Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова

На правах рукописи

Попеленский Федор Юрьевич

УДК: 515.14, 512.66

Алгебры Хопфа и их когомологии в задачах алгебраической топологии и гомологической алгебры

1.1.3 — Геометрия и топология

Диссертация на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Москва — 2026

Оглавление

Введение **6**

1 Алгебра Стинрода $\mathcal{A}_2$: классический и $\mathbb{C}$-мотивный случаи **33**

1.1 Аддитивные базисы в классической алгебре Стинрода $\mathcal{A}_2$ 33

1.2 $\mathbb{C}$-мотивная алгебра Стинрода $\mathcal{A}_2^m$ 38

1.3 Аддитивные базисы в $\mathbb{C}$-мотивной алгебре Стинрода $\mathcal{A}_2^m$ и треугольные замены 40

1.3.1 Базис допустимых мономов 40

1.3.2 Z и X базисы 42

1.3.3 Семейство P_t^s-базисов 46

1.3.4 Коммутаторные базисы 47

1.3.5 Замечания о C-мономах и о базисах Вуда 49

2 Базисы алгебр Стинрода $\mathcal{A}_p$ и алгебр $\overline{\mathcal{A}}_p = \mathcal{A}_p/\beta$, $p > 2$ **51**

2.1 Алгебры $\overline{\mathcal{A}}_p$, $p > 2$ 52

2.1.1 Z-базис и X-базис алгебры $\overline{\mathcal{A}}_p$ 52

2.1.2 Модифицированные Z-базис и X-базис для алгебры $\overline{\mathcal{A}}_p$ 61

2.1.3 Семейство P_s^t-базисов 63

2.1.4 Коммутаторные базисы 63

2.1.5 Замечание о базисах Вуда 64

2.2 Алгебры $\mathcal{A}_p$, $p > 2$ 65

2.2.1 βZ- и βX-базисы для алгебр $\mathcal{A}_p$ 65

2.2.2 IR- и IL-максимальные базисы 70

2.2.3 βC-базис для алгебры $\mathcal{A}_p$ 73

3 Треугольность матриц перехода между базисами в алгебрах Стинрода $\mathcal{A}_p$ и $\overline{\mathcal{A}}_p$, $p > 2$ **77**

3.1 Матрицы перехода между базисами в алгебрах $\overline{\mathcal{A}}_p$ 77

3.1.1 Z и WZ базисы 78

3.1.2 Базис допустимых мономов и B_{Mil} 79

3.1.3 Семейство P_t^s-базисов и B_{Mil} 82

3.1.4 C-базис и B_{Mil} . . . 85
3.1.5 X-базис и B_{Mil} . . . 87
3.2 Замены в алгебрах $\mathcal{A}_p$, $p > 2$ . . . 92
3.2.1 PQ-базис . . . 93
3.2.2 Базис допустимых мономов . . . 95
3.2.3 Базис βC-мономов . . . 97
3.2.4 βX-базис . . . 100
3.2.5 XC-базис . . . 102
3.2.6 ZA-базис . . . 103
3.2.7 Семейство βP_t^s-базисов . . . 105

4 Приложения аддитивных базисов алгебр Стинрода в алгебраической топологии 107
4.1 Свободные образующие алгебры $H^*(K(\mathbb{Z}/p, n), \mathbb{Z}/p)$ . . . 107
4.2 Аннигиляторный идеал действия алгебры Стинрода $\mathcal{A}_p$ в когомологиях $K(\mathbb{Z}/p, 2)$ . . . 113
4.2.1 Доказательство основного утверждения . . . 117
4.3 mod p гипотеза Тоды . . . 121
4.3.1 Формулировка гипотезы и предварительные сведения . . . 121
4.3.2 Вычисления по модулю идеалов $\mathcal{I}_{r-2}$ и $\mathcal{I}_{r-1}$ . . . 126
4.3.3 Случай $r = 0$, точность . . . 132
4.3.4 Случай $r = 1$, точность. . . . 133
4.3.5 Случай $r = 1$, неточность . . . 134
4.3.6 Случай $r \geqslant 2$, точность . . . 135
4.3.7 Случай $r \geqslant 2$, неточность . . . 138
4.3.8 Некоторые замечания . . . 141
4.4 Сопряженное действие алгебр операций в гомологиях элементарных групп 142
4.4.1 Предварительные сведения . . . 143
4.4.2 Подалгебры частично аннигилованных элементов . . . 145
4.4.3 Гомотопическая система Олта . . . 155
4.4.4 Отображения сдвига . . . 159
4.5 Кватернионное уравнение сопряжения . . . 163
4.5.1 Предварительные сведения . . . 163
4.5.2 Кватернионные оснащения и их основные свойства . . . 166
4.5.3 Примеры . . . 171
4.5.4 Построение новых N- или Q-оснащений . . . 176
4.5.5 Уравнение Q-сопряжения и алгебра Стинрода . . . 180

5 Спектральные последовательности и соотношения в когомологиях алгебр Хопфа **191**
5.1 Построение и свойства Bss . . . 191
5.1.1 Градуированные алгебры . . . 191
5.1.2 Градуированные алгебры Хопфа . . . 194
5.1.3 Фильтрация в группах когомологий $\mathrm{Ext}_A^{*,*}(R,R)$ . . . 196
5.1.4 Дифференциал d_1 . . . 197
5.1.5 Bss-операции на когомологиях алгебр Хопфа . . . 199
5.1.6 Реализация классов $\mathrm{Ext}_A^{s,*}(\Bbbk,\Bbbk)$ образами Bss-операций на $T(s\mathrm{Ext}_A^{1,*}(\Bbbk,\Bbbk))$ . . . 202
5.2 Реализация дифференциалов специальными произведениями Масси . . . 203
5.2.1 Специальные матричные произведения Масси . . . 203
5.2.2 Реализация дифференциалов . . . 204

6 Вычисление фильтраций двойственных алгебр Хопфа **215**
6.1 Фильтрация Бухштабера в $S_*\otimes\mathbb{Q}=\Omega_U^*\otimes\mathbb{Q}$ . . . 215
6.2 Фильтрация степенями идеала аугментации алгебры UL_1 . . . 222
6.3 Фильтрация Бухштабера алгебры $(\mathcal{A}_p)_*$, $p\geqslant 2$ . . . 224

7 Нильпотентные алгебры Ли и соотношения в их когомологиях **234**
7.1 Предварительные сведения . . . 234
7.2 Конечномерная абелева алгебра Ли . . . 236
7.3 Алгебры Ли $\mathcal{G}L^n$ . . . 238
7.3.1 Алгебра Ли $\mathcal{G}L^3$ . . . 240
7.3.2 Алгебра Ли $\mathcal{G}L^4$ . . . 242
7.3.3 Реализация двумерных классов когомологий . . . 249
7.4 Нильмногообразия Гейзенберга M_H^{2n+1} . . . 252
7.4.1 Однородные многообразия группы Гейзенберга . . . 252
7.4.2 Когомологии алгебры Ли $\mathcal{GH}^{2n+1}$ . . . 255
7.4.3 Bss для алгебр Ли $\mathcal{GH}^{2n+1}$ . . . 261
7.4.4 Алгебры Ли $\mathcal{GH}^5$ и $\mathcal{GH}^7$ . . . 264

8 Bss для алгебры Стинрода $\mathcal{A}_2$ **268**
8.1 Bss для алгебры Хопфа $A(1)$ . . . 268
8.2 Вычисление $\mathrm{Ext}_{A(1)}^{s,*}(\mathbb{Z}/2,\mathbb{Z}/2)$ для $s\leqslant 4$ с помощью Bss . . . 274
8.2.1 $\mathrm{Ext}_{A(1)}^{1,*}(\mathbb{Z}/2,\mathbb{Z}/2)$ . . . 274
8.2.2 $\mathrm{Ext}_{A(1)}^{2,*}(\mathbb{Z}/2,\mathbb{Z}/2)$ . . . 274
8.2.3 $\mathrm{Ext}_{A(1)}^{3,*}(\mathbb{Z}/2,\mathbb{Z}/2)$ . . . 278
8.2.4 $\mathrm{Ext}_{A(1)}^{4,*}(\mathbb{Z}/2,\mathbb{Z}/2)$ . . . 283

8.3 Соотношения в когомологиях алгебры Стинрода $\mathcal{A}_2$ 284
8.4 Замечание об элементах двумерных когомологий алгебры Стинрода $\mathcal{A}_p$ 288

А Предварительные сведения **290**
А.1 Алгебры Стинрода, их подалгебры Хопфа, фильтрации 290
А.1.1 Алгебра Стинрода mod 2 290
А.1.2 Алгебра Стинрода mod p, $p > 2$ 291
А.1.3 Подалгебры Хопфа алгебр $\mathcal{A}_p$ 292
А.1.4 Базис допустимых мономов 293
А.1.5 Базис Милнора и формула умножения 294
А.1.6 Когомологии малой размерности алгебр Стинрода $\mathcal{A}_p$ 296
А.2 Скалярные и матричные произведения Масси 300

Заключение **304**

Публикации по теме диссертации **307**

Список литературы **308**

Введение

Актуальность темы исследований и постановка проблем

Алгебры Хопфа — важный класс алгебр, который к настоящему моменту нашел приложения в совершенно разных областях математики и математической физики.

