ОТЗЫВ НАУЧНОГО РУКОВОДИТЕЛЯ

на диссертацию Михаила Александровича Шумкина «Голоморфные решения матричных солитонных уравнений», представленную на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 1.1.1 — «Вещественный, комплексный и функциональный анализ»

Диссертация посвящена вопросам, находящимся на стыке комплексного анализа, аналитической теории дифференциальных уравнений и теории интегрируемых систем. Одним из основных её результатов является эффект принудительного аналитического продолжения решений многокомпонентных (включая матричные и векторные) интегрируемых эволюционных нелинейных дифференциальных уравнений с частными производными (солитонных уравнений). Идейным предшественником таких результатов является принадлежащая по существу С.В.Ковалевской теорема о том, что все локальные голоморфные (по обеим переменным) решения уравнения теплопроводности являются целыми функциями от пространственной переменной. В диссертации же установлено, что все локальные голоморфные решения упомянутых солитонных уравнений являются мероморфными на всей плоскости функциями от пространственной переменной. В качестве приложения решается давно стоявший открытый вопрос аналитической теории нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений: доказана глобальная мероморфность всех решений уравнений, составляющих иерархии первого и второго уравнений Пенлеве.

Результаты о принудительном аналитическом продолжении являются характерной чертой многомерного комплексного анализа в отличие от одномерного, но в данной диссертации речь идёт не столько о последствиях многомерности (единственный используемый в работе факт из теории функций нескольких комплексных переменных — это классическая теорема Ротштейна об аналитическом продолжении по части переменных), сколько о решении солитонных уравнений методом обратной задачи теории рассеяния. Для получения результата об аналитическом продолжении, автору пришлось развить всю технику метода обратной задачи в необычной ситуации, когда потениалами служат не быстроубывающие или периодические функции на вещественной прямой, а ростки голоморфных матричнозначных функций в данной точке комплексной плоскости. Так как решение обратной задачи и в этой ситуации сводится к обращению некоторого (зависящего от пространственной и врменнóй переменных как от параметров) фредгольмова оператора с индексом 0 в надлежащем банаховом пространстве, то эффект глобального мероморфного продолжения вытекает из утверждения, известного в спектральной теории как аналитическая (или мероморфная) альтернатива Фредгольма.

Основные результаты диссертации заключаются в следующем.

1) Установлен критерий локальности эволюционных уравнений на градуированных алгебрах Ли, задаваемых условием совместности вспомогательной линейной системы тождественно по спектральному параметру. Редукциями уравнений этого класса являются как скалярные, так и матричные солитонные уравнения, а также все члены их иерархий, т.е. коммутирующие с ними потоки на множестве функций от пространственной переменной.

2) Развит метод обратной задачи теории рассеяния (включающий в себя прямое

и обратное преобразования рассеяния, описание пространств, на которых эти преобразования взаимно однозначны, а также законы эыолюции данных рассеяния при эволюции потенциала по какому-оибо из упомянутых выше потоков) для локальных голоморфных потенциалов в случае матричных солитонных уравнений. Установлен критерий разрешимости локальной голоморфной задачи Коши для указанных уравнений в терминах данных рассеяния начального условия.

3) Показано, что любое локальное голоморфное (по обеим переменным) решение каждого из рассматриваемых матричных солитонных уравнений допускает аналитическое продолжение до мероморфной функции на произведении всей комплексной плоскости пространственной переменной и некоторой области в плоскости временно́й переменной. Установлено существование решений, не продолжаемых аналитически никуда дальше.

4) Построенная теория обобщена на случай нетривиального разбиения основной алгебры, что позволяет именно в матричном случае существенно расширить класс изучаемых солитонных уравнений.

5) Установлена глобальная мероморфность всех локальных голоморфных решений нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений, составляющих иерархии первого и второго уравнений Пенлеве, а также ряда матричных и векторных обобщений этих уравнений. Дано новое, значительно более ясное, чем все известные ранее, доказательство глобальной мероморфности всех локальных голоморфных решений первого, второго и четвёртого уравнений Пенлеве.

Диссертационная работа удовлетворяет всем требованиям ВАК, предъявляемым к диссертациям на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук, а её автор, Шумкин Михаил Александрович, заслуживает присуждения ему учёной степени кандидата физико-математических наук по специальности 1.1.1 — «Вещественный, комплексный и функциональный анализ».

Научный руководитель
профессор кафедры теории функций и функционального анализа
механико-фматематического факультета
Московского государственного университета им. М.В.Ломоносова
доктор физико-математических наук
Домрин Андрей Викторович 14.09.2026

Подпись Домрина А.В. заверяю
Вед. спец. с/к Морозова Н.А.