«УТВЕРЖДАЮ»
Проректор по научной работе
Федеральное государственное
бюджетное образовательное
учреждение высшего
образования «Санкт-Петербургский
государственный университет»



_____ С. В. Микушев

25 мая 2026 г.

ОТЗЫВ ВЕДУЩЕЙ ОРГАНИЗАЦИИ

Федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Санкт-Петербургский государственный университет» на диссертацию Попеленского Фёдора Юрьевича «Алгебры Хопфа и их когомологии в задачах алгебраической топологии и гомологической алгебры», представленную на соискание учёной степени доктора физико-математических наук по специальности 1.1.3. Геометрия и топология

Теория алгебра Хопфа, начав свое развитие в алгебраической топологии и алгебре с 1950-х гг., к настоящему времени стала самостоятельным разделом математики — с одной стороны, а с другой — нашла важные применения в самых разных областях: в алгебраической топологии, алгебраической геометрии, комбинаторике, интегрируемых системах, квантовой теории поля, теории представлений и т. д. В топологии ряд работ А.Бореля, Дж.Милнора, Дж.Мура, Ф.Адамса, С.П.Новикова, П.Ландвебера, Д.Квиллена и других посвящен проблемам, стимулировавшим развитие теории алгебр Хопфа. Для вычисления и исследования стабильных гомотопических групп пространств и спектров используются спектральные последовательности Адамса, основанные на теориях когомологий с $\mathbb{Z}/p$-коэффициентами, и спектральные последовательности Адамса–Новикова, основанные на экстраординарных теориях когомологий (комплексные кобордизмы и связанные с ними теории). Вторые листы таких спектральных последовательностей выражаются алгебраически в виде когомологий (Ext-группы) алгебр операций в используемой теории когомологий с коэффициентами в когомологиях изучаемого пространства. В последние годы наблюдается всплеск интереса к такой тематике в связи с открытием применимости мотивных методов в классической стабильной гомотопической теории (В.А.Воеводский, Ф.Морель, Д.Исаксен, Д.Даггер, П.Пстранговски, Р.Бурклунд и др.). Вместе с тем, задача вычисления когомологий алгебр стабильных операций даже для обычных $\mathbb{Z}/p$-когомологий до сих пор не решена, они известны только в определенном, зависящем от p, диапазоне размерностей. Таким образом, диссертация Ф.Ю. Попеленского, посвящённая систематическому развитию теории алгебр Хопфа и их когомологий

с акцентом на новые аддитивные базисы, спектральную последовательность Бухштабера, которая определенным образом описывает структуру когомологий алгебры Хопфа, а также их приложения, безусловно, является актуальной.

Круг задач, которые охватывает диссертация, можно разделить на три части. Первая часть проблем построения аддитивных базисов в алгебрах Стинрода mod p. В них имеются классические базисы Картана-Серра и Милнора. Для алгебры Стинрода mod 2 в этом направлении есть ряд других результатов, принадлежащих Уоллу, Арнону, Вуду, Палмьери, Жангу и Монксу. Для случай $p > 2$ прогресс фактически отсутствовал, в большом обзоре «Problems in the Steenrod algabra» (1998) Р.Вуд сформулировал проблему нахождения экстремальных базисов в алгебрах Стинрода mod p, в определенном смысле аналогичных уж известных для $p = 2$. Эта проблема решена в диссертации. Вторая часть посвящена ряду применений построенных базисов к известным проблемам представлений алгебр Стинрода на кольцах когомологий «тестовых» пространств — пространств Эйленберга–Маклейна и произведений линз (или комплексных проективных пространств). Третья часть — систематическое развитие спектральной последовательности Бухштабера, задающей определенную структуру в когомологиях градуированной связной алгебры Хопфа. Кроме того, в диссертации приведены важные примеры вычислений этой спектральной последовательности, а также фильтраций в двойственных алгебрах Хопфа, задающих такую спектральную последовательность.

Перечислим основные достижения автора диссертационной работы. Развитие общей теории спектральной последовательности Бухштабера (Bss) для градуированных алгебр Хопфа. Показано, что дифференциалы Bss задают возрастающую фильтрацию в когомологиях алгебр Хопфа. Для алгебр Хопфа над полем установлена глубокая связь между дифференциалами Bss и нетривиальными специальными матричными произведениями Масси: ненулевой элемент фильтрации k в $\mathrm{Ext}_A^{s,*}(\Bbbk,\Bbbk)$ представляется в виде нетривиального $(k+1)$-местного специального матричного произведения Масси k аргументов из первой Ext-группы и одного аргумента из $(s-1)$-й. Полностью вычислены Bss для нильпотентных алгебр Ли GL_3, GL_4, GH_5, GH_7. Продемонстрирован механизм возникновения соотношений между произведениями и скобками Масси в когомологиях алгебр Хопфа на примере классических результатов Адамса и Новикова для A_2.

Для большого запаса алгебр Хопфа полностью вычислена фильтрация двойственных алгебр Хопфа (именно она задает Bss): для алгебры Ландвебера–Новикова $S\otimes\mathbb{Q}$, для универсальной обёртывающей UL_1 алгебры Ли формальных векторных полей на прямой, обращающихся в 0 вместе с первой производной в точке нуль, а также для ее конечномерных факторов и алгебр Гейзенберга–Ли.

