временем на операторной системе продолжается на её инъективное расширение, а в матричном случае продолжается и всякая непрерывная однопараметрическая унитальная вполне положительная полугруппа, причём продолжение на инъективную оболочку наследует $*$-слабую непрерывность. Для обратимой динамики продолжение оказывается единственным: однопараметрическая группа автоморфизмов матричной системы единственным образом расширяется до группы $*$-автоморфизмов инъективной оболочки. Тем самым, вполне положительная динамика на операторных системах, в том числе динамика в обобщённых вероятностных теориях (например, на ребите), допускает интерпретацию как ограничение обычной квантовой динамики на C^*-алгебре.

Глава 4. Условно унитальные вполне положительные отображения и задача об их продолжении

При изучении стохастической эволюции в некоммутативной теории вероятностей, можно пользоваться «алгебраическим» формализмом, при котором используется алгебра фон Неймана, описывающая наблюдаемые на системе, и задано зависящее от времени семейство вполне положительных отображений [1; 2]. Однако, структура вполне положительности не требует для своей формулировки всей алгебраической структуры: минимальный контекст, в котором это понятие оказывается осмысленным, содержится в более общем понятии операторных систем — самосопряжённых и содержащих единицу подпространств C^*-алгебр [5—8]. С геометрической точки зрения, операторные системы описывают пространства аффинных функций на «некоммутативных выпуклых компактах» [11; 12]. Положительные сохраняющие единицу функционалы на операторных системах можно воспринимать как множества смешанных состояний над обобщённой вероятностной теорией, а морфизмы таких систем интерпретируются как каналы передачи квантовой информации [74]. Круг приложений операторных систем этим не исчерпывается: они возникают при анализе пропускной способности с нулевой ошибкой в квантовых каналах [13], в задачах полуопределённой оптимизации [15], в теории операторов [16].

Однородная марковская эволюция на некоммутативной вероятностной системе, описываемой в терминах C^*-алгебры, задаётся однопараметрической полугруппой унитальных вполне положительных отображений [107]. Инфинитезимальный генератор такой полугруппы записывается в форме Горини–Коссаковского–Сударшана–Линдблада (ГКСЛ) [24] и, как было установлено Эвансом, характеризуется условной унитальной вполне положительностью [25]. Аналогичная картина для операторных систем до недавнего времени оставалась почти неизученной. В прошлой главе установлено, что по крайней мере в матричном случае всякая у.в.п. полугруппа на операторной системе получается ограничением некоторой полугруппы, заданной на объемлющей C^*-алгебре. Отсюда вытекает, что и генераторы на операторных системах допускают продолжение до генераторов полугрупп на C^*-алгебрах, структура которых хорошо изучена.

Настоящая глава обобщает понятие условной унитальной вполне положительности с контекста C^*-алгебр на произвольные операторные системы.

При таком обобщении, класс условно у.в.п. отображений обладает ясной интерпретацией в терминах инфинитезимальных приращений у.в.п. отображений (дифференциалы вблизи квантовых каналов). Кроме того, вводимое определение корректно ведёт себя относительно композиции с у.в.п. отображениями.

В категории операторных систем как правило успешно решается задача о продолжении морфизмов — центральным инструментом теории служит теорема Арвесона [44] о том, что у.в.п. отображения со значениями в алгебре $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$ можно расширять, и имеется развитая теория инъективных объектов [5; 55]. Более того, каждая операторная система вкладывается в свою инъективную оболочку [59]. Ниже обсуждается какая часть этих результатов сохраняется и для условно у.в.п. отображений.

Изложение организовано следующим образом. Раздел 4.1 закрепляет обозначения и кратко воспроизводит необходимый материал главы 1. В разделе 4.2 формулируется определение условно у.в.п. отображения и выводятся его элементарные следствия. Раздел 4.3 посвящён задаче продолжения таких отображений: устанавливается соответствующий вариант двойственности Чоя–Ямиолковского и доказывается аналог теоремы Арвесона для вполне ограниченных отображений со значениями в конечномерной C^*-алгебре. Итоги подводятся в разделе 4.3.3.

4.1. Предварительные сведения

Все используемые в этой главе понятия введены в главе 1, кратко напомним их. Упорядоченные $*$-векторные пространства, вложения $\hookrightarrow$ и факторотображения $\twoheadrightarrow$ определены в подразделе 1.1.2, функциональные системы — в подразделе 1.1.3, операторные системы, вполне положительные отображения и категория **OS** — в подразделе 1.1.7. Там же введены n-состояния $\mathfrak{S}_n(\mathscr{V}) = \mathrm{UCP}(\mathscr{V}, \mathbb{M}_n)$ и двойственность Чоя–Ямиолковского (1.29)–(1.31), обобщению которой на условно у.в.п. отображения посвящён подраздел 4.3.1, а также дуальные операторные системы и нормальные отображения. Соотношение между C^*-алгебрами и операторными системами как между «коммутативным» и «некоммутативным» уровнями теории вероятностей обсуждается в подразделе 1.3.5.

Задача продолжения морфизма, инъективные операторные системы, понятие инъективной оболочки $\mathcal{I}(\mathscr{V})$ и теорема Арвесона (теорема 1.8) изложены

в подразделе 1.1.8. Напомним, что инъективные операторные системы являются C^*-алгебрами (теорема 1.9) и что все конечномерные C^*-алгебры инъективны, поэтому матричная система инъективна тогда и только тогда, когда она изоморфна матричной $*$-алгебре. Эти свойства позволяют рассматривать вложение теории у.в.п. отображений между операторными системами в теорию у.в.п. отображений между C^*-алгебрами — впрочем, такое вложение неканонично, поскольку продолжения, как правило, не единственны.

В главе 3 было установлено, что динамическая полугруппа у.в.п. отображений, заданная на матричной системе, допускает продолжение на её инъективную оболочку (см. главу 3 и подраздел 4.2.1). Настоящая глава обобщает обсуждение, снимая ограничение на требование полугруппового свойства и рассматривая произвольные инфинитезимальные приращения у.в.п. отображений.

4.2. Условно унитально вполне положительные отображения

В этом разделе, опираясь на анализ однопараметрических семейств у.в.п. отображений, мы формулируем определение условной унитальной вполне положительности для отображений между операторными системами и выводим ряд непосредственных следствий из определения.

4.2.1. Генераторы унитальных вполне положительных полугрупп

Зафиксируем операторную систему $\mathscr{V}$. Через $\mathbb{R}$ обозначается поле вещественных чисел, через $\mathbb{R}_+$ — полугруппа неотрицательных вещественных чисел, а через $I \subseteq \mathbb{R}$ — произвольный вещественный промежуток. Под *однопараметрическим семейством* у.в.п. отображений $\Phi\colon I \to \mathrm{UCP}(\mathscr{V}, \mathscr{W})$ понимается набор $\{\Phi(t)\}_{t\in I}$, индексированный точками промежутка I; всюду ниже такие семейства предполагаются непрерывными, а при необходимости и дифференцируемыми. Семейство $\Phi\colon I \to \mathrm{UCP}(\mathscr{V}, \mathscr{W})$ называется

1. *равномерно непрерывным*, если функция $t \mapsto \Phi(t)$ непрерывна как функция со значениями в пространстве $\mathrm{UCP}(\mathscr{V}, \mathscr{W})$ с нормой $\|\cdot\|_{cb}$.

2. *сильно непрерывным*, если для всех уровней n и элементов $v \in \mathbb{M}_n(\mathscr{V})$ функция $t \mapsto \Phi^{(n)}[v]$ непрерывна как функция со значениями в $\mathbb{M}_n(\mathscr{W})$ с нормой $\|\cdot\|_n$.

3. $*$-*слабо непрерывным*, если для всех уровней n, элементов $v \in \mathbb{M}_n(\mathscr{V})$ функция $t \mapsto \Phi^{(n)}[v]$ непрерывна как функция со значениями в $\mathbb{M}_n(\mathscr{W})$ с $*$-слабой топологией (для этого требуется, чтобы $\mathscr{W}$ была дуальной операторной системой).

Условия дифференцируемости формулируются по той же схеме. Если $\mathscr{V}$ и $\mathscr{W}$ являются матричными системами, то перечисленные виды непрерывности совпадают.

Однопараметрической полугруппой называется семейство $\Phi\colon \mathbb{R}_+ \to \mathrm{UCP}(\mathscr{V})$, для которого выполнено полугрупповое свойство

$$\Phi(0) = \mathrm{Id}, \qquad \Phi(t+s) = \Phi(t) \circ \Phi(s) \ \text{ для всех } \ t, s \geqslant 0. \tag{4.1}$$

Систематическое изложение теории операторных полугрупп имеется в монографии [36], в квантовой механике полугруппы у.в.п. отображений отвечают марковской эволюции открытых систем [107]. Полугруппу удобно восстанавливать по её *генератору* A. Для равномерно непрерывной у.в.п. полугруппы $\Phi\colon \mathbb{R}_+ \to \mathrm{UCP}(\mathscr{V})$ справедливо экспоненциальное представление $\Phi(t) = \mathrm{e}^{tA}$ с вполне ограниченным A. При рассмотрении сильно непрерывных полугрупп, генератор не обязан быть ограниченным: в общем случае он оказывается замкнутым оператором с плотной областью определения $\mathrm{Dom}(A) \subseteq \mathscr{V}$. Для $*$-слабо непрерывных полугрупп, генератор также может быть неограниченным, и его плотность может оказаться выполнена лишь в $*$-слабой топологии [113]. Далее для простоты мы ограничиваемся равномерно непрерывным случаем.

Согласно *теореме Арендта–Чернова–Като* [61; 62], сильно непрерывная операторная полугруппа Φ на упорядоченном пространстве $\mathscr{V}$ является положительной тогда и только тогда, когда для её генератора A выполнено, что

$$\text{если } \langle v, \rho\rangle = 0, \text{ то } \langle A[v], \rho\rangle \geqslant 0 \text{ для всех } v \in \mathrm{Dom}(A)_+, \ \rho \in (\mathscr{V}^*)_+. \tag{4.2}$$

Здесь $\mathrm{Dom}(A)_+$ — положительная часть области определения оператора A, а $(\mathscr{V}^*)_+$ — конус положительных функционалов на $\mathscr{V}$. Оператор, удовлетворяющий этому условию, называют *условно положительным*, а сохранение единицы (*условная унитальность*) выражается равенством $A[\mathbf{1}] = 0$. Мы называем генератор A *условно*

унитальным вполне положительным, когда $A[\mathbf{1}] = 0$ и условно положительно каждое из его размножений $A^{(n)}$. Этот класс операторов ввёл Д.Е. Эванс [25; 61] в связи с изучением марковской динамики на C^*-алгебрах. В случае алгебры фон Неймана $\mathcal{A}$, генератор равномерно непрерывной нормальной у.в.п. полугруппы записывается в форме Горини–Коссаковского–Сударшана–Линдблада (ГКСЛ) [24; 119—121]:

$$A[v] = b^\dagger v + v b + \Psi[v], \tag{4.3}$$

где b — некоторый элемент алгебры $\mathcal{A}$, а Ψ вполне положительное отображение. Для полугрупп, не являющихся равномерно непрерывными, структура неограниченных генераторов существенно усложняется [114]. В литературе условно у.в.п. генераторы встречаются также под названием *диссипаций* [122]. Подчеркнём, что термин «условно вполне положительный оператор» иногда употребляется в другом контексте — при описании процессов непрерывного измерения квантовых систем [123] — где ему отвечает иное определение.

Согласно главе 3, любая у.в.п. полугруппа на матричной системе продолжается на её инъективную оболочку, которая является матричной $*$-алгеброй. Ещё раз сформулируем этот факт, объединив теорему 3.5 со следствием 3.10.

Теорема 4.1 (Я., [28]; см. главу 3)**.** *Пусть $\mathscr{V}$ — матричная система, $\mathscr{W}$ — её инъективная оболочка, $\iota\colon \mathscr{V} \hookrightarrow \mathscr{W}$ — вложение. Пусть $\Phi\colon \mathbb{R}_+ \to \mathrm{UCP}(\mathscr{V})$ — непрерывная у.в.п. однопараметрическая динамическая полугруппа на $\mathscr{V}$. Тогда существует непрерывная у.в.п. однопараметрическая динамическая полугруппа $\Psi\colon \mathbb{R}_+ \to \mathrm{UCP}(\mathscr{W})$ на $\mathscr{W}$, которая продолжает Φ: $\Psi(t)\circ\iota = \iota\circ\Phi(t)$ для всех $t \geqslant 0$.*

Если при этом $\Phi\colon \mathbb{R} \to \mathrm{UCP}(\mathscr{V})$ является группой у.в.п. отображений, то она продолжается до группы у.в.п. отображений $\Psi\colon \mathbb{R} \to \mathrm{UCP}(\mathscr{W})$, так что $\Psi(t) \circ \iota = \iota \circ \Phi(t)$ для всех $t \in \mathbb{R}$, и такое продолжение единственно.

На языке генераторов это утверждение говорит о том, что условно у.в.п. оператор, заданный на матричной системе, допускает продолжение до условно у.в.п. оператора на её инъективной оболочке, которое имеет форму ГКСЛ.

4.2.2. Общие условно у.в.п. отображения

Приведённое выше понятие можно расширить, если допустить, что интерес представляют не только генераторы полугрупп, но и приращения произвольных однопараметрических семейств у.в.п. отображений.

Определение 4.2. Пусть $\mathscr{V}, \mathscr{W}$ — две операторные системы, пусть $\Phi\colon \mathscr{V} \to \mathscr{W}$ — у.в.п. отображение. Отображение $A\colon \mathscr{V} \to \mathscr{W}$ назовём Φ-*условно положительным*, если оно сохраняет эрмитово сопряжение и для всех положительных $v \in \mathscr{V}_+$ и состояний $\rho \in \mathfrak{S}(\mathscr{W})$ из $\langle \Phi[v], \rho\rangle = 0$ следует $\langle A[v], \rho\rangle \geqslant 0$. Отображение $A\colon \mathscr{V} \to \mathscr{W}$ назовём Φ-*условно унитальным вполне положительным*, если $A[\mathbf{1}] = 0$ и все размножения $A^{(n)}$ являются $\Phi^{(n)}$-условно положительными.

В частности, если $\rho \in \mathfrak{S}(\mathscr{V})$ — состояние, то $A\colon \mathscr{V} \to \mathbb{C}$ является ρ-условно у.в.п. отображением тогда и только тогда, когда для всех $v \in \mathscr{V}_+$ выполнено, что из $\rho[v] = 0$ следует $A[v] \geqslant 0$.

Для неограниченного A с плотной областью определения $\mathrm{Dom}(A) \subseteq \mathscr{V}$ в определении Φ-условной положительности разумно брать элемент v из $\mathrm{Dom}(A)_+$. Когда наряду с A условию удовлетворяет и $-A$, отображение A уместно называть *дифференцированием*. В дальнейшем, условно у.в.п. отображение A вместе с сопровождающим его Φ мы будем записывать в виде пары $(\Phi, A)\colon \mathscr{V} \to \mathscr{W}$, и именовать их *условно у.в.п. парами отображений*.

Ниже собраны наблюдения, показывающие, что введённое определение действительно является естественным обобщением.

Свойство 4.3. *Отображение $A\colon \mathscr{V} \to \mathscr{V}$ является условно у.в.п. тогда и только тогда, когда A является* Id*-условно у.в.п. отображением.*

Утверждение непосредственно вытекает из определения и подтверждает согласованность нового понятия с классическим понятием генератора у.в.п. полугруппы в терминах Арендта–Чернова–Като.

Свойство 4.4. *Множество Φ-условно у.в.п. отображений образует (возможно, вырожденный) замкнутый порождающий конус.*

Это также прямое следствие определения: сумма двух Φ-условно у.в.п. отображений и произведение такого отображения на неотрицательное число вновь

принадлежат рассматриваемому классу, а нулевое отображение $v \mapsto 0$ лежит в нём всегда. Для неограниченных A, использование операции сложения требует осторожности ввиду известных трудностей с областями определения. Замкнутость конуса очевидна, поскольку он выделяется системой линейных неравенств. Наконец, то, что конус порождающий в классе зануляющих единицу отображений, обеспечивается следующим свойством.

Свойство 4.5. *Пусть* $\Phi, \Psi \colon \mathscr{V} \to \mathscr{W}$ *— два у.в.п. отображения. Тогда разница* $A = \Psi - \Phi$ *является* Φ*-условно у.в.п. отображением.*

Доказательство. Условная унитальность следует из того, что

$$A[\mathbf{1}] = \Psi[\mathbf{1}] - \Phi[\mathbf{1}] = \mathbf{1} - \mathbf{1} = 0. \tag{4.4}$$

Проверим условную положительность. Возьмём $v \in \mathscr{V}_+$ и $\rho \in \mathfrak{S}(\mathscr{W})$ с условием $\langle \Phi[v], \rho \rangle = 0$, тогда

$$\langle A[v], \rho \rangle = \langle \Psi[v], \rho \rangle - \langle \Phi[v], \rho \rangle = \langle \Psi[v], \rho \rangle \geqslant 0. \tag{4.5}$$

Проведённое рассуждение дословно переносится на размножения $A^{(n)}$. □

Свойство сохраняется и при переходе от конечных приращений к бесконечно малым.

Свойство 4.6. *Пусть* $\Phi \colon [0, \varepsilon) \to \mathrm{UCP}(\mathscr{V}, \mathscr{W})$*, где* $\varepsilon > 0$*, — однопараметрическое семейство у.в.п. отображений из* $\mathscr{V}$ *в* $\mathscr{W}$*. Пусть это семейство равномерно дифференцируемо в нуле, то есть найдётся оператор* A *такой, что*

$$\lim_{t \downarrow 0} \frac{1}{t} \| \Phi(t) - \Phi(0) - At \|_{cb} = 0. \tag{4.6}$$

Тогда производная A *является* $\Phi(0)$*-условно у.в.п. отображением.*

Доказательство получается комбинацией двух предыдущих свойств: конечные приращения условно у.в.п., а замкнутость конуса позволяет перейти к пределу. Таким образом, A допускает интерпретацию как инфинитезимального приращения к у.в.п. отображению Φ, не выводящего за пределы класса у.в.п. отображений, а пару (Φ, A) можно мыслить как касательный вектор к пространству $\mathrm{UCP}(\mathscr{V}, \mathscr{W})$ в точке Φ.

Следующее очевидное свойство, ввиду его важности, сформулируем как теорему.

Теорема 4.7. *Пусть* $(\Phi, A)\colon \mathscr{V} \to \mathscr{W}$ *— условно у.в.п. пара отображений, и заданы у.в.п. отображения* $\chi\colon \mathscr{V}' \to \mathscr{V}$ *и* $\Psi\colon \mathscr{W} \to \mathscr{W}'$. *Тогда* $(\Psi\circ\Phi\circ\chi, \Psi\circ A\circ\chi)\colon \mathscr{V}' \to \mathscr{W}'$ *является условно у.в.п. парой отображений.*

$$\mathscr{V}' \xrightarrow{\chi} \mathscr{V} \xrightarrow{(\Phi,A)} \mathscr{W} \xrightarrow{\Psi} \mathscr{W}' \quad = \quad \mathscr{V}' \xrightarrow{(\Psi\circ\Phi\circ\chi,\Psi\circ A\circ\chi)} \mathscr{W}'. \tag{4.7}$$

Доказательство. Условная унитальность выполняется благодаря тому, что единицу зануляет A. Пусть $v \in (\mathscr{V}')_+$ и $\rho \in \mathfrak{S}(\mathscr{W}')$. Тогда $\chi[v] \in \mathscr{V}_+$ и $\Psi^*[\rho] = \rho\circ\Psi \in \mathfrak{S}(\mathscr{W})$. Значит, если

$$\langle \Psi\circ\Phi\circ\chi[v], \rho\rangle = \langle \Phi[\chi[v]], \Psi^*[\rho]\rangle = 0, \tag{4.8}$$

то из Φ-условной положительности A следует

$$\langle \Psi\circ A\circ\chi[v], \rho\rangle = \langle A[\chi[v]], \Psi^*[\rho]\rangle \geqslant 0. \tag{4.9}$$

Поэтому $\Psi\circ A\circ\chi$ является $\Psi\circ\Phi\circ\chi$-условно положительным. То же самое выполнено для всех размножений. □

Иными словами, операция взятия касательного вектора согласована с композицией морфизмов. Проиллюстрируем это на примере полугруппы $\Phi\colon \mathbb{R}_+ \to \mathrm{UCP}(\mathscr{V})$ вида $\Phi(t) = \mathrm{e}^{tA}$: если система приготовлена в состоянии $\rho \in \mathfrak{S}(\mathscr{V})$, то к моменту t она описывается состоянием $\rho(t) = \rho\circ\Phi(t) \in \mathfrak{S}(\mathscr{V})$, производная которого равна

$$\partial_t\rho(t) = \rho\circ\partial_t\Phi(t) = \rho\circ(A\circ\Phi(t)) = \rho\circ(\Phi(t)\circ A) = \rho(t)\circ A. \tag{4.10}$$

4.2.3. Условно у.в.п. отображения на C^*-алгебрах

При наличии на операторной системе умножения приведённые определения допускают алгебраическую переформулировку [25]. Соответствующие факты мы приводим здесь для полноты картины.

Пусть $\Phi\colon \mathcal{A} \to \mathfrak{B}$ — $*$-гомоморфизм между C^*-алгебрами $\mathcal{A}$ и $\mathfrak{B}$, и пусть $A\colon \mathcal{A} \to \mathfrak{B}$ является Φ-условно у.в.п. отображением. Тогда выполнено *неравенство Кэдисона–Шварца*: для всех матричных уровней $n \in \mathbb{N}$ и элементов $a \in \mathbb{M}_n(\mathcal{A})$ выполнено

$$A^{(n)}[a^\dagger a] \geqslant A^{(n)}[a^\dagger]\Phi^{(n)}[a] + \Phi^{(n)}[a^\dagger]A^{(n)}[a]. \tag{4.11}$$

Верно и обратное: выполнение указанного неравенства на всех матричных уровнях $n \in \mathbb{N}$ влечёт условную у.в.п. пары (Φ, A).

Если $\mathcal{A}$ и $\mathfrak{B}$ являются алгебрами фон Неймана и $\Phi\colon \mathcal{A} \to \mathfrak{B}$ — нормальный $*$-гомоморфизм, то ограниченное Φ-условно у.в.п. отображение $A\colon \mathcal{A} \to \mathfrak{B}$ имеет вид ГКСЛ

$$A[v] = b^{\dagger}\Phi[v] + \Phi[v]b + \Psi[v], \tag{4.12}$$

где $b \in \mathfrak{B}$ — элемент алгебры, $\Psi\colon \mathcal{A} \to \mathfrak{B}$ — вполне положительное отображение.

4.3. Задача продолжения условно у.в.п. отображений

Цель настоящего раздела — перенести на случай условно у.в.п. отображений ряд классических утверждений теории у.в.п. отображений. Будет установлен соответствующий вариант двойственности Чоя–Ямиолковского, а затем — ограниченный аналог теоремы Арвесона, опирающийся на инъективность матричных $*$-алгебр.

4.3.1. Двойственность Чоя–Ямиолковского

Пусть $\mathscr{V}$ — операторная система и $\rho\colon \mathscr{V} \to \mathbb{M}_n$ — у.в.п. отображение (n-состояние). Пусть по двойственности Чоя–Ямиолковского (см. подраздел 1.1.7) ему соответствует состояние $\sigma \in \mathfrak{S}(\mathbb{M}_n(\mathscr{V}))$.

$$\sigma[v] = \frac{1}{n}\sum_{i,j}(\rho[v_{i,j}])_{i,j}, \qquad (\rho[v])_{i,j} = n \cdot \sigma[\mathbf{1}_{i,j} \otimes v]. \tag{4.13}$$

Рассмотрим некоторое отображение $A\colon \mathscr{V} \to \mathbb{M}_n$, которому соответствует отображение $B\colon \mathbb{M}_n(\mathscr{V}) \to \mathbb{C}$ по той же формуле

$$B[v] = \frac{1}{n}\sum_{i,j}(A[v_{i,j}])_{i,j}, \qquad (A[v])_{i,j} = n \cdot B[\mathbf{1}_{i,j} \otimes v]. \tag{4.14}$$

Теорема 4.8 (Двойственность Чоя–Ямиолковского)**.** *В описанной выше ситуации, отображение $A\colon \mathscr{V} \to \mathbb{M}_n$ является ρ-условно вполне положительным тогда*

и только тогда, когда соответствующее ему $B\colon\ \mathbb{M}_n(\mathscr{V}) \to \mathbb{C}$ *является* σ*-условно положительным.*

Доказательство. Пусть A является ρ-условно в.п. отображением. Отображение B можно переписать через максимально запутанное состояние Ω как

$$B[v] = \Omega \circ A^{(n)}[v]. \tag{4.15}$$

По теореме 4.7, поскольку также $\sigma = \Omega \circ \rho^{(n)}$, отсюда следует, что B является σ-условно положительным отображением.

