Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова

Механико-математический факультет

На правах рукописи

УДК 517.55+517.958

Шумкин Михаил Александрович

Голоморфные решения матричных солитонных уравнений

1.1.1 — Вещественный, комплексный и функциональный анализ

ДИССЕРТАЦИЯ

на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук

Научный руководитель

доктор физико-математических наук

А. В. Домрин

Москва — 2026

Оглавление

Оглавление 2
Введение 4
Глава 1. Метод обратной задачи для градуированных матричных алгебр . 24
1. Алгебраическая часть. 24
1.1. Основные определения 24
1.2. Уравнение нулевой кривизны 28
1.3. Диагонализующее калибровочное преобразование 33
1.4. Доказательство теоремы 1 37
2. Прямое и обратное преобразование рассеяния 39
2.1. Классы Жевре 39
2.2. Задача Римана 40
2.3. Преобразование рассеяния 43
3. Задача Коши. 47
3.1. Основная теорема 47
3.2. Варианты основной теоремы 53
3.3. Примеры 54
Глава 2. Случай нетривиального разбиения основной алгебры 61
1. Построение иерархий 61
1.1. Разбиение B_0 61
1.2. Построение иерархий 63
2. Задача Римана и основная теорема 67
2.1. Задача Римана и аналитические свойства её решений 67
2.2. Преобразование рассеяния 73
2.3. Основная теорема 77
Глава 3. Применение к обыкновенным дифференциальным уравнениям . . 81
1. Уравнения Пенлеве и их иерархии 81
2. Доказательство теоремы 6 85

3. Доказательство теоремы 7 88
3.1. Иерархия ${}_{2n}P_1$ 88
3.2. Иерархия ${}_{2n}P_2$ 94
4. Некоммутативные обобщения уравнений Пенлеве 96
4.1. Матричные обобщения 96
4.2. Векторные обобщения 99
Список литературы 101

Введение

Данная диссертация посвящена вопросам аналитического продолжения голоморфных решений некоторого класса эволюционных уравнений в частных производных в пространстве $\mathbb{C}^2$ двух комплексных переменных x, t. Оказывается, что любое решение $u(x,t)$, голоморфное в области вида $D_1 \times D_2 = \{(x,t) \in \mathbb{C}^2 \,|\, x \in D_1, t \in D_2\}$, допускает аналитическое продолжение до мероморфной функции $U(x,t)$ на $\mathbb{C} \times D_2$ (и, тем самым, до глобально мероморфной функции от пространственной переменной x при каждом значении t), причём существуют решения, не продолжаемые никуда дальше. Мы также излагаем способ построения всех локальных голоморфных решений с помощью задачи Римана о факторизации и критерий разрешимости локальной голоморфной задачи Коши для этих уравнений. Изучаемый класс уравнений содержит наряду с широко известными солитонными уравнениями (такими как уравнение Кортевега–де Фриза и нелинейное уравнение Шрёдингера) все члены их иерархий и различные матричные версии как самих уравнений, так и их иерархий. В заключительной главе работы полученные результаты применяются для описания аналитических свойств решений некоторых нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений, возникающих в приложениях.

Актуальность темы. Вопрос о разрешимости локальной голоморфной задачи Коши для дифференциальных уравнений в частных производных был поставлен и в значительной степени решён ещё в середине XIX века. Ответ даётся теоремой Коши–Ковалевской ([1], [2]), которую мы сформулируем в нужном нам частном случае.

(A) *Пусть n — натуральное число, A — множество всех пар $\alpha = (k,l)$ неотрицательных целых чисел с $k + l \leqslant n$ и $l < n$, а функция $P(x,t,\{\xi_\alpha\}_{\alpha\in A})$ голоморфна по x, t в окрестности точки $(x_0,t_0) \in \mathbb{C}^2$ и является целой функцией от остальных пепременных. Тогда для любых голоморфных ростков $u_0, u_1, \ldots, u_{n-1}$ в точке $x_0 \in \mathbb{C}$ задача Коши $\partial_t^k u(x,t_0) = u_k(x)$, $k = 0,1,\ldots,n-$*

1, *для уравнения* $\partial_t^n u = P(x,t,\{\partial^\alpha u\}_{\alpha\in A})$, *где* $\partial^\alpha u := \partial_x^k \partial_t^l u$, *имеет голоморфное в окрестности точки* (x_0,t_0) *решение* $u(x,t)$.

С. В. Ковалевская [1] также отметила, что без условия $k+l \leqslant n$ в определении множества A это утверждение уже не имеет места. Например, задача Коши $u(x,0) = 1/(1-x)$ для уравнения $\partial_t u = \partial_x^2 u$ не имеет голоморфных в окрестности $(0,0)$ решений. Фактически в [1] был установлен критерий разрешимости задачи Коши для уравнения теплопроводности (частный случай $m=2$ следующего утверждения, полученного Г. С. Салеховым [38]).

(B) *Пусть* $m \geqslant 2$ — *целое число. Голоморфное в окрестности точки* (x_0,t_0) *решение задачи Коши* $u(x,t_0) = u_0(x)$ *для уравнения* $\partial_t u = \partial_x^m u$ *существует тогда и только тогда, когда функция* $u_0(x)$ *совпадает в окрестности точки* x_0 *с некоторой целой функцией порядка не выше* $m/(m-1)$ *и конечного типа при порядке* $m/(m-1)$.

Из этого критерия вытекает утверждение о принудительном аналитическом продолжении всех голоморфных решений уравнения $\partial_t u = \partial_x^m u$ до целых функций от x при каждом значении t.

(C) *Пусть* $m \geqslant 2$ — *целое число. Тогда для любого голоморфного решения* $u(x,t)$ *уравнения* $\partial_t u = \partial_x^m u$ *в области* $D_1 \times D_2 = \{(x,t) \in \mathbb{C}^2 \,|\, x \in D_1, t \in D_2\}$ *существует голоморфная функция*[1] $U(x,t)$ *на* $\mathbb{C} \times D_2$ *такая, что* $U = u$ *на* $D_1 \times D_2$.

Известно (см. обзор [3]), что это свойство принудительного аналитического продолжения, но только с заменой целых функций на функции, мероморфные на $\mathbb{C}$, имеет место и для всех голоморфных решений *солитонных уравнений*, т.е. нелинейных эволюционных уравнений, интегрируемых методом обратной задачи. Об истории открытия солитонных уравнений, физической мотивировке и различных подходах к их определению см. например, [13], [14]. Исторически первым примером было уравнение Кортевега-де Фриза (КдФ)

$$u_t = u_{xxx} + 6uu_x,$$

[1]Которая по теореме единственности также является решением уравнения $\partial_t u = \partial_x^m u$.

предложенное в 1895 г. для описания волн на воде, а затем численно исследованное в 1965 г. Крускалом и Забуски, которые и ввели термин “солитон” (уединённая волна, рассматриваемая как частица).

В рамках метода одевания (В. Е. Захаров и А. Б. Шабат [35], см. также [13], гл. III, § 6 и [14], часть II, гл. I, § 3) солитонные уравнения с одной пространственной переменной записываются в виде уравнений нулевой кривизны

$$U_t - V_x + [U, V] = 0, \tag{0.1}$$

где $U(x,t,z)$, $V(x,t,z)$ — рациональные $\mathrm{gl}(n,\mathbb{C})$-значные функции от спектрального параметра $z \in \mathbb{C}$, коэффициенты разложений которых на простейшие дроби являются некоторыми выражениями от неизвестных функций (голоморфно зависящих от x и t), подобранными так, чтобы левая часть уравнения (0.1) не зависела от z. Здесь $[U,V] = UV - VU$ означает коммутатор матриц.

Например, представление нулевой кривизны для уравнения КдФ получится, если положить

$$q(x,t) = \begin{pmatrix} 0 & u(x,t) \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad a = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & -1/2 \end{pmatrix},$$

$$U(x,t,z) = az + q(x,t), \quad V(x,t,z) = az^3 + F_1(q)z^2 + F_2(q)z + F_3(q),$$

где отображения F_j, $j = 1,2,3$, являются надлежащими дифференциальными полиномами[2] от q (построение F_j описано в лемме 1 ниже, причём матрицы c_j, фигурирующие в этой лемме, нужно положить равными нулю).

Пусть (U_0, V_0) — голоморфное решение уравнения (0.1) в $\Omega \times D$ для некоторых областей $\Omega \subset \mathbb{C}^2_{xt}$ и $D \subset \overline{\mathbb{C}}_z$. Несложно убедиться, что для любого

[2]Пусть q — матричнозначная функция. Мы скажем, что F — это дифференциальный полином от q (со значениями в $\mathrm{gl}(n,\mathbb{C})$), если каждый элемент матрицы $F(q)$ есть многочлен от элементов матрицы q и их производных по x. Соответственно, мы скажем, что F — это интегро-дифференциальный полином от q, если каждый элемент матрицы $F(q)$ получается из элементов матрицы q применением конечного числа алгебраических операций, а также дифференцирования и интегрирования по переменной x.

голоморфного отображения $g : \Omega \times D \to \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ пара (U_1, V_1), определяемая формулами

$$U_1 = g_x g^{-1} + g U_0 g^{-1}, \qquad V_1 = g_t g^{-1} + g V_0 g^{-1},$$

также удовлетворяет (0.1). Однако в общем случае U_1 и V_1, как функции от z, уже не рациональны, даже если U_0 и V_0 были таковыми.

Идея метода одевания состоит в том, чтобы контролировать рациональность функций U, V и их дивизоры[3] с помощью задачи Римана. Изложим кратко, как это делается. Заметим сначала, что для односвязной области Ω выполнение (0.1) эквивалентно разрешимости вспомогательной линейной системы

$$E_x = UE, \quad E_t = VE, \tag{0.2}$$

где $E : \Omega \times D \to \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ – голоморфное отображение.

Пусть (U_0, V_0) — решение (0.1), причём область Ω односвязна. Выберем гладкий жорданов контур γ в $\overline{\mathbb{C}}_z$, не проходящий через полюсы U_0, V_0. Тогда $\overline{\mathbb{C}}_z = \gamma \sqcup D_+ \sqcup D_-$, где $D_\pm$ — области в $\overline{\mathbb{C}}_z$. Скажем, что непрерывная на γ функция f со значениями в $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ *факторизуема*, если существуют такие непрерывные отображения $f_\pm : \overline{D}_\pm \to \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$, голоморфные на $D_\pm$ соответственно, что $f(z) = f_-^{-1}(z) f_+(z)$ при всех $z \in \gamma$. Отображение f при этом называется *данными* задачи Римана, а пара отображений $f_\pm$ — её *решением*.

Обозначим решение системы (0.2) с $U = U_0$ и $V = V_0$ через E_0 и выберем контур γ и непрерывную на нем функцию f так, чтобы следующая задача Римана была разрешима при всех $(x, t) \in \Omega$:

$$E_0(x, t, z) f(z) E_0^{-1}(x, t, z) = g_-^{-1}(x, t, z) g_+(x, t, z), \quad z \in \gamma. \tag{0.3}$$

При выполнении условий нормировки $E_0(x_0, t_0, z) \equiv I$ и $g_-(x, t, z_0) \equiv I$ для некоторых заранее выбранных точек $(x_0, t_0) \in \Omega$ и $z_0 \in D_-$, решение $g_\pm$ этой задачи Римана единственно, причем его компоненты, т.е. функции $g_\pm(x, t, z)$ и

[3]Напомним, что дивизором рациональной функции называется формальная сумма её полюсов с целочисленными коэффициентами, равными порядкам полюсов.

$g_\pm^{-1}(x,t,z)$, голоморфно зависят от $(x,t)\in\Omega$. Определим U_1, полагая

$$U_1(x,t,z)=\begin{cases}(g_+)_x g_+^{-1}+g_+U_0g_+^{-1} & \text{при} \quad z\in\overline{D}_+,\\ (g_-)_x g_-^{-1}+g_-U_0g_-^{-1} & \text{при} \quad z\in\overline{D}_-,\end{cases}$$

и зададим V_1 теми же формулами с заменой U_0 на V_0 и производных по x на производные по t. Тогда проверяется (см., например, [3], § 1), что U_1, V_1 действительно удовлетворяют (0.1) и, более того, являются рациональными функциями от z с теми же дивизорами, что и U_0, V_0.

Чтобы солитонное уравнение, заданное условием нулевой кривизны (0.1), было эволюционным, т.е. имело вид $u_t=F(u,u_x,u_{xx},\ldots)$, надо выбирать дивизоры рациональных функций U и V в виде ∞ и $m\cdot\infty$, т.е. считать U и V полиномами от z первой и m-й степени соответственно. Тогда без ограничения общности можно записать (см. [3], п. 2.1)

$$U(x,t,z)=az+q(x,t),\quad V(x,t,z)=bz^m+r_1(x,t)z^{m-1}+\ldots+r_m(x,t),\quad (0.4)$$

где $a,b\in\mathrm{gl}(n,\mathbb{C})$ — диагональные матрицы[4], $q:\Omega\to\mathrm{gl}(n,\mathbb{C})$ — внедиагональное[5] голоморфное отображение, $r_j:\Omega\to\mathrm{gl}(n,\mathbb{C})$ — голоморфные отображения.

Чаще всего налагается следующее условие невырожденности.

(D) *Диагональная матрица a имеет простой спектр, т.е. все её собственные значения различны.*

В этом случае требование, чтобы левая часть (0.1) не зависела от z, приводит (см. [3], лемма 1.3) к тому, что $r_j=F_j(q)$ при $j=1,2,\ldots,m$, где F_j — дифференциальные полиномы, не зависящие от m и определённые почти однозначно[6], а уравнение (0.1) при таком выборе U и V из (0.4) принимает вид

$$q_t=[a,F_{m+1}(q)]. \quad (0.5)$$

[4]Удовлетворяющие некоторым условиям невырожденности, см. **(D)** и **(H)** ниже. Именно выбором этих условий различаются скалярные и матричные версии солитонных уравнений.

[5]Это означает, что все его диагональные элементы равны нулю.

[6]При фиксированных a,b они однозначно определяются условиями $F_k(0)\equiv c_k$, $k=1,2,\ldots,m$, где $c_1,c_2,\ldots$ — произвольная последовательность диагональных матриц.

Опишем обобщение критерия **(B)** на уравнения (0.5). В работе [3], §5, (5.1), каждому голоморфному внедиагональному $\mathrm{gl}(n,\mathbb{C})$-значному ростку $q_0(x)$ в точке x_0 сопоставляется формальный степенной ряд $Lq_0(z) = \sum_{i=1}^{\infty} \varphi_i z^{-i}$ для некоторых внедиагональных матриц $\varphi_i \in \mathrm{gl}(n,\mathbb{C})$. Если этот ряд имеет ненулевой радиус сходимости, то росток $q_0(x)$ однозначно восстанавливается по $Lq_0(z)$ с помощью задачи Римана (0.3) при любом фиксированном $t = t_0$, одевающей $U_0(x,t_0,z) \equiv az$ (так что $E_0(x,t_0,z) = \exp\{a(x-x_0)z\}$) до $U_1(x,t_0,z) = az + q_0(x)$ посредством функции $f(z) := I + Lq_0(z)$ на таком контуре $\gamma := \{|z| = R\}$, что функция $Lq_0(z)$ голоморфна при $|z| \geqslant R$.

Но в общем случае ряд $Lq_0(z)$ расходится при всех z. Чтобы измерить, насколько быстро он расходится, вводится понятие *класса Жевре* с индексом $\alpha \geqslant 0$. А именно, ряд $\varphi(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k z^{-(k+1)}$ с $\varphi_k \in \mathrm{gl}(n,\mathbb{C})$ принадлежит Gev_α, если ряд $\sum_{k=0}^{\infty} (k!)^{-\alpha} |\varphi_k| x^k$ имеет ненулевой радиус сходимости.[7] Здесь $|\cdot|$ означает любую норму на $\mathrm{gl}(n,\mathbb{C})$, обладающую свойством $|AB| \leqslant |A||B|$.

В этих терминах справедлива следующая теорема ([3], Теорема 6.1(A)).

(E) *Фиксируем целое число $m \geqslant 2$ и диагональные матрицы*[8] $a, b, c_i \in \mathrm{gl}(n,\mathbb{C})$ *для $i = 1,\dots,m$, причём a и b имеют простой спектр (см.* **(D)***). Тогда задача Коши $q(x,t_0) = q_0(x)$ для уравнения (0.5) имеет голоморфное в окрестности точки $(x_0,t_0) \in \mathbb{C}^2$ решение тогда и только тогда, когда ряд $Lq_0(z)$ принадлежит классу Жевре $\mathrm{Gev}_{1/m}$.*

---

[7] Не вдаваясь в детали (которые можно найти в [3], п. 7.2), отметим, что это понятие существенно обобщает понятия, используемые в **(A)** и **(B)**. Изначально классы Жевре $G^\alpha(I)$, где I – некоторый промежуток из $\mathbb{R}$, определялись как множество функций из $C^\infty(I)$, для которых найдутся такие $A, B > 0$, что $|f^{(n)}(x)| \leqslant AB^n(n!)^\alpha$ для всех $x \in I$ и $n \geqslant 0$. Классические результаты комплексного анализа показывают, что при $0 \leqslant \alpha < 1$ класс $G^\alpha(I)$ совпадает с множеством целых функций порядка не выше $1/(1-\alpha)$ и конечного типа при порядке $1/(1-\alpha)$. В случае $\alpha = 1/m$ приходим к пространству из критерия **(B)**.

[8] Напомним, что матрицы $a, b, c_1, \dots, c_m$ однозначно определяют дифференциальные полиномы $F_0, F_1, \dots, F_m$ и $[a, F_{m+1}]$ (правую часть уравнения (0.5)) условиями $F_0(q) \equiv b$ и $F_j(0) \equiv c_j$. Подробнее об этом см. лемму 1 ниже.

Утверждение **(C)** о принудительном аналитическом продолжении решений также обобщается на уравнения вида (0.5). Для формулировки этого обобщения введём

Определение 1. Эволюционное уравнение $u_t = F(u, u_x, u_{xx}, \ldots)$ обладает *свойством мероморфного продолжения* (СМП), если для любого бидиска $D = \{(x,t) \in \mathbb{C}^2 \,|\, |x - x_0| < r_1, |t - t_0| < r_2\}$ и любого голоморфного в D решения $u(x,t)$ этого уравнения существует мероморфная в области $S = \{(x,t) \in \mathbb{C}^2 \,|\, x \in \mathbb{C}, |t - t_0| < r_2\}$ функция $U(x,t)$ такая, что $U = u$ на D.

В этих терминах справедлива следующая теорема ([3], Теорема 6.1(B)).

(F) *Фиксируем целое число* $m \geqslant 2$ *и диагональные матрицы* $a, b, c_i \in \mathrm{gl}(n, \mathbb{C})$ *для* $i = 1, \ldots, m$, *причём* a *и* b *имеют простой спектр* (*см.* **(D)**). *Тогда соответствующее им уравнение* (0.5) *обладает* СМП.

Рассмотрим наиболее важные примеры. Пусть

$$a = b = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & -1/2 \end{pmatrix}, \quad q(x,t) = \begin{pmatrix} 0 & u(x,t) \\ v(x,t) & 0 \end{pmatrix}$$

и все c_j равны нулю. Тогда уравнение (0.5) при $m = 2$ эквивалентно системе, связанной с нелинейным уравнением Шредингера (НУШ):

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} - 2u^2 v \\ v_t = -v_{xx} + 2uv^2 \end{cases}$$

При $v \equiv 1$ и $m = 3$ получаем уравнение КдФ:

$$u_t = u_{xxx} - 6u_x u.$$

При $v \equiv u$ и $m = 3$ получаем модифицированное уравнение КдФ (мКдФ):

$$u_t = u_{xxx} + 6u_x u^2.$$

Поэтому частным случаем **(F)** является следующее утверждение.

(G) *Все перечисленные уравнения* (*т.е. система* НУШ, КдФ, мКдФ) *обладают* СМП.

Основной вопрос, рассматриваемый в диссертации — это обобщение теорем **(E)** и **(F)** на случай многокомпонентных (в частности, матричных и векторных) солитонных уравнений. Исторически первым примером таких уравнений была предложенная в 1973 г. модель Манакова [18], а общую их теорию можно найти в монографиях [15], [36]. Многие примеры эволюционных (т.е. выражающих производную по t от неизвестной функции через саму эту функцию и её производные по x до некоторого порядка) многокомпонентых солитонных уравнений получаются подобно примерам, перечисленным в утверждении **(G)**, из уравнения нулевой кривизны (0.5), при построении которого вместо **(D)** используется следующее более слабое условие невырожденности.

(H) *Диагональная матрица a имеет хотя бы два различных собственных значения.*

Иными словами, есть множество уравнений, представляющих интерес, которые записываются в виде (0.5), если матрица a имеет диагональный вид, но с возможно повторяющимися элементами на диагонали (см. примеры в конце главы 1). В этом случае, однако, уравнения, получающиеся из (0.5), уже не обязаны быть дифференциальными. Они могут содержать операцию интегрирования (это видно из примеров (1.1.22), в которых отображения F_j являются интегро-дифференциальными полиномами). В случае выполнения условия **(D)** уравнения (0.5) всегда дифференциальные, но доказательство этого факта ([3], лемма 1.1) опирается на то, что если след диагональной матрицы и всех её степеней равен нулю, то и сама матрица нулевая. Для блочно-диагональных матриц указанное утверждение уже неверно. Тем не менее, удивительным образом теорема **(F)** верна для всех уравнений вида (0.5) при условии **(H)**, а теорема **(E)** верна для *дифференциальных* уравнений указанного вида. Это обсуждается в первой главе диссертации, где также установлен критерий (в терминах блочно-диагональных матриц $a, b, c_i \in \mathrm{gl}(n, \mathbb{C})$) того, что в уравнении (0.5) не возникает интегрирования.

Изложение в первой главе ведётся в более общем контексте интегрируемых эволюционных уравнений на градуированных алгебрах Ли, взятом из [16],[17]. Для объяснения этого контекста мы, следуя § 1 фундаментальной работы[9] В.Г. Дринфельда и В.В. Соколова [16], перепишем уравнение нулевой кривизны (0.1) в виде равенства дифференциальных операторов $[\partial_x - U, \partial_t - V] = 0$ или, эквивалентно, в виде представления Лакса

$$L_t = [A, L] \tag{0.6}$$

для оператора первого порядка $L = \partial_x - U$ и оператора нулевого порядка $A = V$ (т.е. оператора $A\varphi = V\varphi$ умножения пробной функции φ на V). Мы по-прежнему считаем, что $U = az + q$, а V является полиномом степени m от спектрального параметра z.

"Записать уравнение в виде представления Лакса", как и в случае представления нулевой кривизны, означает подобрать оператор A, матрицу a и, возможно, наложить условия на значения, принимаемые отображением q, так, чтобы уравнение Лакса (0.6) не зависело от спектрального параметра z и стало эквивалентным заданному уравнению.

Независимость уравнения (0.6) от z гарантируется выбором $A = M_+$, где $M = bz^m + \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k z^{m-k}$ — любое решение уравнения $[L, M] = 0$ в виде формального ряда Лорана по z с конечным количеством слагаемых с положительными степенями, коэффициенты которого являются $\mathrm{gl}(n, \mathbb{C})$-значными отображениями, а "$+$" означает отбрасывание главной части формального ряда Лорана в нуле. Преимущество этого подхода заключается в том, что все конструкции являются чисто алгебраическими и легко обобщаются. Обобщение, предложенное в [17], состоит в том, что ряды Лорана по z рассматриваются как элементы $\mathbb{Z}$-градуированной алгебры Ли (например, алгебры Каца–Муди). В интересующей нас общности[10] можно сказать, что коэффициенты при z^j берутся из

[9] В которой всюду предполагается выполненным условие невырожденности **(D)**, хотя и указано в сноске в начале § 1, что с надлежащими изменениями всё переносится на случай более слабого условия невырожденности **(H)** т.е. на многокомпонентный случай.

векторных подпространств B_j некоторой заранее фиксированной конечномерной алгебры Ли B, являющейся подалгеброй $\mathrm{gl}(n,\mathbb{C})$, причем B_j удовлетворяют условию градуировки $[B_k, B_j] = B_{k+j}$.

В [17] предложен интересный трюк, который именно в многокомпонентном случае (т.е. в случае, когда выполнено условие невырожденности **(H)**, но не выполнено **(D)**) позволяет существенно расширить класс изучаемых уравнений. Предлагается разбить алгебру Ли B_0 подходящим образом в прямую сумму векторных подпространств $B_\pm$, являющихся подалгебрами Ли в B_0 (подробнее см. пункт 1.1 главы 2), и считать, что при взятии положительной части ряда Лорана (например, в формуле $A = M_+$) компонента из B_+ любого монома степени 0 остаётся той же, а компонента из B_- отбрасывается. Таким образом, некоторые мономы степени 0 причисляются к отрицательной части ряда Лорана. Как показано в [17], данная манипуляция позволяет находить новые представления Лакса. Самым интересным для нас примером является второе модифицированное уравнение Кортевега-де Фриза (мКдФ2)

$$u_t = -u_{xxx} + 3(u_{xx}u - uu_{xx}) + 6uu_xu,$$

где $u(x,t)$ принимают значения в $\mathrm{gl}(n,\mathbb{C})$ (см. пример 7). В отличие от мКдФ1 (пример 4), представление этого уранения в виде (0.5) с условием невырожденности **(H)** нам неизвестно.

В первых двух главах диссертации мы покажем, что теоремы **(E)** и **(F)** обобщаются на случай конструкций из [16],[17] и продемонстрируем их применение к некоторым модельным уравнениям.

В третьей главе речь идёт о нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнениях, все (локальные голоморфные) решения которых глобально мероморфны. Классическим примером являются первое, второе и четвёртое уравнения Пенлеве[11], хотя это было аккуратно доказано только в XXI веке (см. моно-

[10] Мы, как и в [17], ограничиваемся иерархиями типа мКдФ в терминологии [16].

[11] Для третьего, пятого и шестого уравнений Пенлеве, решения общего положения имеют точки ветвления.

графию [24]) и все появившиеся с тех пор доказательства остаются длинными и труднообозримыми. В § 2 третьей главы мы дадим короткое доказательство с помощью теоремы 3, причём эта теорема используется не в полной общности, а в случае выполнения сильного условия невырожденности **(D)**. Доказательство опирается на тот факт (открытый А.Б.Шабатом [30]), что по решениям первого и второго уравнений Пенлеве строятся решения специального вида уравнений КдФ и мКдФ соответственно. В § 3 третьей главы на этом же пути получен новый результат, бывший открытым вопросом около двух десятков лет: доказана глобальная мероморфность всех решений уравнений, образующих иерархии первого и второго уравнений Пенлеве. В заключительном § 4 третьей главы при изучении матричных и векторных аналогов этих уравнений теорема 3 используется уже в своей полной общности.

Цель работы. Развитие метода обратной задачи теории рассеяния для локальных голоморфных потенциалов, эволюционирующих согласно интегрируемым уравнениям на градуированных алгебрах Ли. Вывод критерия разрешимости локальной голоморфной задачи Коши для многокомпонентных солитонных уравнений в терминах данных рассеяния начального условия. Доказательство возможности аналитического продолжения всех локальных голоморфных решений этих уравнений до глобально мероморфных функций от пространственной переменной. Применение полученных результатов к уравнениям Пенлеве и их иерархиям.

Положения, выносимые на защиту. Научная новизна. В диссертации получены следующие новые результаты.

1) Доказан критерий локальности многокомпонентных (матричных) солитонных уравнений (теорема 1).

2) Дано определение данных рассеяния и установлено, что они взаимно-однозначно параметризуют потенциалы (теоремы 2 и 4).

3) Доказан критерий разрешимости локальной голоморфной задачи Коши для интегрируемых эволюционных уравнений на градуированных алгебрах Ли

в терминах данных рассеяния начального условия и установлено существование аналитического продолжения их решений по пространственной переменной до глобально мероморфной функции (теоремы 3 и 5).

4) Показано, что все локальные голоморфные решения всех уравнений, входящих в иерархии первого и второго уравнений Пенлеве, а также некоторых их матричных и векторных обобщений, допускают аналитическое продолжение до глобально мероморфных функций (теоремы 6, 7, 8 и 9).

Методы исследования. В работе используются различные методы математического анализа, теории групп и алгебр Ли, комплексного анализа, а также теории дифференциальных уравнений.

Теоретическая и практическая значимость. Диссертация носит теоретический характер. Результаты диссертации могут найти применение в теории дифференциальных уравнений, математической физике и физических задачах, связанных с солитонными уравнениями.

Апробация работы. Результаты диссертации обсуждались на кафедральном семинаре по многомерному комплексному анализу (семинар им. А.Г.Витушкина, механико-математический факультет МГУ, 2023-2024 годы) и на научном семинаре “Комплексные задачи математической физики” (МИАН, 2025 год), а также докладывались на конференции "Комплексный анализ, математическая физика и нелинейные уравнения"(Южный Урал, Яхты-Куль (озеро Банное), 11–14 марта 2020 г.) и школе-конференции “Уфимская осенняя математическая школа” (2023 г.).

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в пяти статьях [7]–[11], две из которых в соавторстве. Из совместных статей [9],[10] в диссертацию включены только результаты, полученные лично автором.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, трех глав, разбитых на параграфы, и списка литературы из 40 наименований. Общий объем диссертации — 104 страницы. В тексте принята сквозная нумерация. Во введении формулы нумеруются двумя числами (ставится 0, а затем идет

номер формулы внутри введения), а в основном тексте — тремя (номер главы, номер параграфа и номер формулы внутри параграфа). Предложения, леммы, следствия, замечания и теоремы также имеют сквозную нумерацию в основном тексте. Во введении утверждения, цитируемые из основного текста, носят те же номера.

