Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова

Механико-математический факультет

На правах рукописи

УДК 517.55+517.958



Шумкин Михаил Александрович

Голоморфные решения матричных солитонных уравнений

1.1.1 — Вещественный, комплексный и функциональный анализ

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель
доктор физико-математических наук
А. В. Домрин

Москва — 2026

Работа выполнена на кафедре теории функций и функционального анализа механико-математического факультета Федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова»

НАУЧНЫЙ РУКОВОДИТЕЛЬ - Домрин Андрей Викторович, доктор физико-математических наук, доцент, профессор кафедры теории функций и функционального анализа механико-математического факультета Федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова»
(специальность – 01.01.01)

ОФИЦИАЛЬНЫЕ ОППОНЕНТЫ:

Адлер Всеволод Эдуардович — доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник сектора математической физики Федерального государственного бюджетного учреждения науки Институт теоретической физики им. Л.Д. Ландау Российской академии наук
(специальность 01.01.03).

Богатырёв Андрей Борисович – доктор физико-математических наук, доцент, ведущий научный сотрудник творческого коллектива «Вычислительная математика и задачи биологии и медицины» FFMG-2026-0001, подтема «Оптимальные методы в задачах вычислительной математики и математического моделирования» Федерального государственного бюджетного учреждения науки Институт вычислительной математики им. Г.И. Марчука Российской академии наук
(специальность 01.01.01)

ВЕДУЩАЯ ОРГАНИЗАЦИЯ:

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Уфимский университет науки и технологий»

Защита диссертации состоится 24.12.2026 в 15 час. на заседании диссертационного совета 24.1.167.01 при МИАН по адресу: г. Москва ул. Губкина, д. 8.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке МИАН и на сайте https://mi-ras.ru/dis/ref26/shumkin/dis.pdf

Автореферат разослан « » октября 2026 г.

Ученый секретарь диссертационного совета 24.1.167.01
доктор физ.-мат. наук, профессор



В.А. Ватутин

Введение

Диссертация посвящена вопросам аналитического продолжения голоморфных решений некоторого класса эволюционных уравнений в частных производных в пространстве $\mathbb{C}^2$ двух комплексных переменных x, t. Оказывается, что любое решение $u(x,t)$, голоморфное в области вида $D_1 \times D_2 = \{(x,t) \in \mathbb{C}^2 \,|\, x \in D_1, t \in D_2\}$, допускает аналитическое продолжение до мероморфной функции $U(x,t)$ на $\mathbb{C} \times D_2$ (и, тем самым, до глобально мероморфной функции от пространственной переменной x при каждом значении t), причём существуют решения, не продолжаемые никуда дальше. Мы также излагаем способ построения всех локальных голоморфных решений с помощью задачи Римана о факторизации и критерий разрешимости локальной голоморфной задачи Коши для этих уравнений. Изучаемый класс уравнений содержит наряду с широко известными солитонными уравнениями (такими как уравнение Кортевега–де Фриза и нелинейное уравнение Шрёдингера) все члены их иерархий и различные матричные версии как самих уравнений, так и их иерархий. В заключительной главе работы полученные результаты применяются для описания аналитических свойств решений некоторых нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений, возникающих в приложениях.

Актуальность темы. Вопрос о разрешимости локальной голоморфной задачи Коши для дифференциальных уравнений в частных производных был поставлен и в значительной степени решён ещё в середине XIX века. Ответ даётся теоремой Коши–Ковалевской ([1], [2]), которую мы сформулируем в нужном нам частном случае.

(A) *Пусть n — натуральное число, A — множество всех пар $\alpha = (k,l)$ неотрицательных целых чисел с $k + l \leqslant n$ и $l < n$, а функция $P(x,t,\{\xi_\alpha\}_{\alpha\in A})$ голоморфна по x,t в окрестности точки $(x_0,t_0) \in \mathbb{C}^2$ и является целой функцией от остальных пепременных. Тогда для любых голоморфных ростков $u_0, u_1, \ldots, u_{n-1}$ в точке $x_0 \in \mathbb{C}$ задача Коши $\partial_t^k u(x,t_0) = u_k(x)$, $k = 0,1,\ldots,n-1$, для уравнения $\partial_t^n u = P(x,t,\{\partial^\alpha u\}_{\alpha\in A})$, где $\partial^\alpha u := \partial_x^k \partial_t^l u$, имеет голоморфное в окрестности точки (x_0,t_0) решение $u(x,t)$.*

С. В. Ковалевская [1] также отметила, что без условия $k + l \leqslant n$ в определении множества A это утверждение уже не имеет места. Например, задача Коши $u(x,0) = 1/(1-x)$ для уравнения $\partial_t u = \partial_x^2 u$ не имеет голоморфных в окрестности $(0,0)$ решений. Фактически в [1] был установлен критерий разрешимости задачи Коши для уравнения теплопроводности (частный случай $m = 2$ следующего утверждения, полученного Г. С. Салеховым [38]).

(B) *Пусть $m \geqslant 2$ — целое число. Голоморфное в окрестности точки (x_0,t_0) решение задачи Коши $u(x,t_0) = u_0(x)$ для уравнения $\partial_t u = \partial_x^m u$ существует тогда и только тогда, когда функция $u_0(x)$ совпадает в окрестности точки x_0 с некоторой целой функцией порядка не выше $m/(m-1)$ и конечного типа при порядке $m/(m-1)$.*

Из этого критерия вытекает утверждение о принудительном аналитическом продолжении всех голоморфных решений уравнения $\partial_t u = \partial_x^m u$ до целых функций от x при каждом значении t.

(C) *Пусть $m \geqslant 2$ — целое число. Тогда для любого голоморфного решения $u(x,t)$ уравнения $\partial_t u = \partial_x^m u$ в области $D_1 \times D_2 = \{(x,t) \in \mathbb{C}^2 \,|\, x \in D_1, t \in D_2\}$ существует голоморфная функция[1] $U(x,t)$ на $\mathbb{C} \times D_2$ такая, что $U = u$ на $D_1 \times D_2$.*

[1] Которая по теореме единственности также является решением уравнения $\partial_t u = \partial_x^m u$.

Известно (см. обзор [3]), что это свойство принудительного аналитического продолжения, но только с заменой целых функций на функции, мероморфные на $\mathbb{C}$, имеет место и для всех голоморфных решений *солитонных уравнений*, т.е. нелинейных эволюционных уравнений, интегрируемых методом обратной задачи. Об истории открытия солитонных уравнений, физической мотивировке и различных подходах к их определению см. например, [13], [14]. Исторически первым примером было уравнение Кортевега-де Фриза (КдФ)

$$u_t = u_{xxx} + 6uu_x,$$

предложенное в 1895 г. для описания волн на воде, а затем численно исследованное в 1965 г. Крускалом и Забуски, которые и ввели термин "солитон" (уединённая волна, рассматриваемая как частица).