Пусть теперь B является σ-условно положительным отображением, и ему соответствует отображение A, докажем ρ-условную положительность A. Пусть выбраны некоторые $l \in \mathbb{N}$ — матричный уровень, положительный элемент $v \in \mathbb{M}_l(\mathscr{V})_+$ и положительная матрица $m \in (\mathbb{M}_l \otimes \mathbb{M}_n)_+$. Распишем действие $\langle \rho^{(l)}[v], m\rangle$ по индексам из $\mathbb{M}_l$:

$$\langle \rho^{(l)}[v], m\rangle = \sum_{i,j} \langle \rho[v_{i,j}], m_{j,i}\rangle = n \sum_{i,j} \sigma[(m_{j,i})^{\mathsf{T}} \otimes v_{i,j}] = n \cdot \sigma[\xi]. \tag{4.16}$$

Здесь $v_{i,j} \in \mathscr{V}$, $m_{j,i} \in \mathbb{M}_n$ для всех i, j и введён элемент $\xi \in \mathbb{M}_n(\mathscr{V})$:

$$\xi = \sum_{i,j} (m_{j,i})^{\mathsf{T}} \otimes v_{i,j} = \sum_{i,j} (m^{\mathsf{T}})_{i,j} \otimes v_{i,j}. \tag{4.17}$$

В правой части уравнения транспонирование происходит по всему пространству $\mathbb{M}_l \otimes \mathbb{M}_n$. Транспонирование переводит положительные матрицы в положительные (в отличие от транспонирования по части пространства), поэтому m^{T} является положительной матрицей.

Матрица m^{T} и элемент v положительны, а значит, их тензорное произведение

$$m^{\mathsf{T}} \otimes v \in \mathbb{M}_l \otimes \mathbb{M}_n \otimes \mathbb{M}_l \otimes \mathscr{V} \tag{4.18}$$

тоже положительно. Подействуем на часть пространства $\mathbb{M}_l \otimes \mathbb{M}_l$ вполне положительным отображением вида

$$\mathbb{M}_l \otimes \mathbb{M}_l \to \mathbb{C}, \quad m \to \sum_{i,j} (m_{i,j})_{i,j}, \tag{4.19}$$

тогда получим элемент ξ. Получается, что ξ является положительным элементом (аналог умножения Адамара).

Итак, пусть для выбранных элементов выполнено

$$\langle \rho^{(l)}[v], m\rangle = n \cdot \sigma[\xi] = 0, \tag{4.20}$$

тогда, поскольку элемент ξ положительный, можно воспользоваться σ-условной положительностью отображения B и заключить

$$\langle A^{(l)}[v], m\rangle = n \cdot B[\xi] \geqslant 0. \tag{4.21}$$

Значит, все $A^{(l)}$ являются $\Phi^{(l)}$-условно положительными. □

Условная унитальность $A[\mathbf{1}] = 0$ равносильна при этом обращению в нуль величин $B[\mathbf{1}_{i,j} \otimes \mathbf{1}]$ при всех i, j. Напомним ещё раз, что соответствие Чоя–Ямиолковского не согласовано с полной ограниченностью: нормы A и B связаны лишь двусторонней оценкой [6]

$$\|B\| \leqslant \|A\|_{cb} \leqslant n\|B\|. \tag{4.22}$$

4.3.2. Задача продолжения для условно у.в.п. отображений

Теорема 4.7 гарантирует корректность композиции условно у.в.п. пар отображений с у.в.п. отображениями. Это открывает возможность поставить для них задачу продолжения и обсуждать их инъективность.

Определение 4.9. Пусть $\mathscr{V}, \mathscr{W}, \mathscr{Z}$ — операторные системы, и $\iota\colon \mathscr{V} \hookrightarrow \mathscr{W}$ — вложение. Пара условно у.в.п. отображений $(\Psi, B)\colon \mathscr{W} \to \mathscr{Z}$ называется *продолжением* $(\Phi, A)\colon \mathscr{V} \to \mathscr{Z}$, если выполнено $(\Phi, A) = (\Psi, B) \circ \iota$, то есть $\Phi = \Psi \circ \iota$ и $A = B \circ \iota$.

$$\begin{array}{ccc} \mathscr{W} & & \\ {\scriptstyle\iota}\uparrow & \searrow^{(\Psi,B)} & \\ \mathscr{V} & \xrightarrow[(\Phi,A)]{} & \mathscr{Z} \end{array} \tag{4.23}$$

Инъективность системы $\mathscr{Z}$ означает, что всякое $\Phi\colon \mathscr{V} \to \mathscr{Z}$ продолжается до некоторого $\Psi\colon \mathscr{W} \to \mathscr{Z}$. Возникает естественный вопрос: сохраняется ли это свойство при переходе к условно у.в.п. отображениям? Мы не сможем дать полного ответа на этот вопрос, но приведём некоторые ограниченные результаты.

4.3.3. Частичный аналог теоремы Арвесона

В этом подразделе мы сформулируем частичный аналог теоремы Арвесона (см. теорему 1.8) для условно у.в.п. отображений со значениями в матричной $*$-алгебре.

Как выясняется, одного лишь наличия у.в.п. продолжения Ψ для у.в.п. отображения Φ недостаточно для существования продолжения его приращения. Нам потребуется дополнительное условие на взаимное расположение подсистемы $\mathscr{V}$ и конуса, на котором проверяется условная положительность. Введём это условие.

Определение 4.10. Пусть $\mathscr{W}$ — операторная система, $\rho \in \mathfrak{S}(\mathscr{W})$ — состояние на ней, а $\mathscr{V} \subseteq \mathscr{W}$ — операторная подсистема. Положим

$$(N_\rho)_+ = \mathrm{Ker}(\rho) \cap \mathscr{W}_+, \qquad N_\rho = \overline{\mathrm{Span}(N_\rho)_+}. \tag{4.24}$$

Пара операторной подсистемы и состояния $(\mathscr{V}, \rho)$ называется *невырожденной*, если выполнены следующие условия:

1. существует элемент $v_0 \in \mathscr{V} \cap (N_\rho)_+$, являющийся внутренней точкой конуса $(N_\rho)_+$ относительно объемлющего пространства N_ρ;
2. подпространство $\mathscr{V}_{sa} + (N_\rho)_{sa}$ замкнуто в $\mathscr{W}_{sa}$.

Отметим несколько случаев, в которых условия невырожденности легко проверяются. Если состояние ρ точно, то есть $\mathrm{Ker}\,\rho = \{0\}$, то $N_\rho = \{0\}$, поэтому $v_0 = 0$ подходит тривиально, а второе условие выполнено автоматически; ρ-условная положительность в этом случае не накладывает никаких ограничений. Если $\mathscr{W}$ конечномерна, то второе условие всегда выполнено. Наконец, если $\mathscr{W}$ — C^*-алгебра, носитель состояния ρ задаётся проектором Π и ортогональный к носителю проектор $\Pi^\perp := \mathbf{1} - \Pi$ принадлежит $\mathscr{V}$, то $(N_\rho)_+ = \Pi^\perp \mathscr{W}_+ \Pi^\perp$, а элемент $\Pi^\perp$ служит единицей пространства N_ρ и потому является внутренней точкой этого конуса. Для невырожденности пары в этом случае остаётся проверить замкнутость $\mathscr{V}_{sa} + (N_\rho)_{sa}$.

Теорема 4.11. *Пусть $\mathscr{V}$, $\mathscr{W}$ — операторные системы, $\iota\colon \mathscr{V} \hookrightarrow \mathscr{W}$ — вложение. Пусть $\Phi\colon \mathscr{V} \to \mathbb{M}_n$ — у.в.п. отображение (n-состояние), и пусть $\Psi\colon \mathscr{W} \to \mathbb{M}_n$ — его продолжение $\Phi = \Psi \circ \iota$. Пусть $A\colon \mathscr{V} \to \mathbb{M}_n$ — ограниченное Φ-условно у.в.п.*

отображение. Предположим также, что пара $\big(\mathbb{M}_n(\mathscr{V}), \sigma\big)$ *невырождена, где* $\sigma \in \mathfrak{S}(\mathbb{M}_n(\mathscr{W}))$ *— состояние, двойственное к* Ψ *по Чою–Ямиолковскому. Тогда существует* $B\colon \mathscr{W} \to \mathbb{M}_n$ *— ограниченное* Ψ*-условно у.в.п. продолжение* A*.*

Доказательство. Применим двойственность Чоя–Ямиолковского (теорема 4.8) и сведём задачу к продолжению *состояний*. Условная унитальность при таком сведении получается автоматически:

$$B[\mathbf{1}_{\mathscr{W}}] = B \circ \iota[\mathbf{1}_{\mathscr{V}}] = A[\mathbf{1}_{\mathscr{V}}] = 0. \tag{4.25}$$

Итак, пусть $\mathscr{V} \subseteq \mathscr{W}$ — собственная подсистема и состояние $\psi \in \mathfrak{S}(\mathscr{W})$ продолжает состояние $\phi \in \mathfrak{S}(\mathscr{V})$. Пусть $A\colon \mathscr{V} \to \mathbb{C}$ является ограниченным ϕ-условно у.в.п. отображением. Мы хотим найти такое $B\colon \mathscr{W} \to \mathbb{C}$, которое продолжает A и является ψ-условно у.в.п. отображением. Это означает, что B равен A на подпространстве $\mathscr{V}$ и положителен на замкнутом конусе $(N_\psi)_+ = \mathrm{Ker}(\psi) \cap \mathscr{W}_+$.

Положим $\mathscr{S} := \mathscr{V} + N_\psi \subseteq \mathscr{W}$. Мы будем стремиться расширить A с $\mathscr{V}$ до ограниченного функционала B_0 на $\mathscr{S}$ так, чтобы B_0 был положительным на N_ψ. Для этого мы реализуем модифицированную версию теоремы Крейна о продолжении положительных функционалов [124], которая опирается на теорему Хана–Банаха.

Рассмотрим на самосопряжённой части $\mathscr{S}_{sa}$ мажорирующую функцию

$$p(u) = \inf\{\, A[v] \mid v \in \mathscr{V}_{sa},\ v - u \in (N_\psi)_+ \,\}, \tag{4.26}$$

здесь $u \in \mathscr{S}_{sa}$ некоторый элемент. Множество, по которому берётся наибольшая нижняя грань, непусто: пусть дано разложение $u = v_1 + w$, где $v_1 \in \mathscr{V}_{sa}$ и $w \in (N_\psi)_{sa}$; так как есть v_0 — внутренняя точка $(N_\psi)_+$ относительно N_ψ, то найдётся такое $t > 0$, что $tv_0 - w \in (N_\psi)_+$, и тогда элемент $v_* = v_1 + tv_0 \in \mathscr{V}_{sa}$ удовлетворяет $v_* - u = tv_0 - w \in (N_\psi)_+$. Функция p положительно однородна и субаддитивна по построению. Также, $p(0) = 0$, поскольку функционал A неотрицателен на конусе $\mathscr{V}_{sa} \cap (N_\psi)_+$.

Докажем ограниченность p. Так как v_0 — внутренняя точка $(N_\psi)_+$, найдётся такое $\delta > 0$, что из $w \in (N_\psi)_{sa}$ и $\|w\| < \delta$ следует $v_0 + w \in (N_\psi)_+$. По условию невырожденности $\mathscr{S}_{sa}$ замкнуто в $\mathscr{W}_{sa}$, поэтому теорема об открытом отображении даёт константу $K > 0$ такую, что любой $u \in \mathscr{S}_{sa}$ допускает разложение $u = v_1 + w$, где $v_1 \in \mathscr{V}_{sa}$, $w \in (N_\psi)_{sa}$ и $\|v_1\| + \|w\| \leqslant K\|u\|$. Положим $t = 2\|w\|/\delta$, тогда

$tv_0 - w \in (N_\psi)_+$. Следовательно, $v_1 + tv_0$ допустим в определении $p(u)$, и

$$p(u) \leqslant A[v_1] + tA[v_0] \leqslant \left(\|A\| + \frac{2A[v_0]}{\delta} \right) K\|u\| \leqslant C\|u\|. \tag{4.27}$$

Здесь $A[v_0] \geqslant 0$ по ϕ-условной положительности A. Из субаддитивности следует

$$0 = p(0) \leqslant p(u) + p(-u). \tag{4.28}$$

Применяя полученную верхнюю оценку к $-u$, получаем $|p(u)| \leqslant C\|u\|$. Следовательно, p всюду конечна и липшицева.

Покажем, что p равна A на $\mathscr{V}_{sa}$. С одной стороны, $p(u) \leqslant A[u]$ для любого $u \in \mathscr{V}_{sa}$ из определения. С другой стороны, пусть $u, v \in \mathscr{V}_{sa}$ и $v - u \in (N_\psi)_+$; тогда $v - u \in \mathscr{V} \cap (N_\psi)_+ = \mathscr{V}_+ \cap \mathrm{Ker}(\phi)$, откуда $A(v) - A(u) \geqslant 0$ по условной положительности. Поэтому получаем $p(u) \geqslant A[u]$.

По теореме Хана–Банаха, существует вещественно-линейный функционал $B_0 \colon \mathscr{S}_{sa} \to \mathbb{R}$ с $B_0|_{\mathscr{V}_{sa}} = A$ и $B_0 \leqslant p$ на $\mathscr{S}_{sa}$. Из ограниченности p следует ограниченность B_0. Для любого $w \in (N_\psi)_+$ элемент $v = 0$ удовлетворяет $0 - (-w) = w \in (N_\psi)_+$, поэтому $p(-w) \leqslant A[0] = 0$ и $B_0(-w) \leqslant p(-w) \leqslant 0$, то есть $B_0(w) \geqslant 0$. Значит, B_0 неотрицателен на конусе $(N_\psi)_+$. Комплексификацию B_0 можно провести стандартным образом. Далее, используя стандартную теорему Хана–Банаха, мы можем продолжить B_0 до ограниченного функционала на всём $\mathscr{W}$. □

Условие невырожденности оказывается существенным, и без него утверждение теоремы неверно. Приведём соответствующий контрпример.

Пример 4.12. Пусть $\mathscr{W} = \mathbb{M}_3$ и $\psi[w] = w_{1,1}$ — чистое состояние на ней. Рассмотрим элементы

$$P = \mathbf{1}_{3,3}, \qquad F = \mathbf{1}_{2,3} + \mathbf{1}_{3,2}, \qquad \mathscr{V} = \mathrm{Span}\{\mathbf{1}, P, F\} \subseteq \mathbb{M}_3\,. \tag{4.29}$$

и определим операторную систему размерности 3

$$\mathscr{V} := \{\alpha\mathbf{1} + \beta P + \gamma F\} = \left\{ \begin{bmatrix} \alpha & & \\ & \alpha & \gamma \\ & \gamma & \alpha+\beta \end{bmatrix} \right\}, \tag{4.30}$$

где $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$ комплексные числа. Пусть $\phi = \psi|_{\mathscr{V}}$, так что $\phi[\alpha\mathbf{1} + \beta P + \gamma F] = \alpha$ — состояние на операторной системе. Определим функционал

$$A \colon \mathscr{V} \to \mathbb{C}, \qquad A(\alpha\mathbf{1} + \beta P + \gamma F) = \gamma. \tag{4.31}$$

Покажем, что A является ϕ-условно унитальным положительным. Прежде всего, $A[\mathbf{1}] = 0$. Далее, можно заметить, что если $\phi[v] = \alpha = 0$, то матрица v положительна только при $\gamma = 0$ и $\beta \geqslant 0$, то есть $\mathrm{Ker}(\phi) \cap \mathscr{V}_+ = \{\, \beta P \mid \beta \geqslant 0 \,\}$, и на этом конусе A зануляется. Вполне положительность следует из того, что область значений одномерная (например, можно использовать теорему 4.8).

Всякий функционал на $\mathbb{M}_3$ имеет вид $B = \mathrm{Tr}(b\,\cdot)$ с $b \in \mathbb{M}_3$. Допустим, что $B\colon \mathscr{W} \to \mathbb{C}$ продолжает A и является ψ-условно положительным. Тогда из свойства продолжения следует

$$\begin{aligned} \mathrm{Tr}(b) &= B[\mathbf{1}] = 0, \\ b_{3,3} &= B[P] = 0, \\ 2\,\mathrm{Re}(b_{2,3}) &= B[F] = 1, \end{aligned} \tag{4.32}$$

а свойство ψ-условной положительности переформулируется как то, что подматрица

$$\begin{bmatrix} b_{2,2} & b_{2,3} \\ b_{3,2} & b_{3,3} \end{bmatrix} \geqslant 0 \tag{4.33}$$

положительна, что вместе с $b_{3,3} = 0$ приводит к $b_{2,3} = 0$ — противоречие с $2\,\mathrm{Re}(b_{2,3}) = 1$.

Данный контрпример не удовлетворяет условию невырожденности $(\mathscr{V}, \psi)$: при том, что $(N_\psi)_+$ имеет вид положительных матриц с занулённым первым столбцом и строкой, все элементы пересечения $\mathscr{V} \cap (N_\psi)_+$ имеют ранг один.

Использованная схема доказательства не контролирует норму расширения: у построенного продолжения возможен рост $\|B\|_{cb} \geqslant \|A\|_{cb}$, что связано прежде всего с поведением двойственности Чоя–Ямиолковского. Если бы мы располагали оценкой на $\|B\|_{cb}$, равномерной по n, стандартная техника [6] позволила бы распространить теорему 4.11 на любую инъективную операторную систему. Впрочем, в бесконечномерной ситуации наиболее содержательные условно у.в.п. отображения, судя по всему, неограниченны, так что более уместной представляется постановка задачи продолжения именно для неограниченных операторов — ценой заметных аналитических осложнений. В этой связи показателен результат [125]: расширения Стайнспринга диссипативных квантовых марковских полугрупп даже на конечномерных системах неизбежно приводят к неограниченным операторам.

Выводы по главе 4

В главе введено понятие условной унитальной вполне положительности для отображений между операторными системами и изучены его основные свойства. Установлено, что такие отображения суть инфинитезимальные приращения (касательные векторы) к у.в.п. отображениям, и что этот класс замкнут относительно композиции с у.в.п. отображениями. Для него доказана двойственность Чоя–Ямиолковского, а в случае ограниченных отображений со значениями в матричной $*$-алгебре — ограниченная версия теоремы о продолжении типа Арвесона.

Глава 5. Пропускная способность каналов гомодинного измерения бозонных мод

В данной главе мы проводим теоретико-информационный анализ квантового канала приближённого многомодового измерения координаты. Такие измерения возникают в квантовой оптике при экспериментах с шумным гомодинированием. Для такого случая доказывается свойство «гауссовского максимизатора» для числовой характеристики редукции энтропии, благодаря чему получаются явные формулы для вычисления соответствующего максимального информационного выхода и пропускной способности с использованием сцепленности. Подробно рассматривается случай одной бозонной моды.

5.1. О проблематике теоретико-информационных свойств гауссовских каналов

Квантовые системы с непрерывными переменными являются одной из основных платформ для реализации протоколов квантовых вычислений и квантовых коммуникаций [19; 20]. В частности, они используются при описании гауссовских состояний, гауссовских каналов и гауссовских операций, которые естественным образом возникают в теоретической физике, например в квантовой оптике или теории конденсированного состояния. Математическое описание квантовых систем с непрерывными переменными требует аппарата бесконечномерных гильбертовых пространств.

В течение последних лет в квантовой теории Шеннона для систем с непрерывными переменными был достигнут ряд важных результатов. Были проанализированы и вычислены различные пропускные способности и энтропийные величины, в частности для бозонных гауссовских каналов (см., например, книгу [19] и ссылки в ней). Измерения над системами с непрерывными переменными могут рассматриваться как специальный случай канала с квантовым входом и классическим выходом. Однако, в отличие от конечномерного случая, исследование измерений с непрерывными исходами не сводится к анализу правильно подобранного квантового канала; их приходится рассматривать отдельно.

Среди числовых характеристик квантовых измерений наиболее важную роль играют величины редукции энтропии и максимального информационного выхода [82; 83], также называемого силой измерения в зависимости от различных операциональных интерпретаций. В работе [82], где можно найти подробный обзор этих понятий и дальнейшие ссылки, среди прочего была доказана одна версия обратной теоремы Шеннона. Из неё следует, что конечномерный канал измерения может быть асимптотически просимулирован при помощи передачи классического сообщения, размер которого равен максимальному информационному выходу, при дополнительном ресурсе классических корреляций между входом и выходом канала. В работах А. С. Холево и А. А. Кузнецовой [21; 74; 85; 86] была предложена альтернативная операционная характеризация величины максимального информационного выхода — в терминах классической пропускной способности с использованием сцепленности. В соответствии с этим результатом, далее в тексте мы будем говорить о пропускной способности — она описывает максимальное количество классической информации, которое может быть извлечено при помощи измерения при наличии дополнительной сцепленности с системой; мы будем обозначать её как C_{ea}.

В работе [21] эти числовые величины были рассмотрены для класса приближённых гауссовских многомодовых измерений координаты и импульса, называемых в контексте квантовой оптики шумным гетеродинированием. В частности, для этого класса измерений было доказано свойство «гауссовского максимизатора» для величины редукции энтропии, что позволило явным образом вычислить эту величину и пропускную способность с использованием сцепленности. Здесь мы проведём аналогичный анализ для другого класса многомодовых гауссовских измерений — приближённых измерений координаты, производимых в экспериментах по «шумному гомодинированию». Подробные пояснения физических экспериментов, реализующих данные виды измерений, приведены в [20; 126; 127].

Свойство гауссовского максимизатора для многомодовых измерений координаты будет доказано в теореме 5.3, эта теорема также позволит получить явную формулу для вычислений. Величина максимального информационного выхода рассматривается в разделе 5.4, а в разделе 5.5 подробно рассматривается случай одной моды.

5.2. Редукция энтропии при квантовых измерениях

Пусть, следуя главе 1, $\mathcal{H}$ — сепарабельное гильбертово пространство некоторой квантовой системы, $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$ — множество состояний на нём, а $(\Omega, \mathcal{F})$ — стандартное измеримое пространство исходов, на котором задан инструмент $\mathcal{M} = \{\mathcal{M}(A)\}_{A\in\mathcal{F}}$ с отвечающим ему измерением $M(A) = \mathcal{M}(A)^*[\mathbf{1}]$ (подраздел 1.3.3). Распределение исходов P_ρ в состоянии ρ задаётся правилом Борна (1.73), а семейство апостериорных состояний $\{\widehat{\rho}(x)\}_{x\in\Omega}$ — разложением (1.75).

Величина редукции энтропии $\mathrm{ER}(\rho, \mathcal{M})$ инструмента $\mathcal{M}$ на состоянии ρ определяется как

$$\mathrm{ER}(\rho, \mathcal{M}) = \mathrm{H}(\rho) - \int_\Omega \mathrm{H}\big(\widehat{\rho}(x)\big)\, P_\rho(\mathrm{d}x), \tag{5.1}$$

где $\mathrm{H}(\rho) = -\operatorname{Tr}(\rho \log \rho)$ — энтропия фон Неймана; предполагается, что $\mathrm{H}(\rho) < \infty$ [81; 84].

Мы будем работать с классом инструментов, измерения которых обладают ограниченной операторно-значной плотностью:

$$M(A) = \int_A m(x)\, \mu(\mathrm{d}x), \qquad A \in \mathcal{F}, \tag{5.2}$$

где μ — σ-конечная мера на σ-алгебре $\mathcal{F}$. Мы также предполагаем, что существует факторизация $m(x) = V(x)^\dagger V(x)$ со слабо измеримой функцией $V\colon \Omega \to \mathfrak{B}(\mathcal{H})$, принимающей значения в ограниченных операторах и удовлетворяющей условию

$$\int_\Omega V(x)^\dagger V(x)\, \mu(\mathrm{d}x) = \mathbf{1}, \tag{5.3}$$

где интеграл сходится в слабом смысле [85]. Любой такой измеримой факторизации меры $m(x)$ можно сопоставить эффективный инструмент [81; 84]

$$\mathcal{M}(A)[\rho] = \int_A V(x)\rho V(x)^\dagger\, \mu(\mathrm{d}x). \tag{5.4}$$

Тогда распределение вероятностей $P_\rho(\mathrm{d}x)$ обладает плотностью

$$p_\rho(x) = \operatorname{Tr}\big(\rho\, V(x)^\dagger V(x)\big) = \operatorname{Tr}\big(\rho\, m(x)\big) \tag{5.5}$$

относительно меры μ, а семейство апостериорных состояний равно

$$\widehat{\rho}(x) = p_\rho(x)^{-1} V(x)\rho V(x)^\dagger. \tag{5.6}$$

Величина редукции энтропии эффективного инструмента в таком случае равна

$$\mathrm{ER}(\rho, M) = \mathrm{H}(\rho) - \int_\Omega p_\rho(x)\, \mathrm{H}\big(\widehat{\rho}(x)\big)\, \mu(\mathrm{d}x), \tag{5.7}$$

где апостериорные состояния определены формулой (5.6). В работе [81] было показано, что редукция энтропии эффективного инструмента неотрицательна. В [84] редукция энтропии была соотнесена с квантовой взаимной информацией инструмента; отсюда следует, что она является вогнутой, субаддитивной и полунепрерывной снизу функцией состояния ρ.