Краткое содержание диссертации. Первая глава состоит из трёх параграфов. Первый параграф посвящен основным определениям и алгебраическим построениям. Вводится понятие *основной алгебры* $\mathscr{C}$. Это $\mathbb{Z}$-градуированная ассоциативная алгебра, элементами которой являются формальные ряды Лорана $\sum_{k=-\infty}^{N} \varkappa_k z^k$ для любых $N \in \mathbb{Z}$ и $\varkappa_k \in B_k$, где B_k — векторные подпространства заранее фиксированной конечномерной комплексной матричной алгебры Ли B, удовлетворяющие условиям $[B_k, B_j] \subseteq B_{k+j}$. Далее фиксируется матрица $a \in B_1$, обладающая рядом свойств[12], главное из которых выражается равенствами

$$D_k \oplus N_k = B_k \quad \forall k \in \mathbb{Z},$$

где

$$D_k := \operatorname{Ker} \mathscr{A}, \quad N_k := \operatorname{Im} \mathscr{A}, \quad \mathscr{A}(\varkappa) := [a, \varkappa].$$

Фиксировав основную алгебру и матрицу a с указанными свойствами, мы строим отображения F_i с помощью леммы 1.

Лемма 1. *Пусть фиксированы основная алгебра* $\mathscr{C}$ *и матрица* a*, а также заданы матрицы* $b \in D_m$*,* $c_1 \in D_{m-1}$*,* $c_2 \in D_{m-2}$*, ... для некоторого* $m \in \mathbb{N}$*. Тогда существует единственная последовательность интегро-дифференциальных полиномов* F_{m-k} *(*$k = m, m-1, m-2, ...$*), определенных на множестве всех голоморфных* N_0*-значных ростков в окрестности некоторой точки* $x_0 \in \mathbb{C}$ *(будем обозначать это множество через* $N_0(x_0)$*), таких, что*
1) $F_0(q) \equiv b$*,*
2) $F_j(0) \equiv c_j$ *для всех* $j = 1, 2, ...$*,*

[12] Они перечислены в пункте 1.1 главы 1.

3) формальный ряд Лорана $F(q,z)=\sum_{j=0}^{\infty}F_j(q)z^{-j}$ *удовлетворяет уравнению*

$$\partial_x F(q,z)=[az+q,F(q,z)]$$

тождественно по x *и* z *для всех* $q\in N_0(x_0)$.

Почти непосредственным следствием является лемма 2, устанавливающая эквивалентность уравнения нулевой кривизны (0.1) уравнению (0.5).

Лемма 2. *Для того, чтобы функции* U,V *вида* (0.4) *с фиксированной матрицей* a, *матрицей* b *из* D_m *и голоморфной функцией* $q:\Omega\to N_0$ *задавали голоморфное решение уравнения нулевой кривизны* (0.1) *на бидиске* $\Omega:=\Omega_1\times\Omega_2\subset\mathbb{C}^2_{xt}$, *необходимо и достаточно выполнение следующих условий.*

(а) Коэффициенты $r_j\colon\Omega\to B_{m-j}$ *полинома* V *должны выражаться через* q *формулами*

$$r_j=F_j(q)\qquad j=1,...,m \tag{0.7}$$

для некоторых матриц $c_j(t)$, $j=1,\dots,m$, *принадлежащих* D_{m-j}, *коммутирующих с* a *и голоморфно зависящих от* $t\in\Omega_2$.

(б) Голоморфная функция $q\colon\Omega\to N_0$ *должна удовлетворять на* Ω *уравнению* (0.5) *для того же выбора матриц* $c_i(t)$, *что в пункте (а), и для произвольной матрицы* c_{m+1} *из* D_{-1}, *коммутирующей с* a.

Уравнение (0.5), полученное в этой лемме, изучается на протяжении всей первой главы и называется *основным уравнением.*

Далее устанавливается предложение 1, в котором определяется один из основных инструментов дальнейших исследований — диагонализующее калибровочное преобразование T.

Предложение 1. *Пусть* $L=\partial_x-az-q(x)$, *где* a *и* $q(x)$ *— как в лемме 1. Тогда существует такой ряд* $T=I+\sum_{j=1}^{\infty}T_j(x)z^{-j}$, *где* $T_j(x)\in N_{-j}$ *для всех* x *в окрестности* x_0, *что оператор* $L_0:=T^{-1}LT$ *имеет вид* $\partial_x-az-\sum_{j=0}^{\infty}h_j(x)z^{-j}$, *где* $h_j(x)\in D_{-j}$ *для всех* x *в окрестности* x_0. *При этом* T_j *и* h_j, *рассматриваемые как функции от* q, *являются дифференциальными полиномами.*

Совершенно новым результатом, основывающимся на предложении 1, является теорема 1, которую можно считать основным результатом § 1.

Теорема 1. *Пусть фиксирована основная алгебра и матрица a как выше. Пусть также заданы матрицы $b \in D_m$ и $c_1, \dots, c_k$ из соответствующих D_{m-j}. В этих условиях отображение F_k из леммы 1 является дифференциальным полиномом тогда и только тогда, когда $z^m b + z^{m-1}c_1 + \dots + z^{m-k+1}c_{k-1} \in \mathscr{Z}$, где $\mathscr{Z}$ — централизатор элемента az. В частности, если $z^m b + z^{m-1}c_1 + z^{m-2}c_2 + \dots \in \mathscr{Z}$, то все отображения $F_1, F_2, \dots$ являются дифференциальными полиномами.*

Во втором параграфе центральное место занимает преобразование рассеяния. Пусть фиксированы основная алгебра и матрица a. Тогда всякому q из $N_0(x_0)$ сопоставляется ряд

$$Lq(z) = T(q)|_{x=x_0}(z) - I.$$

Основным утверждением параграфа является теорема 2, в которой Gev_1^I означает множество всех рядов из Gev_1, коэффициенты которых при степенях z^k принадлежат N_k.

Теорема 2. *Отображение $L : N_0(x_0) \to \mathrm{Gev}_1^I$ взаимно-однозначно.*

Обратное отображение строится с помощью задачи Римана. А именно, пусть $f(z) = I + \gamma(z)$, где $\gamma \in \mathrm{Gev}_1$ и рассматривается задача Римана:

$$e^{a(x-x_0)} f^{-1}(z) = \varphi^{-1}(x,z)\psi(x,z),$$

где ряды $\varphi(x,z)$ и $\psi(x,z)$ ищутся в следующем виде:

$$\varphi(x,z) = I + \sum_{j=1}^{\infty} \varphi_j(x) z^{-j}, \qquad \psi(x,z) = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j(x) z^j.$$

По решению этой задачи строится функция

$$q(x) = B[\gamma] := [\varphi_1(x), a].$$

Отображение B является обратным к L на Gev_1^I, что также показано в теореме 2.

Третий параграф главы 1 посвящен основной теореме — теореме 3, с помощью которой строятся голоморфные решения уравнений из леммы 2 и доказывается СМП этих уравнений.

Теорема 3. *Пусть, как и прежде, зафиксирована основная алгебра, матрица a, а также постоянный элемент $\beta = bz^m + c_1 z^{m-1} + \ldots + c_m$, где $m \geqslant 2$, причем $\beta \in \mathscr{Z}$ и оператор $\mathscr{B}_m(X) := [bz^m, X]$ обратим на $\mathscr{N}$. Тогда справедливы следующие утверждения.*

(A) *Задача Коши $q(x, t_0) = q_0(x)$, где $q_0 \in N_0(x_0)$, для уравнения (0.5) имеет локальное голоморфное решение $q(x, t)$ в окрестности точки $(x_0, t_0) \in \mathbb{C}^2$ тогда и только тогда, когда $Lq_0 \in \mathrm{Gev}_{1/m}$. Если такое решение $q(x, t)$ существует, то только одно.*

(B) *Всякое голоморфное решение $q(x, t)$ уравнения (0.5) в произвольном бидиске $D := \{(x, t) \in \mathbb{C}^2 \,|\, |x - x_0| < \delta_1,\ |t - t_0| < \delta_2\}$ аналитически продолжается до функции, мероморфной в полосе $S := \{(x, t) \in \mathbb{C}^2 \,|\, |t - t_0| < \delta_2\}$.*

После теоремы излагаются её варианты, в частности, предложение 2 о том, что для наличия СМП (т.е. свойства (B)) в формулировке теоремы 3 достаточно, чтобы $bz^m \in \mathscr{Z}$ и $c_k \in D_{m-k}$ для $k = 1, \ldots, m$.

В конце параграфа приводятся примеры применения основной теоремы и предложения 2.

Во второй главе производится обобщение результатов первой главы на случай, когда подалгебра Ли B_0 алгебры Ли B разлагается в прямую сумму векторных пространств B_+, B_-, являющихся подалгебрами Ли в B_0. Это разложение называется *разбиением* B_0. Обсуждаются необходимые условия на разбиение.

Значения $q(x)$ теперь берутся из пространства N_0^+, определяемого как проекция N_0 на B_+ параллельно B_- (множество голоморфных ростков в точке x_0 со значениями в N_0^+ обозначается $N_0^+(x_0)$). Дифференциальные полиномы $F_k(q)$ определяются как коэффициенты при степенях z^{m-k} ряда

$$F(q, z) := T(q)\beta T^{-1}(q),$$

где определение T остаётся прежним, а $\beta = bz^m + c_1 z^{m-1} + \ldots + c_m \in \mathscr{Z}$.

Показывается, что основное уравнение теперь записывается в виде

$$q_t = \partial_x F_m(q)_+ + [F_m(q)_+, q]. \tag{0.8}$$

Здесь нижний индекс "+" означает взятие проекции на B_+ параллельно B_-.

Второй параграф главы 2 посвящен преобразованию рассеяния для случая нетривиального разбиения. Определение преобразования рассеяния остаётся неизменным. Аналог теоремы 2 выражен теоремой 4.

Теорема 4. *Отображение* $L : N_0^+(x_0) \to \mathrm{Gev}_1^I$ *взаимно-однозначно.*

Обратное отображение также строится с помощью задачи Римана, но уже с другим условием. А именно, для ряда $f(z) = I + \sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k z^{-k}$ с матричными коэффициентами $f_k \in B_{-k}$ и условием $f(z) - I \in \mathrm{Gev}_1$ рассматривается задача Римана

$$e^{a(x-x_0)z} f^{-1}(z) = \widehat{\varphi}^{-1}(x,z)\widehat{\psi}(x,z),$$

где ряды $\widehat{\varphi}(x,z)$ и $\widehat{\psi}(x,z)$ ищутся в следующем виде:

$$\widehat{\varphi}(x,z) = \sum_{k=0}^{\infty} \widehat{\varphi}_k(x) z^{-k}, \qquad \widehat{\psi}(x,z) = \sum_{k=0}^{\infty} \widehat{\psi}_k(x) z^{k},$$

причем $\widehat{\varphi}_0 \in A_-$ и $\widehat{\psi}_0 \in A_+$. Здесь $A_\pm$ — это группы Ли, соответствующие алгебрам Ли $B_\pm$.

Тогда обратное к L на Gev_1^I отображение строится по формуле

$$B[f - I](x) := [\widehat{\varphi}_1(x)\widehat{\varphi}_0^{-1}(x), a]_+.$$

В параграфе 3 главы 2 доказывается аналог теоремы 3 для случая нетривиального разбиения — теорема 5.

Теорема 5. *Пусть зафиксирована основная алгебра, матрица* a *и подходящее разбиение. Пусть фиксирован постоянный элемент* $\beta = bz^m + c_1 z^{m-1} + \ldots + c_m$, *где* $m \geqslant 2$, *причем* $\beta \in \mathscr{Z}$. *Тогда справедливы следующие утверждения.*

(A) *Задача Коши* $q(x,t_0) = q_0(x)$, *где* $q_0 \in N_0^+(x_0)$, *для уравнения* (0.8) *имеет локальное голоморфное решение* $q(x,t)$ *в окрестности точки* $(x_0,t_0) \in$

$\mathbb{C}^2$ *тогда и только тогда, когда* $Lq_0 \in \mathrm{Gev}_{1/m}$. *Если такое решение* $q(x,t)$ *существует, то только одно.*

(B) *Всякое голоморфное решение* $q(x,t)$ *уравнения* (0.8) *в произвольном бидиске* $D := \{(x,t) \in \mathbb{C}^2 \,|\, |x-x_0| < \delta_1,\ |t-t_0| < \delta_2\}$ *аналитически продолжается до функции, мероморфной в полосе* $S := \{(x,t) \in \mathbb{C}^2 \,|\, |t-t_0| < \delta_2\}$.

В конце параграфа приводится важный пример — доказательство СМП для второго модифицированного уравнения Кортевега-де Фриза:

$$u_t = -u_{xxx} + 3(u_{xx}u - uu_{xx}) + 6uu_xu,$$

где $u(x,t)$ принимают значения в $\mathrm{gl}(n,\mathbb{C})$.

В последней главе приводится пример применения теоремы 3 для доказательства СМП у обыкновенных дифференциальных уравнений, получаемых, как редукции солитонных уравнений параболического типа, а именно, к уравнениям Пенлеве 1, 2, 4, а также к иерархиям первых двух уравнений.

Утверждение о наличии СМП уравнений Пенлеве выражается теоремой 6:

Теорема 6. *Для любых значений параметров* $a, b \in \mathbb{C}$ *первое, второе и четвертое уравнения Пенлеве*

$$w'' = 6w^2 + z \qquad (P_1)$$

$$w'' = 2w^3 + zw + a \qquad (P_2)$$

$$2ww'' = w'^2 + 3w^4 + 8zw^3 + 4(z^2 - a)w^2 + b \qquad (P_4)$$

обладают СМП.

Иерархия первого уравнения Пенлеве строится рекурсивно и состоит из обыкновенных дифференциальных уравнений вида

$$L_{n+1}[w] + \sum_{j=1}^{n} b_j L_{n+1-j}[w] = a_1 z + a_2, \qquad ({}_{2n}P_1)$$

где $n \in \mathbb{N}$, $a_1, a_2, b_1, \ldots, b_n \in \mathbb{C}$ — произвольные константы, причем $a_1 \neq 0$, а $L_n[w]$ — дифференциальные полиномы Льенара, определяемые по индукции соотношениями $L_0[w] = 1/2$,

$$\partial L_{n+1}[w] = (\partial^3 + 4w\partial + 2w')L_n[w] \qquad (L)$$

для всех $n = 0, 1, 2, \ldots$ (где через ∂ обозначается оператор дифференцирования по z) и $L_n[0] = 0$ для всех $n \in \mathbb{N}$.

Иерархия второго уравнения Пенлеве состоит из обыкновенных дифференциальных уравнений

$$Q_n[w] + \sum_{j=1}^{n-1} b_j Q_{n-j}[w] = zw + a, \quad \text{где} \quad Q_n[w] := (\partial + 2w) L_n[w' - w^2]. \quad ({}_{2n}P_2)$$

Здесь $n \in \mathbb{N}$ — номер уравнения, $a, b_1, \ldots, b_{n-1} \in \mathbb{C}$ — произвольные константы.

В конце параграфа 1 главы 3 формулируется теорема 7.

Теорема 7. *Для любых значений параметров $n \in \mathbb{N}$, $a, a_1, a_2, b_1, \ldots, b_n \in \mathbb{C}$, $a_1 \neq 0$, все уравнения ${}_{2n}P_1$ и ${}_{2n}P_2$ обладают* СМП.

Оставшиеся параграфы кроме последнего посвящены доказательству теорем 6 и 7.

В последнем параграфе диссертации приводится пример применения теоремы 3 для доказательства СМП простейших матричных аналогов уравнений Пенлеве 1 и 2. А именно, доказываются следующие две теоремы.

Теорема 8. *Следующие уравнения обладают СМП.*

(A) Матричный аналог P_1:

$$w'' = 6w^2 + zI.$$

(B) Два матричных аналога P_2:

$$y'' = [y, y'] + 2y^3 + zy - d, \qquad d \in \mathrm{gl}(n, \mathbb{C}),$$

$$y'' = 2[y, y'] + 2y^3 + zy - d, \qquad d \in \mathrm{gl}(n, \mathbb{C}).$$

(C) Два матричных аналога продифференцированного P_2:

$$y''' = 3y^2y' + 3y'y^2 + y + zy' + [d, y], \qquad d \in \mathrm{gl}(n, \mathbb{C}),$$

$$y''' = 3[y'', y] + 6yy'y + y + zy' + [d, y], \qquad d \in \mathrm{gl}(n, \mathbb{C}).$$

Теорема 9. *Следующие векторные аналоги продифференцированного P_2 обладают СМП:*

$$y''' = 3(y,y)y' + 3(y,y')y + zy' + y + Ay, \qquad A = -A^T,$$
$$y''' = 3(y,y)y' + zy' + y + Ay, \qquad A = -A^T.$$

Здесь значения y принадлежат $\mathbb{C}^n$, и $(u,v) := u_1v_1 + \ldots + u_nv_n$ - билинейная форма, равная сумме произведений координат.

Благодарности. Автор выражает огромную благодарность научному руководителю Домрину Андрею Викторовичу за терпение, поддержку и неоценимую помощь в научной работе. Также автор благодарен Сулейманову Булату Ирековичу за консультации и участие в работе и всему коллективу научного семинара “Комплексные задачи математической физики” за ценные советы и возможность обсудить полученные результаты.

Глава 1. Метод обратной задачи для градуированных матричных алгебр

§ 1. Алгебраическая часть.

В этом параграфе мы рассмотрим основные алгебраические построения, с помощью которых получим иерархии интересующих нас солитонных уравнений.

1.1. Основные определения. Фиксируем $n \in \mathbb{N}$ и обозначим множество всех комплексных $n \times n$-матриц через $\mathrm{gl}(n, \mathbb{C})$. Пусть заданы комплексные векторные подпространства $B_j \subseteq \mathrm{gl}(n, \mathbb{C})$, $j \in \mathbb{Z}$, удовлетворяющие условию градуированности относительно произведения матриц:

$$B_j B_k \subseteq B_{j+k} \quad \text{для всех} \quad j, k \in \mathbb{Z}. \tag{1.1.1}$$

Тогда выполнено и условие градуированности относительно коммутатора

$$[B_j, B_k] \subseteq B_{j+k} \quad \text{для всех} \quad j, k \in \mathbb{Z} \tag{1.1.2}$$

и, в частности, векторное подпространство B_0 является подалгеброй Ли.

Пусть также задана матрица $a \in B_1$, для которой линейный оператор $\mathscr{A} : \mathrm{gl}(n, \mathbb{C}) \to \mathrm{gl}(n, \mathbb{C})$, $\mathscr{A}(\xi) := [a, \xi]$, обладает свойствами полупростоты

$$\ker \mathscr{A} \oplus \operatorname{im} \mathscr{A} = \mathrm{gl}(n, \mathbb{C}) \tag{1.1.3}$$

и нетривиальности

$$\operatorname{im} \mathscr{A} \neq \{0\}. \tag{1.1.4}$$

Из (1.1.2) вытекает, что $\mathscr{A}$ отображает B_j в B_{j+1}. Потребуем выполнения аналога (1.1.3) на каждом уровне градуировки:

$$D_j \oplus N_j = B_j \text{ для всех } j \in \mathbb{Z}, \text{ где } D_j := B_j \cap \ker \mathscr{A} \text{ и } N_j := B_j \cap \operatorname{im} \mathscr{A}. \tag{1.1.5}$$

Тогда ясно, что $\mathscr{A}$ отображает B_j в N_{j+1}, причём сужение $\mathscr{A}$ на N_j инъективно. Потребуем чуть большего:

$$\mathscr{A} \text{ биективно отображает } N_j \text{ на } N_{j+1} \text{ для всех } j \in \mathbb{Z}. \tag{1.1.6}$$

Договорённость. В дальнейшем мы *всегда* полагаем, что матрица a выбрана так, что выполняются условия выше, и в большинстве случаев не будем это отдельно оговаривать.

Определим бесконечномерную алгебру Ли $\mathscr{C} := \cup_{k\in\mathbb{Z}}\mathscr{C}_k$, где

$$\mathscr{C}_k := \Big\{ \sum_{j=-\infty}^{k} b_j z^j \,\Big|\, b_j \in B_j \text{ для всех } j \leqslant k \Big\}, \qquad k \in \mathbb{Z}. \tag{1.1.7}$$

Она состоит из формальных рядов Лорана (конечных в положительную сторону) от спектрального параметра z с матричными коэффициентами и градуирована своими векторными подпространствами $\mathscr{C}_k$ в том же смысле, что и в (1.1.1), т.е. $\mathscr{C}_j\mathscr{C}_k \subseteq \mathscr{C}_{j+k}$ для всех $j,k \in \mathbb{Z}$. Тогда, конечно, справедлив и аналог (1.1.2), т.е. $[\mathscr{C}_j,\mathscr{C}_k] \subseteq \mathscr{C}_{j+k}$ для всех $j,k \in \mathbb{Z}$, где $[\xi,\eta] := \xi\eta - \eta\xi$. В частности, векторное подпространство $\mathscr{C}_0$ является подалгеброй Ли.

Алгебры $\mathscr{C}$ с описанными выше свойствами договоримся называть *основными алгебрами*.

Фиксируем матрицу a. Проекцию элемента X из B_j на D_j параллельно N_j будем обозначать через X^K, а на N_j параллельно D_j - через X^I. Аналогично, для элемента $f = \sum_{j=-\infty}^{m} z^j f_j$ из $\mathscr{C}$ введем обозначения

$$f^K := \sum_{j=-\infty}^{m} z^j f_j^K,$$

$$f^I := \sum_{j=-\infty}^{m} z^j f_j^I.$$

Определим также следующие векторные подпространства в $\mathscr{C}_k$:

$$\mathscr{N}_k := \Big\{ \sum_{j=-\infty}^{k} \varkappa_j z^j \,\Big|\, \varkappa_j \in N_j \text{ для всех } j \leqslant k \Big\}, \qquad k \in \mathbb{Z}, \tag{1.1.8}$$

$$\mathscr{D}_k := \Big\{ \sum_{j=-\infty}^{k} d_j z^j \,\Big|\, d_j \in D_j \text{ для всех } j \leqslant k \Big\}, \qquad k \in \mathbb{Z}. \tag{1.1.9}$$

Их объединения $\mathscr{N} := \cup_{k\in\mathbb{Z}}\mathscr{N}_k$, $\mathscr{D} := \cup_{k\in\mathbb{Z}}\mathscr{D}_k$ будут, очевидно, векторными подпространствами в $\mathscr{C}$. Также очевидно, что справедливы следующие разложения в прямую сумму векторных пространств: $\mathscr{C} = \mathscr{N} \oplus \mathscr{D}$, $\mathscr{C}_k = \mathscr{N}_k \oplus \mathscr{D}_k$.

Пример 1. Пусть $B_j = \mathrm{gl}(n, \mathbb{C})$ для всех $j \in \mathbb{Z}$ (такую градуировку будем называть *стандартной*), а матрица a имеет вид $\mathrm{diag}\{a_1 I_1, \ldots, a_k I_k\}$, где I_l — единичная матрица произвольной размерности (сумма размерностей матриц I_l, конечно, должна равняться n), $a_j \in \mathbb{C}$, $a_l \neq a_j$ при $l \neq j$ и $k > 1$. Иначе говоря, матрица a не должна иметь жордановых клеток и не должна быть скалярно кратной единичной матрице. Тогда $\ker \mathscr{A}$ — множество блочно-диагональных матриц, а $\mathrm{im}\, \mathscr{A}$ — множество блочно-внедиагональных матриц, у которых размеры блоков совпадают с размерами блоков матрицы a.[13] Свойство (1.1.3) равносильно диагонализуемости матрицы a, а свойство (1.1.4) равносильно наличию у неё хотя бы двух различных собственных значений. Алгебра $\mathscr{C}$ в данном случае — это алгебра формальных степенных рядов с матричными коэффициентами с конечным количеством слагаемых с положительными степенями z.

Случай, когда матрица a в примере 1 имеет простой спектр (т.е. все её собственные значения различны), будем называть *скалярным*. Этот случай полностью разобран в работе [3]. Случай, когда матрица a может иметь повторяющиеся собственные значения, мы будем называть *блочным*. Смысл этих названий будет виден из примеров: скалярный случай приводит к системам скалярных дифференциальных уравнений, а блочный случай - к матричным системам.

Отметим, что если $X \in \ker \mathscr{A}$, $Y \in \mathrm{im}\, \mathscr{A}$, то

$$XY,\, YX \in \mathrm{im}\, \mathscr{A}. \tag{1.1.10}$$

Действительно, так как $Y \in \mathrm{im}\, \mathscr{A}$, то существует такой элемент W, что $Y = [a, W]$. Отсюда получаем:

$$XY = X[a, W] = XaW - XWa = aXW - XWa = [a, XW]. \tag{1.1.11}$$

Следовательно, $XY \in \mathrm{im}\, \mathscr{A}$. Для YX рассуждение аналогичное.

[13] В работах [7], [8] рассматривался именно этот случай.

Нам часто придется брать положительные или отрицательные части рассматриваемых рядов. В связи с этим положим:

$$\mathscr{C}_+ := \Big\{ \sum_{j=-\infty}^{\infty} b_j z^j \in \mathscr{C} \,\Big|\, b_j = 0 \text{ при } j < 0 \Big\}, \tag{1.1.12}$$
$$\mathscr{C}_- := \Big\{ \sum_{j=-\infty}^{\infty} b_j z^j \in \mathscr{C} \,\Big|\, b_j = 0 \text{ при } j \geqslant 0 \Big\}$$

Тогда $\mathscr{C} = \mathscr{C}_+ \oplus \mathscr{C}_-$ (прямая сумма векторных подпространств), т.е. любой элемент $\beta = \sum_{j=-\infty}^{N} b_j z^j \in \mathscr{C}$ записывается в виде $\beta = \beta_+ + \beta_-$, где

$$\beta_+ := \sum_{j=0}^{N} b_j z^j \in \mathscr{C}_+, \qquad \beta_- := \sum_{j=-\infty}^{-1} b_j z^j \in \mathscr{C}_-. \tag{1.1.13}$$

Введем обозначение для *централизатора* матрицы a в соответствующем B_j:

$$\mathrm{Z}_j := \{X \in B_j \,|\, [X, Y] = 0 \ \forall Y \in \ker \mathscr{A}\}.$$

Тогда централизатором матрицы a в алгебре $\mathscr{C}$ назовем множество

$$\mathscr{Z} := \{\xi \in \mathscr{C} \,|\, [\xi, \eta] = 0 \ \forall \eta \in \mathscr{D}\}.$$

То есть, элементами $\mathscr{Z}$ служат матричные ряды, коммутирующие со всеми рядами, коэффициенты которых взяты из D_j. Очевидно, что у рядов из $\mathscr{Z}$ коэффициенты принадлежат Z_j.

Наконец, зафиксируем односвязную область $\Omega \subset \mathbb{C}^1_x$ на плоскости комплексного переменного x. Для любого комплексного векторного подпространства $X \subseteq \mathrm{gl}(n, \mathbb{C})$ (например, $X = B_j$, D_j или N_j при каком-либо $j \in \mathbb{Z}$) будем обозначать через $X(\Omega)$ множество всех голоморфных отображений из Ω в X. При каждом $k \in \mathbb{Z}$ обозначим через $\mathscr{C}_k(\Omega)$, $\mathscr{D}_k(\Omega)$ и $\mathscr{N}_k(\Omega)$ множества всех формальных рядов Лорана вида $\sum_{j=-\infty}^{k} b_j(x) z^j$, где все коэффициенты $b_j(x)$, $j \leqslant k$, принадлежат $B_j(\Omega)$, $D_j(\Omega)$ и $N_j(\Omega)$ соответственно. Ясно, что это — комплексные векторные подпространства в пространстве $\mathscr{C}(\Omega)$, определяемом как множество всех формальных рядов Лорана вида $\sum_{j=-\infty}^{\infty} b_j(x) z^j$, где $b_j \in B_j(\Omega)$

для всех $j \in \mathbb{Z}$ и $b_j(x) \equiv 0$ начиная с некоторого j. При этом $\mathscr{C}(\Omega)$ является ассоциативной алгеброй относительно обычного умножения рядов Лорана, а также алгеброй Ли относительно скобки $[\xi, \eta] = \xi\eta - \eta\xi$.

Аналогичным образом для $x_0 \in \mathbb{C}^1_x$ обозначим через $X(x_0)$ множество ростков в точке x_0 голоморфных отображений со значениями в X. Определения $\mathscr{C}_k(x_0)$, $\mathscr{D}_k(x_0)$ и $\mathscr{N}_k(x_0)$ переносятся с соответствующими изменениями.

1.2. Уравнение нулевой кривизны. Фиксируем основную алгебру $\mathscr{C}$ и матрицу a.

Уравнение, к которому мы хотим прийти, получается приравниванием коэффициентов при степенях z в уравнении нулевой кривизны:

$$U_t - V_x + [U, V] = 0, \tag{1.1.14}$$

где

$$U(x,t,z) = az + q(x,t)\ , \quad V(x,t,z) = bz^m + r_1(x,t)z^{m-1} + \ldots + r_m(x,t) \tag{1.1.15}$$

для некоторого $m \in \mathbb{N}$, $b \in \mathrm{Z}_m$ и некоторых голоморфных отображений

$$q : \Omega_{xt} \to N_0,$$

$$r_j : \Omega_{xt} \to B_j$$

на заданной области $\Omega_{xt} \subset \mathbb{C}^2_{xt}$.

Отметим, что для односвязной области Ω_{xt} уравнение (1.1.14) эквивалентно разрешимости вспомогательной линейной системы:

$$\frac{\partial E}{\partial x} = UE, \qquad \frac{\partial E}{\partial t} = VE, \tag{1.1.16}$$

где $E(x,t,z)$ - голоморфное отображение со значениями в $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$.

Подставим U, V в левую часть уравнения (1.1.14), получим:[14]

$$U_t - V_x + [U, V] = q_t - V_x + [U, V] = \sum_{j=0}^{m+1} s_j(x,t) z^{m+1-j},$$

[14]Здесь и далее нижний индекс x и t у некоторого ряда по степеням z означает взятие частной производной по соответствующей переменной, то есть ряд, полученный заменой каждого коэффициента на его частную производную по x или t.