В рамках метода одевания (В. Е. Захаров и А. Б. Шабат [35], см. также [13], гл. III, § 6 и [14], часть II, гл. I, § 3) солитонные уравнения с одной пространственной переменной записываются в виде уравнений нулевой кривизны

$$U_t - V_x + [U, V] = 0, \tag{0.1}$$

где $U(x,t,z)$, $V(x,t,z)$ — рациональные $\mathrm{gl}(n,\mathbb{C})$-значные функции от спектрального параметра $z \in \mathbb{C}$, коэффициенты разложений которых на простейшие дроби являются некоторыми выражениями от неизвестных функций (голоморфно зависящих от x и t), подобранными так, чтобы левая часть уравнения (0.1) не зависела от z. Здесь $[U,V] = UV - VU$ означает коммутатор матриц.

Например, представление нулевой кривизны для уравнения КдФ получится, если положить

$$q(x,t) = \begin{pmatrix} 0 & u(x,t) \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad a = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & -1/2 \end{pmatrix},$$

$$U(x,t,z) = az + q(x,t), \quad V(x,t,z) = az^3 + F_1(q)z^2 + F_2(q)z + F_3(q),$$

где отображения F_j, $j = 1,2,3$, являются надлежащими дифференциальными полиномами[2] от q (построение F_j описано в лемме 1 ниже, причём матрицы c_j, фигурирующие в этой лемме, нужно положить равными нулю).

Пусть (U_0, V_0) — голоморфное решение уравнения (0.1) в $\Omega \times D$ для некоторых областей $\Omega \subset \mathbb{C}^2_{xt}$ и $D \subset \overline{\mathbb{C}}_z$. Несложно убедиться, что для любого голоморфного отображения $g : \Omega \times D \to \mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ пара (U_1, V_1), определяемая формулами

$$U_1 = g_x g^{-1} + gU_0 g^{-1}, \qquad V_1 = g_t g^{-1} + gV_0 g^{-1},$$

также удовлетворяет (0.1). Однако в общем случае U_1 и V_1, как функции от z, уже не рациональны, даже если U_0 и V_0 были таковыми.

Идея метода одевания состоит в том, чтобы контролировать рациональность функций U, V и их дивизоры[3] с помощью задачи Римана. Изложим кратко, как

[2] Пусть q — матричнозначная функция. Мы скажем, что F — это дифференциальный полином от q (со значениями в $\mathrm{gl}(n,\mathbb{C})$), если каждый элемент матрицы $F(q)$ есть многочлен от элементов матрицы q и их производных по x. Соответственно, мы скажем, что F — это интегро-дифференциальный полином от q, если каждый элемент матрицы $F(q)$ получается из элементов матрицы q применением конечного числа алгебраических операций, а также дифференцирования и интегрирования по переменной x.

[3] Напомним, что дивизором рациональной функции называется формальная сумма её полюсов с целочисленными коэффициентами, равными порядкам полюсов.

это делается. Заметим сначала, что для односвязной области Ω выполнение (0.1) эквивалентно разрешимости вспомогательной линейной системы

$$E_x = UE, \quad E_t = VE, \tag{0.2}$$

где $E : \Omega \times D \to \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ – голоморфное отображение.

Пусть (U_0, V_0) — решение (0.1), причём область Ω односвязна. Выберем гладкий жорданов контур γ в $\overline{\mathbb{C}}_z$, не проходящий через полюсы U_0, V_0. Тогда $\overline{\mathbb{C}}_z = \gamma \sqcup D_+ \sqcup D_-$, где $D_\pm$ — области в $\overline{\mathbb{C}}_z$. Скажем, что непрерывная на γ функция f со значениями в $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ *факторизуема*, если существуют такие непрерывные отображения $f_\pm : \overline{D}_\pm \to \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$, голоморфные на $D_\pm$ соответственно, что $f(z) = f_-^{-1}(z) f_+(z)$ при всех $z \in \gamma$. Отображение f при этом называется *данными* задачи Римана, а пара отображений $f_\pm$ — её *решением*.

Обозначим решение системы (0.2) с $U = U_0$ и $V = V_0$ через E_0 и выберем контур γ и непрерывную на нем функцию f так, чтобы следующая задача Римана была разрешима при всех $(x, t) \in \Omega$:

$$E_0(x, t, z) f(z) E_0^{-1}(x, t, z) = g_-^{-1}(x, t, z) g_+(x, t, z), \quad z \in \gamma. \tag{0.3}$$

При выполнении условий нормировки $E_0(x_0, t_0, z) \equiv I$ и $g_-(x, t, z_0) \equiv I$ для некоторых заранее выбранных точек $(x_0, t_0) \in \Omega$ и $z_0 \in D_-$, решение $g_\pm$ этой задачи Римана единственно, причем его компоненты, т.е. функции $g_\pm(x, t, z)$ и $g_\pm^{-1}(x, t, z)$, голоморфно зависят от $(x, t) \in \Omega$. Определим U_1, полагая

$$U_1(x, t, z) = \begin{cases} (g_+)_x g_+^{-1} + g_+ U_0 g_+^{-1} & \text{при} \quad z \in \overline{D}_+, \\ (g_-)_x g_-^{-1} + g_- U_0 g_-^{-1} & \text{при} \quad z \in \overline{D}_-, \end{cases}$$

и зададим V_1 теми же формулами с заменой U_0 на V_0 и производных по x на производные по t. Тогда проверяется (см., например, [3], § 1), что U_1, V_1 действительно удовлетворяют (0.1) и, более того, являются рациональными функциями от z с теми же дивизорами, что и U_0, V_0.

Чтобы солитонное уравнение, заданное условием нулевой кривизны (0.1), было эволюционным, т.е. имело вид $u_t = F(u, u_x, u_{xx}, \ldots)$, надо выбирать дивизоры рациональных функций U и V в виде ∞ и $m \cdot \infty$, т.е. считать U и V полиномами от z первой и m-й степени соответственно. Тогда без ограничения общности можно записать (см. [3], п. 2.1)

$$U(x, t, z) = az + q(x, t), \quad V(x, t, z) = bz^m + r_1(x, t) z^{m-1} + \ldots + r_m(x, t), \tag{0.4}$$

где $a, b \in \mathrm{gl}(n, \mathbb{C})$ — диагональные матрицы[4], $q : \Omega \to \mathrm{gl}(n, \mathbb{C})$ — внедиагональное[5] голоморфное отображение, $r_j : \Omega \to \mathrm{gl}(n, \mathbb{C})$ — голоморфные отображения.

Чаще всего налагается следующее условие невырожденности.

(D) *Диагональная матрица a имеет простой спектр, т.е. все её собственные значения различны.*

В этом случае требование, чтобы левая часть (0.1) не зависела от z, приводит (см. [3], лемма 1.3) к тому, что $r_j = F_j(q)$ при $j = 1, 2, \ldots, m$, где F_j — дифференциальные полиномы, не зависящие от m и определённые почти однозначно[6], а

[4] Удовлетворяющие некоторым условиям невырожденности, см. **(D)** и **(H)** ниже. Именно выбором этих условий различаются скалярные и матричные версии солитонных уравнений.

