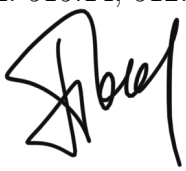
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова

На правах рукописи

УДК: 515.14, 512.66



Попеленский Федор Юрьевич

Алгебры Хопфа и их когомологии в задачах алгебраической топологии и гомологической алгебры

1.1.3 — Геометрия и топология

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
доктора физико–математических наук

Москва — 2026

Работа выполнена на механико–математическом факультете ФГБОУ ВО «Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова»

Официальные оппоненты:

Лычагин Валентин Васильевич,
доктор физико-математических наук, профессор,
главный научный сотрудник Лаборатории 06
«Управления сплошными средами им. А. Г. Бутковского»
Федерального государственного бюджетного учреждения
науки Институт проблем управления
им. В. А. Трапезникова Российской академии наук
(специальность — 01.01.02).

Мусин Олег Рустумович,
доктор физико-математических наук, профессор,
профессор кафедры дискретной геометрии
Физтех-школы прикладной математики и информатики
Федерального государственного автономного
образовательного учреждения высшего образования
«Московский физико-технический институт
(национальный исследовательский университет)»
(специальность — 01.01.04).

Панин Иван Александрович,
доктор физико-математических наук, академик РАН,
главный научный сотрудник лаборатории алгебры
и теории чисел Федерального государственного
бюджетного учреждения науки Санкт-Петербургское
отделение Математического института
им. В. А. Стеклова Российской академии наук
(специальность — 01.01.06).

Ведущая организация:

Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Санкт-Петербургский государственный университет»

Защита диссертации состоится 18 июня 2026 г. на заседании диссертационного совета 24.1.167.03 при Математическом институте им. В. А. Стеклова Российской академии наук по адресу:
119991, г. Москва, ул. Губкина, д. 8, 9-й этаж, конференц-зал.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Математического института им. В. А. Стеклова и на сайте `https://mi-ras.ru/dis/ref26/popelenskii/dis.pdf`.

Автореферат разослан “ 17 ” марта 2026 г.

Учёный секретарь
диссертационного совета 24.1.167.03,
д.ф.-м.н., профессор РАН Д. В. Осипов

Общая характеристика работы

Актуальность темы

Алгебры Хопфа — важный класс алгебр, который к настоящему моменту нашел приложения в совершенно разных областях математики и математической физики.

Основные объекты в цикле исследований, результаты которого представлены в данной диссертации — следующие алгебры Хопфа и их когомологии: алгебры стабильных операций в $\mathbb{Z}/p$-когомологиях топологических пространств — алгебры Стинрода $\mathcal{A}_p$, $p \geqslant 2$, их факторы $\overline{\mathcal{A}}_p$ по идеалу, порожденному элементом Бокштейна β, алгебра Ландвебера—Новикова S операций в комплексных кобордизмах, универсальная обертывающая UL_1 алгебры Ли L_1 формальных векторных полей на прямой, в начале координат обращающихся в 0 вместе со своей первой производной, универсальные обертывающие известных конечномерных факторов алгебры Ли L_1, универсальные обертывающие алгебр Гейзенберга—Ли. Кроме того, обсуждаются классы представлений алгебр операций на градуированных модулях в задачах алгебраической топологии. Получены приложения в общей теории алгебр Хопфа.

Понятие алгебры Хопфа восходит к классической работе Х. Хопфа[1], посвященной фундаментальному вопросу: когда на связном ориентированном многообразии M существует операция (умножение) $\mu : M \times M \to M$, нетривиальная в том смысле, что для произвольного фиксированного $x \in M$ отображения M в себя, заданные формулами $y \mapsto \mu(y, x)$ и $y \mapsto \mu(x, y)$, имеют ненулевые степени.

Идеи Хопфа нашли развитие в важных работах по топологии Ж. Лере[2], , А. Бореля[3], Ж.-П. Серра[4], Э. Гальперна[5] и по алгебре Ж. Дьедонне[6] и П. Картье[7] — этот список далеко не полон.

Первыми примерами алгебр Хопфа были когомологии H-пространств (в первую очередь, пространств петель и групп Ли), универсальные обертывающие алгебр Ли, ограниченные обертывающие алгебры p-алгебр Ли, алгебры разделенных степеней, алгебры регулярных функций на алгебраических группах, групповые алгебры дискретных групп. Во всех этих случаях умножение или коумножение (ко)коммутативно. При достаточно слабых ограничениях на алгебру в такой ситуации антиподальное

[1] *Hopf H.* Über die Topologie der Gruppen-Mannigfaltigkeiten und Ihre Verallgemeinerungen // Annals of Mathematics. 1941. Т. 42, № 1. С. 22—52.

[2] *Leray J.* Sur la forme des espaces topologiques et sur les points fixes des représentations // J. Math. Pures Appl. 9e série. 1945. Т. 24. С. 95—167.

[3] *Borel A.* Sur la cohomologie des espaces fibrés principaux et des espaces homogenes de groupes de Lie compacts // Annals of Mathematics. 1953. Т. 57, № 1. С. 115—207.

[4] *Серр Ж. П.* Сингулярные гомологии расслоенных пространств // Расслоенные пространства. М.: Изд-во иностр. лит. 1958.

[5] *Halpern E.* Twisted polynomial hyperalgebras. 1958. (Memoirs of A.M.S., N. 29).

[6] *Dieudonné J.* Groupes de Lie et hyperalgèbres de Lie sur un corps de caractéristique $p > 0$ // Commentarii Mathematici Helvetici. 1954. Т. 28, № 1. С. 87—118.

[7] *Cartier P.* Dualité de Tannaka des groupes et des algebres de Lie // C. R. Acad. Sci. Paris. 1956. Т. 242, № 3. С. 322—325.

отображение существует, причем оно определяется единственным образом (например, это так, если алгебра связная и градуированная).

К середине 1960-х гг. терминология и формализм теории алгебр Хопфа в достаточной степени устоялись. На долгое время стандартными ссылками, не утратившими актуальности и в наши дни, стали книга М. Свидлера[8] и большая статья Дж. Милнора и Дж. Мура[9]. С тех пор вышло много книг, посвященных теории и приложениям алгебр Хопфа, например, см.[10],[11],[12].

Дальнейшее развитие теории и приложений алгебр Хопфа показало общематематическую важность этого класса алгебр. Начиная с работ Дж.К.Рота[13] [14] алгебры Хопфа нашли приложения в проблемах комбинаторики. Стоит отметить связь алгебр Хопфа комбинаторной природы с перенормировками в квантовой теории поля, которая впервые обсуждалась в статьях Д. Креймера и А. Конна[15] [16]. Огромный всплеск интереса к алгебрам Хопфа в середине 1980-х гг. возник после основополагающих работ В. Г. Дринфельда и М. Джимбо[17] [18], которые ввели замечательный класс алгебр Хопфа, получивших название квантовых групп. Доклад В. Г. Дринфельда на Международном конгрессе математиков 1986 г. в Беркли[19] начался с фразы: «Это доклад о недавних работах по алгебрам Хопфа (или квантовым группам, что более или менее одно и то же), основанных на квантовом методе обратной задачи — методе построения и изучения интегрируемых квантовых систем, разработанном в основном Л. Д. Фаддеевым и его сотрудниками». Эти направления интенсивно разрабатываются и в настоящее время.

Вернемся к моменту завершения первоначального этапа развития теории — к рубежу 1950-60-х гг. В 1958 году Дж. Милнор[20] показал, что для каждого простого p алгебра стабильных когомологических операций в $\mathbb{Z}/p$-когомологиях топологических пространств — алгебра Стинрода $\mathcal{A}_p$ — обладает естественной структурой алгебры

[8] *Sweedler M. E.* Hopf algebras. Benjamin, New York, 1969. (Mathematics Lecture Notes Series).

[9] *Milnor J. W.*, *Moore J. C.* On the structure of Hopf algebras // Annals of Mathematics. 1965. Т. 81, № 2. С. 211—264.

[10] *Abe E.* Hopf Algebras. Cambridge University Press, 1980.

[11] *Montgomery S.* Hopf algebras and their actions on rings. American Mathematical Soc., 1993. (Regional Conference Series in Mathematics ; 82).

[12] *Radford D. E.* Hopf algebras. World Scientific, 2011. (Series on Knots and Everything, 49).

[13] *Rota G.-C.* Hopf algebra methods in combinatorics // Problèmes combinatoires et théorie des graphes (Colloq. Internat. CNRS, Univ. Orsay. 1978. С. 363—365.

[14] *Joni S. A.*, *Rota G.-C.* Coalgebras and bialgebras in combinatorics // Studies in Applied Mathematics. 1979. Т. 61, № 2. С. 93—139.

[15] *Kreimer D.* On the Hopf algebra structure of perturbative quantum field theories // Advances in Theoretical and Mathematical Physics. 1998. Т. 2, № 2. С. 303—334.

[16] *Connes A.*, *Kreimer D.* Hopf Algebras, Renormalization and Noncommutative Geometry // Commun. Math. Phys. 1998. Т. 199. С. 203—242.

[17] *Дринфельд В. Г.* Алгебры Хопфа и квантовое уравнение Янга–Бакстера // Доклады Академии наук. 1985. Т. 283, № 5. С. 1060—1064.

[18] *Jimbo M.* A q-difference analogue of $U(\mathfrak{g})$ and the Yang-Baxter equation // Letters in Mathematical Physics. 1985. Т. 10, № 1. С. 63—69.

[19] *Drinfeld V.* Quantum Groups // Proceedings of the international congress of mathematicians. 1987. С. 798—819.

[20] *Milnor J.* The Steenrod algebra and its dual // Annals of Mathematics. 1958. Т. 67, № 1. С. 150—171.

Хопфа. Это открытие Дж. Милнора существенно расширило области приложений алгебр Хопфа, а также стимулировано развитие общей теории алгебр Хопфа.

Развитие теории и приложений алгебр Хопфа неоднократно демонстрировало повторяющийся «подъем по спирали»: постановки задач, идеи и методы, возникшие в топологии, приводили к постановке чисто алгебраических проблем, решения которых давали новые методы в алгебраической топологии и приводили к новым постановкам задач и т. д.

Спектральная последовательность Адамса, построенная в работе[21], открыла новую область приложений алгебр Хопфа и привела к проблеме вычисления когомологий алгебр Хопфа; в этой же работе были приведены первые общие ключевые результаты о когомологиях алгебры $\mathcal{A}_2$. Фундаментальным результатом, полученным методом спектральной последовательности Адамса, является теорема Милнора–Новикова о кольце комплексных кобордизмов[22] [23] [24].

В 1967 г. С. П. Новиков в программной работе[25] разработал новые методы в алгебраической топологии, основанные на теории комплексных кобордизмов и формальной группе геометрических кобордизмов. Эти методы существенно используют алгебру Хопфа S когомологических операций, построенную по характеристическим классам комплексных векторных расслоений в теории комплексных кобордизмов. Эта алгебра была независимо построена П. Ландвебером[26] и получила название «алгебра Ландвебера–Новикова».

Одной из главных целей этой работы С. П. Новикова являлась демонстрация новых методов в классической проблеме стабильных гомотопических групп сфер. Построенный на основе теории кобордизмов аналог спектральной последовательности Адамса — спектральная последовательность Адамса–Новикова, ее p-локальные варианты и т. п. — в настоящее время являются основным вычислительным средством в стабильной теории гомотопий. В спектральной последовательности Адамса–Новикова для спектра сфер имеет место изоморфизм $E_2^{*,*}(AN) = \mathrm{Ext}_S^{*,*}(\mathbb{Z}, \Omega_U^*)$. С. П. Новиков, используя формальную группу геометрических кобордизмов и построенные им аналоги операций Адамса в комплексных кобордизмах, полностью вычислил группы $E_2^{1,*} = \mathrm{Ext}_S^{1,*}(\mathbb{Z}, \Omega_U^*)$ — первую строку второго члена спектральной последовательности Адамса–Новикова. Вычисление второй строки было получено лишь в 1977 г.

[21] *Adams J. F.* On the structure and applications of the Steenrod algebra // Comment. Math. Helv. 1958. Т. 32, № 1. С. 180—214.

[22] *Новиков С. П.* О некоторых задачах топологии многообразий, связанных с теорией пространств Тома // Доклады Академии наук. 132 (5). 1960. С. 1031—1034.

[23] *Milnor J.* On the cobordism ring Ω^* and a complex analogue, Part I // American Journal of Mathematics. 1960. Т. 82, № 3. С. 505—521.

[24] *Новиков С. П.* Гомотопические свойства комплексов Тома // Математический сборник. 1962. Т. 57, № 4. С. 407—442.

[25] *Новиков С. П.* Методы алгебраической топологии с точки зрения теории кобордизмов // Известия Российской академии наук. Серия математическая. 1967. Т. 31, № 4. С. 855—951.

[26] *Landweber P. S.* Cobordism operations and Hopf algebras // Transactions of the American Mathematical Society. 1967. Т. 129, № 1. С. 94—110.

Миллером, Равенелем и Уилсоном[27] в p-локальном случае, $p > 2$.

Спектральная последовательность Бухштабера (Bss) была введена в работе[28] в связи с алгебраической проблемой вычисления члена $E_2(AN)$ спектральной последовательности Адамса—Новикова для стабильных гомотопических групп сфер. Спектральная последовательность Бухштабера строится следующим образом. Обозначим через S_* алгебру Хопфа, двойственную над $\mathbb{Z}$ алгебре Ландвебера—Новикова S. Алгебра S стандартным образом действует на кольце Ω_U^*. Это действие продолжается на $\Omega_U^* \otimes \mathbb{Q}$. Каноническое вложение $\Omega_U^* \subset \Omega_U^* \otimes \mathbb{Q}$ раскладывается в композицию $\Omega_U^* \subset \Omega_U^*(\mathbb{Z}) \subset \Omega_U^* \otimes \mathbb{Q}$ вложений S-модулей, где кольцо $\Omega_*^U(\mathbb{Z})$ состоит из элементов $\Omega_*^U \otimes \mathbb{Q}$, у которых все характеристические числа Черна целые. В той же работе построен S-модульный изоморфизм $\Omega_U^*(\mathbb{Z}) = S_*$. Затем строится фильтрация S-подмодулями в $\Omega_U^*(\mathbb{Z})$, начинающаяся с $\Omega_U^* \subset \Omega_U^*(\mathbb{Z})$:

$$\Omega_U^* = N_0 \subset N_1 \subset \ldots \subset \Omega_U^*(\mathbb{Z}),$$

у которой последовательные факторы — тривиальные S-модули. Эта фильтрация задает триградуированную спектральную последовательность $E_r^{p,q,t}$, которая сходится к группам $\mathrm{Ext}_S^{s,t}(\mathbb{Z}, \Omega_U^*(\mathbb{Z})) = \mathrm{Ext}_S^{s,t}(\mathbb{Z}, S_*)$. Принципиально важно, что $\mathrm{Ext}_S^{s,t}(\mathbb{Z}, S_*) = 0$ при $(s,t) \neq (0,0)$; при этом $\mathrm{Ext}_S^{0,0}(\mathbb{Z}, S_*) = \mathbb{Z}$.

Первый член этой спектральной последовательности имеет вид $E_1^{p,q,t} = \mathrm{Ext}_S^{-(p+q),t}(\mathbb{Z}, N_p/N_{p-1})$, причем при $p > 0$ на группе коэффициентов N_p/N_{p-1} алгебра S действует тривиально. Следовательно, при $p > 0$ группа $E_1^{p,q,t}$ выражается через $\mathrm{Ext}_S^{*,*}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z})$ и N_p/N_{p-1} с помощью теоремы об универсальных коэффициентах.

С другой стороны, $E_1^{0,-s,t} = \mathrm{Ext}_S^{s,t}(\mathbb{Z}, \Omega_U^*)$. Поскольку Bss сходится к нулю, исключая группу $E_\infty^{0,0,0} = \mathbb{Z}$, то из «геометрии» действия дифференциалов следует, что образы дифференциалов Bss должны исчерпать $E_1^{0,*,*} = \mathrm{Ext}_S^{*,*}(\mathbb{Z}, \Omega_U^*)$. Это дает новую структуру на $E_1^{0,-s,t} = \mathrm{Ext}_S^{s,t}(\mathbb{Z}, \Omega_U^*)$, которая рекуррентно связывает группы $\mathrm{Ext}_S^{*,*}(\mathbb{Z}, \Omega_U^*)$ с группами $\mathrm{Ext}_S^{*,*}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z})$ и N_p/N_{p-1}. Важные результаты по теории и приложениям этого варианта Bss получены в работах[29] [30] [31].

В главе 5 диссертации развита теория общей спектральной последовательности Бухштабера (Bss) для градуированных алгебр Хопфа, показано, что дифференциалы Bss определяют возрастающую фильтрацию в когомологиях алгебры Хопфа. Для алгебр Хофпа, заданных над полем, установлен ряд важных свойств дифференциалов Bss. Доказано, что ненулевой элемент, лежащий в образе дифференциала d_k, представляется в виде $(k+1)$-местного нетривиального матричного произведения Масси

[27] *Miller H. R.*, *Ravenel D. C.*, *Wilson W. S.* Periodic phenomena in the Adams-Novikov spectral sequence // Annals of Mathematics. 1977. Т. 106, № 3. С. 469—516.

[28] *Бухштабер В. М.* Характер Чженя–Дольда в кобордизмах. I // Математический сборник. 1970. Т. 83, 4 (12). С. 575—595.

[29] *Панов Н. В.* Характеристические числа в U-теории // Известия Российской академии наук. Серия математическая. 1971. Т. 35, № 6. С. 1356—1376.

[30] *Бухштабер В. М.*, *Шокуров А. В.* Алгебра Ландвебера–Новикова и формальные векторные поля на прямой // Функциональный анализ и его приложения. 1978. Т. 12, № 3. С. 1—11.