Основные объекты в цикле исследований, результаты которого представлены в данной диссертации — следующие алгебры Хопфа и их когомологии: алгебры стабильных операций в $\mathbb{Z}/p$-когомологиях топологических пространств — алгебры Стирнода $\mathcal{A}_p$, $p \geqslant 2$, их факторы $\overline{\mathcal{A}}_p$ по идеалу, порожденному элементом Бокштейна β, алгебра Ландвебера—Новикова S операций в комплексных кобордизмах, универсальная обертывающая UL_1 алгебры Ли L_1 формальных векторных полей на прямой, в начале координат обращающихся в 0 вместе со своей первой производной, универсальные обертывающие некоторых конечномерных факторов алгебры Ли L_1, универсальные обертывающие алгебр Гейзенберга—Ли. Кроме того, обсуждаются представления алгебр операций на специфических для топологии градуированных модулях. Ряд разработанных методов применим к общим алгебрам Хопфа. Описание решений известных задач алгебраической топологии и гомологической алгебры, полученных на основе результатов исследования перечисленных алгебр, приведено во введении ниже.

Понятие алгебры Хопфа восходит к классической работе Х. Хопфа [75], посвященной фундаментальному вопросу: когда на связном ориентированном многообразии M существует операция (умножение) $\mu : M \times M \to M$, нетривиальная в том смысле, что для произвольного фиксированного $x \in M$ отображения M в себя, заданные формулами $y \mapsto \mu(y, x)$ и $y \mapsto \mu(x, y)$, имеют ненулевые степени. Такие многообразия Хопф назвал Г-многообразиями. Он показал, что существование такого отображения μ накладывает на кольцо рациональных когомологий существенные ограничения: а именно, он доказал, что кольцо рациональных когомологий любого Г-многообразия является внешней алгеброй от некоторых нечетномерных образующих. В работе [75] использовалось отображение (коумножение) $\Delta : H^*(M) \to H^*(M) \otimes H^*(M)$, индуцированное отображением μ, которое является кольцевым гомоморфизмом. Эта работа Х. Хопфа является далеким обобщением работ Л. С. Понтрягина [220], Р. Брауэра [36]

и Ш. Эресманна [57; 58] о числах Бетти компактных групп Ли.

Дальнейшее развитие теории несколько лет шло по двум почти независимым направлениям. В топологии важный шаг был сделан А. Борелем в 1953 г. в работе [33], где, в частности, рассматривались «algèbre de Hopf» — градуированные алгебры, снабженные коумножением, согласованным с операцией умножения. Отметим, впрочем, что постулированные в определении свойства отличались от современного определения алгебры Хопфа.

В 1951 г. Ж. П. Серр сформулировал определение H-пространства (топологического пространства X, снабженного операцией $\mu : X \times X \to X$, для которой существует $x_0 \in X$, являющийся гомотопической единицей) [223]. Это понятие более узкое, чем понятие Г-многообразия Хопфа. Например, сфера S^n допускает структуру H-пространства только для $n = 1, 3, 7$ (теорема Адамса об инварианте Хопфа). С другой стороны, любая нечетномерная сфера является Г-многообразием. Соответствующее отображение μ предложено Хопфом [75]: положим $\mu(x, y)$ равным результату отражения точки $x \in S^{2k+1}$ относительно диаметра сферы, содержащего точку $y \in S^{2k+1}$. Тогда для фиксированной точки $z \in S^{2k+1}$ отображение $x \mapsto \mu(x, z)$ имеет степень -1, а отображение $y \mapsto \mu(z, y)$ — степень 2.

Когомологии H-пространств изучал Э. Гальперн в работе [68] — он описывал их в терминах гипералгебр, введенных Ж. Дьедонне в [53].

Отметим, что в топологическом контексте все эти упомянутые алгебраические структуры были градуированными, поэтому неудивительно, что в фундаментальной работе Дж. Милнора и Дж. Мура [110] алгебры Хопфа были градуированными по определению. Работа [110] была опубликована в 1965 году, но мимеографированная версия «On the structure of Hopf algebras» Princeton Univ. была доступна с 1959 года. И. Джеймс в реферате MR0674052 на [110] пишет: «. . . version of this paper circulated some ten years ago, . . . although the published version is basically the same.»

Второе направление — алгебраическое — опирается на цикл работ 1954-1956 гг. Ж. Дьедонне, в котором разрабатывалась теория соответствия "группа Ли — алгебра Ли" для полей характеристики $p > 0$. Он предложил для групп Ли над полем характеристики $p > 0$ рассматривать гипералгебры — обобщение универсальной обертывающей алгебры Ли для случая поля характеристики 0, детали можно найти в [53]. Этой теме был посвящен его часовой доклад на всемирном конгрессе математиков в Амстердаме (1954 г.) [54]. В этом цикле работ появились два важных понятия: *гипералгебра* — ассоциативная алгебра, снабженная коумножением, согласованным с умножением (а именно, коумножение должно быть гомоморфизмом алгебр), а также *формальная группа* — этому понятию в скором времени было суждено занять одно из центральных мест в алгебраической топологии.

Первое формальное определение алгебры Хопфа в современном смысле было дано П. Картье в 1956 году [46]. В этой же работе было показано, что алгебра поли-

номиальных функций на линейной алгебраической группе является алгеброй Хопфа. Антипод в такой алгебре индуцируется отображением группы в себя, определенным взятием обратного элемента.

Итак, первыми примерами алгебр Хопфа были когомологии H-пространств (в частности, групп Ли), универсальные обертывающие алгебр Ли, ограниченные обертывающие алгебры p-алгебр Ли, алгебры разделенных степеней, алгебры регулярных функций на алгебраических группах, групповые алгебры дискретных групп. Во всех этих случаях умножение или коумножение (ко)коммутативно. При достаточно слабых ограничениях на алгебру в такой ситуации антиподальное отображение существует, причем оно определяется единственным образом (например, это так, если алгебра связная и градуированная).

К середине 1960-х гг. терминология и формализм теории алгебр Хопфа в достаточной степени устоялись. На долгое время стандартными ссылками, не утратившими актуальности и в наши дни, стали книга М. Свидлера [159] и большая статья Дж. Милнора и Дж. Мура [110]. С тех пор вышло много книг, посвященных теории и приложениям алгебр Хопфа, например, см. [14; 114; 141].

Нарушая хронологический порядок, отметим, что огромный всплеск интереса к алгебрам Хопфа в середине 1980-х гг. возник после основополагающих работ В. Г. Дринфельда и М. Джимбо [81; 199], которые ввели замечательный класс алгебр Хопфа, получивших название квантовых групп. В их работах структурные отображения универсальных обертывающих алгебр Ли деформировались с сохранением структуры алгебры Хопфа, и эти новые алгебры Хопфа были уже некоммутативными и некокоммутативными. В. Г. Дринфельд в [198] отмечал, что до появления теории квантовых групп естественные примеры некоммутативных и некокоммутативных алгебр Хопфа были единичными. По всей видимости, первый такой пример был построен М. Свидлером [159], явные формулы для структурных отображений можно найти в [202], см. также работы [133; 203]. Активность в области квантовых групп и их применений очень высока, см. книги [47; 74; 79; 100; 202]. С. П. Новиков под влиянием конструкции дублей Дринфельда на основе структуры, моделируемой алгеброй когомологических операций в кобордизмах, ввел так называемые операторные дубли (O-дубли). В это же время появились аналогичные алгебры в школе Л. Д. Фаддева под названием гейзенберговых дублей. Структура операторного дубля, см. [217], является обобщением структуры алгебры Хопфа. В работах В. М. Бухштабера [40; 187] решена задача описания полугрупп мультипликативных операторов в O-дублях и были получены их применения к алгебре Ландвебера–Новикова. В его работе [41] была введена новая теория обобщенных когомологий — дубль комплексных кобордизмов, и было показано, что в алгебре когомологических операций этой теории реализуется квантовый дубль Дринфельда алгебры операций Ландвебера–Новикова.

Важные классы алгебр Хопфа связаны с проблемами комбинаторики. Начиная

с работ [82; 146] было замечено, что имеется большой запас примеров алгебр Хопфа, в которых базисы естественным образом параметризованы комбинаторными объектами (такими как: разбиения, композиции, перестановки, таблицы (диаграммы), графы, деревья, многогранники), а операции в алгебре Хопфа «кодируют» естественные операции с такими объектами. Было показано, что в этих случаях комбинаторные результаты формулируются в терминах свойств подходящей алгебры Хопфа. В лекционных заметках [65] ряд классических результатов о симметрических функциях, см. книгу Д. Стенли [224], выведен из свойств соответствующей алгебры Хопфа. Эта точка зрения нашла замечательное воплощение в книге А. В. Зелевинского [178], в которой был разработан новый единый подход к теории представлений симметрических групп и общих линейных групп над конечными полями, основанный на структурной теории так называемых положительных самосопряженных (PST) алгебр Хопфа. Наряду с [65] полезными руководствами являются [21; 73].

Двойственная к алгебре некоммутативных симметрических функций, см. [123] — алгебра Хопфа квазисимметрических функций — нашла применения в топологии, см. [30; 72], а также в геометрической комбинаторике выпуклых многогранников, см. обзор [192].

Еще одно важное применение алгебр Хопфа комбинаторной природы было найдено в конце 1990–начале 2000 гг. Речь идет о перенормировках в квантовой теории поля, связь которых с алгебрами Хопфа впервые обсуждалась в статьях Д. Креймера и А. Конна [48; 90]. Это направление чрезвычайно активно разрабатывается, поэтому ограничимся ссылками на [35; 37; 62].

Вернемся к моменту завершения первоначального этапа развития теории — к рубежу 1950-60-х гг. В 1958 году Дж. Милнор (см. [109]) показал, что для каждого простого p алгебра стабильных когомологических операций в $\mathbb{Z}/p$-когомологиях топологических пространств — алгебра Стинрода $\mathcal{A}_p$ — обладает естественной структурой алгебры Хопфа (в современном определении), причем ее структурные отображения согласованы с кольцевой структурой $\mathbb{Z}/p$-когомологий (структура модулей Милнора в терминологии С. П. Новикова [217]). Это открытие Дж. Милнора существенно расширило области, для которых важны алгебры Хопфа, а также стимулировано развитие алгебраической теории алгебр Хопфа.

