ОТЗЫВ
на диссертацию Попеленского Фёдора Юрьевича
«Алгебры Хопфа и их когомологии в задачах алгебраической топологии и гомологической алгебры»,
представленную на соискание учёной степени
доктора физико-математических наук
по специальности 1.1.3 – геометрия и топология

Диссертационная работа Ф. Ю. Попеленского посвящена двум взаимосвязанным группам проблем, лежащим на стыке алгебраической топологии, гомологической алгебры и теории алгебр Хопфа. Первую группу составляют вопросы, связанные с внутренним строением алгебр Стинрода $\mathcal{A}_p$ (для $p > 2$) и мотивной алгебры Стинрода $\mathcal{A}_2^m$: построение экстремальных аддитивных базисов, исследование матриц перехода между ними, а также приложения этих результатов к представлениям алгебр Стинрода в важных модулях (гипотеза Тоды, аннигиляторные идеалы, описание частично аннулируемых элементов). Второй круг вопросов, связан с одним из важных вычислительных инструментов гомотопической топологии — спектральной последовательностью типа Адамса–Новикова. У таких спектральных последовательностей второй член представляет собой Ext-группы над алгеброй когомологических операций. У спектральной последовательности Адамса–Новикова, построенной по теории комплексных кобордизмов, второй член равен $\mathrm{Ext}_S^{*,*}(\mathbb{Z}, \Omega_U^*)$, есть и $p$-локальные аналоги; у обычной спектральной последовательности Адамса второй член равен $\mathrm{Ext}_{\mathcal{A}_p}^{*,*}(\mathbb{Z}/p, \mathbb{Z}/p)$. Отметим, что ни в одном из этих вариантов полного вычисления групп когомологий до сих пор нет, имеются явные описания образующих и мультипликативных соотношений (включая скобки Масси) лишь в определенном диапазоне градуировок. Поэтому разработка гомологических методов, направленных на вычисление когомологий алгебр Хопфа, на описание или вычисление (высших) структур в этих когомологиях была и остается важной и актуальной проблемой.

Кратко опишем некоторые предшествующие результаты. Первый важный базис — базис допустимых мономов — построили Ж. П. Серр для алгебры $\mathcal{A}_2$ и А. Картан для алгебр $\mathcal{A}_p$, $p > 2$. Дж. Милнор в 1958 году показал, $\mathcal{A}_p$ — алгебра Хопфа, построил в ней базис, называемый сейчас базисом Милнора, и вывел явную формулу умножения для таких элементов. Вместе с тем, оказалось, что для ряда задач удобны другие базисы, это связано с некоммутативностью умножения в $\mathcal{A}_p$. Так например, Ч. Т. К. Уолл, доказывая одну из гипотез Х. Тоды, построил новый базис в алгебре $\mathcal{A}_2$. Позже Д. Арноном исследуя наборы мономов от $Sq^i$, экстремальные в левом/правом лексикографическом порядках переоткрыл базисы допустимых мономов и базис Уолла в $\mathcal{A}_2$ и нашел два новых базиса. Важно, что для них немедленно были найдены топологические применения (Джиамбалво, Петерсон), в частности, в исследовании действия алгебры $\mathcal{A}_2$ в когомологиях пространств Эйленберга–Маклейна $K(\mathbb{Z}/2, n)$. Имеются также другие результаты (Монкс, Палмьери, Жанг, Вуд и др.), но случай алгебры $\mathcal{A}_p$, $p > 2$, за исключением базиса допустимых мономов и базиса Милнора, до последнего времени оставался открытым, в диссертации получены практически исчерпывающие результаты в этом направлении. Мотивной алгебры Стинрода $\mathrm{mod}\ 2$ и соответствующая спектральная последова-

тельность типа Адамса (В.А.Воеводский, Ф.Морель, Д.Исаксен, Д.Даггер), дала возможность завершить вычисление некоторых стабильных гомотопических групп сфер, недоступных классическим методам (ссылки на эти работы можно найти в диссертации). Поэтому базисы в $\mathbb{C}$-мотивной алгебре Стинрода интересны.