В работах [21; 74] было сделано важное замечание: величина $\mathrm{H}(\widehat{\rho}(x))$ в формуле (5.7) зависит только от плотности меры $m(x)$, а не от конкретной измеримой факторизации — то есть редукция энтропии зависит от наблюдаемой M, а не от выбора эффективного инструмента, который её реализует. Это свойство оправдывает обозначение $\mathrm{ER}(\rho, M) = \mathrm{ER}(\rho, \mathcal{M})$.

5.3. Свойство гауссовских максимизаторов для редукции энтропии

Мы будем работать с бозонной системой на s модах, которая описывается каноническими операторами координаты

$$q = (q_1, \ldots, q_s)^{\mathsf{T}} \tag{5.8}$$

и импульса

$$p = (p_1, \ldots, p_s)^{\mathsf{T}} \tag{5.9}$$

(см., например, [19; 20]). Нам будет удобно рассматривать координатное представление Шрёдингера гильбертова пространства $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^s)$, в котором $q_j = \xi_j$ — оператор домножения на переменную и $p_j = -\mathrm{i}\,\partial/\partial\xi_j$ — оператор дифференцирования по переменной (с точностью до скаляра). Оператор сдвига обозначим как

$$D(x, y) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x^{\mathsf{T}}y/2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}y^{\mathsf{T}}q}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x^{\mathsf{T}}p}, \qquad x, y \in \mathbb{R}^s. \tag{5.10}$$

Нас будет интересовать приближённое измерение координат на s бозонных модах. В квантовой оптике оно соответствует многомодовому шумному гомодинированию, поскольку измерение произвольной квадратуры поля излучения

сводится к измерению координаты при помощи подходящего преобразования Боголюбова. В этом случае $\Omega = \mathbb{R}^s$, а операторно-значная мера равна

$$\begin{aligned} M(\mathrm{d}^s x) &= \exp\left[-\frac{1}{2}(q-x)^{\mathsf{T}}\beta^{-1}(q-x)\right]\frac{\mathrm{d}^s x}{\sqrt{(2\pi)^s \det\beta}} \\ &= D(x)\exp\left[-\frac{1}{2}q^{\mathsf{T}}\beta^{-1}q\right]D(x)^\dagger\frac{\mathrm{d}^s x}{\sqrt{(2\pi)^s \det\beta}}, \end{aligned} \tag{5.11}$$

где β — вещественная положительно определённая матрица шума при измерении, а

$$D(x) = D(x,0) = \exp(-\mathbb{i}x^{\mathsf{T}}p) \tag{5.12}$$

— оператор сдвига координаты. Измерение M имеет вид (5.2) с ограниченной операторно-значной плотностью $m(x)$, поэтому применимы формулы (5.6) и (5.7).

Выберем эффективный инструмент для такого измерения, положив

$$V(x) = V(x)^\dagger = \sqrt{m(x)} = \left[(2\pi)^s \det\beta\right]^{-1/4}\exp\left[-\frac{1}{4}(q-x)^{\mathsf{T}}\beta^{-1}(q-x)\right]. \tag{5.13}$$

Пусть ρ — состояние, а $\rho_{u,v} = D(u,v)\rho D(u,v)^\dagger$ — сдвинутое состояние. Тогда

$$\begin{aligned} &V(x)\rho_{u,v}V(x) \\ &= D(u,v)\big(D(u,v)^\dagger V(x)D(u,v)\big)\rho\big(D(u,v)^\dagger V(x)D(u,v)\big)D(u,v)^\dagger \\ &= D(u,v)V(x-u)\rho V(x-u)D(u,v)^\dagger. \end{aligned} \tag{5.14}$$

Отсюда следует, что

$$p_{\rho_{u,v}}(x) = p_\rho(x-u), \qquad \widehat{\rho}_{u,v}(x) = D(u,v)\widehat{\rho}(x-u)D(u,v)^\dagger, \tag{5.15}$$

и благодаря унитарной инвариантности энтропии

$$\mathrm{ER}(\rho_{u,v}, M) = \mathrm{ER}(\rho, M). \tag{5.16}$$

Итак, редукция энтропии измерения не зависит от сдвига. Поэтому можно ограничиться рассмотрением *центрированных* состояний ρ, то есть таких, что

$$\mathrm{Tr}(\rho\, q_j) = \mathrm{Tr}(\rho\, p_j) = 0, \qquad 1 \leqslant j \leqslant s. \tag{5.17}$$

Рассмотрим квантовое состояние $\rho_\alpha \in \mathfrak{S}(\mathcal{H})$ — центрированное гауссовское состояние в $\mathcal{H}$ с $2s\times 2s$-матрицей ковариаций

$$\alpha = \begin{bmatrix} \alpha_{qq} & \alpha_{qp} \\ \alpha_{pq} & \alpha_{pp} \end{bmatrix}, \tag{5.18}$$

где

$$\begin{aligned}\alpha_{qq} &= \alpha_{qq}^{\mathsf{T}} = \big[\mathrm{Tr}(\rho_\alpha\, q_j q_k)\big]_{j,k=1,\dots,s},\\ \alpha_{pp} &= \alpha_{pp}^{\mathsf{T}} = \big[\mathrm{Tr}(\rho_\alpha\, p_j p_k)\big]_{j,k=1,\dots,s},\\ \alpha_{qp} &= \alpha_{pq}^{\mathsf{T}} = \left[\frac{1}{2}\,\mathrm{Tr}\big(\rho_\alpha(q_j p_k + p_k q_j)\big)\right]_{j,k=1,\dots,s}.\end{aligned} \tag{5.19}$$

В явном виде состояние задаётся ядром в представлении Шрёдингера

$$\langle\xi|\rho_\alpha|\xi'\rangle = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^s \det\alpha_{qq}}}\exp\left[-\frac{1}{2}\theta(\xi,\xi')\right], \tag{5.20}$$

где

$$\begin{aligned}\theta(\xi,\xi') = \frac{1}{4}&(\xi'+\xi)^{\mathsf{T}}\alpha_{qq}^{-1}(\xi'+\xi)\\ &+ (\xi'-\xi)^{\mathsf{T}}\big(\alpha_{pp} - \alpha_{pq}\alpha_{qq}^{-1}\alpha_{qp}\big)(\xi'-\xi)\\ &+ \mathbb{i}(\xi'+\xi)^{\mathsf{T}}\alpha_{qq}^{-1}\alpha_{qp}(\xi'-\xi).\end{aligned} \tag{5.21}$$

См. лемму 5.1.

Лемма 5.1. *Ядро оператора плотности гауссовского состояния $\rho_{m,\alpha}$ со средними значениями m_q, m_p и матрицей ковариаций* (5.18) *в координатном представлении Шрёдингера имеет вид*

$$\langle\xi|\rho_{m,\alpha}|\xi'\rangle = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^s \det\alpha_{qq}}}\exp\left[\mu(m;\xi,\xi') - \frac{1}{2}\theta(\xi,\xi')\right], \tag{5.22}$$

где

$$\begin{aligned}\mu(m;\xi,\xi') = &\frac{1}{2}m_q^{\mathsf{T}}\alpha_{qq}^{-1}(\xi'+\xi)\\ &- \mathbb{i}\big(m_p - \alpha_{pq}\alpha_{qq}^{-1}m_q\big)^{\mathsf{T}}(\xi'-\xi) - \frac{1}{2}m_q^{\mathsf{T}}\alpha_{qq}^{-1}m_q,\end{aligned} \tag{5.23}$$

и

$$\begin{aligned}\theta(\xi,\xi') = \frac{1}{4}&(\xi'+\xi)^{\mathsf{T}}\alpha_{qq}^{-1}(\xi'+\xi)\\ &+ (\xi'-\xi)^{\mathsf{T}}\big(\alpha_{pp} - \alpha_{pq}\alpha_{qq}^{-1}\alpha_{qp}\big)(\xi'-\xi)\\ &+ \mathbb{i}(\xi'+\xi)^{\mathsf{T}}\alpha_{qq}^{-1}\alpha_{qp}(\xi'-\xi).\end{aligned} \tag{5.24}$$

Доказательство. Квантовая характеристическая функция состояния $\rho_{m,\alpha}$ имеет вид

$$\varphi(x,y) = \mathrm{Tr}\big(\rho_{m,\alpha}W(x,y)\big) = \exp\left[\mathbb{i}m(x,y) - \frac{1}{2}\alpha(x,y)\right], \tag{5.25}$$

где

$$\begin{aligned}m(x,y) &= m_q^{\mathsf{T}}x + m_p^{\mathsf{T}}y,\\ \alpha(x,y) &= x^{\mathsf{T}}\alpha_{qq}x + x^{\mathsf{T}}\alpha_{qp}y + y^{\mathsf{T}}\alpha_{pq}x + y^{\mathsf{T}}\alpha_{pp}y,\end{aligned} \tag{5.26}$$

Здесь введён оператор Вейля

$$W(x,y) = \mathrm{e}^{\mathbb{i}x^{\mathsf{T}}y/2}\mathrm{e}^{\mathbb{i}x^{\mathsf{T}}q}\mathrm{e}^{\mathbb{i}y^{\mathsf{T}}p}. \tag{5.27}$$

Ядро оператора Вейля равно

$$\langle\xi|W(x,y)|\xi'\rangle = \exp\left[\mathbb{i}\left(\frac{\xi+\xi'}{2}\right)^{\mathsf{T}}x\right]\delta\big(y-(\xi'-\xi)\big) = \exp(\mathbb{i}u^{\mathsf{T}}x)\delta(y-v). \tag{5.28}$$

Здесь введены переменные

$$u = \frac{\xi+\xi'}{2}, \qquad v = \xi'-\xi. \tag{5.29}$$

Используя формулу инверсии квантового преобразования Фурье, получаем ядро гауссовского состояния:

$$\begin{aligned}\langle\xi|\rho_{m,\alpha}|\xi'\rangle &= \int \frac{\mathrm{d}^s x\,\mathrm{d}^s y}{(2\pi)^s}\varphi(x,y)\langle\xi|W(-x,-y)|\xi'\rangle \\ &= \int \frac{\mathrm{d}^s x}{(2\pi)^s}\exp\left[-\mathbb{i}u^{\mathsf{T}}x + \mathbb{i}m(x,-v) - \frac{1}{2}\alpha(x,-v)\right].\end{aligned} \tag{5.30}$$

Выражение под экспонентой раскладывается как

$$-\mathbb{i}m_p^{\mathsf{T}}v - \frac{1}{2}v^{\mathsf{T}}\alpha_{pp}v - \mathbb{i}\big(u^{\mathsf{T}} - m_q^{\mathsf{T}} + \mathbb{i}v^{\mathsf{T}}\alpha_{pq}\big)x - \frac{1}{2}x^{\mathsf{T}}\alpha_{qq}x. \tag{5.31}$$

Вычисляя s-мерный гауссовский интеграл, получаем

$$\begin{aligned}\langle\xi|\rho_{m,\alpha}|\xi'\rangle &= \frac{\mathrm{e}^{-\mathbb{i}m_p^{\mathsf{T}}v-\frac{1}{2}v^{\mathsf{T}}\alpha_{pp}v}}{\sqrt{(2\pi)^s\det\alpha_{qq}}} \\ &\quad\cdot\exp\left[-\frac{1}{2}\big(u-m_q+\mathbb{i}\alpha_{qp}v\big)^{\mathsf{T}}\alpha_{qq}^{-1}\big(u-m_q+\mathbb{i}\alpha_{qp}v\big)\right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^s\det\alpha_{qq}}}\exp\left[\mu(m;\xi,\xi') - \frac{1}{2}\theta(\xi,\xi')\right].\end{aligned} \tag{5.32}$$

Здесь $\mu(m;\xi,\xi')$ и $\theta(\xi,\xi')$ заданы выражениями (5.23) и (5.24). □

Пусть

$$\rho_\alpha(x) = V(x)\rho_\alpha V(x). \tag{5.33}$$

Тогда распределение вероятностей наблюдаемой (5.11) имеет плотность

$$p_\alpha(x) = \mathrm{Tr}\big(\rho_\alpha(x)\big), \tag{5.34}$$

а апостериорные состояния имеют вид

$$\widehat{\rho}_\alpha(x) = \rho_\alpha(x)/p_\alpha(x). \tag{5.35}$$

Лемма 5.2. *Плотность вероятности* (5.34) *является гауссовской:*

$$p_\alpha(x) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^s \det(\alpha_{qq}+\beta)}} \exp\left[-\frac{1}{2}x^{\mathsf{T}}(\alpha_{qq}+\beta)^{-1}x\right], \tag{5.36}$$

а апостериорные состояния (5.35) *также гауссовские:*

$$\widehat{\rho}_\alpha(x) = D(G_q x, G_p x)\rho_{\widehat{\alpha}} D(G_q x, G_p x)^\dagger, \tag{5.37}$$

где

$$G_q = \alpha_{qq}(\alpha_{qq}+\beta)^{-1}, \qquad G_p = \alpha_{pq}(\alpha_{qq}+\beta)^{-1}, \tag{5.38}$$

а $\rho_{\widehat{\alpha}}$ — центрированное гауссовское состояние с матрицей ковариаций

$$\widehat{\alpha} = \begin{bmatrix} \widehat{\alpha}_{qq} & \widehat{\alpha}_{qp} \\ \widehat{\alpha}_{pq} & \widehat{\alpha}_{pp} \end{bmatrix}, \tag{5.39}$$

элементы которой имеют вид

$$\begin{aligned} \widehat{\alpha}_{qq} &= (\alpha_{qq}^{-1}+\beta^{-1})^{-1}, \\ \widehat{\alpha}_{pp} &= \alpha_{pp} - \alpha_{pq}(\alpha_{qq}+\beta)^{-1}\alpha_{qp} + \frac{1}{4}\beta^{-1}, \\ \widehat{\alpha}_{qp} &= (\alpha_{qq}^{-1}+\beta^{-1})^{-1}\alpha_{qq}^{-1}\alpha_{qp}. \end{aligned} \tag{5.40}$$

Доказательство. Из квантовой характеристической функции состояния ρ_α получаем

$$\operatorname{Tr}\left(\rho_\alpha \mathrm{e}^{\mathrm{i}u^{\mathsf{T}}q}\right) = \exp\left[-\frac{1}{2}u^{\mathsf{T}}\alpha_{qq}u\right]. \tag{5.41}$$

Поэтому диагональные значения ядра ρ_α в координатном представлении являются обратным преобразованием Фурье:

$$\langle\xi|\rho_\alpha|\xi\rangle = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^s \det\alpha_{qq}}} \exp\left[-\frac{1}{2}\xi^{\mathsf{T}}\alpha_{qq}^{-1}\xi\right]. \tag{5.42}$$

Плотность распределения вероятностей

$$\begin{aligned} p_\alpha(x) &= \operatorname{Tr}\rho_\alpha(x) \\ &= \int \langle\xi|\rho_\alpha|\xi\rangle \exp\left[-\frac{1}{2}(\xi-x)^{\mathsf{T}}\beta^{-1}(\xi-x)\right] \frac{\mathrm{d}^s\xi}{\sqrt{(2\pi)^s\det\beta}} \end{aligned} \tag{5.43}$$

является свёрткой двух гауссовских распределений вероятностей, что даёт правую часть (5.36).

Апостериорное состояние (5.35) гауссовское, поскольку его ядро в представлении Шрёдингера имеет вид

$$\begin{aligned}\langle\xi|\widehat{\rho}_\alpha(x)|\xi'\rangle = {} & \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^s \det\beta}} \\ & \cdot \exp\left[-\frac{1}{4}(\xi-x)^{\mathsf{T}}\beta^{-1}(\xi-x) - \frac{1}{4}(\xi'-x)^{\mathsf{T}}\beta^{-1}(\xi'-x)\right] \\ & \cdot \langle\xi|\rho_\alpha|\xi'\rangle \big/ p_\alpha(x).\end{aligned} \tag{5.44}$$

Подставляя (5.20) и (5.36), получаем

$$\langle\xi|\widehat{\rho}_\alpha(x)|\xi'\rangle = \sqrt{\frac{\det(\alpha_{qq}+\beta)}{(2\pi)^s \det\alpha_{qq}\det\beta}}\exp\left[\widehat{\mu}(x;\xi,\xi') - \frac{1}{2}\widehat{\theta}(\xi,\xi')\right], \tag{5.45}$$

где

$$\begin{aligned}\widehat{\mu}(x;\xi,\xi') &= \frac{1}{2}x^{\mathsf{T}}\beta^{-1}\xi + \frac{1}{2}x^{\mathsf{T}}\beta^{-1}\xi' - \frac{1}{2}x^{\mathsf{T}}\beta^{-1}x + \frac{1}{2}x^{\mathsf{T}}(\alpha_{qq}+\beta)^{-1}x, \\ \widehat{\theta}(\xi,\xi') &= \frac{1}{2}\xi^{\mathsf{T}}\beta^{-1}\xi + \frac{1}{2}(\xi')^{\mathsf{T}}\beta^{-1}\xi' + \theta(\xi,\xi').\end{aligned} \tag{5.46}$$

Рассмотрим сначала часть, не зависящую от x. Для неё выполнено

$$\begin{aligned}\widehat{\theta}(\xi,\xi') &= \frac{1}{4}(\xi'+\xi)^{\mathsf{T}}\beta^{-1}(\xi'+\xi) + \frac{1}{4}(\xi'-\xi)^{\mathsf{T}}\beta^{-1}(\xi'-\xi) + \theta(\xi,\xi') \\ &= \frac{1}{4}(\xi'+\xi)^{\mathsf{T}}\widehat{\alpha}_{qq}^{-1}(\xi'+\xi) \\ &\quad + (\xi'-\xi)^{\mathsf{T}}\big(\widehat{\alpha}_{pp} - \widehat{\alpha}_{pq}\widehat{\alpha}_{qq}^{-1}\widehat{\alpha}_{qp}\big)(\xi'-\xi) \\ &\quad + \mathbb{i}(\xi'+\xi)^{\mathsf{T}}\widehat{\alpha}_{qq}^{-1}\widehat{\alpha}_{qp}(\xi'-\xi),\end{aligned} \tag{5.47}$$

где

$$\begin{aligned}\widehat{\alpha}_{qq}^{-1} &= \alpha_{qq}^{-1} + \beta^{-1}, \\ \widehat{\alpha}_{qq}^{-1}\widehat{\alpha}_{qp} &= \alpha_{qq}^{-1}\alpha_{qp}, \\ \widehat{\alpha}_{pp} - \widehat{\alpha}_{pq}\widehat{\alpha}_{qq}^{-1}\widehat{\alpha}_{qp} &= \alpha_{pp} - \alpha_{pq}\alpha_{qq}^{-1}\alpha_{qp} + \frac{1}{4}\beta^{-1}.\end{aligned} \tag{5.48}$$

Это даёт элементы матрицы ковариаций (5.40).

Чтобы найти апостериорные средние значения $\widehat{m}_q, \widehat{m}_p$, рассмотрим

$$\begin{aligned}\widehat{\mu}(x;\xi,\xi') &= \frac{1}{2}x^{\mathsf{T}}\beta^{-1}(\xi+\xi') - \frac{1}{2}x^{\mathsf{T}}\beta^{-1}(\alpha_{qq}^{-1}+\beta^{-1})^{-1}\beta^{-1}x \\ &= \frac{1}{2}(G_q x)^{\mathsf{T}}\widehat{\alpha}_{qq}^{-1}(\xi+\xi') - \frac{1}{2}(G_q x)^{\mathsf{T}}\widehat{\alpha}_{qq}^{-1}(G_q x),\end{aligned} \tag{5.49}$$

где $G_q = \alpha_{qq}(\alpha_{qq}+\beta)^{-1}$. Сравнивая с соответствующими членами под экспонентой в (5.22), для обоих апостериорных средних получаем

$$\widehat{m}_q = G_q x, \qquad \widehat{m}_p = \widehat{\alpha}_{pq}\widehat{\alpha}_{qq}^{-1}\widehat{m}_q. \tag{5.50}$$

Второе соотношение следует из того, что второй член в (5.22) в нашем случае нулевой. Поэтому $\widehat{m}_p = G_p x$, где $G_p = \alpha_{pq}(\alpha_{qq} + \beta)^{-1}$. □

Обозначим через $\mathfrak{S}(\alpha)$ множество всех, не обязательно центрированных, состояний ρ с матрицей ковариаций α. Мы будем изучать следующую энтропийную характеристику гауссовского измерения M:

$$\mathrm{ER}(M;\alpha) = \sup_{\rho\in\mathfrak{S}(\alpha)} \mathrm{ER}(\rho, M). \tag{5.51}$$

Она напрямую связана с пропускной способностью M при использовании сцепленности, см. раздел 5.4. Благодаря формуле (5.16), в (5.51) можно ограничиться центрированными состояниями ρ, для которых α совпадает с матрицей вторых моментов. Введём обозначение для функции

$$g(x) = (x+1)\log(x+1) - x\log x. \tag{5.52}$$

Теорема 5.3 (Гауссовский максимизатор для редукции энтропии)**.** *Супремум в* (5.51) *достигается на гауссовском состоянии* ρ_α *и равен*

$$\mathrm{ER}(M;\alpha) = \frac{1}{2}\left[\mathrm{Sp}\ g\left(|\Delta^{-1}\alpha| - \frac{\mathbf{1}_{2s}}{2}\right) - \mathrm{Sp}\ g\left(|\Delta^{-1}\widehat{\alpha}| - \frac{\mathbf{1}_{2s}}{2}\right)\right]. \tag{5.53}$$

Здесь Sp *обозначает след матриц, чтобы отличать его от следа операторов* Tr*,* $\mathbf{1}_{2s}$ *— единичная* $2s\times 2s$*-матрица,* $\widehat{\alpha}$ *задана формулой* (5.40)*, а* $|\Delta^{-1}\alpha|$ *обозначает матрицу с собственными значениями, равными модулям собственных значений* $\Delta^{-1}\alpha$*, и с теми же собственными векторами.*

Доказательство. Пусть ρ — центрированный оператор плотности из $\mathfrak{S}(\alpha)$. Обозначим

$$\rho(x) = V(x)\rho V(x), \qquad p(x) = \mathrm{Tr}\,\rho(x). \tag{5.54}$$

Также рассмотрим канал

$$\mathcal{E}[\rho] = \{V(x)\rho V(x)\}_{x\in\mathbb{R}^s} \tag{5.55}$$

с квантовым входом и гибридным классически-квантовым выходом. Для гауссовского состояния ρ_α получается

$$\begin{aligned}\mathrm{ER}(\rho_\alpha, M) - \mathrm{ER}(\rho, M) = {}& \mathrm{H}(\rho\|\rho_\alpha) + \mathrm{Tr}(\rho-\rho_\alpha)\log\rho_\alpha \\ & - \mathrm{H}_{\mathrm{cq}}\big(\mathcal{E}[\rho]\|\mathcal{E}[\rho_\alpha]\big) + \mathrm{H}_{\mathrm{c}}(p\|p_\alpha) \\ & + \int \mathrm{Tr}\big(\rho_\alpha(x) - \rho(x)\big)\log\widehat{\rho}_\alpha(x)\,\mathrm{d}^s x.\end{aligned} \tag{5.56}$$

Здесь $\mathrm{H}(\rho\|\rho_\alpha)$ — квантовая относительная энтропия состояний ρ и ρ_α,

$$\mathrm{H_c}(p\|p_\alpha) = \int p(x)\log\left(\frac{p(x)}{p_\alpha(x)}\right)\mathrm{d}^s x \tag{5.57}$$

— классическая относительная энтропия плотностей вероятностей p и p_α, а

$$\mathrm{H_{cq}}\big(\mathcal{E}[\rho]\|\mathcal{E}[\rho_\alpha]\big) = \int \mathrm{Tr}\,\rho(x)\big(\log\rho(x) - \log\rho_\alpha(x)\big)\,\mathrm{d}^s x \tag{5.58}$$

— относительная энтропия классически-квантовых состояний [80, формула (3)].