Построены и исследованы новые экстремальные базисы в алгебрах Стинрода. А именно, для простых $p > 2$ в алгебре $\mathcal{A}_p$ построены и исследованы βX-, βZ-, ZA-, XC- и βC-базисы, что решает известную проблему Р. Вуда об экстремальных базисах. Доказана треугольность матриц перехода от базиса Милнора к указанным выше базисам, а также к C-базису, PQ-базису и другим. Наконец, для $\mathbb{C}$-мотивной алгебры Стинрода A_2^m над $\mathbb{F}_2[\tau]$ построены Z-, X-базисы, семейства P_t^s-базисов и коммутаторные базисы, доказана треугольность матриц перехода от базиса Милнора к X-базису, к P_t^s-базисам.

Упомянем полученные в диссертации приложения. Доказана тривиальность аннигиляторного идеала действия алгебры $\mathcal{A}_p$ на $H^*(K(\mathbb{Z}/p,2);\mathbb{Z}/p)$ для $p>2$. Получены новые семейства мультипликативных образующих колец $H^*(K(\mathbb{Z}/p,n);\mathbb{Z}/p)$ в терминах βC-мономов. Исследована гипотеза Тоды для $p>2$: установлена точность последовательностей Тоды $\mathcal{A}_p$-модулей вплоть до критической градуировки и вычислен фактор в этой критической градуировке — он оказался одномерным, предъявлен нетривиальный представитель. Для сопряжённого правого действия алгебры $\mathcal{A}_p$ на гомологиях произведения линзовых пространств доказано, что подалгебры $\Delta(k)$ k-частично аннулируемых элементов являются свободными; для $p>2$ явно описан базис $\Delta(0)$. Введено понятие когомологического Q-оснащения для пространств с двумя коммутирующими инволюциями, обобщающее теорию H-оснащённых пространств; выведено кватернионное уравнение сопряжения, и его коэффициенты выражены через операции Стинрода (элементы базиса Милнора).

Полезно также отметить потенциальные вычислительные возможности Bss: без привлечения априорной информации заново вычислены группы $\mathrm{Ext}^{s,*}_{A(1)}(\mathbb{Z}/2,\mathbb{Z}/2)$ для $s\leq 4$.

Диссертация написана с должной степенью подробности, все выносимые на защиту результаты строго доказаны. Имеется некоторое количество опечаток, по-видимому, неизбежное для столь большой работы, но оно не портит общего впечатления. Автореферат местами перегружен техническими деталями, что возможно затруднит быстрое восприятие отдельных результатов для читателя, не являющегося узким специалистом в данной области. Основные результаты диссертации прошли широкую апробацию. Они неоднократно докладывались на ведущих международных и всероссийских конференциях, включая конференции математических центров России (2024, 2025), Geometrical seminar в Сербии (2016, 2024), конференции «Топология, геометрия и динамика» к 100-летию В.А.Рохлина (2019, С-Пб.), а также на научно-исследовательских семинарах МГУ, НИУ ВШЭ и МИАН.

Результаты опубликованы в 13 статьях в рецензируемых журналах, индексируемых в международных базах научного цитирования (Web of Science, Scopus), среди которых «Успехи математических наук», «Математический сборник», «Труды МИАН», «Journal of Pure and Applied Algebra», «Topology and its Applications» и другие. В работах, выполненных в соавторстве, личный вклад диссертанта чётко определён и обоснован. Автореферат адекватно и полно отражает содержание диссертации.

Результаты работы будут важны в дальнейших исследованиях по когомологиям алгебр Хопфа, по представлениям алгебр операций в кольцах когомологий «тестовых» пространств. Они могут быть использованы математиками, работающими в Санкт-Петербургском государственном университете, Московском государственном университете имени М.В.Ломоносова, Математическом институте им. В.А.Стеклова РАН, Санкт-Петербургском отделении математического института им. В.А.Стеклова РАН и других научно-исследовательских институтах.

Суммируя вышеизложенное, считаем, что диссертационная работа Фёдора Юрьевича Попеленского «Алгебры Хопфа и их когомологии в задачах алгебраической топологии и гомологической алгебры» является завершённой научно-

квалификационной работой, содержащей совокупность новых фундаментальных результатов в области алгебраической топологии и гомологической алгебры.

По актуальности, научной новизне, объёму и значимости полученных результатов диссертация полностью соответствует требованиям пп. 9–14 «Положения о порядке присуждения учёных степеней», утверждённого постановлением Правительства Российской Федерации от 24 сентября 2013 г. № 842 (в действующей редакции), предъявляемым к диссертациям на соискание учёной степени доктора наук. Автор диссертации, Попеленский Фёдор Юрьевич, безусловно заслуживает присуждения ему учёной степени доктора физико-математических наук по специальности 1.1.3. Геометрия и топология.

Отзыв подготовлен доктором физико-математических наук (специальность 01.01.04 — геометрия и топология), доцентом факультета математики и компьютерных наук Федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Санкт–Петербургский государственный университет» Фоминых Евгением Анатольевичем.

Отзыв рассмотрен и одобрен Ученым советом Факультета математики и компьютерных наук СПбГУ 19.05.2026 г. (номер протокола 03/1.20-03-3).

Председатель Ученого совета
факультета математики и компьютерных наук,
доктор физико-математических наук,
профессор факультета математики
и компьютерных наук СПбГУ В.А.Петров

Подпись заверяю:

Подпись от руки Петрова В.А.
УДОСТОВЕРЯЮ
Ведущий специалист по кадрам
«22» 05 2026 г.

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования «Санкт-Петербургский государственный университет»
Адрес: 199034, г. Санкт-Петербург, Университетская набережная, д. 7–9.
Телефон: (812) 328-97-01
E-mail: spbu@spbu.ru