где коэффициенты s_i имеют вид (обозначим $r_0(x,t) \equiv b$):

$$\begin{cases} s_0(x,t) \equiv [a,b] = 0 \ , \\ s_j(x,t) = -(r_{j-1})_x + [q, r_{j-1}] + [a, r_j] \quad \text{при} \quad j = 1, \dots, m \ , \\ s_{m+1}(x,t) = q_t - (r_m)_x + [q, r_m] \ . \end{cases} \tag{1.1.17}$$

Уравнение $s_{m+1}(x,t) \equiv 0$ и есть нужное нам уравнение. Покажем, что коэффициенты $r_i(x,t)$ на самом деле являются не произвольными функциями, а интегро-дифференциальными полиномами от q.

Лемма 1. *Пусть фиксированы односвязная область $\Omega \subset \mathbb{C}$, основная алгебра $\mathscr{C}$ и матрица a, а также матрицы $b, c_1, c_2, \dots$ из $D_m, D_{m-1}, D_{m-2}, \dots$ соответственно. Тогда существует единственная последовательность интегро-дифференциальных полиномов*[15] *$F_{m-k} : N_0(\Omega) \to B_k(\Omega)$ $(k = m, m-1, m-2, ...)$ таких, что*

1) $F_0(q) \equiv b$,

2) $F_j(0) \equiv c_j$ для всех $j = 1, 2, ...$,

3) элемент $F(q,z) := \sum_{j=0}^{\infty} F_j(q) z^{m-j}$ из $\mathscr{C}_m$ удовлетворяет уравнению[16]

$$\partial_x F(q,z) = [az + q, F(q,z)] \tag{1.1.18}$$

тождественно по $q \in N_0(\Omega)$ в смысле равенства формальных степенных рядов от z.

Договоренность. В большинстве случаев в данной работе мы будем опускать у отображений аргументы (особенно зависимость от q) после того, как мы

[15] Пусть q — матричнозначная функция. Мы скажем, что F — это дифференциальный полином от q (со значениями в $\mathrm{gl}(n, \mathbb{C})$), если каждый элемент матрицы $F(q)$ есть многочлен от элементов матрицы q и их производных. Соответственно, мы скажем, что F — это интегро-дифференциальный полином от q, если каждый элемент матрицы $F(q)$ получается из элементов матрицы q применением конечного числа алгебраических операций, а также дифференцирования и интегрирования.

[16] Уравнение $F_x = [U, F]$ для $U = az + q$ всюду в дальнейшем будем называть *резольвентным*.

эти отображения определили. По контексту будет ясно, о чем идёт речь, и это существенно упростит нам выкладки.

Доказательство. Положим $X_j := F_j(q)^K$ и $Y_j := F_j(q)^I$. Тогда $F_j(q) = X_j + Y_j$. Подставляя данное разложение в (1.1.18) и отделяя проекции на N_j и D_j, получаем систему на X_j, Y_j (полагая $F_{-1} \equiv 0$):[17]

$$\begin{cases} \partial_x X_{j-1} = [q, Y_{j-1}]^K, \\ [a, Y_j] = \partial_x Y_{j-1} - [q, F_{j-1}]^I. \end{cases} \tag{1.1.19}$$

Благодаря свойству (1.1.6) оператора $\mathscr{A}$ и "начальным" условиям 1), 2) эта система разрешима единственным образом (последовательно находятся Y_1, X_1, Y_2, X_2,...). Заметим, что Y_j выражается как дифференциальный полином от компонент F_{j-1}, в то время как для нахождения X_j через Y_j используется операция интегрирования, следовательно, F_j могут не быть дифференциальными полиномами. □

Теперь получим основное уравнение, которое будет играть ключевую роль в данной работе. Пусть $\Omega_1 \subset \mathbb{C}^1_x$ и $\Omega_2 \subset \mathbb{C}^1_t$ — односвязные области. Тогда все интегро-дифференциальные полиномы F_k из леммы 1 корректно определены на голоморфных отображениях $q : \Omega_1 \times \Omega_2 \to N_0$ при каждом фиксированном t из Ω_2.

Лемма 2. *Для того, чтобы функции U, V вида (1.1.15) с матрицами a, b, как в лемме 1, и голоморфным отображением $q : \Omega_1 \times \Omega_2 \to N_0$ задавали голоморфное решение уравнения нулевой кривизны (1.1.14) в области $\Omega := \Omega_1 \times \Omega_2 \subset \mathbb{C}^2$, необходимо и достаточно выполнение следующих условий.*

(а) Коэффициенты r_j: $\Omega \to B_{m-j}$ полинома V при каждом фиксированном t должны выражаться через q формулами

$$r_i = F_i(q) \qquad i = 1, ..., m \tag{1.1.20}$$

[17] В первом равенстве мы пользуемся свойством (1.1.10).

для некоторых матриц $c_j(t) \in D_{m-j}$, *голоморфно зависящих от*[18] $t \in \Omega_2$.

(б) Голоморфное отображение $q\colon \Omega \to N_0$ *должно удовлетворять на* Ω *уравнению*[19]

$$q_t = [a, F_{m+1}(q)] \tag{1.1.21}$$

для того же выбора отображений c_j, *что в пункте (а), и для произвольной матрицы* $c_{m+1} \in D_{-1}$.

Доказательство. Заметим, что условия $s_j(x,t) \equiv 0$ для $j = 1, ..., m$ из (1.1.17) эквивалентны соответствующим уравнениям системы (1.1.19), если записать каждый коэффициент r_j в виде суммы проекций на D_{m-j} и N_{m-j}. Из леммы 1 мы знаем, что эта система однозначно разрешима при заданных a, b, c_j. С учётом того, что в данном случае роль констант c_j играют голоморфные на Ω_2 функции $c_j(t) = (r_j(x_0,t))^K$, отсюда сразу следуют утверждения леммы. □

Замечание 1. В скалярном случае интегро-дифференциальные полиномы F_j всегда являются дифференциальными (см. [3], лемма 1.1). Доказательство этого утверждения существенно опиралось на тот факт, что след коммутатора равен нулю: $\operatorname{tr}[A, B] = 0$. В блочном случае (а тем более в случае нестандартной градуировки) нет понятия, эквивалентного следу, поэтому то же доказательство уже не проходит.

Будем говорить, что уравнение (1.1.21) является *локальным*, если его правая часть является дифференциальным полиномом от q. Иначе (если компоненты $[a, F_{m+1}(q)]$ содержат первообразные) будем говорить, что уравнение является *нелокальным*.

Приведем пример.

Пример 2. Рассмотрим стандартную градуировку, т.е. $B_j = \mathrm{gl}(n, \mathbb{C})$ для всех $j \in \mathbb{Z}$. Выпишем уравнение (1.1.21) при $m = 2$:

$$q_t = \frac{\beta_1 - \beta_2}{(\alpha_1 - \alpha_2)^2} M_2 q + \frac{1}{\alpha_1 - \alpha_2} M_1 q + [c_2, q], \tag{1.1.22}$$

[18] Т.е. $c_j \in D_{m-j}(\Omega_2)$

[19] Уравнение (1.1.21) мы будем называть в дальнейшем *основным*.

где $a = \mathrm{diag}(\alpha_1 I_{s_1}, \alpha_2 I_{s_2})$, $b = \mathrm{diag}(\beta_1 I_{s_1}, \beta_2 I_{s_2})$, $c_1 = \mathrm{diag}(A, B)$,

$$q = \begin{pmatrix} 0 & u(x,t) \\ v(x,t) & 0 \end{pmatrix}, \qquad M_2 q = \begin{pmatrix} 0 & u_{xx} - 2uvu \\ -v_{xx} + 2vuv & 0 \end{pmatrix}, \tag{1.1.23}$$

$$M_1 q = \begin{pmatrix} 0 & Au_x - u_x B + [\xi, A]u + u[\eta, B] \\ v_x A - Bv_x + [B, \eta]v + v[A, \xi] & 0. \end{pmatrix} \tag{1.1.24}$$

Здесь A, B — матрицы размера $s_1 \times s_1$ и $s_2 \times s_2$ соответственно, а ξ и η удовлетворяют уравнениям

$$\xi_x = uv, \quad \xi(x_0, t) = 0, \quad \eta_x = vu, \quad \eta(x_0, t) = 0. \tag{1.1.25}$$

Как нетрудно видеть, ξ и η — это как раз "нелокальные" компоненты. Но если $A = \gamma_1 I_{s_1}$ и $B = \gamma_2 I_{s_2}$ (т.е. если $c_1 \in \mathrm{Z}_1$), то все коммутаторы, содержащие компоненты A и B матрицы c_1, обратятся в нуль и, следовательно, ξ и η будут исключены из уравнения.

В дальнейшем в примерах мы увидим многочисленные частные случаи уравнения (1.1.22), в том числе матричное обобщение нелинейного уравнения Шредингера (НУШ) и различные интегро-дифференциальные уравнения.

Поставим вопрос: когда уравнение (1.1.21) будет локальным? Оказывается, справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть фиксирована основная алгебра и матрица a. Пусть матрицы $b, c_1, \ldots, c_k$ и отображение F_k заданы, как в формулировке леммы 1 (k — натуральное число). В этих условиях F_k является дифференциальным полиномом тогда и только тогда, когда $z^m b + z^{m-1} c_1 + \ldots + z^{m-k+1} c_{k-1} \in \mathscr{Z}$. (При $k = 1$ это условие означает, что $b \in \mathrm{Z}_m$.) В частности, если $z^m b + z^{m-1} c_1 + z^{m-2} c_2 + \ldots \in \mathscr{Z}$, то все отображения $F_1, F_2, \ldots$ являются дифференциальными полиномами.*

Доказательство этой теоремы изложено в следующих двух пунктах.

1.3. Диагонализующее калибровочное преобразование. Зафиксируем односвязную область $\Omega \subset \mathbb{C}^1_x$ на плоскости комплексного переменного x.

Подмножество $I + \mathscr{C}_{-1}(\Omega) \subset \mathscr{C}(\Omega)$ является группой относительно обычного умножения формальных рядов Лорана, которая действует на аффинном подпространстве $az + \mathscr{C}_0(\Omega) \subset \mathscr{C}(\Omega)$ по правилу

$$\Phi \cdot U := \Phi_x \Phi^{-1} + \Phi U \Phi^{-1}. \tag{1.1.26}$$

Из эквивалентного (1.1.26) равенства дифференциальных операторов

$$\partial_x - \Phi \cdot U = \Phi(\partial_x - U)\Phi^{-1} \tag{1.1.27}$$

видно, что это действие описывает замену зависимых переменных в первом уравнении вспомогательной линейной системы (1.1.16). А именно, голоморфная функция $\xi : \Omega \to \mathbb{C}^n$ удовлетворяет системе $\xi_x = U\xi$ тогда и только тогда, когда ряд $\eta := \Phi\xi$ удовлетворяет на Ω системе $\eta_x = (\Phi \cdot U)\eta$. Элементы группы $I + \mathscr{C}_{-1}(\Omega)$ называются *калибровочными преобразованиями.*

Отметим здесь простую лемму, которая понадобится нам в дальнейшем.

Лемма 3. *Если калибровочное преобразование* $\Phi(x,z) = I + \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k(x) z^{-k}$ *переводит связность* az *в себя, то для всех натуральных* k *имеем* $\varphi_k \in D_{-k}(\Omega)$ *и функция* φ_k *не зависит от* x.

Доказательство. Справедливость леммы нетрудно вывести из определения. Действительно, уравнение на $\Phi(x,z)$ выглядит следующим образом:

$$\partial_x \Phi(x,z) = z[a, \Phi(x,z)].$$

Беря проекцию уравнений, получающихся приравниванием коэффициентов, на соответствующие D_{-k} и N_{-k}, получаем

$$[a, \varphi^I_{k+1}(x)] = \partial_x \varphi^I_k(x) \qquad \partial_x \varphi^K_k(x) = 0,$$

где мы считаем $\varphi_0(x) \equiv I$. Отсюда и следует утверждение леммы.□

Отметим также, что при калибровочных преобразованиях сохраняется уравнение нулевой кривизны, а именно, если пара (U, V) удовлетворяла (1.1.14), то пара $(\widehat{U}, \widehat{V})$, где $\widehat{U} = \Phi_x\Phi^{-1} + \Phi U\Phi^{-1}$, $\widehat{V} = \Phi_t\Phi^{-1} + \Phi V\Phi^{-1}$, также будет удовлетворять уравнению нулевой кривизны. Этот факт будет важен для нас в дальнейшем.

Особую роль в данной работе будет играть *диагонализующее* калибровочное преобразование $T[q]$, которое появляется в утверждении ниже. Важность данного утверждения (аналогичного предложению 1.2 из [16] и предложению 1 из [17]) неоднократно подчёркивалась в [16]. Определённое в нём калибровочное преобразование $T[q]$ называется диагонализующим потому, что обратное к нему $T^{-1}[q]$ переводит элемент $az + q(x)$, фигурирующий в правой части первого уравнения (1.1.16), в ряд из $az + \mathscr{D}_0(\Omega)$, все коэффициенты которого в скалярном случае диагонализуются в том же базисе пространства $\mathbb{C}^\nu$, что и матрица a. Заметим, что в упомянутых работах калибровочное преобразование $T[q]$ действовало "в другую сторону" и для такого определения название "диагонализующее" более уместно, но нам удобно определять его именно так, как сделано ниже.

Предложение 1. (i) *Для любого голоморфного отображения $q \in B_0(\Omega)$ существует единственный ряд $T[q] \in I + \mathscr{N}_{-1}(\Omega)$ такой, что ряд $T^{-1}[q]\cdot(az+q)$ принадлежит аффинному подпространству $az + \mathscr{D}_0(\Omega)$ алгебры Ли $\mathscr{C}(\Omega)$.*

(ii) *Положим $H[q] := T^{-1}[q]\cdot(az+q) - az$. Тогда все коэффициенты $T_j \in N_{-j}(\Omega)$ и $h_k \in D_{-k}(\Omega)$ рядов $T[q](x,z) = I + \sum_{j=1}^{\infty} T_j(x)z^{-j}$ и $H[q](x,z) = \sum_{k=0}^{\infty} h_k(x)z^{-k}$ вместе со всеми коэффициентами ряда $T^{-1}[q]$ являются дифференциальными полиномами от q.*

Доказательство. Равенство рядов $T^{-1}[q]\cdot(az+q) = az + H[q]$, которое согласно (1.1.26) можно переписать в виде $T[q]_x = (az+q)T[q] - T[q](az+H[q])$, равносильно следующей системе равенств на коэффициенты этих рядов (где

$l = 0, 1, 2, \ldots$, причём при $l = 0$ полагаем $T_0(x) := I$ и заменяем сумму на $-q$):

$$T_l' = -h_l + \mathscr{A} T_{l+1} - \sum_{k=0}^{l-1} T_{l-k} h_k + q T_l.$$

Обе части равенства принадлежат $B_{-l}(\Omega)$ по свойству (1.1.1). Рассмотрим проекции обеих частей равенста на D_{-l} и N_{-l} параллельно N_{-l} и D_{-l} соответственно. Пользуясь (1.1.6) и условиями $T_j^K = 0$ и $h_k^I = 0$, получаем отделением компонент при $l = 0$ пару равенств

$$h_0 = q^K, \quad T_1 = -\mathscr{A}^{-1}(q^I)$$

и при каждом $l = 1, 2, \ldots$ пару равенств[20]

$$h_l = (q T_l)^K, \tag{1.1.28}$$

$$T_{l+1} = \mathscr{A}^{-1} \left(T_l' - (q T_l)^I + \sum_{k=0}^{l-1} T_{l-k} h_k \right). \tag{1.1.29}$$

Из этих равенств все T_j и h_k однозначно находятся по индукции (этим доказано утверждение (i)), причём в виде дифференциальных полиномов от q (этим доказано утверждение (ii) с учётом формул для коэффициентов ряда $T^{-1}[q]$ через коэффициенты ряда $T[q]$). □

Замечание 2. Из построения ясно, что $T_i = 0$ при $q \equiv 0$.

Замечание 3. Заметим, что в лемме 1 требуется $q \in N_0(\Omega)$, в то время как в предложении 1 требуется $q \in B_0(\Omega)$. Условие в лемме — по существу,[21] поэтому далее в этой главе мы всегда будем предполагать $q \in N_0(\Omega)$, если не оговорено противное. Отметим, что в этом случае $h_0(q) \equiv 0$.

Диагонализующее преобразование T позволяет также "диагонализовывать" ряды $F(q, z)$, полученные в лемме 1, а в некоторых случаях приводить их к значительно более простому виду. Чтобы это увидеть, перепишем уравнение (1.1.18) в операторном виде:

$$[L, F(q, z)] = 0, \tag{1.1.30}$$

[20] Здесь мы также используем свойство (1.1.10).

[21] Подробности будут изложены в следующей главе.

где

$$L = \frac{d}{dx} - az - q. \tag{1.1.31}$$

Таким образом, решение уравнения (1.1.18) эквивалентно поиску элементов $F(q,z)$ из $\mathscr{C}$, коммутирующих с оператором L.

Перепишем (1.1.30) в виде

$$[L_0, F^*(q,z)] = 0, \quad \text{где} \tag{1.1.32}$$

$$F^*(q,z) := T^{-1}[q]F(q,z)T[q], \tag{1.1.33}$$

$$L_0 := \frac{d}{dx} - az - H[q]. \tag{1.1.34}$$

Очевидно, что если $F(q,z) \in \mathscr{C}_m$, то $F^*(q,z) \in \mathscr{C}_m$. Поэтому $F^*(q,z) = \sum\limits_{j=-\infty}^{m} F_j^* z^j$, где $F_j^* : N_0(\Omega) \to B_j(\Omega)$ — также интегро-дифференциальные полиномы. Кроме того, $F^*(0,z) = F(0,z)$ в силу замечания 2.

Подставим явные выражения для $F^*(q,z)$ и L_0 в (1.1.32). Получим

$$[\partial_x - az - \sum_{j=0}^{\infty} h_i z^j, \sum_{j=0}^{\infty} F_j^* z^{m-j}] = 0. \tag{1.1.35}$$

Приравнивая коэффициенты при степенях z, для всех $q \in N_0(\Omega)$ имеем[22]

$$z^{m+1} : [a, F_0^*] = 0 \implies F_0^*(q) \in D_m(\Omega),$$

$$z^m : (F_0^*)' - [a, F_1^*] + [h_0, F_0^*] = 0 \implies F_1^*(q) \in D_{m-1}(\Omega),$$

$$\ldots$$

$$z^{m-j} : (F_j^*)' - [a, F_{j+1}^*] + \sum_{k=0}^{j} [h_k, F_{j-k}^*] = 0 \implies F_{j+1}^*(q) \in D_{m-j-1}(\Omega),$$

где $j < m$ и следствия после каждого уравнения получаются проекцией обеих частей уравнения на соответствующее пространство D_j и применением свойства (1.1.6) (с учётом уже полученных к данному моменту следствий). В итоге приходим к выводу, что $(F^*(q,z))^I \equiv 0$, а (1.1.35) принимает вид системы

$$(F_j^*)' = \sum_{k=0}^{j} [F_{j-k}^*, h_k], \qquad j = 0, 1, 2, \ldots \tag{1.1.36}$$

[22]Напомним, что $h_0 \equiv 0$ при $q \in N_0(\Omega)$.

на интегро-дифференциальные полиномы F_j^* со значениями в $D_{m-j}(\Omega)$. Эти соотношения справедливы для любых $b \in D_m$, $c_j \in D_{m-j}$, фигурирующих в построении F_j (см. лемму 1).

1.4. Доказательство теоремы 1. Мы показали, что с оператором L_0 коммутируют все ряды $F^*(q,z)$ из $\mathscr{C}$, члены которых удовлетворяют дифференциальным уравнениям (1.1.36) и принадлежат соответствующим D_j, и только они. Тем самым описаны все решения уравнения (1.1.32), эквивалентного (1.1.30). Теперь приступим к доказательству теоремы 1.

Пусть ряд $F(q,z)$ построен в соответствии с леммой 1, причем $b \in Z_m$, $c_j \in Z_{m-j}$, где $j = 1, \ldots, k-1$.

Так как ряд $T[q]$ начинается с единичной матрицы I и $F_0 \equiv b$, то из (1.1.32) вытекает, что $F_0^* \equiv b$.

Определяющее F_1^* уравнение системы (1.1.36) с номером $j = 1$ имеет вид

$$(F_1^*)' = [F_1^*, h_0] + [F_0^*, h_1]. \tag{1.1.37}$$

Здесь первое слагаемое равно нулю, т.к. $h_0 = 0$. Второе слагаемое также равно нулю, если матрица $F_0^* \equiv b$ из Z_m и, следовательно, коммутирует с матрицей h_1 из D_{-1}. В итоге $(F_1^*)' = 0$. Поскольку, как отмечалось выше, справедливы равенства $F_1^*(0) = F_1(0) = c_1$, получаем:[23] $F_1^*(q) \equiv c_1$ для всех $q \in N_0(\Omega)$.

Далее, рассуждая аналогично и пользуясь системой (1.1.36), получаем, что если матрицы $b, c_1, \ldots, c_{k-1}$ из соответствующих Z_l, то $F_j^*(q) \equiv c_j$ при всех $j = 1, \ldots, k$ и $q \in N_0(\Omega)$.

Таким образом, любое решение $F(q,z)$ уравнения (1.1.30) с условиями на первые k слагаемых $F_0(0) \equiv b$, $F_j(0) = c_j$ (для $j = 1, \ldots, k-1$ и матриц b, c_j из соответствующих Z_l) имеет вид $F(q,z) = T[q]F^*(q,z)T^{-1}[q]$, где $F^*(q,z) =$

[23] Обратим внимание на то, что для произвольного отображения $F : N_0(\Omega) \to B_l(\Omega)$ из равенства $(F(q))'_x = 0$, вообще говоря, не следует, что постоянная по x функция $F(q)$ не зависит от q. Однако это утверждение верно в случае, когда F является интегро-дифференциальным полиномом.

$bz^m + \sum_{j=1}^{k} c_i z^{m-j} + O(z^{m-(k+1)})$. Отсюда следует, что все отображения F_j при $j = 0, 1, \ldots, k$ являются дифференциальными полиномами от q, так как коэффициенты T и T^{-1} являются дифференциальными полиномами по лемме 1. В частности, этим доказано последнее утверждение теоремы 1.

Пусть теперь число $k \in \mathbb{N}$ таково, что матрицы $b, c_1, \ldots, c_{k-1}$ принадлежат соответствующим Z_l, но матрица $c_k \in D_{m-k} \setminus \mathrm{Z}_{m-k}$ произвольна (при $k = 1$ это означает, что уже матрица $c_0 := b$ не обязана принадлежать централизатору a). Мы уже видели, что тогда $F_j^*(q) \equiv c_j$ при $j = 1, \ldots, k$. Поэтому определяющее $F_{k+1}^*(q)$ уравнение системы (1.1.36) с номером $j = k + 1$ имеет вид

$$(F_{k+1}^*)' = [c_k, h_1]. \tag{1.1.38}$$

Из равенств (1.1.28) с $l = 1$ и (1.1.29) с $l = 0$ вытекает, что $h_1 = -(qT_1)^K$ и $[T_1, a] = -q$. Поэтому в правой части равенства (1.1.38) стоит квадратичная функция $-[c_k, (\mathscr{A}^{-1}q \cdot q)^K]$ от элементов матрицы q. Если матрица c_k не принадлежит Z_{m-k}, то эта квадратичная функция непостоянна и, следовательно, не является полной производной никакого дифференциального полинома от q, т.к. не содержит производных от q по x. Таким образом, интегро-дифференциальный полином $F_{k+1}^*(q)$ (а значит, и $F_{m+1}(q)$, благодаря равенству (1.1.32) и лемме 1) не является дифференциальным.

Далее индукцией по $j \in \mathbb{N}$ аналогично получаем, что интегро-дифференциальный полином F_{k+j}^* (а значит, и F_{k+j}) не является дифференциальным, т.к. содержит мономы с j-кратным интегрированием.

Этим теорема 1 полностью доказана.□

Благодаря результатам лемм 1 и 2, мы умеем строить интегро-дифференциальные полиномы F_{m+1}, которые, в свою очередь, позволяют получать эволюционные уравнения из переписанного уравнения нулевой кривизны (1.1.21). В следующем параграфе мы перейдем к изучению аналитических свойств решений этих уравнений, но сначала приведем еще один важный пример.

Пример 3. Данный пример взят из [17]. Пусть $\mathscr{C}$ - основная алгебра, для которой $B_{2j} \subset \mathrm{gl}(2n, \mathbb{C})$ - множество блочно-диагональных 2×2-матриц (размеры блоков равны $n \times n$), и $B_{2j+1} \subset \mathrm{gl}(2n, \mathbb{C})$ - множество блочно-внедиагональных 2×2-матриц. Пусть $a = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}$ (здесь I - единичная матрица, 0 — нулевая матрица, обе также имеют размер $n \times n$). Очевидно, что данная алгебра действительно является основной и матрица a обладает всеми требуемыми свойствами. Пусть $\beta = az^3$ (то есть, матрица b из леммы 1 равна матрице a, а все $c_j = 0$). Очевидно, что $\beta \in \mathscr{Z}$.

Прямым вычислением убеждаемся, что для $q = \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & -u \end{pmatrix}$ уравнение (1.1.21) эквивалентно первому модифицированному (матричному) уравнению Кортевега–де Фриза (мКдФ1):

$$u_t = u_{xxx} + 3u^2 u_x + 3u_x u^2. \tag{1.1.39}$$

§ 2. Прямое и обратное преобразование рассеяния

В этом параграфе мы рассмотрим прямое и обратное преобразование рассеяния (локальный вариант). Эти преобразования позволяют установить взаимно однозначное соответствие между ростками голоморфных в точке x_0 отображений и формальными рядами от $1/z$, которые могут расходиться, но не слишком быстро. Обратное преобразование рассеяния использует задачу Римана (или точнее её аналог). Именно задача Римана позволит нам получить требуемые аналитические свойства решений солитонных уравнений.

2.1. Классы Жевре. В данном пункте мы (следуя [3], пункт 4.1) вкратце опишем пространства формальных степенных рядов. Для каждого $\alpha \geqslant 0$ будем обозначать через Gev_α и называть *классом Жевре* α множество всех формальных степенных рядов вида $\varphi(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k z^{-(k+1)}$ с $\varphi_k \in \mathrm{gl}(n, \mathbb{C})$ таких, что ряд

$\sum_{k=0}^{\infty}(k!)^{-\alpha}|\varphi_k|x^k$ имеет ненулевой радиус сходимости. Здесь $|\cdot|$ означает любую норму на $\mathrm{gl}(n,\mathbb{C})$, обладающую свойством $|AB|\leqslant|A||B|$. Положим также $\mathrm{Gev}_{\alpha-0}:=\cup_{0\leqslant s<\alpha}\mathrm{Gev}_s$.

Пусть даны числа $\alpha\geqslant 0$, $m\geqslant 1$ и $A,B>0$. Обозначим через $G_\alpha(A)$ множество всех формальных степенных рядов $\varphi(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\varphi_k z^{-(k+1)}$ с $\varphi_k\in\mathrm{gl}(n,\mathbb{C})$ таких, что $\|\varphi\|_{\alpha,A}:=\sum_{k=0}^{\infty}(k!)^{-\alpha}|\varphi_k|A^k<\infty$. Ясно, что $G_\alpha(A)$ есть банахово пространство с нормой $\|\cdot\|_{\alpha,A}$, изометрически изоморфное пространству l_1, и что для всех $\alpha\geqslant 0$ выполнено равенство

$$\mathrm{Gev}_\alpha=\bigcup_{A>0}G_\alpha(A).$$

Мы не вводим на векторном пространстве Gev_α никакой нормы или топологии.

Рассмотрим также множество $E_m(B)$ всех формальных степенных рядов $\varepsilon(z)=\sum_{l=0}^{\infty}\varepsilon_l z^l$ с $\varepsilon_l\in\mathrm{gl}(n,\mathbb{C})$ таких, что $|\varepsilon_l|\leqslant C(l!)^{-1/m}B^l$ для всех $l=0,1,2,\ldots$ и некоторой константы $C>0$. Ясно, что $E_m(B)$ есть банахово пространство с нормой $\|\varepsilon\|_{m,B}:=\sup_{l\geqslant 0}|\varepsilon_l|(l!)^{1/m}B^{-l}$, изоморфное пространству l_∞. Кроме того, из формул для вычисления порядка и типа целой функции через коэффициенты ее тейлоровского разложения (см., например, [20], гл. I, § 1, п. 6) вытекает, что все элементы пространства $E_m(B)$ являются целыми $\mathrm{gl}(n,\mathbb{C})$-значными функциями порядка не выше m и типа не выше $B^{1/m}$ при порядке m.

2.2. Задача Римана. В этом пункте мы отвлечемся от градуированных алгебр и будем рассматривать формальные степенные ряды с коэффициентами из $\mathrm{gl}(n,\mathbb{C})$.

Пусть дан многочлен[24] $P(\xi,z)=\sum_{j=0}^{m}p_j(\xi)z^j$, где $\xi=(\xi_1,\ldots,\xi_k)\in\mathbb{C}^k$, $m\in\mathbb{N}$, $p_j:\mathbb{C}^k\to\mathrm{gl}(n,\mathbb{C})$ — голоморфные отображения такие, что для всех $j=0,\ldots,m$ выполнено $p_j(\xi_0)=0$ для некоторой точки $\xi_0\in\mathbb{C}^k$. Для ряда $f(z)=I+\gamma(z)$, где $\gamma\in\mathrm{Gev}_{1/m}$, рассмотрим *задачу Римана*:

$$e^{P(\xi,z)}f^{-1}(z)=\varphi^{-1}(\xi,z)\psi(\xi,z),\tag{1.2.1}$$

[24] По переменной z.