[5] Это означает, что все его диагональные элементы равны нулю.

[6] При фиксированных a, b они однозначно определяются условиями $F_k(0) \equiv c_k$, $k = 1, 2, \ldots, m$, где $c_1, c_2, \ldots$ — произвольная последовательность диагональных матриц.

уравнение (0.1) при таком выборе U и V из (0.4) принимает вид

$$q_t = [a, F_{m+1}(q)]. \tag{0.5}$$

Опишем обобщение критерия **(B)** на уравнения (0.5). В работе [3], § 5, (5.1), каждому голоморфному внедиагональному $\mathrm{gl}(n,\mathbb{C})$-значному ростку $q_0(x)$ в точке x_0 сопоставляется формальный степенной ряд $Lq_0(z) = \sum_{i=1}^{\infty} \varphi_i z^{-i}$ для некоторых внедиагональных матриц $\varphi_i \in \mathrm{gl}(n,\mathbb{C})$. Если этот ряд имеет ненулевой радиус сходимости, то росток $q_0(x)$ однозначно восстанавливается по $Lq_0(z)$ с помощью задачи Римана (0.3) при любом фиксированном $t = t_0$, одевающей $U_0(x, t_0, z) \equiv az$ (так что $E_0(x, t_0, z) = \exp\{a(x - x_0)z\}$) до $U_1(x, t_0, z) = az + q_0(x)$ посредством функции $f(z) := I + Lq_0(z)$ на таком контуре $\gamma := \{|z| = R\}$, что функция $Lq_0(z)$ голоморфна при $|z| \geqslant R$.

Но в общем случае ряд $Lq_0(z)$ расходится при всех z. Чтобы измерить, насколько быстро он расходится, вводится понятие *класса Жевре* с индексом $\alpha \geqslant 0$. А именно, ряд $\varphi(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k z^{-(k+1)}$ с $\varphi_k \in \mathrm{gl}(n,\mathbb{C})$ принадлежит Gev_α, если ряд $\sum_{k=0}^{\infty} (k!)^{-\alpha} |\varphi_k| x^k$ имеет ненулевой радиус сходимости.[7] Здесь $|\cdot|$ означает любую норму на $\mathrm{gl}(n,\mathbb{C})$, обладающую свойством $|AB| \leqslant |A||B|$.

В этих терминах справедлива следующая теорема ([3], Теорема 6.1(A)).

(E) *Фиксируем целое число $m \geqslant 2$ и диагональные матрицы*[8] *$a, b, c_i \in \mathrm{gl}(n,\mathbb{C})$ для $i = 1, \ldots, m$, причём a и b имеют простой спектр (см.* **(D)***). Тогда задача Коши $q(x, t_0) = q_0(x)$ для уравнения (0.5) имеет голоморфное в окрестности точки $(x_0, t_0) \in \mathbb{C}^2$ решение тогда и только тогда, когда ряд $Lq_0(z)$ принадлежит классу Жевре $\mathrm{Gev}_{1/m}$.*

Утверждение **(C)** о принудительном аналитическом продолжении решений также обобщается на уравнения вида (0.5). Для формулировки этого обобщения введём

Определение 1. Эволюционное уравнение $u_t = F(u, u_x, u_{xx}, \ldots)$ обладает *свойством мероморфного продолжения* (СМП), если для любого бидиска $D = \{(x,t) \in \mathbb{C}^2 \,|\, |x - x_0| < r_1, |t - t_0| < r_2\}$ и любого голоморфного в D решения $u(x,t)$ этого уравнения существует мероморфная в области $S = \{(x,t) \in \mathbb{C}^2 \,|\, x \in \mathbb{C}, |t - t_0| < r_2\}$ функция $U(x,t)$ такая, что $U = u$ на D.

В этих терминах справедлива следующая теорема ([3], Теорема 6.1(B)).

(F) *Фиксируем целое число $m \geqslant 2$ и диагональные матрицы $a, b, c_i \in \mathrm{gl}(n,\mathbb{C})$ для $i = 1, \ldots, m$, причём a и b имеют простой спектр (см.* **(D)***). Тогда соответствующее им уравнение (0.5) обладает* СМП.

Рассмотрим наиболее важные примеры. Пусть

$$a = b = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & -1/2 \end{pmatrix}, \quad q(x,t) = \begin{pmatrix} 0 & u(x,t) \\ v(x,t) & 0 \end{pmatrix}$$

[7] Не вдаваясь в детали (которые можно найти в [3], п. 7.2), отметим, что это понятие существенно обобщает понятия, используемые в **(A)** и **(B)**. Изначально классы Жевре $G^\alpha(I)$, где I – некоторый промежуток из $\mathbb{R}$, определялись как множество функций из $C^\infty(I)$, для которых найдутся такие $A, B > 0$, что $|f^{(n)}(x)| \leqslant AB^n(n!)^\alpha$ для всех $x \in I$ и $n \geqslant 0$. Классические результаты комплексного анализа показывают, что при $0 \leqslant \alpha < 1$ класс $G^\alpha(I)$ совпадает с множеством целых функций порядка не выше $1/(1-\alpha)$ и конечного типа при порядке $1/(1-\alpha)$. В случае $\alpha = 1/m$ приходим к пространству из критерия **(B)**.

[8] Напомним, что матрицы $a, b, c_1, \ldots, c_m$ однозначно определяют дифференциальные полиномы $F_0, F_1, \ldots, F_m$ и $[a, F_{m+1}]$ (правую часть уравнения (0.5)) условиями $F_0(q) \equiv b$ и $F_j(0) \equiv c_j$. Подробнее об этом см. лемму 1 ниже.

и все c_j равны нулю. Тогда уравнение (0.5) при $m = 2$ эквивалентно системе, связанной с нелинейным уравнением Шредингера (НУШ):

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} - 2u^2 v \\ v_t = -v_{xx} + 2uv^2 \end{cases}$$

При $v \equiv 1$ и $m = 3$ получаем уравнение КдФ:

$$u_t = u_{xxx} - 6u_x u.$$

При $v \equiv u$ и $m = 3$ получаем модифицированное уравнение КдФ (мКдФ):

$$u_t = u_{xxx} + 6u_x u^2.$$

Поэтому частным случаем **(F)** является следующее утверждение.

(G) *Все перечисленные уравнения* (*т.е. система* НУШ, КдФ, мКдФ) *обладают* СМП.

Основной вопрос, рассматриваемый в диссертации — это обобщение теорем **(E)** и **(F)** на случай многокомпонентных (в частности, матричных и векторных) солитонных уравнений. Исторически первым примером таких уравнений была предложенная в 1973 г. модель Манакова [18], а общую их теорию можно найти в монографиях [15], [36]. Многие примеры эволюционных (т.е. выражающих производную по t от неизвестной функции через саму эту функцию и её производные по x до некоторого порядка) многокомпонентых солитонных уравнений получаются подобно примерам, перечисленным в утверждении **(G)**, из уравнения нулевой кривизны (0.5), при построении которого вместо **(D)** используется следующее более слабое условие невырожденности.