Здесь уместно сделать небольшое отступление в топологию; достаточно подробное изложение истории разработки понятий и теории когомологических операций (до 1960 г.) можно найти в замечательной книге Ж. Дьедонне [55]. Операции Стинрода в $\mathbb{Z}/p$-когомологиях были построены Н. Стинродом для $p = 2$ в 1947 г. в работе [157], а для $p > 2$ — в работах [155; 156]. Его подход фактически был основан на построении специального эквивариантного цепного комплекса (для $p = 2$ его иногда называют квадратичной конструкцией), см. [212]. В оригинальной работе Стинрода [157] 1947 г. решалась задача гомотопической классификации отображений из $p + 1$-мерного ком-

плекса в сферу S^p. Для этого он ввел операции $\cup_i$ на коциклах и определил операции Sq^k на коциклах градуировки n по формуле $Sq^k : x \to x \cup_{n-k} x$. Операция $\cup_1$ измеряет отклонение умножения коциклов от градуированной коммутативности.

С категорной точки зрения когомологические операции индуцированы автоморфизмами представляющих объектов (спектров Эйленберга–Маклейна для классических групп когомологий, спектров Тома для теорий кобордизмов и т. п.). Элементы группы когомологий $H^q(X;G)$ находятся во взаимно–однозначном соответствии с гомотопическими классами отображений клеточного комплекса X в пространство Эйленберга–Маклейна $K(G,q)$, см. [149]. Когомологические операции вида $H^q(-;G) \to H^n(-;H)$, где G, H — абелевы группы, находятся в естественном взаимно однозначном соответствии с элементами группы когомологий $H^n(K(G,q);H)$, см. [149], а также [59]. Стабильные когомологические операции степени n в $\mathbb{Z}/p$-когомологиях соответствуют морфизмам спектра Эйленберга–Маклейна $K(\mathbb{Z}/p)$ в его n-кратную надстройку $\Sigma^n K(\mathbb{Z}/p)$. Тем самым, вопрос вычисления алгебры стабильных когомологических операций сводится к вычислению алгебр когомологий пространств Эйленберга–Маклейна, что для $p = 2$ было сделано Ж. П. Серром в [149] и для $p > 2$ А. Картаном в [45; 148].

В недавней работе [67] обсуждаются различные конструкции операций в контексте алгебраической геометрии. Из нее видно, что классические конструкции из топологии работают и в новом контексте, но не всегда приводят к одному и тому же результату. Этот эффект не является чем-то исключительным, в топологии он проявился в теории кобордизмов. А именно, на основе конструкции Стинрода в работе [52] Т. том Дик построил операции в кобордизмах, которые отличаются от операций Ландвебера—Новикова, о которых речь пойдет ниже. В [139] Д. Квиллен получил приложения операций Стинрода–том Дика.

Алгебра стабильных операций, определенная как алгебра автоморфизмов представляющего спектра, часто оказывается алгеброидом Хопфа — это более общая алгебраическая структура, в которой левая и правая (ко)единицы не совпадают. Причиной необходимости рассматривать такие структуры является нетривиальность действия алгебры операций на кольце коэффициентов теории когомологий. Для $\mathbb{Z}/p$-когомологий это действие тривиально, а для, например, кобордизмов — нетривиально. Этот факт является одним из проявлений важного наблюдения С. П. Новикова: «В процессе работы автору пришлось столкнуться с целым рядом новых и весьма заманчивых алгебраических и топологических ситуаций, аналоги которых в классическом случае либо полностью отсутствуют, либо сильно вырождаются; многие из них пока глубоко не рассмотрены. Все это позволяет высказать надежду на перспективность этого круга идей и методов как в отношении применений к известным, классическим проблемам теории гомотопий, так и в постановке и решении новых задач, от которых можно ждать появления нетрадиционных алгебраических связей и понятий», [215].

Спектральная последовательность Адамса, построенная в работе [18], открыла новую область приложений алгебр Хопфа и привела к проблеме вычисления когомологий алгебр Хопфа. Спектральная последовательность Адамса определена для каждого простого целого числа p и для данного пространства (спектра) X сходится к p-примарной части стабильных гомотопических групп пространства X. Второй член этой спектральной последовательности изоморфен $\mathrm{Ext}^{s,t}_{\mathcal{A}_p}(H^*(X;\mathbb{Z}/p),\mathbb{Z}/p)$ и выражается в алгебраических терминах через действие алгебры Хопфа $\mathcal{A}_p$ на $\mathbb{Z}/p$-когомологиях $H^*(X,\mathbb{Z}/p)$ пространства (спектра) X. В простейшем случае, когда X — сфера или спектр сфер, второй член спектральной последовательности Адамса представляет собой когомологии алгебры $\mathcal{A}_p$ с тривиальными коэффициентами. Эта спектральная последовательность была построена в работе [18], в которой были получены первые ключевые результаты о когомологиях алгебры $\mathcal{A}_2$. Проблема инварианта Хопфа — фундаментальная проблема топологии, о которой говорилось выше — была полностью решена Адамсом в работе [17] на основе глубокого анализа структуры стабильных когомологических операций, вторичных операций и спектральной последовательности Адамса. Эта работа дала существенный импульс развитию теории вторичных когомологических операций.

Важным приложением алгебры Стинрода $\mathcal{A}_2$ является теорема Тома о кольце неориентированных кобордизмов. В основе его результата лежит замечательный факт, что когомологии спектра MO являются свободным модулем над алгеброй $\mathcal{A}_2$. В случае комплексных кобордизмов аналогичный факт не имеет места. Тем не менее, для спектра MU спектральная последовательность Адамса полностью вычисляется и это вычисление лежит в основе доказательства теоремы Милнора–Новикова о кольце коэффициентов теории комплексных кобордизмов, см. [108; 214; 216].

В 1967 г. С. П. Новиков в программной работе [215] разработал новые методы в алгебраической топологии, основанные на теории комплексных кобордизмов и формальной группе геометрических кобордизмов. Эти методы существенно опираются на алгебру Хопфа S когомологических операций, построенную по характеристическим классам комплексных расслоений в теории комплексных кобордизмов. Эта алгебра была независимо построена П. Ландвебером [92] и получила название «алгебра Ландвебера–Новикова». Принципиально важным оказался результат С. П. Новикова, который описал алгебру всех когомологических операций $\mathcal{A}^U$ в теории комплексных кобордизмов как свободный левый модуль над кольцом Ω^*_U, порожденный S, и правилом коммутации $[\sigma, s]$, где $\sigma \in \Omega^*_U, s \in S$, в терминах структуры алгебры Хопфа на S и действия алгебры S на Ω^*_U.

Одна из главных целей работы [215] была демонстрация новых методов в проблеме стабильных гомотопических групп сфер. Построенный на основе теории кобордизмов аналог спектральной последовательности Адамса — спектральная последовательность Адамса—Новикова, ее p-локальные варианты и т. п. — в настоящее время

являются основным вычислительным средством в стабильной теории гомотопий. В спектральной последовательности Адамса–Новикова для спектра сфер имеет место изоморфизм $E_2^{*,*}(AN) = \mathrm{Ext}_S^{*,*}(\mathbb{Z}, \Omega_U^*) = \mathrm{Ext}_{A^U}^{*,*}(\Omega_U^*, \Omega_U^*)$. В работе [215] были введены мультипликативные операции Адамса–Новикова. Их описание в терминах формальной группы геометрических кобордизмов позволило С. П. Новикову полностью вычислить группы $E_2^{1,*} = \mathrm{Ext}_S^{1,*}(\mathbb{Z}, \Omega_U^*)$. Спустя 2 года Д. Квиллен получил фундаментальный результат об изоморфизме формальной группы геометрических кобордизмов и универсальной формальной группы Лазара [140]. Вычисление второй строки спектральной последовательности Адамса–Новикова для сфер, локализованной в $p > 2$, было получено лишь в [107] в 1977 г.

Спектральная последовательность Бухштабера (Bss) была введена в [190] в связи с алгебраической проблемой вычисления члена $E_2(AN)$ спектральной последовательности Адамса—Новикова для стабильных гомотопических групп сфер. В этой работе был построен характер Черна–Дольда в комплексных кобордизмах и введено кольцо $\Omega^U(\mathbb{Z}) \subset \Omega^U \otimes \mathbb{Q}$, состоящее из таких элементов кольца $\Omega^U \otimes \mathbb{Q}$, у которых все характеристические числа целые.

Оригинальная идея построения спектральной последовательности Бухштабера, см. [190], состоит в следующем. Обозначим через S_* алгебру Хопфа, двойственную над $\mathbb{Z}$ алгебре Ландвебера—Новикова S. Алгебра S стандартным образом действует на кольце Ω_U^*. Это действие продолжается на $\Omega_U^* \otimes \mathbb{Q}$. В работе [190] каноническое вложение $\Omega_U^* \subset \Omega_U^* \otimes \mathbb{Q}$ было разложено в композицию $\Omega_U^* \subset \Omega_U^*(\mathbb{Z}) \subset \Omega_U^* \otimes \mathbb{Q}$ вложений S-модулей. В [190] введен и использован замечательный изоморфизм $\Omega_U^*(\mathbb{Z}) = S_*$, согласованный с этим действием S на $\Omega_U^*(\mathbb{Z})$ и с каноническим действием S на S_*.