[31] *Шокуров А. В.* Топологические приложения аппарата формальных диффеоморфизмов прямой // Успехи математических наук. 1979. Т. 34, № 6. С. 210—215.

специального вида.

Задача вычисления когомологий алгебры Ландвебера—Новикова с коэффициентами в различных S-модулях привела В. М. Бухштабера к открытию изоморфизма алгебры $S \otimes \mathbb{R}$ с универсальной обертывающей алгеброй UL_1 алгебры Ли L_1 формальных векторных полей на прямой, обращающихся в нуле в нуль вместе с первой производной. Позже в работе[32] он показал, что алгебра $\mathcal{A}_p$ является универсальной обертывающей алгеброй супергруппы p-адических диффеоморфизмов прямой. Таким образом, алгебры Стинрода $\mathcal{A}_p$ и алгебра Ландвебера–Новикова S, возникшие в топологическом контексте, оказались близки к алгебраической ветви развития теории алгебр Хопфа.

Как видно из вышесказанного, применение Bss к алгебре Хопфа A опирается на вычисление фильтрации в (A_*).

В главе 6 эта фильтрация в (A_*) вычислена для важных алгебр Хопфа: для $S \otimes \mathbb{Q}$ — алгебры Ландвебера–Новикова над $\mathbb{Q}$, для UL_1 — универсальной обертывающей алгебры Ли L_1. Для алгебр Стинрода $\mathcal{A}_p$ эта фильтрация в $(\mathcal{A}_p)_*$ может быть выражена через фильтрацию Мэя степенями идеала аугментации в алгебре $\mathcal{A}_p$. Теорема Мэя[33] признана технически трудной. В диссертации дано вычисление фильтрации в $(\mathcal{A}_p)_*$ на основе коумножения, не использующее результат Мэя. Это вычисление в качестве следствия дает новое независимое вычисление фильтрации Мэя в $\mathcal{A}_p$.

В главе 7 описаны Bss для универсальных обертывающих важных нильпотентных алгебр Ли: конечномерных факторов $\mathcal{G}L^n$ алгебры Ли L_1 и алгебр Гейзенберга–Ли $\mathcal{GH}^{2n+1}$. Полностью вычислены Bss для алгебр Ли $\mathcal{G}L^3$, $\mathcal{G}L^4$, $\mathcal{GH}^5$, $\mathcal{GH}^7$.

В главе 8 методом Bss получены: эффективное описание фильтрации групп $\mathrm{Ext}^{s,t}_{A(1)}(\mathbb{Z}/2, \mathbb{Z}/2)$, явное представление элементов этих групп образами дифференциалов Bss и как следствие — представление элементов специальными скобками Масси. Показано, как не используя априорной информации о группах $\mathrm{Ext}^{s,t}_{A(1)}(\mathbb{Z}/2, \mathbb{Z}/2)$, $s \leqslant 4$, вычислить их методом Bss, опираясь на фильтрацию в $(A(1))_*$. Показано, как с помощью дифференциалов Bss можно описывать соотношения между произведениями и скобками Масси в когомологиях алгебр Хопфа на примере классических результатов Адамса и Новикова о группах $\mathrm{Ext}^{s,t}_{\mathcal{A}_2}(\mathbb{Z}/2, \mathbb{Z}/2)$, $s \leqslant 3$.

Помимо вычисления когомологий алгебр Хопфа и описания структуры, определяемой в когомологиях различными операциями (умножение, скобки Масси и т. п.), исключительно важными как с точки зрения общей теории алгебр Хопфа, так и с точки зрения ее приложений, являются также следующие проблемы, в направлении которых получены результаты, представленные в данной диссертации:

I. «Внутреннее устройство» алгебр Хопфа, в том числе: структурные теоремы, се-

[32] *Бухштабер В.* Алгебра Стинрода — обертывающая алгебра супергруппы p-адических диффеоморфизмов прямой // Добавление к кн.: Н. Стинрод, Д. Эпстейн, Когомологические операции, Наука, М. 1983.

[33] *May J. P.* The cohomology of restricted Lie algebras and of Hopf algebras: application to the Steenrod algebra. Princeton University, Thesis, 1964.

мейства мультипликативных и аддитивных образующих (аддитивных базисов), групповые элементы, идеалы, подалгебры Хопфа, а также проблемы классификации алгебр Хопфа в различных категориях.

II. Свойства и классификация представлений алгебр Хопфа. В топологическом контексте оказываются важными представления алгебры Хопфа A стабильных операций в теории когомологий $h^*(-)$ на кольцах когомологий $h^*(X)$ пространств (спектров) X. Известно, что далеко не каждый A-модуль реализуется в виде когомологий $h^*(X)$ некоторого пространства X. В связи с этим для построения топологических инвариантов важной оказывается алгебраическая задача классификации колец со структурой A-модуля.

В рамках проблемы I в диссертации получен ряд результатов по известной задаче об аддитивных базисах в алгебрах Стинрода $\mathcal{A}_p$, $p \geqslant 2$, их подалгебрах $\overline{\mathcal{A}}_p$, $p > 2$, и $\mathbb{C}$-мотивной алгебре Стинрода $\mathcal{A}_2^m$.

Первый такой базис — базис допустимых мономов или базис Картана–Серра — построили Ж. П. Серр для алгебры $\mathcal{A}_2$ и А. Картан для алгебр $\mathcal{A}_p$, $p > 2$, см[34 35 36]. Для этого они использовали описание алгебры стабильных $\mathbb{Z}/p$-когомологических операций как алгебры автоморфизмов представляющего спектра Эйленберга–Маклейна $K(\mathbb{Z}/p)$ и вычислили кольца когомологий $H^*(K(\mathbb{Z}/p, n); \mathbb{Z}/p)$.

В работе Дж. Милнора[37] было показано, что $\mathcal{A}_p$ — алгебра Хопфа и что двойственная алгебра Хопфа $(\mathcal{A}_p)_*$ является свободной градуированной коммутативной алгеброй над $\mathbb{Z}/p$. В качестве следствия для алгебры $\mathcal{A}_p$ он получил новый базис (известный как базис Милнора), двойственный к стандартному базису свободной градуированной коммутативной алгебры. Более того, он получил крайне важную явную формулу для умножения элементов такого базиса. Это единственная известная до сих пор явная формула для умножения элементов какого-либо базиса алгебры $\mathcal{A}_p$.

Ч. Т. К. Уолл, доказывая одну из гипотез Х. Тоды[38] о точности последовательности левых $\mathcal{A}_2$-модулей, построил[39] новый базис в алгебре $\mathcal{A}_2$, переоткрытый впоследствии Д. Арноном[40]. В рамках алгебраической теории Д. Арнон изучал экстремальные (мин./макс.) мономы относительно лексикографического (левого/правого) порядков на множестве мультипликативных образующих $\{Sq^{2^i}\}$ алгебры $\mathcal{A}_2$ и обнаружил, что базис допустимых мономов максимален в левом лексикографическом порядке, а базис

[34] *Serre J.-P.* Cohomologie modulo 2 des complexes d'Eilenberg–MacLane // Commentarii Mathematici Helvetici. 1953. Т. 27, № 1. С. 198—232.

[35] Séminaire Henri Cartan de l'Ecole Normale Supérieure, 1954/1955 / H. Cartan [и др.] // Algebres d'Eilenberg-MacLane et homotopie. Secrétariat mathématique. 1955. Т. 11. С. 9.

[36] *Cartan H.* Sur les groupes d'Eilenberg-MacLane. II // Proceedings of the National Academy of Sciences. 1954. Т. 40, № 8. С. 704—707.

[37] *Milnor J.* The Steenrod algebra and its dual // Annals of Mathematics. 1958. Т. 67, № 1. С. 150—171.

[38] *Toda H.* On exact sequences in Steenrod algebra mod 2 // Memoirs of the College of Science, University of Kyoto. Series A: Mathematics. 1958. Т. 31, № 1. С. 33—64.

[39] *Wall C. T. C.* Generators and relations for the Steenrod algebra // Annals of Mathematics. 1960. Т. 72, № 3. С. 429—444.

[40] *Arnon D.* Monomial bases in the Steenrod algebra // Journal of Pure and Applied Algebra. 1994. Т. 96, № 3. С. 215—223.

Уолла (Z-базис) минимален в правом лексикографическом порядке. Также он дал явные описания двух других экстремальных базисов: C- и X-базисов. Эти новые базисы нашли применения в задачах топологии, а именно, в исследовании действия алгебры $\mathcal{A}_2$ в когомологиях пространств Эйленберга–Маклейна $K(\mathbb{Z}/2, n)$, см. ниже. Аналог базиса Уолла для $p > 2$ был построен С. Папаставридисом[41].

Проблема описания и построения экстремальных базисов в алгебрах $\mathcal{A}_p$, $p > 2$, была сформулирована Р. Вудом в большом обзоре 'Problems in the Steenrod algebra'[42].

В главе 2 основные результаты относятся к решению этой проблемы.

Матрица перехода от базиса допустимых мономов к базису Милнора является треугольной — это результат классической работы Милнора 1958 г. Для алгебры $\mathcal{A}_2$ проблема была исследована К. Монксом[43]. Он показал, что матрицы перехода в парах (базис Милнора, C-базис), (базис Милнора, X-базис), (базис Милнора, любой P^s_t-базис) треугольны, тогда как матрицы перехода от базиса Милнора к Z, WZ и WY базисам не треугольны.

В главе 3 диссертации получены результаты по этой проблеме для алгебр $\mathcal{A}_p$ и $\overline{\mathcal{A}}_p$. Доказана треугольность матрицы перехода от базиса Милнора к C-базису в алгебре $\overline{\mathcal{A}}_p$. Для алгебры $\mathcal{A}_p$ доказана треугольность матриц перехода для следующих пар базисов: (базис Милнора — βC-базис), (базис Милнора — βX-базис), (базис Милнора — XC-базис), (базис Милнора — ZA-базис), (базис Милнора — любой базис из βP^s_t-семейства). Результаты других авторов о треугольности матриц перехода приведены для полноты изложения.

Несмотря на значительный прогресс в развитии и использовании методов спектральной последовательности Адамса–Новикова и ее p-локальных вариантов, возможности классической спектральной последовательности Адамса еще не исчерпаны. Помимо опоры на современные алгоритмы компьютерной алгебры и вычислительные мощности, прогресс связан с так называемой мотивной теорией гомотопий.

Основы мотивной теории гомотопий были заложены в работах[44] [45]. В этой теории имеются мотивные аналоги многих объектов и конструкций классической алгебраической топологии. Существенным здесь выступает появление дополнительной градуировки или параметра. Это связано с тем, что в мотивном контексте имеются две различные надстройки, поэтому спектр сфер имеет двойную индексацию, а гомотопические группы биградуированы. Мотивная алгебра Стинрода $\mathcal{A}^m_p$ была построена и

[41] *Papastavridis S.* Relations in the mod p Steenrod algebra // Stud. Algebraic Topology, Adv. Math., Suppl. 5. 1978. С. 169—188.

[42] *Wood R.* Problems in the Steenrod algebra // Bulletin of the London Mathematical Society. 1998. Т. 30, № 5. С. 449—517.

[43] *Monks K. G.* Change of basis, monomial relations, and P^s_t bases for the Steenrod algebra // Journal of Pure and Applied Algebra. 1998. Т. 125, № 1—3. С. 235—260.

[44] *Voevodsky V. A.* $\mathbb{A}^1$-homotopy theory // Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Berlin. 1998. С. 579—604.

[45] *Morel F.*, *Voevodsky V. A.* $\mathbb{A}^1$-homotopy theory of schemes // Publications Mathématiques de l'IHÉS. 1999. Т. 90. С. 45—143.

использована в работах В. А. Воеводского[46] [47]. Он же вычислил двойственную алгебру Хопфа $(\mathcal{A}_p^m)_*$; из-за того, что основное кольцо является не полем, а кольцом многочленов $\mathbb{Z}[\tau]$, структура двойственной алгебры оказалась сложнее, чем в классической теореме Милнора. Позднее мотивные операции Стинрода были использованы в работе[48]. Мотивная версия спектральной последовательности Адамса была построена в[49], развитие см. в[50] [51]. В отличие от классической, она триградуирована и учет дополнительной градуировки позволяет показать тривиальность некоторых дифференциалов без дополнительных рассуждений.

Важно, что для мотивной теории гомотопий над $\mathbb{C}$ имеется функтор геометрической реализации, который позволяет получать из мотивных результатов результаты в классической теории гомотопий[52] [53] [54] [55].

В главе 1 для $\mathbb{C}$-мотивной алгебры Стинрода $\mathcal{A}_2^m \mod 2$ построены новые аддитивные базисы: экстремальные базисы Z, X; аналоги базисов Вуда, семейство P_t^s-базисов и семейство базисов, составленных из итерированных коммутаторов. Для алгебры $\mathcal{A}_2^m$ доказана треугольность матриц перехода для пар (базис Милнора, X-базис), (базис Милнора, любой P_t^s-базис).

Перейдем к проблеме II со стр. 8. Как отмечено выше, довольно быстро исследование структуры множества всех когомологических операций привело к задаче описания действия операций в когомологиях пространств Эйленберга–Маклейна — фактически, это была одна из первых задач об описании представления алгебр операций в когомологиях представляющих пространств. В работах Ж. П. Серра и А. Картана было установлено, что кольцо когомологий $H^*(K(\mathbb{Z}/p,n);\mathbb{Z}/p)$, $p>2$, является свободной градуированной коммутативной алгеброй от бесконечного числа образующих вида $P^I\varphi$, где $\varphi \in H^n(K(\mathbb{Z}/p,n);\mathbb{Z}/p)$ — фундаментальный класс и $I=(\varepsilon_1,i_1,\varepsilon_2,i_2,\dots,i_k,\varepsilon_{k+1})$ — произвольная допустимая последовательность (в ней все элементы $\varepsilon_j=0$ или 1) с избыточностью $e(I)<n$; аналогичное утверждение имеет место для $p=2$. Д. Арнон в

[46] *Voevodsky V. A.* Motivic cohomology with $\mathbb{Z}/2$-coefficients // Publications Mathématiques de l'IHÉS. 2003. Т. 98. С. 59—104.

[47] *Voevodsky V. A.* Reduced power operations in motivic cohomology // Publications Mathématiques de l'IHÉS. 2003. Т. 98. С. 1—57.

[48] *Orlov D., Vishik A., Voevodsky V.* An exact sequence for $K_*^M/2$ with applications to quadratic forms // Annals of mathematics. 2007. С. 1—13.

[49] *Morel F.* Suite spectrale d'Adams et invariants cohomologiques des formes quadratiques // Comptes Rendus de l'Académie des Sciences-Series I-Mathematics. 1999. Т. 328, № 11. С. 963—968.

[50] *Dugger D., Isaksen D. C.* The motivic Adams spectral sequence // Geometry & Topology. 2010. Т. 14, № 2. С. 967—1014.

[51] *Hu P., Kriz I., Ormsby K.* Remarks on motivic homotopy theory over algebraically closed fields // Journal of K-Theory. 2011. Т. 7, № 1. С. 55—89.

[52] *Isaksen D. C., Xu Z.* Motivic stable homotopy and the stable 51 and 52 stems // Topology and its Applications. 2015. Т. 190. С. 31—34.

[53] *Pstrągowski P.* Synthetic spectra and the cellular motivic category // Inventiones mathematicae. 2023. Т. 232, № 2. С. 553—681.

[54] *Burklund R., Isaksen D. C., Xu Z.* Classical stable homotopy groups of spheres via $\mathbb{F}_2$-synthetic methods // arXiv preprint arXiv:2408.00987. 2024.

[55] *Lin W., Wang G., Xu Z.* On the last Kervaire invariant problem // arXiv preprint arXiv:2412.10879. 2024.

упомянутой работе 1994 г. в терминах C-базиса алгебры $\mathcal{A}_2$ построил новое семейство полиномиальных образующих алгебры $H^*(K(\mathbb{Z}/2,n);\mathbb{Z}/2)$. В разделе 4.1 главы 4 с помощью βC-базиса (см. главу 2) построены новые свободные образующие в алгебрах $H^*(K(\mathbb{Z}/p,n);\mathbb{Z}/p)$, $p>2$.

Вместе с тем, описание действия (представления) алгебры Стинрода $\mathcal{A}_p$ на кольце когомологий $H^*(K(\mathbb{Z}/p,n);\mathbb{Z}/p)$ оказалось трудной задачей. Для $p=2$ содержательные утверждения о ядре этого представления были получены лишь в 1995 году Ф. Петерсоном и В. Джиамбалво[56]. Они показали, что для $n=1$ ядро действия является двухсторонним идеалом в $\mathcal{A}_2$, порожденным элементами $Sq^{2^r}Sq^{2^r}$, $r\geqslant 1$ и специальными элементами $\varphi_{r,s}\in\mathcal{A}_2$ степеней $2^s(2^r+2^{r-1}+5)$, $s\geqslant 0$, $r\geqslant 4$, причем это семейство порождающих является минимальным. В их доказательстве существенную роль играли соотношения Уолла в алгебре $\mathcal{A}_2$. Также они показали, что для $n\geqslant 2$ ядро действия $\mathcal{A}_2$ тривиально. Их доказательство опирается на новую систему полиномиальных образующих кольца $H^*(K(\mathbb{Z}/2,n);\mathbb{Z}/2)$, построенную с помощью X-базиса Арнона алгебры $\mathcal{A}_2$. В той же работе было высказано предположение, что ядро представления $\mathcal{A}_2$ в когомологиях пространства $(\mathbb{R}P^\infty)^{\times n}$ устроено очень сложно. Частично это утверждение подтверждается результатами статьи[57], в которой рассматривалась подалгебра в когомологиях $H^*((\mathbb{R}P^\infty)^n;\mathbb{Z}/2)$, аннулируемая всеми операциями Sq^i, $i>0$.

В главе 4, раздел 4.2, доказано, что ядро действия алгебры $\mathcal{A}_p$ на $\mathbb{Z}/p$-когомологиях пространства Эйленберга-Маклейна $K(\mathbb{Z}/p,2)$ тривиально.