Из монотонности относительной энтропии классически-квантовых состояний [80, теорема 1] следует

$$\mathrm{H_{cq}}\big(\mathcal{E}[\rho]\|\mathcal{E}[\rho_\alpha]\big) \leqslant \mathrm{H}(\rho\|\rho_\alpha), \tag{5.59}$$

поэтому для первых трёх слагаемых в правой части (5.56)

$$\mathrm{H}(\rho\|\rho_\alpha) - \mathrm{H_{cq}}\big(\mathcal{E}[\rho]\|\mathcal{E}[\rho_\alpha]\big) + \mathrm{H_c}(p\|p_\alpha) \geqslant 0. \tag{5.60}$$

Без ограничения общности можно считать, что ρ_α невырождена, так что $\log\rho_\alpha$ существует и является многочленом второго порядка от q, p. Это следует из экспоненциального вида оператора плотности [19, теорема 12.23]. Поскольку первые и вторые моменты состояний ρ и ρ_α совпадают,

$$\mathrm{Tr}(\rho - \rho_\alpha)\log\rho_\alpha = 0. \tag{5.61}$$

Остаётся показать, что

$$\int \mathrm{Tr}\big(\rho_\alpha(x) - \rho(x)\big)\log\widehat{\rho}_\alpha(x)\,\mathrm{d}^s x = 0. \tag{5.62}$$

Подставляя апостериорное состояние (5.37) в левую часть (5.62), получаем

$$\begin{aligned}\int \mathrm{Tr}\big(\rho_\alpha(x) - \rho(x)\big)\log\widehat{\rho}_\alpha(x)\,\mathrm{d}^s x &= \mathrm{Tr}\,\Phi_M[\rho_\alpha - \rho]\log\rho_{\widehat{\alpha}} \\ &= \mathrm{Tr}(\rho_\alpha - \rho)\Phi_M^*[\log\rho_{\widehat{\alpha}}],\end{aligned} \tag{5.63}$$

где введён канал

$$\Phi_M[\sigma] = \int D(G_q x, G_p x)^\dagger V(x)\sigma V(x) D(G_q x, G_p x)\,\mathrm{d}^s x. \tag{5.64}$$

Канал Φ_M является гауссовским. Во-первых, это вполне положительное сохраняющее след отображение: полная положительность следует из структуры (5.64), а сохранение следа видно из

$$\Phi_M^*[\mathbf{1}] = \int V(x)^2\,\mathrm{d}^s x = \int M(\mathrm{d}^s x) = \mathbf{1}. \tag{5.65}$$

Прямое вычисление показывает, что если σ — гауссовское состояние, то $\Phi_M[\sigma]$ снова является гауссовским. Поэтому, согласно результату [128], канал Φ_M гауссовский.

Поскольку $\rho_{\widehat{\alpha}}$ — гауссовское состояние, $\log \rho_{\widehat{\alpha}}$ является многочленом второго порядка по q, p. Сопряжённый гауссовский канал Φ_M^* переводит этот многочлен в другой многочлен второго порядка по q, p [19, раздел 12.4.2]. Так как первые и вторые моменты состояний ρ и ρ_α совпадают, получаем (5.62). Из (5.56), (5.60), (5.61) и (5.62) следует

$$\mathrm{ER}(\rho_\alpha, M) - \mathrm{ER}(\rho, M) \geqslant 0 \tag{5.66}$$

для произвольного $\rho \in \mathfrak{S}(\alpha)$. Это доказывает, что супремум (5.51) достигается на гауссовском состоянии ρ_α.

Принимая во внимание формулу (5.37) для апостериорных состояний, получаем

$$\begin{aligned}
\mathrm{ER}(M;\alpha) &= \mathrm{ER}(\rho_\alpha, M) \\
&= \mathrm{H}(\rho_\alpha) - \int_{\mathbb{R}^s} p_\alpha(x)\, \mathrm{H}\big(\widehat{\rho}_\alpha(x)\big)\, \mathrm{d}^s x \\
&= \mathrm{H}(\rho_\alpha) - \int_{\mathbb{R}^s} p_\alpha(x)\, \mathrm{H}\big(D(G_q x, G_p x)^\dagger \rho_{\widehat{\alpha}} D(G_q x, G_p x)\big)\, \mathrm{d}^s x \\
&= \mathrm{H}(\rho_\alpha) - \mathrm{H}(\rho_{\widehat{\alpha}}).
\end{aligned} \tag{5.67}$$

Тогда (5.53) следует из формулы энтропии гауссовского состояния [19, формула (12.110)]:

$$\mathrm{H}(\rho_\alpha) = \frac{1}{2}\,\mathrm{Sp}\; g\left(|\Delta^{-1}\alpha| - \frac{\mathbf{1}_{2s}}{2}\right). \tag{5.68}$$

□

5.4. Пропускная способность с использованием сцепленности

Рассмотрим квадратичный гамильтониан вида

$$H = q^{\mathsf{T}} \varepsilon_{qq} q + q^{\mathsf{T}} \varepsilon_{qp} p + p^{\mathsf{T}} \varepsilon_{pq} q + p^{\mathsf{T}} \varepsilon_{pp} p, \tag{5.69}$$

где

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_{qq} & \varepsilon_{qp} \\ \varepsilon_{pq} & \varepsilon_{pp} \end{bmatrix} \tag{5.70}$$

— вещественная положительно определённая матрица энергии. Теоретическая важность величины (5.51) объясняется тем, что она входит в формулу для пропускной способности с использованием сцепленности при ограничении на энергию [21]:

$$\mathrm{C_{ea}}(M; H, E) = \max_{\rho\colon \mathrm{Tr}(\rho H)\leqslant E} \mathrm{ER}(\rho, M), \tag{5.71}$$

где E — уровень энергии. Для любого состояния $\rho \in \mathfrak{S}(\alpha)$ средняя энергия равна

$$\mathrm{Tr}(\rho H) = \mathrm{Sp}(\varepsilon\alpha_2) \geqslant \mathrm{Sp}(\varepsilon\alpha), \tag{5.72}$$

где α_2 — матрица вторых моментов ρ; равенство достигается на центрированных состояниях. Поэтому

$$\mathrm{C_{ea}}(M; H, E) = \max_{\alpha\colon \mathrm{Sp}(\varepsilon\alpha)\leqslant E} \mathrm{ER}(M; \alpha). \tag{5.73}$$

Легко проверить, что

$$\sup_{\alpha} \mathrm{ER}(M; \alpha) = +\infty. \tag{5.74}$$

Поэтому применима теорема 1 из [21], показывающая, что максимум в (5.73) достигается на α, удовлетворяющей условию $\mathrm{Sp}(\varepsilon\alpha) = E$.

В случае гамильтониана осцилляторного типа

$$H = q^{\mathsf{T}}\varepsilon_{qq}q + p^{\mathsf{T}}\varepsilon_{pp}p \tag{5.75}$$

ограничение на энергию имеет вид

$$\mathrm{Sp}(\varepsilon_{qq}\alpha_{qq}) + \mathrm{Sp}(\varepsilon_{pp}\alpha_{pp}) \leqslant E. \tag{5.76}$$

Поэтому максимизацию в (5.73) можно проводить по блочно-диагональным матрицам α, удовлетворяющим (5.76) с равенством. Чтобы это увидеть, рассмотрим преобразование

$$T\colon q_j \mapsto q_j, \qquad p_j \mapsto -p_j, \tag{5.77}$$

которое меняет знак коммутаторов между q_j и p_j и реализуется антиунитарным оператором комплексного сопряжения в представлении Шрёдингера. Если ρ — центрированное состояние с матрицей ковариаций α, то для неё выполнено соотношение неопределённостей

$$\alpha = \begin{bmatrix} \alpha_{qq} & \alpha_{qp} \\ \alpha_{pq} & \alpha_{pp} \end{bmatrix} \geqslant \pm\frac{\mathbb{i}}{2} \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{1}_s \\ -\mathbf{1}_s & 0 \end{bmatrix} \tag{5.78}$$

где $\mathbf{1}_s$ обозначает единичную $s \times s$-матрицу. Тогда $T[\rho]$ обладает матрицей ковариаций

$$\widetilde{\alpha} = \begin{bmatrix} \alpha_{qq} & -\alpha_{qp} \\ -\alpha_{pq} & \alpha_{pp} \end{bmatrix} \geqslant \mp\frac{\mathbb{i}}{2} \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{1}_s \\ -\mathbf{1}_s & 0 \end{bmatrix}, \tag{5.79}$$

поскольку это матрица ковариаций для $q_j, -p_j$. Статистическая смесь $\frac{1}{2}(\rho + T[\rho])$ имеет матрицу ковариаций

$$\begin{bmatrix} \alpha_{qq} & 0 \\ 0 & \alpha_{pp} \end{bmatrix} = \frac{1}{2}(\alpha + \widetilde{\alpha}) \geqslant \pm\frac{\mathbb{i}}{2} \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{1}_s \\ -\mathbf{1}_s & 0 \end{bmatrix}, \tag{5.80}$$

в то время как

$$\mathrm{ER}\left(\frac{1}{2}(\rho + T[\rho]), M\right) \geqslant \frac{1}{2}\big[\mathrm{ER}(\rho, M) + \mathrm{ER}(T[\rho], M)\big] = \mathrm{ER}(\rho, M) \tag{5.81}$$

по вогнутости редукции энтропии и её инвариантности при преобразовании T.

5.5. Случай одной моды

Рассмотрим приближённое измерение координаты в одной бозонной моде q, p. Соответствующая операторно-значная мера имеет вид

$$M(\mathrm{d}x) = \exp\left[-\frac{(q-x)^2}{2\beta}\right] \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{2\pi\beta}} = D(x)\mathrm{e}^{-q^2/(2\beta)} D(x)^\dagger \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{2\pi\beta}}, \tag{5.82}$$

где $\beta > 0$. Распределение вероятностей гауссовского состояния ρ_α равно

$$\mathrm{Tr}\big(\rho_\alpha M(\mathrm{d}x)\big) = \exp\left[-\frac{x^2}{2(\alpha_{qq}+\beta)}\right] \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{2\pi(\alpha_{qq}+\beta)}} = p_\alpha(x)\,\mathrm{d}x, \tag{5.83}$$

где 2×2-матрица ковариаций (5.18) задаётся вещественными числами $\alpha_{qq}, \alpha_{qp}, \alpha_{pp}$, удовлетворяющими условию

$$\alpha_{qq}\alpha_{pp} - \alpha_{qp}^2 \geqslant \frac{1}{4}. \tag{5.84}$$

Формула энтропии (5.68) принимает вид [19, пример 12.25]

$$\mathrm{H}(\rho_\alpha) = g\left(\sqrt{\alpha_{qq}\alpha_{pp} - \alpha_{qp}^2} - \frac{1}{2}\right). \tag{5.85}$$

Согласно (5.40), апостериорные состояния имеют 2×2-матрицу ковариаций $\widehat{\alpha}$ с элементами

$$\widehat{\alpha}_{qq} = \frac{\alpha_{qq}\beta}{\alpha_{qq}+\beta}, \qquad \widehat{\alpha}_{pp} = \left(\alpha_{pp} - \frac{\alpha_{qp}^2}{\alpha_{qq}+\beta}\right) + \frac{1}{4\beta}, \qquad \widehat{\alpha}_{qp} = \frac{\alpha_{qp}\beta}{\alpha_{qq}+\beta}. \tag{5.86}$$

Тогда теорема 5.3 даёт

$$\begin{aligned} \mathrm{ER}(M;\alpha) &= g\left(\sqrt{\alpha_{qq}\alpha_{pp}-\alpha_{qp}^2} - \frac{1}{2}\right) - g\left(\sqrt{\widehat{\alpha}_{qq}\widehat{\alpha}_{pp}-\widehat{\alpha}_{qp}^2} - \frac{1}{2}\right) \\ &= g\left(\sqrt{\alpha_{qq}\alpha_{pp}-\alpha_{qp}^2} - \frac{1}{2}\right) \\ &\quad - g\left(\sqrt{\frac{\alpha_{qq}(\beta\alpha_{pp}+1/4)-\beta\alpha_{qp}^2}{\alpha_{qq}+\beta}} - \frac{1}{2}\right). \end{aligned} \tag{5.87}$$

Для гамильтониана осциллятора

$$H = \frac{1}{2}(q^2+p^2) \tag{5.88}$$

ограничение по энергии имеет вид $\alpha_{qq}+\alpha_{pp} \leqslant 2E$, а пропускная способность с использованием сцепленности (5.73) равна

$$\mathrm{C_{ea}}(M;H,E) = \max\left[g\left(\sqrt{\alpha_{qq}\alpha_{pp}} - \frac{1}{2}\right) - g\left(\sqrt{\frac{\alpha_{qq}(\beta\alpha_{pp}+1/4)}{\alpha_{qq}+\beta}} - \frac{1}{2}\right)\right]. \tag{5.89}$$

Максимум берётся по положительным α_{qq}, α_{pp}, удовлетворяющим

$$\alpha_{qq}+\alpha_{pp} = 2E, \qquad \alpha_{qq}\alpha_{pp} \geqslant \frac{1}{4}, \tag{5.90}$$

при $\alpha_{qp} = 0$. График $\mathrm{C_{ea}}$ при различных β представлен на рисунке 5.1.

Теперь исследуем предел $\beta \to 0$, соответствующий точному измерению координаты:

$$M_{\mathrm{ex}}(\mathrm{d}x) = |x\rangle\langle x|\,\mathrm{d}x. \tag{5.91}$$

Это спектральная мера оператора q. Строго говоря, она не имеет вид (5.2), то есть не обладает ограниченной операторно-значной плотностью. В пределе $\beta \to 0$ выполнено

$$\mathrm{ER}(M;\alpha) \longrightarrow g\left(\sqrt{\alpha_{qq}\alpha_{pp}-\alpha_{qp}^2} - \frac{1}{2}\right). \tag{5.92}$$

Получаем пропускную способность с использованием сцепленности

$$\mathrm{C_{ea}}(M_{\mathrm{ex}};H,E) = \max g\left(\sqrt{\alpha_{qq}\alpha_{pp}} - \frac{1}{2}\right), \tag{5.93}$$

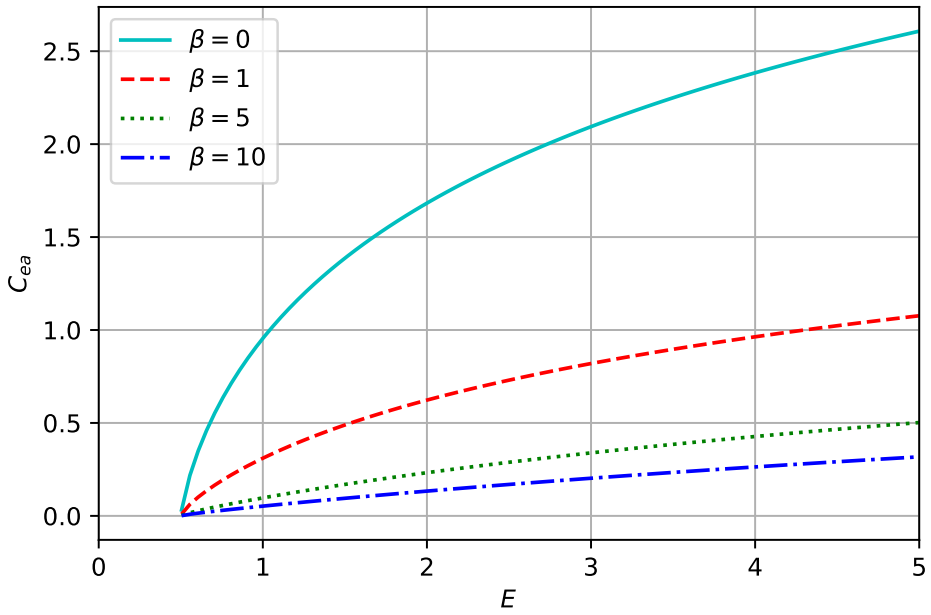


Рисунок 5.1 — График пропускной способности с использованием сцепленности $\mathrm{C_{ea}}(E)$ при $\beta = 0, 1, 5, 10$.

где максимум берётся по положительным α_{qq}, α_{pp}, удовлетворяющим

$$\alpha_{qq} + \alpha_{pp} = 2E, \qquad \alpha_{qq}\alpha_{pp} \geqslant \frac{1}{4}. \tag{5.94}$$

Благодаря вогнутости $g(x)$ максимум достигается при $\alpha_{qq} = \alpha_{pp} = E$ и равен

$$\mathrm{C_{ea}}(M_{\mathrm{ex}}; H, E) = g(E - 1/2). \tag{5.95}$$

В работе [86] измерение (5.91) рассматривалось вместе с реализующим его инструментом

$$\mathcal{M}_{\mathrm{ex}}[\rho](\mathrm{d}x) = |e\rangle\langle x|\,\rho\,|x\rangle\langle e|\,\mathrm{d}x, \tag{5.96}$$

где $|e\rangle$ — произвольный единичный вектор. Здесь $V(x) = |e\rangle\langle x|$ является неограниченным и даже незамыкаемым оператором. Апостериорное состояние $|e\rangle\langle e|$ чистое и обладает нулевой энтропией, в результате чего $\mathrm{ER}(M_{\mathrm{ex}}; \rho) = \mathrm{H}(\rho)$. Поэтому

$$\mathrm{ER}(M_{\mathrm{ex}}; \alpha) = \mathrm{H}(\rho_\alpha) = g\left(\sqrt{\alpha_{qq}\alpha_{pp} - \alpha_{qp}^2} - \frac{1}{2}\right), \tag{5.97}$$

что согласуется с (5.92) и приводит к пропускной способности (5.95).

Рассмотрим другую реализацию точного измерения координаты — сжатое совместное измерение q и p, описываемое операторно-значной мерой

$$M_{\mathrm{sq}}(\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y) = |x, y\rangle_{\beta\beta}\langle x, y|\frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{2\pi} = D(x, y)\rho_{\mathrm{sq},\beta}D(x, y)^\dagger\frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{2\pi}, \tag{5.98}$$

где $\rho_{\mathrm{sq},\beta}$ — сжатый вакуум с матрицей ковариаций

$$\begin{bmatrix} \beta & 0 \\ 0 & 1/(4\beta) \end{bmatrix}. \tag{5.99}$$

Тогда

$$\int_{y\in\mathbb{R}} M_{\mathrm{sq}}(\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y) = M(\mathrm{d}x). \tag{5.100}$$

Чтобы в этом убедиться, достаточно показать, что

$$\int_{\mathbb{R}} D(x,y)\rho_{\mathrm{sq},\beta}D(x,y)^{\dagger}\frac{\mathrm{d}y}{2\pi} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\beta}}\exp\left[-\frac{(q-x)^2}{2\beta}\right]. \tag{5.101}$$

И действительно, в координатном представлении

$$\begin{aligned}\langle\xi|\int_{\mathbb{R}} D(x,y)\rho_{\mathrm{sq},\beta}D(x,y)^{\dagger}\frac{\mathrm{d}y}{2\pi}|\xi'\rangle &= \delta(\xi-\xi')\langle\xi-x|\rho_{\mathrm{sq},\beta}|\xi-x\rangle \\ &= \langle\xi|\xi'\rangle\langle\xi-x|\rho_{\mathrm{sq},\beta}|\xi-x\rangle.\end{aligned} \tag{5.102}$$

и классическая характеристическая функция имеет вид

$$\int_{\mathbb{R}}\langle\xi|\rho_{\mathrm{sq},\beta}|\xi\rangle \mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi\lambda}\,\mathrm{d}\xi = \mathrm{Tr}\big(\rho_{\mathrm{sq},\beta}\mathrm{e}^{\mathrm{i}q\lambda}\big) = \exp\left[-\frac{1}{2}\beta\lambda^2\right], \tag{5.103}$$

поэтому

$$\langle\xi-x|\rho_{\mathrm{sq},\beta}|\xi-x\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi\beta}}\exp\left[-\frac{(\xi-x)^2}{2\beta}\right], \tag{5.104}$$

что доказывает (5.101).

Аналогично (5.97), выполнено

$$\mathrm{ER}(M_{\mathrm{sq}};\alpha) = \mathrm{H}(\rho_\alpha) = g\left(\sqrt{\alpha_{qq}\alpha_{pp}-\alpha_{qp}^2}-\frac{1}{2}\right). \tag{5.105}$$

Разница между этим выражением и (5.87) свидетельствует о потере информации из-за усреднения по импульсам (5.100).

Выводы по главе 5

В этой главе исследовались свойства величин редукции энтропии и пропускной способности с использованием сцепленности для приближённых измерений координаты в многомодовых бозонных системах. Было доказано свойство гауссовского максимизатора для величины редукции энтропии и получен явный вид пропускной способности с использованием сцепленности.

Глава 6. Минимально информационно полные квазивероятностные представления в некоммутативной теории вероятностей

Задача исследования эффективного описания квантовой динамики играет значительную роль как в изучении фундаментальных аспектов квантовой физики [129], так и в изучении потенциальных приложений [130]. В частности, важно двигаться в сторону прояснения роли неклассических явлений, чтобы понять происхождение преимуществ квантовых систем в квантовых коммуникациях и квантовых вычислениях [75]. Этот вопрос нетривиален, в том числе потому, что общепринятые описания квантовых состояний отличаются от языка классической статистической физики, использующей распределения вероятностей.

Было предпринято множество попыток построить описание квантовых систем с использованием аналогов распределений вероятностей, прежде всего основанных на идее функции Вигнера [131—138]. Функцию Вигнера не всегда удаётся интерпретировать как распределение вероятностей, поскольку она может принимать отрицательные значения, однако её отрицательность можно исследовать как ресурс, обеспечивающий квантовое ускорение при решении вычислительных задач [117; 139—145]. Квазивероятностные распределения другого типа, такие как функции Глаубера–Сударшана [132; 133] и Хусими [136], также активно используются для описания квантовых систем с непрерывными переменными. Кроме того, квантовые явления можно описывать на языке томографических представлений [146—149], представляющих собой параметризованные семейства распределений вероятностей. Квантовые томограммы связаны с функциями Вигнера посредством преобразования Радона [150]. Задачи квантовой томографии, в свою очередь, существенно связаны с вопросом полноты квантовых измерений [150; 151].

Достижения в понимании различных типов квантовых измерений позволили сформулировать несколько важных концепций. В частности, состояния квантовых систем могут быть описаны распределениями вероятностей, полученными при помощи информационно полных квантовых измерений (IC) [151; 152]. Измерения в квантовой механике представлены положительными операторно-значными мерами (POVM), а для полной характеризации квантового состояния требуется использовать так называемые информационно полные измерения (IC-POVM) [151—153]. Этот вопрос связан с идеей использования единственного измерительно-

го аппарата для характеризации квантового состояния [152] и с представлением Хусими для квантовых систем с непрерывными переменными [136]. Вероятностные и статистические структуры, лежащие в основе квантовой теории, подробно изучались также в [74; 151; 152].

Важным частным случаем информационно полных измерений являются их симметричные версии — симметрические информационно полные положительные операторно-значные меры (SIC-POVM), для которых все попарные внутренние произведения между элементами операторно-значной меры равны. SIC-POVM применяются в квантовой томографии [148; 154], квантовой криптографии [155] и квантовых вычислениях на основе измерений [156]. Кроме того, идея SIC-POVM активно используется в байесовской переформулировке квантовой механики [153; 154; 157; 158]. Часть классического вероятностного симплекса, достижимая при измерении SIC-POVM, называется квантовым симплексом (*qplex*) [159].

Формализм SIC-POVM-представления можно расширить для описания динамики конечномерных квантовых систем. В отличие от обычных квазивероятностных представлений, квантовые системы здесь описываются положительными нормированными распределениями вероятностей, полученными при помощи SIC-POVM [22]. Эти распределения эволюционируют под действием квазистохастических отображений — то есть отображений, задаваемых вещественными матрицами с нормированными столбцами, которые могут содержать отрицательные элементы. Такая идея позволяет связать квантовость с наличием отрицательных условных вероятностей и исследовать неклассические свойства квантовой динамики и измерительных процессов [23]. В этом формализме можно получить динамические уравнения как для унитарной эволюции матриц плотности, описываемой уравнением Лиувилля–фон Неймана, так и для диссипативной марковской динамики, задаваемой генератором ГКСЛ [22]. Кроме того, числовые характеристики немарковости квантовых процессов могут быть применены к исследованию существующих квантовых вычислительных устройств. Однако данный подход сталкивается с вопросом о существовании SIC-POVM в произвольной размерности: аналитические и численные конструкции известны лишь в ряде размерностей (см. обзор [160]). Поэтому представление, основанное только на SIC-POVM, неудобно для анализа многокубитных систем с произвольным числом кубитов.