В работах [189; 190] была построена фильтрация S-подмодулями в $\Omega_U^*(\mathbb{Z})$, начинающаяся с $\Omega_U^* \subset \Omega_U^*(\mathbb{Z})$:

$$\Omega_U^* = N_0 \subset N_1 \subset \ldots \subset \Omega_U^*(\mathbb{Z}),$$

у которой последовательные факторы — тривиальные S-модули. Эта фильтрация задает триградуированную спектральную последовательность $E_r^{p,q,t}$, которая сходится к группам $\mathrm{Ext}_S^{s,t}(\mathbb{Z}, \Omega_U^*(\mathbb{Z})) = \mathrm{Ext}_S^{s,t}(\mathbb{Z}, S_*)$. Принципиально важно, что $\mathrm{Ext}_S^{s,t}(\mathbb{Z}, S_*) = 0$ при $(s,t) \neq (0,0)$; отметим, что $\mathrm{Ext}_S^{0,0}(\mathbb{Z}, S_*) = \mathbb{Z}$.

Первый член этой спектральной последовательности имеет вид $E_1^{p,q,t} = \mathrm{Ext}_S^{-(p+q),t}(\mathbb{Z}, N_p/N_{p-1})$, причем при $p > 0$ на группе коэффициентов N_p/N_{p-1} алгебра S действует тривиально. Следовательно, при $p > 0$ группа $E_1^{p,q,t}$ выражается через $\mathrm{Ext}_S^{*,*}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z})$ и N_p/N_{p-1} с помощью теоремы об универсальных коэффициентах.

С другой стороны, $E_1^{0,-s,t} = \mathrm{Ext}_S^{s,t}(\mathbb{Z}, \Omega_U^*)$. Как отмечено выше, спектральная последовательность Бухштабера сходится к нулю, исключая группу $E_\infty^{0,0,0} = \mathbb{Z}$, поэтому из «геометрии» действия дифференциалов следует, что образы дифференци-

алов Bss должны исчерпать $E_1^{0,*,*} = \mathrm{Ext}_S^{*,*}(\mathbb{Z}, \Omega_U^*)$. Это дает новую структуру на $E_1^{0,-s,t} = \mathrm{Ext}_S^{s,t}(\mathbb{Z}, \Omega_U^*)$, которая рекуррентно связывает группы $\mathrm{Ext}_S^{*,*}(\mathbb{Z}, \Omega_U^*)$ с группами $\mathrm{Ext}_S^{*,*}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z})$ и N_p/N_{p-1}.

В [190] построен важный изоморфизм $\mathrm{Ext}_S^{1,*}(\mathbb{Z}, \Omega_U^*) = N_1/N_0$, который влечет точность последовательности абелевых групп

$$0 \to \Omega_{2n}^U \to (N_1)_{2n} \to \mathrm{Ext}_S^{1,2n}(\mathbb{Z}, \Omega_U^*) \to 0,$$

здесь $(N_1)_{2n}$ обозначает однородную компоненту степени $2n$. Из действия алгебры A^U стабильных операций в комплексных кобордизмах следует, что определен гомоморфизм $\lambda : \Omega_*^{U,fr} \to N_1$, где $\Omega_*^{U,fr}$ — группы бордизмов квазикомплексных многообразий со стабильно оснащенными границами, введенные Коннером и Флойдом, см. [204]. Напомним, что для элементов стабильных гомотопических групп сфер определен инвариант Адамса e_2. В [204] дана конструкция инварианта Адамса в терминах группы $\Omega_*^{U,fr}$. В работе [190] вычислены факторы $(N_1)_{4n}/\mathrm{im}\,\lambda$.

Дальнейшее развитие эти идеи получили в работе Н. В. Панова [219]. Главный результат этой работы состоит в явном построении базиса в группе $(N_1)_{2n}/\Omega_{2n}^U$ для всех n и вычислении элементов $\Omega_U^*(\mathbb{Z})$, которые принадлежат $\mathrm{im}\,\lambda$. В качестве следствия он получил решение известной задачи о соотношениях между числами Чженя (U, fr)-многообразий. Напомним, что впервые вычисление групп $\mathrm{Ext}_S^{1,*}(\mathbb{Z}, \Omega_U^*) = \mathrm{Ext}_{A^U}^{1,*}(\Omega_U^*, \Omega_U^*)$ было получено С.П.Новиковым в работе [215].

В работе [228] был вычислен следующий член фильтрации N_2. Ответ дан в двух вариантах. Во-первых, для каждого простого p предъявлены элементы из $\Omega_U^*(\mathbb{Z})$, представляющие классы из $N_2 \otimes \mathbb{Z}_{(p)}$. Оказалось, что $p = 2$ и $p = 3$ являются исключениями из общей закономерности, которой подчиняются все $p \geqslant 5$. Во-вторых, для группы N_2 получен аналог известной теоремы Стонга—Хаттори для Ω_*^U, т. е. элементы N_2 охарактеризованы требованием целочисленности некоторых характеристических чисел в K-теории.

Методами работы [190] получается точная последовательность

$$0 \to N_2/N_1 \to \mathrm{Ext}_S^{1,*}(\mathbb{Z}, N_1/\Omega_U^*) \to \mathrm{Ext}_S^{2,*}(\mathbb{Z}, \Omega_U^*).$$

Доказательство по сути состоит в анализе (-2)-ой строки Bss для $\mathrm{Ext}_S^{*,*}(\mathbb{Z}, \Omega_U^*)$. Эта точная последовательность, в частности, приведена в [228]. С ее помощью была установлена нетривиальность ряда элементов в стабильных гомотопических группах сфер в терминах произведений Масси, элементов с нетривиальным Арф-инвариантом и дифференциалом d_2 спектральной последовательности Бухштабера.

Задача вычисления когомологий алгебры Ландвебера—Новикова с коэффициентами в различных S-модулях привела В. М. Бухштабера к открытию связи алгебры S с группой $\mathrm{Diff}_1(\mathbb{Z})$, ее точное определение см. в [193]. В этой работе он показал, что

алгебра Ландвебера–Новикова S изоморфна алгебре левоинвариантных дифференциальных операторов на группе $\mathrm{Diff}_1(\mathbb{Z})$, а тензорное произведение $S \otimes \mathbb{R}$ изоморфно обертывающей алгебре алгебры Ли формальных векторных полей на прямой, обращающихся в нуле в нуль вместе с первой производной. Позже в работе [184] он показал, что алгебра $\mathcal{A}_p$ является обертывающей алгеброй супергруппы p-адических диффеоморфизмов прямой. Отметим, что в алгебре $\mathcal{A}_2$ операция Sq^1 совпадает с оператором Бокштейна β_2, а для $p > 2$ оператор Бокштейна β_p не выражается через приведенные степени P^k и $\beta_p^2 = 0$ — именно это наблюдение подсказало интерпретацию оператора β_p в виде координаты на суперпрямой.

Таким образом, алгебры Стинрода $\mathcal{A}_p$ и алгебра Ландвебера–Новикова S, возникшие в топологическом контексте, оказались близки к алгебраической ветви развития теории алгебр Хопфа.

Исключительно важными как с точки зрения теории алгебр Хопфа, так и с точки зрения ее приложений, являются следующие проблемы, в направлении которых получены результаты, представленные в данной диссертации.

1) «Внутреннее устройство» алгебр Хопфа, в том числе: структурные теоремы, семейства мультипликативных и аддитивных образующих (аддитивных базисов), групповые элементов, идеалы, подалгебры Хопфа, а также проблемы классификации алгебр Хопфа в различных категориях.

2) Свойства и классификация представлений алгебр Хопфа. В топологическом контексте оказываются важными как представления алгебры Хопфа A стабильных операций в рассматриваемой теории когомологий $h^*(-)$ на кольцах когомологий $h^*(X)$ пространств (спектров) X. Для построения топологических инвариантов важной оказывается алгебраическая задача классификации колец со структурой A-модуля.

3) Вычисление когомологий алгебр Хопфа и описание их структуры, определяемой различными операциями в когомологиях: умножение, скобки Масси и т. п.

Приведем важные примеры по проблемам 1, 2, 3.

В кольце целочисленных симметрических функций известно несколько базисов, имеющих многочисленные применения в комбинаторике, теории представлений и т. д. Среди них отметим в первую очередь: мономиальные симметрические функции m_λ, элементарные симметрические функции e_λ, полные симметрические функции h_λ, функции Шура s_λ, забытые симметрические функции f_λ. Во всех этих случаях индекс λ пробегает множество разбиений. В кольце симметрических функций с рациональными коэффициентами имеется еще один базис, составленный из произведений степенных сумм. Отметим, что каждый из такого сорта базисов используется в определенном круге задач, например, см. книги [206; 224]. Интересно отметить, что забытые симметрические функции использовались К. Ленартом в его доказательстве

теоремы Лазара о кольце, над которым определена универсальная формальная группа, см. [94]. Важные приложения в топологии забытых симметрических функций см. в [191]. Некоторые из этих базисов обладают свойством мультипликативности в том смысле, что произведение двух элементов базиса является элементом того же базиса. Но, например, произведение двух функций Шура не является функцией Шура. Представление такого произведения в виде линейной комбинации функций Шура задается важной формулой Литтлвуда–Ричардсона. В приложениях важны матрицы перехода между парами базисов симметрических функции. Известно, для каких пар базисов матрицы перехода треугольны, см. [206].