(H) *Диагональная матрица a имеет хотя бы два различных собственных значения.*

Иными словами, есть множество уравнений, представляющих интерес, которые записываются в виде (0.5), если матрица a имеет диагональный вид, но с возможно повторяющимися элементами на диагонали (см. примеры в конце главы 1). В этом случае, однако, уравнения, получающиеся из (0.5), уже не обязаны быть дифференциальными. Они могут содержать операцию интегрирования (это видно из примеров (1.1.22), в которых отображения F_j являются интегро-дифференциальными полиномами). В случае выполнения условия **(D)** уравнения (0.5) всегда дифференциальные, но доказательство этого факта ([3], лемма 1.1) опирается на то, что если след диагональной матрицы и всех её степеней равен нулю, то и сама матрица нулевая. Для блочно-диагональных матриц указанное утверждение уже неверно. Тем не менее, удивительным образом теорема **(F)** верна для всех уравнений вида (0.5) при условии **(H)**, а теорема **(E)** верна для *дифференциальных* уравнений указанного вида. Это обсуждается в первой главе диссертации, где также установлен критерий (в терминах блочно-диагональных матриц $a, b, c_i \in \mathrm{gl}(n, \mathbb{C})$) того, что в уравнении (0.5) не возникает интегрирования.

Изложение в первой главе ведётся в более общем контексте интегрируемых эволюционных уравнений на градуированных алгебрах Ли, взятом из [16],[17]. Для объяснения этого контекста мы, следуя § 1 фундаментальной работы[9] В.Г. Дринфельда и В.В. Соколова [16], перепишем уравнение нулевой кривизны (0.1) в виде

[9] В которой всюду предполагается выполненным условие невырожденности **(D)**, хотя и указано в сноске в начале § 1, что с надлежащими изменениями всё переносится на случай более слабого условия невырожденности **(H)** т.е. на многокомпонентный случай.

равенства дифференциальных операторов $[\partial_x - U, \partial_t - V] = 0$ или, эквивалентно, в виде представления Лакса

$$L_t = [A, L] \tag{0.6}$$

для оператора первого порядка $L = \partial_x - U$ и оператора нулевого порядка $A = V$ (т.е. оператора $A\varphi = V\varphi$ умножения пробной функции φ на V). Мы по-прежнему считаем, что $U = az + q$, а V является полиномом степени m от спектрального параметра z.

"Записать уравнение в виде представления Лакса", как и в случае представления нулевой кривизны, означает подобрать оператор A, матрицу a и, возможно, наложить условия на значения, принимаемые отображением q, так, чтобы уравнение Лакса (0.6) не зависело от спектрального параметра z и стало эквивалентным заданному уравнению.

Независимость уравнения (0.6) от z гарантируется выбором $A = M_+$, где $M = bz^m + \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k z^{m-k}$ — любое решение уравнения $[L, M] = 0$ в виде формального ряда Лорана по z с конечным количеством слагаемых с положительными степенями, коэффициенты которого являются $\mathrm{gl}(n, \mathbb{C})$-значными отображениями, а "$+$" означает отбрасывание главной части формального ряда Лорана в нуле. Преимущество этого подхода заключается в том, что все конструкции являются чисто алгебраическими и легко обобщаются. Обобщение, предложенное в [17], состоит в том, что ряды Лорана по z рассматриваются как элементы $\mathbb{Z}$-градуированной алгебры Ли (например, алгебры Каца–Муди). В интересующей нас общности[10] можно сказать, что коэффициенты при z^j берутся из векторных подпространств B_j некоторой заранее фиксированной конечномерной алгебры Ли B, являющейся подалгеброй $\mathrm{gl}(n, \mathbb{C})$, причем B_j удовлетворяют условию градуировки $[B_k, B_j] = B_{k+j}$.

В [17] предложен интересный трюк, который именно в многокомпонентном случае (т.е. в случае, когда выполнено условие невырожденности **(H)**, но не выполнено **(D)**) позволяет существенно расширить класс изучаемых уравнений. Предлагается разбить алгебру Ли B_0 подходящим образом в прямую сумму векторных подпространств $B_\pm$, являющихся подалгебрами Ли в B_0 (подробнее см. пункт 1.1 главы 2), и считать, что при взятии положительной части ряда Лорана (например, в формуле $A = M_+$) компонента из B_+ любого монома степени 0 остаётся той же, а компонента из B_- отбрасывается. Таким образом, некоторые мономы степени 0 причисляются к отрицательной части ряда Лорана. Как показано в [17], данная манипуляция позволяет находить новые представления Лакса. Самым интересным для нас примером является второе модифицированное уравнение Кортевега–де Фриза (мКдФ2)

$$u_t = -u_{xxx} + 3(u_{xx}u - uu_{xx}) + 6uu_xu,$$

где $u(x, t)$ принимают значения в $\mathrm{gl}(n, \mathbb{C})$ (см. пример 7). В отличие от мКдФ1 (пример 4), представление этого уранения в виде (0.5) с условием невырожденности **(H)** нам неизвестно.

В первых двух главах диссертации мы покажем, что теоремы **(E)** и **(F)** обобщаются на случай конструкций из [16],[17] и продемонстрируем их применение к некоторым модельным уравнениям.

В третьей главе речь идёт о нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнениях, все (локальные голоморфные) решения которых глобально мероморфны. Классическим примером являются первое, второе и четвёртое уравнения Пенлеве[11],

[10] Мы, как и в [17], ограничиваемся иерархиями типа мКдФ в терминологии [16].

[11] Для третьего, пятого и шестого уравнений Пенлеве, решения общего положения имеют точки ветвления.

хотя это было аккуратно доказано только в XXI веке (см. монографию [24]) и все появившиеся с тех пор доказательства остаются длинными и труднообозримыми. В § 2 третьей главы мы дадим короткое доказательство с помощью теоремы 3, причём эта теорема используется не в полной общности, а в случае выполнения сильного условия невырожденности **(D)**. Доказательство опирается на тот факт (открытый А.Б.Шабатом [30]), что по решениям первого и второго уравнений Пенлеве строятся решения специального вида уравнений КдФ и мКдФ соответственно. В § 3 третьей главы на этом же пути получен новый результат, бывший открытым вопросом около двух десятков лет: доказана глобальная мероморфность всех решений уравнений, образующих иерархии первого и второго уравнений Пенлеве. В заключительном § 4 третьей главы при изучении матричных и векторных аналогов этих уравнений теорема 3 используется уже в своей полной общности.

Цель работы. Развитие метода обратной задачи теории рассеяния для локальных голоморфных потенциалов, эволюционирующих согласно интегрируемым уравнениям на градуированных алгебрах Ли. Вывод критерия разрешимости локальной голоморфной задачи Коши для многокомпонентных солитонных уравнений в терминах данных рассеяния начального условия. Доказательство возможности аналитического продолжения всех локальных голоморфных решений этих уравнений до глобально мероморфных функций от пространственной переменной. Применение полученных результатов к уравнениям Пенлеве и их иерархиям.