В этой главе мы представляем обобщение вероятностного представления квантовой динамики с использованием минимальных информационно полных из-

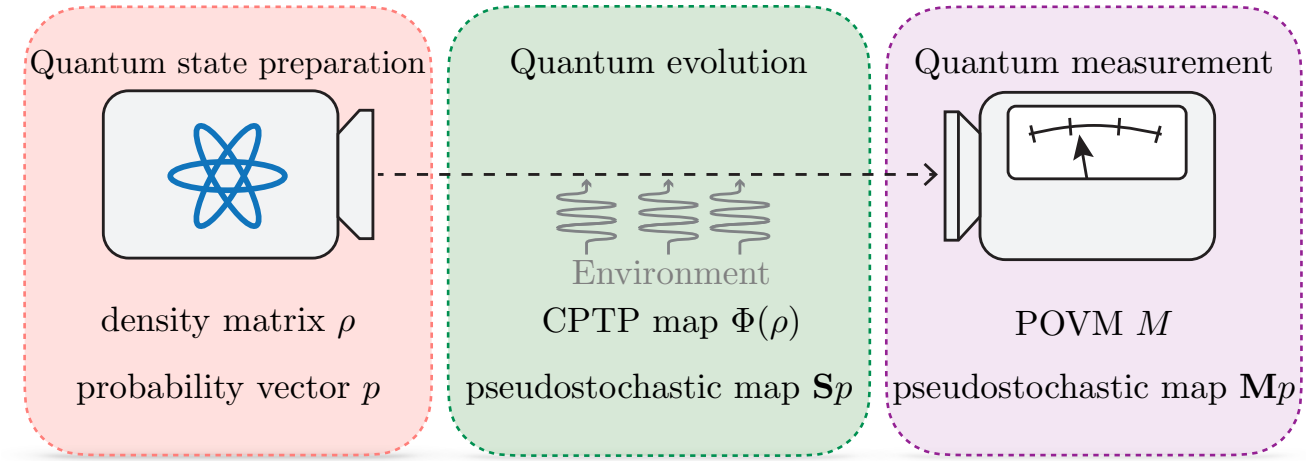


Рисунок 6.1 — Квантовая динамика в стандартном формализме описывается квантовым каналом Φ, действующим на матрицу плотности ρ, а измерительный процесс — положительной операторно-значной мерой M. В вероятностном представлении на основе MIC-POVM квазистохастическая матрица $\mathbf{S}$ действует на распределение вероятностей p, а процесс измерения описывается квазистохастической матрицей $\mathbf{M}$.

мерений (MIC-POVM), являющихся важным классом квантовых измерений [161—165]. Для d-мерного гильбертова пространства информационно полная операторно-значная мера называется минимальной, если она содержит ровно d^2 линейно независимых элементов. Мы строим квазистохастические отображения, действующие на распределения вероятностей, полученные при помощи MIC-POVM. Этот подход обобщает представление, основанное на SIC-POVM [22], и обладает рядом полезных свойств. Во-первых, он сохраняет структуру тензорного произведения, что важно для описания многокубитных систем. Во-вторых, MIC-POVM проще строить, чем SIC-POVM. Соотношение между стандартным формализмом и вероятностным представлением схематически показано на рисунке 6.1. Используя вероятностное представление на основе MIC-POVM, мы выводим динамические уравнения как для унитарной эволюции фон Неймана, так и для марковской диссипативной эволюции, управляемой генератором ГКСЛ. Это обобщает результаты по описанию унитарной динамики квантовых систем на вероятностном языке [161].

Предложенный подход может применяться к анализу вычислительных процессов класса NISQ (noisy intermediate-scale quantum — шумные квантовые устройства промежуточного масштаба) и построению квазистохастических отображений для различных каналов декогеренции и квантовых вентилей. В таком

описании квантовые вычисления интерпретируются как действие квазистохастических отображений на битовые строки, причём квантовое ускорение связано с наличием отрицательных элементов в соответствующих квазистохастических матрицах.

Глава организована следующим образом. В разделе 6.1 строится вероятностное представление квантовой механики на основе MIC-POVM. В разделе 6.2 выводятся уравнения квантовой динамики в этом представлении. Итоги и направления дальнейшей работы приведены в разделе 6.2.3.

6.1. Вероятностное представление с использованием MIC-POVM

В этом разделе строится вероятностное представление конечномерной квантовой механики, основанное на минимальных информационно полных измерениях. Сначала мы рассмотрим представление состояний, затем — их эволюции, описываемой квантовым каналом, после чего обсудим представление квантовых измерений и переход между различными MIC-POVM-представлениями. Отдельно будет показано, как такой формализм согласуется со структурой тензорного произведения. Краткое соответствие между стандартным и вероятностным формализмами приведено в таблице 6.1.

6.1.1. Определения и обозначения

Пусть $\mathcal{H}$ — d-мерное гильбертово пространство. Мы пользуемся обозначениями главы 1: $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$ — алгебра ограниченных операторов, $\mathfrak{T}(\mathcal{H})$ — пространство ядерных операторов, $\mathbb{M}_{n\times k}(\mathbb{F})$ — пространство $n \times k$-матриц над полем $\mathbb{F}$. Множество состояний обозначается $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$, множество чистых состояний — $\mathfrak{S}_{\mathrm{p}}(\mathcal{H})$, множество эффектов — $\mathfrak{E}(\mathcal{H})$ (подраздел 1.3.1). Квантовый канал $\Phi\colon \mathfrak{S}(\mathcal{H}^{\mathrm{in}}) \to \mathfrak{S}(\mathcal{H}^{\mathrm{out}})$ — вполне положительное сохраняющее след отображение (подраздел 1.3.2).

Измерения (POVM), правило Борна, а также минимальные информационно полные (MIC-POVM) и симметрические (SIC-POVM) измерения определены

Таблица 6.1 — Соответствие между стандартным формализмом и формализмом на основе минимальных информационно полных измерений.

	Стандартный формализм	**MIC-POVM-формализм**
Состояние	матрица плотности $\rho \in \mathfrak{S}(\mathcal{H})$	вероятностный вектор $p \in \mathfrak{P}(E)$
Эволюция	квантовый канал $\Phi\colon \mathfrak{S}(\mathcal{H}^{\text{in}}) \to \mathfrak{S}(\mathcal{H}^{\text{out}})$	квазистохастическая матрица $\mathbf{S} \in \mathbb{M}_{d_{\text{out}}^2 \times d_{\text{in}}^2}(\mathbb{R})$
Измерение	POVM $M = \{M_i\}_{i=1}^m$, $M_i \in \mathfrak{E}(\mathcal{H})$	квазистохастическая матрица $\mathbf{M} \in \mathbb{M}_{m \times d^2}(\mathbb{R})$
Тензорное произведение	$\rho^{AB} = \rho^A \otimes \rho^B$, $\Phi^{AB} = \Phi^A \otimes \Phi^B$, $M^{AB} = \{M_i^A \otimes M_j^B\}$	$p^{AB} = p^A \otimes p^B$, $\mathbf{S}^{AB} = \mathbf{S}^A \otimes \mathbf{S}^B$, $\mathbf{M}^{AB} = \mathbf{M}^A \otimes \mathbf{M}^B$

в подразделе 1.3.3. Для измерения $E = \{E_1, \ldots, E_m\}$ отвечающее состоянию ρ распределение вероятностей мы записываем как вектор-столбец

$$p = \begin{bmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_m \end{bmatrix}, \qquad p_k = \mathrm{Tr}(\rho E_k), \tag{6.1}$$

где T обозначает транспонирование. Если E — MIC-POVM, то она содержит d^2 элементов и каждое состояние ρ полностью определяется вектором p; множество всех таких векторов при фиксированном E обозначим через $\mathfrak{P}(E)$.

Поскольку MIC-POVM и SIC-POVM полностью определяют квантовые состояния посредством распределений вероятностей, для описания динамики необходимо найти отображения, действующие непосредственно на эти распределения. Положительных стохастических отображений для этого недостаточно: соответствующие квантовой динамике матрицы в общем случае должны быть квазистохастическими [22; 23; 166; 167].

Напомним, что стохастической называется матрица $M \in \mathbb{M}_{n \times k}(\mathbb{R})$ с неотрицательными элементами, каждый столбец которой суммируется к единице:

$$M_{ij} \geqslant 0, \qquad \sum_{i=1}^{n} M_{ij} = 1, \quad j = 1, \ldots, k. \tag{6.2}$$

При $n = k$ матрица называется бистохастической, если также каждая строка суммируется к единице. Бистохастическое отображение оставляет неподвижным

равномерное распределение $[1/n, \ldots, 1/n]^{\mathsf{T}}$. Квазистохастической называется вещественная матрица, столбцы которой суммируются к единице, но элементы могут быть отрицательными. Квадратная квазистохастическая матрица, строки которой также суммируются к единице, называется *квазибистохастической*.

6.1.2. Представление состояний

Рассмотрим MIC-POVM $E = \{E_k\}_{k=1}^{d^2}$ в d-мерном гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$. Между $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$ и $\mathfrak{T}(\mathcal{H})$ существует каноническая двойственность, задаваемая билинейной формой $(B, \rho) \mapsto \mathrm{Tr}(\rho B)$. Поскольку E образует линейный базис в $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$, существует двойственный базис $e = \{e_i\}_{i=1}^{d^2}$ в $\mathfrak{T}(\mathcal{H})$, для которого $\mathrm{Tr}(E_l e_k) = \delta_{lk}$. Его элементы имеют вид

$$e_l = \sum_{k=1}^{d^2} (T^{-1})_{lk} E_k, \qquad T_{nm} = \mathrm{Tr}(E_n E_m), \tag{6.3}$$

где T — матрица Грама измерения E относительно скалярного произведения Гильберта–Шмидта. Произвольное состояние $\rho \in \mathfrak{S}(\mathcal{H})$ представляется как

$$\rho = \sum_{k=1}^{d^2} p_k e_k, \qquad p_k = \mathrm{Tr}(\rho E_k). \tag{6.4}$$

Для SIC-POVM матрица Грама и её обратная имеют вид

$$T_{nm} = \frac{d\delta_{nm} + 1}{d^2(d+1)}, \qquad (T^{-1})_{nm} = d(d+1)\delta_{nm} - 1. \tag{6.5}$$

Пусть p и s — вероятностные векторы, соответствующие операторам плотности ρ и σ. Тогда вероятностное представление скалярного произведения Гильберта–Шмидта имеет вид

$$\mathrm{Tr}(\rho\,\sigma) = \sum_{n,m=1}^{d^2} p_n s_m \,\mathrm{Tr}(e_n e_m) = s^{\mathsf{T}} T^{-1} p, \tag{6.6}$$

а аналог матричного умножения, называемый произведением Мойала, определяется формулой

$$(s \star p)_k \coloneqq \mathrm{Tr}(\sigma \rho E_k) = \sum_{n,m=1}^{d^2} \mathrm{Tr}(e_n e_m E_k) s_n p_m = s^{\mathsf{T}} \Lambda^{(k)} p. \tag{6.7}$$

Здесь $\Lambda_{nm}^{(k)} = \mathrm{Tr}(e_n e_m E_k)$ — тензор структурных коэффициентов размера $d^2 \times d^2 \times d^2$.

Операторы e_k имеют единичный след, но не обязаны (и не могут) быть положительными. Поэтому не всякий вероятностный вектор соответствует квантовому состоянию. Множество допустимых распределений равно

$$\mathfrak{P}(E) = \left\{ p \;\middle|\; \sum_{k=1}^{d^2} p_k = 1, \quad \sum_{k=1}^{d^2} p_k e_k \geqslant 0 \right\}. \tag{6.8}$$

Его иногда называют квантовым симплексом, или *qplex* [159]. Множество распределений, соответствующих чистым состояниям, имеет вид

$$\mathfrak{P}_{\mathrm{p}}(E) = \left\{ p \;\middle|\; \sum_{k=1}^{d^2} p_k = 1, \quad p \star p = p \right\}. \tag{6.9}$$

Выпуклая оболочка $\mathfrak{P}_{\mathrm{p}}(E)$ совпадает с $\mathfrak{P}(E)$. Их взаимное расположение внутри полного вероятностного симплекса $\mathfrak{X}$ схематически показано на рисунке 6.2.

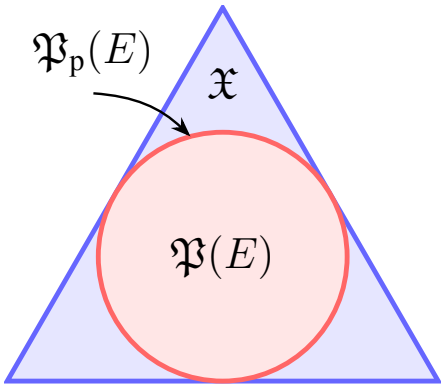


Рисунок 6.2 — Схематическая диаграмма взаимного расположения полного симплекса распределений $\mathfrak{X}$, квантового симплекса $\mathfrak{P}(E)$ и его границы чистых состояний $\mathfrak{P}_{\mathrm{p}}(E)$. Симплекс изображён треугольником, поскольку имеет конечное число крайних точек, тогда как $\mathfrak{P}(E)$ имеет гладкую границу и условно показан кругом.

Поскольку $\mathfrak{P}(E)$ занимает только часть (d^2-1)-мерного симплекса $\mathfrak{X}$, полезно иметь способ проверить, принадлежит ли данное распределение p множеству $\mathfrak{P}(E)$. Самый прямой путь — восстановить ρ по формуле (6.4) и проверить условие $\rho \geqslant 0$. Однако возможен и критерий, не требующий явного перехода к стандартному формализму.

Рассмотрим характеристический многочлен оператора плотности

$$\chi(\lambda) = \prod_{k=1}^{d}(\lambda - \lambda_k), \tag{6.10}$$

где $\{\lambda_k\}_{k=1}^{d}$ — спектр ρ. Определим числа

$$a_n := \mathrm{Tr}(\rho^n) = \sum_l \big(p^{\star n}\big)_l = \sum_{k=1}^{d} \lambda_k^n, \qquad n = 1, \ldots, d. \tag{6.11}$$

Распределение p принадлежит $\mathfrak{P}(E)$ тогда и только тогда, когда все $\lambda_k \geqslant 0$.

С помощью тождеств Ньютона–Жирара характеристический многочлен можно переписать как

$$\chi(\lambda) = \sum_{m=0}^{d}(-1)^m b_m \lambda^{d-m}, \tag{6.12}$$

где $b_0 = 1$ и

$$b_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i-1} b_{n-i} a_i, \qquad n = 1, \ldots, d. \tag{6.13}$$

Если для некоторого $d' \in \{1, \ldots, d\}$ выполнено $b_{d'} \neq 0$ и $b_{d'+1} = \cdots = b_d = 0$, то χ имеет $d - d'$ нулевых корней. Их можно исключить, переопределив

$$\chi(\lambda) \longleftarrow \frac{\chi(\lambda)}{\lambda^{d-d'}}. \tag{6.14}$$

Далее можно воспользоваться критерием Рауса–Гурвица [168]. Положим

$$\widetilde{\chi}(\lambda) = \prod_{k=1}^{d'}(\lambda + \lambda_k) = (-1)^{d'}\chi(-\lambda) = \sum_{m=0}^{d'} b_m \lambda^{d'-m}. \tag{6.15}$$

Положительность корней χ эквивалентна отрицательности корней $\widetilde{\chi}$. По критерию Рауса–Гурвица, все корни $\widetilde{\chi}$ строго отрицательны тогда и только тогда, когда главные миноры $\{\Delta_i\}_{i=1}^{d'}$ матрицы Гурвица

$$\mathcal{H}(\widetilde{\chi}) = \begin{bmatrix} b_1 & b_3 & b_5 & \cdots & 0 & 0 \\ b_0 & b_2 & b_4 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & b_1 & b_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & b_{d'-2} & b_{d'} \end{bmatrix} \tag{6.16}$$

строго положительны:

$$\Delta_1 > 0, \quad \Delta_2 > 0, \quad \ldots, \quad \Delta_{d'} > 0. \tag{6.17}$$

Тем самым, получен конструктивный критерий принадлежности $p \in \mathfrak{P}(E)$, использующий только произведение Мойала (6.7).

6.1.3. Представление тензорных произведений

Вероятностные векторы в MIC-POVM-представлении обладают простым правилом для тензорных произведений; это важное преимущество по сравнению с представлениями, основанными на SIC-POVM [22]. Пусть $\mathcal{H}_A$ и $\mathcal{H}_B$ — гильбертовы пространства с MIC-POVM

$$E^A = \{E_i^A\}_{i=1}^{d_A^2}, \qquad E^B = \{E_j^B\}_{j=1}^{d_B^2}. \tag{6.18}$$

На составной системе $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ рассмотрим MIC-POVM

$$E^{AB} = \{E_i^A \otimes E_j^B\}_{i,j=1}^{d_A^2,d_B^2} =: E^A \otimes E^B. \tag{6.19}$$

Если e^A и e^B — двойственные базисы для E^A и E^B, то $e^{AB} = e^A \otimes e^B$ является двойственным базисом для E^{AB}. Для состояний $\rho^A \in \mathfrak{S}(\mathcal{H}_A)$ и $\rho^B \in \mathfrak{S}(\mathcal{H}_B)$ с соответствующими вероятностными векторами p^A и p^B, вероятностный вектор состояния $\rho^A \otimes \rho^B$ равен

$$p_{(kl)}^{AB} = \mathrm{Tr}\big[(\rho^A \otimes \rho^B)(E_k^A \otimes E_l^B)\big] = p_k^A p_l^B. \tag{6.20}$$

Здесь используется мультииндекс (k, l); его можно отождествить с обычным индексом по стандартному правилу произведения Кронекера. В векторной форме $p^{AB} = p^A \otimes p^B$.

6.1.4. Представление каналов

Следующий шаг — построение вероятностного представления квантовых каналов. Пусть $\mathcal{H}^{\text{in}}$ и $\mathcal{H}^{\text{out}}$ — гильбертовы пространства с MIC-POVM E^{in} и E^{out}, и пусть

$$\Phi\colon \mathfrak{S}(\mathcal{H}^{\text{in}}) \longrightarrow \mathfrak{S}(\mathcal{H}^{\text{out}}) \tag{6.21}$$

— квантовый канал (вполне положительное отображение, сохраняющее след). Рассмотрим состояние $\rho^{\text{in}} \in \mathfrak{S}(\mathcal{H}^{\text{in}})$ и положим $\rho^{\text{out}} = \Phi[\rho^{\text{in}}]$. Обозначим соответствующие векторы вероятностей через p^{in} и p^{out}. Тогда каналу Φ отвечает матрица $\mathbf{S}$, такая что

$$p^{\text{out}} = \mathbf{S}p^{\text{in}}, \qquad \mathbf{S}_{lk} = \mathrm{Tr}\big[E_l^{\text{out}}\Phi[e_k^{\text{in}}]\big]\,. \tag{6.22}$$

Матрица $\mathbf{S}$ в общем случае квазистохастична: сумма элементов каждого её столбца равна единице, однако сама матрица не обязана быть стохастической. Действие канала Φ на входное состояние записывается в виде

$$\Phi\colon \rho^{\text{in}} \longmapsto \sum_{k=1}^{d_{\text{out}}^2} \sum_{l=1}^{d_{\text{in}}^2} \mathbf{S}_{kl}\, e_k^{\text{out}} \operatorname{Tr}(E_l^{\text{in}} \rho^{\text{in}}). \tag{6.23}$$

В свою очередь, сопряжённый канал $\Phi^*\colon \mathfrak{B}(\mathcal{H}^{\text{out}}) \to \mathfrak{B}(\mathcal{H}^{\text{in}})$ действует по правилу

$$\Phi^*\colon M^{\text{out}} \longmapsto \sum_{k=1}^{d_{\text{in}}^2} \sum_{l=1}^{d_{\text{out}}^2} \mathbf{S}_{lk}\, E_k^{\text{in}} \operatorname{Tr}(e_l^{\text{out}} M^{\text{out}}). \tag{6.24}$$

Если канал задан в форме Крауса,

$$\Phi[\rho] = \sum_n V_n \rho V_n^\dagger, \tag{6.25}$$

то элементы его квазистохастической матрицы равны

$$\mathbf{S}_{lk} = \sum_n \operatorname{Tr}\bigl(E_l^{\text{out}} V_n e_k^{\text{in}} V_n^\dagger\bigr)\,. \tag{6.26}$$

Представление тензорного произведения квантовых каналов устроено так же, как и для состояний. Пусть

$$\Phi^A\colon \mathfrak{S}(\mathcal{H}^{\text{in},A}) \longrightarrow \mathfrak{S}(\mathcal{H}^{\text{out},A}) \tag{6.27}$$

и

$$\Phi^B\colon \mathfrak{S}(\mathcal{H}^{\text{in},B}) \longrightarrow \mathfrak{S}(\mathcal{H}^{\text{out},B}) \tag{6.28}$$

— каналы, представляемые матрицами $\mathbf{S}^A$ и $\mathbf{S}^B$. Тогда

$$\begin{aligned} \mathbf{S}^{AB}_{(kl)(nm)} &= \operatorname{Tr}\Bigl[(E_k^{\text{out},A} \otimes E_l^{\text{out},B})(\Phi^A \otimes \Phi^B)(e_n^{\text{in},A} \otimes e_m^{\text{in},B})\Bigr] \\ &= \operatorname{Tr}\Bigl[E_k^{\text{out},A} \Phi^A[e_n^{\text{in},A}]\Bigr] \operatorname{Tr}\Bigl[E_l^{\text{out},B} \Phi^B[e_m^{\text{in},B}]\Bigr] \\ &= \mathbf{S}^A_{kn} \mathbf{S}^B_{lm} = \bigl(\mathbf{S}^A \otimes \mathbf{S}^B\bigr)_{(kl)(nm)}. \end{aligned} \tag{6.29}$$

Таким образом, тензорному произведению двух каналов отвечает тензорное произведение соответствующих квазистохастических матриц.

Каналу частичного следа

$$\operatorname{Tr}_{\mathcal{H}_B}\colon \rho^{AB} \longmapsto \operatorname{Tr}_{\mathcal{H}_B} \rho^{AB} \tag{6.30}$$

отвечает матрица

$$\mathbf{S}_{l(nm)} = \mathrm{Tr}\big[E_l^A \,\mathrm{Tr}_B(e_n^A \otimes e_m^B)\big] = \mathrm{Tr}(E_l^A e_n^A) = \delta_{ln}. \tag{6.31}$$

Как и в случае состояний, не всякая квазистохастическая матрица представляет физически допустимый квантовый канал. Для формулировки критерия воспользуемся двойственностью Чоя–Ямиолковского [4; 169]. Пусть отображение $\Phi\colon \mathfrak{S}(\mathcal{H}^{\mathrm{in}}) \to \mathfrak{S}(\mathcal{H}^{\mathrm{out}})$ сохраняет след. Зафиксируем ортонормированный базис $\{|n\rangle\}_{n=1}^{d_{\mathrm{in}}}$ в $\mathcal{H}^{\mathrm{in}}$ и изоморфную копию $\mathcal{H}'^{,\mathrm{in}} = \mathcal{H}^{\mathrm{in}}$. Положим

$$\Omega = \frac{1}{d_{\mathrm{in}}} \sum_{n,m=1}^{d_{\mathrm{in}}} |n\rangle\langle m| \otimes |n\rangle\langle m|. \tag{6.32}$$

Это оператор плотности чистого максимально сцепленного состояния

$$|\omega\rangle = \frac{1}{\sqrt{d_{\mathrm{in}}}} \sum_{k=1}^{d_{\mathrm{in}}} |k\rangle \otimes |k\rangle. \tag{6.33}$$

Состоянием Чоя канала Φ называется

$$\rho_\Phi = (\mathrm{Id} \otimes \Phi)[\Omega] = \frac{1}{d_{\mathrm{in}}} \sum_{n,m=1}^{d_{\mathrm{in}}} |n\rangle\langle m| \otimes \Phi[|n\rangle\langle m|]. \tag{6.34}$$

Изоморфизм Чоя–Ямиолковского утверждает, что ρ_Φ является квантовым состоянием тогда и только тогда, когда Φ — квантовый канал.

