ОТЗЫВ ОФИЦИАЛЬНОГО ОППОНЕНТА
на диссертацию Попеленского Фёдора Юрьевича «Алгебры Хопфа и их когомологии в задачах алгебраической топологии и гомологической алгебры», представленную на соискание учёной степени доктора физико-математических наук по специальности 1.1.3 — Геометрия и топология

Диссертационная работа Ф. Ю. Попеленского посвящена фундаментальным проблемам теории алгебр Хопфа и их когомологий, происходящим из алгебраической топологии и гомологической алгебре. Следует подчеркнуть, что алгебры Хопфа, возникнув из задачи о строении колец когомологий пространств с нетривиальным умножением (Х.Хопф, А.Борель), к настоящему моменту стали одним из центральных объектов современной алгебры — они естественным образом проявились в таких далеких на первый взгляд областях, как комбинаторика (Дж.К.Рота), теория перенормировок (А.Конн, Д.Креймер), квантовые группы (В.Г.Дринфельд, М.Джимбо). В алгебраической топологии алгебры Хопфа (а также чуть более общая структура — алгеброиды Хопфа) продолжают играть особую роль, поскольку алгебры стабильных когомологических операций и их когомологии являются основным инструментом в задачах стабильной теории гомотопий. Вычисления с соответствующими спектральными последовательностями типа Адамса-Новикова требуют прямых, а иногда косвенных вычислений с когомологиями этих алгебр. В этом контексте разработка новых методов и подходов к описанию высших структур на когомологиях алгебр Хопфа имеет важное значение. Результаты диссертационной работе в этом направлении относятся к разработке метода спектральной последовательность Бухштабера (Bss) и его демонстрации на ряде фундаментальных примеров (алгебры Стинрода, алгебра Ландвебера-Новикова, универсальные обертывающие нильпотентных алгебр Ли) (главы 5—8). Первоначально эта спектральная последовательность была введена В.М.Бухштабером для вычисления второго члена спектральной последовательности Адамса-Новикова, который для стабильных гомотопических групп сфер имеет вид $\mathrm{Ext}_S^{s,t}(\mathbb{Z}, \Omega_U^*)$. Эти Ext-группы для $s = 1$ были вычислены С.П.Новиковым, лишь спустя несколько лет появились подходы к случаю $s = 2$ (Х.Миллер, Д.Равенел, С.Уилсон). В наиболее часто используемых случаях алгебры стабильных операций устроены достаточно сложно, в результате чего их когомологии вычислены только в определенном диапазоне градуировок. По этой причине на когомологиях алгебр Хопфа очень важную роль играют умножения и высшие структуры.

В диссертации показано, что скобки Масси специального вида, которые, с одной стороны, нетривиальны, а с другой — итерациями по последнему аргументу порождают всю алгебру когомологий рассматриваемой алгебры Хопфа, задаются дифференциалами Bss.

В диссертационной работе выделяются две взаимосвязанные линии: упомянутое выше развитие мощного гомологического аппарата (Bss) и его применение к широкому кругу алгебр Хопфа; с другой — решение достаточно конкретных давно стоявших открытых проблем о строении и представлениях алгебр Стинрода $\mathcal{A}_p$, $p > 2$ (экстремальные базисы, гипотеза Тоды, аннигиляторные идеалы). Дело в том, что в некоммутативных алгебрах со сложными соотношениями важен удачный выбор как мультипликативных образующих, так и аддитивных базисов. Вычисление структуры алгебр Стинрода $\mathcal{A}_p$ привело Ж.-П.Серра и А.Картана к понятию базиса допустимых мономов, а исследование структуры двойственных алгебр к алгебрам Стинрода привело Дж.Минора к построению базиса милноровских элементов и к явной формуле умножения таких элементов. Имеется ряд задач, для которых решение имеет в основе использование других базисов в алгебре Стинрода $\bmod 2$ (Ч.Т.К.Уолл, Ф.Петерсон, Д.Арнон, В.Джиамбалво, Р.Вуд). Важно отметить, что для алгебр Стинрода $\bmod p$, где $p > 2$, прогресс в этом направлении был существенно меньшим до последнего времени, а в некоторых задачах вообще отсутствовал. Проблема построения базисов с определенными экстремальными свойствами для алгебр $\mathcal{A}_p$, $p > 2$, была сформулирована Р. Вудом в его обзоре 'Problems in the Steenrod algebra', 1998. В диссертации предложено решение этой проблемы (глава 2), а таке получен ряд приложений (глава 4). Оказалось, что возможности классических результатов для алгебры Стинрода $\mathcal{A}_2$ не исчерпаны, а именно, в главе 1 автор распространяет ставшие уже классическими результаты об аддитивных базисах в алгебре $\mathcal{A}_2$ на случай $\mathbb{C}$-мотивной алгебры Стинрода, построенной В.А.Воеводским. С чисто алгебраической точки зрения замечательным результатом является доказательство треугольности матриц перехода от базиса Милнора к новым базисам (главы 1 и 3). Есть определенная надежда, что это открывает путь к построению новых эффективным алгоритмов вычислений в алгебрах $\mathcal{A}_p$.