Положения, выносимые на защиту. Научная новизна. В диссертации получены следующие новые результаты.

1) Доказан критерий локальности многокомпонентных (матричных) солитонных уравнений (теорема 1).

2) Дано определение данных рассеяния и установлено, что они взаимно-однозначно параметризуют потенциалы (теоремы 2 и 4).

3) Доказан критерий разрешимости локальной голоморфной задачи Коши для интегрируемых эволюционных уравнений на градуированных алгебрах Ли в терминах данных рассеяния начального условия и установлено существование аналитического продолжения их решений по пространственной переменной до глобально мероморфной функции (теоремы 3 и 5).

4) Показано, что все локальные голоморфные решения всех уравнений, входящих в иерархии первого и второго уравнений Пенлеве, а также некоторых их матричных и векторных обобщений, допускают аналитическое продолжение до глобально мероморфных функций (теоремы 6–9).

Методы исследования. В работе используются различные методы математического анализа, теории групп и алгебр Ли, комплексного анализа, а также теории дифференциальных уравнений.

Теоретическая и практическая значимость. Диссертация носит теоретический характер. Результаты диссертации могут найти применение в теории дифференциальных уравнений, математической физике и физических задачах, связанных с солитонными уравнениями.

Апробация работы. Результаты диссертации обсуждались на кафедральном семинаре по многомерному комплексному анализу (семинар им. А.Г.Витушкина, механико-математический факультет МГУ, 2023-2024 годы) и на научном семинаре “Комплексные задачи математической физики” (МИАН, 2025 год), а также докладывались на конференции "Комплексный анализ, математическая физика и нелинейные уравнения"(Южный Урал, Яхты-Куль (озеро Банное), 11–14 марта 2020 г.) и школе-конференции “Уфимская осенняя математическая школа” (2023 г.).

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в пяти статьях [7]–[11], две из которых в соавторстве. Из совместных статей [9],[10] в диссертацию включены только результаты, полученные лично автором.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, трех глав, разбитых на параграфы, и списка литературы из 40 наименований. Общий объем диссертации — 104 страницы. В тексте принята сквозная нумерация. Во введении формулы нумеруются двумя числами (ставится 0, а затем идет номер формулы внутри введения), а в основном тексте — тремя (номер главы, номер параграфа и номер формулы внутри параграфа). Предложения, леммы, следствия, замечания и теоремы также имеют сквозную нумерацию в основном тексте. Во введении утверждения, цитируемые из основного текста, носят те же номера.

Краткое содержание диссертации. Первая глава состоит из трёх параграфов. Первый параграф посвящен основным определениям и алгебраическим построениям. Вводится понятие *основной алгебры* $\mathscr{C}$. Это $\mathbb{Z}$-градуированная ассоциативная алгебра, элементами которой являются формальные ряды Лорана $\sum_{k=-\infty}^{N} \varkappa_k z^k$ для любых $N \in \mathbb{Z}$ и $\varkappa_k \in B_k$, где B_k — векторные подпространства заранее фиксированной конечномерной комплексной матричной алгебры Ли B, удовлетворяющие условиям $[B_k, B_j] \subseteq B_{k+j}$. Далее фиксируется матрица $a \in B_1$, обладающая рядом свойств[12], главное из которых выражается равенствами

$$D_k \oplus N_k = B_k \quad \forall k \in \mathbb{Z},$$

где

$$D_k := \operatorname{Ker} \mathscr{A}, \quad N_k := \operatorname{Im} \mathscr{A}, \quad \mathscr{A}(\varkappa) := [a, \varkappa].$$

Фиксировав основную алгебру и матрицу a с указанными свойствами, мы строим отображения F_i с помощью леммы 1.

Лемма 1. *Пусть фиксированы основная алгебра $\mathscr{C}$ и матрица a, а также заданы матрицы $b \in D_m$, $c_1 \in D_{m-1}$, $c_2 \in D_{m-2}$, ... для некоторого $m \in \mathbb{N}$. Тогда существует единственная последовательность интегро-дифференциальных полиномов F_{m-k} $(k = m, m-1, m-2, ...)$, определенных на множестве всех голоморфных N_0-значных ростков в окрестности некоторой точки $x_0 \in \mathbb{C}$ (будем обозначать это множество через $N_0(x_0)$), таких, что*
1) $F_0(q) \equiv b$,
2) $F_j(0) \equiv c_j$ для всех $j = 1, 2, ...$,
3) формальный ряд Лорана $F(q, z) = \sum_{j=0}^{\infty} F_j(q) z^{-j}$ удовлетворяет уравнению

$$\partial_x F(q, z) = [az + q, F(q, z)]$$

тождественно по x и z для всех $q \in N_0(x_0)$.

Почти непосредственным следствием является лемма 2, устанавливающая эквивалентность уравнения нулевой кривизны (0.1) уравнению (0.5).

Лемма 2. *Для того, чтобы функции U, V вида (0.4) с фиксированной матрицей a, матрицей b из D_m и голоморфной функцией $q : \Omega \to N_0$ задавали голоморфное решение уравнения нулевой кривизны (0.1) на бидиске $\Omega := \Omega_1 \times \Omega_2 \subset \mathbb{C}^2_{xt}$, необходимо и достаточно выполнение следующих условий.*

(a) Коэффициенты r_j: $\Omega \to B_{m-j}$ полинома V должны выражаться через q формулами

$$r_j = F_j(q) \qquad j = 1, ..., m \tag{0.7}$$

[12] Они перечислены в пункте 1.1 главы 1.

для некоторых матриц $c_j(t)$, $j = 1, \dots, m$, принадлежащих D_{m-j}, коммутирующих с a и голоморфно зависящих от $t \in \Omega_2$.

(б) Голоморфная функция $q\colon \Omega \to N_0$ должна удовлетворять на Ω уравнению (0.5) для того же выбора матриц $c_i(t)$, что в пункте (а), и для произвольной матрицы c_{m+1} из D_{-1}, коммутирующей с a.

Уравнение (0.5), полученное в этой лемме, изучается на протяжении всей первой главы и называется *основным уравнением*.

Далее устанавливается предложение 1, в котором определяется один из основных инструментов дальнейших исследований — диагонализующее калибровочное преобразование T.

Предложение 1. *Пусть $L = \partial_x - az - q(x)$, где a и $q(x)$ — как в лемме 1. Тогда существует такой ряд $T = I + \sum_{j=1}^{\infty} T_j(x) z^{-j}$, где $T_j(x) \in N_{-j}$ для всех x в окрестности x_0, что оператор $L_0 := T^{-1} L T$ имеет вид $\partial_x - az - \sum_{j=0}^{\infty} h_j(x) z^{-j}$, где $h_j(x) \in D_{-j}$ для всех x в окрестности x_0. При этом T_j и h_j, рассматриваемые как функции от q, являются дифференциальными полиномами.*

Совершенно новым результатом, основывающимся на предложении 1, является теорема 1, которую можно считать основным результатом § 1.