где ряды $\varphi(\xi,z)\in I+\mathrm{Gev}_{1/m}$ и $\psi(\xi,z)\in\cup_{B>0}E_m(B)$ при каждом ξ, т.е. ищутся в следующем виде:

$$\varphi(\xi,z)=I+\sum_{l=1}^{\infty}\varphi_l(\xi)z^{-l},\qquad \psi(\xi,z)=\sum_{l=0}^{\infty}\psi_l(\xi)z^{l}.$$

Заметим, что в отличие от постановки классической задачи Римана, здесь нет контура, на котором проводится факторизация. Если в качестве $f(z)$ взять отображение, голоморфное в окрестности бесконечности, то фигурирующие в задаче Римана ряды станут сходящимися и будут определять функции, голоморфные в соответствующих областях. В качестве контура можно тогда взять окружность с центром в точке 0 достаточно большого радиуса R, но и он, в итоге, "исчезнет", поскольку соотношение (1.2.1) можно будет аналитически продолжить для $|z|>R$ (см. [3], теорема 2).

Из [3] (теорема 4.1) имеем следующие свойства задачи (1.2.1):

1) Решение[25] *задачи существует в окрестности* $\Omega(f)$ *точки* $\xi_0\in\mathbb{C}^k$ *и единственно.*

2) Обе компоненты решения являются голоморфными отображениями в надлежащие банаховы пространства:

$$\varphi:\Omega(f)\to I+G_{1/m}(A),\qquad \psi:\Omega(f)\to E_m(B)$$

для некоторых $A,B>0$.

3) При любом $\xi\in\Omega(f)$ *функция* $z\mapsto\psi(\xi,z)$ *является целой по* z *со значениями в группе* $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$.

4) Если $\gamma\in\mathrm{Gev}_{1/m-0}$, *то существует целая функция* $\tau_f:\mathbb{C}^k\to\mathbb{C}$ *со следующими свойствами:*

A) $\tau_f(\xi_0)\neq 0$;

B) $\Omega(f)=\{\xi\in\mathbb{C}^k|\tau(\xi)\neq 0\}$;

[25]Решением задачи (1.2.1) называется пара рядов $\{\varphi,\psi\}$ указанного вида, удовлетворяющих равенству (1.2.1) в смысле формальных степенных рядов по z для всех ξ, принадлежащих некоторому подмножеству $\mathbb{C}^k$.

C) Отображения $\xi \mapsto \tau_f(\xi)(\varphi(\xi, z) - I)$ *и* $\xi \mapsto \tau_f(\xi)(\varphi^{-1}(\xi, z) - I)$ *продолжаются с множества* $\Omega(f)$ *до глобально голоморфных на* $\mathbb{C}^k$ *отображений со значениями в* $G_{1/m}(A)$ *для любого* $A > 0$.

Замечание 4. Отметим, что решение задачи Римана (1.2.1) единственно, если зафиксировать вид φ (в указанной постановке ряд начинается с единичной матрицы). В следующей главе мы воспользуемся этим замечанием, чтобы получить обобщение последующих рассуждений.

Теперь определим преобразование рассеяния. Рассмотрим следующую задачу Римана для ряда $f(z) = I + \gamma(z)$, где $\gamma \in \mathrm{Gev}_1$:

$$e^{az(x-x_0)} f^{-1}(z) = \varphi^{-1}(x, z)\psi(x, z), \tag{1.2.2}$$

где ряды $\varphi(x, z) \in I + \mathrm{Gev}_1$ и $\psi(x, z) \in \cup_{B>0} E_1(B)$ при каждом x ищутся в следующем виде:

$$\varphi(x, z) = I + \sum_{l=1}^{\infty} \varphi_l(x) z^{-l}, \qquad \psi(x, z) = \sum_{l=0}^{\infty} \psi_l(x) z^l.$$

Очевидно, что эта задача Римана является частным случаем (1.2.1) для $k = 1$ и $P(x, z) = az(x - x_0)$. Для нее справедлива сформулированная выше теорема, а именно, решение $\{\varphi, \psi\}$ существует, единственно и обладает перечисленными аналитическими свойствами.

Определим следующее отображение:

$$B[\gamma](x) := [\varphi_1(x), a]. \tag{1.2.3}$$

То есть, ряду $\gamma \in \mathrm{Gev}_1$ мы ставим в соответствие коммутатор $[\varphi_1(x), a]$, где $\varphi_1(x)$ — это коэффициент при z^{-1} решения $\varphi(x, z)$ задачи Римана (1.2.2) для $f(z) = I + \gamma(z)$.

Докажем следующую лемму.[26]

[26] Её доказательство также есть в [3], но оно нам понадобится в дальнейшем.

Лемма 4. *Обозначим* $q(x) := B[\gamma](x)$. *Тогда* φ, ψ *удовлетворяют следующим дифференциальным уравнениям*

$$\partial_x \psi = (az + q(x))\psi, \qquad \partial_x \varphi = (az + q(x))\varphi - \varphi az \tag{1.2.4}$$

с начальными условиями $\psi(x_0, z) = I$, $\varphi(x_0, z) = f(z)$.

Доказательство. Из (1.2.2) легко видеть, что

$$(\partial_x \psi)\psi^{-1} = (\partial_x \varphi)\varphi^{-1} + \varphi a z \varphi^{-1}. \tag{1.2.5}$$

Приравняем отдельно части с положительными и отрицательными степенями z, получим

$$(\partial_x \psi)\psi^{-1} = \{\varphi a z \varphi^{-1}\}_+, \qquad 0 = (\partial_x \varphi)\varphi^{-1} + \{\varphi a z \varphi^{-1}\}_-.$$

Из вида φ очевидно, что[27]

$$\{\varphi a z \varphi^{-1}\}_+ = az + [\varphi_1, a].$$

Приравниванием коэффициенты при неотрицательных степенях z получаем требуемые равенства.

Начальные условия следуют из равенства $\varphi(x_0, z) f^{-1}(z) = \psi(x_0, z)$, так как левые и правые части имеют разные степени z за исключением нулевой. □

2.3. Преобразование рассеяния. Пусть фиксирована основная алгебра $\mathscr{C}$ и матрица a. Пусть дан голоморфный росток $q \in N_0(x_0)$. Его *преобразованием рассеяния* назовем ряд:

$$Lq(z) = T[q]|_{x=x_0} - I, \tag{1.2.6}$$

где ряд $T[q]$ строится, как в лемме 1. Ряд $T[q]|_{x=x_0}$ будем обозначать через $f(z)$ и называть *данными рассеяния*.

Введем обозначение:

$$\mathrm{Gev}_\alpha^I := \mathrm{Gev}_\alpha \cap \mathscr{N}.$$

Мы хотим доказать следующее утверждение.

[27] Индекс $+/-$ в соответствии с (1.1.13) означает взятие части ряда с неотрицательными/отрицательными степенями z.

Теорема 2. *Отображение* $L : N_0(x_0) \to \mathrm{Gev}_1^I$ *взаимно однозначно. Обратным отображением является* (1.2.3).

Доказательство. 1) Докажем, что $Lq \in \mathrm{Gev}_1^I$. Для этого нам понадобится лемма Сибуя (доказательство см. [3], пункт 5.2).

Лемма 5. *Пусть даны целые числа* $m, \nu \geqslant 1$ *и зависящее от параметра* $z \in \mathbb{C}$ *дифференциальное уравнение*

$$\frac{dy}{dx} = z^m Ay + \sum_{k=0}^{m-1} z^k B_k(x, y) \tag{1.2.7}$$

на росток $\mathbb{C}^\nu$*-значной функции* $y(x)$ *в точке* $x_0 \in \mathbb{C}$*, где* $A : \mathbb{C}^\nu \to \mathbb{C}^\nu$ *есть обратимый линейный оператор, а каждое* $B_k(x, y)$ *есть* $\mathbb{C}^\nu$*-значный полином от компонент вектора* y *с коэффициентами, являющимися ростками голоморфных функций в точке* x_0*. Тогда это уравнение имеет единственное формальное решение вида* $y(x, z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x) z^{-k}$ *с голоморфными в окрестности точки* x_0 $\mathbb{C}^\nu$*-значными коэффициентами* $a_k(x)$*. При этом все* $\mathbb{C}^\nu$*-значные ростки* $a_k(x)$ *голоморфны в некоторой общей для них окрестности точки* x_0*,* $a_0(x) \equiv 0$*, и формальный ряд* $y(x_0, \cdot)$ *принадлежит классу Жевре* $\mathrm{Gev}_{1/m}$.

Чтобы прийти к уравнению вида (1.2.7) перепишем уравнение, из которого определяется ряд $T[q]$, в следующем виде (зависимость от q опускаем):

$$T_x = [az, T] + qT - TH. \tag{1.2.8}$$

Напомним, что $H[q] \in \mathscr{D}_0(x_0)$.

Беря проекцию на $\mathscr{N}$ обеих частей, получаем

$$T_x = [a, T]z + (qT)^I - (T - I)H. \tag{1.2.9}$$

Записывая элементы матрицы T в столбец и учитывая, что элементы матрицы H выражаются через элементы T и q по формулам из леммы 1, мы видим, что уравнение имеет вид, как в лемме 5, для оператора $\mathscr{A}$, обратимого на N_k для любого k.

2) Покажем, что отображение $L : N_0(x_0) \to \mathrm{Gev}_1^I$ инъективно.

Разложим q и коэффициенты рядов H, T в ряды Тейлора в окрестности x_0, получим:

$$q(x) = \sum_{j=0}^{\infty} q_j (x - x_0)^j,$$

$$T(x, z) = I + \sum_{j,k=0}^{\infty} T_{jk} (x - x_0)^j z^{-(k+1)},$$

$$H(x, z) = \sum_{j,k=0}^{\infty} h_{jk} (x - x_0)^j z^{-(k+1)}.$$

Сравнение коэффициентов при $(x - x_0)^j z^0$ в равенстве (1.2.9) и проекция обеих частей на $\mathscr{N}$ дает набор уравнений

$$[a, T_{j0}] + q_j = 0, \qquad j \geqslant 0, \tag{1.2.10}$$

а сравнение коэффициентов при $(x - x_0)^j z^{-(k+1)}$ с последующей проекцией на $\mathscr{N}$ в том же равенстве дает (считаем $T_{-1} := I$):

$$(j+1) T_{j+1,k} = [a, T_{j,k+1}] + \sum_{s=0}^{j} (q_s T_{j-s,k})^I - \sum_{i=0}^{k} \sum_{s=0}^{j} T_{j-s,i-1} h_{s,k-i}, \qquad j, k \geqslant 0. \tag{1.2.11}$$

Как мы уже знаем, если взять в уравнении (1.2.8) проекцию на $\mathscr{D}$, то получим

$$h_j = (q T_j)^K.$$

Подставляя сюда разложения по степеням $(x - x_0)$ и приравнивая коэффициенты, получаем

$$h_{ji} = \sum_{k=0}^{j} (q_k T_{j-k,i})^K. \tag{1.2.12}$$

Пусть известны коэффициенты $T_{0k} \in N_{-(k+1)}$ формального ряда $Lq(z) = \sum_{k=0}^{\infty} T_{0k} z^{-(k+1)}$. Задача состоит в том, чтобы выразить через них матрицы $T_{j0} \in N_0$, в терминах которых можно найти $q_j = [T_{j0}, a]$ согласно (1.2.10). Заметим, что из (1.2.12) для нахождения h_{ji} надо знать q_k и $T_{k,i}$ для всех

$k = 0, 1, \ldots, j$. На первом шаге мы находим $q_0 = [T_{00}, a]$ из (1.2.10), откуда находим h_{0k} для всех k. Далее видим, что равенства (1.2.11) с $j = 0$ выражают набор всех T_{1k} через набор всех T_{0k}, h_{0k} и q_0. Это позволяет нам на втором шаге найти $q_1 = [T_{10}, a]$ из (1.2.10), h_{1k} из (1.2.12), а затем выразить все T_{2k} через уже известные матрицы T_{1k}, T_{0k}, q_0, q_1, h_{0k}, h_{1k} посредством равенств (1.2.11) с $j = 1$. Продолжая таким образом, получим явные формулы для всех коэффициентов q_j ростка $q(x)$ через коэффициенты T_{0k} формального ряда $Lq(z)$, чем и доказана инъективность отображения L.

3) Покажем, что $LB[\gamma] = \gamma$ для всех $\gamma \in \mathrm{Gev}_1^I$.

Рассмотрим решение $\{\varphi, \psi\}$ задачи Римана (1.2.2) для $f(z) = I + \gamma(z)$. Положим $q(x) := B[\gamma](x)$. Из леммы 4 мы знаем, что $\varphi(x_0, z) = f(z)$. Если мы установим, что $\varphi(x_0, z) = T[q]|_{x=x_0}$, то утверждение будет доказано. Действительно, в силу инъективности отображения L имеем взаимно однозначное соответствие между $q(x)$ и $T[q]|_{x=x_0}$. Следовательно, $LB[\gamma](z) = Lq(z) = T[q]|_{x=x_0} - I = \gamma(z)$.

Докажем, что $\varphi(x_0, z) = T[q]|_{x=x_0}$. А именно, мы покажем, что если некий ряд $\mu(x, z) = I + \sum_{k=0}^{\infty} m_k(x) z^{-(k+1)}$ есть единственное решение дифференциального уравнения $\mu_x = (az + q(x))\mu - \mu az$ в классе формальных степенных рядов с $m_k \in B_{-k-1}(x_0)$ для всех $k \geqslant 0$ такое, что коэффициенты ряда $\mu(x_0, z) - I$ принадлежат соответствующим N_j, то $T[q]|_{x=x_0}(z) - I = \mu(x_0, z)$. Так как $\varphi(x, z)$ подходит под определение ряда $\mu(x, z)$, отсюда будет следовать нужное равенство.

По определению, $\mu(x, z)$ есть калибровочное преобразование связности az в связность $az + q(x)$ (см. пункт 1.3). Напомним, что в терминах калибровочных преобразований T является калибровочным преобразованием связности $az + H[q]$ в связность $az + q(x)$, где $H[q] \in \mathscr{D}_0(x_0)$.

Пусть $\delta(x, z)$ - калибровочное преобразование, переводящее $az + H$ в az, с коэффициентами из D_k. Существование такого преобразования доказывается непосредственно, приравниванием коэффициентов. Тогда калибровочное преобразование $\Delta := \delta T^{-1} \mu$ переводит az в себя. Согласно лемме 3, коэффи-

циенты ряда $\Delta(x,z)$ не зависят от x и принадлежат D_k. Тогда из равенства $\mu = T\delta^{-1}\Delta = \delta^{-1}\Delta + (T-I)\delta^{-1}\Delta$ в силу[28] $\delta^{-1}\Delta \in \mathscr{D}$ и $T-I \in \mathscr{N}$ вытекает, что $\mu^K = \delta^{-1}\Delta$ и $\mu^I = (T-I)\delta^{-1}\Delta$. Отсюда получаем равенство $\mu^I = (T-I)\mu^K$, которое при $x = x_0$ превращается в нужное равенство.

Таким образом, из пунктов 2 и 3 мы делаем вывод, что отображение $L : N_0(x_0) \to \mathrm{Gev}_1^I$ биективно, с обратным отображением B, задаваемым формулой (1.2.3). $\square$

Замечание 5. Ряд $\mu(x_0, z)$ из пункта 3 доказательства теоремы 2 является эквивалентным определением данных рассеяния, использовавшимся в [3]. Хотя наше определение через диагонализующий ряд T делает некоторые доказательства более громоздкими, оно выглядит наиболее естественным и допускает обобщения, о которых пойдет речь в следующей главе.

§ 3. Задача Коши.

В предыдущем параграфе мы ввели преобразование рассеяния (1.2.6) и установили, что оно является биекцией между пространством $N_0(x_0)$ голоморфных N_0-значных ростков и некоторым классом рядов, причем обратное преобразование имеет вид (1.2.3). Мы хотим использовать преобразование рассеяния для построения решений задачи Коши для рассмотренных ранее солитонных уравнений и доказательства мероморфности этих решений по переменной x.

3.1. Основная теорема. Пусть, как и прежде, зафиксированы основная алгебра $\mathscr{C}$ и матрица a, удовлетворяющие всем условиям, перечисленным в п. 1.1.

Теорема 3. *Фиксируем основную алгебру $\mathscr{C}$, матрицу a и постоянный элемент $\beta = bz^m + c_1 z^{m-1} + \ldots + c_m$, где $m \geqslant 2$, причем $\beta \in \mathscr{Z}$ и оператор $\mathscr{B}_m(X) := [bz^m, X]$ обратим на $\mathscr{N}$. Тогда справедливы следующие утверждения.*

[28] Здесь мы используем свойство (1.1.10).

(A) *Задача Коши* $q(x,t_0)=q_0(x)$, *где* $q_0\in N_0(x_0)$, *для уравнения* (1.1.21), *где* $F_{m+1}(q)$ — *коэффициент при* $z^{-(m+1)}$ *ряда* $F(q,z)$ *из леммы 1 с условием* $F(0,z)=\beta$, *имеет локальное голоморфное решение* $q(x,t)$ *в окрестности точки* $(x_0,t_0)\in\mathbb{C}^2$ *тогда и только тогда, когда* $Lq_0\in \mathrm{Gev}_{1/m}$. *Если такое решение* $q(x,t)$ *существует, то только одно.*

(B) *Всякое голоморфное решение* $q(x,t)$ *уравнения* (1.1.21) *в произвольном бидиске* $D:=\{(x,t)\in\mathbb{C}^2\,|\,|x-x_0|<\delta_1,\ |t-t_0|<\delta_2\}$ *аналитически продолжается до функции, мероморфной в полосе* $S:=\{(x,t)\in\mathbb{C}^2\,|\,|t-t_0|<\delta_2\}$.

Мы будем говорить, что уравнения, решения которых обладают свойством (B) теоремы 3, обладают *свойством мероморфного продолжения* (СМП).

Доказательство. (A) Единственность локального голоморфного решения $q(x,t)$ задачи Коши $q(x,t_0)=q_0(x)$ для уравнения (1.1.21) вытекает из того, что уравнения, полученные из (1.1.21) l-кратным дифференцированием обеих частей по x, однозначно выражают все частные производные $\partial_t^k\partial_x^l q(x_0,t_0)$ через производные функции $q_0(x)$ в точке $x=x_0$.

Докажем необходимость условия $Lq_0\in \mathrm{Gev}_{1/m}$ для существования локального голоморфного решения задачи Коши. Пусть $q(x,t)$ — голоморфный росток в точке (x_0,t_0), удовлетворяющий (1.1.21).

В терминах калибровочных преобразований $T[q]$ является калибровочным преобразованием связности $U=az+q$ в связность $\widetilde{U}=az+\sum\limits_{i=0}^{\infty}h_iz^{-i}$ по переменной x.

Ряды вида $z^mb+\sum\limits_{k=-\infty}^{m-1}\xi_k(x,t)z^k$ при фиксированной матрице $b\in Z_m$также можно рассматривать, как связности, на которые действуют калибровочные преобразования того же вида по правилу (1.1.26) с заменой производной по x на производную по t. Групповой закон для калибровочных преобразований при этом сохраняется. Определим связность $\widetilde{V}$ из уравнения

$$T_t=VT-T\widetilde{V}, \tag{1.3.1}$$

где $V=bz^m+F_1(q)z^{m-1}+\ldots+F_{m-1}(q)z+F_m(q)$.

Тогда $T[q]$ является калибровочным преобразованием (по t) связности $\widetilde{V} = z^m b + \sum\limits_{k=-\infty}^{m-1} \varphi_k(x,t) z^k$ в связность $V = bz^m + F_1(q)z^{m-1} + \ldots + F_{m-1}(q)z + F_m(q)$.

Так как кривизна меняется ковариантным образом при калибровочных преобразованиях, связности $\widetilde{U}$, $\widetilde{V}$ также удовлетворяют уравнению нулевой кривизны:

$$\widetilde{U}_t - \widetilde{V}_x + [\widetilde{U}, \widetilde{V}] = 0.$$

Найдем коэффициенты φ_k из этого уравнения. Рассмотрим коэффициент при старшей степени z^m:

$$[a, \varphi_{m-1}] + [h_0, b] = 0.$$

Так как второй коммутатор равен нулю, получаем $(\varphi_{m-1}(x,t))^I = 0$. Выпишем коэффициент при z^{m-1}:

$$[a, \varphi_{m-2}] + [h_0, \varphi_{m-1}] + [h_1, b] = \partial_x \varphi_{m-1}.$$

Беря проекцию на $\mathscr{D}$, получим уравнение на φ_{m-1}. Беря проекцию на $\mathscr{N}$, получаем, что $(\varphi_{m-2}(x,t))^I = 0$. Продолжая этот процесс, мы найдем φ_k, причем, значения этих функций принадлежат $\mathscr{D}$.

Рассмотрим равенство (1.3.1), как уравнение на T, где V и $\widetilde{V}$ уже заданы.

Пусть $T = I + N$. Тогда уравнение (1.3.1) можно переписать следующим образом

$$N_t = VN - N\widetilde{V} + V - \widetilde{V}.$$

Возьмем проекцию этого уравнения на $\mathscr{D}$, получим

$$0 = (V^I N)^K + V^K - \widetilde{V}.$$

Теперь, беря проекцию на $\mathscr{N}$ и учитывая полученное равенство, имеем

$$N_t = VN - NV^K + V^I - (I+N)(V^I N)^K$$

Очевидно, что правая часть имеет старшую степень z^m с коэффициентом $[b, N]$, получающимся из первых двух слагаемых. Таким образом, после фиксирования $x = x_0$ и записи компонент N в один столбец, выполнены условия

леммы[29] 5 для оператора $B_m(N) := [b, N]$, обратимого, так как $N(x,t) \in \mathscr{N}_0$. Отсюда $Lq_0 \in \mathrm{Gev}_{1/m}$.

Замечание 6. Полученное в ходе доказательства уравнение на N (а, значит, и на T) имеет вполне понятный смысл. Оно показывает эволюцию данных рассеяния во времени. Как мы видим, данные рассеяния эволюционируют согласно дифференциальному уравнению первого порядка с квадратичной правой частью.

Докажем достаточность условия $Lq_0 \in \mathrm{Gev}_{1/m}$ для существования локального голоморфного решения задачи Коши. Возьмем произвольный росток $q_0 \in N_0(x_0)$ с $Lq_0 \in \mathrm{Gev}^I_{1/m}$ и рассмотрим задачу Римана

$$e^{a(x-x_0)z+\beta(t-t_0)} f^{-1}(z) = \varphi^{-1}(x,t,z)\psi(x,t,z), \quad \varphi(x,t,\infty) \equiv I,$$

полагая при этом $f(z) = I + Lq_0(z)$. Это задача Римана вида (1.2.1) для $k = 2$, $\xi = (x,t)$. Исходя из свойств задачи Римана (1.2.1), мы знаем, что решение $\{\varphi(x,t,z), \psi(x,t,z)\}$, существует в некоторой окрестности точки $(x_0,t_0) \in \mathbb{C}^2$ и голоморфно зависит от x,t. Положим $q(x,t) := [\varphi_1(x,t), a]$, где $\varphi_1(x,t)$ есть коэффициент при z^{-1} в разложении $\varphi(x,t,z) = I + \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k(x,t) z^{-k}$. Мы утверждаем, что функция $q(x,t)$ удовлетворяет в окрестности точки (x_0,t_0) дифференциальному уравнению (1.1.21) и начальному условию $q(x,t_0) = q_0(x)$.

Действительно, выполнение указанного начального условия немедленно вытекает из определений и равенства $BLq_0 = q_0$, справедливого по теореме 2. Далее, по лемме 4 имеем в окрестности точки (x_0,t_0) равенство $E_x = UE$, где $E(x,t,z) := \psi(x,t,z)$ и $U(x,t,z) := az + q(x,t)$. Мы хотим доказать, что $E_t = VE$, где $V(x,t,z) = bz^m + F_1(q)z^{m-1} + \ldots + F_m(q)$ (см. (1.1.15)). Причем, дифференциальные полиномы F_i должны удовлетворять условиям, согласованным с данными задачи Римана, а именно $F_0(0) = b$ и $F_i(0) = c_i$ для $i = 1, \ldots, m$.

[29] Тот факт, что компоненты V являются полиномами от компонент N, следует из равенства $V = \{T\beta T^{-1}\}_+$.

Тогда из сказанного в пункте 1.3, так как разрешимость системы

$$E_x = UE, \qquad E_t = VE$$

эквивалентна выполнению уравнения нулевой кривизны (1.1.14) с указанными U и V, получим, что функция $q(x,t)$ удовлетворяет (1.1.21).

Рассуждая аналогично лемме 4, можно получить

$$(\partial_t \psi)\psi^{-1} = \{F(x,t,z)\}_+,$$

где $F(x,t,z) := \varphi(x,t,z)(bz^m + c_1 z^{m-1} + \ldots + c_m)\varphi^{-1}(x,t,z)$. Утверждается, что при каждом фиксированном t функция $F(x,t,z)$ удовлетворяет в окрестности точки x_0 резольвентному уравнению $F_x = [U,F]$, в котором $U(x,t,z) = az + q(x,t)$ (напомним, что функция $q(x,t)$ определялась ранее). На самом деле это утверждение выполняется для любой функции $F(x,t,z)$ вида $F(x,t,z) = \varphi(x,t,z)\Phi(t,z)\varphi^{-1}(x,t,z)$, где $\Phi(t,z) \in \mathscr{Z}$ и не зависит от x. Действительно, дифференцируя уравнение $F\varphi = \varphi\Phi$ по x и умножая справа на φ^{-1}, получаем, что $F_x + F\varphi_x\varphi^{-1} = \varphi_x\Phi\varphi^{-1}$, т.е. $F_x = [\varphi_x\varphi^{-1}, F]$. В последнем равенстве можно заменить $\varphi_x\varphi^{-1}$ на U, т.к. $U - \varphi_x\varphi^{-1} = \varphi az\varphi^{-1}$ коммутирует с $F = \varphi\Phi\varphi^{-1}$. Этим доказано равенство $F_x = [U,F]$.

Из сказанного в пункте 1.2 следует, что коэффициенты F_l при степенях z ряда F являются интегро-дифференциальными полиномами. А именно, имеем

$$F(x,t,z) = \sum_{l=0}^{\infty} F_l^{(a,b,\widetilde{c}_1(t),\ldots,\widetilde{c}_l(t))}(q)(x,t)z^{m-l}, \tag{1.3.2}$$

где $F_l^{(a,b,\widetilde{c}_1(t),\ldots,\widetilde{c}_l(t))}$, которые мы в дальнейшем будем обозначать просто $\widetilde{F}_l$ - интегро-дифференциальные полиномы от q с условиями $\widetilde{F}_l(0) = \widetilde{c}_l(t)$ (т.е. отображения $\widetilde{F}_l$, вообще говоря, могут зависеть от t, но мы не будем эту зависимость указывать). Требуется показать, что $\widetilde{c}_l(t) \equiv c_l$, $l = 1,\ldots,m$. Для удобства в дальнейшем будем полагать $b = c_0$.

Применим к $F(x,t,z)$ преобразование T из предложения 1 (которое не зависит от c_i), а именно, рассмотрим следующий ряд:

$$F^*(q,z) = T^{-1}(q,z)F(q,z)T(q,z) =$$
$$= T^{-1}(q,z)\varphi(x,t,z)(b + c_1 z^{-1} + \ldots + c_m z^{-m})\varphi(x,t,z)^{-1}T(q,z). \qquad (1.3.3)$$

Обозначим $S(x,t,z) = T^{-1}(q,z)\varphi(x,t,z) = I + \sum\limits_{i=1}^{\infty} H_i(x,t)z^{-i}$. Тогда можно написать

$$S(x,t,z)(c_0 z^m + c_1 z^{m-1} + ... + c_m) = F^*(q,z)S(x,t,z). \qquad (1.3.4)$$

Очевидно, что $F_0(q) \equiv c_0$. Из пункта 1.4 ясно, что $F_l^*(q) \equiv \widetilde{c}_l$ тогда и только тогда, когда $\widetilde{c}_i \in \mathrm{Z}_{m-i}$ для $k < l$. Отсюда получаем, что $F_1^*(q) \equiv \widetilde{c}_1$.

Теперь приравняем в (1.3.4) коэффициенты при z^{-1}, учитывая, что $F_0^*(q) \equiv c_0$:

$$S_1 c_0 + c_1 = \widetilde{c}_1 + c_0 S_1 => c_1 = \widetilde{c}_1 + [S_1, c_0]. \qquad (1.3.5)$$

Беря проекции левой и правой части последнего уравнения на $\mathscr{D}$, получаем, что $\widetilde{c}_1(t) \equiv c_1$.

Далее продолжаем это рассуждение по индукции. Будем последовательно сравнивать коэффициенты при z^{-l} для всех номеров $l = 2, 3, \ldots, m$, полагая, что равенство $\widetilde{c}_l(t) \equiv c_l$ доказано для меньших l. На каждом шаге будет получаться равенство вида $c_l = \widetilde{c}_l +$ {сумма коммутаторов с матрицами c_k для $k < l$}, из которого будет следовать, что $c_l \equiv \widetilde{c}_l(t)$. Таким образом, $\widetilde{c}_l(t) \equiv c_l$ при $l = 0, 1, \ldots, m$, а, значит, $\widetilde{F}_i$ совпадают с F_i, которые указаны в определении V.