Действие канала Φ восстанавливается по формуле

$$\Phi[\rho] = d_{\mathrm{in}}\ \mathrm{Tr}_{\mathcal{H}'^{,\mathrm{in}}}\big[(\rho^{\mathsf{T}} \otimes \mathbf{1}_{\mathrm{out}})\rho_\Phi\big]\,. \tag{6.35}$$

Изоморфизм Чоя–Ямиолковского обладает естественным вероятностным представлением. Для MIC-POVM $E^{\mathrm{in}} = \{E_i^{\mathrm{in}}\}$ с двойственным базисом $\{e_i^{\mathrm{in}}\}$ определим комплексно сопряжённую MIC-POVM $\overline{E}^{\mathrm{in}} = \{\overline{E}_i^{\mathrm{in}}\}$ с двойственным базисом $\{\overline{e}_i^{\mathrm{in}}\}$, где сопряжение берётся покомпонентно в вычислительном базисе из (6.32). Пусть матрица $\mathbf{S}$ представляет сохраняющее след отображение Φ, и пусть w — вектор вероятностей состояния Ω относительно MIC-POVM $\overline{E}^{\mathrm{in}} \otimes E^{\mathrm{in}}$. Вероятностный вектор Чоя определяется как

$$p_{\mathbf{S}} = \big(\mathbf{1}_{d_{\mathrm{in}}^2} \otimes \mathbf{S}\big)w. \tag{6.36}$$

Матрица $\mathbf{S}$ представляет квантовый канал в точности тогда, когда $p_{\mathbf{S}} \in \mathfrak{P}(\overline{E}^{\text{in}} \otimes E^{\text{out}})$. Обратно, матрица $\mathbf{S}$ восстанавливается по $p_{\mathbf{S}}$ при помощи соотношения

$$\begin{aligned}\mathbf{S}_{lk} &= \operatorname{Tr}\bigl[E_l^{\text{out}}\Phi[e_k^{\text{in}}]\bigr] = d_{\text{in}} \operatorname{Tr}\bigl[\rho_\Phi\bigl[(e_k^{\text{in}})^{\mathsf{T}} \otimes E_l^{\text{out}}\bigr]\bigr] \\ &= d_{\text{in}} \sum_{n,m=1}^{d_{\text{in}}^2} p_{\mathbf{S}(nm)} \operatorname{Tr}\bigl[\overline{e}_n^{\text{in}}(e_k^{\text{in}})^{\mathsf{T}}\bigr] \operatorname{Tr}(e_m^{\text{out}} E_l^{\text{out}}) \\ &= d_{\text{in}} \sum_{n=1}^{d_{\text{in}}^2} \operatorname{Tr}\bigl[\overline{e}_n^{\text{in}}(e_k^{\text{in}})^{\mathsf{T}}\bigr]\, p_{\mathbf{S}(n,l)}.\end{aligned} \tag{6.37}$$

Удобно определить вектор w непосредственно в терминах векторов вероятностей. Выберем чистое состояние $|\psi_1\rangle\langle\psi_1| \in \mathfrak{S}(\mathcal{H}^{\text{in}})$ с вектором вероятностей $p^{(11)}$. Векторы $\{p^{(kk)}\}_{k=1}^{d_{\text{in}}}$, отвечающие ортонормированному базису, строятся как решения системы (при $k = 2, \ldots, d_{\text{in}}$)

$$\begin{aligned}&\sum_{l=1}^{d_{\text{in}}^2} p_l^{(kk)} = 1, \qquad p^{(kk)} \star p^{(kk)} = p^{(kk)}, \\ &\sum_l \bigl(p^{(kk)} \star p^{(nn)}\bigr)_l = 0, \qquad n = 1, \ldots, k-1.\end{aligned} \tag{6.38}$$

Здесь ортонормированность понимается относительно скалярного произведения Гильберта–Шмидта (6.6). Система имеет бесконечно много решений, отвечающих различным ортонормированным базисам, содержащим $|\psi_1\rangle$.

Векторы $p^{(nm)}$ при $n \neq m$, отвечающие матричным единицам $|\psi_n\rangle\langle\psi_m|$, находятся из мультипликативных соотношений. Например, вектор $p^{(12)}$ должен удовлетворять условиям

$$\begin{aligned}&p^{(12)} \star p^{(kk)} = 0 \quad (k \neq 2), && p^{(kk)} \star p^{(12)} = 0 \quad (k \neq 1), \\ &p^{(12)} \star p^{(11)} = 0, && p^{(11)} \star p^{(12)} = p^{(12)}, \\ &p^{(12)} \star p^{(12)} = 0, && \\ &p^{(12)} \star p^{(22)} = p^{(12)}, && p^{(22)} \star p^{(12)} = 0, \\ &p^{(12)} \star p^{(21)} = p^{(11)}, && p^{(21)} \star p^{(12)} = p^{(22)}.\end{aligned} \tag{6.39}$$

Когда все векторы $p^{(nm)}$ найдены, распределение Чоя записывается в виде

$$p_{\mathbf{S}} = \frac{1}{d_{\text{in}}} \sum_{n,m=1}^{d_{\text{in}}} \overline{p}^{(nm)} \otimes \mathbf{S} p^{(nm)}. \tag{6.40}$$

Здесь $\overline{p}^{(nm)}$ — координаты матричной единицы $|\psi_n\rangle\langle\psi_m|$ относительно сопряжённой MIC-POVM $\overline{E}^{\text{in}}$, а $p^{(nm)}$ — относительно исходной E^{in}.

Наконец, отметим частный случай SIC-POVM. Пусть

$$E^{\text{in}} = \left\{ \frac{1}{d_{\text{in}}} |\psi_i^{\text{sym}}\rangle\langle\psi_i^{\text{sym}}| \right\}_{i=1}^{d_{\text{in}}^2}, \qquad \overline{E}^{\text{in}} = \left\{ \frac{1}{d_{\text{in}}} |\overline{\psi_i^{\text{sym}}}\rangle\langle\overline{\psi_i^{\text{sym}}}| \right\}_{i=1}^{d_{\text{in}}^2}, \tag{6.41}$$

где комплексное сопряжение берётся в вычислительном базисе и

$$|\overline{\psi_i^{\text{sym}}}\rangle = \sum_{r=1}^{d_{\text{in}}} |r\rangle\, \overline{\langle r|\psi_i^{\text{sym}}\rangle} = \sum_{r=1}^{d_{\text{in}}} |r\rangle\, \langle\psi_i^{\text{sym}}|r\rangle. \tag{6.42}$$

Для максимально сцепленного состояния $\Omega = |\omega\rangle\langle\omega|$ его вектор вероятностей относительно $\overline{E}^{\text{in}} \otimes E^{\text{in}}$ имеет компоненты

$$\begin{aligned} w_{(nm)} &= \operatorname{Tr}\Big[|\omega\rangle\langle\omega| (\overline{E}_n^{\text{in}} \otimes E_m^{\text{in}}) \Big] \\ &= \frac{1}{d_{\text{in}}^2} \sum_{k,l} \langle k|\psi_n^{\text{sym}}\rangle\langle\psi_n^{\text{sym}}|l\rangle\, \langle k|\psi_m^{\text{sym}}\rangle\langle\psi_m^{\text{sym}}|l\rangle \\ &= \frac{1}{d_{\text{in}}^3} \big|\langle\psi_m^{\text{sym}}|\psi_n^{\text{sym}}\rangle\big|^2 = \frac{d_{\text{in}}\delta_{nm} + 1}{d_{\text{in}}^3(d_{\text{in}} + 1)}. \end{aligned} \tag{6.43}$$

Этот вектор можно подставить в (6.36), чтобы получить вероятностный вектор Чоя и проверить, отвечает ли он допустимому квантовому состоянию.

6.1.5. Представление измерений

Перейдём к вероятностному представлению произвольного измерения с конечным числом исходов на основе MIC-POVM. Пусть $M = \{M_i\}_{i=1}^m$ — некоторая POVM; сама по себе она не обязана быть информационно полной. По правилу Борна вероятность i-го исхода для входного состояния ρ равна

$$q_i = \operatorname{Tr}(\rho M_i), \qquad i = 1, \ldots, m. \tag{6.44}$$

С учётом разложения состояния (6.4) вектор вероятностей исходов записывается как

$$q = \begin{bmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_m \end{bmatrix}, \qquad q = \mathbf{M}p, \qquad \mathbf{M}_{ij} = \operatorname{Tr}(M_i e_j). \tag{6.45}$$

Матрица $\mathbf{M}$ размера $m \times d^2$ квазистохастична, поскольку $\sum_i M_i = \mathbf{1}_d$. Обратно, эффекты POVM восстанавливаются по матрице $\mathbf{M}$ следующим образом:

$$M_k = \sum_{l=1}^{d^2} \mathrm{Tr}(M_k e_l) E_l = \sum_{l=1}^{d^2} \mathbf{M}_{kl} E_l. \tag{6.46}$$

Чтобы проверить, что заданная квазистохастическая матрица отвечает физически допустимой POVM, можно применить алгоритм, аналогичный алгоритму для состояний, поменяв ролями базисы E и e. Рассмотрим операторы $A, B \in \mathfrak{T}(\mathcal{H})$, представляемые строками λ и μ:

$$\begin{aligned} A &= \sum_{i=1}^{d^2} \lambda_i E_i, \quad \lambda_i = \mathrm{Tr}(e_i A), \\ B &= \sum_{j=1}^{d^2} \mu_j E_j, \quad \mu_j = \mathrm{Tr}(e_j B). \end{aligned} \tag{6.47}$$

След оператора равен

$$\mathrm{Tr}\, A = \sum_{i=1}^{d^2} \lambda_i \,\mathrm{Tr}\, E_i = \lambda\, \kappa, \qquad \kappa = \begin{bmatrix} \mathrm{Tr}\, E_1 \\ \vdots \\ \mathrm{Tr}\, E_{d^2} \end{bmatrix}. \tag{6.48}$$

Определим произведение Мойала $\widetilde{\star}$ для вектор-строк соотношением

$$(\lambda \mathbin{\widetilde{\star}} \mu)_k \coloneqq \mathrm{Tr}(ABe_k) = \sum_{n,m=1}^{d^2} \mathrm{Tr}(E_n E_m e_k) \lambda_n \mu_m = \lambda \widetilde{\Lambda}^{(k)} \mu^{\mathsf{T}}, \tag{6.49}$$

где

$$\widetilde{\Lambda}^{(k)}_{nm} = \mathrm{Tr}(E_n E_m e_k). \tag{6.50}$$

Условие нормировки $\sum_i M_i = \mathbf{1}_d$ следует из квазистохастичности. Остаётся проверить неотрицательность $M_i \geqslant 0$. Для i-й строки

$$\lambda^{(i)} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{i,1} & \cdots & \mathbf{M}_{i,d^2} \end{bmatrix} \tag{6.51}$$

положим

$$a^{(i)}_j \coloneqq \left(\lambda^{(i)}\right)^{\widetilde{\star} j} \kappa = \mathrm{Tr}(M_i^j). \tag{6.52}$$

Та же процедура Ньютона–Жирара и Рауса–Гурвица, что и в подразделе 6.1.2, с заменой $\{a_n\}$ на $\{a^{(i)}_n\}$ позволяет установить, выполнено ли условие $M_i \geqslant 0$. Если

оно выполнено для всех $i = 1, \ldots, m$, то матрица $\mathbf{M}$ представляет допустимое квантовое измерение.

Наконец, пусть измерение задано эрмитовой наблюдаемой $O = O^\dagger$ со спектральным разложением

$$O = \sum_{i=1}^{m} o_i \Pi_i, \tag{6.53}$$

где $\{\Pi_i\}$ — попарно ортогональные проекторы, $\sum_i \Pi_i = \mathbf{1}_d$. Соответствующей проективной POVM отвечает квазистохастическая матрица $\mathbf{M}$. Чтобы вычислять среднее значение непосредственно по вектору p, введём вектор-строку

$$\mathbf{O} := \begin{bmatrix} o_1 & \cdots & o_m \end{bmatrix} \mathbf{M}. \tag{6.54}$$

Тогда $\langle O \rangle = \mathbf{O}p$. Правило для тензорного произведения то же, что и для каналов: измерению над несколькими подсистемами отвечает тензорное произведение квазистохастических матриц локальных измерений.

6.1.6. Переходы между представлениями на основе MIC-POVM

До сих пор MIC-POVM, задающая вероятностное представление, считалась фиксированной. Пусть E и F — две MIC-POVM на одном и том же d-мерном гильбертовом пространстве с двойственными базисами e и f. Верхний индекс $[E]$ или $[F]$ указывает выбранное представление. Квазистохастическая матрица измерения E, записанная в представлении, основанном на F, имеет элементы

$$\left(\mathbf{M}_E^{[F]}\right)_{mn} = \mathrm{Tr}(E_m f_n), \qquad m, n = 1, \ldots, d^2. \tag{6.55}$$

Обратное преобразование задаётся равенством $\mathbf{M}_F^{[E]} = (\mathbf{M}_E^{[F]})^{-1}$. Следовательно, состояния, каналы и измерения преобразуются по правилам

$$p^{[E]} = \mathbf{M}_E^{[F]} p^{[F]}, \tag{6.56}$$

$$\mathbf{S}^{[E]} = \mathbf{M}_E^{[F]} \mathbf{S}^{[F]} \mathbf{M}_F^{[E]}, \tag{6.57}$$

и

$$\mathbf{M}^{[E]} = \mathbf{M}^{[F]} \mathbf{M}_F^{[E]}. \tag{6.58}$$

6.2. Уравнения динамики

Применим теперь представление, основанное на MIC-POVM, к квантовым кинетическим уравнениям. Рассмотрим два принципиально важных случая: уравнение Лиувилля–фон Неймана для унитарной эволюции и марковскую диссипативную эволюцию, порождаемую генератором Горини–Коссаковского–Сударшана–Линдблада. В обоих случаях генераторы предполагаются не зависящими от времени.

6.2.1. Уравнение Лиувилля–фон Неймана

Пусть $\mathcal{H}$ — d-мерное гильбертово пространство. Эволюция квантового состояния под действием гамильтониана $H = H^\dagger$ описывается уравнением Лиувилля–фон Неймана

$$\dot\rho(t) = -\mathbb{i}[H, \rho(t)], \tag{6.59}$$

где $[\cdot,\cdot]$ — коммутатор. Мы используем безразмерные единицы, в которых постоянная Планка равна единице. Подставляя (6.4), умножая на E_l и беря след, получаем

$$\dot p_l(t) = -\mathbb{i}\sum_{k=1}^{d^2} \mathrm{Tr}(E_l[H, e_k])\, p_k(t). \tag{6.60}$$

Таким образом, уравнение сводится к линейному обыкновенному дифференциальному уравнению

$$\dot p(t) = \mathbf{H}\, p(t), \qquad \mathbf{H}_{lk} = \mathbb{i}\,\mathrm{Tr}(H[E_l, e_k])\,. \tag{6.61}$$

Такая запись унитарной динамики на вероятностном языке была получена в работе [161]; ниже она будет обобщена на уравнение ГКСЛ.

Матрица $\mathbf{H}$ размера $d^2 \times d^2$ обладает следующими свойствами:

1. матрица $\mathbf{H}$ вещественна: $\mathbf{H} \in \mathbb{M}_{d^2\times d^2}(\mathbb{R})$;
2. сумма элементов каждого столбца равна нулю: $\sum_{l=1}^{d^2} \mathbf{H}_{lk} = 0$.

Первое свойство вытекает из эрмитовости оператора $\mathbb{i}[E_l, e_k]$, второе — из равенства $\sum_l E_l = \mathbf{1}_d$. В случае SIC-POVM матрица $\mathbf{H}$ является антисимметричной

$\mathbf{H}^{\mathsf{T}} = -\mathbf{H}$ — следовательно, её диагональные элементы равны нулю, и суммы элементов строк также обращаются в нуль [22].

Решение уравнения (6.61) имеет вид

$$p(t) = U(t)p_0, \qquad U(t) = \mathrm{e}^{\mathbf{H}t}, \tag{6.62}$$

где $p_0 = p(0)$. Матрица $U(t)$ квазистохастична. Унитарная эволюция сохраняет скалярное произведение Гильберта–Шмидта (6.6), откуда следует

$$T^{-1} = U(t)^{\mathsf{T}} T^{-1} U(t). \tag{6.63}$$

Разлагая $U(\delta t)$ при малых δt, получаем третье свойство:

$$\mathbf{H}^{\mathsf{T}} T^{-1} + T^{-1}\mathbf{H} = 0. \tag{6.64}$$

Если положить $\widetilde{\mathbf{H}} = T^{-1}\mathbf{H}$, то матрица $\widetilde{\mathbf{H}}$ антисимметрична, поскольку T симметрична. В сочетании с условием обращения в нуль сумм по столбцам это даёт $\sum_i (T\widetilde{\mathbf{H}})_{ij} = 0$. Антисимметричная матрица, удовлетворяющая этим условиям, содержит $(d^2-2)(d^2-1)/2$ независимых параметров. При $d > 2$ это число превосходит $d^2 - 1$ — количество физически значимых параметров гамильтониана после устранения произвольной аддитивной постоянной. Следовательно, перечисленных условий недостаточно для характеризации физических гамильтонианов в терминах вероятностных представлений.

Чтобы всё-таки получить необходимые и достаточные условия, мы будем использовать технику векторизации. Оператор $A \in \mathfrak{T}(\mathcal{H})$ можно записать в виде

$$A = \sum_{n,m=1}^{d} A_{nm} |n\rangle\langle m|, \qquad A_{nm} = \langle n|A|m\rangle. \tag{6.65}$$

Его кет- и бра-векторизации определяются формулами

$$|A\rangle\!\rangle = \sum_{n,m} A_{nm} |n\rangle \otimes |m\rangle, \qquad \langle\!\langle A| = \sum_{n,m} \overline{A_{nm}} \langle n| \otimes \langle m|. \tag{6.66}$$

Тогда $\langle\!\langle A|B\rangle\!\rangle = \mathrm{Tr}(A^\dagger B)$. Более того, если $B = UAV^\dagger$, то $|B\rangle\!\rangle = (U \otimes \overline{V})|A\rangle\!\rangle$.

Введём тензоры

$$\mathbf{e} = \begin{bmatrix} |e_1\rangle\!\rangle & \cdots & |e_{d^2}\rangle\!\rangle \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{E} = \begin{bmatrix} \langle\!\langle E_1| \\ \vdots \\ \langle\!\langle E_{d^2}| \end{bmatrix}. \tag{6.67}$$

Для них справедливы соотношения

$$|\rho\rangle\!\rangle = \mathbf{e}p, \qquad \mathbf{E}\mathbf{e} = \mathbf{1}_{d^2}, \qquad \mathbf{e}\mathbf{E} = \sum_{i=1}^{d^2} |e_i\rangle\!\rangle\langle\!\langle E_i|. \tag{6.68}$$

В этих обозначениях

$$\mathbf{H} = -\mathbb{i}\,\mathbf{E}\big(H \otimes \mathbf{1}_d - \mathbf{1}_d \otimes \overline{H}\big)\mathbf{e}. \tag{6.69}$$

Пусть $\{\sigma^{(i)}\}_{i=1}^{d^2-1}$ — линейно независимый набор бесследовых эрмитовых операторов, нормированных условием $\mathrm{Tr}(\sigma^{(i)}\sigma^{(j)}) = d\delta_{ij}$. При $d = 2$ в качестве такого набора можно взять матрицы Паули. Всякий гамильтониан представим в виде

$$H = \nu_0 \mathbf{1}_d + \sum_{i=1}^{d^2-1} \nu_i \sigma^{(i)}, \tag{6.70}$$

где $\nu_0 = \mathrm{Tr}\, H/d$ и $\nu_i = \mathrm{Tr}(H\sigma^{(i)})/d$. Пусть $\{\mathbf{H}^{(i)}\}_{i=1}^{d^2-1}$ — отвечающие им матрицы вероятностного представления,

$$\mathbf{H}^{(i)}_{lk} = \mathbb{i}\,\mathrm{Tr}\Big(\sigma^{(i)}[E_l, e_k]\Big)\,. \tag{6.71}$$

Слагаемое гамильтониана $\nu_0\mathbf{1}$, пропорциональное единичному оператору, не влияет на динамику системы и соответствует нулевой матрице в вероятностном представлении, поэтому

$$\mathbf{H} = \sum_{i=1}^{d^2-1} \nu_i \mathbf{H}^{(i)}. \tag{6.72}$$

Базисные матрицы удовлетворяют соотношению

$$\mathrm{Tr}\Big(\mathbf{H}^{(i)}\mathbf{H}^{(j)}\Big) = -\,\mathrm{Tr}\Big(\sigma^{(i)}\sigma^{(j)} \otimes \mathbf{1}_d + \mathbf{1}_d \otimes \overline{\sigma^{(i)}\sigma^{(j)}}\Big) = -2d^2\,\delta_{ij}. \tag{6.73}$$

Следовательно, проектор на подпространство матриц, представляющих гамильтоновы генераторы, имеет вид

$$\mathcal{P}_{\text{unit}}(\mathbf{M}) = -\frac{1}{2d^2} \sum_{i=1}^{d^2-1} \mathrm{Tr}\Big(\mathbf{M}\mathbf{H}^{(i)}\Big)\,\mathbf{H}^{(i)}. \tag{6.74}$$

Вещественная матрица $\mathbf{H}$ размера $d^2 \times d^2$ представляет некоторый гамильтониан тогда и только тогда, когда

$$\mathcal{P}_{\text{unit}}(\mathbf{H}) = \mathbf{H}. \tag{6.75}$$

Проектор $\mathcal{P}_{\text{unit}}$ полезен также в методах томографирования квантовых процессов, где подобными методами выделяют унитарную часть восстановленного генератора [22].

6.2.2. Уравнение Горини–Коссаковского–Сударшана–Линдблада

Обобщим полученные результаты на уравнение ГКСЛ [79; 170]. Рассмотрим марковское кинетическое уравнение $\dot\rho(t) = \mathcal{L}[\rho(t)]$, где

$$\mathcal{L}[\rho] = -\mathbb{i}[H,\rho] + \sum_j \left(K_j \rho K_j^\dagger - \frac{1}{2}\{K_j^\dagger K_j, \rho\} \right), \tag{6.76}$$

где $\{\cdot,\cdot\}$ — антикоммутатор, а операторы K_j описывают шум, порождающий диссипативную эволюцию.

Рассмотрим вполне положительное отображение $\Psi[M] = \sum_j K_j M K_j^\dagger$, которое, вообще говоря, не сохраняет след. Диссипативная часть уравнения (6.76) записывается в виде

$$\Psi[\rho] - \frac{1}{2}\{\Psi^*[\mathbf{1}_d], \rho\} =: \mathcal{D}[\rho], \tag{6.77}$$

где Ψ^* — сопряжённое отображение. Пусть матрица $\mathbf{S} \in \mathbb{M}_{d^2\times d^2}(\mathbb{R})$ представляет отображение Ψ, то есть $\mathbf{S}_{ij} = \mathrm{Tr}[E_i \Psi[e_j]]$. Из соотношений (6.23), (6.24) и (6.50) получаем

$$\mathrm{Tr}[E_i \mathcal{D}[e_j]] = \mathbf{S}_{ij} - \sum_{k,l=1}^{d^2} \mathbf{S}_{kl} \frac{\widetilde{\Lambda}_{il}^{(j)} + \widetilde{\Lambda}_{li}^{(j)}}{2} =: \mathbf{D}_{ij}. \tag{6.78}$$

Таким образом, уравнение ГКСЛ в представлении на основе MIC-POVM принимает вид

$$\dot p(t) = \mathbf{L} p(t), \qquad \mathbf{L} = \mathbf{H} + \mathbf{D}. \tag{6.79}$$

Матрица $\mathbf{D}$ вещественна, и сумма элементов каждого её столбца равна нулю.

Необходимый и достаточный критерий того, что супероператор $\mathcal{L}$ порождает вполне положительные сохраняющие след отображения (то есть условной вполне положительности), имеет вид [171]

$$\Pi_\Omega^\perp (\mathrm{Id} \otimes \mathcal{L})(\Omega) \Pi_\Omega^\perp \geqslant 0, \tag{6.80}$$

где Ω — максимально сцепленное состояние (6.32), а $\Pi_\Omega^\perp = \mathbf{1}_{d^2} - \Omega$ — проектор, ортогональный носителю Ω. Введём d^4-компонентные векторы w и p_Ω соотношениями

$$w_{(ij)} = \mathrm{Tr}[(E_i \otimes E_j)\Omega], \qquad (p_\Omega)_{(ij)} = \mathrm{Tr}\, E_i \,\mathrm{Tr}\, E_j - w_{(ij)}. \tag{6.81}$$

Вероятностное представление левой части (6.80) даётся выражением

$$p_\Omega \star \big(\mathbf{1}_{d^2} \otimes \mathbf{L}\big) w \star p_\Omega =: p_{\mathcal{L}}. \tag{6.82}$$

Далее алгоритм подраздела 6.1.2 позволяет проверить, отвечает ли вектор $p_{\mathcal{L}}$ ненормированному положительному оператору относительно MIC-POVM $E \otimes E$; это эквивалентно условию (6.80).