Теорема 1. *Пусть фиксирована основная алгебра и матрица a как выше. Пусть также заданы матрицы $b \in D_m$ и $c_1, \dots, c_k$ из соответствующих D_{m-j}. В этих условиях отображение F_k из леммы 1 является дифференциальным полиномом тогда и только тогда, когда $z^m b + z^{m-1} c_1 + \dots + z^{m-k+1} c_{k-1} \in \mathscr{Z}$, где $\mathscr{Z}$ — централизатор элемента az. В частности, если $z^m b + z^{m-1} c_1 + z^{m-2} c_2 + \dots \in \mathscr{Z}$, то все отображения $F_1, F_2, \dots$ являются дифференциальными полиномами.*

Во втором параграфе центральное место занимает преобразование рассеяния. Пусть фиксированы основная алгебра и матрица a. Тогда всякому q из $N_0(x_0)$ сопоставляется ряд

$$Lq(z) = T(q)|_{x=x_0}(z) - I.$$

Основным утверждением параграфа является теорема 2, в которой Gev_1^I означает множество всех рядов из Gev_1, коэффициенты которых при степенях z^k принадлежат N_k.

Теорема 2. *Отображение $L : N_0(x_0) \to \mathrm{Gev}_1^I$ взаимно-однозначно.*

Обратное отображение строится с помощью задачи Римана. А именно, пусть $f(z) = I + \gamma(z)$, где $\gamma \in \mathrm{Gev}_1$ и рассматривается задача Римана:

$$e^{a(x-x_0)} f^{-1}(z) = \varphi^{-1}(x, z) \psi(x, z),$$

где ряды $\varphi(x, z)$ и $\psi(x, z)$ ищутся в следующем виде:

$$\varphi(x, z) = I + \sum_{j=1}^{\infty} \varphi_j(x) z^{-j}, \qquad \psi(x, z) = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j(x) z^j.$$

По решению этой задачи строится функция

$$q(x) = B[\gamma] := [\varphi_1(x), a].$$

Отображение B является обратным к L на Gev_1^I, что также показано в теореме 2.

Третий параграф главы 1 посвящен основной теореме — теореме 3, с помощью которой строятся голоморфные решения уравнений из леммы 2 и доказывается СМП этих уравнений.

Теорема 3. *Пусть, как и прежде, зафиксирована основная алгебра, матрица a, а также постоянный элемент $\beta = bz^m + c_1 z^{m-1} + \ldots + c_m$, где $m \geqslant 2$, причем $\beta \in \mathscr{Z}$ и оператор $\mathscr{B}_m(X) := [bz^m, X]$ обратим на $\mathscr{N}$. Тогда справедливы следующие утверждения.*

(A) *Задача Коши $q(x, t_0) = q_0(x)$, где $q_0 \in N_0(x_0)$, для уравнения (0.5) имеет локальное голоморфное решение $q(x, t)$ в окрестности точки $(x_0, t_0) \in \mathbb{C}^2$ тогда и только тогда, когда $Lq_0 \in \mathrm{Gev}_{1/m}$. Если такое решение $q(x, t)$ существует, то только одно.*

(B) *Всякое голоморфное решение $q(x, t)$ уравнения (0.5) в произвольном бидиске $D := \{(x, t) \in \mathbb{C}^2 \,|\, |x - x_0| < \delta_1,\ |t - t_0| < \delta_2\}$ аналитически продолжается до функции, мероморфной в полосе $S := \{(x, t) \in \mathbb{C}^2 \,|\, |t - t_0| < \delta_2\}$.*

После теоремы излагаются её варианты, в частности, предложение 2 о том, что для наличия СМП (т.е. свойства (B)) в формулировке теоремы 3 достаточно, чтобы $bz^m \in \mathscr{Z}$ и $c_k \in D_{m-k}$ для $k = 1, \ldots, m$.

В конце параграфа приводятся примеры применения основной теоремы и предложения 2.

Во второй главе производится обобщение результатов первой главы на случай, когда подалгебра Ли B_0 алгебры Ли B разлагается в прямую сумму векторных пространств B_+, B_-, являющихся подалгебрами Ли в B_0. Это разложение называется *разбиением* B_0. Обсуждаются необходимые условия на разбиение.

Значения $q(x)$ теперь берутся из пространства N_0^+, определяемого как проекция N_0 на B_+ параллельно B_- (множество голоморфных ростков в точке x_0 со значениями в N_0^+ обозначается $N_0^+(x_0)$). Дифференциальные полиномы $F_k(q)$ определяются как коэффициенты при степенях z^{m-k} ряда

$$F(q, z) := T(q)\beta T^{-1}(q),$$

где определение T остаётся прежним, а $\beta = bz^m + c_1 z^{m-1} + \ldots + c_m \in \mathscr{Z}$.

Показывается, что основное уравнение теперь записывается в виде

$$q_t = \partial_x F_m(q)_+ + [F_m(q)_+, q]. \tag{0.8}$$

Здесь нижний индекс "$+$" означает взятие проекции на B_+ параллельно B_-.

Второй параграф главы 2 посвящен преобразованию рассеяния для случая нетривиального разбиения. Определение преобразования рассеяния остаётся неизменным. Аналог теоремы 2 выражен теоремой 4.

Теорема 4. *Отображение $L : N_0^+(x_0) \to \mathrm{Gev}_1^I$ взаимно-однозначно.*

Обратное отображение также строится с помощью задачи Римана, но уже с другим условием. А именно, для ряда $f(z) = I + \sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k z^{-k}$ с матричными коэффициентами $f_k \in B_{-k}$ и условием $f(z) - I \in \mathrm{Gev}_1$ рассматривается задача Римана

$$e^{a(x-x_0)z} f^{-1}(z) = \widehat{\varphi}^{-1}(x, z)\widehat{\psi}(x, z),$$

где ряды $\widehat{\varphi}(x, z)$ и $\widehat{\psi}(x, z)$ ищутся в следующем виде:

$$\widehat{\varphi}(x, z) = \sum_{k=0}^{\infty} \widehat{\varphi}_k(x) z^{-k}, \qquad \widehat{\psi}(x, z) = \sum_{k=0}^{\infty} \widehat{\psi}_k(x) z^k,$$

причем $\widehat{\varphi}_0 \in A_-$ и $\widehat{\psi}_0 \in A_+$. Здесь $A_\pm$ — это группы Ли, соответствующие алгебрам Ли $B_\pm$.

Тогда обратное к L на Gev_1^I отображение строится по формуле

$$B[f-I](x) := [\widehat{\varphi}_1(x)\widehat{\varphi}_0^{-1}(x), a]_+.$$

В параграфе 3 главы 2 доказывается аналог теоремы 3 для случая нетривиального разбиения — теорема 5.