Выше упоминалась гипотеза Х. Тоды, которую доказал Ч. Т. К. Уолл, опираясь на построенный им Z-базис алгебры $\mathcal{A}_2$. Для $m\geqslant 0$ рассмотрим в алгебре $\mathcal{A}_2$ левый идеал I_m, порожденный элементами $Sq^1, Sq^2, \ldots, Sq^{2^m}$. Тогда умножение справа на Sq^{2^k} определяет гомоморфизмы $\alpha:\mathcal{A}_2\to\mathcal{A}_2/I_{k-2}$ и $\beta:\mathcal{A}_2/I_{k-2}\to\mathcal{A}_2/I_{k-1}$. Композиция $\beta\circ\alpha$ нулевая в силу того, что $Sq^{2^k}Sq^{2^k}\in I_{k-1}$. Гипотеза Тоды $\bmod 2$ утверждает, что короткая последовательность $\mathcal{A}_2$-модулей $\mathcal{A}_2\xrightarrow{\alpha}\mathcal{A}_2/I_{k-2}\xrightarrow{\beta}\mathcal{A}_2/I_{k-1}$ является точной.

В главе 4, раздел 4.3, представлены результаты по гипотезе Тоды $\bmod p$, $p>2$. Доказано, что точность аналогичной короткой последовательности $\mathcal{A}_p$-модулей имеет место до определенной критической градуировки, а в этой критической градуировке фактор $\ker\beta/\operatorname{im}\alpha$ одномерен.

В главе 4, раздел 4.4, представлены решения задач, мотивированных постановками и результатами работ Ш. Олта и У. Зингера[58] [59]. В этих работах рассмотрена алгебра Γ, составленная из групп гомологий всевозможных конечных смеш-произведений вещественных проективных пространств $\mathbb{R}P^\infty$. Более точно, $\Gamma=\{\Gamma_{*,*}\}$ определяется

[56] *Giambalvo V.*, *Peterson F.* The annihilator ideal of the action of the Steenrod algebra on $H^*(\mathbb{R}P^\infty)$ // Topology and its Applications. 1995. Т. 65, № 2. С. 105—122.

[57] *Repka J.*, *Selick P.* On the subalgebra of $H^*((\mathbb{R}P^\infty)^n;\mathbb{F}_2)$ annihilated by Steenrod operations // Journal of Pure and Applied Algebra. 1998. Т. 127, № 3. С. 273—288.

[58] *Ault S. V.* Relations among the kernels and images of Steenrod squares acting on right $\mathcal{A}$-modules // Journal of Pure and Applied Algebra. 2012. Т. 216, № 6. С. 1428—1437.

[59] *Ault S. V.*, *Singer W.* On the homology of elementary Abelian groups as modules over the Steenrod algebra // Journal of Pure and Applied Algebra. 2011. Т. 215, № 12. С. 2847—2852.

как

$$\Gamma_{m,d} = \begin{cases} \mathbb{Z}/2, & \text{если } m = d = 0; \\ \widetilde{H}_d((\mathbb{R}P^\infty)^{\wedge m}, \mathbb{Z}/2), & \text{если } m \geqslant 1; \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}$$

Умножение $\Gamma_{m_1,d_1} \otimes \Gamma_{m_2,d_2} \to \Gamma_{m_1+m_2,d_1+d_2}$ индуцировано естественным отображением пространств $(\mathbb{R}P^\infty)^{\wedge m_1} \times (\mathbb{R}P^\infty)^{\wedge m_2} \to (\mathbb{R}P^\infty)^{\wedge m_1+m_2}$. На Γ имеется естестенное правое действие алгебры Стинрода $\mathcal{A}_2$, сопряженное действию $\mathcal{A}_2$ в $H^*((\mathbb{R}P^\infty)^{\wedge m}, \mathbb{Z}/2)$.

Д. Аник доказал, что подпространство $\Delta(\infty) = \bigcap\limits_{j=0}^{\infty} \ker Sq^{2^j} \subset \Gamma$ является свободной ассоциативной алгеброй[60]. Для каждого $k \geqslant 0$ Ш. Олт и У. Зингер ввели подпространство $\Delta(k) = \bigcap\limits_{j=0}^{k} \ker Sq^{2^j} \subset \Gamma$ k-частично аннигилируемых элементов. Они доказали, что $\Delta(k)$ является свободной алгеброй для любого $k \geqslant 0$. Эти доказательства не являются конструктивными и не предоставляют возможности найти явный набор свободных образующих. Тем не менее, Олт и Зингер доказали, что свободная алгебра $\Delta(0) = \ker Sq^1$ совпадает с $\operatorname{Im} Sq^1$ и дали явное описание множества свободных мультипликативных образующих.

В разделе 4.4 главы 4 представлены результаты по проблеме частично аннулируемых (аннигилируемых) элементов в гомологиях $H_*(B(\mathbb{Z}/p)^s; \mathbb{Z}/p)$ для $p > 2$ относительно сопряженного правого действия алгебры $\mathcal{A}_p$.

В разделе 4.5 главы 4 представлены представлены решения задач, мотивированных постановками и результатами работ[61] [62]. Существуют многочисленные примеры пространств X, снабжённых инволюцией τ, таких что имеет место изоморфизм кольца когомологий $\varkappa : H^{2*}(X) \to H^*(X^\tau)$, уменьшающий градуировку вдвое. Здесь X^τ — пространство неподвижных точек инволюции, а когомологии рассматриваются с коэффициентами в $\mathbb{Z}/2$. Важно, что изоморфизм $\varkappa$ не индуцируется никаким отображением пространств. Наиболее простые примеры — комплексные грассманианы и многообразия флагов. Хаусманн, Хольм и Пуппе показали, что в наиболее важных случаях такой изоморфизм является частью введенной ими структуры на эквивариантных когомологиях пространств X и X^τ, которую они назвали (когомологическим) *H-оснащением*. Важной частью H-оснащения является так называемое *уравнение сопряжения* в эквивариантных когомологиях, связывающего класс $a \in H^{2*}(X)$ с соответствующим ему классом $\varkappa(a) \in H^*(X^\tau)$.

Там же было показано, что класс H-оснащенных пространств достаточно широк и, в частности, замкнут относительно приклейки эквивариантных клеток и ряда других естественных операций над топологическими пространствами с инволюцей. Помимо комплексных грассманианов и многообразий флагов, среди пространств

[60] *Anick D. J.* On the homogeneous invariants of a tensor algebra, in "Algebraic Topology: Proceedings of the International Conference held March 21–24, 1988," Mark Mahowald and Stewart Priddy eds. // Contemporary Mathematics. 1989. Т. 96. С. 15—17.

[61] *Hausmann J.-C.*, *Holm T. S.*, *Puppe V.* Conjugation spaces // Algebraic & Geometric Topology. 2005. Т. 5, № 3. С. 923—964.

[62] *Franz M.*, *Puppe V.* Steenrod squares on conjugation spaces // Comptes Rendus. Mathématique. 2006. Т. 342, № 3. С. 187—190.

с H-оснащением стоит особо выделить так называемые пространства многоугольников и орбиты коприсоединенного представления с инволюцией Шевалле для полупростых компактных групп Ли. Франц и Пуппе вычислили коэффициенты уравнения сопряжения в терминах операций Стинрода. Позже были получены другие доказательства их результата[63] [64].

В разделе 4.5 главы 4 построена теория когомологического Q-оснащения, возникающего в ситуации, когда пространство X снабжено двумя коммутирующими инволюциями τ_1, τ_2, а кольца когомологий $H^{4*}(X)$ и $H^*(X^{\tau_1,\tau_2})$ изоморфны. Основные примеры — кватернионные грассманианы, многообразия флагов и проективные пространства, снабжённые комплексными инволюциями. Введено кватернионное уравнения сопряжения и вычислены его коэффициентов в терминах операций Стинрода.

Цели работы

1. Развить теорию спектральной последовательности Бухштабера (Bss) для градуированных алгебр Хопфа над коммутативными кольцами. Показать специфику Bss для алгебр Хопфа, заданных над полями, и в этом случае установить связь дифференциалов Bss и скобками Масси.
2. Вычислить фильтрацию Бухштабера для ряда алгебр Хопфа: для алгебры Ландвебера—Новикова $S \otimes \mathbb{Q}$, для универсальной обертывающей алгебры Ли L_1, для известных конечномерных факторов $\mathcal{G}L^n$ алгебры Ли L_1, а также для алгебр Гейзенберга—Ли $\mathcal{GH}^{2n+1}$. Вычислить Bss для нильпотентных алгебр Ли $\mathcal{G}L^3$, $\mathcal{G}L^4$, $\mathcal{GH}^5$, $\mathcal{GH}^7$.
3. Продемонстрировать вычислительные возможности Bss на примере когомологий подалгебры $A(1) \subset \mathcal{A}_2$
4. Продемонстрировать связь дифференциалов Bss с соотношениями в когомологиях алгебр Хопфа, заданных над полем, на примере когомологий алгебры $\mathcal{A}_2$ и классических результатов Адамса и Новикова.
5. Найти и исследовать экстремальные базисы алгебр $\mathcal{A}_p$ и $\overline{\mathcal{A}}_p$, $p > 2$. Исследовать треугольность замен между базисами алгебр $\mathcal{A}_p$ и $\overline{\mathcal{A}}_p$, $p > 2$. Найти и исследовать аналогичные базисы в $\mathbb{C}$-мотивной алгебре Стинрода $\mathcal{A}_2^m \mod 2$.
6. Получить результаты по гипотезе Тоды о точности короткой последовательности $\mathcal{A}_p$-модулей для $p > 2$.
7. Показать, что аннигиляторный идеал действия $\mathcal{A}_p$ на когомологиях пространства Эйленберга–Маклейна $K(\mathbb{Z}/p, 2)$ тривиален.
8. Вычислить коэффициенты кватернионного уравнения сопряженности в терминах действия алгебры Стинрода $\mathcal{A}_2$.
9. Получить результаты о сопряженном правом действии алгебры $\mathcal{A}_p$ на гомологиях групп $\mathbb{Z}/p \times \mathbb{Z}/p \times \ldots \times \mathbb{Z}/p$.

[63] *Olbermann M.* Conjugations on 6-Manifolds (PhD Thesis). Univ. Heidelberg, 2007.

[64] *Pitsch W., Ricka N., Scherer J.* Conjugation spaces are cohomologically pure // Proceedings of the London Mathematical Society. 2021. Т. 123, № 3. С. 313—344.

Научная новизна

1. Развита теория спектральной последовательности Бухштабера (Bss) для градуированных алгебр Хопфа над кольцами. Показано, что для алгебр Хопфа над полем верны более глубокие результаты. Получено описание дифференциалов Bss в терминах нетривиальных специальных матричных скобок Масси.

2. Вычислена фильтрация Бухштабера и получены приложения для следующих известных алгебр Хопфа: для алгебры Ландвебера—Новикова над рациональными числами, для универсальной обертывающей UL_1 алгебры формальных векторных полей на прямой, обращающихся в 0 вместе с первой производной, для универсальных обертывающих некоторых конечномерных факторов алгебры Ли L_1, а также для алгебр Гейзенберга—Ли. Полностью вычислены Bss для нильпотентных алгебр Ли $\mathcal{G}L^3$, $\mathcal{G}L^4$, $\mathcal{GH}^5$, $\mathcal{GH}^7$.

3. В терминах дифференциалов Bss решена известная задача о механизме возникновения соотношений между произведениями и скобками Масси в когомологиях алгебр Хопфа. Показана эффективность разработанных методов на примере классических результатов Адамса и Новикова в случае групп $\mathrm{Ext}^{s,t}_{\mathcal{A}_2}(\mathbb{Z}/2,\mathbb{Z}/2)$, $s \leqslant 3$. Методами Bss получены эффективное описание фильтрации групп $\mathrm{Ext}^{s,t}_{A(1)}(\mathbb{Z}/2,\mathbb{Z}/2)$ в терминах дифференциалов Bss, явное представление элементов этих групп образами дифференциалов Bss и как следствие — представление элементов специальными скобками Масси.

4. Решена известная задача явного описания так называемых экстремальных базисов алгебр $\mathcal{A}_p$ для $p > 2$: βX, βZ, ZA, XC. Доказано, что βC-мономы образуют базис алгебры $\mathcal{A}_p$. Для $\mathbb{C}$-мотивной алгебры Стинрода mod 2 построены экстремальные базисы Z, X; построены аналоги базисов Вуда, семейство P^t_s-базисов и семейство базисов, составленных из итерированных коммутаторов.

   Решена известная задача описания пар базисов алгебры $\mathcal{A}_p$ для $p > 2$, для которых матрицы перехода треугольны; установлена треугольность матриц перехода для следующих пар базисов: (B_{Mil}, βX), (B_{Mil}, βC), (B_{Mil}, PQ), (B_{Mil}, XC), (B_{Mil}, βP^s_t). Для аддитивных базисов $\mathbb{C}$-мотивной алгебры $\mathcal{A}^m_2$ доказана треугольность матриц перехода для пар (базис Милнора, X-базис), (базис Милнора, любой P^s_t-базис).

5. В качестве приложения построенной теории базисов в алгебрах $\mathcal{A}_p$ для $p > 2$: (1) Получен ответ по гипотезе Тоды о точности известной короткой последовательности $\mathcal{A}_p$-модулей. А именно, получена явная формула для так называемой критической градуировки, такой что до этой градуировки точность имеет место, а в критической — нарушается; более того, вычислен фактор ядра по образу в среднем члене в критической градиуровке. (2) Построено новое семейство мультипликативных образующих кольца $H^*(K(\mathbb{Z}/p,n);\mathbb{Z}/p)$. (3) Показано, что

аннигиляторный идеал действия $\mathcal{A}_p$ на когомологиях пространства Эйленберга–Маклейна $K(\mathbb{Z}/p, 2)$ тривиален.

6. Развита теория пространств с кватернионным сопряжением, т. е. пространств, на которых действуют две коммутирующие независимые инволюции, кольца когомологий пространства неподвижных точек и исходного пространства связаны алгебраическим изоморфизмом, изменяющим градуировки в 4 раза, причем в эквивариантых когомологиях соответствующие друг другу элементы при таком изоморфизме связаны уравнением специального вида. Показано, что категория таких пространств достаточно велика, в частности, замкнута относительно операции приклейки эквивариантных клеток. Введено понятие уравнения Q-сопряжения и вычислены его коэффициенты в терминах действия алгебры Стинрода $\mathcal{A}_2$.

7. В рамках известной проблемы о структуре канонического представления алгебры $\mathcal{A}_p$ в когомологиях произведений линзовых пространств получены результаты, часть из которых является общей для всех простых p, а другая — верна только для $p > 2$. Для двойственного действия $\mathcal{A}_p$ на алгебре, построенной по гомологиям групп $\mathbb{Z}/p \times \mathbb{Z}/p \times \ldots \times \mathbb{Z}/p$, показано, что для каждого $k \geqslant 1$ подалгебра, состоящая из элементов, аннулируемых подалгеброй $P(k) \subset \mathcal{A}_p$, являются свободной. Вычислены размерности градуировочных компонент подалгебры элементов, аннулируемых подалгеброй $P(1)$.

Данные результаты являются новыми и вносят существенный вклад в развитие соответствующих направлений исследований.

Методы исследования

В работе используются методы теории градуированных алгебр Хопфа, гомологической алгебры, алгебраической топологии (спектральные последовательности и когомологические операции).

Теоретическая и практическая ценность

Работа носит теоретический характер. Ее результаты и разработанные методы могут быть использованы в исследованиях по теории алгебр Хопфа, алгебраической топологии и гомологической алгебре. Избранные разделы диссертации могут быть использованы в качестве материалов в специальных курсах для студентов и аспирантов, обучающихся по специальности математика.

Апробация работы

Результаты диссертации неоднократно докладывались научно-исследовательских семинарах механико-математического факультета МГУ имени М.В.Ломоносова, в том

числе: на семинаре кафедры дифференциальной геометрии и приложений, на семинарах «Алгебраическая топология и ее приложения» им. М.М.Постникова, «Некоммутативная геометрия и ее приложения», «Избранные вопросы алгебры», «Узлы и теория представлений»; на семинаре Лаборатории алгебраической геометрии и ее приложений НИУ ВШЭ. На следующих международных и всероссийских конференциях:

- Glances at Manifolds II: Group actions, K-Theory, C^*-algebras and Topology of Manifolds, Краков, Польша, август 2016, Взгляд на многообразия II: Группы, K-теория, C^*-алгебры и топология многообразий
- XIX Geometrical seminar, Zlatibor (Serbia), август-сентябрь 2016, Златибор, Сербия, XIX геометрический семинар
- 4-th International Workshop on Analysis, Probability and Geometry, Москва, Россия, сентябрь-октябрь 2016, 4й международный воркшоп по анализу, вероятности и геометрии
- Topology, Geometry, and Dynamics: Rokhlin — 100, Санкт-Петербург, Россия, август 2019, Топология, геометрия и динамика: к 100-летию В.А.Рохлина
- Декабрьские чтения в Томске–2021, Томский государственный университет, Россия, декабрь 2021
- XXII Geometrical seminar, Vrnjačka Banja, Serbia, май 2024, Врнячка Баня, Сербия, XXII геометрический семинар
- Алгебра, геометрия и алгебраическая геометрия, Новосибирск, ИМ СО РАН, Россия, 23-24 декабря 2024
- IV конференция математических центров России, посвященная 300-летию СПбГУ и РАН, Санкт-Петербург, Россия, 6-11 августа 2024
- V Конференция математических центров России, 2025, Красноярск, Россия, 11-16 августа 2025

Публикации

Основные результаты диссертации изложены в 13 статьях [1—13], опубликованных в изданиях, индексируемых в ведущих международных базах научного цитирования.