Для алгебр Стинрода $\mathcal{A}_p$ имеются семейства базисов, нашедших применения в топологии. Алгебра $\mathcal{A}_p$ для $p = 2$ порождена квадратами Стинрода Sq^k, $k \geqslant 0$, удовлетворяющими так называемым соотношениям Адема

$$\text{для } a < 2b: \quad Sq^a Sq^b = \sum_{j=0}^{[a/2]} \binom{b-j-1}{a-2j} Sq^{a+b-j} Sq^j,$$

где Sq^0 — тождественная операция, а Sq^1 — операция Бокштейна. Гипотезу, что квадраты Стинрода удовлетворяют этим соотношениям, высказал Ву Вэнь Цзюнь [162], доказательство соотношений принадлежит Х. Адему [20]. Доказательство полноты соотношений принадлежит Серру [149]. Для $p > 2$ алгебра $\mathcal{A}_p$ порождена приведенными степенями P^k и элементом Бокштейна β, удовлетворяющим похожим соотношениям, см. (А.4) и (А.5), которые были доказаны Адемом в [19].

В результате вычисления колец когомологий $H^*(K(\mathbb{Z}/p, n); \mathbb{Z}/p)$ Ж. П. Серр для $p = 2$ и А. Картан для $p > 2$ построили базис допустимых мономов в алгебре $\mathcal{A}_p$ (базис Картана–Серра), [45; 148; 149]. В работе Дж. Милнора [109] было показано, что $\mathcal{A}_p$ — алгебра Хопфа и что двойственная ей алгебра Хопфа $(\mathcal{A}_p)^*$ является свободной градуированной коммутативной алгеброй над $\mathbb{Z}/p$. В качестве следствия для алгебры $\mathcal{A}_p$ он получил новый базис (известный как базис Милнора), двойственный к стандартному базису свободной градуированной коммутативной алгебры. Более того, он получил крайне важную явную формулу для умножения элементов такого базиса. Отметим, что это единственная известная явная формула для умножения элементов какого-либо базиса алгебры $\mathcal{A}_p$. Позже в работе [170] Ч. Т. К. Уолл, доказывая одну из гипотез Х. Тоды о точности последовательности левых $\mathcal{A}_2$-модулей, построил новый базис в алгебре $\mathcal{A}_2$, переоткрытый впоследствии Д. Арноном в [26]. Для этого Уолл связал минимальное множество мультипликативных образующих и минимальное множество порождающих соотношений алгебры с элементами ее первых и вторых когомологий с тривиальными коэффициентами, и ввел так называемые соотношения Уолла для алгебры $\mathcal{A}_2$ — соотношения между мультипликативными образующими Sq^{2^i} алгебры $\mathcal{A}_2$. Эти соотношения гласят, что определенные выражения от мультипликативных образующих равны 0, но не в самой алгебре $\mathcal{A}_2$, а в градуированной

алгебре, присоединенной к фильтрации алгебры $\mathcal{A}_2$ подалгебрами $\mathcal{S}_n$, порожденными элементами $Sq^{2^0}, Sq^{2^1}, \ldots, Sq^{2^n}$. Соотношения Уолла были получены в явной замкнутой форме лишь в [167], см. также [175]. В рамках алгебраической теории Д. Арнон изучал экстремальные (мин./макс.) мономы относительно лексикографического (левого/правого) порядков на множестве мультипликативных образующих $\{Sq^{2^i}\}$ алгебры $\mathcal{A}_2$ и обнаружил, что базис допустимых мономов максимален в левом лексикографическом порядке, а базис Уолла (Z-базис) минимален в правом лексикографическом порядке, см. [26]. Также он дал явные описания двух других экстремальных базисов: C- и X-базисов. Эти новые базисы нашли применения в задачах топологии, а именно, в исследовании действия алгебры $\mathcal{A}_2$ в когомологиях пространств Эйленберга–Маклейна $K(\mathbb{Z}/2, n)$, см. ниже.

В алгебре $\mathcal{A}_p$ имеются так называемые элементы Марголиса P_t^s, см. [101]. Из произведений P_t^s-элементов можно составить семейство базисов алгебры $\mathcal{A}_2$, причем матрица перехода к базису Милнора для них треугольна, см. [113]. Имеет место соотношение $(P_t^s)^2 = 0$ при $s < t$, поэтому элементы P_t^s, $s < t$, можно рассматривать как дифференциалы на $\mathcal{A}_2$-модулях. Это соображение лежит в основе определения гомологий Марголиса, в терминах которых для ограниченных снизу $\mathcal{A}_2$-модулей был сформулирован критерий свободности, [15]. Обобщение на случай $p > 2$ было получено в [115]. Мотивный аналог гомологий Марголиса был определен и использован Воеводским при доказательстве гипотезы Милнора, см. [165]. Подход, основанный на гомологиях $\mathcal{A}_p$-модуля относительно дифференциала, реализованного действием подходящей операции, использовался в работе [186] 1970 года.

В работе [174] Р. Вуд построил еще два интересных базиса в алгебре $\mathcal{A}_2$. Оба они обладают следующим свойством: для каждого $n \geqslant 0$ элементы базиса, принадлежащие подалгебре $A_n \subset \mathcal{A}_2$, порожденной элементами 1, $Sq^{2^0}, Sq^{2^1}, \ldots, Sq^{2^n}$, образуют базис в этой подалгебре. Наконец, отметим семейство базисов из итерированных коммутаторов, построенных в [128].

Из [109] известно, что матрица перехода между базисами Милнора и Картана–Серра треугольна [109]; детальное исследование проблемы треугольности матриц перехода между упомянутыми выше базисами алгебры $\mathcal{A}_2$ было сделано К. Монксом (см. [113]), причем в ряде случаев ему удалось показать, что вычисление столбцов матрицы перехода может быть проделано рекуррентно.

Для случая $p > 2$ в алгебрах $\mathcal{A}_p$ и их факторалгебрах $\overline{\mathcal{A}}_p$ были известны и до недавнего времени использовались только базис Милнора и базис допустимых мономов (базис Картана–Серра). Для $p > 2$ в работе [128] было построено семейство базисов, составленных из итерированных коммутаторов, а также построен аналог P_t^s-базисов (для $p = 2$ это результат К. Монкса, см. [113]). Аналог базиса Уолла для $p > 2$ был построен С. Папаставридисом [132].

Проблема описания и построения экстремальных базисов в алгебрах $\mathcal{A}_p$, $p > 2$,

была сформулирована Р. Вудом в большом обзоре 'Problems in the Steenrod algebra', [175].

Полное описание подалгебр Хопфа в алгебрах $\mathcal{A}_p$ получено в работе [16], см. ниже подраздел А.1.3.

Как отмечено выше, довольно быстро исследование структуры множества всех когомологических операций привело к задаче описания действия операций в когомологиях пространств Эйленберга–Маклейна — фактически, это была одна из первых задач об описании представления алгебр операций в когомологиях представляющих пространств. В работах Ж. П. Серра и А. Картана было установлено, что кольца когомологий $H^*(K(\mathbb{Z}/p,n);\mathbb{Z}/p)$ описываются достаточно элегантно в терминах так называемых допустимых мономов в алгебре $\mathcal{A}_p$, имеющих избыточность меньше n. Напомним, что в группе $H^n(K(\mathbb{Z}/p,n);\mathbb{Z}/p)$ имеется фундаментальный класс φ, соответствующий тождественному отображению пространства $K(\mathbb{Z}/p,n)$ в себя. Тогда для $p=2$ кольцо когомологий $H^*(K(\mathbb{Z}/2,n);\mathbb{Z}/2)$ является алгеброй многочленов от бесконечного числа образующих вида $Sq^I\varphi$, где $I=(i_k,i_{k-1},\dots,i_1)$ — произвольная допустимая последовательность с избыточностью $e(I)<n$. Для $p>2$ кольцо когомологий $H^*(K(\mathbb{Z}/p,n);\mathbb{Z}/p)$ является свободной градуированной коммутативной алгеброй от бесконечного числа образующих вида $P^I\varphi$, где $I=(\varepsilon_1,i_1,\varepsilon_2,i_2,\dots,i_k,\varepsilon_{k+1})$ — произвольная допустимая последовательность (в ней все элементы $\varepsilon_j=0$ или 1) с избыточностью $e(I)<n$. Однако описание действия (представления) алгебры Стинрода $\mathcal{A}_p$ на кольце когомологий $H^*(K(\mathbb{Z}/p,n);\mathbb{Z}/p)$ оказалось трудной задачей. Для $p=2$ содержательные утверждения о ядре этого представления были получены лишь в 1995 году Ф. Петерсоном и В. Джиамбалво. В работе [64] они показали, что для $n=1$ ядро действия является двухсторонним идеалом в $\mathcal{A}_2$, порожденным элементами $Sq^{2^r}Sq^{2^r}$, $r\geqslant 1$ и специальными элементами $\varphi_{r,s}\in\mathcal{A}_2$ степеней $2^s(2^r+2^{r-1}+5)$, $s\geqslant 0$, $r\geqslant 4$, причем это семейство порождающих является минимальным. В их доказательстве существенную роль играли соотношения Уолла в алгебре $\mathcal{A}_2$. Также они показали, что для $n\geqslant 2$ ядро действия $\mathcal{A}_2$ тривиально. Их доказательство этого утверждения использовало новую систему полиномиальных образующих кольца $H^*(K(\mathbb{Z}/2,n);\mathbb{Z}/2)$, построенную Д. Арноном [26] с помощью X-базиса алгебры $\mathcal{A}_2$. Также в [64] было высказано предположение, что ядро представления $\mathcal{A}_2$ в когомологиях пространства $(\mathbb{R}P^\infty)^{\times n}$ устроено очень сложно. Частично это утверждение подтверждается результатами статьи [143], в которой рассматривалась подалгебра в когомологиях $H^*((\mathbb{R}P^\infty)^n;\mathbb{Z}/2)$ состоящая из элементов, аннулируемых всеми операциями Sq^i, $i>0$.