Далее, представления алгебр Стинрода в когомологиях классифицирующих пространств групп $(\mathbb{Z}/p)^s$ оказались интересны в связи в гипотезой об алгебраическом трансфере Зингера, связывающем модулярные инварианты группы $GL_s(\mathbb{Z}/p)$ с $\mathrm{Ext}^{s,*}_{\mathcal{A}_p}$. Хотя для $p = 2$ она недавно была опровергнута, представляется, что информация о таких представлениях интересна в связи со структурой модулей неразложимых элементов. Для $p = 2$ имеется ряд результатов Ф.Петерсона, Ш.Олта, У.Зингера, случай же $p > 2$ в литературе практически не рассматривался. В диссертации получен ряд результатов в этом направлении.

Существуют многочисленные примеры пространств $X$, снабжённых инволюцией $\tau$, таких что имеет место изоморфизм колец $\mathbb{Z}/2$-когомологий $\varkappa : H^{2*}(X) \to H^*(X^\tau)$, уменьшающий градуировку вдвое ($X^\tau$ — пространство неподвижных точек инволюции). Наиболее простые примеры — комплексные грассманианы и многообразия флагов. В наиболее интересных и важных случаях такой изоморфизм является частью структуры на эквивариантных когомологиях пространств $X$ и $X^\tau$, которую Хаусманн, Хольм и Пуппе назвали (когомологическим) $H$-оснащением. Составной частью $H$-оснащения является так называемое уравнение сопряженности в эквивариантных когомологиях, связывающее класс $a \in H^{2*}(X)$ с соответствующим ему классом $\varkappa(a) \in H^*(X^\tau)$. Франц и Пуппе вычислили коэффициенты этого уравнения сопряженности в терминах квадратов Стинрода. В диссертации это направление продолжено на случай действия двух коммутирующих инволюций.

Как отмечено выше, вычисление второго члена $\mathrm{Ext}^{*,*}_S(\mathbb{Z}, \Omega^*_U)$ спектральной последовательности Адамса–Новикова — трудная проблема, до сих пор не решенная в полном объеме, даже $p$-локально. Существует ряд методов, позволивших продвинуться в его вычислении (С.П.Новиков, Х.Миллер, Д.Равенел, С.Уилсон и др.). Один из первых таких таких методов основан на спектральной последовательности, предложенной В.М.Бухштабером. Она строится по фильтрации в алгебре $S_*$, двойственной к алгебре Ландвебера–Новикова $S$. При этом оказывается, что намного удобнее использовать изоморфизм $S_*$ с некоторой подалгеброй $\Omega^*_U(\mathbb{Z}) \subset \Omega^*_U \otimes \mathbb{Q}$, которую Бухштабер выделил условием типа целочисленности характеристических чисел. С ее помощью был получен ряд важных результатов о группах $\mathrm{Ext}^{s,*}_S(\mathbb{Z}, \Omega^*_U)$, $s = 1, 2$ (В.М.Бухштабер, Н.В.Панов, А.В.Шокуров). В диссертации показано, как оригинальную идею построения такой спектральной последовательности можно реализовать для любой градуированной связной алгебры Хопфа, а также для любой универсальной обертывающей остаточно нильпотентной алгебры Ли. Показано, как дифференциалы этой спектральной последовательности связаны с произведениями Масси специального вида, а также как дифференциалы могут использоваться для нахождения соотношений в когомологиях алгебр Хопфа.

Охарактеризуем содержание работы. Диссертация (объёмом 321 стр.) состоит из введения, восьми глав, заключения и списка литературы из 228 наименований.

*Первая глава* посвящена $\mathbb{C}$-мотивной алгебре Стинрода $\bmod 2$. Автор стро-

ит в ней новые аддитивные базисы: $Z$ и $X$-базисы, семейства $P_t^s$-базисов, коммутаторные базисы и аналоги базисов Вуда (теоремы 1.9, 1.12-15); напомним, что базис допустимых мономов и базис Милнора в этой алгебре были построены В.А.Воеводским. Доказана треугольность матриц перехода от базиса Милнора к $X$-базису, а также к любому $P_t^s$-базису (теоремы 1.10, 1.11). Это нетривиальное обобщение случая классической алгебры Стинрода $\mathrm{mod}\ 2$, так как наличие дополнительной градуировки, связанной с образующей $\tau$, принадлежащей основному кольцу $\mathcal{M}_2 = \mathbb{F}_2[\tau]$, заметно усложняет структуру алгебры операций и структуру двойственной алгебры.