(B) Доказательство этого пункта ничем не отличается от скалярного случая (см. [3], теорема 6.1). Пусть $q(x,t)$ - решение (1.1.21), определенное в бидиске $D := \{(x,t) \in \mathbb{C}^2 \,|\, |x - x_0| < \delta_1,\ |t - t_0| < \delta_2\}$. Из уже доказанного утверждения о необходимости в пункте (A) мы знаем, что $L[q(x,t_1)] \in \mathrm{Gev}_{1/m}$ при каждом t_1, удовлетворяющем неравенству $|t_1 - t_0| < \delta_2$. Так как $1/m \leqslant 1/2 < 1$, то из

свойства 4 решения задачи Римана (пункт 2.2) и формулы обратного преобразования рассеяния (1.2.3) вытекает, что $q(x,t_1)$ продолжается до мероморфной по x функции на всей комплексной плоскости. Поскольку это справедливо для любой точки t_1 из круга $|t_1-t_0|<\delta_2$, получаем по классической теореме Ротштейна [40], §3, что $q(x,t)$ мероморфна в полосе $S:=\{(x,t)\in\mathbb{C}^2\,|\,|t-t_0|<\delta_2\}$. □

Замечание 7. Используемая нами теорема Ротштейна гласит, что если функция $f(z,w)$ голоморфна в бидиске $\{(z,w)\in\mathbb{C}^2\,|\,|z|<R,\,|w|<S\}$ и при каждом фиксированном w из круга $\{|w|<S\}$ существует голоморфная (мероморфная) в круге $\{|z|<R_1\}$ некоторого большего радиуса $R_1>R$ функция $g_w(z)$, совпадающая с $f(z,w)$ при $|z|<R$, то функция $(z,w)\mapsto g_w(z)$ голоморфна (мероморфна) в большем бидиске $\{(z,w)\in\mathbb{C}^2\,|\,|z|<R_1,\,|w|<S\}$. Таким образом, аналитическое продолжение по одной переменной при фиксированной второй оказывается равносильным аналитическому продолжению по совокупности переменных. Отметим, что обобщения этой теоремы и дальнейшие более тонкие результаты об аналитическом продолжении по части переменных получали многие авторы, в том числе М.В.Казарян (работы 1970-х гг.) и А.Садуллаев и Е.М.Чирка (1987). Так или иначе, теорема Ротштейна остаётся единственным нужным нам нетривиальным результатом о функциях нескольких комплексных переменных.

3.2. Варианты основной теоремы. Здесь мы покажем, что заключение (В) теоремы 3, т.е. утверждение о том, что уравнение (1.1.21) обладает СМП, остаётся в силе при более слабых или более общих предположениях на элемент β, задающий это уравнение. Во-первых, вместо предположения $\beta\in\mathscr{Z}$, которое согласно теореме 1 равносильно локальности уравнения (1.1.21), можно ограничиться лишь условиями $\beta\in\mathscr{D}$ и $b\in\mathrm{Z}_m$, которые в многокомпонентном случае допускают наличие в уравнении (1.1.21) интегральных членов.

Предложение 2. *Фиксируем основную алгебру $\mathscr{C}$, матрицу a и постоянный элемент $\beta=bz^m+c_1z^{m-1}+\ldots+c_m$, где $m\geqslant 2$, причем $\beta\in\mathscr{D}$, $b\in\mathrm{Z}_m$ и*

оператор $\mathscr{B}_m(X) := [bz^m, X]$ *обратим на* $\mathscr{N}$. *Тогда всякое голоморфное решение* $q(x,t)$ *уравнения* (1.1.21) (*в котором* $F_{m+1}(q)$ *означает коэффициент при* $z^{-(m+1)}$ *ряда* $F(q,z)$ *из леммы 1 с условием* $F(0,z) = \beta$) *в произвольном бидиске* $D := \{(x,t) \in \mathbb{C}^2 \,|\, |x - x_0| < \delta_1,\ |t - t_0| < \delta_2\}$ *аналитически продолжается до функции, мероморфной в полосе* $S := \{(x,t) \in \mathbb{C}^2 \,|\, |t - t_0| < \delta_2\}$.

Доказательство. Заметим, что доказательство необходимости включения $Lq_0 \in \mathrm{Gev}_{1/m}$ для разрешимости задачи Коши в пункте (A) теоремы 3 проходит и при текущих предположениях на β. Теперь повторение доказательства пункта (B) теоремы 3 даёт требуемое заключение. □

Во-вторых, можно разрешить всем коэффициентам $c_1, \ldots, c_m$ полинома $\beta = bz^m + c_1 z^{m-1} + \ldots + c_m$ голоморфно зависеть от временно́й переменной t. Такое обобщение весьма естественно ввиду леммы 2(a). Доказательство следующего предложения по существу совпадает с доказательством предложения 2.

Предложение 3. *Фиксируем основную алгебру* $\mathscr{C}$, *матрицу* a *и элемент* $\beta(t) = bz^m + c_1(t)z^{m-1} + \ldots + c_m(t)$, *где* $m \geqslant 2$, $b \in \mathrm{Z}_m$, *оператор* $\mathscr{B}_m(X) := [bz^m, X]$ *обратим на* $\mathscr{N}$, *а* $c_j : S_2 \to D_{m-j}$, $j = 1, \ldots, m$ — *произвольные голоморфные отображения круга* $S_2 := \{t \in \mathbb{C} \,|\, |t - t_0| < \delta_2\}$ *в векторные подпространства* $D_{m-j} \subset \mathrm{gl}(n, \mathbb{C})$. *Тогда всякое голоморфное решение* $q(x,t)$ *уравнения* (1.1.21) (*в котором* $F_{m+1}(q)$ *означает коэффициент при* $z^{-(m+1)}$ *ряда* $F(q,z)$ *из леммы 1 с условием* $F(0,z) = \beta(t)$) *в бидиске* $D := \{(x,t) \in \mathbb{C}^2 \,|\, |x - x_0| < \delta_1,\ |t - t_0| < \delta_2\}$ *аналитически продолжается до функции, мероморфной в полосе* $S := \{(x,t) \in \mathbb{C}^2 \,|\, |t - t_0| < \delta_2\}$.

3.3. Примеры.

Пример 4. В скалярном случае уравнение (1.1.21) при $m = 3$, $a = b = \mathrm{diag}\{1/2, -1/2\}$, $c_i = 0$ и $q_{21}(x,t) = 1$, $q_{12}(x,t) = u(x,t)$ эквивалентно уравнению Кортевега–де Фриза (КдФ):

$$u_t = u_{xxx} - 6uu_x, \tag{1.3.6}$$

а при $a = b = \mathrm{diag}\{1/2, -1/2\}$, $c_i = 0$ и $q_{21}(x,t) = q_{12}(x,t) = u(x,t)$ — модифицированному уравнению КдФ (мКдФ):

$$u_t = u_{xxx} + 6u^2 u_x. \tag{1.3.7}$$

Матричные аналоги КдФ и мКдФ получаются заменой (скалярной) функции u на квадратную матричную функцию размера k, а матрицу $\mathrm{diag}\{1/2, -1/2\}$ на $\mathrm{diag}\{1/2I_k, -1/2I_k\}$. Тогда матричные уравнения КдФ и мКдФ принимают вид

$$u_t = u_{xxx} - 3uu_x - 3u_x u, \qquad u_t = u_{xxx} + 3u^2 u_x + 3u_x u^2. \tag{1.3.8}$$

Эти уравнения подпадают под условия теоремы 3, если в качестве $\mathscr{C}$ в определении основной алгебры взять $B_j = \mathrm{gl}(2k, \mathbb{C})$. Матрица b очевидно принадлежит централизатору a, как и нулевые матрицы c_1, c_2. Следовательно, матричное КдФ и мКдФ1 обладают СМП.

Замечание 8. Матричное уравнение КдФ и мКдФ1 входят в список так называемых некоммутативных интегрируемых λ-однородных уравнений (см. [32],[33]). В [33] утверждается, что всякое λ-однородное уравнение принадлежит списку из 6 уравнений или иерархии какого-либо из них. Если доказать СМП для всех 6 уравнений, а также доказать, что иерархии, о которых говорится в [33], совпадают с иерархиями, порождаемыми (1.1.21), то будет дан положительный ответ на вопрос о наличии СМП у всех матричных λ-однородных уравнений. Сейчас мы установили СМП для двух уравнений из шести. В следующей главе будет установлено СМП для еще одного уравнения, а именно для мКдФ2.

Пример 5. Как мы уже видели ранее в примере 3, уравнение мКдФ1 можно получить по-другому. Для данного представления также применима теорема 3, поскольку выполнены все условия на основную алгебру и $\beta = az^3 \in \mathscr{Z}$.

Замечание 9. Отметим, что у одного уравнения могут быть самые разные представления нулевой кривизны. Это видно из предыдущих двух примеров

для уравнения мКдФ1. В [12], пункт 4.2, можно найти еще более "экзотическое" с нашей точки зрения представление для мКдФ1 и мКдФ2. Интересно, что уравнение мКдФ1 удалось записать в нужном нам виде, а для уравнения мКдФ2 такое представление автору неизвестно.

Пример 6. Следующая серия примеров будет взята из [4]. Основная алгебра $\mathscr{C}$ снова будет состоять из рядов с коэффициентами из $B_j = \mathrm{gl}(n, \mathbb{C})$.

Рассмотрим следующее матричное уравнение:

$$\begin{aligned} Q_t &= [C^{(0)}, Q] + \sigma[C^{(1)}, Q_x] - \sigma\{Q, W\} - i\gamma\sigma(Q_{xx} - 2Q^3), \\ W_x &= [C^{(1)}, Q^2], \end{aligned} \tag{1.3.9}$$

где $Q = Q(x,t)$ — блочно-внедиагональная матрица, а $W = W(x,t)$, $C^{(i)}$ — блочно-диагональные матрицы (разбитые на блоки одинаково). Фигурные скобки обозначают антикоммутатор: $\{A, B\} = AB + BA$. Константа γ — действительная.

Матрица σ также блочно-диагональная, имеющая следующий вид: $\sigma = \mathrm{diag}(I_{N^{(+)}}, -I_{N^{(-)}})$, то есть

$$\sigma = \begin{pmatrix} I_{N^{(+)}} & 0 \\ 0 & -I_{N^{(-)}} \end{pmatrix}, \tag{1.3.10}$$

где I_N, как и ранее, единичная матрица размерности N.

Заметим, что уравнение (1.3.9) есть не что иное, как второй поток ($m = 2$) уравнения (1.1.21) с матрицами $a = b = \sigma$. Действительно, при $m = 2$ основное уравнение мы уже выписывали. Напомним, что оно имеет вид

$$q_t = \frac{\beta_1 - \beta_2}{(\alpha_1 - \alpha_2)^2} M_2 q + \frac{1}{\alpha_1 - \alpha_2} M_1 q + [C_0, q], \tag{1.3.11}$$

где $a = \mathrm{diag}(\alpha_1 I_{s_1}, \alpha_2 I_{s_2})$, $b = \mathrm{diag}(\beta_1 I_{s_1}, \beta_2 I_{s_2})$, $C_1 = \mathrm{diag}(A, B)$,

$$q = \begin{pmatrix} 0 & u(x,t) \\ v(x,t) & 0 \end{pmatrix}, \qquad M_2 q = \begin{pmatrix} 0 & u_{xx} - 2uvu \\ -v_{xx} + 2vuv & 0 \end{pmatrix},$$

$$M_1 q = \begin{pmatrix} 0 & Au_x - u_x B + [\xi, A]u + u[\eta, B] \\ v_x A - Bv_x + [B, \eta]v + v[A, \xi] & 0. \end{pmatrix}$$

Здесь A, B — матрицы, а ξ и η удовлетворяют уравнениям

$$\xi_x = uv, \quad \xi(x_0, t) = 0, \quad \eta_x = vu, \quad \eta(x_0, t) = 0.$$

Сравнивая данное матричное уравнение с (1.3.9), убеждаемся в том, что они эквивалентны.

Уравнение (1.3.11) (и тогда его частный случай — уравнение (1.3.9)) удовлетворяет условиям предложения 2. Следовательно, оно обладает СМП.

Получим отсюда в более явном виде другие уравнения, на которые распространяется теорема 3 (или по крайней мере часть про СМП, т.е. предложение 2).

1) Положим $C^{(1)} = c\sigma$, где $c \in \mathbb{C}$. Тогда $W = 0$. Кроме того, при подстановке в (1.3.9) вместо $Q(x, t)$ функции

$$\widehat{Q}(x, t) = \exp(C^{(0)}t)Q(x - 2ct, t)\exp(-C^{(0)}t) \tag{1.3.12}$$

слагаемые с коммутаторами пропадают, и получается уравнение

$$Q_t = -i\gamma\sigma(Q_{xx} - 2Q^3). \tag{1.3.13}$$

Это матричная версия нелинейного уравнения Шредингера (НУШ). Докажем, что оно обладает СМП.

Из (1.3.12) получается, что $Q(x - 2ct, t) = \exp(-C^{(0)}t)\widehat{Q}(x, t)\exp(C^{(0)}t)$. Функция $\widehat{Q}(x, t)$ при фиксированном t продолжается мероморфно по переменной x на всю комплексную плоскость. Но тогда и $Q(x, t)$ мероморфно продолжается по переменной x.

2) Пусть $Q^*(x, t) = SQ(x, t)S$.

Здесь и далее звездочка обозначает эрмитово сопряжение (в случае функций $f^*(x, t) = \overline{f}(\overline{x}, \overline{t})$), а матрица S - постоянная и блочно-диагональная, т.е. $S = \mathrm{diag}(S^{(+)}, S^{(-)})$, причем

$$S^{\pm} = \mathrm{diag}\left(s_1^{(\pm)}, ..., s_{N^{(\pm)}}^{(\pm)}\right), \qquad s_i^{(\pm)^2} = 1. \tag{1.3.14}$$

Тогда матрица Q принимает вид

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & S^+U^*S^- \\ U & 0 \end{pmatrix}, \tag{1.3.15}$$

а уравнение (1.3.9) переписывается в виде

$$U_t = C^{(0)}U - UC^{(0)(+)} - [C^{(1)(0)}U_x - U_xC^{(1)(+)}] + [W^{(-)}U + UW^{(+)}] +$$
$$+ i\gamma[U_{xx} - 2US^{(+)}U^*S^(-)U], \tag{1.3.16}$$
$$W_x^{(+)} = [C^{(1)(+)}, S^{(+)}U^*S^{(-)}U], \tag{1.3.17}$$
$$W_x^{(-)} = [C^{(1)(-)}, US^{(+)}U^*S^{(-)}]. \tag{1.3.18}$$

Здесь значения матричных функций U — прямоугольные матрицы. Эти функции также продолжаются мероморфно по x как блоки Q.

Из уравнений (1.3.16)–(1.3.18) можно получать различные частные случаи, меняя размеры блоков $N^{(\pm)}$ и постоянные матрицы $C^{(j)(\pm)}$. Более детальную информацию о самих уравнениях можно найти в [5].

3) Пусть $N^{(+)} = 1$, $N^{(-)} = D$, $C^{(j)(\pm)} = 0$, $S^{(+)} = 1$ и $S^{(-)} = \widehat{S} = \mathrm{diag}(s_1, ..., s_D)$ с $s_n^2 = 1$. Тогда $U(x,t)$ представляет собой вектор размерности D, а уравнение (1.3.16) переписывается в виде

$$u_t = i\gamma\left[u_{xx} - 2\left(\sum_{n=1}^{D} s_n|u^{(n)}|^2\right)u\right] = i\gamma(u_{xx} - 2\langle u, \widehat{S}u\rangle u), \tag{1.3.19}$$

где $\langle u, v\rangle = \sum\limits_{n=1}^{D}(u^{(n)})^*v^{(n)}$. При $D = 2$ это уравнение принимает вид стандартного векторного НУШ.

4) Пусть $N^{(+)} = 1$, $N^{(-)} = 2$, $C^{(j)(+)} = 0$, $S^{(+)} = 1$, $S^{(-)} = \mathrm{diag}(-1, -1)$ и

$$C^{(0)(-)} = \begin{pmatrix} 0 & -a \\ a^* & 0 \end{pmatrix}, \qquad C^{(1)(-)} = \begin{pmatrix} -b & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}. \tag{1.3.20}$$

Здесь a — комплексная константа, а b — действительная константа. Вектор $u(x,t)$ имеет вид $(u^{(1)}(x,t), u^{(2)}(x,t))$. Матрица $w(x,t)$ имеет блоки $W^{(+)} = 0$ и

$$W^{(-)} = \begin{pmatrix} 0 & w \\ -w^* & 0 \end{pmatrix}. \tag{1.3.21}$$

Тогда получаем уравнения

$$u_t^{(1)} = -au^{(2)} + bu_x^{(1)} + wu^{(2)} + i\gamma[u_{xx}^{(1)} + 2(|u^{(1)}|^2 + |u^{(2)}|^2)u^{(1)}], \tag{1.3.22}$$

$$u_t^{(2)} = a^*u^{(1)} - bu_x^{(2)} - w^*u^{(1)} + i\gamma[u_{xx}^{(2)} + 2(|u^{(1)}|^2 + |u^{(2)}|^2)u^{(2)}], \tag{1.3.23}$$

$$w_x = 2bu^{(1)}(u^{(2)})^*. \tag{1.3.24}$$

Как мы уже говорили, вектор $u(x,t)$ и его координаты мероморфны по x в силу предложения 2.

Эта система уравнений содержит в качестве решений так называемые бумероны (см. [6], уравнения 16–19), причем бумеронам соответствуют именно компоненты $u^{(1)}(x,t)$ и $u^{(2)}(x,t)$, откуда следует, что бумеронные решения допускают мероморфное продолжение по x.

Что же касается компоненты $w(x,t)$, то про неё из доказанных утверждений ничего сказать нельзя кроме того, что она является первообразной от мероморфной функции. Впрочем, как видно из (1.3.9), функция $w(x,t)$, вероятнее всего, является "вспомогательной" (так её называют, например, в [6]) и нужна для того, чтобы записать уравнение в более компактном виде. Можно лишь добавить, что в приведённом в [6] примере $w_x(x,t) = C(\mathrm{ch}^2(p[x-\xi(t)])^{-1}$, где C и p - некоторые константы. Так как $w_x(x,t)$ имеет нулевой вычет во всех полюсах, то $w(x,t)$ является мероморфной функцией по x.

5) Приведём еще частные случаи пункта 2 данного примера, приводящих к уравнениям, обладающим СМП.

Пусть $N^{(+)} = 2$, $N^{(-)} = D$, $C^{(j)(\pm)} = 0$, $S^{(+)} = \mathrm{diag}(s_1, s_2)$ и $S^{(-)} = \mathrm{diag}(s_1, ..., s_D)$. Тогда получаем

$$u_t = i\gamma(u_{xx} - 2s_1^{(+)}\langle u, S^{(-)}u\rangle u - 2s_2^{(+)}\langle v, S^{(-)}u\rangle v), \tag{1.3.25}$$

$$v_t = i\gamma(v_{xx} - 2s_1^{(+)}\langle u, S^{(-)}v\rangle u - 2s_2^{(+)}\langle v, S^{(-)}v\rangle v), \tag{1.3.26}$$

u и v в данном случае - столбцы матрицы U размерности D. Эти уравнения связаны с векторными НУШ.

Рассмотрим частный случай $D = 2$. Тогда U — это матрица размера 2×2. В этом случае её можно разложить по базису матриц Паули: $U = iu^{(4)}I +$

$u^{(1)}\sigma_1+u^{(2)}\sigma_2+u^{(3)}\sigma_3$. Таким образом, получаем вектор $u=(u^{(1)},u^{(2)},u^{(3)},u^{(4)})$. Положим также $S^{(+)}=I$, $S^{(-)}=sI$ с $s^2=1$. Тогда получаем уравнение (подробности см. в [5])

$$u_t=i\gamma\{u_{xx}-2s[s(u^*\cdot u)u-(u\cdot u)u^*]\}. \tag{1.3.27}$$

Глава 2. Случай нетривиального разбиения основной алгебры

В предыдущей главе мы неоднократно брали проекции элементов основной алгебры на $\mathscr{C}_\pm$, т.е. положительные или отрицательные части ряда Лорана по степеням z. При этом пространство B_0 мономов степени 0 целиком содержалось в $\mathscr{C}_+$. В [17] была предложена идея разбить B_0 на две подалгебры Ли $B_\pm$ и при взятии проекции относить $B_\pm$ к $\mathscr{C}_\pm$ соответственно. Такое изменение конструкции позволяет строить новые системы, если найти подходящее разложение алгебры Ли B_0. Однако развитие метода обратной задачи в новой ситуации наталкивается на определённые сложности. В частности, становится непросто получить аналоги лемм 1 и 2. Тем не менее, благодаря тому, что диагонализующее преобразование T определено для любых голоморфных ростков со значениями в B_0 (а не только в N_0), вся изложенная в предыдущей главе схема может быть естественным образом модифицирована. Этому и будет посвящена данная глава.

§ 1. Построение иерархий

В данном параграфе мы получим аналог основного уравнения (1.1.21).

1.1. Разбиение B_0. Оставим определение основной алгебры неизменным (см. пункт 1.1 гл. 1). Как и в предыдущей главе, фиксируем матрицу $a \in B_1$, удовлетворяющую тем же условиям.

В основной алгебре B_0 является подалгеброй (и, конечно, подалгеброй Ли). Разложение B_0 в прямую сумму векторных пространств

$$B_0 = B_+ \oplus B_-, \tag{2.1.1}$$

являющихся (комплексными) подалгебрами Ли, будем называть *разбиением* B_0. Разбиение, соответствующее $B_+ = B_0$, $B_- = \{0\}$, будем называть *стандартным (или тривиальным) разбиением*. Очевидно, что в первой главе мы рассматривали именно стандартное разбиение.

Договоримся в дальнейшем всегда обозначать через $B_\pm$ подалгебры Ли, образующие разбиение B_0, а под A_0 и $A_\pm$ — (матричные) группы Ли, соответствующие B_0 и $B_\pm$.

Потребуем от рассматриваемых разбиений выполнение некоторых свойств.

Свойство 1. Важным свойством для построения иерархий будут следующее включения:

$$B_- \subseteq D_0, \qquad [B_+, B_-] \subseteq N_0 + B_-. \tag{2.1.2}$$

Отметим, что выбор $B_- = D_0$ удовлетворяет этим включениям.

Свойство 2. Пусть A_0, $A_\pm$ — группы Ли, соответствующие алгебрам Ли B_0, $B_\pm$. Потребуем, чтобы $A_\pm$ являлись аналитическими группами и было выполнено

$$A_0 = A_- \cdot A_+, \quad A_- \cap A_+ = I,$$

где I — единичная матрица, являющаяся одновременно нейтральным элементом в A_0.[30]

Свойство 2 нужно, чтобы не испортить голоморфность при обратном преобразовании рассеяния, поскольку, как мы увидим в дальнейшем, аналог формулы (1.2.3), с помощью которой мы строили решения солитонных уравнений, будет содержать элемент, значения которого будут из A_-.

Определим градуированные подалгебры Ли $\mathscr{C}_+$ и $\mathscr{C}_-$ в $\mathscr{C}$, полагая

$$\mathscr{C}_\pm := \Big\{ \sum_{j=-\infty}^{\infty} b_j z^j \in \mathscr{C} \,\Big|\, b_0 \in B_\pm \text{ и } b_j = 0 \text{ при } \mp j > 0 \Big\}. \tag{2.1.3}$$

Проекции элемента $\beta = \sum_{n=-\infty}^{N} b_n z^n \in \mathscr{C}$ на $\mathscr{C}_\pm$ в соответствии с разложением $\mathscr{C} = \mathscr{C}_+ \oplus \mathscr{C}_-$ будем обозначать через $\operatorname{pr}_\pm \beta$

$$\operatorname{pr}_+ \beta := b_0^+ + \sum_{n=1}^{N} b_n z^n \in \mathscr{C}_+, \qquad \operatorname{pr}_- \beta := b_0^- + \sum_{n=-\infty}^{-1} b_n z^n \in \mathscr{C}_-, \tag{2.1.4}$$

[30] Отметим, что из этих свойств следует, что каждый элемент группы A_0 единственным образом представляется в виде произведения элементов из $A_\pm$ в указанном порядке.

где $b_0^{\pm}$ — это компоненты матрицы $b_0 \in B_0$ относительно разложения (2.1.1). Определённые таким образом отображения проекции $\mathrm{pr}_{\pm} : \mathscr{C} \to \mathscr{C}_{\pm}$ постоянно используются в дальнейшем, как и обозначение $\mathscr{C}_m^+ := \mathrm{pr}_+ \mathscr{C}_m$.

1.2. Построение иерархий. Как следует из замечания 2 из [17], для самосогласованности уравнений, которые мы скоро получим, нужно рассматривать ростки q со значениями в B_+. Если попробовать составить функции вида (1.1.15) для $q \in B_+(\Omega)$ и подставить их в уравнение нулевой кривизны (1.1.14), как мы это делали в предыдущей главе, мы обнаружим, что возникающие отображения F_i могут не являться интегро-дифференциальными полиномами. Это хорошо видно из доказательства теоремы 1. Действительно, как мы отмечали, если $q \in N_0(\Omega)$, то $h_0 \equiv 0$. Но если $q \in B_+(\Omega)$, то h_0 может уже не равняться нулю. Тогда мы не сможем выразить F_i^* из уравнения (1.1.36) через F_j^* для $j < i$ — мы получим дифференциальное уравнение на F_j^*, откуда мы не можем гарантировать, что решение является интегро-дифференциальным полиномом. Чтобы этого избежать, мы определим иерархии по-другому.

Фиксируем основную алгебру $\mathscr{C}$, матрицу a, некоторую односвязную область $\Omega \in \mathbb{C}_x$ и разбиение $B_{\pm}$. Рассмотрим оператор

$$L = \frac{d}{dx} - az - q, \qquad q \in B_+(\Omega). \tag{2.1.5}$$

Мы уже отмечали в замечании 3, что лемма 1 верна для B_0-значных отображений, следовательно, можно построить диагонализующий ряд $T(q) = I + \sum\limits_{j=1}^{\infty} T_j(q) z^{-j}$ такой, что значения T_j принадлежат N_{-j} и $L_0 := T^{-1}LT$ имеет вид $\partial_x - az - \sum\limits_{j=0}^{\infty} h_j(q) z^{-j}$, где $h_j(q) \in D_{-j}$. При этом T_j и h_j, рассматриваемые как функции от q, являются дифференциальными полиномами.

Пусть $\beta = z^m c_0 + z^{m-1} c_1 + \ldots$ — постоянный элемент из $\mathscr{Z}$. Определим

$$F(q) := T(q) \beta T^{-1}(q). \tag{2.1.6}$$

Очевидно, что коэффициенты $F_i(q)$ ряда $F(q)$ являются дифференциальным полиномами и что $F(0) = \beta$. Покажем, что $F(q)$ удовлетворяет резольвентному уравнению $F_x = [U, F]$ для $U = az + q$.

Дифференцированием (2.1.6) убеждаемся в справедливости равенства $F_x = [T_x T^{-1}, F]$. Равенство (1.1.29), из которого определяется T, можно переписать следующим образом:

$$T_x T^{-1} - U = -T(az + \sum_{i=0}^{\infty} h_i z^{-i}) T^{-1}.$$

Правая часть равенства коммутирует с F, так как $az + \sum\limits_{i=0}^{\infty} h_i z^{-i}$ коммутирует с β. Следовательно, в равенстве $F_x = [T_x T^{-1}, F]$ можно заменить $T_x T^{-1}$ на U, откуда и получаем, что $F(q)$ удовлетворяет резольвентному уравнению.

Пусть $\beta \in \mathscr{Z}$, причем, $\beta = z^m b + z^{m-1} c_1 + \ldots + c_0$ - конечная сумма с положительными степенями z, с коэффициентами из соответствующих Z_j. Пусть $\Omega \subset \mathbb{C}^2_{xt}$ - односвязная область. Для $q \in B_+(\Omega)$ определим

$$U(x, t, z) := az + q(x, t), \tag{2.1.7}$$

$$V(x, t, z) := bz^m + F_1(q) z^{m-1} + \ldots + F_{m-1}(q) z + \mathrm{pr}_+ F_m(q). \tag{2.1.8}$$

Здесь $F_i(q)$ определены в (2.1.6). Заметим, что $F_m(q)$ принадлежит $B_0(\Omega)$, иначе взятие проекции pr_+ было бы тривиальным. Очевидно, по-другому V можно записать так:

$$V = \mathrm{pr}_+ F(q),$$

где ряд $F(q)$ определен в (2.1.6).

Подставим (2.1.7) и (2.1.8) в уравнение нулевой кривизны (см. (1.1.14)). Получим систему на коэффициенты s_j при степенях z в левой части, аналогичную системе (1.1.17), а именно

$$\begin{cases} s_0(x, t) \equiv [a, b] = 0 \ , \\ s_j(x, t) = -(F_{j-1})_x + [q, F_{j-1}] + [a, F_j] \quad \text{при} \quad j = 1, \ldots, m-1 \ , \\ s_m(x, t) = -(F_{m-1})_x + [q, F_{m-1}] + [a, \mathrm{pr}_+ F_m] \ , \\ s_{m+1}(x, t) = q_t - \mathrm{pr}_+ \partial_x F_m + [q, \mathrm{pr}_+ F_m] \ . \end{cases} \tag{2.1.9}$$

Так как ряд $F(q)$ удовлетворяет резольвентному уравнению, то $s_j(x,t) \equiv 0$ для $j = 1, \ldots, m-1$. Кроме того, в силу первого условия (2.1.2) справедливо:

$$[a, \operatorname{pr}_+ F_m] = [a, \operatorname{pr}_+ F_m + \operatorname{pr}_- F_m] = [a, F_m].$$

Отсюда следует, что $s_m(x,t) \equiv 0$.