6.2.3. Уравнение Гейзенберга

До сих пор эволюция состояний описывалась в картине Шрёдингера. Полезно также обсудить картину Гейзенберга, в которой рассматривается эволюция наблюдаемых. Пусть положительная операторно-значная мера $M = \{M_i\}_{i=1}^m$ представлена квазистохастической матрицей $\mathbf{M}$ размера $m \times d^2$. Для генератора ГКСЛ $\mathbf{L}$ вероятности исходов в момент времени $t \geqslant 0$ равны

$$\mathbf{M}p(t) = \mathbf{M}\mathrm{e}^{\mathbf{L}t}p_0. \tag{6.83}$$

Определим матрицу измерения в картине Гейзенберга $\mathbf{M}^{\mathrm{Heis}}(t) = \mathbf{M}\mathrm{e}^{\mathbf{L}t}$. Она удовлетворяет уравнению

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{M}^{\mathrm{Heis}}(t) = \mathbf{M}^{\mathrm{Heis}}(t)\mathbf{L}, \qquad \mathbf{M}^{\mathrm{Heis}}(0) = \mathbf{M}. \tag{6.84}$$

Вектор исходов равен $q(t) = \mathbf{M}^{\mathrm{Heis}}(t)p_0$. То же уравнение применимо и к отдельному эффекту, представляемому одной строкой матрицы $\mathbf{M}$. Для эрмитовой наблюдаемой соответствующая вектор-строка удовлетворяет уравнению

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{O}^{\mathrm{Heis}}(t) = \mathbf{O}^{\mathrm{Heis}}(t)\mathbf{L}, \qquad \mathbf{O}^{\mathrm{Heis}}(0) = \mathbf{O}, \tag{6.85}$$

так что $\langle O(t)\rangle = \mathbf{O}^{\mathrm{Heis}}(t)p_0$.

Выводы по главе 6

В настоящей главе строится и изучается вероятностное представление на основе минимальных информационно полных измерений (MIC-POVM). Это представление обобщает подход, использующий SIC-POVM, и является более пригодным для изучения многочастичных систем. Введён математический формализм переписывания квантовых состояний, каналов и измерений в вероятностном

представлении, основанном на использовании MIC-POVM. Выведены уравнения динамики как для унитарной эволюции фон Неймана, так и для марковской диссипативной эволюции, порождаемой генератором ГКСЛ. Предложены алгоритмы для проверки того, что заданное состояние, канал, генератор эволюции, заданные в вероятностном представлении, действительно соответствуют операциям некоммутативной теории вероятностей, не используя явный переход к стандартному формализму.

Также предложенный подход может оказаться полезным и для открытых квантовых систем с изначально скоррелированными состояниями системы и окружения, изучавшихся в [172]. Представления на основе MIC, и в частности на основе SIC, обладают содержательными связями с алгебрами и группами Ли [148; 173; 174]. Свойства конкретной MIC-POVM можно изучать через структурные константы порождаемой ею алгебры. Например, эти константы полностью антисимметричны в точности для SIC-POVM [174]. Наконец, построенное представление можно рассматривать как точный функтор из категории квантовых каналов в категорию квазистохастических отображений [23]. Другое перспективное направление связано с тензорными сетями [175; 176], играющими центральную роль в анализе и моделировании квантовых вычислений.

Заключение

Настоящая работа посвящена применению теории операторных систем и вполне положительных отображений к задачам некоммутативной теории вероятностей. Объединяющая идея исследования состоит в том, что операторные системы — содержащие единицу самосопряжённые подпространства C^*-алгебр — являются наиболее общими структурами, в терминах которых определено понятие полной положительности, и потому естественным образом играют роль «некоммутативных» аналогов функциональных систем и банаховых решёток классической теории вероятностей. Проведённое в главе 1 последовательное сопоставление коммутативной и некоммутативной моделей показывает, что различие между ними сосредоточено в трёх обстоятельствах: множество состояний перестаёт быть симплексом Бауэра, положительность отображений должна быть усилена до полной положительности, а задача продолжения морфизмов решается благодаря свойствам инъективности. Каждая из последующих глав развивает одно из этих направлений.

Основные результаты работы состоят в следующем.

1. Исследованы свойства некоммутативных графов ошибок квантовых каналов связи в бесконечномерном случае (глава 2). Показано, что операторный граф квантового канала, определённый как $*$-слабое замыкание полного образа отображения, сопряжённого к комплементарному каналу, является ультраслабо замкнутой операторной системой. Обратно, для сепарабельных гильбертовых пространств доказано, что всякой ультраслабо замкнутой операторной системе отвечает квантовый канал, шумы в котором описываются в точности этой операторной системой. Тем самым получена характеризация бесконечномерных некоммутативных графов ошибок, ранее известная лишь в конечномерном случае.

2. Развита теория продолжения унитальной вполне положительной динамики с операторных систем на объемлющие C^*-алгебры (глава 3). Доказано, что всякая полугруппа с дискретным временем продолжается на инъективное расширение операторной системы, а в матричном случае продолжается и всякая непрерывная однопараметрическая унитальная вполне положительная полугруппа, причём продолжение на инъективную

оболочку наследует $*$-слабую непрерывность. Для обратимой динамики продолжение единственно: однопараметрическая группа автоморфизмов матричной системы единственным образом расширяется до группы $*$-автоморфизмов инъективной оболочки. Отсюда следует, что марковская динамика в обобщённых вероятностных теориях допускает интерпретацию как ограничение обычной квантовой динамики.

3. Предложено определение условно унитальных вполне положительных отображений между произвольными операторными системами, обобщающее классическое понятие условной полной положительности со случая C^*-алгебр (глава 4). Показано, что такие отображения суть инфинитезимальные приращения (касательные векторы) унитальных вполне положительных отображений и что предложенное определение согласовано с композицией. Для условно у.в.п. отображений доказана двойственность Чоя–Ямиолковского, а для ограниченных отображений со значениями в матричных $*$-алгебрах — аналог теоремы Арвесона о продолжении.

4. В рамках программы изучения информационных характеристик гауссовских измерений рассмотрен случай приближённого измерения координаты в многомодовых бозонных системах, отвечающий шумному гомодинированию (глава 5). Для величины редукции энтропии доказано свойство гауссовского максимизатора и найдено явное выражение её максимума в классе состояний с заданной матрицей ковариаций. На основе этого выражения получен способ вычисления пропускной способности с использованием сцепленности; подробно разобран случай одной бозонной моды.

5. Построено вероятностное представление конечномерной квантовой механики на основе минимальных информационно полных измерений, обобщающее известный подход, использующий симметрические измерения (глава 6). Выписаны уравнения динамики как для унитарной эволюции фон Неймана, так и для марковской диссипативной эволюции с генератором ГКСЛ.

Полученные результаты допускают ряд продолжений. Теоремы о продолжении динамики и условно унитальных вполне положительных отображений

доказаны в матричном (конечномерном) случае, и вопрос об их справедливости для бесконечномерных операторных систем остаётся открытым; основное препятствие здесь — отсутствие удобного описания инъективных оболочек и необходимость аккуратного обращения с топологиями на пространствах операторов. Естественным представляется и вопрос о том, в какой мере теория информации может быть построена непосредственно над операторными системами: как показывают результаты Дэвидсона и Кеннеди, отсутствие единственности разложения состояний на чистые — то есть отличие некоммутативного выпуклого компакта от симплекса Бауэра — является здесь принципиальным ограничением. Наконец, развитый в главе 6 формализм вероятностных представлений допускает категорную формулировку и может быть соединён с методами тензорных сетей, что представляется перспективным для задач классического моделирования квантовых вычислений.

Список сокращений и условных обозначений

$\|v\|$	норма вектора v
$\langle v, \rho \rangle$	спаривание между вектором v и функционалом ρ
s, w, w*	сильная, слабая и слабая-$*$ топологии на топологическом векторном пространстве
$\|x\|$	модуль числа x
$\mathscr{V}$, $\mathscr{W}$, $\mathscr{Z}$, $\mathscr{S}$	функциональные и операторные системы; $\mathscr{S}$ также обозначает операторный граф ошибок
$v^\dagger$	инволюция (эрмитово сопряжение) элемента v
$\mathscr{V}_{sa}$	вещественное подпространство самосопряжённых элементов операторного пространства $\mathscr{V}$
$\mathscr{V}_+$	конус положительных элементов операторной системы $\mathscr{V}$
$\mathscr{V}^*$	сопряжённое (двойственное) пространство к $\mathscr{V}$
$\Phi[v]$	действие отображения Φ на элемент v
$\mathfrak{B}(\mathscr{V}, \mathscr{W})$	пространство ограниченных линейных операторов из $\mathscr{V}$ в $\mathscr{W}$
so, wo, w*o	сильная, слабая и ультраслабая топологии на пространстве операторов
$\{\, x \mid P(x) \,\}$	множество элементов x, удовлетворяющих условию P
Span	линейная оболочка множества в векторном пространстве
$L_p(\Omega, \mu)$	пространство p-интегрируемых функций на измеримом пространстве Ω с мерой μ
$C(\Omega)$	пространство непрерывных функций на топологическом пространстве Ω
$\mathbf{1}$	тождественный оператор или порядковая единица операторной системы

$\mathbf{1}_{i,j}$	матрица с единицей в элементе i, j
$\mathfrak{S}(\mathcal{H})$	пространство состояний (матриц плотности) на гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$
$\mathcal{H}, \mathcal{K}, \mathcal{E}, \mathcal{X}, \mathcal{Y}, \mathcal{C}$	гильбертовы пространства
$\|\psi\rangle$, $\langle\psi\|$	кет- и бра-вектор ψ на гильбертовом пространстве
$\langle\varphi\|\psi\rangle$, $\|\psi\rangle\langle\psi\|$	скалярное произведение векторов и ортогональный проектор на вектор ψ в гильбертовом пространстве
$\mathfrak{B}(\mathcal{H}, \mathcal{K})$, $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$	пространство ограниченных операторов из $\mathcal{H}$ в $\mathcal{K}$ и на $\mathcal{H}$
$\mathfrak{K}(\mathcal{H})$	пространство компактных операторов на $\mathcal{H}$
$\mathfrak{T}(\mathcal{H})$	пространство ядерных операторов на $\mathcal{H}$
Tr	след ядерного оператора
$\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$	натуральные, целые, рациональные, вещественные, комплексные числа
$\mathbb{M}_{n\times m}(\mathbb{F})$	пространство $n \times m$ матриц над полем $\mathbb{F}$
$\mathcal{A}, \mathcal{B}$	C^*-алгебры
Id	тождественное отображение
$\|\cdot\|_{cb}$	вполне ограниченная (cb-) норма отображения
$\mathrm{CB}(\mathscr{V}, \mathscr{W})$	пространство вполне ограниченных отображений между операторными пространствами $\mathscr{V}$ и $\mathscr{W}$
в.п.	вполне положительное (отображение)
у.в.п.	унитальное вполне положительное (отображение)
$\mathrm{UCP}(\mathscr{V}, \mathscr{W})$	пространство унитальных вполне положительных отображений между операторными системами $\mathscr{V}$ и $\mathscr{W}$
OS	категория операторных систем
FS	категория функциональных систем

$\mathfrak{S}_n(\mathscr{V})$	множество n-состояний операторной системы $\mathscr{V}$
A^{T}	транспонирование матрицы A
$\mathcal{I}(\mathscr{V})$	инъективная оболочка операторной системы $\mathscr{V}$
Dom	область определения оператора
$R_A(\lambda)$	резольвента оператора A в точке λ
Bor	семейство борелевских множеств на пространстве
$\mathfrak{P}(\Omega)$	пространство вероятностных распределений на Ω
$\mathbb{X}$, $\mathbb{Y}$, $\mathbb{C}$	алфавиты символов
$\mathfrak{M}(\Omega)$	пространство комплекснозначных мер Радона конечной вариации на Ω
$\mathbb{P}(y\|x)$	вероятность исхода y при условии x
$\mathrm{H}(\rho)$	энтропия фон Неймана состояния ρ
$\mathrm{H}(p)$	энтропия Шеннона распределения p
$\mathbf{R}(x)$	множество достижимости символа x
$\mathfrak{S}(\mathcal{H})$	пространство смешанных состояний на $\mathcal{H}$
$\mathfrak{S}_{\mathrm{p}}(\mathcal{H})$	множество чистых состояний на $\mathcal{H}$
$\mathfrak{E}(\mathcal{H})$	пространство эффектов на $\mathcal{H}$
POVM	положительная операторно-значная мера (квантовое измерение)
$\mathfrak{X}$	полный симплекс распределений вероятностей
MIC-POVM	минимальное информационно полное квантовое измерение
SIC-POVM	симметрическое минимальное информационно полное измерение
E_k^{sym}	элементы симметрического информационно полного измерения
$\delta_{x,y}$	символ Кронекера между x и y

Channels	категория квантовых систем и квантовых каналов между ними
K_j	операторы Крауса квантового канала
ГКСЛ	Горини–Коссаковского–Сударшана–Линдблада (форма генератора)
$\mathbb{i}$	мнимая единица
Re	вещественная часть комплексного числа или оператора
$[A,\, B]$, $\{A,\, B\}$	коммутатор и антикоммутатор операторов A и B
$\mathrm{ER}(\rho, \mathcal{M})$	редукция энтропии при измерении $\mathcal{M}$ в состоянии ρ
$\mathrm{C_{ea}}$	пропускная способность с использованием сцепленности
$\mathscr{G}(\Phi)$	некоммутативный граф ошибок квантового канала Φ
Aut	группа автоморфизмов объекта
X, **Y**, **Z**	матрицы Паули (тождественная матрица обозначается **1**)
Fix	множество фиксированных точек эндоморфизма
Ker	ядро отображения
Sp	след конечной матрицы
in, out	индексы входной и выходной систем квантового канала
$\lvert A\rangle\!\rangle$, $\langle\!\langle A\rvert$	векторизованный оператор A в кет- и бра-обозначении

Список литературы

1. *Kraus K.*, *Böhm A.*, *Dollard J. D.*, *Wootters W. H.* States, effects, and operations: fundamental notions of quantum theory : lectures in mathematical physics at the University of Texas at Austin. — Berlin : Springer-Verlag, 1983. — 151 p. — (Lecture notes in physics).
2. *Holevo A. S.* Probabilistic and Statistical Aspects of Quantum Theory. — Pisa : Edizioni della Normale Pisa, 2011. — 167 p. — (Publications of the Scuola Normale Superiore).
3. *Stinespring W. F.* Positive functions on C^*-algebras // Proceedings of the American Mathematical Society. — 1955. — Vol. 6, no. 2. — P. 211–216.
4. *Choi M.-D.* Completely positive linear maps on complex matrices // Linear Algebra and its Applications. — 1975. — Vol. 10, no. 3. — P. 285–290.
5. *Choi M.-D.*, *Effros E. G.* Injectivity and operator spaces // Journal of Functional Analysis. — 1977. — Vol. 24, no. 2. — P. 156–209.
6. *Paulsen V. I.* Completely Bounded Maps and Operator Algebras. — Cambridge : Cambridge University Press, 2003. — 300 p. — (Cambridge Studies in Advanced Mathematics).
7. *Effros E. G.*, *Ruan Z.-J.* Operator spaces. — Oxford : Oxford University Press, 2000. — 363 p. — (London Mathematical Society Monographs New Series 23).
8. *Pisier G.* Introduction to operator space theory. Vol. 294. — Cambridge : Cambridge University Press, 2003. — 478 p. — (London Mathematical Society Lecture Note Series).
9. *Хелемский А. Я.* Квантовый функциональный анализ в бескоординатном изложении. — Москва : МЦНМО, 2009. — 308 с. — (Новые математические дисциплины).
10. *Paulsen V. I.*, *Todorov I. G.*, *Tomforde M.* Operator system structures on ordered spaces // Proceedings of the London Mathematical Society. — 2010. — May. — Vol. 102, no. 1. — P. 25–49.
11. *Davidson K. R.*, *Kennedy M.* Noncommutative Choquet Theory. Vol. 316. — Providence, RI : American Mathematical Society, 2025. — 83 p. — (Memoirs of the American Mathematical Society ; 1608).

12. *Kennedy M.*, *Shamovich E.* Noncommutative Choquet simplices // Mathematische Annalen. — 2021. — Sept. — Vol. 382, no. 3/4. — P. 1591–1629.

13. *Duan R.*, *Severini S.*, *Winter A.* Zero-error communication via quantum channels, noncommutative graphs, and a quantum Lovász number // IEEE Transactions on Information Theory. — 2013. — Feb. — Vol. 59, no. 2. — P. 1164–1174.

14. *Guedes E. B.*, *Assis F. M. de*, *Medeiros R.* Quantum zero-error information theory. — 1st ed. — Cham : Springer International Publishing, 2016. — 143 p.

15. *Fritz T.*, *Netzer T.*, *Thom A.* Spectrahedral containment and operator systems with finite-dimensional realization // SIAM Journal on Applied Algebra and Geometry. — 2017. — Vol. 1, no. 1. — P. 556–574.

16. *Connes A.*, *Suijlekom W. D. van*. Spectral Truncations in Noncommutative Geometry and Operator Systems // Communications in Mathematical Physics. — 2020. — July. — Vol. 383, no. 3. — P. 2021–2067.

17. *Ji Z.*, *Natarajan A.*, *Vidick T.*, *Wright J.*, *Yuen H.* $\mathrm{MIP}^* = \mathrm{RE}$ // Communications of the ACM. — 2021. — Nov. — Vol. 64, no. 11. — P. 131–138.

18. *Plávala M.* General probabilistic theories: an introduction // Physics Reports. — 2023. — Vol. 1033. — P. 1–64.

19. *Holevo A. S.* Quantum Systems, Channels, Information: A Mathematical Introduction. Vol. 16. — 2nd ed. — Berlin, Germany : Walter de Gruyter GmbH & Co KG, 2019. — 359 p. — (De Gruyter Studies in Mathematical Physics).

20. *Serafini A.* Quantum Continuous Variables: A Primer of Theoretical Methods. — 2nd ed. — Boca Raton, FL, USA : CRC Press, 08/2023. — 365 p.

21. *Holevo A. S.*, *Kuznetsova A. A.* The information capacity of entanglement-assisted continuous variable quantum measurement // Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical. — 2020. — Aug. — Vol. 53, no. 37. — 375307.

22. *Kiktenko E. O.*, *Fedorov A. K.*, *Man'ko O. V.*, *Man'ko V. I.* Probability representation of quantum dynamics using pseudostochastic maps // Physical Review A. — 2020. — Vol. 101, no. 5. — 052320.

23. *Wetering J. van de*. Quantum Theory is a Quasi-stochastic Process Theory // Proceedings 14th International Conference on Quantum Physics and Logic (QPL 2017). Vol. 266 (Nijmegen). — Open Publishing Association, 02/2018. — P. 179–196. — (Electronic Proceedings in Theoretical Computer Science).

24. *Lindblad G.* On the generators of quantum dynamical semigroups // Communications in Mathematical Physics. — 1976. — Vol. 48, no. 2. — P. 119–130.

25. *Evans D. E.* Conditionally Completely Positive Maps on Operator Algebras // The Quarterly Journal of Mathematics. — 1977. — Sept. — Vol. 28, no. 3. — P. 271–283.

26. *Arveson W. B.* Noncommutative dynamics and E-Semigroups. — 1st ed. — New York : Springer-Verlag New York, 2003. — x+434. — (Springer Monographs in Mathematics).

27. *Yashin V. I.* Properties of operator systems, corresponding to channels // Quantum Information Processing. — 2020. — May. — Vol. 19, no. 7. — 195.

28. *Yashin V. I.* The Extension of Unital Completely Positive Semigroups on Operator Systems to Semigroups on C^*-Algebras // Lobachevskii Journal of Mathematics. — 2022. — July. — Vol. 43, no. 7. — P. 1778–1790.

29. *Яшин В. И.* Теорема Арвесона о продолжении для условно унитальных вполне положительных отображений // Труды Математического института имени В. А. Стеклова. — 2024. — Т. 324. — С. 277—291.

30. *Holevo A. S.*, *Yashin V. I.* Maximum information gain of approximate quantum position measurement // Quantum Information Processing. — 2021. — Vol. 20, no. 3. — 97.

31. *Yashin V. I.*, *Kiktenko E. O.*, *Mastiukova A. S.*, *Fedorov A. K.* Minimal informationally complete measurements for probability representation of quantum dynamics // New Journal of Physics. — 2020. — Oct. — Vol. 22, no. 10. — 103026.

32. *Aliprantis C. D.*, *Tourky R.* Cones and Duality. Vol. 84. — Providence, RI : American Mathematical Society, 2007. — 279 p. — (Graduate studies in mathematics).

33. *Колмогоров А. Н.*, *Фомин С. В.* Элементы теории функции и функционального анализа. — Москва : ФИЗМАТЛИТ, 2004. — 572 с.

34. *Богачёв В. И.*, *Смолянов О. Г.* Действительный и функциональный анализ: университетский курс. — 2-е изд. — Москва–Ижевск : НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2011. — 728 с.

35. *Хелемский А. Я.* Лекции по функциональному анализу. — Москва : МЦНМО, 2014. — 560 с.

36. *Engel K.-J.*, *Nagel R.*, *Brendle S.* One-parameter semigroups for linear evolution equations. — 1st ed. — New York : Springer-Verlag New York, 2000. — 585 p. — (Graduate Texts in Mathematics 194).

37. *Bátkai A.*, *Fijavž M. K.*, *Rhandi A.* Positive operator semigroups: from finite to infinite dimensions. — 1st ed. — Cham : Birkhäuser, 2017. — 360 p. — (Operator Theory: Advances and Applications 257).

38. *Mac Lane S.* Categories for the working mathematician. — 2nd ed. — Berlin : Springer, 1998. — 314 p. — (Graduate Texts in Mathematics).

39. *Awodey S.* Category Theory. — 2nd ed. — Oxford : Oxford University Press, 2010. — 311 p. — (Oxford Logic Guides (Book 52)).

40. *Takesaki M.* Theory of operator algebras I. — Berlin–Heidelberg : Springer Berlin Heidelberg, 2001. — 415 p. — (Encyclopaedia of Mathematical Sciences).

41. *Defant A.*, *Floret K.* Tensor norms and operator ideals. — 1st ed. — Amsterdam : North-Holland, 1993. — 450 p. — (North-Holland mathematics studies 176).

42. *Paulsen V. I.*, *Tomforde M.* Vector spaces with an order unit // Indiana University Mathematics Journal. — 2009. — Vol. 58, no. 3. — P. 1319–1360.

43. *Kadison R. V.* A representation theory for commutative topological algebra. — Providence, RI : American Mathematical Society, 1951. — 30 p. — (Memoirs of the American Mathematical Society).

44. *Arveson W. B.* Subalgebras of C^*-algebras // Acta Mathematica. — 1969. — Vol. 123. — P. 141–224.

45. *Sakai S.* A characterization of W^*-algebras // Pacific Journal of Mathematics. — 1956. — Vol. 6, no. 4. — P. 763–773.

46. *Sherman S.* Order in operator algebras // American Journal of Mathematics. — 1951. — Vol. 73, no. 1. — P. 227–232.

47. *Glück J.* A note on lattice ordered C^*-algebras and Perron-Frobenius theory // Mathematische Nachrichten. — 2018. — Aug. — Vol. 291, no. 11/12. — P. 1727–1732.

48. *Paschke W. L.* Inner product modules over B^*-algebras // Transactions of the American Mathematical Society. — 1973. — Vol. 182. — P. 443–468.

49. *Ruan Z.-J.* Subspaces of C^*-algebras // Journal of Functional Analysis. — 1988. — Vol. 76, no. 1. — P. 217–230.

50. *Smith R. R.* Completely bounded maps between C^*-Algebras // Journal of the London Mathematical Society. — 1983. — Vol. 27, no. 1. — P. 157–166. — (2nd ser.)

51. *Arveson W. B.* The noncommutative Choquet boundary III: Operator systems in matrix algebras // Mathematica Scandinavica. — 2010. — Vol. 106, no. 2. — P. 196–210.

52. *Kavruk A. S.*, *Paulsen V. I.*, *Todorov I. G.*, *Tomforde M.* Quotients, exactness, and nuclearity in the operator system category // Advances in Mathematics. — 2013. — Mar. — Vol. 235. — P. 321–360.