В работе [2] автору принадлежат теоремы 2.3 и 2.4, следствия 3.2–3.5 — результаты о экстремальных X и Z-базисах алгебр $\overline{\mathcal{A}}_p$ и о модификациях этих базисов. В работе [11] автору принадлежат теорема 2 и следствие 3 — результаты о треугольности матрицы перехода от базиса Милнора к C-базису алгебры $\overline{\mathcal{A}}_p$. В работе [3] автору принадлежит пункт (2) теоремы 2 и целиком теоремы 3, 4, 6 и 9 — результаты о βZ, βX, βC, ZA, XC базисах алгебры $\mathcal{A}_p$. В работе [6] автору принадлежат теоремы 1,

4, 7, 9 и 11, следствия 1 и 2 — результаты о треугольности матриц перехода между милноровским базисом и любым из базисов: PQ-модифицированный милноровский базис, βX, βC, ZA, XC. В работе [4] автору принадлежат теоремы 1.2 и 1.3, доказательства из разделов 5, 6, 7 и 8. В работе [5] автору принадлежат определение 2.1, предложение 2.7, лемма 2.3, теоремы 3.5, 4.1, 5.1, 5.10 и предложение 5.12, а именно: результаты о расширении N-оснащения при приклейке эквивариантной клетки, теоремы о выражении коэффициентов кватернионного уравнения сопряженности в терминах действия элементов базиса Милнора. В работах [1; 10] основные результаты были получены автором. Вклад В. М. Бухштабера состоит в постановке задач, обсуждениях доказательств, подходов к ним и связей с другими проблемами.

Остальные работы написаны автором лично. Во всех случаях в основные результаты диссертации включены только результаты автора.

Структура диссертации

Диссертация состоит из введения, восьми глав, приложения, заключения и списка литературы из 228 наименований. Общий объём диссертации — 321 страница.

Краткое содержание работы

Во **введении** дан обзор предшествующих результатов, а также сформулированы основные результаты диссертации.

Содержание главы 1

В разделе 1.1 приведен обзор необходимых результатов из уже цитированных работ Ч. Т. К. Уолла, Д. Арнона, К. Монкса, Р. Вуда, Дж. Палмьери и Дж. Жанга об аддитивных базисах алгебры Стинрода $\mathcal{A}_2$ и результаты Дж. Милнора и К. Монкса о треугольных матрицах перехода между базисами алгебры $\mathcal{A}_2$.

Основные результаты главы 1 относятся к $\mathbb{C}$-мотивной алгебре Стинрода mod 2. Фиксируется биградуированное кольцо коэффициентов $\mathbb{M}_2 = \mathbb{F}_2[\tau]$, где $\deg\tau = (0,1)$. Мотивная алгебра Стинрода $\mathcal{A}_2^m$ порождена над $\mathbb{M}_2$ элементами Sq^n, $n \geqslant 0$, $Sq^0 = 1$ и соотношениями Адема

$$Sq^a Sq^b = \sum_{i=0}^{[a/2]} \tbinom{b-1-i}{a-2i} \tau^{\varepsilon(a,b,i)} Sq^{a+b-i} Sq^i \quad \text{для} \quad a < 2b,$$

где $\deg Sq^{2k} = (2k,k)$, $\deg Sq^{2k+1} = (2k+1,k)$. Показатель $\varepsilon(a,b,i)$ равен 0 или 1 так, чтобы в ее левой и правых частях мотивный вес (вторая градуировка) у всех слагаемых был один и тот же.

Мономы вида $Sq^{i_m} \dots Sq^{i_1}$, где $i_k \geqslant 2i_{k-1}$ для всех $1 < k \leqslant m$, называются *допустимыми*. Они образуют[65] аддитивный базис алгебры $\mathcal{A}_2^m$, рассматриваемой как левый

[65] *Voevodsky V. A.* Reduced power operations in motivic cohomology // Publications Mathématiques de l'IHÉS. 2003. Т. 98. С. 1—57.

модуль над $\mathbb{M}_2$.

В той же работе В. А. Воеводского доказано, что для $\mathcal{A}_2^m$ определено ассоциативное и кокоммутативное коумножение $\Delta : \mathcal{A}_2^m \to \mathcal{A}_2^m \otimes_{\mathbb{M}_2} \mathcal{A}_2^m$, перестановочное с умножением. В. А. Воеводский описал двойственную алгебра $(\mathcal{A}_2^m)_*$, откуда получил базис Милнора в $\mathcal{A}_2^m$. Строение алгебры $(\mathcal{A}_2^m)_*$ несколько более сложное, чем у алгебры $(\mathcal{A}_2)_*$, описанной Милнором. Матрица перехода от базиса допустимых мономов к базису Милнора в $\mathcal{A}_2^m$ треугольна.

В разделе 1.3 собраны основные результаты главы 1. Построены Z и X базисы в алгебре $\mathcal{A}_2^m$ (теорема 1.9). Доказана треугольность матрицы перехода для пары (базис Милнора, X-базис) (теорема 1.10). Построено семейство P_t^s-базисов и доказана треугольность матрицы перехода для пары (базис Милнора, любой P_t^s-базис) (теоремы 1.11, 1.12). Построены коммутаторные базисы и аналоги базисов Вуда WZ, WY.

Вместе с тем, нетривиальность обобщения результатов о классической алгебре Стинрода $\mathcal{A}_2$ на $\mathbb{C}$-мотивный случай подтверждается тем, что, например, C-базис Арнона не имеет прямого мотивного аналога; более того, $<_R$-максимальный базис в $\mathcal{A}_2^m$ не известен.

Содержание главы 2

Раздел 2.1.

Рассматриваются алгебры $\overline{\mathcal{A}}_p$, $p > 2$. На мономах вида P^I, где $I = (i_m, \dots, i_0)$, определен левый (правый) лексикографический порядок, назовем его $<_L$-порядок ($<_R$-порядок соответственно) или L-порядок (R-порядок).

Базис допустимых мономов в $\overline{\mathcal{A}}_p$ состоит из мономов, не представимых в виде линейной комбинации мономов строго $<_L$-больших исходного. Удобно говорить, что базис допустимых мономов состоит из мономов, максимальных относительно $<_L$-порядка.

Определения 2.1 и 2.2. Положим $Z_k^n = P^{p^k} \cdots P^{p^n}$ и $X_k^n = P^{p^n} \cdots P^{p^k}$ для $n \geqslant k \geqslant 0$. Определим *$Z$-моном* как произведение вида $Z^I = Z_{k_1}^{n_1} \cdots Z_{k_r}^{n_r}$, а *$X$-моном* как произведение вида $X^I = X_{k_r}^{n_r} \cdots X_{k_1}^{n_1}$, где I — последовательность пар $((n_1, k_1), \dots, (n_r, k_r))$, удовлетворяющая двум условиям:

(1) $(n_r, k_r) \leqslant_L \dots \leqslant_L (n_2, k_2) \leqslant_L (n_1, k_1)$,

(2) если в последовательности I есть подпоследовательность равных пар:

$(n_{t+s+1}, k_{t+s+1}) <_L (n_{t+s}, k_{t+s}) = \dots = (n_{t+1}, k_{t+1}) <_L (n_t, k_t)$ то $s < p$ для каждой такой подпоследовательности.

Теорема 2.1. *Множество всех Z-мономов образует аддитивный базис $\overline{\mathcal{A}}_p$. Ни один из Z-мономов не может быть выражен в виде линейной комбинации мономов, меньших исходного относительно $<_R$-порядка.*

Теорема 2.2. *Множество всех X-мономов образует аддитивный базис $\overline{\mathcal{A}}_p$. Ни один из X-мономов не может быть выражен в виде линейной комбинации мономов, меньших исходного относительно $<_L$-порядка.*

Построены важные модификации Z-базиса и X-базиса. Некоторые из Z-мономов (X-мономов) содержат подпроизведения вида $(Z_k^n)^r$, $1 < r < p$ ($(X_k^n)^r$). Доказано, что определенные перестановки сомножителей P^{p^j} в этих подпроизведениях сохраняют линейную независимость мономов, в то время как все остальные приводят к линейной зависимости модифицированных мономов (теоремы 2.3, 2.4, следствия 2.1, 2.2). Эти результаты специфичны для случая $p > 2$ и не имеют аналога для $p = 2$.

Далее для полноты изложения приведены сведения о семействах P_t^s-базисов и коммутаторных базисов[66], а также об обобщениях базисов Вуда[67].

Раздел 2.2.

Это центральный раздел в данной главе. В нем рассмотрена алгебра Стинрода $\mathcal{A}_p$, $p > 2$, т. е. включен в рассмотрение элемент Бокштейна β.

Есть два способа расширить левый (правый) лексикографический порядки на мономах от приведенных степеней P^j до порядка на мономах от приведенных степеней и элемента Бокштейна β — мультипликативных образующих алгебры $\mathcal{A}_p$.

Для последовательности $J = (\varepsilon_{r+1}, j_r, \varepsilon_r, j_{r-1}, \dots, \varepsilon_1, j_0, \varepsilon_0)$, где $\varepsilon_k = 0$ или 1 для $k = 0, \dots, r+1$, и $j_k > 0$ для $k = 0, \dots, r$, рассмотрим моном $P^J = \beta^{\varepsilon_{r+1}} P^{j_r} \beta^{\varepsilon_r} P^{j_{r-1}} \dots \beta^{\varepsilon_1} P^{j_0} \beta^{\varepsilon_0}$. Левый (правый) лексикографический порядки на последовательностях вида J и соответствующих им элементах $P^J \in \mathcal{A}_p$ будем обозначать $<_{\varepsilon L}$ (соответственно, $<_{\varepsilon R}$). Базис допустимых мономов в $\mathcal{A}_p$ состоит из мономов, максимальных относительно порядка $<_{\varepsilon L}$. Три других экстремальных базиса относительно порядков $<_{\varepsilon L}$ и $<_{\varepsilon R}$ неизвестны.

Теперь определим порядки IL и IR на мономах в алгебре Стинрода $\mathcal{A}_p$. Произвольный моном в алгебре $\mathcal{A}_p$ единственным образом представляется в виде $P^{I_0} \beta P^{I_1} \dots P^{I_{k-1}} \beta P^{I_k}$, где I_m — мультииндекс, $0 \leqslant m \leqslant k$, причем все P^{I_m} не содержат β, и одна или обе последовательности I_0, I_k могут быть пустыми; рассмотрим соответствующую последовательность мультииндексов $(I_0, I_1, \dots, I_k)$.

Определение 2.6. *Левый* лексикографический порядок на последовательностях мультииндексов определяется следующим образом: $I <_{IL} J$ для $I = (I_0, \dots, I_n)$ и $J = (J_0, \dots, J_m)$, если выполняется одно из следующих условий:

- I пуста, а J нет,
- $I_0, J_0 \neq \varnothing$ и $\deg I_0 < \deg J_0$,
- $\deg I_0 = \deg J_0$ и $I_0 <_L J_0$ в смысле стандартного левого лексикографического порядка,
- $I_0 = J_0$ и $(I_1, \dots, I_n) <_{IL} (J_1, \dots, J_m)$.

Правый лексикографический порядок $<_{IR}$ определяется аналогично.

IR и IL-минимальные базисы описываются в следующих двух определениях.

[66] *Palmieri J. H., Zhang J. J.* Commutators in the Steenrod algebra // New York J. Math. 2013. Т. 19. С. 23—37.

[67] *Емельянов Д. Ю.* О базисах Вуда алгебры Стинрода $\bmod p$ // Фундаментальная и прикладная математика. 2015. Т. 20, № 3. С. 83—90.

Определение 2.7. Произвольный моном вида $Z\beta Z_0^{m_r}\beta Z_0^{m_{r-1}}\cdots\beta Z_0^{m_1}\beta^{\varepsilon}$, где Z — некоторый Z-моном или 1, $m_r > m_{r-1} > \ldots > m_1, \varepsilon = 0, 1$, назовем *$\beta Z$-мономом.*

Определение 2.8. Произвольный моном вида $\beta^{\varepsilon}X_0^{m_1}\cdots\beta X_0^{m_{r-1}}\beta X_0^{m_r}\beta X$, где X — некоторый X-моном или 1, $m_r > m_{r-1} > \ldots > m_1, \varepsilon = 0, 1$, назовем *$\beta X$-мономом.*

Теорема 2.7. (*a*) *Множество всех βZ-мономов образует аддитивный базис алгебры Стинрода $\mathcal{A}_p$.*

(*b*) *βZ-мономы минимальны относительно IR-порядка.*

Теорема 2.8. (*a*) *Множество всех βX-мономов образует аддитивный базис алгебры Стинрода $\mathcal{A}_p$.*

(*b*) *βX-мономы минимальны относительно IL-порядка.*

Результаты о модификации подпроизведений (аналоги теорем 2.3 и 2.4) верны и для βX и βZ базисов — это теорема 2.9.

Приведем результаты о $IR(IL)$-максимальных базисах. Положим $\hat{Z}^m = P^{p^m+\ldots+p^0}$.

Определение 2.9. Произвольный моном вида $P^I\beta\hat{Z}^{m_r}\beta\hat{Z}^{m_{r-1}}\beta\ldots\beta\hat{Z}^{m_1}\beta^{\varepsilon}$, где P^I — допустимый моном от элементов P^j, $m_r > m_{r-1} > \ldots > m_1 \geqslant 0$, и $\varepsilon = 0, 1$, назовем *ZA-мономом.*

Теорема 2.10. (*a*) *Множество всех ZA-мономов образует аддитивный базис алгебры $\mathcal{A}_p$.*

(*b*) *ZA-мономы максимальны в IL-порядке.*

Определение 2.10. Определим *C-моном* как моном $P^{j_r}\ldots P^{j_1}P^{j_0}$, где $j_k \leqslant pj_{k-1}$ и p^k делит j_k для всех $k \geqslant 1$.

Это определение было предложено в[68], где было показано, что множество всех C-мономов образует аддитивный базис алгебры $\overline{\mathcal{A}}_p$, причем C-мономы максимальны в R-порядке.

Определение 2.11. Произвольный моном вида $\beta^{\varepsilon}X_0^{m_1}\beta\ldots\beta X_0^{m_{r-1}}\beta X_0^{m_r}\beta P^I$, где P^I — C-моном, $m_r > m_{r-1} > \ldots > m_1 \geqslant 0$, и $\varepsilon = 0, 1$, будем называть *XC-мономом.*

Теорема 2.11. (*a*) *Множество всех XC-мономов образует базис алгебры $\mathcal{A}_p$.*

(*b*) *XC-мономы максимальны в IR-порядке.*

βC-базис для алгебры $\mathcal{A}_p$

В алгебре $\mathcal{A}_p$ имеется еще один важный базис. Порядок, относительно которого он экстремален, неизвестен.

Определение 2.12. Произвольный моном вида $P^J = \beta^{\varepsilon_{r+1}}P^{j_r}\beta^{\varepsilon_r}\ldots\beta^{\varepsilon_1}P^{j_0}\beta^{\varepsilon_0}$ назовем *βC-мономом*, если последовательность $J = (\varepsilon_{r+1}, j_r, \varepsilon_r, \ldots, \varepsilon_1, j_0, \varepsilon_0)$ удовлетворяет двум условиям:

(1) $j_k \leqslant pj_{k-1} + \varepsilon_k$ для всех k,

(2) p^k делит $j_k - pj_{k-1} - \varepsilon_k$ для всех k.

Последовательность J, удовлетворяющая условиям (1) и (2), называется *βC-последовательностью.* Очевидно, что βC-моном с $\varepsilon_k = 0$ для всех k является C-мономом.

Теорема 2.12. *Множество всех βC-мономов образует аддитивный базис $\mathcal{A}_p$.*

[68] *Karaca I.* Monomial bases in the mod p Steenrod algebra // Czechoslovak Mathematical Journal. 2005. Т. 55, № 3. С. 699—707.

Наше доказательство этой теоремы не использует результатов упомянутой статьи Карачи. Поскольку множество βC-мономов, для которых все $\varepsilon_k = 0$, совпадает с множеством C-мономов, мы получили независимое от упомянутой статьи доказательство того, что C-мономы образуют аддитивный базис алгебры $\overline{\mathcal{A}}_p$.

Содержание главы 3

В главе 3 исследуется треугольность матриц перехода между базисами алгебр $\mathcal{A}_p$ и $\overline{\mathcal{A}}_p$, $p > 2$, как классическими, так и построенными в предыдущей главе. Для алгебр $\mathcal{A}_p$, $p \geqslant 2$, треугольность матрицы перехода между базисом Милнора и базисом допустимых мономов — классический результат Милнора (1958).

Раздел 3.1.

Далеко не для всех рассмотренных в предыдущих главах пар базисов матрица перехода треугольна.

Пример 3.1. *Для произвольного простого p несложно видеть, что подпространство размерности $2(p-1)(p+2)$ в $\overline{\mathcal{A}}_p$ — двумерно, и в этой размерности Z-базис содержит два элемента $Z_0^1 Z_0^0$ и $Z_1^1 Z_0^0 Z_0^0$. Простое вычисление показывает, что*

$$Z_0^1 Z_0^0 = P(1,1) + 2P(p+2), \qquad Z_1^1 Z_0^0 Z_0^0 = 2P(1,1) + 2P(p+2).$$

Поэтому при любом выборе линейных порядков на Z-мономах и на базисе Милнора матрица перехода не будет треугольной.

В этом разделе новым является доказательство треугольности C-базиса по отношению к базису Милнора в алгебра $\overline{\mathcal{A}}_p$. Треугольность матриц перехода в парах (Z-базис, WZ-базис), (базис Милнора, X-базис), (базис Милнора, любой P_t^s-базис) была доказана Д. Ю. Емельяновым.

Раздел 3.2.