Имеется еще одна важная серия представлений алгебр $\mathcal{A}_p$, заданных действием $\mathcal{A}_p$ в когомологиях пространств $(B\mathbb{Z}/p)^n$. Кольца $\mathbb{Z}/p$-когомологий пространств $(B\mathbb{Z}/p)^n$ устроены гораздо проще, чем кольца когомологий пространств Эйленберга–

Маклейна $K(\mathbb{Z}/p, n)$:

$$H^*((B\mathbb{Z}/2)^n; \mathbb{Z}/2) = H^*((\mathbb{R}P^\infty)^n; \mathbb{Z}/2) = \mathbb{Z}/2[u_1, \dots, u_n],$$
$$H^*((B\mathbb{Z}/p)^n; \mathbb{Z}/p) = H^*((L_p^\infty)^n; \mathbb{Z}/2) = \mathbb{Z}/p[x_1, \dots, x_n] \otimes \Lambda(y_1, \dots, y_n),$$

здесь $L_p^\infty = B\mathbb{Z}/p$ — бесконечномерная p-линза, $|u_i| = |y_i| = 1$, $|x_i| = 2$. Действие $\mathcal{A}_p$ в этих когомологиях полностью задается следующими простыми формулами:

$$Sq^1 u_i = u_i^2 \text{ для } p = 2;$$
$$\beta y_i = x_i, P^1 x_i = x_i^p \text{ для } p > 2.$$

Для алгебры $\overline{\mathcal{A}}_p$ вместо $(B\mathbb{Z}/p)^n$ можно рассматривать $(\mathbb{C}P^\infty)^n$, в этом случае в формулах надо отбросить слагаемые, содержащие β и элементы y_i.

Для описания соотношений в алгебрах обычно используются их точные представления. Представление $\mathcal{A}_p$ в когомологиях $H^*((B\mathbb{Z}/p)^n; \mathbb{Z}/p)$ неточное, но тем не менее его можно использовать для проверки равно ли 0 некоторое выражение f от образующих алгебры $\mathcal{A}_p$. Для этого при $p = 2$ достаточно выяснить равен ли 0 результат применения f к элементу $u_1 u_2 \dots u_n$, где $n \geqslant \deg f$. Для $p > 2$ имеет место аналогичное утверждение: нужно вычислить значение f на элементе $x_1 y_1 x_1 y_2 \dots x_n y_n$ для достаточно большого n.

С представлением $\mathcal{A}_2$ на кольце $P_n = H^*((B\mathbb{Z}/2)^n; \mathbb{Z}/2) = \mathbb{Z}/2[u_1, \dots, u_n]$ связан ряд важных гипотез и результатов, которые мы сейчас опишем.

Пусть M — некоторый $\mathcal{A}_2$-модуль. Рассмотрим в M подмодуль $\mathcal{A}_2^+ M$, состоящий из элементов вида $\sum\limits_{i>0} Sq^i m_i$, где $m_i \in M$. Ненулевые элементы фактора $QM = M/\mathcal{A}_2^+ M$ соответствуют минимальному набору образующих $\mathcal{A}_2$-модуля M.

Описание элементов подмодуля $\mathcal{A}_2^+ M \subset M$ и фактормодуля $QM = M/\mathcal{A}_2^+ M$ для $M = P_s$ составляет содержание так называемой hit problem Ф. Петерсона. В [135] он полностью вычислил QP_1 и QP_2. Случай $s = 3$ решен М. Камеко в [83; 85], случай $s = 4$ рассматривали М. Камеко в [84] и Н. Сум [158].

С точки зрения топологии hit problem мотивирована следующей гипотезой Ф. Петерсона в [135], которая была доказана Р. Вудом в [176]. Обозначим через $\sigma_2(k)$ число единиц в разложении числа k по основанию 2.

Теорема (Ф. Петерсон [135], Р. Вуд [176]). *Пусть ненулевой элемент модуля QP_n имеет градуировку d. Тогда $\sigma_2(d + n) \leqslant n$.*

Из этой теоремы Ф. Петерсон получил следующий важный результат.

Теорема (Ф. Петерсон [134]). *Пусть M — замкнутое гладкое многообразие размерности d. Предположим, что все произведения длины не меньше n нормальных классов Штифеля–Уитни многообразия M равны 0. Тогда $\sigma_2(d) \leqslant n$ или M является границей многообразия размерности $d + 1$.*

Условия этой теоремы выполнены для многообразий с категорией Люстерника–Шнирельмана не превышающей n.

Еще одно важное приложение представления $\mathcal{A}_2$ на P_n и фактормодулей QP_s связано с так называемым алгебраическим трансфером Зингера (W. Singer), см. [151]. На P_s определено правое действие группы $GL_s(\mathbb{Z}/2)$ линейными заменами переменных $u_1, \ldots, u_s$. Действия группы $GL_s(\mathbb{Z}/2)$ и алгебры $\mathcal{A}_2$ на кольце P_s коммутируют, поэтому определен модуль инвариантов $(QP_s)^{GL_s(\mathbb{Z}/2)} = (\mathbb{Z}/2 \otimes_{\mathcal{A}_2} P_s)^{GL_s(\mathbb{Z}/2)}$.

В работе [151] был определен линейный гомоморфизм

$$\varphi_s : \mathrm{Tor}^{\mathcal{A}_2}_{s,*}(\mathbb{Z}/2, \mathbb{Z}/2) \to (\mathbb{Z}/2 \otimes_{\mathcal{A}_2} P_s)^{GL_s(\mathbb{Z}/2)},$$

понижающий на s внутреннюю степень. У. Зингер доказал, что $\varphi = \bigoplus\limits_{s \geqslant 0} \varphi_s$ является гомоморфизмом (s,k)-биградуированных коалгебр

$$\varphi : \bigoplus_{s,k} \mathrm{Tor}^{\mathcal{A}_2}_{s,s+k}(\mathbb{Z}/2, \mathbb{Z}/2) \to \bigoplus_{s,k} (\mathbb{Z}/2 \otimes_{\mathcal{A}_2} P^{(k)}_s)^{GL_s(\mathbb{Z}/2)},$$

где коумножение на $\bigoplus\limits_{s,k} (\mathbb{Z}/2 \otimes_{\mathcal{A}_2} P^{(k)}_s)^{GL_s(\mathbb{Z}/2)}$ индуцировано изоморфизмами $P_s = P_m \otimes P_n$ для $m + n = s$. Через $P^{(k)}_s$ здесь обозначено подпространство в P_s, состоящее из элементов степени k.

Кроме того, он доказал, что φ_1 и φ_2 являются изоморфизмами. М. Бордман доказал, что φ_3 тоже изоморфизм, см. [32]. В той же работе [151] было показано, что φ_5 не является изоморфизмом, но совокупность полученных результатов позволила У. Зингеру сформулировать следующую гипотезу.

Гипотеза. *Для всех $s \geqslant 0$ гомоморфизм φ_s является эпиморфизмом.*

Эта гипотеза оставалась открытой вплоть до недавнего времени, несмотря на заметную активность в ее направлении. В 2024 г. Н. Сум показал, что φ_5 не является эпиморфизмом, предъявив явным образом ненулевой элемент в группе $(\mathbb{Z}/2 \otimes_{\mathcal{A}_2} P^{(108)}_5)^{GL_5(\mathbb{Z}/2)}$, который не может лежать в образе φ_5.

Несмотря на результат Н. Сума, двойственный гомоморфизм алгебр

$$\varphi^* : \bigoplus_{s,k} ((\mathbb{Z}/2 \otimes_{\mathcal{A}_2} P^{(k)}_s)^{GL_s(\mathbb{Z}/2)})^* \to \bigoplus_{s,k} \mathrm{Ext}^{s,s+k}_{\mathcal{A}_2}(\mathbb{Z}/2, \mathbb{Z}/2)$$

представляет особенный интерес, так как связывает инварианты действия $GL_s(\mathbb{Z}/2)$ на $\mathcal{A}_2$-неразложимых элементах модуля P_s со вторым членом спектральной последовательности Адамса для стабильных гомотопических групп сфер. В частности, он устанавливает связь когомологий алгебры Стинрода $\mathcal{A}_2$ с модулярной теорией представлений групп $GL_s(\mathbb{Z}/2)$. В этом направлении можно отметить работы [24; 111; 112; 126; 137; 172; 173]. Гомоморфизм φ^* возникает как отображение членов E_2 спектральных последовательностей Адамса, индуцированное трансфером надстроечных спек-

тров $\Sigma^\infty(B((\mathbb{Z}/2)^s)_+) \to \Sigma^\infty(S^0)$. Удобно переформулировать φ_s^* как гомоморфизм

$$(P_{\mathcal{A}_2}H_k(B(Z/2)^s;\mathbb{Z}/2))_{GL_s(\mathbb{Z}/2)} \to \mathrm{Ext}_{\mathcal{A}_2}^{s,s+k}(\mathbb{Z}/2,\mathbb{Z}/2)$$

из модуля коинвариантов действия группы $GL_s(\mathbb{Z}/2)$ на $\mathcal{A}_2$-примитивной части $P_{\mathcal{A}_2}H_k(B(Z/2)^s;\mathbb{Z}/2)$ гомологий $H_k(B(Z/2)^s;\mathbb{Z}/2)$. Здесь рассматривается сопряженное действие $\mathcal{A}_2$ на гомологиях $H_*(B(Z/2)^s;\mathbb{Z}/2)$ относительно стандартного спаривания гомологий и когомологий, а примитивные элементы — в точности те, которые аннулируются любой операцией Sq^i, $i>0$. Важные результаты о гомоморфизме φ_4^* получены в [38].