53. *Choi M.-D.* A Schwarz inequality for positive linear maps on C^*-algebras // Illinois Journal of Mathematics. — 1974. — Vol. 18, no. 4. — P. 565–574.

54. *Blecher D. P.*, *Magajna B.* Dual operator systems // Bulletin of the London Mathematical Society. — 2010. — Dec. — Vol. 43, no. 2. — P. 311–320.

55. *Saitô K.*, *Wright J. D. M.* Monotone Complete C^*-algebras and Generic Dynamics. — London : Springer London, 2015. — 258 p. — (Springer Monographs in Mathematics).

56. *Kakutani S.* Concrete representation of abstract (M)-spaces (A characterization of the space of continuous functions) // Annals of Mathematics. — 1941. — Vol. 42, no. 4. — P. 994–1024.

57. *Lindenstrauss J.*, *Tzafriri L.* Classical Banach spaces I, II. — Berlin : Springer, 1996. — 431 p. — (Classics in Mathematics).

58. *Aubrun G.*, *Lami L.*, *Palazuelos C.*, *Szarek S.* Entangleability of cones // Geometric and Functional Analysis. — 2021. — Apr. — Vol. 31, no. 2. — P. 181–205.

59. *Hamana M.* Injective envelopes of operator systems // Publications of the Research Institute for Mathematical Sciences. — 1979. — Vol. 15, no. 3. — P. 773–785.

60. *Clément P.*, *Diekmann O.*, *Gyllenberg M.*, *Heijmans H. J. A. M.*, *Thieme H. R.* A Hille-Yosida theorem for a class of weakly* continuous semigroups // Semigroup Forum. — 1989. — Vol. 38. — P. 157–178.

61. *Evans D. E.*, *Hanche-Olsen H.* The generators of positive semigroups // Journal of Functional Analysis. — 1979. — Vol. 32, no. 2. — P. 207–212.

62. *Arendt W.*, *Chernoff P. R.*, *Kato T.* A Generalization of Dissipativity and Positive Semigroups // Journal of Operator Theory. — 1982. — Vol. 8, no. 1. — P. 167–180.

63. *Koshkin S.* A short proof of the Arendt-Chernoff-Kato theorem // Archiv der Mathematik. — 2013. — July. — Vol. 101, no. 2. — P. 143–147.

64. *Богачёв В. И.*, *Смолянов О. Г.*, *Соболев В. И.* Топологические векторные пространства и их приложения. — Москва–Ижевск : НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2012. — 584 с.

65. *Богачёв В. И.* Основы теории меры. В 2-х томах. — 3-е изд. — Москва–Ижевск : НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», Институт компьютерных исследований, 2021. — 962 с.

66. *Gallager R. G.* Information theory and reliable communication. — 1st ed. — Hoboken, NJ : Wiley, 1968. — 588 p.

67. *Kullback S.* Information theory and statistics. — Gloucester, MA : P. Smith, 1978. — 402 p.

68. *MacKay D. J. C.* Information theory, inference and learning algorithms. — 1st ed. — Cambridge : Cambridge University Press, 2002. — 640 p.

69. *Cover T. M.*, *Thomas J. A.* Elements of information theory. — 2nd ed. — Hoboken, NJ : Wiley-Interscience, 2006. — 774 p. — (Wiley Series in Telecommunications and Signal Processing).

70. *Alfsen E. M.* Compact convex sets and boundary integrals. Vol. 57. — Berlin–New York : Springer-Verlag, 1971. — x+210. — (Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete).

71. *Pavlov D.* Gelfand-type duality for commutative von Neumann algebras // Journal of Pure and Applied Algebra. — 2022. — Apr. — Vol. 226, no. 4. — 106884.

72. *Shannon C. E.* A mathematical theory of communication // The Bell System Technical Journal. — 1948. — Vol. 27, no. 3. — P. 379–423.

73. *Shannon C. E.* The zero error capacity of a noisy channel // IRE Transactions on Information Theory. — 1956. — Sept. — Vol. 2, no. 3. — P. 8–19.

74. *Холево А. С.* Информационная емкость квантовой наблюдаемой // Проблемы передачи информации. — 2012. — Т. 48, № 1. — С. 3—14.

75. *Nielsen M. A.*, *Chuang I. L.* Quantum computation and quantum information: 10th anniversary edition. — Cambridge : Cambridge University Press, 2010. — 702 p.

76. *Холево А. С.* К математической теории квантовых каналов связи // Проблемы передачи информации. — 1972. — Т. 8, № 1. — С. 62—71.

77. *Zadeh L. A.* Fuzzy sets // Information and Control. — 1965. — Vol. 8, no. 3. — P. 338–353.

78. *Холево А. С.* Комплементарные каналы и проблема аддитивности // Теория вероятностей и ее применения. — 2006. — Т. 51, № 1. — С. 133—143.

79. *Gorini V.*, *Kossakowski A.*, *Sudarshan E. C. G.* Completely positive dynamical semigroups of N-level systems // Journal of Mathematical Physics. — 1976. — Vol. 17, no. 5. — P. 821–825.

80. *Barchielli A.*, *Lupieri G.*, *Macchiavello C.* Instruments and mutual entropies in quantum information // Banach Center Publications. — 2006. — Vol. 73. — P. 65–80.

81. *Ozawa M.* On information gain by quantum measurements of continuous observables // Journal of Mathematical Physics. — 1986. — Vol. 27, no. 3. — P. 759–763.

82. *Berta M.*, *Renes J. M.*, *Wilde M. M.* Identifying the information gain of a quantum measurement // IEEE Transactions on Information Theory. — 2014. — Dec. — Vol. 60, no. 12. — P. 7987–8006.

83. *Winter A.*, *Massar S.* Compression of quantum-measurement operations // Physical Review A. — 2001. — Vol. 64, no. 1. — 012311.

84. *Shirokov M. E.* Entropy reduction of quantum measurements // Journal of Mathematical Physics. — 2011. — May. — Vol. 52, no. 5. — 052202.

85. *Кузнецова А. А.*, *Холево А. С.* Теоремы кодирования для гибридных каналов // Теория вероятностей и ее применения. — 2013. — Т. 58, № 2. — С. 298—324.

86. *Кузнецова А. А.*, *Холево А. С.* Теоремы кодирования для гибридных каналов. II // Теория вероятностей и ее применения. — 2014. — Т. 59, № 1. — С. 168—178.

87. *Perinotti P.*, *Tosini A.*, *Vaglini L.* Which entropy for general physical theories? // Quantum. — 2024. — June. — Vol. 8. — 1384.

88. *Medeiros R.*, *Assis F. M. de*. Zero-error capacity of a quantum channel // Telecommunications and Networking - ICT 2004 / ed. by J. N. de Souza, P. Dini, P. Lorenz. — Berlin, Heidelberg : Springer, 2004. — P. 100–105.

89. *Доси А.* Гильбертовы операторные системы // Функциональный анализ и его приложения. — 2019. — Т. 53, № 2. — С. 79—86.

90. *Weaver N.* Quantum Graphs as Quantum Relations // Journal of Geometric Analysis. — 2021. — Vol. 31, no. 9. — P. 9090–9112.

91. *Amosov G. G.* On general properties of non-commutative operator graphs // Lobachevskii Journal of Mathematics. — 2018. — Apr. — Vol. 39, no. 3. — P. 304–308.

92. *Амосов Г. Г.*, *Мокеев А. С.* О построении антиклик для некоммутативных операторных графов // Исследования по линейным операторам и теории функций. 45. Т. 456. — СПб. : ПОМИ, 2017. — С. 5—15. — (Записки научных семинаров ПОМИ).

93. *Amosov G. G.*, *Mokeev A. S.* On non-commutative operator graphs generated by covariant resolutions of identity // Quantum Information Processing. — 2018. — Oct. — Vol. 17, no. 12. — 325.

94. *Amosov G. G.* On operator systems generated by reducible projective unitary representations of compact groups // Turkish Journal of Mathematics. — 2019. — Vol. 43. — P. 2366–2370.

95. *Amosov G. G.*, *Mokeev A. S.* On linear structure of non-commutative operator graphs // Lobachevskii Journal of Mathematics. — 2019. — Oct. — Vol. 40, no. 10. — P. 1440–1443.

96. *Amosov G. G.*, *Mokeev A. S.*, *Pechen A. N.* Non-commutative graphs and quantum error correction for a two-mode quantum oscillator // Quantum Information Processing. — 2020. — Feb. — Vol. 19, no. 3. — 95.

97. *Amosov G. G.*, *Mokeev A. S.* On Errors Generated by Unitary Dynamics of Bipartite Quantum Systems // Lobachevskii Journal of Mathematics. — 2020. — Dec. — Vol. 41, no. 12. — P. 2310–2315.

98. *Amosov G. G.*, *Mokeev A. S.*, *Pechen A. N.* Noncommutative graphs based on finite-infinite system couplings: Quantum error correction for a qubit coupled to a coherent field // Physical Review A. — 2021. — Apr. — Vol. 103, no. 4. — 042407.

99. *Weaver N.* A “quantum” Ramsey theorem for operator systems // Proceedings of the American Mathematical Society. — 2017. — May. — Vol. 145, no. 11. — P. 4595–4605.

100. *Weaver N.* The “quantum” Turán problem for operator systems // Pacific Journal of Mathematics. — 2019. — Sept. — Vol. 301, no. 1. — P. 335–349.

101. *Cameron P. J.*, *Montanaro A.*, *Newman M. W.*, *Severini S.*, *Winter A.* On the quantum chromatic number of a graph // The Electronic Journal of Combinatorics. — 2007. — Vol. 14, no. 1. — R37.

102. *Arora S.*, *Barak B.* Computational Complexity: A Modern Approach. — Cambridge : Cambridge University Press, 2009. — 594 p.

103. *Weaver N.* Quantum relations // Memoirs of the American Mathematical Society. — 2012. — Vol. 215. — P. 81–140.

104. *Knill E.*, *Laflamme R.* Theory of quantum error-correcting codes // Physical Review A. — 1997. — Feb. — Vol. 55, no. 2. — P. 900–911.

105. *Duan R.* Super-activation of zero-error capacity of noisy quantum channels. — 2009. — arXiv: 0906.2527 [quant-ph]. — (Visited on 09/15/2026).

106. *Shirokov M. E.*, *Shulman T. V.* On superactivation of zero-error capacities and reversibility of a quantum channel // Communications in Mathematical Physics. — 2015. — Mar. — Vol. 335, no. 3. — P. 1159–1179.

107. *Breuer H.-P.*, *Petruccione F.* The Theory of Open Quantum Systems. — Oxford : Oxford University Press, 01/2007. — 626 p.

108. *Bhat B. V. R.* An index theory for quantum dynamical semigroups // Transactions of the American Mathematical Society. — 1996. — Vol. 348, no. 2. — P. 561–583.

109. *Bhat B. V. R.* Minimal dilations of quantum dynamical semigroups to semigroups of endomorphisms of C^*-algebras // Journal of the Ramanujan Mathematical Society. — 1999. — Vol. 14, no. 2. — P. 109–124.

110. *Hamana M.* Injective envelopes of C^*-dynamical systems // Tohoku Mathematical Journal, Second Series. — 1985. — Vol. 37, no. 4. — P. 463–487.

111. *Engelking R.* General Topology. Vol. 6. — Revised and completed. — Berlin : Heldermann Verlag, 1989. — 543 p. — (Sigma Series in Pure Mathematics).

112. *Butzer P. L.*, *Berens H.* Semi-groups of operators and approximation. — Berlin : Springer, 1967. — 318 p.

113. *Neerven J. van*. The adjoint of a semigroup of linear operators. — 1st ed. — Berlin : Springer, 1992. — 195 p. — (Lecture Notes in Mathematics).

114. *Siemon I.*, *Holevo A. S.*, *Werner R. F.* Unbounded generators of dynamical semigroups // Open Systems & Information Dynamics. — 2017. — Dec. — Vol. 24, no. 4. — 1740015.

115. *Gaebler D. J.* Unital Dilations of Completely Positive Semigroups : PhD thesis / Gaebler D. J. — The University of Iowa, 2013. — arXiv: 1304.0134 [math.OA].

116. *Rudolph T.*, *Grover L. K.* A 2 rebit gate universal for quantum computing. — 2002. — arXiv: quant-ph/0210187 [quant-ph]. — (Visited on 09/15/2026).

117. *Delfosse N.*, *Guerin P. A.*, *Bian J.*, *Raussendorf R.* Wigner Function Negativity and Contextuality in Quantum Computation on Rebits // Physical Review X. — 2015. — Apr. — Vol. 5, no. 2. — 021003.

118. *Helton J. W.*, *Klep I.*, *McCullough S.* The matricial relaxation of a linear matrix inequality // Mathematical Programming. — 2012. — Mar. — Vol. 138, no. 1/2. — P. 401–445.

119. *Christensen E.* Generators of semigroups of completely positive maps // Communications in Mathematical Physics. — 1978. — Vol. 62, no. 2. — P. 167–171.

120. *Christensen E.*, *Evans D. E.* Cohomology of operator algebras and quantum dynamical semigroups // Journal of the London Mathematical Society. — 1979. — Vol. 2, no. 2. — P. 358–368.

121. *Belton A. C. R.* Introduction to Classical and Quantum Markov Semigroups // Open Quantum Systems : A Mathematical Perspective / ed. by D. Bahns, A. Pohl, I. Witt. — Cham : Springer International Publishing, 2019. — P. 1–54.

122. *Kishimoto A.* Dissipations and derivations // Communications in Mathematical Physics. — 1976. — Vol. 47. — P. 25–32.

123. *Холево А. С.* Условно положительно определенные функции в квантовой теории вероятностей //. Т. 36. — М. : ВИНИТИ, 1989. — С. 103—147. — (Итоги науки и техники. Сер. Современные проблемы математики. Новейшие достижения).

124. *Krein M. G.* On positive additive functionals in linear normed spaces // Communications de l'Institut des Sciences Mathématiques et Mécaniques de l'Université de Kharkoff. — 1937. — Vol. 14. — P. 227–237.

125. *Ende F. vom*. Quantum-Dynamical Semigroups and the Church of the Larger Hilbert Space // Open Systems & Information Dynamics. — 2023. — Mar. — Vol. 30, no. 1. — 2350003.

126. *Caves C. M.*, *Drummond P. D.* Quantum limits on bosonic communication rates // Reviews of Modern Physics. — 1994. — Apr. — Vol. 66, no. 2. — P. 481–537.

127. *Hall M. J. W.* Quantum information and correlation bounds // Physical Review A. — 1997. — Vol. 55, no. 1. — P. 100.

128. *De Palma G.*, *Trevisan D.*, *Giovannetti V.* Normal form decomposition for Gaussian-to-Gaussian superoperators // Journal of Mathematical Physics. — 2015. — May. — Vol. 56, no. 5. — 052202.

129. *Schroeck Jr. F. E.* Quantum Mechanics on Phase Space. Vol. 74. — Dordrecht, Netherlands : Springer Science & Business Media, 2013. — 352 p. — (Fundamental Theories of Physics).

130. *Thompson J.*, *Lukin M. D.* Quantum systems under control // Science. — 2014. — July. — Vol. 345, no. 6194. — P. 272–273.

131. *Wigner E. P.* On the quantum correction for thermodynamic equilibrium // Physical Review. — 1932. — Vol. 40, no. 5. — P. 749.

132. *Glauber R. J.* Photon correlations // Physical Review Letters. — 1963. — Vol. 10, no. 3. — P. 84.

133. *Sudarshan E. C. G.* Equivalence of semiclassical and quantum mechanical descriptions of statistical light beams // Physical Review Letters. — 1963. — Vol. 10, no. 7. — P. 277.

134. *Cahill K. E.*, *Glauber R. J.* Density operators and quasiprobability distributions // Physical Review. — 1969. — Vol. 177, no. 5. — P. 1882.

135. *Agarwal G. S.*, *Wolf E.* Calculus for functions of noncommuting operators and general phase-space methods in quantum mechanics. II. Quantum mechanics in phase space // Physical Review D. — 1970. — Vol. 2, no. 10. — P. 2187–2205.

136. *Husimi K.* Some formal properties of the density matrix // Proceedings of the Physico-Mathematical Society of Japan. 3rd Series. — 1940. — Vol. 22, no. 4. — P. 264–314.

137. *Kano Y.* A new phase-space distribution function in the statistical theory of the electromagnetic field // Journal of Mathematical Physics. — 1965. — Vol. 6, no. 12. — P. 1913–1915.

138. *Ferrie C.*, *Emerson J.* Framed Hilbert space: hanging the quasi-probability pictures of quantum theory // New Journal of Physics. — 2009. — June. — Vol. 11, no. 6. — 063040.

139. *Galvão E. F.* Discrete Wigner functions and quantum computational speedup // Physical Review A. — 2005. — Vol. 71, no. 4. — 042302.

140. *Spekkens R. W.* Negativity and Contextuality are Equivalent Notions of Nonclassicality // Physical Review Letters. — 2008. — July. — Vol. 101, no. 2. — 020401.

141. *Ferrie C.* Quasi-probability representations of quantum theory with applications to quantum information science // Reports on Progress in Physics. — 2011. — Oct. — Vol. 74, no. 11. — 116001.

142. *Veitch V.*, *Ferrie C.*, *Gross D.*, *Emerson J.* Negative quasi-probability as a resource for quantum computation // New Journal of Physics. — 2012. — Vol. 14, no. 11. — 113011.

143. *Veitch V.*, *Mousavian S. A. H.*, *Gottesman D.*, *Emerson J.* The resource theory of stabilizer quantum computation // New Journal of Physics. — 2014. — Vol. 16, no. 1. — 013009.

144. *Howard M.*, *Wallman J.*, *Veitch V.*, *Emerson J.* Contextuality supplies the 'magic' for quantum computation // Nature. — 2014. — June. — Vol. 510, no. 7505. — P. 351–355.

145. *Pashayan H.*, *Wallman J. J.*, *Bartlett S. D.* Estimating Outcome Probabilities of Quantum Circuits Using Quasiprobabilities // Physical Review Letters. — 2015. — Aug. — Vol. 115, no. 7. — 070501.

146. *Mancini S.*, *Man'ko V. I.*, *Tombesi P.* Symplectic tomography as classical approach to quantum systems // Physics Letters A. — 1996. — Vol. 213, no. 1/2. — P. 1–6.

147. *Man'ko V. I.* Quantum mechanics and classical probability theory // Symmetries in Science IX / ed. by B. Gruber, M. Ramek. — New York : Plenum Press, 1997. — P. 251–258.

148. *Filippov S. N.*, *Man'ko V. I.* Symmetric informationally complete positive operator valued measure and probability representation of quantum mechanics // Journal of Russian Laser Research. — 2010. — May. — Vol. 31, no. 3. — P. 211–231.

149. *Fedorov A. K.* Feynman integral and perturbation theory in quantum tomography // Physics Letters A. — 2013. — Nov. — Vol. 377, no. 37. — P. 2320–2323.

150. *Lvovsky A. I.*, *Raymer M. G.* Continuous-variable optical quantum-state tomography // Reviews of Modern Physics. — 2009. — Mar. — Vol. 81, no. 1. — P. 299–332.

151. *Busch P.* Informationally complete sets of physical quantities // International Journal of Theoretical Physics. — 1991. — Vol. 30, no. 9. — P. 1217–1227.

152. *Busch P.*, *Cassinelli G.*, *Lahti P. J.* Probability structures for quantum state spaces // Reviews in Mathematical Physics. — 1995. — Vol. 7, no. 07. — P. 1105–1121.

153. *Renes J. M.*, *Blume-Kohout R.*, *Scott A. J.*, *Caves C. M.* Symmetric informationally complete quantum measurements // Journal of Mathematical Physics. — 2004. — Vol. 45, no. 6. — P. 2171–2180.

154. *Caves C. M.*, *Fuchs C. A.*, *Schack R.* Unknown quantum states: The quantum de Finetti representation // Journal of Mathematical Physics. — 2002. — Sept. — Vol. 43, no. 9. — P. 4537–4559.

155. *Fuchs C. A.*, *Sasaki M.* Squeezing quantum information through a classical channel: measuring the "quantumness" of a set of quantum states // Quantum Information & Computation. — 2003. — Sept. — Vol. 3, no. 5. — P. 377–404.

156. *Jozsa R.* An introduction to measurement based quantum computation // NATO Science Series, III: Computer and Systems Sciences. Quantum Information Processing-From Theory to Experiment. — 2006. — Vol. 199. — P. 137–158.

157. *Caves C. M.*, *Fuchs C. A.*, *Schack R.* Quantum probabilities as Bayesian probabilities // Physical Review A. — 2002. — Jan. — Vol. 65, no. 2. — 022305.

158. *Fuchs C. A.*, *Schack R.* Quantum-Bayesian coherence // Reviews of Modern Physics. — 2013. — Dec. — Vol. 85, no. 4. — P. 1693–1715.

159. *Appleby M.*, *Fuchs C. A.*, *Stacey B. C.*, *Zhu H.* Introducing the Qplex: a novel arena for quantum theory // The European Physical Journal D. — 2017. — Vol. 71, no. 7. — 197.

160. *Fuchs C. A.*, *Hoang M. C.*, *Stacey B. C.* The SIC question: History and state of play // Axioms. — 2017. — Sept. — Vol. 6, no. 3. — 21.

161. *Weigert S.* Quantum Time Evolution in Terms of Nonredundant Probabilities // Physical Review Letters. — 2000. — Jan. — Vol. 84, no. 5. — P. 802–805.

162. *Weigert S.* Simple minimal informationally complete measurements for qudits // International Journal of Modern Physics B. — 2006. — May. — Vol. 20, no. 11–13. — P. 1942–1955.

163. *DeBrota J. B.*, *Fuchs C. A.*, *Stacey B. C.* The varieties of minimal tomographically complete measurements // International Journal of Quantum Information. — 2020. — Nov. — Vol. 18, no. 7. — 2040005.

164. *Smania M.*, *Kleinmann M.*, *Cabello A.*, *Bourennane M.* Experimental certification of an informationally complete quantum measurement in a device-independent protocol // Optica. — 2020. — Feb. — Vol. 7, no. 2. — P. 123–128.

165. *Planat M.* The Poincaré half-plane for informationally-complete POVMs // Entropy. — 2017. — Vol. 20, no. 1. — 16.

166. *Chruściński D.*, *Kossakowski A.*, *Marmo G.*, *Sudarshan E. C. G.* Stochastic evolution of finite level systems: classical versus quantum // Physica Scripta. — 2013. — Apr. — Vol. 87, no. 4. — 045015.

167. *Chruściński D.*, *Kossakowski A.* On pseudo-stochastic matrices and pseudo-positive maps // Physica Scripta. — 2015. — Oct. — Vol. 90, no. 11. — 115202.

168. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц. — Москва : Физматлит, 2010. — 560 с.

169. *Jamiołkowski A.* Linear transformations which preserve trace and positive semidefiniteness of operators // Reports on Mathematical Physics. — 1972. — Vol. 3, no. 4. — P. 275–278.

170. *Lindblad G.* Completely positive maps and entropy inequalities // Communications in Mathematical Physics. — 1975. — Vol. 40, no. 2. — P. 147–151.

171. *Wolf M. M.* Quantum channels and operations-guided tour. — 2012. — URL: `https://mediatum.ub.tum.de/1701036` (visited on 09/15/2026) ; Lecture notes.

172. *Paz-Silva G. A.*, *Hall M. J. W.*, *Wiseman H. M.* Dynamics of initially correlated open quantum systems: Theory and applications // Physical Review A. — 2019. — Oct. — Vol. 100, no. 4. — 042120.

173. *Appleby D. M.*, *Flammia S. T.*, *Fuchs C. A.* The Lie algebraic significance of symmetric informationally complete measurements // Journal of Mathematical Physics. — 2011. — Vol. 52, no. 2. — 022202.

174. *Appleby D. M.*, *Fuchs C. A.*, *Zhu H.* Group theoretic, Lie algebraic and Jordan algebraic formulations of the SIC existence problem // Quantum Information & Computation. — 2015. — Vol. 15, no. 1/2. — P. 61–94.

175. *Carrasquilla J.*, *Torlai G.*, *Melko R. G.*, *Aolita L.* Probabilistic simulation of quantum circuits using a deep-learning architecture // Physical Review A. — 2021. — Sept. — Vol. 104, no. 3. — 032610.

176. *Luchnikov I. A.*, *Vintskevich S. V.*, *Ouerdane H.*, *Filippov S. N.* Variational Autoencoder Reconstruction of Complex Many-Body Physics // Entropy. — 2019. — Nov. — Vol. 21, no. 11. — 1091.