Этот раздел посвящен треугольным заменам в алгебре Стинрода $\mathcal{A}_p$, $p > 2$. Доказана треугольность матриц перехода от любого βP_t^s-базиса, βC-базиса, XC-базиса и βX-базиса к базису Милнора. Кроме того, доказана треугольность матрицы перехода от базиса Милнора к его модификации — PQ-базису. Доказана треугольность матрицы перехода от ZA-базиса к PQ-базису. Одна из основных трудностей здесь — правильный выбор порядков на множествах элементов базисов.

Содержание главы 4

В этой главе получены приложения аддитивных базисов в алгебрах Стинрода в задачах алгебраической топологии.

Раздел 4.1.

По теореме Картана—Серра[69 70 71] алгебра когомологий $H^*(K(\mathbb{Z}/p,n);\mathbb{Z}/p)$ является свободной градуированной коммутативной алгеброй, порожденной элементами $P^I\iota_n$, где $\iota_n \in H^n(K(\mathbb{Z}/p,n);\mathbb{Z}/p)$ — фундаментальный класс, а P^I — произвольный допустимый моном избыточности меньше n.

Построено новое семейство свободных образующих алгебры $H^*(K(\mathbb{Z}/p,n);\mathbb{Z}/p)$ в терминах βC-мономов. Для последовательности $J = (\varepsilon_{r+1}, j_r, \varepsilon_r, j_{r-1}, \ldots, \varepsilon_1, j_0, \varepsilon_0)$ определим $e(J) = 2j_0 + (\varepsilon_1 + \ldots + \varepsilon_r - \varepsilon_0)$.

Теорема 4.3. *Кольцо когомологий $H^*(K(\mathbb{Z}/p,n);\mathbb{Z}/p)$ является свободной градуированной коммутативной алгеброй, порожденной элементами $P^J\iota_n$, где $\iota_n \in H^n(K(\mathbb{Z}/p,n);\mathbb{Z}/p)$ — фундаментальный класс, а P^J — произвольный βC-моном, такой что $e(J) < n$.*

Раздел 4.2.

Аннигиляторный идеал $\mathcal{K}_p(X) \pmod p$ для пространства X — это двухсторонний идеал в алгебре $\mathcal{A}_p$, состоящий из всех операций, принимающих нулевое значение на любом элементе $H^*(X,\mathbb{Z}/p)$: $\mathcal{K}_p(X) = \{\theta \in \mathcal{A}_p \mid \theta(x) = 0 \text{ для любого } x \in H^*(X,\mathbb{Z}/p)\}$.

Теорема 4.4. *Для $p > 2$ аннигиляторный идеал $\mathcal{K}_p(K(\mathbb{Z}/p,2))$ тривиален.*

Это утверждение дает новый метод проверки тождеств в $\mathcal{A}_p$. Напомним, что стандартный способ проверить, равно ли нулю в $\mathcal{A}_p$ некоторое выражение от символов β и приведенных степеней P^j — сравнить с нулем его значение на вполне конкретном классе в $\mathbb{Z}/p$-когомологиях произведения классифицирующих пространств $(B\mathbb{Z}/p)^{\times N}$, где N достаточно велико.

Показано, что аннигиляторный идеал $\mathcal{K}_p(BU)$ является двусторонним идеалом, порожденным β.

Раздел 4.3.

Х. Тода высказал гипотезу[72] о точности некоторых последовательностей модулей над алгеброй Стинрода по модулю 2. Эта гипотеза была доказана Ч. Т. К. Уоллом[73]. Его доказательство существенно использовало Z-базис алгебры $\mathcal{A}_2$.

Основные результаты в этом разделе относятся к гипотезе Тоды $\pmod p$, $p > 2$ — теоремы 4.8, 4.9, 4.10.

---

[69] *Serre J.-P.* Cohomologie modulo 2 des complexes d'Eilenberg–MacLane // Commentarii Mathematici Helvetici. 1953. Т. 27, № 1. С. 198—232.

[70] *Cartan H.* Algebres D'Eilenberg–Maclane et Homotopie. Seminaire Henri Cartan, 1954/1955.

[71] *Постников М. М.* К теореме Картана // Успехи математических наук. 1966. Т. 21, 4 (130). С. 35—46.

[72] *Toda H.* On exact sequences in Steenrod algebra $\pmod 2$ // Memoirs of the College of Science, University of Kyoto. Series A: Mathematics. 1958. Т. 31, № 1. С. 33—64.

[73] *Wall C. T. C.* Generators and relations for the Steenrod algebra // Annals of Mathematics. 1960. Т. 72, № 3. С. 429—444.

Зафиксируем простое число $p > 2$. Пусть $\mathcal{S}_r$ — подалгебра $\overline{\mathcal{A}}_p$, порожденная P^{p^j}, где $0 \leqslant j \leqslant r$, и $\mathcal{I}_j$ — левый идеал $\mathcal{S}_r\mathcal{S}_j$ в $\mathcal{S}_r$, порожденный $\mathcal{S}_j$. Рассмотрим отображения

$$\alpha_1 \text{ и } \alpha_2 : \overline{\mathcal{A}}_p \to \overline{\mathcal{A}}_p/\overline{\mathcal{A}}_p\mathcal{S}_{r-2}, \quad \beta_1 \text{ и } \beta_2 : \overline{\mathcal{A}}_p/\overline{\mathcal{A}}_p\mathcal{S}_{r-2} \to \overline{\mathcal{A}}_p/\overline{\mathcal{A}}_p\mathcal{S}_{r-1},$$

определенные формулами $\alpha_1(x) = xP^{ap^r} \mod \overline{\mathcal{A}}_p\mathcal{S}_{r-2}$, $\alpha_2(x) = x(P^{p^r})^a \mod \overline{\mathcal{A}}_p\mathcal{S}_{r-2}$, $\beta_1(x) = xP^{bp^r} \mod \overline{\mathcal{A}}_p\mathcal{S}_{r-1}, \beta_2(x) = x(P^{p^r})^b \mod \overline{\mathcal{A}}_p\mathcal{S}_{r-1}$, для некоторых фиксированных $1 \leqslant a \leqslant p-1$ и $1 \leqslant b \leqslant p-1$. Отображения β_1 и β_2 корректно определены.

Для последовательности

$$\overline{\mathcal{A}}_p \xrightarrow{\alpha_i} \overline{\mathcal{A}}_p/\overline{\mathcal{A}}_p\mathcal{S}_{r-2} \xrightarrow{\beta_j} \overline{\mathcal{A}}_p/\overline{\mathcal{A}}_p\mathcal{S}_{r-1}$$

где отображения α_i и β_j выбраны так, что $a + b = p$, выполнено $\beta_j \circ \alpha_i = 0$ для любых $i, j = 1, 2$. Гипотеза Тоды для $p > 2$ — это утверждение, что $\ker \beta_j = \operatorname{im} \alpha_i$ для подходящих i, j.

Основные результаты разбиваются на три случая: $r = 0$, $r = 1$ и $r \geqslant 2$.

Случай $r = 0$**.** Заметим, что $(P^1)^q = q!P^q$ для $1 \leqslant q \leqslant p-1$, следовательно, достаточно рассмотреть отображения $\alpha(x) = \alpha_2(x) = x(P^1)^a$ и $\beta(x) = \beta_2(x) = x(P^1)^b$. Оба идеала $\mathcal{I}_{r-1}$ и $\mathcal{I}_{r-2}$ тривиальны.

Теорема 4.8. *Для $r = 0$ последовательность $\overline{\mathcal{A}}_p \xrightarrow{\alpha} \overline{\mathcal{A}}_p \xrightarrow{\beta} \overline{\mathcal{A}}_p$ является точной.*

Случай $r = 1$**.** Рассмотрим $\alpha(x) = xP^p$ и $\beta(x) = xP^{(p-1)p}$, то есть $a = 1$ и $b = p - 1$.

Теорема 4.9. *Пусть $r = 1$. Для последовательности $\overline{\mathcal{S}}_1^{(k)} \xrightarrow{\alpha} \mathcal{S}_1^{(p+k)} \xrightarrow{\beta} (\mathcal{S}_1/\mathcal{I}_0)^{(p^2+k)}$ выполнены следующие утверждения.*

(a) Последовательность точна для $k < p$.

(b) Для $k = p$ факторпространство $(\ker \beta/\operatorname{im} \alpha)^{(p+k)}$ имеет размерность 1. Более того, элемент $P^1P^p(P^1)^{p-1}$ принадлежит $\ker \beta$ и не содержится в образе α.

Другими словами, для $r = 1$ и для нашего выбора α и β рассматриваемая последовательность является точной до некоторой «критической» градуировки, а в «критической» градуировке $\dim \ker \beta/\operatorname{im} \alpha = 1$. Аналогичное утверждение выполняется для $r > 1$, но с другой «критической» градуировкой.

Случай $r \geqslant 2$**.** Рассмотрим $\beta(x) = x \cdot P^{(p-1)p^r}$ и $\alpha(x) = x \cdot P^{p^r}$, то есть $a = 1$ и $b = p - 1$.

Теорема 4.10. *Для последовательности $\overline{\mathcal{S}}_r^{(k)} \xrightarrow{\alpha} (\mathcal{S}_r/\mathcal{I}_{r-2})^{(p^r+k)} \xrightarrow{\beta} (\mathcal{S}_r/\mathcal{I}_{r-1})^{(p^{r+1}+k)}$ выполнены следующие утверждения.*

(a) Последовательность точна для $k < 2p^{r-1} + p^{r-2}$.

(b) Для $k = 2p^{r-1} + p^{r-2}$ фактор $\ker \beta/\operatorname{im} \alpha$ имеет размерность один, более того, элемент $2P^{p^{r-1}}P^{p^r}P^{p^{r-2}}P^{p^{r-1}} - P^{p^{r-2}}P^{p^{r-1}}P^{p^r}P^{p^{r-1}}$ принадлежит $\ker \beta$, но не содержится в образе α.

В следствиях 4.3, 4.4 показано, что для любого другого выбора α_i с $1 < a < p$ нет точности для $r \geqslant 1$.

Раздел 4.4.

В этом разделе приведены результаты по проблеме аннулируемых элементов сопряжённого правого действия алгебры Стинрода $\mathcal{A}_p$ на $\mathbb{Z}/p$-гомологиях пространства.

Ш. Олт и У. Зингер[74] предложили рассматривать проблему описания *k-частично* аннигилированных элементов — элементов, лежащих в пересечении $\bigcap_{i=0}^{k} \ker Sq^{2^i}$ в алгебре Г, построенной по гомологиям классифицирующих пространств групп $(\mathbb{Z}/2)^n$.

Подалгебра $\Delta(\infty) = \bigcap_{k=0}^{\infty} \Delta(k)$ алгебры Г является свободной ассоциативной алгеброй[75]. Затем Олт и Зингер доказали, что для $p = 2$ и любого $k \geqslant 0$ подалгебра $\Delta(k)$ k-частично аннигилированных элементов тоже является свободной алгеброй. Соответствующие доказательства не являются конструктивными и не предоставляют возможности найти явный набор свободных образующих. Тем не менее, Олт и Зингер доказали, что для $p = 2$ свободная алгебра $\Delta(0) = \ker Sq^1$ совпадает с $\operatorname{Im} Sq^1$ и дали явное описание множества свободных мультипликативных образующих.

Определим алгебру $\Lambda = \{\Lambda_{*,*}\}$ как

$$\Lambda_{m,d} = \begin{cases} \mathbb{Z}/p, & \text{если } m = d = 0; \\ \widetilde{H}_d(L^{\wedge m}, \mathbb{Z}/p), & \text{если } m \geqslant 1; \\ 0 & \text{иначе,} \end{cases}$$

с умножением $\Lambda_{m_1,d_1} \otimes \Lambda_{m_2,d_2} \to \Lambda_{m_1+m_2,d_1+d_2}$ индуцированным естественным отображением пространств: $L^{\wedge m_1} \times L^{\wedge m_2} \to L^{\wedge m_1+m_2}$. Аналогичным образом определим алгебру $\bar{\Lambda} = \{\bar{\Lambda}_{*,*}\}$ по гомологиям пространств $\mathbb{C}P^\infty$. Используя сопряжённое действие алгебры $\mathcal{A}_p$, мы определяем модули (k-частично) аннигилированных элементов:

$$\Delta(k) = \{x \in \Lambda \ : \ xP^{p^j} = 0 \text{ для всех } j \leqslant k\},$$
$$\Delta^\beta(k) = \Delta(k) \cap \{x \in \Lambda \ : \ x\beta = 0\},$$
$$\bar{\Delta}(k) = \{x \in \bar{\Lambda} \ : \ xP^{p^j} = 0 \text{ для всех } j \leqslant k\}.$$

Теорема 4.11. *Для простого числа $p > 2$ и каждого $0 \leqslant k \leqslant \infty$*

(a) $\Delta(k)$ и $\Delta^\beta(k)$ являются свободными подалгебрами Λ;

(b) $\bar{\Delta}(k)$ является свободной подалгеброй $\bar{\Lambda}$.

Доказательство этого результата не является конструктивным.

Свободная ассоциативную алгебру $\bar{\Delta}(0)$ не совпадает с $\operatorname{Im} P^{p-1}$ и, более того, не порождается $\operatorname{Im} P^{p-1}$ и элементами $[1], \ldots, [p-2]$, вопреки тому, что можно было бы предположить по аналогии с результатами Олта и Зингера.

Теорема 4.13. *Как векторное пространство над $\mathbb{Z}/p$, пространство $\bar{\Delta}(0)_{1,*}$ имеет базис $\{[1], [2], \ldots, [p-2]\} \cup \{[pm + (p-1)] \ : \ m \geqslant 0\}$.*

Более того, $[pm + (p-1)] = [pm + p(p-1)]P^{p-1}$, в то время как $[j] \notin \operatorname{Im} \ P^{p-1}$ для

[74] *Ault S. V., Singer W.* On the homology of elementary Abelian groups as modules over the Steenrod algebra // Journal of Pure and Applied Algebra. 2011. Т. 215, № 12. С. 2847—2852.

[75] *Anick D. J.* On the homogeneous invariants of a tensor algebra, in "Algebraic Topology: Proceedings of the International Conference held March 21–24, 1988," Mark Mahowald and Stewart Priddy eds. // Contemporary Mathematics. 1989. Т. 96. С. 15—17.

$1 \leqslant j \leqslant p-2$.

Теорема 4.14. *Пусть* $d \geqslant p(p-1)-1$. *Представим* d *виде* $d = mp + r$, *где* $0 \leqslant r \leqslant p-1$. *Тогда размерность* $\bar{\Delta}(0)_{2,2d} = W_d$ *задаётся формулой*

$$\dim \bar{\Delta}(0)_{2,2d} = \begin{cases} m+p-2 & \text{для } r = p-1, \\ m+p-2-r & \text{для } r = 0, \dots, p-2. \end{cases}$$

В леммах 4.21 и 4.22 явно описаны элементы, которые образуют базис в пространстве $\bar{\Lambda}_{2,2d}$ для $d \geqslant p(p-1)-1$ (теорема 4.15).

Еще одно описание подмодулей частично аннигилированных элементов в некоторых случаях удается получить с помощью так называемой гомотопической системы Олта[76].

Раздел 4.5.

В данном разделе развита теория (когомологического) Q-оснащения, которое возникает в ситуации, когда пространство X снабжено двумя коммутирующими инволюциями τ_1, τ_2, а кольца когомологий $H^{4*}(X)$ и $H^*(X^{\tau_1,\tau_2})$ изоморфны. Основные примеры — кватернионные грассманианы, многообразия флагов и проективные пространства, снабжённые двумя комплексными инволюциями. Наш основной результат — вывод кватернионного уравнения сопряжения и определение его коэффициентов в терминах операций Стинрода. Также показано, что ряд операций над топологическими пространствами сохраняет класс кватернионных оснащенных пространств; среди таких операций одна из важных — операция приклейки эквивариантных клеток.

Введём необходимые определения и обозначения. Для топологического пространства X с действием конечной дискретной группы G определим его эквивариантные когомологии $H^*_G(X) = H^*(EG \times_G X)$. Пространство $X_G = EG \times_G X$ называется *борелевской конструкцией* пространства X. Положим $X^G = \{x \in X : x = gx \text{ для всех } g \in G\}$.

Гомоморфизмы ограничения $r : H^*(X) \to H^*(X^G)$ и $r_G : H^*_G(X) \to H^*_G(X^G) \cong H^*(X) \otimes H^*(BG)$ индуцированы вложениями $X^G \subset X$ и $(X^G)_G \subset X_G$. Также имеется проекция $\rho : H^*(X_G) = H^*_G(X) \to H^*(X)$, определённая вложением $X \to X_G$ на слой расслоения $X_G \to BG$. Эти отображения определены, если мы заменим пространство X на пару (X, Y), где $Y \subset X$ — G-инвариантное подпространство.

Рассмотрим пару пространств (X, Y), снабжённую двумя коммутирующими инволюциями τ_1 и τ_2. Обозначим $\tau_3 = \tau_1\tau_2$. Тогда на (X, Y) определено действие коммутативной группы $Q = \{e, \tau_1, \tau_2, \tau_3\}$. Зафиксируем изоморфизм $Q \cong \mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/2$, такой что τ_1 и τ_2 являются образующими первого и второго прямого слагаемого соответственно. Имеет место изоморфизм колец $H^*(BQ) = \mathbb{Z}/2[u, v]$, где удобно рассматривать образующую u как элемент, двойственный к τ_1, а v — как элемент, двойственный к τ_2. Определены гомоморфизмы ограничения $r\colon H^*(X, Y) \to H^*(X^Q, Y^Q)$,

[76] *Ault S. V.* Relations among the kernels and images of Steenrod squares acting on right $\mathcal{A}$-modules // Journal of Pure and Applied Algebra. 2012. Т. 216, № 6. С. 1428—1437.

$r_Q\colon H^*_Q(X,Y) \to H^*_Q(X^Q,Y^Q) \cong H^*(X^Q,Y^Q)\otimes H^*(BQ) \cong H^*(X^Q,Y^Q)\otimes \mathbb{Z}[u,v]$ и $\rho\colon H^*_Q(X,Y)\to H^*(X,Y)$, индуцированные вложениями пространств.