Исследования в этом направлении сохраняют актуальность, например, в недавней работе [78] исследовано соотношение между трансфером Зингера и алгебраическим аналогом трансфера Кана–Придди. Важные примеры и исчерпывающий обзор результатов о действии алгебры $\mathcal{A}_2$ на $\mathbb{Z}_2$-когомологиях произведений проективных пространств $\mathbb{R}P^\infty$ можно найти в двухтомнике [168; 169].

Случай $p>2$ оказался значительно сложнее, здесь имеется лишь частичный прогресс. М. Кроссли показал, что для $p>2$ алгебраический трансфер

$$\varphi(\mathbb{Z}/p):\bigoplus_{s,k}\mathrm{Tor}_{s,s+k}^{\mathcal{A}_p}(\mathbb{Z}/p,\mathbb{Z}/p)\to\bigoplus_{s,k}(\mathbb{Z}/p\otimes_{\mathcal{A}_p}H^k(B(\mathbb{Z}/p)^s;\mathbb{Z}/p)^{GL_s(\mathbb{Z}/p)},$$

где $\varphi(\mathbb{Z}/p)=\bigoplus\limits_{s\geqslant 0}\varphi_s(\mathbb{Z}/p)$, является гомоморфизмом биградуированных коалгебр. При этом гомоморфизм $\varphi_s(\mathbb{Z}/p)$ для $s=1,2$ является изоморфизмом, см. [49].

Таким образом, подпространства в гомологиях $H_*(B(\mathbb{Z}/p)^s;\mathbb{Z}/p)$, состоящие из элементов, аннулируемых всеми когомологическими операциями положительных степеней, важны как для проблемы Петерсона, так и в контексте трансфера Зингера.

В ряде приложений возникают задачи о когомологиях алгебр Хопфа. Существенные продвижения в таких задачах почти всегда связаны с использованием разнообразных структур на этих когомологиях. Более точно, на этих когомологиях помимо стандартного умножения (по Йонеде), имеются высшие структуры: скобки Масси, A_∞-структура и т. п. На когомологиях (ко)коммутативных $\mathbb{Z}/p$-алгебр Хопфа определено действие аналогов операций Стинрода $\bmod p$. Их действие в данном случае отличается от топологического случая: операции Sq^0 и P^0 действуют не тождественно, см. [98; 120; 212; 213].

Яркие примеры таких задач связаны со спектральными последовательностями Адамса и Адамса—Новикова, сходящимися к группам стабильным гомотопических классов отображений одного пространства в другое (или морфизмов одного спектра в другой). У них второй член имеет вид $\mathrm{Ext}_A^{s,t}(M,N)$, где A — алгебра (алгеброид) Хопфа стабильных операций. Для его описания используются неразложимые элемен-

ты, их произведения и скобки Масси, а также соотношения между результатами операций.

Почти сразу после публикации работ [102; 163], в которых было введено понятие произведения Масси в когомологиях $H^*(A, d_A)$ дифференциальной градуированной алгебры A с дифференциалом d_A, было замечено, что эти операции, а также операции близкой природы, выражаются в терминах дифференциалов некоторых спектральных последовательностей.

По-видимому, первой публикацией на эту тему была работа [154]. В ней была определена бар-конструкция так называемой $A(n)$-алгебры A. Стандартная фильтрация этой барконструкции определяет спектральную последовательность, дифференциалы которой были интерпретированы как операции (Дж. Сташеф назвал их Yessam-операциями) в когомологиях алгебры A относительно дифференциала $\partial = m_1$ — одного из структурных отображений $A(n)$-алгебры; подробности см. в [154].

Список работ, в которых операции в когомологиях алгебр связываются с дифференциалами подходящих спектральных последовательностей, к настоящему времени стал весьма большим; обзор результатов по этой теме не входит в наши цели, ограничимся ссылками на работы [66; 152; 153]. В важной книге [66] было показано, что дифференциалы спектральной последовательности Эйленберга—Мура ($EMss$) выражаются через так называемые матричные произведения Масси, см. [103], а также [183].

Этот результат был сформулирован в работе [104] (за 6 лет до публикации [66]), с обещанием дать подробные доказательства в статье «The structure and applications of the Eilenberg-Moore spectral sequences», но она не была опубликована. Доказательство появилось в книге [66, Sec. 5]. В ней же было введено понятие канонического (специального) произведения Масси и доказано, что любой класс когомологий размерности больше 1 любой связной градуированной алгебры над полем выражается в виде итерированного матричного произведения Масси от одномерных классов когомологий. В связи с этим обратим внимание на построенный в работе [124] пример связного и односвязного пространства X, такого что в его когомологиях имеются нетривиальные высшие произведения Масси, которые не определяются дифференциалами $EMss$ соответствующего расслоения $\Omega X \to PX \to X$.

В ряде работ нашли приложения операции в когомологиях алгебр, определяемые в терминах высших структур, таких как, A_∞-структуры. Ряд результатов по современным алгебраическим задачам о когомологиях алгебр Хопфа, см. в материалах конференции [89].

В приложениях когомологий алгебр Хопфа оказались исключительно важны их функториальные свойства. Из топологических применений следует еще раз упомянуть вычисление С. П. Новиковым групп $\mathrm{Ext}^{s,t}_{A^U}(\Omega^*_U, \Omega^*_U)$, которое опиралось на связи этих групп с другими Ext-группами через гомоморфизмы, индуцированные гомо-

морфизмами между алгеброй A^U операций в кобордизмах и (под)алгебрами операций в других экстраординарных теориях когомологий. Далее, канонический гомоморфизм $\psi : \mathcal{A}_2 \to S \otimes \mathbb{Z}/2$, см. [92], определяет отображение $\theta : \mathrm{Ext}_S^{*,*}(\mathbb{Z}/2, \mathbb{Z}/2) \to \mathrm{Ext}_{\mathcal{A}_2}^{*,*}(\mathbb{Z}/2, \mathbb{Z}/2)$, с помощью которого в работе [193] были предъявлены элементы в спектральной последовательности Адамса–Новикова, накрывающие важные элементы $h_k^2 \in \mathrm{Ext}_{\mathcal{A}_2}^{2,2k}(\mathbb{Z}/2, \mathbb{Z}/2)$.

Один из стандартных подходов к вычислению когомологий алгебр в топологических приложениях опирается на использование спектральной последовательности Мэя, скобок Масси и дополнительных структур, таких как, например, формул Нагахары для действия операций Стинрода в когомологиях алгебры $\mathcal{A}_2$. Часто при этом используются экономные (минимальные) резольвенты и т. п. В последнее время имеется заметный прогресс в области применения специализированного программного обеспечения (пакетов символьных вычислений), систем распределенных вычислений. В недавней работе [39] представлен архив, содержащий исходный код, минимальную свободную резольвенту, цепное отображение, соответствующее операции $Sq^0 : \mathrm{Ext}_{\mathcal{A}_2}^{s,t}(\mathbb{Z}/2, \mathbb{Z}/2) \to \mathrm{Ext}_{\mathcal{A}_2}^{s,2t}(\mathbb{Z}/2, \mathbb{Z}/2)$, а также результаты вычисления групп $\mathrm{Ext}_{\mathcal{A}_2}^{s,t}(\mathbb{Z}/2, \mathbb{Z}/2)$ в диапазоне размерностей $s \leqslant 128, t \leqslant 200$.

Несмотря на значительный прогресс в развитии и использовании методов спектральной последовательности Адамса–Новикова, возможности классической последовательности Адамса еще не исчерпаны. Помимо развития вычислительных возможностей, прогресс связан с так называемой мотивной теорией гомотопий.

Основы мотивной теории гомотопий были заложены в работах [117; 164]. В этой теории имеются мотивные аналоги многих объектов и конструкций классической алгебраической топологии. Необходимо подчеркнуть, что при этом появляются дополнительные градуировка или параметр. Это связано с тем, что в мотивном контексте имеются две различные надстройки, поэтому спектр сфер имеет двойную индексацию, а гомотопические группы биградуированы, см. [117]. Мотивная алгебра Стинрода была построена и использована в работах Воеводского, посвященных доказательствам гипотез Милнора и Блоха-Като, см. [165; 166]. Он же вычислил двойственную к ней алгебру Хопфа; из-за того, что основное кольцо является не полем, а кольцом многочленов $\mathbb{Z}[\tau]$, структура двойственной алгебры оказалась сложнее, чем в классической теоремы Милнора, см. [109]. Позднее мотивные операции Стинрода были использованы в работе [127]. Мотивная версия спектральной последовательности Адамса была построена в [116], развитие см. в [56; 77]. В отличие от классической, она триградуирована и учет дополнительной градуировки позволяет показать тривиальность некоторых дифференциалов без дополнительных рассуждений.

Важно, что для мотивной теории гомотопий над $\mathbb{C}$ имеется функтор геометрической реализации, который позволяет получать из мотивных результатов результаты в классической теории гомотопий. Этот метод был использован, например, в работе

[80], в которой получены результаты о стабильных гомотопических группах сфер π_n^{st} для $n = 51, 52$. Теория синтетических спектров и клеточная мотивная категория разработаны в [138]. Эта область активно развивается — например, в одном из последних препринтов [43] анонсировано вычисление π_n^{st} для $n = 82, 83$.

Стоит упомянуть и работу [96], в которой анонсировано решение последнего открытого случая знаменитой проблемы Кервера, а именно, доказательство того, что в размерности 126 имеется элемент с инвариантом Кервера 1 (эквивалентно, $h_6^2 \in \mathrm{Ext}_{\mathcal{A}_2}^{2,128}(\mathbb{Z}/2, \mathbb{Z}/2)$ является циклом всех дифференциалов спектральной последовательности Адамса). В этой работе доказательства опираются, в частности, на (a) мультипликативную структуру второго члена спектральной последовательности Адамса и правило Лейбница; (b) высшие умножения — произведения Масси в когомологиях $\mathrm{Ext}_{\mathcal{A}_2}^{s,t}(\mathbb{Z}/2, \mathbb{Z}/2)$, скобки Тоды в стабильных гомотопических группах сфер и их связь в силу теоремы Мосса, см. [118]; (c) связь классической спектральной последовательности Адамса с ее мотивным аналогом, см. [56]; (d) некоммутативные базисы Гребнера и оригинальное программное обеспечение, см. [95].