Во *второй главе* для алгебр Стинрода $\mathcal{A}_p$, $p > 2$, строятся семейства экстремальных базисов: $\beta X$, $\beta Z$, $ZA$, $XC$ (теоремы 2.7, 2.8, 2.10, 2.11). Тонкость этих результатов связана с тем, что хоть порядки на мономах, относительно которых эти базисы экстремальны и выглядят естественно, но не совпадает с очевидным лексикографическим порядком на мономах от символов $P^j$, $j \geq 1$ и $\beta$. Также в этой главе построен важный $\beta C$-базис, а также $X$ и $Z$-базисы в алгебре $\overline{\mathcal{A}}_p = \mathcal{A}_p/(\beta)$ (теоремы 2.12 и 2.1, 2.2).

*Третья глава* посвящена вопросу о треугольности матриц перехода между различными базисами в алгебрах $\mathcal{A}_p$ и $\overline{\mathcal{A}}_p$. Автор доказывает треугольность перехода от базиса Милнора к $\beta C$, $\beta X$, $XC$, $\beta P_t^s$-базисам, а также от $ZA$-базиса к $PQ$-базису. Пример 3.1, демонстрирующий, что для $Z$-базиса соответствующая матрица в общем случае не является треугольной, подчёркивает тонкость полученных результатов.

В *четвёртой главе* решен ряд задач, в которых используется специфика аддитивных базисов. С помощью $\beta C$-мономов построено новое семейство полиномиальных образующих кольца $H^*(K(\mathbb{Z}/p,n);\mathbb{Z}/p)$ (теорема 4.3). Доказана тривиальность аннигиляторного идеала действия $\mathcal{A}_p$ на $H^*(K(\mathbb{Z}/p,2);\mathbb{Z}/p)$ для $p > 2$ (теорема 4.4). Установлена точность последовательности Тоды $\mathcal{A}_p$-модулей вплоть до критической градуировки, показано, что в критической градуировке фактор-пространство $\ker\beta/\operatorname{im}\alpha$ одномерно (теоремы 4.8, 4.9, 4.10). Наконец, для сопряжённого правого действия $\mathcal{A}_p$ на гомологиях произведения линзовых пространств доказано, что подалгебры $\Delta(k)$ $k$-частично аннулируемых элементов являются свободными, и для $p > 2$ явно описан базис $\Delta(0)$ (теоремы 4.11, 4.13). Завершает главу теория когомологического $Q$-оснащения для пространств с двумя коммутирующими инволюциями. Рассматриваются пространства, на которых задано действие двух коммутрующих инволюция, такое что кольца $\mathbb{Z}/2$-когомологий самого пространства и пространства неподвижных точек инволюций изоморфны с понижением размерности в 4 раза. Этот изоморфизм не индуцируется никаким отображением, но тем не менее, в ряде случаев он включается в определенное соотношение ($Q$-оснащение) между эквивариантными когомологиями этих пространств. Это соотношение некоторую коммутативную диаграмму, для которой должно быть выполнено так называемое кватернионное уравнение сопряжённости. В разделе 4.5 доказано, что класс таких пространств достаточно широк (теорема 4.19), а коэффициенты уравнения сопряженности выражены через элементы базиса Милнора (теоремы 4.20, 4.21).

В *пятой главе* построена общая теория спектральной последовательности Бухштабера (Bss) для градуированных связных алгебр Хопфа. Такая спектральная последовательность была предложена в 1970 г. В.М.Бухштабером для конкретной задачи — вычисления второго члена $\mathrm{Ext}_S^{*,*}(\mathbb{Z},\Omega_U^*)$ спектральной после-

довательности Адама–Новикова, сходящейся к стабильным гомотопическим группам сфер. Помимо общей теории Bss, одним из ключевых результатом главы является теорема 5.5, устанавливающая, что ненулевой элемент фильтрации $k$ в $\mathrm{Ext}_A^{s,*}(\Bbbk,\Bbbk)$ представляется нетривиальным $(k+1)$-местным специальным матричным произведением Масси, где первые $k$ аргументов лежат в $\mathrm{Ext}_A^{1,*}(\Bbbk,\Bbbk)$, а последний — в $\mathrm{Ext}_A^{s-1,*}(\Bbbk,\Bbbk)$. Это устанавливает глубокую связь между алгебраической структурой Bss и высшими операциями Масси.