Определение 4.5. Пусть пара (X,Y) снабжена действием группы Q. Предположим, что когомологии $H^m(X,Y)$ равны нулю для всех m, не делящихся на 4. *Несимметричное кватернионное когомологическое оснащение* или *N-оснащение* для (X,Y) — это пара $(\varkappa,\sigma)$, где

(i) $\varkappa\colon H^{4*}(X,Y)\to H^*(X^Q,Y^Q)$ — аддитивный изоморфизм, уменьшающий степени в четыре раза;

(ii) $\sigma : H^{4*}(X,Y)\to H^{4*}_Q(X,Y)$ — аддитивное сечение ρ;

(iii) $\varkappa$ и σ удовлетворяют уравнению сопряжения

$$r_Q\circ\sigma(a)=\varkappa(a)f_3^m+\ell t_{3m}$$

для всех $m\in\mathbb{N}$ и всех $a\in H^{4m}(X,Y)$, где $f_3=uv(u+v)$ и $\ell t_{3m}\in H^*_Q(X^Q,Y^Q)=H^*(X^Q,Y^Q)[u,v]$ обозначает любой многочлен степени меньше $3m$ по переменным u,v. *Симметричное кватернионное когомологическое оснащение* или *Q-оснащение* для пары (X,Y) — это N-оснащение $(\varkappa,\sigma)$ с уравнением сопряжения вида

$$r_Q\circ\sigma(a)=\varkappa(a)f_3^m+\sum_{0<i+j\leqslant m} a_{i,j}(\varkappa(a))f_2^j f_3^{m-i-j},$$

где $\deg a_{i,j}(x)=\deg x+3i+j$ и $f_2=u^2+uv+v^2$.

Появление многочленов f_2 и f_3 не случайно, а связано с часто встречающейся равноправностью инволюций τ_1,τ_2 и $\tau_3=\tau_1\tau_2$. Известно[77], что кольцо инвариантов $\mathbb{Z}/2[u,v]^{GL_2(\mathbb{Z}/2)}$ является кольцом многочленов $\mathbb{Z}/2[f_2,f_3]$, где $f_2=u^2+uv+v^2$, $f_3=uv(u+v)$.

Теоремы 4.20, 4.21. Для коэффициентов Q-уравнения сопряженности имеет место равенство $a_{i,j}(\varkappa(a))=Sq(j,i)(\varkappa(a))$, где $Sq(j,i)\in\mathcal{A}_2$ — элемент базиса Милнора.

Содержание главы 5

В главе 5 развита теория триградуированной спектральной последовательности Бухштабера Bss для градуированных алгебр Хопфа. Получена формула для дифференциала $d_1 : E_1^{p,q,t}\to E_1^{p-1,q,t}$. Показано, что дифференциалы d_k, $k\geqslant 1$, в Bss задают возрастающую исчерпывающую фильтрацию в когомологиях этих алгебр. В работе[78] введено понятие специального матричного произведения Масси. В разделе 5.2 доказано, что элемент фильтрации k, не лежащий в меньшей фильтрации, т. е. элемент, лежащий в образе дифференциала d_k с точностью до элементов меньшей фильтрации, представляется нетривиальным $k+1$-местным специальным матричным произведением Масси.

[77] *Dickson L. E.* A fundamental system of invariants of the general modular linear group with a solution of the form problem // Transactions of the American Mathematical Society. 1911. Т. 12, № 1. С. 75—98.

[78] *Gugenheim V. K., May J. P.* On the theory and applications of differential torsion products. Т. 142. American Mathematical Soc., 1974.

Раздел 5.1.

Пусть $A = \bigoplus\limits_{n\geqslant 0} A^n$ — градуированная алгебра над основным кольцом R с единицей, причем каждая однородная компонента является конечнопорожденным R-модулем и $A^0 = R$.

Определение 5.1. Пусть N — некоторый левый A-модуль, а N_0 — его A-инвариантный R-подмодуль. Введем в N (возрастающую) *фильтрацию Бухштабера* по индукции:

$$N_{p+1} = \{n \in N \,:\, s \cdot n \in N_p \text{ для всех } s \in A^+ = \bigoplus_{n>0} A^n\}.$$

Основное свойство этой фильтрации состоит в том, что действие элементов из A^+ на факторах N_{p+1}/N_p тривиально при $p \geqslant 1$, а единица кольца A на N_{p+1}/N_p действует тождественно. Если P_s — резольвента левого A-модуля M, то на комплексе $(\mathrm{Hom}_A^t(P_s, N), d)$, вычисляющем группы $\mathrm{Ext}_A^{s,t}(M, N)$, возникает фильтрация подкомплексами $\mathrm{Hom}_A^t(P_s, N_p)$, которая индуцирует триградуированную спектральную последовательность Бухштабера (Bss) со следующими основными свойствами:

1. $E_1^{p,q,t} = \mathrm{Ext}_A^{-(p+q),t}(M, N_p/N_{p-1})$. По теореме об универсальных коэффициентах группы $\mathrm{Ext}_A^{-(p+q),t}(M, N_p/N_{p-1})$ связаны с $\mathrm{Ext}_A^{-(p+q),t}(M, R)$ и N_p/N_{p-1}. При $p \geqslant 1$ эта связь упрощается, так как тогда действие A на N_p/N_{p-1} тривиально. Если R является полем, то $E_1^{p,q,t} = \bigoplus\limits_{t=t_1+t_2} \mathrm{Ext}_A^{-(p+q),t_1}(M, R) \otimes (N_p/N_{p-1})^{t_2}$.
2. Дифференциал $d_1 : \mathrm{Ext}_A^{-(p+q),t}(M, N_p/N_{p-1}) \to \mathrm{Ext}_A^{-(p+q)+1,t}(M, N_{p-1}/N_{p-2})$ является связывающим гомоморфизмом длинной точной последовательности тройки комплексов, соответствующей вложениям $N_{p-2} \subset N_{p-1} \subset N_p$.
3. Дифференциал d_r отображает $E_r^{p,q,t}$ в $E_r^{p-r,q+r-1,t}$.
4. Учитывая ограничения на градуировку в A и фильтрацию в N, получаем, что $E_1^{p,q,t} = 0$ при $p < 0$ или при $p + q > 0$.
5. $E_1^{0,q,t} = \mathrm{Ext}_A^{-q,t}(M, N_0)$ по построению фильтрации.
6. $E_1^{p,-p,t} = \mathrm{Hom}_A^t(M, N_p/N_{p-1})$ по построению фильтрации.
7. Если фильтрация N_p удовлетворяет стандартным условиям (например, исчерпывание любой градуировки за конечное число шагов фильтрации), то спектральная последовательность сходится к $\mathrm{Ext}_A^{s,t}(M, N)$.

Особенно важен случай, когда A — связная градуированная алгебра Хопфа $M = R$, $N = A_*$ — двойственная алгебра Хопфа. Тогда группы $\mathrm{Ext}_A^{s,t}(R, A_*)$ нулевые при $(s,t) \neq (0,0)$, а значит, предельные группы (исключая $E_\infty^{0,0,0}$) в соответствующей Bss тривиальны: $E_\infty^{j,q,t} = 0$ при $(j,q,t) \neq (0,0,0)$. Значит, нулевой столбец $E_1^{0,q,t} = \mathrm{Ext}_A^{-q,t}(R, N_0)$ исчерпывается образами дифференциалов Bss. Сходимость Bss к тривиальным группам $\mathrm{Ext}_A^{*,*}(R, A_*)$ следует рассматривать как задаваемые дифференциалами Bss сложные рекуррентные соотношения между группами $\mathrm{Ext}_A^{*,*}(R, N_0)$ и N_j/N_{j-1}. В главе 8 будет продемонстрировано, как именно эта идея используется для получения информации о когомологиях алгебры A.

В работе[79] с помощью фильтрации алгебры $\mathcal{A}_p$ степенями идеала аугментации определялась фильтрация кобар-резольвенты, вычисляющей когомологии $\mathrm{Ext}^{s,t}_{\mathcal{A}_p}(\mathbb{Z}/p,\mathbb{Z}/p)$. Соответствующая спектральная последовательность сходится к $\mathrm{Ext}^{s,t}_{\mathcal{A}_p}(\mathbb{Z}/p,\mathbb{Z}/p)$. Она называется спектральной последовательностью Мэя и является одним из важных инструментов для вычисления когомологий алгебр стабильных операций.

Напротив, спектральная последовательность Бухштабера Bss для алгебры Стинрода $\mathcal{A}_p$ определяется по фильтрации комплекса, вычисляющего $\mathrm{Ext}^{s,t}_{\mathcal{A}_p}(\mathbb{Z}/p,(\mathcal{A}_p)_*)$, и поэтому член $E^{*,*,*}_\infty$ тривиален. Первый член этой Bss явно выражается через $\mathrm{Ext}^{*,*}_{\mathcal{A}_p}(\mathbb{Z}/p,\mathbb{Z}/p)$ и последовательные факторы фильтрации. Нулевой столбец в члене E_1 состоит только из групп $\mathrm{Ext}^{*,*}_{\mathcal{A}_p}(\mathbb{Z}/p,\mathbb{Z}/p)$, и образы дифференциалов Bss должны исчерпать эти группы. В этом состоит одно из важных отличий Bss от большинства других спектральных последовательностей, традиционно используемых в гомологической алгебре.

В случае $N = A_*$, $M = N_0 = R$ группы $E^{*,*,*}_\infty$ тривиальны за исключением $E^{0,0,0}_\infty = R$. Значит, нулевой столбец, в котором стоят группы $\mathrm{Ext}^{q,*}_A(R,R)$ должен *исчерпываться образами дифференциалов* d_r, $r \geqslant 1$ в следующем смысле: *на* $\mathrm{Ext}^{q,*}_A(R,R) = E_1^{0,-q,*}$ *имеется возрастающая фильтрация* $\Phi^r = \Phi^r\mathrm{Ext}^{q,*}_A(R,R)$, такая что

(i) $\Phi^0 = R = E^{0,0,0}_\infty$;

(ii) $\Phi^r/\Phi^{r-1} \subset \mathrm{Ext}^{q,*}_A(R,R)/\Phi^{r-1}$ совпадает с образом дифференциала $d_r : E_r^{r,*-r+1,*} \to E_r^{0,*,*}$;

(iii) $\mathrm{Ext}^{q,*}_A(R,R)/\Phi^{r-1} = E_r^{0,-q,*}$.

Фильтрация Φ^r функториальна в естественном смысле.

Следующие несколько свойств описывают свойства дифференциалов Bss.

Лемма 5.4. *$d_1 : E_1^{1,-1,*} \to E_1^{0,-1,*}$ совпадает со стандартным изоморфизмом $\delta : P(A_*) \to \mathrm{Ext}^{1,*}_A(R,R)$, где $P(A_*)$ — модуль примитивных элементов коалгебры A_*.*

В предположении, что R — поле $\Bbbk$, дифференциал d_1 можно рассматривать как отображение

$$d_1 : (N_p/N_{p-1}) \otimes \mathrm{Ext}^{s,*}_A(\Bbbk,\Bbbk) \to (N_{p-1}/N_{p-2}) \otimes \mathrm{Ext}^{s+1,*}_A(\Bbbk,\Bbbk).$$

В теореме 5.2 для него получена явная формула в терминах коумножения и примитивных элементов алгебры A_*, а также доказано, что $d_1 : N_p/N_{p-1} \to (N_{p-1}/N_{p-2}) \otimes \mathrm{Ext}^{1,*}_A(\Bbbk,\Bbbk)$ является вложением.

Теорема 5.5. *Рассмотрим алгебру Хопфа A над полем $\Bbbk$. Пусть $x \in \Phi^k\mathrm{Ext}^{s,*}_A(\Bbbk,\Bbbk)$ и $x \notin \Phi^{k-1}\mathrm{Ext}^{s,*}_A(\Bbbk,\Bbbk)$.*

Тогда x является представителем нетривиального матричного $(k+1)$-местного произведения Масси вида $\langle a_1, a_2, \ldots, a_k, a_{k+1}\rangle$, где матрицы $a_1, a_2, \ldots, a_k$ состоят из элементов группы $\mathrm{Ext}^{1,*}_A(\Bbbk,\Bbbk)$, а матрица a_{k+1} — из элементов группы $\mathrm{Ext}^{s-1,*}_A(\Bbbk,\Bbbk)$.

[79] *May J. P.* The cohomology of restricted Lie algebras and of Hopf algebras: application to the Steenrod algebra. Princeton University, Thesis, 1964.

Такие произведения Масси *специальными*, а если допускаются их итерации, причем только по последнему аргументу, то *специальными итерированными*.

Специальное итерированное произведение Масси будем называть *нетривиальным*, если все участвующие в нем произведения Масси нетривиальны, т. е. не содержат 0.

Следствие 5.3. *Пусть A — алгебра Хопфа над полем $\Bbbk$. Тогда любой элемент группы когомологий $\mathrm{Ext}_A^{s,*}(\Bbbk,\Bbbk)$ при $s \geqslant 2$ выражается в виде нетривиального специального итерированного матричного произведения Масси от элементов $\mathrm{Ext}_A^{1,*}(\Bbbk,\Bbbk)$.* Такого сорта утверждение можно найти в уже цитированной работе Гугенхейма–Мэя с другим доказательством.

Если R — поле $\Bbbk$, то формула для дифференциала $d_1 : N_1/N_0 \otimes \mathrm{Ext}_A^{q-1,*}(\Bbbk,\Bbbk) \xrightarrow{d_1} \mathrm{Ext}_A^{q,*}(\Bbbk,\Bbbk)$, полученная в главе 5, показывает, что $\Phi^2\mathrm{Ext}_A^{q,*}(\Bbbk,\Bbbk)$ в точности состоит из элементов, представимых в виде $\sum a_i b_i$, где $a_i \in \mathrm{Ext}_A^{1,*}(\Bbbk,\Bbbk)$, $b_i \in \mathrm{Ext}_A^{q-1,*}(\Bbbk,\Bbbk)$.

Завершается глава утверждением, которое в дальнейшем окажется полезным дополнением к теореме 5.5.

Утверждение 5.4. *Пусть элемент $x \in \Phi^k$ представлен специальным матричным произведением Масси $\langle a_1,\dots,a_k,y\rangle$, $a_i \in \mathrm{Ext}_A^{1,*}(R,R)$, $1 \leqslant i \leqslant k$, и $y \in \mathrm{Ext}_A^{s,*}(R,R)$, и $\{X(i,j)\}$ — соответствующая определяющая система. Тогда*

(a) коцепь $X(i,j)$ при $i \leqslant j \leqslant k$ имеет вид $[\theta_{ij}] \in F^1(R,A_*,R)$, причем $\theta_{ij} \in N_j \backslash N_{j-1}$;

(b) $x \mod \Phi^{k-1} = d_k(\theta_{1k} \otimes y)$.

Если в условиях предыдущего утверждения класс x относится к фильтрации $\Phi^{\tilde{k}}$, где $\tilde{k} < k$, то элемент $\theta_{1k} \otimes y$ определен и является циклом всех дифференциалов d_r, $1 \leqslant r \leqslant k-1$, однако для какого-то $r \leqslant k-1$ класс $[\theta_{1k} \otimes y] \in E_r^{k,-s-k,*}$ является кограницей. В этом случае формула $x \mod \Phi^{k-1} = d_k(\theta_{1k} \otimes y)$ остается верной, но в обеих частях равенства стоят нули.

Содержание главы 6

Раздел 6.1.

Пусть S — алгебра Ландвебера–Новикова. Для алгебры $S \otimes \mathbb{Q}$ вычислена фильтрация Бухштабера в ее двойственной алгебре Хопфа $(S \otimes \mathbb{Q})_*$, начинающаяся с $N_0 = \mathbb{Q}$. Из результатов работы[80] следует, что существует изоморфизм S-модулей $(S \otimes \mathbb{Q})_* = \Omega_U^* \otimes \mathbb{Q}$. По теорема Милнора–Новикова Ω_U^* является кольцом полиномов над $\mathbb{Z}$ от образующих, взятых по одной в каждой четной отрицательной размерности. Основная трудность состоит в том, чтобы выбрать удобные полиномиальные образующие в $\Omega_U^* \otimes \mathbb{Q}$, в терминах которых хорошо описывается фильтрация.

В работе[80] был определен характер Черна—Дольда в U-кобордизмах — естественное преобразование теорий когомологий $\mathrm{ch}_U : U^*(X) \to H^*(X, \Omega_U^* \otimes \mathbb{Q})$. Пусть $u \in U^2(\mathbb{C}P^\infty)$ — первый класс Черна в U-кобордизмах универсального линейного

[80] *Бухштабер В. М.* Характер Чженя–Дольда в кобордизмах. I // Математический сборник. 1970. Т. 83, 4 (12). С. 575—595.

расслоения. Тогда элемент $\mathrm{ch}_U(u) \in H^*(\mathbb{C}P^\infty, \Omega_U^* \otimes \mathbb{Q})$ записывается в виде ряда $\mathrm{ch}_U(u) = \beta(z) = z + \sum\limits_{n=1}^{\infty} t_n \frac{z^{n+1}}{(n+1)!}$, где $z \in H^2(\mathbb{C}P^\infty, \mathbb{Z})$ — стандартный класс Черна в когомологиях того же универсального линейного расслоения. Классы $t_n \in \Omega_U^{-2n}$ полностью охарактеризованы в работе[80]. Существование для этих классов представителей, являющихся гладкими неприводимыми алгебраическими многообразиями, было доказано лишь недавно[81].

Рассмотрим формальный ряд $Q_v(z) = 1 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n v_n \dfrac{z^n}{(n+1)!}$, определенный соотношением $Q_v(z)\beta(z) = z$. Тогда $\Omega_U^* \otimes \mathbb{Q} = \mathbb{Q}[t_1, t_2, \ldots] = \mathbb{Q}[v_1, v_2, \ldots]$.