Перейдем к содержанию диссертации. Диссертация полным объемом 321 страницу включает в себя введение, 8 глав, заключение и список литературы, состоящий из 228 наименования.

Введение содержит краткий исторический обзор, обоснование актуальности исследования и описание полученных результатов.

В **первой главе** описываются результаты, полученные для $\mathbb{C}$-мотивной алгебры Стинрода $\bmod 2$, построенной В.А.Воеводским: а именно, построены новые аддитивные базисы, выяснено для каких пар базисов соответствующая матрица перехода треугольна.

Во **второй** и в **третьей главах** строятся новые аддитивные базисы алгебр Стинрода $\bmod p$ для $p > 2$ и выясняется для каких пар базисов матрицы перехода треугольны. Часть результатов диссертации, полученных в этих главах, относится к решению проблемы, сформулированной Р. Вудом в четвертом разделе большого обзора 'Problems in the Steenrod algrebra'. До работ автора представленной диссертации прогресс в направлении решения этих проблем был незначительным.

Четвертая глава содержит приложения результатов предыдущих глав к нескольким задачам алгебраической топологии. А именно, построено новое семейство полиномиальных образующих кольца когомологий пространства Эйленберга–Маклейна $K(\mathbb{Z}/p, n)$. Показано, что представление алгебры Стинрода $\bmod p$ в когомологиях пространства $K(\mathbb{Z}/p, 2)$ не имеет ядра. Показано, что обобщенная гипотеза Тоды для $p > 2$ о точности короткой последовательности модулей над алгеброй Стинрода $\bmod p$, $p > 2$, верна до определенной критической градуировки, а в критической градуировке отклонение от точности контролируется группой гомологий, имеющей размерность 1. Для представления алгебр $\mathcal{A}_p$ в когомологиях произведений бесконечномерных p-линз описано правое сопряженное действие в гомологиях таких пространств, введены модули частично аннигилированных элементов и показано, что они образуют свободные алгебры. Для первой из них вычислены ранги градуировочных компонент в градуировках выше p. В терминах милноровских элементов алгебры $\mathcal{A}_2$ вычислены коэффициенты кватернионного уравнения сопряженности, которое связывает элементы кольца эквивариантых когомологий пространства с действием двух коммутирующих инволюций с элементами кольца пространства неподвижных точек для пространств на которых действие инволюций в определенном смысле похоже на действие комплексных инволюций на кватернионных проективных пространствах.

В **пятой главе** для связных градуированных алгебр Хопфа развита теория спектральной последовательности, введенной В.М.Бухштабером для вычисления второго члена спектральной последовательности Адамса–Новикова. Показано, что образы дифференциалов в нулевом столбце этой спектральной последовательности задают фильтрацию в когомологиях рассматриваемой алгебры Хофпа. Для алгебры Хопфа,

заданной над полем, показано, что любой элемент из образа k-го дифференциала, представляются в виде нетривиального $k+1$-местного матричного произведения Масси. Из результатов этой главы видно, что успешное применение такой спектральной последовательности опирается на вычисление фильтрации двойственной алгебры Хопфа.