Теорема 5. *Пусть зафиксирована основная алгебра, матрица a и подходящее разбиение. Пусть фиксирован постоянный элемент $\beta = bz^m + c_1 z^{m-1} + \ldots + c_m$, где $m \geqslant 2$, причем $\beta \in \mathscr{Z}$. Тогда справедливы следующие утверждения.*

(A) *Задача Коши $q(x,t_0) = q_0(x)$, где $q_0 \in N_0^+(x_0)$, для уравнения (0.8) имеет локальное голоморфное решение $q(x,t)$ в окрестности точки $(x_0,t_0) \in \mathbb{C}^2$ тогда и только тогда, когда $Lq_0 \in \mathrm{Gev}_{1/m}$. Если такое решение $q(x,t)$ существует, то только одно.*

(B) *Всякое голоморфное решение $q(x,t)$ уравнения (0.8) в произвольном бидиске $D := \{(x,t) \in \mathbb{C}^2 \,|\, |x-x_0| < \delta_1,\ |t-t_0| < \delta_2\}$ аналитически продолжается до функции, мероморфной в полосе $S := \{(x,t) \in \mathbb{C}^2 \,|\, |t-t_0| < \delta_2\}$.*

В конце параграфа приводится важный пример — доказательство СМП для второго модифицированного уравнения Кортевега-де Фриза:

$$u_t = -u_{xxx} + 3(u_{xx}u - uu_{xx}) + 6uu_xu,$$

где $u(x,t)$ принимают значения в $\mathrm{gl}(n,\mathbb{C})$.

В последней главе приводится пример применения теоремы 3 для доказательства СМП у обыкновенных дифференциальных уравнений, получаемых, как редукции солитонных уравнений параболического типа, а именно, к уравнениям Пенлеве 1, 2, 4, а также к иерархиям первых двух уравнений.

Утверждение о наличии СМП уравнений Пенлеве выражается теоремой 6:

Теорема 6. *Для любых значений параметров $a, b \in \mathbb{C}$ первое, второе и четвертое уравнения Пенлеве*

$$w'' = 6w^2 + z \qquad (P_1)$$

$$w'' = 2w^3 + zw + a \qquad (P_2)$$

$$2ww'' = w'^2 + 3w^4 + 8zw^3 + 4(z^2 - a)w^2 + b \qquad (P_4)$$

обладают СМП.

Иерархия первого уравнения Пенлеве строится рекурсивно и состоит из обыкновенных дифференциальных уравнений вида

$$L_{n+1}[w] + \sum_{j=1}^{n} b_j L_{n+1-j}[w] = a_1 z + a_2, \qquad ({}_{2n}P_1)$$

где $n \in \mathbb{N}$, $a_1, a_2, b_1, \ldots, b_n \in \mathbb{C}$ — произвольные константы, причем $a_1 \neq 0$, а $L_n[w]$ — дифференциальные полиномы Льенара, определяемые по индукции соотношениями $L_0[w] = 1/2$,

$$\partial L_{n+1}[w] = (\partial^3 + 4w\partial + 2w')L_n[w] \qquad (L)$$

для всех $n = 0, 1, 2, \ldots$ (где через ∂ обозначается оператор дифференцирования по z) и $L_n[0] = 0$ для всех $n \in \mathbb{N}$.

Иерархия второго уравнения Пенлеве состоит из обыкновенных дифференциальных уравнений

$$Q_n[w] + \sum_{j=1}^{n-1} b_j Q_{n-j}[w] = zw + a, \quad \text{где} \quad Q_n[w] := (\partial + 2w) L_n[w' - w^2]. \qquad ({}_{2n}P_2)$$

Здесь $n \in \mathbb{N}$ — номер уравнения, $a, b_1, \ldots, b_{n-1} \in \mathbb{C}$ — произвольные константы.

В конце параграфа 1 главы 3 формулируется теорема 7.

Теорема 7. *Для любых значений параметров $n \in \mathbb{N}$, $a, a_1, a_2, b_1, \ldots, b_n \in \mathbb{C}$, $a_1 \neq 0$, все уравнения ${}_{2n}P_1$ и ${}_{2n}P_2$ обладают* СМП.

Оставшиеся параграфы кроме последнего посвящены доказательству теорем 6 и 7.

В последнем параграфе диссертации приводится пример применения теоремы 3 для доказательства СМП простейших матричных аналогов уравнений Пенлеве 1 и 2. А именно, доказываются следующие две теоремы.

Теорема 8. *Следующие уравнения обладают СМП.*

(A) Матричный аналог P_1:

$$w'' = 6w^2 + zI.$$

(B) Два матричных аналога P_2:

$$y'' = [y, y'] + 2y^3 + zy - d, \qquad d \in \mathrm{gl}(n, \mathbb{C}),$$

$$y'' = 2[y, y'] + 2y^3 + zy - d, \qquad d \in \mathrm{gl}(n, \mathbb{C}).$$

(C) Два матричных аналога продифференцированного P_2:

$$y''' = 3y^2y' + 3y'y^2 + y + zy' + [d, y], \qquad d \in \mathrm{gl}(n, \mathbb{C}),$$

$$y''' = 3[y'', y] + 6yy'y + y + zy' + [d, y], \qquad d \in \mathrm{gl}(n, \mathbb{C}).$$

Теорема 9. *Следующие векторные аналоги продифференцированного P_2 обладают СМП:*

$$y''' = 3(y, y)y' + 3(y, y')y + zy' + y + Ay, \qquad A = -A^T,$$
$$y''' = 3(y, y)y' + zy' + y + Ay, \qquad A = -A^T.$$

Здесь значения y принадлежат $\mathbb{C}^n$, и $(u, v) := u_1v_1 + \ldots + u_nv_n$ - билинейная форма, равная сумме произведений координат.

Благодарности. Автор выражает огромную благодарность научному руководителю Домрину Андрею Викторовичу за терпение, поддержку и неоценимую помощь в научной работе. Также автор благодарен Сулейманову Булату Ирековичу за консультации и участие в работе и всему коллективу научного семинара “Комплексные задачи математической физики” за ценные советы и возможность обсудить полученные результаты.

Заключение

В представленной диссертации исследованы вопросы аналитического продолжения голоморфных решений некоторого класса эволюционных уравнений в частных

производных в пространстве $\mathbb{C}^2$ от двух комплексных переменных x, t. Получены следующие результаты.

Доказано, что голоморфные (по обеим переменным) решения уравнений из изучаемого класса допускают аналитическое продолжение до глобально мероморфных функций от пространственной переменной. Указан способ построения всех локальных голоморфных решений с помощью задачи Римана о факторизации. При некоторых дополнительных условиях получен критерий разрешимости голоморфной задачи Коши. Установлен критерий локальности для матричных солитонных уравнений, в определении иерархии которых участвует диагональная матрица. С помощью полученных теорем доказывается глобальная мероморфность локальных голоморфных решений уравнений, входящий в иерархии первого и второго уравнений Пенлеве, а также некоторых векторных и матричных обобщений этих уравнений. Также дано новое доказательство глобальной мероморфности всех локальных голоморфных решений первого, второго и четвёртого уравнений Пенлеве.