Мономы $v_1^{i_1} v_2^{i_2} \ldots v_m^{i_m}$ удобно кодировать бесконечными последовательностями неотрицательных целых чисел $(i_1, i_2, \ldots)$ с конечным числом ненулевых элементов. Для такой последовательности $I = (i_1, i_2, \ldots)$ через v_I будем обозначать моном $\prod\limits_k v_k^{i_k}$. Для $I = (i_1, i_2, \ldots)$ положим $p(I) = i_1 + \sum\limits_k (k-1) i_k$. Пусть также $d(I) = \sum\limits_k k i_k$, ясно, что $|v_I| = -2d(I)$.

Теорема 6.1.

(*a*) *Элемент v_I принадлежит $N_{p(I)}$.*

(*b*) *Аддитивный базис $\Omega_U^* \otimes \mathbb{Q}$ согласован с фильтрацией N_p в следующем смысле:*

$$\mathbb{Q}\langle v_I \,:\, p(I) = p\rangle \oplus N_{p-1} = N_p.$$

В частности, v_I не принадлежит $N_{p(I)-1}$.

Раздел 6.2.

Алгебра Ли L_1 порождается над $\mathbb{Q}$ элементами e_i, $i = 1, 2, \ldots$ и соотношениями $[e_i, e_j] = (j-i)e_{i+j}$. По теореме Пуанкаре—Биркгофа—Витта мономы вида $e_{i_1} \ldots e_{i_n}$, где $i_1 \leqslant i_2 \leqslant \ldots \leqslant i_n$, образуют базис универсальной обертывающей алгебры UL_1.

Удобно записывать базисный моном $e_{i_1} \ldots e_{i_n}$ в виде $x = e_1^m e_{j_1} \ldots e_{j_k}$, где $1 < j_1 \leqslant \ldots \leqslant j_k$. Положим $\nu(x) = m + \sum\limits_{s=1}^{k} (j_s - 1)$.

Обозначим через I идеал аугментации алгебры UL_1. Полное описание фильтрации $F^pUL_1 = I^p$ содержится в следующем утверждении.

Теорема 6.4. *В приведенных выше обозначениях $e_1^m e_{j_1} \ldots e_{j_k} \in F^{\nu(x)}UL_1 \backslash F^{\nu(x)+1}UL_1$. Более того, базис Пуанкаре—Биркгофа—Витта согласован с фильтрацией F^pUL_1 в следующем смысле:*

$$\mathbb{Q}\langle x = e_1^m e_{j_1} \ldots e_{j_k} \,:\, \nu(x) = p\rangle \oplus I^{p+1} = I^p.$$

Этот результат понадобится в главе 7. Из него выводится описание фильтрации Бухштабера в двойственной алгебре Хопфа $(UL_1)_*$.

Раздел 6.3.

Представлено вычисление фильтрации Бухштабера в двойственных алгебрах Хопфа $(\mathcal{A}_p)_*$, использующее коумножение. Кроме того, вычислены фильтрации для

[81] *Buchstaber V. M., Veselov A. P.* Chern-Dold character in complex cobordisms and theta divisors // Advances in Mathematics. 2024. T. 449. C. 109720.

подалгебр Хопфа $A(n)$, $P(n)$.

Введем следующие обозначения: для $I = (a_1, a_2, a_3, \ldots)$, где $a_i \geqslant 0$, $J = (\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots)$, где $\varepsilon_i = 0, 1$, причем лишь конечное число элементов в этих последовательностях отличны от 0, положим

$$\xi(I) = \xi^I = \xi_1^{a_1}\xi_2^{a_2}\xi_3^{a_3}\ldots \in \mathcal{A}_2,$$
$$\xi(I)\tau(J) = \xi^I\tau^J = \xi_1^{a_1}\xi_2^{a_2}\xi_3^{a_3}\ldots\tau_0^{\varepsilon_0}\tau_1^{\varepsilon_1}\ldots \in \mathcal{A}_p.$$

Степень монома $\xi^I \in \mathcal{A}_2$ равна $|\xi^I| = \sum\limits_{k\geqslant 1} a_k(2^k - 1)$. Степень монома $\xi^I\tau^J \in \mathcal{A}_p$ равна $|\xi^I\tau^J| = \sum\limits_{k\geqslant 1} a_k(2p^k - 2) + \sum\limits_{k\geqslant 0} \varepsilon_k(2p^k - 1)$. Если J состоит только из 0, то $\xi^I\tau^J = \xi^I \in \overline{\mathcal{A}}_p$, и такой элемент удобно обозначать $\xi(I)$. Эти обозначения не вызовут путаницы, поскольку всегда оговаривается, какой из двух случаев $p = 2$ или $p > 2$ рассматривается.

Пусть p — простое число. Определим функцию $\alpha_p(n)$, где n — неотрицательное целое число, как сумму цифр в записи числа n по основанию p, т. е. $\alpha_p(n) = \sum\limits_i d_i$, если $n = \sum\limits_i d_i p^i$, $0 \leqslant d_i < p$. Для $I = (a_1, a_2, a_3, \ldots)$, $J = (\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots)$ определим функции

$$\text{для } p = 2: \quad \sigma_2(I) = \sum_k k\,\alpha_2(a_k),$$
$$\text{для } p > 2: \quad \sigma_p(I, J) = \sum_k k\,\alpha_p(a_k) + \sum_k (k+1)\,\varepsilon_k,\ \ \sigma_p(I) = \sigma_p(I, 0) = \sum_k k\,\alpha_p(a_k).$$

Теорема 6.5. *Для алгебр $\mathcal{A}_2$, $\mathcal{A}_p$ и $\overline{\mathcal{A}}_p$ для пространств фильтраций $\{N_j\}$ в двойственных алгебрах выполняются следующие утверждения.*

(*a*) *Для* $p = 2$ $\quad N_j((\mathcal{A}_2)_*) = N_{j-1}((\mathcal{A}_2)_*) \oplus \mathbb{Z}/2(\xi^I \,:\, j = \sigma_2(I))$.

(*b*) *Для* $p > 2$ $\quad N_j((\mathcal{A}_p)_*) = N_{j-1}((\mathcal{A}_p)_*) \oplus \mathbb{Z}/p(\xi^I\tau^J \,:\, j = \sigma_p(I, J))$.

($\overline{b}$) *Для* $p > 2$ $\quad N_j((\overline{\mathcal{A}}_p)_*) = N_{j-1}((\overline{\mathcal{A}}_p)_*) \oplus \mathbb{Z}/p(\xi^I \,:\, j = \sigma_p(I))$.

Для подалгебр Хопфа $A(n) \subset \mathcal{A}_2$ и $P(n) \subset \overline{\mathcal{A}}_p \subset \mathcal{A}_p$ из приложения А.1.3, имеет место аналогичное утверждение (следствие 6.1).

Содержание главы 7

В случае алгебры Ли $\mathfrak{g}$ для вычисления $\mathrm{Ext}^*_{U\mathfrak{g}}(\Bbbk, -)$ удобно использовать резольвенту Шевалле—Эйленберга модуля $\Bbbk$, т. е. комплекс $C_*(\mathfrak{g}) = \oplus_s U\mathfrak{g} \otimes \Lambda^s\mathfrak{g}$ с дифференциалом

$$d_{CE}(u \otimes g_1 \wedge \ldots \wedge g_s) = \sum_{i=1}^{s} (-1)^i u g_i \otimes g_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{g}_i \wedge \ldots \wedge g_s + \\ + \sum_{i,j} (-1)^{i+j+1} u \otimes [g_i, g_j] \wedge g_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{g}_i \wedge \ldots \wedge \widehat{g}_j \wedge \ldots \wedge g_s.$$

Условие полноты модуля $N_0 = \Bbbk \subset (U\mathfrak{g})_*$ равносильно остаточной нильпотентности алгебры Ли $\mathfrak{g}$[82]. Напомним, что для любой алгебры Ли $\mathfrak{g}$ определен нижний центральный ряд $\mathfrak{g} \supset \gamma_2(\mathfrak{g}) = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \supset \ldots \supset \gamma_p(\mathfrak{g}) \supset \ldots$, где $\gamma_p(\mathfrak{g}) = [\mathfrak{g}, \gamma_{p-1}(\mathfrak{g}_n)]$. Алгебра Ли называется *остаточно нильпотентной*, если $\bigcap\limits_p \gamma_p(\mathfrak{g}) = 0$. Конечномерная остаточно нильпотентная алгебра Ли нильпотентна. Тем самым, для остаточно нильпотентных алгебр Ли определена Bss, но вообще говоря, является не триградуированной, а биградуированной. Если алгебра Ли $\mathfrak{g}$ имеет градуировку положительными

[82] *Riley D., Usefi H.* The isomorphism problem for universal enveloping algebras of Lie algebras // Algebras and Representation Theory. 2007. Т. 10. С. 517—532, Cor.3.5.

целыми числами, причем каждая однородная компонента конечномерна, то градуировка переносится на $U\mathfrak{g}$ и $(U\mathfrak{g})_*$, и тогда Bss оказывается триградуированной.

Теорема 7.1. *Пусть $\mathfrak{g}$ — нильпотентная алгебра Ли, для которой $\gamma_n(\mathfrak{g}) = 0$. Тогда в спектральной последовательности Бухштабера все дифференциалы d_r при $r \geqslant n$ нулевые, в частности, $E_n^{*,*} = E_\infty^{*,*}$.*

В **разделе 7.2.** рассмотрена абелева алгебра Ли $\mathfrak{g}$ конечной размерности n над полем $\Bbbk$ нулевой характеристики. Пусть $x_1, \ldots, x_n$ — некоторый базис алгебры Ли $\mathfrak{g}$, $[x_i, x_j] = 0$ для всех i, j. Универсальная обертывающая $U\mathfrak{g}$ является алгеброй многочленов $A = \Bbbk[x_1, \ldots, x_n]$. Можно считать A градуированной, положив $|x_i| = 2$. Диагональ определена соотношениями $\Delta x_i = 1 \otimes x_i + x_i \otimes 1$. Соответствующая Bss описывается следующим утверждением.

Теорема 7.2. *$(-q)$-я строка Bss*

$$E_1^{0,-q,*} \xleftarrow{d_1} E_1^{1,-q,*} \xleftarrow{d_1} E_1^{2,-q,*} \xleftarrow{d_1} \ldots$$

изоморфна комплексу, двойственному над $\Bbbk$ прямому слагаемому резольвенты Кошуля, состоящему из элементов веса q (степень внешней формы). Каждая такая строка точна, поэтому $E_2^{*,*,*} = E_\infty^{*,*,*}$.

Раздел 7.3.

Алгебра Ли $\mathcal{G}L^n$ над $\mathbb{Q}$, задается базисом $e_1, \ldots, e_n$ и соотношениями $[e_i, e_j] = (j - i)e_{i+j}$, если $i + j \leqslant n$, и $[e_i, e_j] = 0$, если $i + j > n$. Алгебра Ли $\mathcal{G}L^n$ изоморфна фактору алгебры Ли L_1 по идеалу, порожденному элементами e_k, $k \geqslant n + 1$. Эти алгебры Ли градуированы, образующей e_k удобно приписать градуировку $2k$; тем самым соответствующая Bss триградуирована.

Полностью вычислены Bss для алгебр Ли $\mathcal{G}L^3$ и $\mathcal{G}L^4$. Первая стабилизируется в третьем члене, вторая — в четвертом.

В теореме 7.3 доказано, что для алгебры Ли $\mathcal{G}L^3$ в Bss единственные нетривиальные группы в члене E_2 — группы $E_2^{p,-p-1,*}$ и $E_2^{p-2,-p,*}$, $p \geqslant 2$, при этом дифференциал $d_2 : E_2^{p,-p-1,*} \to E_2^{p-2,-p,*}$ является изоморфизмом.

В теореме 7.5 доказано, что алгебры Ли $\mathcal{G}L^4$ в Bss единственные нетривиальные группы в члене E_3 Bss — группы $E_3^{p,-p-1,*}$ и $E_3^{p-3,-p+1}$, при этом дифференциал $d_3 : E_3^{p,-p-1,*} \to E_3^{p-3,-p+1}$ является изоморфизмом.

Далее обсуждается реализация двумерных классов когомологий алгебр Ли $\mathcal{G}L^n$, $n \geqslant 5$. Это важно с геометрической точки зрения, поскольку эти когомологии по теореме Номидзу изоморфны когомологиям соответствующего нильмногообразия M^n, которое при четном n является симплектическим[83]. Хорошо известно[84], что второе число Бетти алгебры Ли $\mathcal{G}L^n$ при $n \geqslant 5$ равно 3. Образующими служат два класса $[\omega_3 \wedge \omega_2]$ и $[\omega_5 \wedge \omega_2 - 3\omega_4 \wedge \omega_3]$, которые стабильны в том смысле, что переходят

[83] *Бабенко И. К., Тайманов И. А.* Произведения Масси в симплектических многообразиях // Математический сборник. 2000. Т. 191, № 8. С. 3—44.

[84] *Миллионщиков Д. В.* Когомологии нильмногообразий и теорема Гончаровой // Успехи математических наук. 2001. Т. 56, 4 (340). С. 153—154.

в одноименные при отображении в когомологиях, индуцированном гомоморфизмом алгебр Ли $p_n : \mathcal{G}L^{n+1} \to \mathcal{G}L^n$. Именно эти два класса и только они имеются в двумерных когомологиях бесконечномерной алгебры Ли L_1. Реализация этих классов в виде произведений Масси или образов дифференциалов Bss точно такая же, как и в когомологиях алгебры Ли L_1.

Пространство $H^1(L_1)$ двумерно и базисом в нем служат классы ω_1 и ω_2, двойственные образующим e_1 и e_2 алгебры Ли, соответственно. Пространство $H^2(L_1)$ двумерно, базис в нем образуют классы x^2_- и x^2_+, представленные коциклами $\omega_3 \wedge \omega_2$ и $\omega_5 \wedge \omega_2 - 3\omega_4 \wedge \omega_3$, соответственно. Класс x^2_- представляет тройное произведение Масси $\langle -\omega_1, \omega_2, \omega_2 \rangle$. Класс x^2_+ представляет пятиместное произведением Масси $\langle \omega_1, \omega_2, -2\omega_1, \omega_1, \omega_2 \rangle$. Класс x^2_- в Bss представляется в виде $d_2\big(-(e_1e_2)^* \otimes \omega_2\big)$. Класс $[(e_5)^* \otimes \omega_2 + 6(e_3^2)^* \otimes \omega_1] \in E_1^{4,*,*}$ лежит в ядре дифференциалов d_2 и d_3, а под действием дифференциала d_4 переходит в x^2_+.

Кроме того, в $H^2(\mathcal{G}L^n)$ имеется еще один (нестабильный) класс

$$\Omega_n = \sum_{i=1}^{[n/2]} (n-2i)\, \omega_{n+1-i} \wedge \omega_i.$$

Его образ $p_n^*(\Omega_n)$ в когомологиях $H^2(\mathcal{G}L^{n+1})$ нулевой, поскольку $d\omega_{n+1} = \Omega_n$.

Для четных $n = 2k$ этот класс очень важен: форма Ω_{2k} задает симплектическую структуру на многообразии M^{2k}. В работе[85] показано, что двумерный класс $[\Omega_{2k}] \in H^2(M^{2k})$ представляет $(2k)$-местное произведение Масси

$$\left\langle \omega_1, (k-1)\omega_1, (k-2)\omega_1, \ldots, 2\omega_1, (\omega_1 \;\; \omega_2), \begin{pmatrix} 0 \\ -\omega_1 \end{pmatrix}, -2\omega_1, \ldots, -(k-1)\omega_1, -k\omega_1 \right\rangle$$

с явно выписанной представляющей системой. Там же показано, что Ω_{2k} не является представителем линейной комбинацией произведений Масси меньшего числа аргументов. Показано, что указанное представление $[\Omega_{2n}]$ в виде $2n$-местного произведения Масси нетривиально, т. е. не содержит нуля.

Этот результат можно распространить на нечетномерные многообразия M^n. А именно, для $n = 2k+1$ класс формы $[\Omega_{2k+1}] \in H^2(M^{2k+1})$ принадлежит $(2k+1)$-матричному произведению Масси

$$\left\langle \omega_1, k\omega_1, (k-1)\omega_1, \ldots, 2\omega_1, (\omega_1 \;\; \omega_2), \begin{pmatrix} 0 \\ -\omega_1 \end{pmatrix}, -2\omega_1, \ldots, -(k-1)\omega_1, -k\omega_1 \right\rangle$$

с определяющей системой, приведенной в диссертации. Класс $[\Omega_{2k+1}] \in H^2(M^{2k+1})$ является представителем линейной комбинации произведений Масси от меньшего числа аргументов. Доказательство непредставимости со случая $n = 2k$ дословно переносится на $n = 2k+1$.

Теперь для небольших n мы приведем явные формулы для цепей θ_n, представляющих классы $(n-1)[e_n^* \otimes \omega_1]$, дифференциалы от которых в Bss для алгебры $U\mathcal{G}L^n$ заклеивают классы $[\Omega_n]$.

n = 4. Класс формы $\Omega_4 = 3\omega_4 \wedge \omega_1 + \omega_3 \wedge \omega_2$ равен $d_3(3e_4^* \otimes \omega_1)$ и представляется дифференциалом коцепи $\theta_4 = 3e_4^* \otimes \omega_1 + e_3^* \otimes \omega_2 - (e_1e_2)^* \otimes \omega_2$.