Таким образом, пара (U, V) вида (2.1.7), (2.1.8) удовлетворяет уравнению нулевой кривизны тогда и только тогда, когда $s_{m+1}(x,t) \equiv 0$, что эквивалентно уравнению

$$q_t = \operatorname{pr}_+ \partial_x F_m(q) + [\operatorname{pr}_+ F_m(q), q]. \tag{2.1.10}$$

Это уравнение является аналогом уравнения (1.1.21). Нашей задачей будет получить для него аналог теоремы 3, наложив дополнительное алгебраическое условие на значения q, а именно, мы хотим рассматривать $q \in N_0^+(\Omega)$, где

$$N_0^+ := \operatorname{pr}_+ N_0 \subseteq B_+.$$

Необходимость этого требования будет ясна из формулы для преобразования рассеяния (аналога формулы (1.2.3)).

Покажем допустимость редукции $q \in N_0^+(\Omega)$. Обозначим правую часть уравнения (2.1.10) через $R_\beta(q)$. Тогда справедливо:

$$\begin{aligned} R_\beta(q) &= \operatorname{pr}_+ \partial_x F_m(q) + \operatorname{pr}_- \partial_x F_m(q) + [\operatorname{pr}_+ F_m(q) + \operatorname{pr}_- F_m(q), q] - \\ &- \operatorname{pr}_- \partial_x F_m(q) - [\operatorname{pr}_- F_m(q), q] = \partial_x F_m(q) + [F_m(q), q] - \\ &- \operatorname{pr}_- \partial_x F_m(q) - [\operatorname{pr}_- F_m(q), q]. \end{aligned}$$

Из резольвентного уравнения следует, что первые два слагаемых в полученном выражении равны $[a, F_{m+1}(q)]$. Таким образом, мы получаем:

$$R_\beta(q) = [a, F_{m+1}(q)] - \operatorname{pr}_- \partial_x F_m(q) - [\operatorname{pr}_- F_m(q), q].$$

Так как $R_\beta(q) \in B_+(\Omega)$ то $\operatorname{pr}_+ R_\beta(q) = R_\beta(q)$. Но при применении pr_+ к полученному равенству для $R_\beta(q)$ первое и третье слагаемое в правой части

будут принадлежать[31] $N_0^+(\Omega)$, а второе слагаемое занулится. Этим доказана допустимость редукции $q \in N_0^+(\Omega)$.

Всюду в этой главе, если не оговорено противное, будем считать, что значения q принадлежат N_0^+.

Пример 7. Пусть основная алгебра та же, что и в примере 3. Напомним, что B_{2j} — множество блочно-диагональных матриц, а B_{2i+1} — множество блочно-внедиагональных матриц; $a = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}$, $\beta = az^3$.

Как легко видеть, $D_0 = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} \right\}$ — множество блочно-диагональных матриц с совпадающими блоками на диагонали. Отсюда $B_- \subseteq \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} \right\}$.

Для стандартного разбиения $B_+ = B_0$, $B_- = \{0\}$ и $q = \left\{ \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & -u \end{pmatrix} \right\}$, как мы видели ранее, уравнение (1.1.21) (частный случай уравнения (2.1.10)) эквивалентно первому модифицированному уравнению Кортевега–де Фриза.

Интереснее рассмотреть следующий случай:

$$B_- = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} \right\}, \quad B_+ = \left\{ \begin{pmatrix} 2\delta & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}, \quad q = \left\{ \begin{pmatrix} 2u & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Как отмечалось после (2.1.2), такое разбиение нам подходит.

Из уравнения $F_x = [U, F]$ и условия $F(0) = \beta$ попытаемся найти $F_3(q)$. Введем обозначения: $X_i(q) := F_i(q)^K$, $Y_i(q) := F_i(q)^I$. После некоторых подсчетов мы придем к следующему уравнению на $X_3(q)$:

$$\partial_x X_3 = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} -uu_{xx} + u_{xx}u + u^2u_x + u_xu^2 - 2uu_xu & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^K + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} ud_1 - d_1u & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^K.$$

Здесь d_1 - левый верхний блок матрицы X_3.

[31] $\mathrm{pr}_+[\mathrm{pr}_- F_m(q), q] \in N_0^+(\Omega)$ в силу второго включения в (2.1.2) из свойства 1.

Это дифференциальное уравнение относительно d_1 с условием $X_3(0) = 0$. Оно имеет только одно решение в классе дифференциальных полиномов, которое легко подобрать:

$$D_3 = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} uu_x - u_xu & 0 \\ 0 & uu_x - u_xu \end{pmatrix}.$$

Выполнив оставшиеся вычисления, получим, что уравнение (2.1.10) приводит нас ко второму модифицированному уравнению Кортевега–де Фриза:

$$u_t = -u_{xxx} + 3(u_{xx}u - uu_{xx}) + 6uu_xu. \tag{2.1.11}$$

§ 2. Задача Римана и основная теорема

В этом параграфе мы вернемся к задаче Римана (1.2.2) и покажем, какие изменения нужно внести, чтобы схема построения решений, описанная в предыдущей главе, работала для уравнения (2.1.10). Поскольку изменения будут скорее алгебраическими, а все аналитические аспекты останутся прежними, мы не будем подробно обсуждать детали, ссылаясь на предыдущую главу. В конце мы докажем аналог теоремы 3.

2.1. Задача Римана и аналитические свойства её решений. Фиксируем основную алгебру $\mathscr{C}$, матрицу a и подходящее разбиение $B_\pm$. Пусть $f(z) = I + \gamma(z)$, как и в предыдущей главе, формальный степенной ряд по z, причем $\gamma \in \mathrm{Gev}_1$.

Рассмотрим задачу Римана:

$$e^{a(x-x_0)z} f^{-1}(z) = \varphi^{-1}(x,z)\psi(x,z), \tag{2.2.1}$$

где ряды $\varphi(x,z) \in B_0(x_0) + \mathrm{Gev}_{1/m}$ и $\psi(x,z) \in \cup_{B>0} E_m(B)$ ищутся в следующем виде:

$$\varphi(x,z) = \sum_{j=0}^{\infty} \varphi_j(x) z^{-j}, \qquad \psi(x,z) = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j(x) z^{j}.$$

В силу свойств задачи Римана, сформулированных в предыдущей главе, при $\varphi_0(x) \equiv I$ задача Римана имеет единственное решение в окрестности точки x_0 и, если ряд γ принадлежит классу Gev_{1-0}, то компоненты решения задачи Римана, как отображения в соответствующие банаховы пространства, можно аналитически продолжить на всю комплексную плоскость x, причем, отображение φ является мероморфным, а ψ — целым.

Мы хотим найти решение задачи Римана с условиями: $\varphi_0(x) \in A_-$ и $\psi_0(x) \in A_+$ для любого x из некоторой окрестности $\Omega(f)$ точки x_0.

Договорённость. Решения одной задачи Римана, но с разными условиями на φ_0 и ψ_0 мы будем отличать наличием шляпки. А именно, если для ряда $f \in I + \mathrm{Gev}_1$ из постановки задачи Римана решение $\{\varphi, \psi\}$ соответствует условию $\varphi_0(x) \equiv I$ (такое решение назовем *стандартным*), то решение $\{\widehat{\varphi}, \widehat{\psi}\}$ будет соответствовать условию $\widehat{\varphi}_0 \in A_-(x_0)$ и $\widehat{\psi}_0 \in A_+(x_0)$ (если такое решение существует).

Оказывается, что связь между решениями $\{\varphi, \psi\}$ и $\{\widehat{\varphi}, \widehat{\psi}\}$ достаточно проста.

Предложение 4. *Пусть ряд $f \in I + \mathrm{Gev}_1$ таков, что первое слагаемое ψ_0 второй компоненты стандартного решения ψ принимает значения в A_0. Тогда решение задачи Римана с условиями $\widehat{\varphi}_0 \in A_-(\Omega(f))$, $\widehat{\psi}_0 \in A_+(\Omega(f))$ существует и единственно, причем в той же окрестности $\Omega(f)$ точки x_0, что и для стандартного решения. Если $f \in I + \mathrm{Gev}_{1-0}$, то $\widehat{\varphi}$ продолжается до глобально мероморфного отображения.*

Доказательство. Мы знаем, что существует стандартное решение $\{\varphi, \psi\}$ в некоторой окрестности $\Omega(f)$ точки x_0. В условиях утверждения в силу второго свойства разбиения $\psi_0(x)$ можно разложить единственным образом по подгруппам $A_\pm$, то есть

$$\psi_0(x) = \widehat{\varphi}_0^{-1}(x)\widehat{\psi}_0(x), \qquad \widehat{\varphi}_0(x) \in A_-,\ \widehat{\psi}_0(x) \in A_+ \quad \forall x \in \Omega(f).$$

Доказательство существования вытекает из следующей цепочки равенств:

$$\varphi^{-1}(x,z)\psi(x,z) = \left(I + \sum_{j=1}^{\infty} \varphi_i z^{-j}\right)^{-1} \left(\psi_0 + \sum_{j=1}^{\infty} \psi_j z^j\right) =$$

$$= \left(I + \sum_{j=1}^{\infty} \varphi_j z^{-j}\right)^{-1} \widehat{\varphi}_0^{-1}\widehat{\varphi}_0 \left(\widehat{\varphi}_0^{-1}\widehat{\psi}_0 + \sum_{j=1}^{\infty} \psi_j z^j\right) =$$

$$= \left(\widehat{\varphi}_0 + \sum_{j=1}^{\infty} \widehat{\varphi}_0\varphi_j z^{-j}\right)^{-1} \left(\widehat{\psi}_0 + \sum_{j=1}^{\infty} \widehat{\varphi}_0\psi_j z^j\right) =$$

$$= \left(\widehat{\varphi}_0 + \sum_{j=1}^{\infty} \widehat{\varphi}_j z^{-j}\right)^{-1} \left(\widehat{\psi}_0 + \sum_{j=1}^{\infty} \widehat{\psi}_j z^j\right) = \widehat{\varphi}^{-1}(x,z)\widehat{\psi}(x,z) \qquad (2.2.2)$$

Доказательство единственности следует из единственности решения стандартной задачи. Действительно, по решению $\{\widehat{\varphi}, \widehat{\psi}\}$ однозначно строится соответствующее стандартное решение $\{\varphi, \psi\}$, если пройтись в цепочке равенств (2.2.2) с конца. Но решение стандартной задачи единственно.

Последняя часть утверждения очевидна, поскольку из свойств решений задачи Римана с условием $\varphi_0 \equiv I$ следует, что ψ_0 — целое $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$-значное отображение. Следовательно, таковым является и $\widehat{\varphi}_0^{-1}$ в силу второго свойства разбиения. $\square$

Из доказанного утверждения мы видим, что решения задачи Римана $\{\varphi, \psi\}$ и $\{\widehat{\varphi}, \widehat{\psi}\}$ легко друг в друга пересчитываются при дополнительном условии на значения ψ_0. Заметим, что мы нигде не прибегали к основной алгебре $\mathscr{C}$ — нас интересовало лишь разбиение $B_\pm$. В работе [19] (теорема 1.2 и пункт “Formal inverse scattering”), тем не менее, показано, что в достаточно похожей постановке, если есть разложение некоторой (бесконечномерной) алгебры Ли $\mathscr{L} = \mathscr{L}_+ \oplus \mathscr{L}_-$ (аналог разбиения $\mathscr{C}_\pm$ основной алгебры $\mathscr{C}$), которое индуцирует разложение соответствующей группы Ли $L = L_- \times L_+$, и элемент f взят из L_-, тогда решение задачи Римана $\{\varphi, \psi\}$ есть разложение по подгруппами $L_\pm$. Однако нам не нужно знать, что решения задачи Римана действительно принадлежат группам Ли — нам важны лишь первые слагаемые получающихся

рядов (а именно, как будет видно ниже, нас будут интересовать только коэффициенты ψ_0, φ_1 и $\widehat{\varphi}_0$ соответствующих решений). Этим объясняется, почему основная алгебра не играет роли в постановке задачи Римана.

Предложение 5. *Пусть*[32] $f \in I + \mathrm{Gev}_1^I$. *Тогда значения* ψ_0 *принадлежат* A_0.

Доказательство. Обратимся к первому уравнению в лемме 4 предыдущей главы:

$$\partial_x \psi = (az + q(x))\psi,$$

где $q(x) = [\varphi_1(x), a]$.

Приравниванием коэффициентов при нулевой степени z получим

$$\partial_x \psi_0(x) = q(x)\psi_0(x).$$

Мы знаем в силу теоремы 2, что значения q принадлежат B_0 (и даже N_0). Тогда полученное уравнение с учетом условия $\psi_0(x_0) = I$ является уравнением кривой, проходящей через I, в группе Ли A_0 (см. [38], гл. 1, § 2, п. 5). □

Теперь предъявим формулу обратного преобразования рассеяния. Пусть $f = I + \gamma$ для $\gamma \in \mathrm{Gev}_1^I$ и $\{\widehat{\varphi}, \widehat{\psi}\}$ — решение задачи Римана, соответствующее ряду f, с условиями $\widehat{\varphi}_0(x) \in A_-$, $\widehat{\psi}_0(x) \in A_+$. Определим

$$\widehat{B}[\gamma](x) := \mathrm{pr}_+[\widehat{\varphi}_1(x)\widehat{\varphi}_0^{-1}(x), a]. \tag{2.2.3}$$

Сформулируем и докажем аналог леммы 4.

Лемма 6. *Обозначим* $q(x) := \widehat{B}[\gamma](x)$. *Тогда* $\widehat{\varphi}$, $\widehat{\psi}$ *удовлетворяют следующим дифференциальным уравнениям*

$$\partial_x \widehat{\psi} = (az + q(x))\widehat{\psi}, \qquad \partial_x \widehat{\varphi} = (az + q(x))\widehat{\varphi} - \widehat{\varphi} az \tag{2.2.4}$$

с начальными условиями $\widehat{\psi}(x_0, z) = I$, $\widehat{\varphi}(x_0, z) = f(z)$.

[32] Напомним, что $\mathrm{Gev}_\alpha^I := \mathrm{Gev}_\alpha \cap \mathscr{N}$.

Доказательство. Из (2.2.1) легко видеть, что

$$(\partial_x\widehat{\psi})\widehat{\psi}^{-1} = (\partial_x\widehat{\varphi})\widehat{\varphi}^{-1} + \widehat{\varphi}az\widehat{\varphi}^{-1}. \tag{2.2.5}$$

Приравняем коэффициенты при нулевой степени z. Получим:

$$(\partial_x\widehat{\psi}_0)\widehat{\psi}_0^{-1} = (\partial_x\widehat{\varphi}_0)\widehat{\varphi}_0^{-1} + \widehat{\varphi}_1a\widehat{\varphi}_0^{-1} + \widehat{\varphi}_0a\widehat{\varphi}_1^{(-1)},$$

где $\widehat{\varphi}_1^{(-1)}$ — коэффициент при z^{-1} ряда $\widehat{\varphi}^{-1}$.

Прямой подсчет показывает, что

$$\widehat{\varphi}_1^{(-1)} = -\widehat{\varphi}_0^{-1}\widehat{\varphi}_1\widehat{\varphi}_0^{-1}.$$

Отсюда получаем:

$$(\partial_x\widehat{\psi}_0)\widehat{\psi}_0^{-1} = (\partial_x\widehat{\varphi}_0)\widehat{\varphi}_0^{-1} + \widehat{\varphi}_1a\widehat{\varphi}_0^{-1} - \widehat{\varphi}_0a\widehat{\varphi}_0^{-1}\widehat{\varphi}_1\widehat{\varphi}_0^{-1}.$$

Из первого свойства разбиения, а именно, из первого условия в (2.1.2), следует, что элементы из A_- также коммутируют с a. Следовательно, φ_0 и φ_0^{-1} коммутируют с a. Поэтому можно записать:

$$(\partial_x\widehat{\psi}_0)\widehat{\psi}_0^{-1} = (\partial_x\widehat{\varphi}_0)\widehat{\varphi}_0^{-1} + [\widehat{\varphi}_1\widehat{\varphi}_0^{-1}, a]. \tag{2.2.6}$$

Покажем, что $[\widehat{\varphi}_1\widehat{\varphi}_0^{-1}, a] \in B_0$.

В силу условия $f \in I + \mathrm{Gev}_1$ и предыдущей леммы (в частности, равенства (2.2.2)) мы знаем, что $\widehat{\varphi}_1 = \widehat{\varphi}_0\varphi_1$. Подставим это в коммутатор, получим:

$$[\widehat{\varphi}_1\widehat{\varphi}_0^{-1}, a] = [\widehat{\varphi}_0\varphi_1\widehat{\varphi}_0^{-1}, a] = \widehat{\varphi}_0[\varphi_1, a]\widehat{\varphi}_0^{-1}.$$

Тот факт, что $[\varphi_1, a] \in B_0$ мы знаем из предыдущей главы. Но $[\widehat{\varphi}_1\widehat{\varphi}_0^{-1}, a]$ — это результат действия присоединенного представления Ad_{φ_0} на элемент $[\varphi_1, a]$ алгебры Ли B_0. Тогда результат этого действия тоже принадлежит B_0.

Вернемся к равенству (2.2.6). Мы видим, что значения левой части принадлежат B_+. Первое слагаемое правой части принимает значения в B_-, а второе - в B_0 по доказанному. Таким образом, корректно определены проекции $\mathrm{pr}_\pm$ обеих частей на $B_\pm$. Понимая под $\mathrm{pr}_\pm$ взятие положительной/отрицательной (по

степеням z) части ряда и относя B_+ к положительной, а B_- к отрицательной части,[33] равенство (2.2.5) можно записать следующим образом:

$$(\partial_x\widehat{\psi})\widehat{\psi}^{-1} = \mathrm{pr}_+\{\widehat{\varphi}az\widehat{\varphi}^{-1}\}, \qquad 0 = (\partial_x\widehat{\varphi})\widehat{\varphi}^{-1} + \mathrm{pr}_-\{\widehat{\varphi}az\widehat{\varphi}^{-1}\}. \tag{2.2.7}$$

Но из уже доказанного очевидно, что

$$\mathrm{pr}_+\{\widehat{\varphi}az\widehat{\varphi}^{-1}\} = az + \mathrm{pr}_+[\widehat{\varphi}_1\widehat{\varphi}_0^{-1}, a].$$

Второе слагаемое в последнем равенстве — это и есть $q(x)$. Тем самым получено первое уравнение из формулировки леммы.

Второе уравнение из формулировки леммы очевидно следует из второго равенства (2.2.7), если заметить, что приравнивание коэффициентов при нулевой степени z дает:

$$(\partial_x\widehat{\varphi}_0)\widehat{\varphi}_0^{-1} = -\mathrm{pr}_-[\widehat{\varphi}_1\widehat{\varphi}_0^{-1}, a] = [a, \widehat{\varphi}_1]\varphi_0^{-1} + q(x).$$

Приравнивание остальных коэффициентов тривиально. Таким образом, получено второе уравнение из формулировки.

Начальные условия следуют из равенства $\widehat{\varphi}(x_0, z)f^{-1}(z) = \widehat{\psi}(x_0, z)$. Левые и правые части имеют разные степени z за исключением нулевой. Но значения $\widehat{\varphi}_0$ и $\widehat{\psi}_0$ лежат в разных подгруппах A_- и A_+ соответственно, которые пересекаются только по I. □

Замечание 10. Как уже отмечалось при доказательстве последней леммы, справедливо равенство:

$$\widehat{\varphi}_1(x)\widehat{\varphi}_0^{-1}(x) = \widehat{\varphi}_0(x)\varphi_1(x)\widehat{\varphi}_0^{-1}(x),$$

где $\varphi_1(x)$ — коэффициент при z^{-1} компоненты решения задачи Римана φ со стандартным условием $\varphi_0 \equiv I$. С учетом того, что φ_0 коммутирует с a, имеем

[33] Отметим, что мы не доказывали, что получившиеся ряды принадлежат $\mathscr{C}_\pm$, поэтому говорить про проекции на эти подпространства мы не можем и приходится проводить отделение положительных и отрицательных частей рядов с учетом разбиения “вручную”.

следующую формулу:

$$\widehat{q}(x) = \mathrm{pr}_+\{\widehat{\varphi}_0(x)q(x)\widehat{\varphi}_0^{-1}(x)\}, \tag{2.2.8}$$

где $q(x) = [\varphi_1(x), a]$ — результат обратного преобразования рассеяния для задачи Римана со стандартным условием, а $\widehat{q}(x)$ — результат обратного преобразования рассеяния для задачи Римана с условием, согласованным с разбиением.

Замечание 11. В предыдущей главе мы обсуждали формальные калибровочные преобразования. Мы отмечали, что их можно рассматривать, как замену искомой функции $F = \Phi E$ в уравнении $E_x = UE$. Из последней леммы и леммы 4 следует, что $\widehat{\psi}$ и ψ тоже удовлетворяют уравнениям подобного вида, а именно

$$\partial_x\widehat{\psi} = (az + \widehat{q}(x))\widehat{\psi}, \qquad \partial_x\psi = (az + q(x))\psi.$$

Кроме того, $\widehat{\psi}$ и ψ связаны соотношением $\widehat{\psi} = \widehat{\varphi}_0\psi$. Отсюда несложно видеть, что $\widehat{q}(x)$ и $q(x)$ связаны калибровочным преобразованием, сводящемся к умножению на φ_0, и удовлетворяют соотношению:

$$\widehat{q}(x) = \partial_x\widehat{\varphi}_0\widehat{\varphi}_0^{-1} + \widehat{\varphi}_0 q(x)\widehat{\varphi}_0^{-1}. \tag{2.2.9}$$

Отмеченные в замечаниях 11 и 10 связи представляют некоторый интерес. Ростки, получающиеся из формул (1.2.3) и (2.2.3), удовлетворяют двум соотношениям: (2.2.8) и (2.2.9). Заметим, что разница между этими соотношениями заключается только в том, что взятие проекции на B_+ в первом заменено на добавление слагаемого $\partial_x\varphi_0\varphi_0^{-1}$ во втором.

2.2. Преобразование рассеяния. Пусть фиксирована основная алгебра $\mathscr{C}$, матрица a и подходящее разбиение $B_\pm$. Пусть дан голоморфный росток $q \in N_0^+(x_0)$. Его *преобразованием рассеяния*, как и раньше, назовем ряд:

$$Lq(z) = T(q)|_{x=x_0} - I, \tag{2.2.10}$$

где ряд $T(q)$ строится, как в лемме 1. Ряд $T(q)|_{x=x_0}$ будем обозначать через $f(z)$ и называть *данными рассеяния*.

Справедлива следующая теорема, аналогичная теореме 2 предыдущей главы:

Теорема 4. *Отображение* $L : N_0^+(x_0) \to \mathrm{Gev}_1^I$ *взаимно-однозначно. Обратным отображением является (2.2.3).*

Отметим, что голоморфность рассматриваемых отображений обеспечивается свойством 2 разбиения.

Доказательство. Доказательство аналогично доказательству теоремы 2 предыдущей главы. Действительно, доказательство первого пункта[34] следует из того, что ряд T определяется из того же равенства

$$T_x = [az, T] + qT - TH$$

и условий $T_j(q) \in N_{-j}$, $h_j(q) \in D_{-j}$ на коэффициенты. Это определение не зависит от разбиения и корректно для всех $q \in B_0(x_0)$.

Докажем инъективность отображения $L : N_0^+(x_0) \to \mathrm{Gev}_1^I$.

Как и в доказательстве теоремы 2 предыдущей главы, выпишем разложения в ряд Тейлора в окрестности x_0:[35]

$$q(x) = \sum_{j=0}^{\infty} q_j (x - x_0)^j,$$

$$T(x, z) = I + \sum_{j=0,k=1}^{\infty} T_{jk} (x - x_0)^j z^{-k},$$

$$H(x, z) = \sum_{j,k=0}^{\infty} h_{jk} (x - x_0)^j z^{-k}.$$

Сравнение коэффициентов при $(x - x_0)^j z^0$ в равенстве

$$T_x = [a, T]z + (qT)^I - TH.$$

[34] А именно, доказательство свойства $Lq \in \mathrm{Gev}_1^I$.

[35] Обратим внимание на то, что ряд $H(x, z)$ теперь начинается с нулевой степени по z, поэтому мы изменили нумерацию в формулах.

и проекция обеих частей на $\mathscr{N}$ дает набор уравнений

$$[a, T_{j0}] + q_j^I = 0, \qquad j \geqslant 0, \tag{2.2.11}$$

а сравнение коэффициентов при $(x - x_0)^j z^{-(k+1)}$ с последующей проекцией на $\mathscr{N}$ в том же равенстве дает (считаем $T_0 := I$):

$$(j+1)T_{j+1,k} = [a, T_{j,k+1}] + \sum_{s=0}^{j} (q_s T_{j-s,k})^I - \sum_{i=0}^{k} \sum_{s=0}^{j} T_{j-s,i} h_{s,k-i}, \quad j \geqslant 0,\ k \geqslant 1. \tag{2.2.12}$$

Проекция на $\mathscr{D}$ в равенстве, определяющем H и T, даёт:

$$h_j = (qT_j)^K, \qquad j \geqslant 0.$$

Подставляя сюда разложения по степеням $(x - x_0)$ и приравнивая коэффициенты, получаем

$$h_{ji} = \sum_{k=0}^{j} (q_k T_{j-k,i})^K. \tag{2.2.13}$$

Требуется по коэффициентам $\{T_{0j}\}_{j=1}^{\infty}$ однозначно построить коэффициенты $\{q_j\}_{j=0}^{\infty}$.

Доказательство тем же способом, что и в предыдущей главе, напрямую не проходит, поскольку теперь $q_j \in N_0^+ \neq N_0$. Это означает, в частности, что из равенства (2.2.11) мы можем восстановить лишь проекцию q_j^I. Тем не менее, из первого условия (2.1.2) свойства 1 разбиения следует, что по q_j^I однозначно восстанавливается q_j^K. Докажем это.

Имеем:

$$B_0 = B_+ \oplus B_- = N_0 \oplus D_0.$$

Пусть дана матрица v^I для $v \in N_0^+$. Требуется найти матрицу v^K. Из того, что $v \in N_0^+$ по определению существуют матрицы $u \in N_0$ и $w \in B_-$ такие, что $u = v + w$. Тогда[36]

$$v^I = (v + w)^I = u^I = u.$$

[36] Здесь мы пользуемся свойством 1 разбиения.

Но так как $v = u + (-w)$, то $v^I = u$, $v^K = -w$. Учитывая, что $\operatorname{pr}_- u = w$, получаем $v^k = -\operatorname{pr}_- v^I$.

Таким образом, мы можем повторить все рассуждения доказательства теоремы 2 предыдущей главы, дополнительно восстанавливая q_j^K по q_j^I с помощью полученной формулы.

Осталось доказать, что отображение $L\widehat{B}$ является тождественным на Gev_1^I. Как отмечалось при доказательстве теоремы 2 прошлой главы, для этого достаточно показать, что для решения $\widehat{\varphi}(x,z)$ задачи Римана (2.2.1) выполняется $\widehat{\varphi}(x_0,z) = T(q)|_{x=x_0}$, так как из инъективности L и леммы 6 будет следовать требуемое утверждение. Докажем следующую лемму.

Лемма 7. *Пусть фиксирована основная алгебра $\mathscr{C}$, матрица a и подходящее разбиение $B_\pm$. Пусть $Q \in N_0(x_0)$ и $\widehat{Q}(x) := \xi_x\xi^{-1} + \xi Q(x)\xi^{-1}$ для некоторого $\xi \in A_-(x_0)$. Тогда $T(\widehat{Q}) = \xi T(Q)\xi^{-1}$.*

Доказательство. Будем обозначать $T_j(Q)$ через T_j, а $T_j(\widehat{Q})$ через $\widehat{T}_j$. Докажем индукцией по номеру коэффициента T_j.

Выпишем формулу на коэффициенты для $j \geqslant 0$, считая $T_0 := I$:

$$h_j = (QT_j)^K, \tag{2.2.14}$$

$$[a, T_{j+1}] = -(QT_j)^I + T_j' + \sum_{k=0}^{j-1} T_{j-k}h_k. \tag{2.2.15}$$

Проверим базу индукции. Рассмотрим уравнение на $\widehat{T}_1$:

$$[a, \widehat{T}_1] = -\widehat{Q}^I = -(\xi_x\xi^{-1} + \xi Q\xi^{-1})^I = -\xi Q\xi^{-1}.$$

Отсюда получаем

$$[a, \xi^{-1}\widehat{T}_1\xi] = -Q.$$

Это уравнение совпадает с уравнением на T_1, поэтому

$$T_1 = \xi^{-1}\widehat{T}_1\xi.$$

Пусть равенство $T_j = \xi^{-1}\widehat{T}_j\xi$ доказано для всех $j = 1, 2, \ldots, l$. Докажем его для $l+1$. Выпишем уравнение на этот коэффициент:

$$[a, \widehat{T}_{l+1}] = -(\widehat{Q}\widehat{T}_l)^I + \widehat{T}'_l + \sum_{k=0}^{l-1} \widehat{T}_{l-k}\widehat{h}_k.$$

Распишем слагаемые в правой части:

$$\begin{aligned}
&(\widehat{Q}\widehat{T}_l)^I = \xi(QT_l)^I\xi^{-1},\\
&\widehat{T}'_l = \xi_x T_l\xi^{-1} + \xi T'_l\xi^{-1} - \xi T_l\xi^{-1}\xi_x\xi^{-1},\\
&\widehat{T}_{l-k}\widehat{h}_k = \widehat{T}_{l-k}(\widehat{Q}\widehat{T}_k)^K = \xi T_{l-k}(QT_k)^K\xi^{-1}, \quad k \neq 0,\\
&\widehat{T}_l\widehat{h}_0 = \widehat{T}_l\widehat{Q}^K = \xi T_l\xi^{-1}\xi_x\xi^{-1}.
\end{aligned}$$

Подставляя получившиеся выражения и сокращая одинаковые слагаемые, получаем

$$[\widehat{T}_{l+1}, a] = \xi(-(QT_l)^I + T'_l + \sum_{k=1}^{l-1} T_{l-k}h_k)\xi^{-1}.$$

Выражение в скобках в правой части совпадает с правой частью уравнения для T_l. Лемма доказана. □

Теперь несложно завершить доказательство теоремы. Действительно, в силу замечания 11 функции $\widehat{q} := \widehat{B}[\gamma]$ и $q := B[\gamma]$, полученные с помощью преобразований рассеяния, удовлетворяют условиям леммы 7. Но тогда[37] $\widehat{\varphi}(x_0, z) = \varphi(x_0, z) = T(q)|_{x=x_0} = T(\widehat{q})|_{x=x_0}$. □

2.3. Основная теорема. Пусть зафиксирована основная алгебра $\mathscr{C}$, матрица a и подходящее разбиение $B_\pm$. Пусть фиксирован постоянный элемент $\beta = bz^m + c_1z^{m-1} + \ldots + c_m$, где $m \geqslant 2$, причем $\beta \in \mathscr{Z}$ и оператор $\mathscr{B}_m(X) := [bz^m, X]$ обратим на $\mathscr{N}$. Пусть ряд $F(q, z)$ из (2.1.6) фиксирован условием $F(0, z) = \beta$. Сформулируем и докажем аналог теоремы 3.