Данная тематика всё еще содержит огромное количество открытых вопросов для исследования. Например, помимо возможности расширения приведённых теорем на более широкие классы уравнений, весьма интересно было бы получить описание или какие-либо свойства самих решений в терминах начальных данных или данных рассеяния, поскольку решение в явном виде задачи Римана, участвующей в построении решений уравнений, является весьма затруднительным.

Список литературы

[1] S. von Kowalevsky, Zur Theorie der partiellen Differentialgleichungen // J. reine angew. Math., **80** (1875), 1–32.

[2] A.-L. Cauchy, Mémoire sur les systèmes d'equations aux dérivées partielles d'ordre quelconque et sur leur réduction à systèmes d'equations linéaires du premier ordre // C. R. Acad. Sci. Paris **40** (1842), 131–138.

[3] А. В. Домрин, Голоморфные решения солитонных уравнений // Тр. ММО, **82**:2 (2021), 227–312.

[4] A. Degasperis, S. Lombardo, Multicomponent integrable wave equations: I. Darboux-dressing transformation // J. Phys. A: Math. Theor., **40** (2007), 961–977.

[5] F. Calogero, A. Degasperis, New integrable equations of nonlinear Schrodinger type Stud // Appl. Math., **113** (2004), 91–137.

[6] A. Degasperis, M. Conforti, F. Baronio, S. Wabnitz, Effects of nonlinear wave coupling: Accelerated solitons // The European Physical Journal Special Topics, **147** (2007), 233–252.

[7] М. А. Шумкин, О решениях матричных солитонных уравнений // ТМФ, **215**:1 (2023), 3–15.

[8] М. А. Шумкин, Критерий локальности матричных солитонных уравнений // Тр. ММО, **84**: 2 (2023), 231–242.

[9] А. В. Домрин, Б. И. Сулейманов, М. А. Шумкин, О глобальной мероморфности решений уравнений Пенлеве и их иерархий // Труды МИАН, **311** (2020), 106–122.

[10] A. V. Domrin, M. A. Shumkin, B. I. Suleimanov, Meromorphy of solutions for a wide class of ordinary differential equations of Painlevé type // J. Math. Phys., **63** (2022), 023501.

[11] М. А. Шумкин, Критерий разрешимости задачи Коши для матричных солитонных уравнений // Матем. заметки, **119**:1 (2026), 126 –138.

[12] V. E. Adler, V. V. Sokolov, Non-Abelian Evolution Systems with Conservation Laws // Mathematical physics analysis and geometry, **24**, 7 (2021).

[13] В.Е. Захаров, С. В. Манаков, С. П. Новиков, Л. П. Питаевский, Теория солитонов. Метод обратной задачи рассеяния, Москва, Наука, 1980.

[14] Л. А. Тахтаджян, Л. Д. Фаддеев, Гамильтонов подход в теорию солитонов, Москва, Наука, 1986.

[15] В. И. Наянов, Многополевые солитоны, Москва, Физматлит/Наука, 2006.

[16] В. Г. Дринфельд, В. В. Соколов, Алгебры Ли и уравнения типа Кортевега–де Фриза // Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. мат. Нов. достиж., **24** (1984), 81–180.

[17] И. З. Голубчик и В. В. Соколов, Интегрируемые уравнения на $\mathbb{Z}$-градуированных алгебрах Ли // ТМФ, **112**:2 (1997), 375–383.

[18] С. В. Манаков, К теории двумерной стационарной самофокусировки электромагнитных волн // ЖЭТФ, **65** (1973), 505–516.

[19] CL. Terng, K. Uhlenbeck, The n × n KdV hierarchy // J. Fixed Point Theory Appl., **10** (2021), 37–61.

[20] А. Ф. Леонтьев, Целые функции. Ряды экспонент, Москва, Наука, 1983.

[21] В. В. Голубев, Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений, Москва–Ленинград, ГИТТЛ, 1950.

[22] I. Laine, Complex differential equations // Handbook of Diff. Equations: ODE, vol. 4, Amsterdam-Oxford, North Holland, 2008, 269–364.

[23] Э. Л. Айнс, Обыкновенные дифференциальные уравнения, Харьков, ОНТИ, 1939.

[24] V. I. Gromak, I. Laine, S. Shimomura, Painlevé differential equations in the complex plane, Berlin, de Gruyter, 2002.

[25] А. В. Китаев, Точки поворота линейных систем и двойные асимптотики трансцендентов Пенлеве // Записки науч. сем. ЛОМИ, **187** (1991), 53–74.

[26] N. A. Kudryashov, The first and second Painlevé equations of higher order and some relations between them // Phys. Lett. A, **224** (1997), 353–360.

[27] H. Airault, Rational solutions of Painlevé equations // Stud. Appl. Math., **61** (1979), 31–53.

[28] K. Kaneko, Y. Ohyama, Meromorphic Painlevé transcendents at a fixed singularity // Math. Nachr., **286** (2013), 861–875.

[29] P. Lax, Almost periodic solutions of the KdV equation // SIAM Review, **18** (1976), 351–375.

[30] А. Б. Шабат, Операторы преобразования и нелинейные уравнения, Дисс. .... доктора физ.-матем. наук, Москва, МГУ, 1975.

[31] S. P. Balandin, V. V. Sokolov, On the Painlevé test for non-Abelian equations // Physics Letters A, **246** (1998), 267-272.

[32] P. Olver, V. Sokolov, Integrable Evolution Equations on Associative Algebra // Comm Math Phys, **193** (1998), 245-268.

[33] P. Olver, J.-P. Wang, Classification of Integrable One-Component Systems on Associative Algebras // Proceedings of the London Mathematical Society, **81**:3 (2000), 566–586.

[34] В. Э. Адлер, В. В. Соколов, О матричных уравнениях Пенлеве PII // ТМФ, **207**:2 (2021), 188–201.

[35] В. Е. Захаров, А. Б. Шабат, Интегрирование нелинейных уравнений математической физики методом обратной задачи теории рассеяния. II // Функц. анализ и его прил., **13**:3 (1979), 13–22.

[36] В. В. Соколов, Алгебраические структуры в теории интегрируемых систем, Москва–Ижевск, Институт компьютерных исследований, 2021.

[37] Э. Б. Винберг, А. Л. Онищик, Семинар по группам Ли и алгебраическим группам, Москва, Наука, 1988.

[38] Г. С. Салехов, О задаче Коши–Ковалевской для одного класса линейных уравнений с частными производными в области сколь угодно гладких функций // Изв. Акад. Наук СССР Сер. матем. **14**:3 (1950), 355–366.

[39] V.E.Adler, V.V.Sokolov, Vector systems of Painlevé type // J. Geom. Phys. **227** (2026), 105860.

[40] W. Rothstein, Ein neuer Beweis des Hartogsschen Hauptsatzes und seine Ausdehnung auf meromorphe Funktionen // Math. Zeitschrift, **53**:1 (1950), 84–95.