[85] *Бабенко И. К., Тайманов И. А.* Произведения Масси в симплектических многообразиях // Математический сборник. 2000. Т. 191, № 8. С. 3—44.

n = 5. Класс $[\Omega_5] = [4\omega_5 \wedge \omega_1 + 2\omega_4 \wedge \omega_2]$ равен $d_4(4e_5^* \otimes \omega_1)$ и представляется дифференциалом коцепи $\theta_5 = 4e_5^* \otimes \omega_1 + 2e_4^* \otimes \omega_2$.

n = 6. Класс $[\Omega_6] = [5\omega_6 \wedge \omega_1 + 3\omega_5 \wedge \omega_2 + \omega_4 \wedge \omega_3]$ равен $d_5(5e_6^* \otimes \omega_1)$ и представляется дифференциалом коцепи $\theta_6 = 5e_6^* \otimes \omega_1 + 3e_5^* \otimes \omega_2 + e_4^* \otimes \omega_3 - 2(e_3^2)^* \otimes \omega_1$.

n = 7. Класс $[\Omega_7] = [6\omega_7 \wedge \omega_1 + 4\omega_6 \wedge \omega_2 + 2\omega_5 \wedge \omega_3]$ равен $d_6(6e_7^* \otimes \omega_1)$ и представляется дифференциалом коцепи $\theta_7 = 6e_7^* \otimes \omega_1 + 4e_6^* \otimes \omega_2 + 2e_4^* \otimes \omega_4 + 2(e_3^2)^* \otimes \omega_2 - 2e_3^* \wedge \omega_5 + 2(e_3e_4)^* \otimes \omega_1 + 2(e_2e_5)^* \omega_1$.

Раздел 7.4.

Алгебра Гейзенберга–Ли $\mathcal{GH}^{2n+1}$ определяется образующими $e_0, e_{\pm 1}, \ldots, e_{\pm n}$ и условием, что все их коммутаторы равны 0, кроме $[e_{-j}, e_j] = e_0$, $j = 1, \ldots, n$. Этим алгебрам Ли соответствуют нильмногообразия Гейзенберга.

Числа Бетти $\dim H^*(\mathcal{GH}^{2n+1})$ вычислены в[86]. По двойственности Пуанкаре $b_p = b_{2n+1-p}$.

(i) Для $p \leqslant n$ имеет место равенство $b_p = \binom{2n}{p} - \binom{2n}{p-2}$.

(ii) Пространство точных p-форм порождено формами вида $\omega_{i_1} \wedge \ldots \wedge \omega_{i_p}$, где $i_1 < \ldots < i_p$, $i_j \neq 0$ для всех j;

(iii) Пространство замкнутых p-форм порождено формами вида $d\omega_0 \wedge \omega_{i_1} \wedge \ldots \wedge \omega_{i_{p-2}}$, где $i_1 < \ldots < i_{p-2}$, $i_j \neq 0$ для всех j.

Теорема 7.10.(i) *Элементы групп когомологий* $H^k(\mathcal{GH}^{2n+1})$ *для* $k \neq 0, k \neq n$ *принадлежат* Φ^1.

(ii) *Элементы группы когомологий* $H^{n+1}(\mathcal{GH}^{2n+1})$ *принадлежат* Φ^2, *но не принадлежат* Φ^1.

В работе[87] было показано, что коцепи $\omega_0 \wedge \omega_{\varepsilon_1 \cdot 1} \wedge \omega_{\varepsilon_2 \cdot 2} \wedge \ldots \wedge \omega_{\varepsilon_n \cdot n}$ где $\varepsilon_j = \pm 1$ представляют линейно независимые классы когомологий в $H^{n+1}(\mathcal{GH}^{2n+1})$, они не разлагаются в линейные комбинации нетривиальных произведений классов меньшей размерности, но представляются в виде нетривиальных трехместных матричных произведений Масси.

Доказано, что в Bss любой класс когомологий из группы $H^{n+1}(\mathcal{GH}^{2n+1})$, представленный $\omega_0 \wedge \omega_{\varepsilon_1 \cdot 1} \wedge \omega_{\varepsilon_2 \cdot 2} \wedge \ldots \wedge \omega_{\varepsilon_n \cdot n}$, равен

$$d_2\big((e_0^* + \sum_k \delta^1_{\varepsilon_k}(e_{-k}e_k)^*) \otimes \omega_{\varepsilon_1 \cdot 1} \wedge \omega_{\varepsilon_2 \cdot 2} \wedge \ldots \wedge \omega_{\varepsilon_n \cdot n}\big),$$

где δ_i^j — символ Кронекера (утверждение 7.9). Обратим внимание, что количество классов, о которых здесь идет речь, равно 2^n, а это меньше, чем соответствующее число Бетти b_{n+1}, которое в силу двойственности Пуанкаре равно $b_{n+1} = b_n = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n-2}$. Иными словами, группа $H^{n+1}(\mathcal{GH}^{2n+1})$ не исчерпывается рассмотренными элементами.

---

[86] *Santharoubane L. J.* Cohomology of Heisenberg Lie algebras // Proceedings of the American Mathematical Society. 1983. Т. 87, № 1. С. 23—28.

[87] *Бабенко И. К., Тайманов И. А.* Произведения Масси в симплектических многообразиях // Математический сборник. 2000. Т. 191, № 8. С. 3—44.

Для Ли $\mathcal{GH}^5$ и $\mathcal{GH}^7$ для всех таких оставшихся элементов получены представления в виде нетривиальных тройных скобок Масси и в виде образов дифференциала d_2 в Bss.

Содержание главы 8

Раздел 8.1.

В явном виде вычислена структура на когомологиях алгебры $A(1)$, заданная дифференциалами Bss, в частности, получены представления всех элементов этих когомологий в виде специальных произведений Масси (теоремы 8.1 и 8.2).

Подалгебра Хопфа $A(1) \subset \mathcal{A}_2$ порождена элементами $1, Sq^1, Sq^2$. Двойственная алгебра Хофпа $A(1)_*$ имеет вид $A(1)_* = \mathbb{Z}/2[\xi_1, \xi_2]/\langle \xi_1^4 = 0, \xi_2^2 = 0\rangle$.

В утверждении 8.1 описаны последовательные нетривиальные факторы фильтрации в $A(1)_*$.

Теорема 8.1. *Для Bss алгебры Хопфа $A(1)$ член $E_2^{*,*,*}$ описывается следующим образом. Для $-q = 0, 1, 2$ группы $E_2^{*,q,*}$ тривиальны. При $-q \geqslant 3$ в $E_2^{j,q,*}$ проявляется 4-периодичность (здесь $k \geqslant 0$) по q:*

$-q\backslash j$	0	1	2	3	4
$4k+3$	vw^k	$\xi_1^2 \otimes h_1^2 w^k$			
$4k+4$	$\boxed{w^{k+1}}$	$\xi_1^2 \otimes vw^k$	$\xi_1^3 \otimes h_1^2 w^k$	$\xi_2\xi_1 \otimes h_1 w^k$	
$4k+5$			$(\xi_2 + \xi_1^3) \otimes vw^k$	$\xi_2\xi_1^2 \otimes h_1^2 w^k$	
$4k+6$				$\boxed{\xi_2\xi_1^2 \otimes vw^k}$	$\xi_2\xi_1^3 \otimes h_1^2 w^k$

Для дифференциала d_2 имеют место равенства

$$d_2(\xi_1^3 \otimes h_1^2 w^k) = vw^k, \quad d_2(\xi_2\xi_1 \otimes h_1 w^k) = \xi_1^2 \otimes h_1^2 w^k,$$
$$d_2(\xi_2\xi_1^2 \otimes h_1^2 w^k) = \xi_1^2 \otimes vw^k, \quad d_2(\xi_2\xi_1^3 \otimes h_1^2 w^k) = (\xi_2 + \xi_1^3) \otimes vw^k.$$

До $E_3^{*,*,*}$ доживают в точности обведенные в рамку элементы, при этом в $E_3^{*,*,*}$ выполнено равенство $d_3(\xi_2\xi_1^2 \otimes vw^k) = w^{k+1}$.

Теорема 8.2. *Элементы $\mathrm{Ext}_{A(1)}^{*,*}(\mathbb{Z}/2, \mathbb{Z}/2)$ имеют следующие фильтрации и представления в виде дифференциалов Bss и итерированных специальных произведений*

Масси:

элемент	*фильтрация*	*представление дифференциалом*	*произведение Масси*
$h_0^n w^k, n \geqslant 1, k \geqslant 0$	1	$d_1(\xi_1 \otimes h_0^{n-1} w^k)$	$h_0 \cdot h_0^{n-1} w^k$
$w^k, k \geqslant 1$	3	$d_3(\xi_2 \xi_1^2 \otimes v w^{k-1})$	$\langle h_1, h_0, h_1, v w^{k-1} \rangle$
$h_1 w^k, k \geqslant 0$	1	$d_1(\xi_1^2 \otimes w^k)$	$h_1 \cdot w^k$
$h_1^2 w^k, k \geqslant 0$	1	$d_1(\xi_1^2 \otimes h_1 w^k)$	$h_1 \cdot h_1 w^k$
$h_0^n v w^k, n \geqslant 1, k \geqslant 0$	1	$d_1(\xi_1 \otimes h_0^{n-1} v w^k$	$h_0 \cdot h_0^{n-1} v w^k$
$v w^k, k \geqslant 0$	2	$d_2(\xi_1^3 \otimes h_1^2 w^k)$	$\langle \begin{pmatrix} h_0 & h_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} h_1 \\ h_0 \end{pmatrix}, h_1^2 w^k \rangle = \langle h_0, h_1, h_1^2 w^k \rangle$

Раздел 8.2.

Показано, как Bss используется в задаче вычисления когомологий алгебр Хопфа. А именно, без использования априорной информации методом Bss вычислены группы $\mathrm{Ext}_{A(1)}^{s,*}(\mathbb{Z}/2, \mathbb{Z}/2)$ для $s \leqslant 4$, исходя из фильтрации двойственной алгебры Хопфа $A(1)_*$.

Раздел 8.3.

На примере алгебры $\mathcal{A}_2$ продемонстрирован механизм, описывающий соотношения в когомологиях алгебр Хопфа в терминах дифференциалов Bss. Рассмотрен полный набор соотношений, известных в группах $\mathrm{Ext}_{\mathcal{A}_2}^{s,t}(\mathbb{Z}/2, \mathbb{Z}/2)$, $s \leqslant 3$. Здесь же мы рассмотрим только два примера.

Хорошо известное соотношение $h_{i+1} h_i$ в $\mathrm{Ext}_{\mathcal{A}_2}^{2,t}(\mathbb{Z}/2, \mathbb{Z}/2)$ является следствием соотношения $d_1 \circ d_1 = 0$ в первом листе Bss. В самом деле, $h_{i+1} h_i = d_1(\xi_1^{2^{i+1}} \otimes h_i) = d_1 \circ d_1(\xi_2^{2^i}) = 0$.

Соотношение $\langle h_{i+1}, h_i, h_{i+1} \rangle = h_i h_{i+2}$ реализуется другим способом. А именно, левая часть этого равенства могла бы представляться в виде $d_2(\xi_2^{2^i} \otimes h_{i+1})$. Но элемент $\xi_2^{2^i} \otimes h_{i+1}$ не доживает до $E_2^{*,*,*}$, поскольку представляется в виде $d_1(\xi_2^{2^i} \xi_1^{2^{i+1}})$. Значит, элемент $\langle h_{i+1}, h_i, h_{i+1} \rangle$ имеет фильтрацию не больше 1. Нетрудно проверить, что он имеет вид $d_1(\xi_1^{2^i} \otimes h_{i+2}) = h_i h_{i+2}$.

Также показано, как методом Bss можно найти элементы Новикова[88] $c_i = \langle h_{i+1}, h_i, h_{i+2}^2 \rangle \in E^3$. Для них $c_i = d_2(\xi_2^{2^i} \otimes h_{i+2}^2)$.

[88] *Новиков С. П.* О когомологиях алгебры Стинрода // Докл. АН СССР. 1959. Т. 128, № 5. С. 893—895.

Раздел 8.4.

В группах $\mathrm{Ext}^{2,*}_{\mathcal{A}_p}(\mathbb{Z}/p,\mathbb{Z}/p)$ элементы, не выражающиеся мультипликативно через одномерные классы когомологий, известны[89]. Они представляются в виде специальных произведений Масси[90]:

$$\begin{array}{rclcrcl} \mu_i & = & \langle h_i, h_i, h_{i+1}\rangle; & & \nu_i & = & \langle h_i, h_{i+1}, h_{i+1}\rangle; \\ \rho & = & \langle h_0, h_0, \alpha_0\rangle; & & \lambda_i & = & \langle h_i, h_i, \ldots, h_i\rangle \ (p \text{ сомножителей}). \end{array}$$

В следующей таблице предъявлены представления этих элементов в виде значений дифференциалов Bss для алгебры $\mathcal{A}_p$:

элемент	фильтрация	представление дифференциалом	представляющая коцепь
$\mu_i,\quad i\geqslant 0$	2	$d_2\big(-\frac{1}{2}\xi_1^{2p^i}\otimes h_{i+1}\big)$	$-\frac{1}{2}[\xi_1^{2p^i}\vert\xi_1^{p^{i+1}}]-[\xi_1^{p^i}\vert\xi_1^{p^i+p^{i+1}}-\xi_2^{p^i}]$
$\nu_i,\quad i\geqslant 0$	2	$d_2\big((\xi_2^{p^i}-\xi_1^{p^i+p^{i+1}})\otimes h_{i+1}\big)$	$-\frac{1}{2}[\xi_1^{p^i}\vert\xi_1^{2p^{i+1}}]-[\xi_1^{p^i+p^{i+1}}-\xi_2^{p^i}\vert\xi_1^{p^{i+1}}]$
$\lambda_i,\quad i\geqslant 0$	$p-1$	$d_{p-1}\big(\xi_1^{(p-1)p^i}\otimes h_i\big)$	$-\sum\limits_{k-1}^{p-1}\frac{1}{k!(p-k)!}[\xi_1^{k\cdot p^i}\vert\xi_1^{(p-k)p^i}]$
ρ	2	$d_2\big(-\frac{1}{2}\xi_1^2\otimes\alpha_0\big)$	$-\frac{1}{2}[\xi_1^2\vert\tau_0]-[\xi_1\vert\tau_1]$

Соотношения между произведениями элементов $\mathrm{Ext}^{s,*}_{\mathcal{A}_p}(\mathbb{Z}/p,\mathbb{Z}/p)$, $s=1,2$, возможно включающие скобки Масси, могут быть описаны с помощью дифференциалов Bss таким же способом, как и для алгебры Стинрода $\mathcal{A}_2$, детали мы опускаем.

Содержание приложений

В приложении приведены основные сведения об алгебрах Стинрода, двойственных им алгебрах Хопфа, об их подалгебрах Хопфа, об их когомологиях малой размерности. Там же приведены необходимые сведения о матричных произведениях Масси.

[89] *Liulevicius A.* The factorization of cyclic reduced powers by secondary cohomology operations // Proceedings of the National Academy of Sciences. 1960. Т. 46, № 7. С. 978—981.

[90] *Ravenel D. C.* Complex cobordism and stable homotopy groups of spheres. American Mathematical Soc., 2003.

Публикации автора по теме диссертации

1. *Buchstaber V.*, *Popelensky F. Y.* Cohomology of the Heisenberg Manifold Sequence // Journal of Mathematical Sciences. — 2024. — Т. 284. — С. 17—58.
2. *Emelyanov D. Y.*, *Popelensky T. Y.* On monomial bases in the mod p Steenrod algebra // Journal of Fixed Point Theory and Applications. — 2015. — Т. 17, № 2. — С. 341—353.
3. *Emelyanov D.*, *Popelensky T.* Bases in the mod p Steenrod algebra, β included // Journal of Pure and Applied Algebra. — 2019. — Т. 223, № 8. — С. 3386—3401.
4. *Emelyanov D.*, *Popelensky T.* On some sequences of modules over the mod p Steenrod algebra // Homology, Homotopy and Applications. — 2020. — Т. 22, № 1. — С. 185—202.
5. *Kryazhev A.*, *Kuznetsov D.*, *Popelensky T.* Conjugation Equation for Quaternionic Conjugation Spaces // Russian Journal of Mathematical Physics. — 2025. — Т. 32, № 1. — С. 105—122.
6. *Ovchinnikova T.*, *Popelensky T. Y.* On triangular changes of bases in the mod p Steenrod algebra // Journal of Mathematical Sciences. — 2021. — Т. 259, № 5. — С. 699—711.
7. *Popelensky T. Y.* Action of Reduced Powers on the Homology of Products of Complex Projective Spaces and Products of Lens Spaces // Russian Journal of Mathematical Physics. — 2025. — Т. 32, № 1. — С. 150—159.
8. *Popelensky T.* Annihilator ideal for the action of the Steenrod algebra mod p on $K(\mathbb{Z}_p, 2)$ // Topology and its Applications. — 2020. — Т. 275. — С. 107034.
9. *Popelensky T.* Relations between kernels and images of reduced powers for some right A_p-modules // Publications de l'Institut Mathematique. — 2018. — Т. 103, № 117. — С. 191—198.
10. *Бухштабер В. М.*, *Попеленский Ф. Ю.* Когомологии алгебр Хопфа и произведения Масси // Успехи математических наук. — 2024. — Т. 79, 4 (478). — С. 5—94.
11. *Емельянов Д. Ю.*, *Попеленский Ф. Ю.* О заменах базисов в алгебре Стинрода mod p // Математический сборник. — 2017. — Т. 208, № 4. — С. 3—16.
12. *Попеленский Ф. Ю.* Об аддитивных базисах и их заменах в $\mathbb{C}$-мотивной алгебре Стинрода mod 2 // Труды Математического института им. В. А. Стеклова РАН. — 2025. — Т. 330. — С. 322—335.
13. *Попеленский Ф. Ю.* Произведения Масси и соотношения в когомологиях алгебр Стинрода // Математический сборник. — 2026. — Т. 217, № 2. — С. 108—153.

Попеленский Федор Юрьевич

Алгебры Хопфа и их когомологии
в задачах алгебраической топологии и гомологической алгебры

Автореф. дис. на соискание ученой степени доктора физ.-мат. наук.

Подписано в печать 12.03.2026.
Тираж 75 экз.