Теорема 5. (А) *Задача Коши $q(x, t_0) = q_0(x)$, где $q_0 \in N_0^+(x_0)$, для уравнения (2.1.10), где $F_m(q)$ — коэффициент при z^0 ряда $F(q, z)$, имеет локальное*

[37] Здесь мы пользуемся тем, что $\varphi(x_0) = I$.

голоморфное решение $q(x,t)$ в окрестности точки $(x_0,t_0)\in\mathbb{C}^2$ тогда и только тогда, когда $Lq_0\in \mathrm{Gev}_{1/m}$. Если такое решение $q(x,t)$ существует, то только одно.

(B) *Всякое голоморфное решение $q(x,t)$ уравнения (2.1.10) в произвольном бидиске $D:=\{(x,t)\in\mathbb{C}^2\,|\,|x-x_0|<\delta_1,\ |t-t_0|<\delta_2\}$ аналитически продолжается до функции, мероморфной в полосе $S:=\{(x,t)\in\mathbb{C}^2\,|\,|t-t_0|<\delta_2\}$.*

Доказательство. Доказательство единственности решения, части (B), а также необходимости условия $Lq_0\in\mathrm{Gev}_{1/m}$ проводится в полной аналогии со случаем стандартного разбиения. Докажем достаточность условия $Lq_0\in\mathrm{Gev}_{1/m}$.

Для заданного ростка q_0 найдем данные рассеяния $f:=I+Lq_0$ и рассмотрим задачу Римана:

$$e^{az(x-x_0)+\beta(t-t_0)}f^{-1}(z)=\widehat{\varphi}^{-1}\widehat{\psi}=\varphi^{-1}\psi. \tag{2.2.16}$$

Напомним, что решения с шапочкой соответствуют задаче Римана с условием $\widehat{\varphi}_0(x,t)\in A_-$, $\widehat{\psi}_0(x,t)\in A_+$, а решения без шапочки соответствуют задаче Римана с условием $\varphi_0\equiv I$. Для удобства сделаем переобозначения: $\xi(x,t):=\widehat{\varphi}_0(x,t)$, $\eta(x,t):=\widehat{\psi}_0(x,t)$.

По формулам (1.2.3) предыдущей главы и (2.2.3) этой главы мы можем построить две функции, соответствующие двум решениям задачи Римана:

$$Q=[\varphi_1,a], \tag{2.2.17}$$

$$\widehat{Q}=\mathrm{pr}_+[\widehat{\varphi}_1\xi^{-1},a]. \tag{2.2.18}$$

Из теоремы 3 мы знаем, что Q является решением уравнения (1.1.21) с дифференциальным полиномом F_{m+1}, соответствующим условию $F(0,z)=\beta$. Нужно проверить, что $\widehat{Q}$ является решением (2.1.10) с дифференциальным полиномом F_m, соответствующим условию $F(0,z)=\beta$.

Дифференцируя (2.2.16) и домножая на $\widehat{\psi}^{-1}$, получаем:

$$\widehat{\psi}_x\widehat{\psi}^{-1} = az + \widehat{Q} =: \widehat{U}, \tag{2.2.19}$$

$$\widehat{\psi}_t\widehat{\psi}^{-1} = \mathrm{pr}_+ S(x,t,z) =: \widehat{V}, \tag{2.2.20}$$

где $S(x,t,z) := \widehat{\varphi}\beta\widehat{\varphi}^{-1}$.

Отсюда сразу следует, что $\widehat{U}$ и $\widehat{V}$ удовлетворяют уравнению нулевой кривизны:

$$\widehat{U}_t - \widehat{V}_x + [\widehat{U}, \widehat{V}] = 0,$$

так как являются коэффициентами во вспомогательной линейной системе (см. (1.1.16) предыдущей главы).

Из (2.2.2) мы знаем, что $\widehat{\varphi} = \xi\varphi$, откуда получаем: $S(x,t,z) = \xi\varphi\beta\varphi^{-1}\xi^{-1}$. Выражение $\varphi\beta\varphi^{-1}$ есть не что иное, как ряд $F(x,t,z)$, возникавший в доказательстве теоремы 3. Для этого ряда в свою очередь мы уже получали:

$$(F(x,t,z))_+ = V(x,t,z) = bz^m + F_1(Q)z^{m-1} + \ldots + F_m(Q).$$

Напомним, что индекс $+$ означает взятие неотрицательной по степеням z части ряда.

Отсюда получаем:

$$\widehat{V} = \mathrm{pr}_+(\xi F\xi^{-1}). \tag{2.2.21}$$

Мы также знаем, что $F = T(Q)\beta T^{-1}(Q)$. Кроме того, мы отмечали в замечании 11, что имеется связь между Q и $\widehat{Q}$:

$$\widehat{Q} = \xi_x\xi^{-1} + \xi Q\xi^{-1}.$$

Отсюда, согласно лемме 7, имеем:

$$\xi F\xi^{-1} = \xi T(Q)\xi^{-1}\beta\xi T^{-1}(Q)\xi^{-1} = T(\widehat{Q})\beta T^{-1}(\widehat{Q}).$$

Таким образом, мы получаем:

$$\widehat{V} = bz^m + F_1(\widehat{Q})z^{m-1} + \ldots + \mathrm{pr}_+ F_m(\widehat{Q}).$$

Из выше сказанного следует, что пара $(\widehat{U}, \widehat{V})$ подпадает под рассмотренный в пункте 1.2 случай (см. (2.1.7) и (2.1.8)). Тогда уравнение нулевой кривизны для этой пары эквивалентно основному уравнению (2.1.10), а именно, мы имеем:

$$\widehat{Q}_t = \operatorname{pr}_+ \partial_x F_m(\widehat{Q}) + [\operatorname{pr}_+ F_m(\widehat{Q}), \widehat{Q}].$$

Этим доказана часть (A) теоремы. □

Замечание 12. Из приведенных рассуждений несложно получить как связаны правые части основных уравнений (1.1.21) и (2.1.10). А именно, учитывая равенство $\widehat{\psi} = \xi\psi$, мы видим, что $\widehat{V}$ и V связаны калибровочным преобразованием:

$$\xi_t\xi^{-1} + \xi V\xi^{-1} = \widehat{V}.$$

Из (2.2.21) мы также получаем:

$$\widehat{V} = \xi \operatorname{pr}_+ V\xi^{-1}.$$

Объединяя последние два равенства, имеем следующее соотношение:

$$\xi_t\xi^{-1} + \xi V\xi^{-1} = \xi \operatorname{pr}_+ V\xi^{-1}.$$

Проекция pr_+ не меняет коэффициенты при положительных степенях z, поэтому в левой и правой части сокращаются все слагаемые кроме нулевой степени по z. Таким образом, получаем

$$\xi_t\xi^{-1} + \xi F_m(Q)\xi^{-1} = \operatorname{pr}_+ \xi F_m(Q)\xi^{-1} = \operatorname{pr}_+ F_m(\widehat{Q}). \tag{2.2.22}$$

Пример 8. В примере 7 мы получили второе модифицированное уравнение Кортевега–де Фриза:

$$u_t = -u_{xxx} + 3(u_{xx}u - uu_{xx}) + 6uu_xu.$$

Несложно проверить, что для него выполнены все условия теоремы 5. Значит, для этого уравнения выполнен критерий разрешимости и все его голоморфные решения обладают СМП.

Глава 3. Применение к обыкновенным дифференциальным уравнениям

В данной главе мы покажем, как можно применять результаты предыдущих глав (главным образом, теорему 3) к обыкновенным дифференциальным уравнениям.

§ 1. Уравнения Пенлеве и их иерархии

Будем говорить, что обыкновенное дифференциальное уравнение вида

$$P(z, w, w', \dots, w^{(n)}) = 0,$$

где P — целая функция от $z \in \mathbb{C}$, рациональная по остальным переменным, обладает *свойством мероморфного продолжения* (СМП), если для любого открытого связного множества $D \subset \mathbb{C}$ и любого голоморфного решения $w = f(z)$ этого уравнения на D найдется мероморфная функция $F(z)$ на всей плоскости $\mathbb{C}$ такая, что $F(z) = f(z)$ для всех $z \in D$. Иными словами, СМП означает, что любое локальное голоморфное решение данного уравнения допускает аналитическое продолжение до глобально мероморфного решения.

Например, уравнение $w' = w^n$, где n — любое целое число, обладает СМП тогда и только тогда, когда $n \in \{0, 1, 2\}$ (поскольку все его решения, кроме тождественного нуля, имеют вид $w = Ce^z$ при $n = 1$ и $w = \{(1-n)(z-C)\}^{1/(n-1)}$ при $n \in \mathbb{Z} \setminus \{1\}$, где $C \in \mathbb{C}$ — произвольная константа). Вообще, уравнение вида

$$w' = R(z, w),$$

где функция R — целая по z и рациональная по w, обладает СМП в том и только том случае, когда оно является уравнением Риккати, т.е.

$$R(z, w) = A(z)w^2 + B(z)w + C(z)$$

для некоторых целых функций A, B, C (это вытекает из классических результатов Л. Фукса 1884 г.; см., например, [21], гл. I, § 11 и [22], следствие 1.2.7).

В рамках общей задачи поиска новых спецфункций, заданных дифференциальными уравнениями, Пенлеве в 1895–1902 гг. (с уточнениями, сделанными Гамбье и Р. Фуксом в 1906–1910 гг.) получил ответ на поставленный Пикаром аналогичный вопрос об описании всех уравнений вида

$$w'' = R(z, w, w'),$$

где функция R рациональна по w, w' и голоморфна по z, обладающих (более слабым по сравнению с СМП) *свойством Пенлеве*. Это свойство заключается в том, что множество точек ветвления всех решений (или, что в данном случае эквивалентно, множество всех особых точек, отличных от полюсов) имеет пустую внутренность. Ответом является список из 50 обладающих этим свойством уравнений (начинающийся с уравнения $w'' = 0$ и кончающийся шестым уравнением Пенлеве), к которым каждое уравнение указанного вида, обладающее свойством Пенлеве, сводится дробно-линейными заменами переменной w с коэффициентами, голоморфно[38] зависящими от z (см. [21], гл. III, [23], гл. XIV). При этом все решения 44 уравнений из списка выражаются[39] через решения линейных уравнений, уравнений Риккати, уравнений для эллиптических функций и шести оставшихся уравнений списка, которые и называются *уравнениями Пенлеве*. Отметим, что правые части всех шести уравнений Пенлеве имеют вид

$$R(z, w, w') = A(z, w)w'^2 + B(z, w)w' + C(z, w),$$

где A, B, C — рациональные функции от z, w.

Уравнения Пенлеве делятся на две группы. Группа 1, 2, 4 состоит из уравнений с $B(z, w) \equiv 0$ или, эквивалентно, из тех уравнений, для которых $R(z, w, w')$ является целой функцией от z (фактически полиномом степени не выше 2).

[38] Точнее, аналитически, т.к. иногда необходимо либо допускать многозначные аналитические функции от z в качестве коэффициентов, либо говорить лишь о локальном приведении данного уравнения к одному из уравнений списка.

[39] С помощью конечного числа операций из следующего списка: алгебраические действия, дифференцирование, интегрирование, взятие обратных функций и композиций.

Именно эти уравнения интересуют нас в настоящей работе. Следующий факт хорошо известен.

Теорема 6. *Для любых значений параметров $a, b \in \mathbb{C}$ первое, второе и четвертое уравнения Пенлеве*

$$w'' = 6w^2 + z \qquad (P_1)$$

$$w'' = 2w^3 + zw + a \qquad (P_2)$$

$$2ww'' = w'^2 + 3w^4 + 8zw^3 + 4(z^2 - a)w^2 + b \qquad (P_4)$$

обладают СМП.

Замечание 13. Уравнения P_3, P_5 и P_6 не обладают СМП (особая точка $z = 0$ является устранимой или полюсом лишь для конечного числа их решений; см., например, [24], теоремы 30.1, 37.1, [28], теорема 5.1). Тем не менее все локальные голоморфные решения этих уравнений аналитически продолжаются до глобально мероморфных функций от $\log z$ (для уравнений P_3, P_5) или от функции, обратной к модулярной (для P_6), т.е. все они являются мероморфными функциями на универсальном накрытии дополнения к множеству неподвижных особых точек (см., например, [24], §§ 3,5,6 или [22], теоремы 4.5.1, 4.5.2).

Одна из целей настоящей главы — дать новое доказательство теоремы 6. Оно изложено в § 2 и опирается на представление уравнений Пенлеве как редукций солитонных уравнений с последующим применением теоремы 3. Преимущество этого подхода — его концептуальность и то, что он естественно обобщается до доказательства СМП для всех уравнений, составляющих так называемые иерархии первого и второго уравнений Пенлеве.

Иерархия первого уравнения Пенлеве появилась в работах [25], [26] и состоит из обыкновенных дифференциальных уравнений вида

$$L_{n+1}[w] + \sum_{j=1}^{n} b_j L_{n+1-j}[w] = a_1 z + a_2, \qquad ({}_{2n}P_1)$$

где $n \in \mathbb{N}$, $a_1, a_2, b_1, \ldots, b_n \in \mathbb{C}$ — произвольные константы, причем $a_1 \neq 0$, а $L_n[w]$ — дифференциальные полиномы Льенара[40], определяемые по индукции соотношениями $L_0[w] = 1/2$,

$$\partial L_{n+1}[w] = (\partial^3 + 4w\partial + 2w')L_n[w] \qquad (L)$$

для всех $n = 0, 1, 2, \ldots$ (где через ∂ обозначается оператор дифференцирования по z) и $L_n[0] = 0$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Первые три чистых потока (т.е. уравнения с $b_1 = b_2 = \ldots = b_n = 0$) этой иерархии имеют следующий вид (где через w_k обозначается k-я производная от функции w по z):

$$w_2 + 3w^2 = a_1 z + a_2 \qquad ({}_2P_1^0)$$
$$w_4 + 10ww_2 + 5w_1^2 + 10w^3 = a_1 z + a_2 \qquad ({}_4P_1^0)$$
$$w_6 + 14ww_4 + 26w_1w_3 + 21w_2^2 + 70(ww_1^2 + w^2w_2) + 35w^4 = a_1 z + a_2 \qquad ({}_6P_1^0)$$

Таким образом, уравнение ${}_2P_1^0$ совпадает с P_1 при надлежащем выбора констант a_1, a_2 и масштабирующих замен переменных z, w, т.е. иерархия действительно начинается с первого уравнения Пенлеве. Левая часть уравнения ${}_{2n}P_1$ является однородным полиномом степени $2n + 2$ от переменных $w_0, w_1, \ldots, w_{2n}$ (где по определению $w_0 := w$), если переменной w_k приписать вес $k + 2$. По индукции проверяется, что этот полином имеет степень 1 по w_{2n} и степень $n + 1$ по w_0, причем коэффициенты при старших степенях этих переменных — ненулевые константы.

Иерархия второго уравнения Пенлеве появилась в [27] и состоит из обыкновенных дифференциальных уравнений

$$Q_n[w] + \sum_{j=1}^{n-1} b_j Q_{n-j}[w] = zw + a, \quad \text{где} \quad Q_n[w] := (\partial + 2w)L_n[w' - w^2]. \quad ({}_{2n}P_2)$$

[40]То, что приводимое далее рекуррентное определение действительно задает дифференциальные полиномы от w, т.е. обычные полиномы от функции w и ее производных по z, впервые было доказано, по-видимому, Лаксом [29], теорема 3.1. Мы дадим независимое доказательство в п. 3.1 ниже.

Здесь $n \in \mathbb{N}$ — номер уравнения, $a, b_1, \ldots, b_{n-1} \in \mathbb{C}$ — произвольные константы. Первые три чистых потока ($b_1 = b_2 = \ldots = 0$) задаются равенствами

$$w_2 - 2w^3 = zw + a \qquad ({}_2P_2^0)$$

$$w_4 - 10ww_1^2 - 10w^2w_2 + 6w^5 = zw + a \qquad ({}_4P_2^0)$$

$$w_6 + 70w_1^2w_2 - 42ww_2^2 - 56ww_1w_3 - 14w^2w_4 + 140w^3w_1^2 + 70w^4w_2 - 20w^7 = zw + a, \qquad ({}_6P_2^0)$$

левые части которых являются однородными полиномами степени $2n+1$ от переменных $w_0, w_1, \ldots, w_{2n}$, если переменной w_k приписать вес $k+1$. Они имеют степень 1 по w_{2n} и степень $2n+1$ по w_0, причем коэффициенты при старших степенях этих переменных — ненулевые константы. Первое уравнение ${}_2P_2^0$ данной иерархии совпадает с уравнением Пенлеве P_2.

Мы дадим полный ответ на вопрос о выполнении СМП для ${}_{2n}P_1$ и ${}_{2n}P_2$ в виде следующей теоремы.

Теорема 7. *Для любых значений параметров* $n \in \mathbb{N}$, $a, a_1, a_2, b_1, \ldots, b_n \in \mathbb{C}$, $a_1 \neq 0$, *все уравнения* ${}_{2n}P_1$ *и* ${}_{2n}P_2$ *обладают* СМП.

Доказательство теоремы 7 приведено в § 3 настоящей главы.

Отметим, что существует много различных иерархий обыкновенных дифференциальных уравнений, начинающихся с уравнений Пенлеве. Наш подход применим к тем из них, которые получаются редукциями уравнений из иерархий, участвующих в теоремах 3 и 5.

§ 2. Доказательство теоремы 6

Хорошо известно, что уравнения Пенлеве связаны с солитонными уравнениями (впервые эта связь была отмечена А.Б.Шабатом [30]). Следующие утверждения легко проверяются прямым вычислением.

1. *Для любого решения $w(z)$ уравнения P_1: $w'' = 6w^2 + z$ (и даже продифференцированного уравнения P_1': $w''' = 12ww' + 1$) функция*

$$u(x,t) := w(x - 6t^2) + t \tag{3.2.1}$$

является решением уравнения Кортевега–де Фриза

$$u_t = u_{xxx} - 12uu_x. \tag{3.2.2}$$

2. *Для любого решения $w(z)$ уравнения P_2: $w'' = 2w^3 + zw + a$ (и даже продифференцированного уравнения P_2': $w''' = (6w^2 + z)w' + 1$) функция*

$$u(x,t) := t^{-1/3} w(xt^{-1/3}) \tag{3.2.3}$$

является решением модифицированного уравнения Кортевега–де Фриза

$$3u_t = 6u^2 u_x - u_{xxx}. \tag{3.2.4}$$

Из теоремы 3 (и даже из её скалярного аналога) следует, что уравнения КдФ, мКдФ и НУШ обладают СМП. Но тогда утверждения теоремы 6 об уравнениях P_1 и P_2 непосредственно вытекают из сформулированных утверждений 1, 2. Например, пусть $w(z)$ — любое голоморфное решение уравнения P_2 на открытом круге $K \subset \mathbb{C}$, а $\varphi(t)$ — однозначная ветвь аналитической функции $t^{-1/3}$ на односвязной области $G \subset \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Тогда функция $u(x,t) := \varphi(t) w(x\varphi(t))$ является голоморфным решением уравнения (3.2.4) на области $D = \{(x,t) \in \mathbb{C}^2 \,|\, t \in G,\, x\varphi(t) \in K\}$. Согласно теореме 3 найдется мероморфная функция $U(x,t)$ на области $\mathbb{C}^1_x \times G \supset D$ такая, что $U = u$ на исходной области D. Тогда для любого фиксированного $t_0 \in G$ функция $W(z) := U(z/\varphi(t_0), t_0)$ мероморфна на всей плоскости $\mathbb{C}$ и совпадает с $w(z)$ на исходном круге K. Таким образом, установлено СМП для P_1 и P_2.

Чтобы доказать СМП для уравнения P_4, это уравнение также надо сначала подготовить. Продифференцируем его по z и сократим на w. Получим новое уравнение

$$w''' = 6w^2 w' + 12zww' + 4w^2 + 4zw + 4(z^2 - a)w'. \tag{P_4'}$$

По любому решению $w(z)$ уравнения P_4' строится решение

$$k(x,t) = t^{-1}\varphi(xt^{-1/2}), \qquad l(x,t) = t^{-1/2}\psi(xt^{-1/2})$$

системы диспергирующих волн на воде

$$\begin{cases} k_t = A(2k_x l + 2kl_x - k_{xx}) \\ l_t = A(l_{xx} + 2ll_x - 2k_x) \end{cases} \tag{3.2.5}$$

где A — надлежащая константа, а функции $\varphi(z)$, $\psi(z)$ представляют собой надлежащие полиномы от функции $w(z)$ и ее производных по z. А именно, подставив указанные выражения для $k(x,t)$, $l(x,t)$ в равенства (3.2.5), получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} -2\varphi - z\varphi' = 2A(2\varphi'\psi + 2\varphi\psi' - \varphi'') \\ -\psi - z\psi' = 2A(\psi'' + 2\psi\psi' - 2\varphi') \end{cases}$$

из второго уравнения которой φ выражается через ψ в виде

$$\varphi(z) = \frac{z\psi(z)}{4A} + \frac{\psi'(z) + \psi^2(z)}{2} + B,$$

где B — произвольная константа. Положим теперь $\psi(z) = w(z) + Cz$, определим функцию $\varphi(z)$ предыдущей формулой и подберем константы A, B, C так, чтобы оставшееся первое уравнение приведенной выше системы обыкновенных дифференциальных уравнений совпадало с P_4'. Вычисление показывает, что это произойдет при $A = -1/4$, $B = -a$, $C = 2$.

Система (3.2.5) с константой $A = 1$ (что легко достигается масштабированием переменной t) можно свести к системе, связанной с НУШ:

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} - 2u^2 v \\ v_t = -v_{xx} + 2uv^2 \end{cases} \tag{3.2.6}$$

преобразованием

$$k = uv, \qquad l = u_x/u. \tag{3.2.7}$$

Это проверяется прямым вычислением. Теперь по каждому локальному голоморфному решению $w(z)$ уравнения P_4' мы строим указанным выше способом локальное голоморфное решение $k(x,t), l(x,t)$ системы (3.2.5), а по нему строим с помощью формул (3.2.7) локальное голоморфное решение $u(x,t), v(x,t)$ системы (3.2.6). Но система (3.2.6) подпадает под условие теоремы 3. Действительно, эта система является частным случаем системы из примера 6, а именно, когда матрица σ имеет вид

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, решения u, v продолжаются до пары глобально мероморфных функций от x. Тогда из формул (3.2.7) вытекает, что функции $k(x,t), l(x,t)$ также продолжаются до глобально мероморфных функций[41] от x. Переходя при произвольном фиксированном t к переменной $z = xt^{-1/2}$ в равенстве $l(x,t) = t^{-1/2}(w(xt^{-1/2}) + Cxt^{-1/2})$, где $C = 2$ согласно сделанному выше выбору констант, получим аналитическое продолжение исходного решения $w(z)$ уравнения P_4' до глобально мероморфной функции $W(z) = t^{1/2} l(zt^{1/2}, t) - 2z$. Теорема 6 полностью доказана.

§ 3. Доказательство теоремы 7

3.1. Иерархия ${}_{2n}P_1$.

В частном случае 2×2-матриц вида

$$a = b = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & -1/2 \end{pmatrix}, \quad q(x,t) = \begin{pmatrix} 0 & u(x,t) \\ v(x,t) & 0 \end{pmatrix}, \quad c_1(t) = c_2(t) = \ldots \equiv 0,$$

матричное уравнение (1.1.21) при любом $m \in \mathbb{N}$ принимает вид системы двух скалярных уравнений

$$\begin{cases} u_t = & U_{m+1}[u,v], \\ v_t = & -V_{m+1}[u,v], \end{cases} \tag{3.3.1}$$

[41] Тем самым установлено, что все локальные голоморфные решения системы диспергирующих волн на воде (3.2.5) глобально мероморфны по пространственной переменной — факт, ранее не отмечавшийся в литературе.

где дифференциальные полиномы $U_j[u,v], V_j[u,v]$ $(j = 0,1,2,\ldots)$ по переменной x от функций u, v находятся по индукции из системы уравнений

$$\begin{cases} U_j & = \partial_x U_{j-1} + 2uW_{j-1}, \\ V_j & = -\partial_x V_{j-1} + 2vW_{j-1}, \\ \partial_x W_j & = uV_j - vU_j \end{cases} \tag{3.3.2}$$

с начальными условиями $U_0 \equiv 0$, $V_0 \equiv 0$, $W_0 \equiv 1/2$ и нормировочным условием $W_j[0,0] = 0$ при всех $j \in \mathbb{N}$. Эта система получается сравнением коэффициентов при z^{-j} в условии $F_x = [az+q, F]$ леммы 1, где

$$F(q,z) = \sum_{j=0}^{\infty} F_j(q) z^{-j} \quad \text{и} \quad F_j(q) = \begin{pmatrix} W_j[u,v] & U_j[u,v] \\ V_j[u,v] & -W_j[u,v] \end{pmatrix} \text{ при } q = \begin{pmatrix} 0 & u \\ v & 0 \end{pmatrix}.$$

Из нее вытекает по индукции, что $U_j[0,0] = V_j[0,0] = 0$ для всех $j \in \mathbb{N}$. Хотя совсем не очевидно, что при каждом j из третьего уравнения системы (3.3.2) можно найти W_j как дифференциальный полином от u, v, но это все же верно в силу следующего свойства[42] всех решений системы (3.3.2) как функций от x:

$$W_j = -\sum_{k=2}^{j-2} W_k W_{j-k} - \sum_{k=1}^{j-1} U_k V_{j-k}, \qquad j \in \mathbb{N}, \tag{3.3.3}$$

где суммы по пустому множеству индексов считаются по определению равными нулю. Заменяя третье уравнение системы (3.3.2) на уравнение (3.3.3), мы получим эквивалентную ей систему, которая уже очевидным образом задает U_j, V_j, W_j как дифференциальные полиномы от u, v. Объединяя этот факт с установленным в следующей лемме равенством $L_n[w] = -\frac{1}{2} V_{2n+1}[-w, 1]$, получаем, что заданные рекуррентным соотношением (L) (см. введение) выражения $L_n[w]$ являются дифференциальными полиномами от функции w по переменной z.

[42] Выражающего «закон сохранения» $\operatorname{tr}(F^2) \equiv \text{const}$ для матричного уравнения в форме Лакса $F_x = [az+q, F]$ с учетом наших обозначений и равенств $U_0 = V_0 = W_1 = 0$ и $W_0 = 1/2$.

Лемма 8. *При всех целых $k \geqslant 0$ выполнены равенства дифференциальных полиномов*[43]

$$V_{2k}[u,1] \equiv 0, \qquad V_{2k+1}[u,1] = -2L_k[-u], \qquad U_{2k}[u,1] = \partial_x L_k[-u].$$

Доказательство. Подставим $v \equiv 1$ в систему (3.3.2), рассматривая в ней u, U_j, V_j, W_j как функции только от x (т.е. зафиксируем t), и определим следующие формальные степенные ряды от новой переменной y;

$$U(x,y) := \sum_{k=0}^{\infty} U_k(x)\frac{y^k}{k!}, \quad V(x,y) := \sum_{k=0}^{\infty} V_k(x)\frac{y^k}{k!}, \quad W(x,y) := \sum_{k=0}^{\infty} W_k(x)\frac{y^k}{k!}.$$

В терминах этих рядов система (3.3.2) с $v \equiv 1$ принимает вид

$$\begin{cases} U_y = U_x + 2uW, \\ V_y = -V_x + 2W, \\ W_x = uV - U. \end{cases}$$

Из ее второго уравнения W выражается через V в виде $W = \frac{1}{2}(V_x + V_y)$, а тогда из третьего уравнения U выражается через V в виде $U = uV - \frac{1}{2}(V_{xx} + V_{xy})$. Подставляя эти выражения для U и W в первое уравнение системы, получим эквивалентное ей уравнение на V:

$$-\frac{1}{2}V_{xyy} = u'V + 2uV_x - \frac{1}{2}V_{xxx},$$

которое в терминах коэффициентов формального ряда принимает вид следующей системы равенств дифференциальных полиномов от u:

$$\partial_x V_{l+2}[u,1] = \partial_x^3 V_l[u,1] - 4u\partial_x V_l[u,1] - 2u_1 V_l[u,1], \qquad l = 0,1,2,\dots. \quad (3.3.4)$$

Заметим, что эти равенства совпадают с рекуррентными соотношениями (L) при замене[44] w на $-u$. При четных $l = 2k$, учитывая, что $V_0[u,1] \equiv 0$ и $V_j[0,1] \equiv$

[43] Здесь u считается ростком функции от x (или от x,t при фиксированном t), а операторы Льенара L_k рассматриваются как действующие по переменной x (а не по z, как во введении).

[44] Точнее, при замене z на x и $w(z)$ на $-u(x)$.