Возможность применения Bss к когомологиям данной алгебры Хопфа упирается в знание определенной фильтрации в двойственной алгебре Хопфа. В *шестой главе* эта фильтрация вычислена для алгебры Ландвебера–Новикова $S\otimes\mathbb{Q}$ (теорема 6.1) и универсальной обертывающей $UL_1$ алгебры Ли формальных векторных полей на прямой, обращающихся в 0 в начале координат вместе с первой производной (теорема 6.4).

*Седьмая глава* посвящена применению Bss к нильпотентным алгебрам Ли. Явно вычислены спектральные последовательности для универсальных обертывающих конечномерных факторов $GL_3$, $GL_4$ алгебры Ли $L_1$, а также для универсальных обертывающих алгебр Гейзенберга–Ли $GH_5$ и $GH_7$ (теоремы 7.3, 7.5, 7.10). Предъявлены явные формулы для представления классов когомологий в виде образов дифференциалов Bss.

Наконец, в *восьмой главе* Bss применена к алгебрам Стинрода $\mathcal{A}_p$. В теоремах 8.1 и 8.2 полностью вычислена Bss для подалгебры Хопфа $A(1)\subset\mathcal{A}_2$ и все элементы в когомологиях этой подалгебры Хопфа реализованы образами дифференциалов Bss. На примере подалгебры $\mathcal{A}(1)$ показана вычислительные возможности Bss. Автор, не используя априорной информации, заново вычисляет группы $\mathrm{Ext}^{s,t}_{\mathcal{A}(1)^*}(\mathbb{Z}/2,\mathbb{Z}/2)$ для $s\leq 4$. Автор показывает, как дифференциалы Bss кодируют классические соотношения Адамса (например, $h_{i+1}h_i=0$, $\langle h_{i+1},h_i,h_{i+1}\rangle=h_ih_{i+2}$) в когомологиях алгебры $\mathcal{A}_2$. Представляется, что эта глава демонстрирует перспективность поиска дальнейших приложений Bss в топологии и гомологической алгебре.

Диссертация Ф. Ю. Попеленского «Алгебры Хопфа и их когомологии в задачах алгебраической топологии и гомологической алгебры» является крупным вкладом в развитие алгебраической топологии и гомологической алгебры. Диссертация соответствует специальности 1.1.3 – геометрия и топология. Диссертация написана на высоком научном уровне, результаты изложены чётко и строго.

Результаты диссертации опубликованы в ведущих российских и зарубежных математических журналах. Всего по теме диссертации Ф.Ю.Попеленским опубликовано 13 статей. Результаты диссертации неоднократно докладывались на представительных международных и российских конференциях и ведущих научных семинарах (МГУ, НИУ ВШЭ, МИАН, ПОМИ). Все результаты, представленные в диссертации, являются новыми, получены автором самостоятельно и снабжены подробными доказательствами. В работах, выполненных с соавторами, личный вклад диссертанта четко выделен. Автореферат адекватно и полно отражает содержание диссертации.

Рассматриваемая диссертация полностью соответствует требованиям пп. 9–14 «Положения о порядке присуждения учёных степеней», утверждённого постановлением Правительства РФ № 842 (в действующей редакции), предъявляемым к докторским диссертациям, а её автор, Попеленский Фё-

дор Юрьевич, заслуживает присуждения учёной степени доктора физико-математических наук по специальности 1.1.3 – геометрия и топология.

Официальный оппонент,
главный научный сотрудник Лаборатории алгебры и теории чисел
ФГБУН Санкт-Петербургское отделение
Математического института им. В.А.Стеклова РАН,
академик РАН,
доктор физико-математических наук специальность 01.01.06

Панин Иван Александрович

Адрес: Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Санкт-Петербургское отделение Математического института им.
В.А.Стеклова Российской академии наук (ПОМИ),
Адрес: наб. Фонтанки 27, 191023, Санкт-Петербург, Россия.
Адрес электронной почты: panin@pdmi.ras.ru.
Сайт: http://www.pdmi.ras.ru, телефон: +7(812)310-71-64

*Подпись И.А.Панина заверяю:*
«27» мая 2026 г.

главный специалист
Скрипка