В **шестой главе** такие фильтрации вычислены для алгебры Ландвебера–Новикова, тензорно умноженной на $\mathbb{Q}$, для универсальной обертывающей UL_1 алгебры формальных векторных полей на прямой, обращающихся в 0 вместе с первой производной. Отмечу, что задача вычисления фильтрации в двойственной к алгебре Ландвебера-Новикова без тензорного произведения с $\mathbb{Q}$ представляется весьма сложной, а именно, она связана с вычислением второго члена $\mathrm{Ext}_S^{s,t}(\mathbb{Z}, \Omega_U^*)$ спектральной последовательности Адамса-Новикова. К настоящему моменту описаны только 0, 1 и 2-й члены этой фильтрации.

В **седьмой главе** спектральная последовательность Бухштабера вычислена для ряда нильпотентных алгебр Ли: для универсальных обертывающих двух конечномерных факторов алгебры L_1, для двух алебр Гейзенберга-Ли. В этой главе проделаны вычисления всех дифференциалов, доведённые до явных формул.

В **восьмой главе** полностью вычислена спектральная последовательность Бухштабера для важной подалгебры Хопфа $A(1) \subset \mathcal{A}_2$. Она интересна тем, что ее когомологии, в отличие от самой $\mathcal{A}_2$ или других ее подалгебр Хопфа, устроены в достаточной степени «обозримо», они допускают явное описание образующими и соотношениями. Автор показал на примере этой алгебры Хопфа, что эта спектральная последовательность может быть использована для вычислений — соотношения между дифференциалами и градуировками элементов накладывают на структуру когомологий ограничения, которые в ряде случаев позволяют находить образующие в когомологиях или, наоборот, — соотношения. Описано, как дифференциалы спектральной последовательности Бухштабера кодируют соотношения в когомологиях алгебр Хопфа, и приведена демонстрация на примере соотношений малой размерности в алгебрах $\mathcal{A}_p$.

Представленная диссертация Фёдора Юрьевича Попеленского «Алгебры Хопфа и их когомологии в задачах алгебраической топологии и гомологической алгебры» является целостным математическим исследованием, выполненым на высоком научном уровне. Она носит теоретический характер. Её результаты могут быть использованы в исследованиях по алгебраической топологии, гомологической алгебре и теории алгебр Хопфа. Основные результаты диссертации новы,

получены ее автором лично и обоснованы тщательными и подробными доказательствами; они своевременно опубликованы в 13 работах в ведущих математических рецензируемых журналах. Результаты диссертации были представлены на многих научных конференциях и семинарах, как в России, так и за рубежом. Автореферат подробно и полно отражает содержание диссертации.

Диссертация Ф.Ю.Попеленского «Алгебры Хопфа и их когомологии в задачах алгебраической топологии и гомологической алгебры» полностью соответствует требованиям «Положения о порядке присуждения учёных степеней», утверждённого постановлением Правительства РФ № 842, предъявляемым к докторским диссертациям, а её автор, Попеленский Фёдор Юрьевич, безусловно заслуживает присуждения учёной степени доктора физико-математических наук по специальности 1.1.3 — геометрия и топология.

Официальный оппонент
профессор, доктор физико-математических наук
(специальность — 01.01.04),
профессор кафедры дискретной математики
Физтех-школы прикладной математики и информатики
Федерального государственного автономного
образовательного учреждения высшего образования
«Московский физико-технический институт
(национальный исследовательский университет)»

Мусин Олег Рустумович

28.05.2026

Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего образования
«Московский физико-технический институт (национальный
исследовательский университет)»
Адрес: 141701, Московская область, г. Долгопрудный,
Институтский переулок, д.9
Телефон: +7 (495) 408-42-54
E-mail: omusin@gmail.com

ЗАВЕРЯЮ
УЧЕНЫЙ СЕКРЕТАРЬ
УЧЕНОГО СОВЕТА МФТИ
ЕГ ЕВСЕЕВ