0 для всех $j \in \mathbb{N}$, получаем отсюда по индукции равенство $V_{2k}[u,1] \equiv 0$, $k \in \mathbb{N}$. При нечетных $l = 2k+1$, учитывая, что $V_1[u,1] \equiv 1$ и $L_0[-u] \equiv -\frac{1}{2}$, мы аналогично получаем равенство $V_{2k+1}[u,1] = -2L_k[-u]$. Наконец, из выражения $U(x,y)$ через $V(x,y)$ (а именно, $U = uV - \frac{1}{2}(V_{xx} + V_{xy})$), которое в терминах коэффициентов степенных рядов означает, что $U_l = uV_l - \frac{1}{2}(V_l' + V_{l+1}')$, мы получаем, что $U_{2k}[u,1] = -\frac{1}{2}\partial_x(-2L_k[-u])$ при всех $k \in \mathbb{N}$. Так как производная любого монома $u^{l_0}u_1^{l_1}\dots u_m^{l_m}$ является полиномом *той же степени* от переменных $u, u_1, \dots, u_{m+1}$, то полученную формулу $U_{2k}[u,1] = \partial_x(L_k[-u])$ можно понимать и как равенство дифференциальных полиномов $U_{2k}[u,1] = P_k[-u]$, где $P_k[u] := \partial_x L_k[u]$. $\square$

Из леммы 8 вытекает, что первое и второе уравнения системы (3.3.1) при нечетном $m = 2n+1$ и при $v \equiv 1$ принимают вид $u_t = \partial_x L_{n+1}[-u]$ и $0 = 0$ соответственно, так что система становится эквивалентна одному уравнению $u_t = P_{n+1}[-u]$ на неизвестную функцию $u(x,t)$, где $P_{n+1}[u] := \partial_x L_{n+1}[u]$. Это уравнение представляет собой чистый[45] $(2n+1)$-ый поток иерархии КдФ. В случае произвольных диагональных голоморфных функций $c_1(t), c_2(t), \dots$ на круге B_2 система (1.1.21) с $m = 2n+1$ и $v \equiv 1$ эквивалентна уравнению смешанного $(2n+1)$-ого потока

$$u_t = P_{n+1}[-u] + \sum_{j=1}^{n} \gamma_j(t) P_{n+1-j}[-u], \tag{3.3.5}$$

где через $\gamma_j(t) := (c_j(t))_{11} - (c_j(t))_{22}$ обозначена разность диагональных элементов матрицы $c_j(t)$. По предложению 3 уравнение (3.3.5) с *любыми* голоморфными функциями $\gamma_j(t)$ на круге B_2 обладает СМП по пространственной переменной x. Покажем, что *для любых констант* $a_1, a_2, b_1, b_2, \dots \in \mathbb{C}$ *найдутся такие полиномы* $\gamma_1(t), \gamma_2(t), \dots$, *что каждое голоморфное на произвольной*

[45] Говорят, что уравнение (1.1.21) представляет чистый поток, если все матрицы c_i для $i = 1, \dots, m$, необходимые для построения F_{m+1}, равны нулю.

области $D \subset \mathbb{C}^1_z$ *решение* $w(z)$ *продифференцированного* n*-го уравнения иерархии* ${}_{2n}P_1$

$$P_{n+1}[w] + \sum_{j=1}^{n} b_j P_{n+1-j}[w] = a_1, \qquad ({}_{2n}P_1')$$

задает по формуле

$$-u(x,-t) = w(x) + a_1 t \tag{3.3.6}$$

голоморфное решение $u(x,t)$ *уравнения* (3.3.5) *на области* $D \times \mathbb{C}^1_t \subset \mathbb{C}^2_{xt}$. Чтобы установить этот факт, потребуется следующая лемма.

Лемма 9. *Существуют полиномы* $\varphi_{nk}(A)$, $0 \leqslant k \leqslant n-1$, *такие, что для всех* $A \in \mathbb{C}$ *и* $n \in \mathbb{N}$ *выполнено равенство дифференциальных полиномов*

$$L_n[w+A] = L_n[w] + \sum_{k=1}^{n-1} \varphi_{nk}(A) L_k[w] + \varphi_{n0}(A). \tag{3.3.7}$$

Доказательство. Индукцией по n. При $n = 1$ формула (3.3.7) верна с $\varphi_{10}(A) = A$, т.к. $L_1[w] = w$. Для перехода от n к $n{+}1$ заметим, что $\partial(\Phi[w{+}A]) = (\partial\Phi)[w+A]$ для любого дифференциального полинома $\Phi[w]$. Это позволяет записать равенство (L) для w и $w+A$ и вычесть одно из другого:

$$\partial(L_{n+1}[w+A] - L_{n+1}[w]) = (\partial^3 + 4w\partial + 2w_1)(L_n[w+A] - L_n[w]) + 4A\partial L_n[w+A].$$

Заменяя слагаемое $L_n[w{+}A]$ в правой части его выражением (3.3.7) и пользуясь равенством (L) в обратном направлении, запишем правую часть в виде

$$\partial\left(\sum_{k=1}^{n} \varphi_{n+1,k}(A) L_k[w]\right),$$

где полиномы $\varphi_{n+1,k}(A)$ определяется как $\varphi_{n,k-1}(A) + 4A\varphi_{nk}(A)$ при $2 \leqslant k \leqslant n-1$, а также введены $\varphi_{n+1,1}(A) := 2\varphi_{n0}(A)$ и $\varphi_{n+1,n}(A) := \varphi_{n,n-1}(A) + 4A$. Полученная формула означает, что дифференциальный полином

$$\Psi[w] := L_{n+1}[w+A] - L_{n+1}[w] - \sum_{k=1}^{n} \varphi_{n+1,k}(A) L_k[w]$$

удовлетворяет равенству $\partial\Psi[w] \equiv 0$, т.е. является константой, не зависящей от w. Подставляя $w \equiv 0$, видим, что эта константа равна $L_{n+1}[A]$. Ясно, что

выражение $L_{n+1}[A]$ является полиномом от A. Обозначая этот полином через $\varphi_{n+1.0}(A)$, получаем равенство (3.3.7) с заменой n на $n+1$. $\square$

Дифференцирование равенства (3.3.7) дает равенство

$$P_n[w+A] = \sum_{k=1}^{n} \varphi_{nk}(A) P_k[w], \quad \text{где} \quad P_k[w] := \partial L_k[w], \quad \varphi_{nn}(A) :\equiv 1. \quad (3.3.8)$$

Подставляя выражение (3.3.6) в уравнение (3.3.5), которое в терминах функции $\widetilde{u}(x,t) := -u(x,-t)$ принимает вид

$$\widetilde{u}_t = P_{n+1}[\widetilde{u}] + \sum_{j=1}^{n} \gamma_j(t) P_{n+1-j}[\widetilde{u}],$$

получим при каждом фиксированном t обыкновенное дифференциальное уравнение относительно w по переменной x. Пользуясь (3.3.8), видим, что это уравнение совпадает с $({}_{2n}P_1')$ в том и только том случае, когда выполнена следующая система n линейных уравнений на n неизвестных $\gamma_1(t), \ldots, \gamma_n(t)$:

$$\varphi_{n+1,k}(a_1 t) + \sum_{j=1}^{n+1-k} \gamma_j(t) \varphi_{n+1-j,k}(a_1 t) = b_k, \qquad k = 1, 2, \ldots, n.$$

Поскольку $\varphi_{kk}(a_1 t) \equiv 1$ при всех k, эта система имеет треугольный вид с 1 на диагонали и из нее все $\gamma_j(t)$ последовательно и однозначно находятся в виде полиномов от $\varphi_{mk}(a_1 t)$ (а именно, $\gamma_1(t) = b_n - \varphi_{n+1,n}(a_1 t)$ из уравнения с номером $k = n$, затем $\gamma_2(t) = b_{n-1} - \varphi_{n+1,n-1}(a_1 t) - \gamma_1(t)\varphi_{n,n-1}(a_1 t)$ из уравнения с номером $k = n-1$ и т.д.).

Тем самым доказано утверждение, сделанное перед формулировкой леммы 9. Вместе с вытекающим из предложения 3 свойством глобального мероморфного продолжения всех решений уравнения (3.3.5) по переменной x это влечет СМП для уравнения $({}_{2n}P_1')$ а значит и для всех уравнений $({}_{2n}P_1)$ иерархии первого уравнения Пенлеве.

Замечание 14. Исходя из решений $w(z)$ уравнения $({}_{2n}P_1')$, можно построить более общий класс решений $u(x,t)$ солитонного уравнения (3.3.5), заменив (3.3.6) на формулу $-u(x,-t) = w(x+B(t)) + a_1 t$ для произвольной голоморфной

(на какой-либо области) функции $B(t)$. Все приведенные выше рассуждения сохраняют силу и в этом более общем случае, только правая часть уравнения с номером $k=1$ в последней системе поменяется с b_1 на $b_1+B'(t)$. Среди таких «решений типа ускоренных волн» находится и применявшееся в §2 решение $w(x-6t^2)+t$ уравнения Кортевега-де Фриза (3.2.2).

3.2. Иерархия $_{2n}P_2$. Решения $w(z)$ уравнений, входящих в данную иерархию, порождают «решения типа масштабирования» $v(x,t)=\varphi(t)w(x\varphi(t))$ солитонных уравнений из иерархии модифицированного уравнения Кортевега-де Фриза, которую сейчас и опишем.

Лемма 10. *Для всех $n\in\mathbb{N}$ имеем равенства дифференциальных полиномов*

$$\begin{aligned} U_{2n-1}[v,v]&=(\partial_x+2v)L_{n-1}[v_x-v^2]=V_{2n-1}[v,v],\\ U_{2n}[v,v]&=\partial_x(\partial_x+2v)L_{n-1}[v_x-v^2]=-V_{2n}[v,v], \end{aligned} \tag{3.3.9}$$
$$W_{2n-1}[v,v]\equiv 0,\quad W_{2n}[v,v]=L_n[v_x-v^2]-\partial_x(\partial_x+2v)L_{n-1}[v_x-v^2].$$

Доказательство. Прямым вычислением проверяем равенство дифференциальных операторов $\partial_x^3+4(v_x-v^2)\partial_x+(v_x-v^2)_x=(\partial_x-2v)\partial_x(\partial_x+2v)$. Применяя его к функции $L_n[v_x-v^2]$ и пользуясь равенством (L), получаем факторизационное тождество

$$\partial_x L_{n+1}[v_x-v^2]=(\partial_x-2v)\partial_x(\partial_x+2v)L_n[v_x-v^2].$$

С его помощью непосредственно проверяется, что заданные формулами (3.3.9) дифференциальные полиномы U_j,V_j,W_j $(j\in\mathbb{N})$, дополненные начальными условиями $U_0=V_0=0,W_0=1/2$, удовлетворяют всем уравнениям системы (3.3.2) при $u=v$ и нормировочным условиям $W_j[0,0]=0$ $(j\in\mathbb{N})$. Тогда из единственности решения этой системы в классе дифференциальных полиномов от v по x получаем утверждение леммы. □

Из леммы 10 вытекает, что оба уравнения системы (3.3.1) с нечетным номером $m=2n+1$ $(n\in\mathbb{N})$ и с дополнительным условием $u\equiv v$ принимают

одинаковый вид $v_t = \partial_x Q_n[v]$, где через $Q_n[v] := (\partial_x + 2v)L_n[v_x - v^2]$ обозначены дифференциальные полиномы, входящие в определение иерархии $({}_{2n}P_2)$ (см. введение), но действующие в данном случае по переменной x вместо z. Полученное уравнение $v_t = \partial_x Q_n[v]$ представляет собой чистый $(2n+1)$-ый поток иерархии мКдФ. В случае произвольных диагональных голоморфных функций $c_1(t), c_2(t), \ldots$ на круге B_2 система (1.1.21) с $m = 2n+1$ и $u \equiv v$ эквивалентна уравнению смешанного $(2n+1)$-ого потока на неизвестную функцию $v(x,t)$:

$$v_t = \partial_x Q_n[v] + \sum_{j=1}^{n-1} \gamma_j(t) \partial_x Q_{n-j}[v], \tag{3.3.10}$$

где $\gamma_j(t)$ означает, как и выше, разность диагональных элементов матрицы $c_j(t)$. По предложению 3 уравнение (3.3.10) с *любыми* голоморфными функциями $\gamma_j(t)$ на круге B_2 обладает СМП по пространственной переменной x. Покажем, что *для любых констант* $b_1, b_2, \ldots \in \mathbb{C}$ *найдутся голоморфные функции* $\varphi(t), \gamma_1(t), \gamma_2(t), \ldots$ *на круге* B_2 *такие, что каждое голоморфное на произвольной области* $D \subset \mathbb{C}^1_z$ *решение* $w(z)$ *продифференцированного* n*-го уравнения иерархии* ${}_{2n}P_2$

$$\partial Q_n[w] + \sum_{j=1}^{n-1} b_j \partial Q_{n-j}[w] = zw' + w, \tag{${}_{2n}P_2'$}$$

задает по формуле

$$v(x,t) = \varphi(t) w(x\varphi(t)) \tag{3.3.11}$$

голоморфное решение $v(x,t)$ *уравнения* (3.3.10) *на некоторой области в* $\mathbb{C}^2_{xt}$.

Действительно, из упомянутого во введении свойства однородности левых частей уравнений $({}_{2n}P_2)$ вытекает, что $\partial_x Q_n[Aw(Ax)] = A^{2n+2} \partial Q_n[w](Ax)$ для всех $n \in \mathbb{N}$ и $A \in \mathbb{C}$. Поэтому подстановка (3.3.11) в (3.3.10) приводит к уравнению

$$\varphi'(t) \cdot (w + zw') = \varphi(t)^{2n+2} \partial Q_n[w] + \sum_{j=1}^{n-1} \gamma_j(t) \varphi(t)^{2(n-j)+2} \partial Q_{n-j}[w], \tag{3.3.12}$$

где аргументом функций w и w' является $z = x\varphi(t)$. Выберем $\gamma_j(t) := b_j \varphi(t)^{2j}$, а в качестве функции $\varphi(t)$ возьмем любое голоморфное решение дифференциального уравнения $\varphi' = \varphi^{2n+2}$ в круге B_2, т.е. любую однозначную ветвь

аналитической функции $\varphi(t) = \{(2n+1)(t-t_0)\}^{-1/(2n+1)}$, $t_0 \in \mathbb{C}^1 \setminus B_2$, на указанном круге. Тогда после сокращения обеих частей на $\varphi' = \varphi^{2n+2}$ уравнение (3.3.12) принимает вид обыкновенного дифференциального уравнения $({}_{2n}P_2')$ на функцию w от переменной z, что и требовалось.

Применяя только что доказанное утверждение вместе с вытекающим из предложения 3 свойством глобального мероморфного продолжения всех решений уравнения (3.3.10) по переменной x и рассуждая как в § 2 (где фактически рассмотрен случай $n = 1$ настоящей конструкции), получаем СМП для уравнения $({}_{2n}P_2')$, а значит, и для всех уравнений $({}_{2n}P_2)$ иерархии второго уравнения Пенлеве. Теорема 7 полностью доказана.

§ 4. Некоммутативные обобщения уравнений Пенлеве

4.1. Матричные обобщения. Для уравнений Пенлеве существуют различные матричные обобщения. Рассмотрим для начала наиболее очевидный матричный аналог уравнения P_1, приведенный в [31]:

$$w'' = 6w^2 + zI, \tag{3.4.1}$$

где $w(z)$ — функция со значениями в $\mathrm{gl}(n, \mathbb{C})$.

Предложение 6. *Уравнение* (3.4.1) *обладает СМП.*

Доказательство. Пусть $w(z)$ — решение (3.4.1), голоморфное в открытом круге K. Прямой подстановкой убеждаемся, что функция[46]

$$u(x,t) := w(x - 6t^2) + tI, \text{ где } (x,t) \in U := \{(x,t) : x - 6t^2 \in K\} \tag{3.4.2}$$

является решением матричного КдФ (1.3.8), которое обладает СМП по теореме 3.

Возьмем в качестве точки (x_0, t_0) из теоремы 3 любую точку из U, которую мы также обозначим (x_0, t_0). В качестве бидиска из условия (B) теоремы

[46] Отметим, что замена полностью аналогична замене (3.2.1) из скалярного случая.

возьмем $D := \{(x,t) : |x - x_0| < \delta, |t - t_0| < \delta\}$, где δ выбрано так, чтобы $D \subset U$. Тогда функция u аналитически продолжается до мероморфной в полосе $S = \{(x,t) : |t - t_0| < \delta\}$ функции $\tilde{u}$. В частности, при фиксированном $t = t_0$ функция $\tilde{u}(x, t_0)$ является глобально мероморфной функцией. Тогда из соотношения (3.4.2) мы видим, что w также продолжается до глобально мероморфной функции. □

Примеры матричных аналогов P_2 мы возьмем из работы [34].

Рассмотрим уравнение, являющееся матричным аналогом продифференцированного P_2:

$$y''' = 3y^2y' + 3y'y^2 + y + zy' + [d, y], \tag{3.4.3}$$

где $d \in \mathrm{gl}(n, \mathbb{C})$ — постоянная матрица, а $y(z)$ — искомая функция со значениями в $\mathrm{gl}(n, \mathbb{C})$.

Предложение 7. *Уравнение* (3.4.3) *обладает СМП.*

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$u(x,t) := \varepsilon\tau e^{\ln(\tau)d} y(z) e^{-\ln(\tau)d},$$

где

$$\tau = t^{-1/3}, \quad z = \varepsilon\tau x, \quad 3\varepsilon^3 = -1,$$

а $y(z)$ — решение (3.4.3).

Прямой подстановкой несложно убедиться, что $u(x,t)$ удовлетворяет мКдФ1 (1.1.39), которое обладает СМП по теореме 3. Мы также видим, что указанная замена аналогична замене (3.2.3) в скалярном случае. Следовательно рассуждениями, приведёнными для скалярного случая в доказательстве теоремы 6 (с дополнительным фиксированием однозначной ветви $\ln(\varphi(t))$, где $\varphi(t)$ — однозначная ветвь $t^{-1/3}$), получаем, что уравнение (3.4.3) также обладает СМП. □

Заметим, что уравнение (3.4.3) не является полной производной в отличие от его скалярного аналога. Тем не менее, решения следующего матричного

аналога P_2:

$$y'' = [y, y'] + 2y^3 + zy - d \tag{3.4.4}$$

удовлетворяют уравнению (3.4.3). Этот факт вместе с предложением 7 позволяют сделать

Следствие 1. (3.4.4) *обладает СМП.*

Рассмотрим еще один аналог продифференцированного P_2:

$$y''' = 3[y'', y] + 6yy'y + y + zy' + [d, y], \qquad d \in \mathrm{gl}(n, \mathbb{C}). \tag{3.4.5}$$

Предложение 8. *Уравнение* (3.4.5) *обладает СМП.*

Доказательство. Доказательство повторяет доказательство предложения 7, поскольку использует идентичную замену. А именно, рассмотрим функцию:

$$u(x,t) = \varepsilon\tau e^{\ln(\tau)d} y(z) e^{-\ln(\tau)d},$$

где

$$\tau = t^{-1/3}, \quad z = \varepsilon\tau x, \quad 3\varepsilon^3 = -1,$$

где $y(z)$ — решение (3.4.5).

Легко проверяется, что функция $u(x,t)$ удовлетворяет уравнению мКдФ2 (2.1.11), которое обладает СМП по теореме 5. Тогда рассуждениями, аналогичными скалярному случаю, получаем СМП для (3.4.5). □

Следствие 2. *Так как уравнению* (3.4.5) *удовлетворяют решения следующего матричного обобщения* P_2*:*

$$y'' = 2[y, y'] + 2y^3 + zy - d, \tag{3.4.6}$$

то (3.4.6) *обладает СМП.*

Итак, мы доказали следующий результат.

Теорема 8. *Следующие уравнения обладают СМП.*

(A) Матричный аналог P_1:

$$w'' = 6w^2 + zI.$$

(B) Два матричных аналога P_2:

$$y'' = [y, y'] + 2y^3 + zy - d, \qquad d \in \mathrm{gl}(n, \mathbb{C}),$$

$$y'' = 2[y, y'] + 2y^3 + zy - d, \qquad d \in \mathrm{gl}(n, \mathbb{C}).$$

(C) Два матричных аналога продифференцированного P_2:

$$y''' = 3y^2y' + 3y'y^2 + y + zy' + [d, y], \qquad d \in \mathrm{gl}(n, \mathbb{C}),$$

$$y''' = 3[y'', y] + 6yy'y + y + zy' + [d, y], \qquad d \in \mathrm{gl}(n, \mathbb{C}).$$

4.2. Векторные обобщения. В качестве примера применения теоремы 3 к векторным уравнениям рассмотрим два векторных аналога мКдФ, взятых из [39]:

$$u_t = u_{xxx} - 3(u, u)u_x - 3(u, u_x)u, \tag{3.4.7}$$

$$u_t = u_{xxx} - 3(u, u)u_x, \tag{3.4.8}$$

где значения u принадлежат $\mathbb{C}^n$, и $(u, v) := u_1v_1 + \ldots + u_nv_n$ — билинейная форма, равная сумме произведений координат.

Первое уравнение является третьим чистым потоком ($m = 3$, $b = \nu^2 a$, $c_1 = c_2 = c_3 = 0$) уравнения (1.1.21) для[47]

$$q = \begin{pmatrix} 0 & u^T \\ u & 0_n \end{pmatrix}, \qquad a = \begin{pmatrix} 1-\nu & 0 \\ 0 & I_n \end{pmatrix}, \quad \nu \neq 0.$$

[47] Здесь 0_n, I_n — нулевая и единичная матрицы размера $n \times n$, матрицы q и a являются блочными, размера $(1, n) \times (1, n)$, а координаты u записываются в столбец.

Второе уравнение является третьим чистым потоком ($m = 3$, $b = a$, $c_1 = c_2 = c_3 = 0$) уравнения (1.1.21) для[48]

$$q = \begin{pmatrix} 0 & u^T & 0 \\ u & 0_n & u \\ 0 & u^T & 0 \end{pmatrix}, \qquad a = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0_n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, для уравнений (3.4.7) и (3.4.8) справедлива теорема 3, а значит, они обладают СМП.

Приведенные векторные аналоги уравнений мКдФ связаны с соответствующими векторными аналогами продифференцированного P_2, что позволяет нам сформулировать следующую теорему.

Теорема 9. *Следующие векторные аналоги продифференцированного P_2 обладают СМП:*[49]

$$y''' = 3(y,y)y' + 3(y,y')y + zy' + y + Ay, \qquad A = -A^T, \tag{3.4.9}$$

$$y''' = 3(y,y)y' + zy' + y + Ay, \qquad A = -A^T. \tag{3.4.10}$$

Доказательство. Прямой проверкой можно убедиться, что замена

$$u(x,t) = \varepsilon\tau e^{\ln(\tau)A} y(z),$$

где

$$\tau = t^{-1/3}, \quad z = \varepsilon\tau x, \quad 3\varepsilon^3 = -1,$$

переводит решения (3.4.9) в решения (3.4.7) и решения (3.4.10) в решения (3.4.8). Дальнейшие рассуждения аналогичны предыдущему пункту в силу почти полной идентичности замен. □

[48] Здесь 0_n, I_n — нулевая и единичная матрицы размера $n \times n$, матрицы q и a являются блочными, размера $(1,n,1) \times (1,n,1)$, а координаты u записываются в столбец.

[49] Здесь A — произвольная кососимметричная матрица. В случае, когда y — скаляр, матрица A является кососимметрической матрицей размера 1×1, т.е. нулём.

Список литературы

[1] S. von Kowalevsky, Zur Theorie der partiellen Differentialgleichungen // J. reine angew. Math., **80** (1875), 1–32.

[2] A.-L. Cauchy, Mémoire sur les systèmes d'equations aux dérivées partielles d'ordre quelconque et sur leur réduction à systèmes d'equations linéaires du premier ordre // C. R. Acad. Sci. Paris **40** (1842), 131–138.

[3] А. В. Домрин, Голоморфные решения солитонных уравнений // Тр. ММО, **82**:2 (2021), 227–312.

[4] A. Degasperis, S. Lombardo, Multicomponent integrable wave equations: I. Darboux-dressing transformation // J. Phys. A: Math. Theor., **40** (2007), 961–977.

[5] F. Calogero, A. Degasperis, New integrable equations of nonlinear Schrodinger type Stud // Appl. Math., **113** (2004), 91–137.

[6] A. Degasperis, M. Conforti, F. Baronio, S. Wabnitz, Effects of nonlinear wave coupling: Accelerated solitons // The European Physical Journal Special Topics, **147** (2007), 233–252.

[7] М. А. Шумкин, О решениях матричных солитонных уравнений // ТМФ, **215**:1 (2023), 3–15.

[8] М. А. Шумкин, Критерий локальности матричных солитонных уравнений // Тр. ММО, **84**: 2 (2023), 231–242.

[9] А. В. Домрин, Б. И. Сулейманов, М. А. Шумкин, О глобальной мероморфности решений уравнений Пенлеве и их иерархий // Труды МИАН, **311** (2020), 106–122.

[10] A. V. Domrin, M. A. Shumkin, B. I. Suleimanov, Meromorphy of solutions for a wide class of ordinary differential equations of Painlevé type // J. Math. Phys., **63** (2022), 023501.

[11] М. А. Шумкин, Критерий разрешимости задачи Коши для матричных солитонных уравнений // Матем. заметки, **119**:1 (2026), 126 –138.

[12] V. E. Adler, V. V. Sokolov, Non-Abelian Evolution Systems with Conservation Laws // Mathematical physics analysis and geometry, **24**, 7 (2021).

[13] В.Е. Захаров, С. В. Манаков, С. П. Новиков, Л. П. Питаевский, Теория солитонов. Метод обратной задачи рассеяния, Москва, Наука, 1980.

[14] Л. А. Тахтаджян, Л. Д. Фаддеев, Гамильтонов подход в теорию солитонов, Москва, Наука, 1986.

[15] В. И. Наянов, Многополевые солитоны, Москва, Физматлит/Наука, 2006.

[16] В. Г. Дринфельд, В. В. Соколов, Алгебры Ли и уравнения типа Кортевега–де Фриза // Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. мат. Нов. достиж., **24** (1984), 81–180.

[17] И. З. Голубчик и В. В. Соколов, Интегрируемые уравнения на $\mathbb{Z}$-градуированных алгебрах Ли // ТМФ, **112**:2 (1997), 375–383.

[18] С. В. Манаков, К теории двумерной стационарной самофокусировки электромагнитных волн // ЖЭТФ, **65** (1973), 505–516.

[19] CL. Terng, K. Uhlenbeck, The n $\times$ n KdV hierarchy // J. Fixed Point Theory Appl., **10** (2021), 37–61.

[20] А. Ф. Леонтьев, Целые функции. Ряды экспонент, Москва, Наука, 1983.

[21] В. В. Голубев, Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений, Москва–Ленинград, ГИТТЛ, 1950.

[22] I. Laine, Complex differential equations // Handbook of Diff. Equations: ODE, vol. 4, Amsterdam-Oxford, North Holland, 2008, 269–364.

[23] Э. Л. Айнс, Обыкновенные дифференциальные уравнения, Харьков, ОНТИ, 1939.

[24] V. I. Gromak, I. Laine, S. Shimomura, Painlevé differential equations in the complex plane, Berlin, de Gruyter, 2002.

[25] А. В. Китаев, Точки поворота линейных систем и двойные асимптотики трансцендентов Пенлеве // Записки науч. сем. ЛОМИ, **187** (1991), 53–74.

[26] N. A. Kudryashov, The first and second Painlevé equations of higher order and some relations between them // Phys. Lett. A, **224** (1997), 353–360.

[27] H. Airault, Rational solutions of Painlevé equations // Stud. Appl. Math., **61** (1979), 31–53.

[28] K. Kaneko, Y. Ohyama, Meromorphic Painlevé transcendents at a fixed singularity // Math. Nachr., **286** (2013), 861–875.

[29] P. Lax, Almost periodic solutions of the KdV equation // SIAM Review, **18** (1976), 351–375.

[30] А. Б. Шабат, Операторы преобразования и нелинейные уравнения, Дисс. .... доктора физ.-матем. наук, Москва, МГУ, 1975.

[31] S. P. Balandin, V. V. Sokolov, On the Painlevé test for non-Abelian equations // Physics Letters A, **246** (1998), 267-272.

[32] P. Olver, V. Sokolov, Integrable Evolution Equations on Associative Algebra // Comm Math Phys, **193** (1998), 245-268.

[33] P. Olver, J.-P. Wang, Classification of Integrable One-Component Systems on Associative Algebras // Proceedings of the London Mathematical Society, **81**:3 (2000), 566–586.

[34] В. Э. Адлер, В. В. Соколов, О матричных уравнениях Пенлеве PII // ТМФ, **207**:2 (2021), 188–201.

[35] В. Е. Захаров, А. Б. Шабат, Интегрирование нелинейных уравнений математической физики методом обратной задачи теории рассеяния. II // Функц. анализ и его прил., **13**:3 (1979), 13–22.

[36] В. В. Соколов, Алгебраические структуры в теории интегрируемых систем, Москва–Ижевск, Институт компьютерных исследований, 2021.

[37] Э. Б. Винберг, А. Л. Онищик, Семинар по группам Ли и алгебраическим группам, Москва, Наука, 1988.

[38] Г. С. Салехов, О задаче Коши–Ковалевской для одного класса линейных уравнений с частными производными в области сколь угодно гладких функций // Изв. Акад. Наук СССР Сер. матем. **14**:3 (1950), 355–366.

[39] V.E.Adler, V.V.Sokolov, Vector systems of Painlevé type // J. Geom. Phys. **227** (2026), 105860.

[40] W. Rothstein, Ein neuer Beweis des Hartogsschen Hauptsatzes und seine Ausdehnung auf meromorphe Funktionen // Math. Zeitschrift, **53**:1 (1950), 84–95.