Отзыв оппонента на докторскую диссертацию

Тема диссертации: Алгебры Хопфа и их когомологии в задачах алгебраической топологии и гомологической алгебры
Автор: Попеленский Федор Юрьевич
Специальность 1.1.3 — Геометрия и топология
Диссертационный совет: 24.1.167.03 при Математическом институте им. В. А. Стеклова Российской академии наук

1. Введение

Диссертация Попеленского Федора Юрьевича посвящена изучению когомологий алгебр Хопфа.
Эти алгебры, возникшие в топологии при изучении H-пространств, затем были использованы в различных областях математики, но существенную популярность они получили после работ Дринфельда, под названием квантовых групп.
В диссертации рассмотрен широкий круг алгебр Хопфа.
Среди них алгебры Стинрода стабильных когомологических операций, алгебра Ландвебера—Новикова операций в комплексных кобордизмах, универсальные обертывающие алгебры, в частности, универсальная обертывающие алгебра бесконечномерной алгебры Ли формальных векторных полей на прямой, обращающихся в нуль в нуле вместе с первой производной.
Помимо приложений алгебр Хопфа в топологии и алгебре, эти алгебры широко используются в математической физике, а также в классической и некоммутативной геометрии.
Так построение дифференциальных операторов над некоммутативными кольцами, а также их квантование, наиболее четко реализуется в моноидальной категории модулей над алгебрами Хопфа, квантование которой задается естественным изоморфизмом тензорного квадрата категории и сохраняющими условия когерентности Маклейна.
При этом нахождение квантований в этой категории также связано с когомологиями базисной алгебры Хопфа.
Поэтому, в этом случае, как и в случае градуированных, а также фильтрованных, алгебр Хопфа, можно воспользоваться спектральной последовательностью В. М. Бухштабера Bss и результатами работы В. М. Бухштабера и Ф. Ю. Попеленского для нахождения когомологий.
Суммируя, тема диссертации является актуальной и значимой как для топологии, алгебры, геометрии, так и для математической физики.

2. Основные положения диссертации

В диссертации, рассматривается фильтрация Бухштабера, а также ассоциированная с этой фильтрацией спектральная последовательность для градуированных алгебр Хопфа.

Показано также, что дифференциалы в этой спектральной последовательности определяют возрастающую фильтрацию в когомологиях алгебры Хопфа.

Проведены вычисления фильтраций Бухштабера для: алгебры Ландвебера–Новикова, для универсальной обертывающей алгебры формальных векторных полей на прямой, имеющих нуль второго порядка в начале координат, а также для универсальных обертывающих алгебр ряда нильпотентных алгебр Ли.
Получены новые семейства аддитивных образующих для алгебр Стинрода mod p, p>2.
Полученные результаты использованы, например, для изучения пространств в которых задано действие двух коммутирующих и независимых инволюций. Для большого класса пространств, у которых кольца когомологий пространства неподвижных точек инволюций и основного пространства связаны изоморфизмом, изменяющим градуировки в четыре раза, введено понятие Q-сопряжения и получено явное выражение для его коэффициентов в терминах действия алгебры Стинрода mod 2.

2. Оценка научной работы

Диссертация характеризуется высоким научным уровнем и оригинальностью.
Полученные результаты докладывались на многочисленных семинарах, международных и всероссийских конференциях.
Результаты диссертации также опубликованы в ведущих математических журналах.
Автореферат полностью отражает содержание диссертации.
Результаты, полученные в диссертации, а также методы их получения, могут быть также использованы в дифференциальной геометрии для нахождения когомологий и инвариантов уравнений Ли, отвечающим псевдогруппам Ли, а также геометрическим структурам.
Первые шаги к этому были уже сделаны при вычислении когомологий универсальной обертывающей алгебры в случае бесконечномерной алгебры Ли формальных векторных полей на прямой, имеющих нуль второго порядка в нуле (теорема Гончаровой).

В случае псевдогрупп Ли и уравнений Ли это также универсальные обертывающая алгебры бесконечномерных алгебр Ли, образованных формальными решениями дифференциальных уравнений Ли.
Эти алгебры снабжены естественной фильтрацией, а ассоциированные градуированные алгебры является градуированными алгебрами Хопфа.
Кроме того, результаты, полученные в диссертации, могут быть также использованы в некоммутативной дифференциальной геометрии, также как и методы некоммутативной дифференциальной геометрии в моноидальных категориях модулей над алгебрами Хопфа могут быть перенесены в алгебраическую топологию.

Наличие симметрий или брейдингов в этих категориях позволяет построить дифференциальное исчисление аналогичное исчислению над коммутативными кольцами, т.е. ввести в эти категории дифференциальные операторы, дифференциальные уравнения, дифференциальные формы и джеты.
Отметим также, что такие моноидальные категории активно используются в физике конденсированных сред, в квантовой теории поля и теории струн.

4. Заключение

По своей актуальности и новизне диссертация Попеленского Федора Юрьевича, “Алгебры Хопфа и их когомологии в задачах алгебраической топологии и гомологической алгебры” соответствует требованиям, предъявляемым к диссертациям на соискание ученой степени доктора наук согласно пп. 9-14 «Положение о присуждении ученых степеней», утверждённого Постановлением Правительства РФ от 24.09.2013 № 842 (в редакции Постановлений Правительства РФ от 21.04.2016 № 335, от 01.10.2018 № 1168), а её автор, Попеленский Федор Юрьевич, заслуживает присуждения ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 1.1.3 Геометрия и топология.

Оппонент:

Лычагин Валентин Васильевич,
доктор физико-математических наук, профессор,
главный научный сотрудник Лаборатории 06
Управления сплошными средами им. А. Г. Бутковского.
Федерального государственного бюджетного учреждения
науки Институт проблем управления
им. В. А. Трапезникова Российской академии наук.
Юридический адрес: 117342, г. Москва, вн. тер. г. муниципальный округ Коньково, ул. Профсоюзная, д. 65, стр. 2
Почтовый адрес: 117997, ГСП-7, г. Москва, Варшавское шоссе, д. 45
Телефон: +7 495 334-89-10
E-mail: dan@ipu.ru

[Дата] 28.05.2026

Подпись Лычагина В.В.
Заверяю
Зав. Общим отделом
Зав. Н.Д. Васильева