Возможности топологических приложений алгебраических результатов, относящихся к мотивному контексту, далеко не исчерпаны — имеются результаты, которые по всей видимости, имеют потенциал для таких приложений, например, см. работы [129—131; 177; 218].

Следующий сюжет важен в силу связи алгебры Ландвебера—Новикова с теорией бесконечномерных алгебр Ли, см. [193]. Рассмотрим алгебру Ли L_1 формальных векторных полей на прямой, которые в начале координат обращаются в нуль вместе с первой производной. В качестве базиса в этой алгебре Ли можно взять векторные поля $e_i = t^{i+1}\frac{d}{dt}$, $i \geqslant 1$. Легко проверить, что $[e_i, e_j] = (j-i)e_{i+j}$.

Л. В. Гончарова доказала [196; 197], что для каждого положительного целого s когомологии $\mathrm{Ext}_{UL_1}^{s,*}(\mathbb{Q}, \mathbb{Q})$ двумерны. Кроме того, если первая градуировка равна s, то соответствующие образующие имеют вторую градуировку, равную так называемым пентагональным числам Эйлера $\frac{3s^2 \pm s}{2}$. Доказательство этой теоремы неоднократно улучшалось на основе разных подходов, см. работы [60; 145; 194; 195; 211; 222].

Обозначим через $x_\pm^s$ образующую группы $\mathrm{Ext}_{UL_1}^{s,\frac{3s^2\pm s}{2}}(\mathbb{Q}, \mathbb{Q})$. Легко проверить, что для любых $s, t \geqslant 1$ и любом выборе знаков сумма чисел $\frac{3s^2\pm s}{2} + \frac{3t^2\pm t}{2}$ не равна $\frac{3(s+t)^2\pm(s+t)}{2}$, откуда следует, что умножение в когомологиях алгебры L_1 тривиально. В начале 1970-х годов В. М. Бухштабер высказал гипотезу, что вся алгебра когомологий $\mathrm{Ext}_{UL_1}^{*,*}(\mathbb{Q}, \mathbb{Q})$ порождается нетривиальными (т. е. не содержащими 0) итерированными произведениями Масси двух образующих $x_\pm^1 \in \mathrm{Ext}_{UL_1}^{1,*}(\mathbb{Q}, \mathbb{Q})$. В этом направлении разными авторами был получен ряд результатов. Техника, развитая в работе [61],

позволила доказать, что

$$x_-^s \in \langle x_+^{s-1}, \underbrace{x_-^1, \dots, x_-^1}_{2s-1} \rangle \quad \text{и} \quad x_+^s \in \langle x_+^{s-1}, \underbrace{x_-^1, \dots, x_-^1}_{3s-1} \rangle.$$

Однако вскоре было замечено, что все эти произведения содержат 0. В заметке И. В. Артельных [179] утверждается, что x_-^s и x_+^{2s+1} реализуются в виде нетривиальных произведений Масси:

$$x_-^s \in \langle \underbrace{x_+^1, \dots, x_+^1}_{s-1}, x_+^{s-2}, x_-^1 \rangle \quad \text{и} \quad x_+^{2s+1} \in \langle \underbrace{x_+^1, \dots, x_+^1}_{3s+1}, x_+^{2s} \rangle.$$

Случай элементов x_+^{2s} после [179] оставался открытым. Метод [179] использует связь модулей специального вида с нетривиальными высшими дифференциалами Bss. К сожалению, подробные доказательства результатов работы [179] до сих пор не опубликованы. Окончательно гипотеза Бухштабера была доказана Д. В. Миллионщиковым, см. [209], лишь в 2009 г. Он показал, что

$$x_-^{s+1} \in \langle \underbrace{x_-^1, \dots, x_-^1}_{m}, x_+^1, \underbrace{x_-^1, \dots, x_-^1}_{n}, x_+^s \rangle \ \text{ и } \ x_+^{s+1} \in \langle \underbrace{x_-^1, \dots, x_-^1}_{s}, x_+^1, \underbrace{x_-^1, \dots, x_-^1}_{2s}, x_+^s \rangle,$$

где n, m — произвольные натуральные числа, $m+n = 2s-1$, причем все эти произведения Масси нетривиальны. В полученных Д. В. Миллионщиковым представлениях элементов $x_\pm^{s+1}$ произведения Масси являются специальными в определении работы [10].

В связи с произведениями Масси уместно обратить внимание на две серии нильмногообразий (в главе 7 мы приведем все необходимые определения). Хорошо известно, что в когомологиях комплексных кэлеровых многообразий произведения Масси тривиальны. В работах [29; 181; 182] были построены явные примеры односвязных симплектических многообразий с нетривиальными произведениями Масси в когомологиях. Эти результаты нашли дальнейшее развитие в работе [183] тех же авторов, где они показали, что для сколь угодно большого n существуют симплектические многообразия с нетривиальными $2n$-местными произведениями Масси.

Рассмотрим конечномерную алгебру Ли $\mathcal{G}L^m$, изоморфную фактору алгебры L_1 по идеалу, порожденному элементами $e_k = t^{k+1}\frac{d}{dt}$, $k \geqslant m+1$. В ней имеется базис с рациональными структурными константами, поэтому односвязная группа Ли, соответствующая алгебре Ли $\mathcal{G}L^m$, содержит кокомпактную решетку, фактор по которой является нильмногообразием M^m. Для $m = 2n$ многообразие M^{2n} допускает симплектическую структуру, которая задается 2-формой $\Omega_{2n} = \sum_{i<n}(2n-2i)\omega_{2n-i} \wedge \omega_i$ (см. [29; 183; 185]), где коцепь ω_i двойственна элементу $e_i \in \mathcal{G}L^{2n}$. Класс когомологий $[\Omega_{2n}] \in H^2(M^{2n})$ является представителем нетривиального $2n$-местного произведения

Масси, и не является представителем никакого m-местного произведения Масси для $m < 2n$; доказательство последнего утверждения использует биградуировку и вспомогательную фильтрацию, см. [183].

Важная серия нильмногообразий, относящихся к алгебрам Ли $\mathcal{G}L^m$, была получена в работе [185], а именно, опираясь на свои предыдущие работы, В. М. Бухштабер ввел группы L^m полиномиальных преобразований прямой, рассматриваемой $\bmod\, t^{m+2}$. Алгебра Ли группы L^m в точности совпадает с $\mathcal{G}L^m$. Нильмногообразие M^m определяется как фактор группы L^m по решетке преобразований с целочисленными коэффициентами. Нильмногообразия M^m образуют башню расслоений со слоем окружность (важные в теории динамических систем скрученные торы):

$$\ldots \to M^n \to M^{n-1} \to \ldots \to M^2 \to M^1 = S^1$$

со слоем S^1.

Еще одна важная серия нильмногообразий возникает при обобщении группы Гейзенберга $\mathcal{H}^3$ на более высокие размерности. Рассмотрим группу $\mathcal{H}^{2n+1}$ матриц вида

$$\begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_2 & \cdots & x_n & z \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & y_1 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots & \\ 0 & & & 1 & 0 & y_{n-1} \\ 0 & & \cdots & 0 & 1 & y_n \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

с вещественными x_j, y_j и z. Как пространство она гомеоморфна $\mathbb{R}^{2n+1}$. В этой группе имеется решетка Γ_H^{2n+1}, состоящая из матриц с целочисленными x_j, y_j и z. Соответствующая алгебра Ли $\mathcal{GH}^{2n+1}$ нильпотентна; значит, фактор $M_H^{2n+1} = \mathcal{H}^{2n+1}/\Gamma_H^{2n+1}$ является нильмногообразием.

Многообразия M_H^{2k+1} связаны последовательностью вложений коразмерности 2

$$S^1 \to M_H^3 \to \ldots \to M_H^{2k-1} \to M_H^{2k+1} \to \ldots$$

Многообразия M^3 и M_H^3 диффеоморфны, причем диффеоморфизм индуцирован алгебраическим изоморфизмом соответствующих нильпотентных групп Ли, а при $k > 1$ многообразия M^{2k+1} и M_H^{2k+1} различны.

Многообразия M^{2n} имеют каноническую симплектическую структуру, а M^{2n+1} и M_H^{2n+1} являются контактными многообразиями.

Структура и содержание диссертации

Диссертация состоит из введения, восьми глав, приложения, заключения и списка литературы.

В главе 1 в разделе 1.1 приведен обзор необходимых результатов Ч. Т. К. Уолла, Д. Арнона, К. Монкса, Дж. Палмьери, Дж. Жанга и Р. Вуда об аддитивных базисах алгебры $\mathcal{A}_2$. Основные результаты главы 1 относятся к $\mathbb{C}$-мотивной алгебре $\mathcal{A}_2^m$: эта алгебра операций определена для объектов над полем $\mathbb{C}$, для которых рассматриваются $\mathbb{Z}/2$-когомологии. Описаны в явном виде базисы, минимальные относительно правого (соответственно левого) лексикографического порядка на мономах от мультипликативных образующих $Sq^i \in \mathcal{A}_2^m$. Эти базисы оказались аналогичными Z-базису Уолла [170] и, соответственно, X-базису Арнона [26]. Базис допустимых мономов алгебры $\mathcal{A}_2^m$, введенный Воеводским [166], максимален относительно левого лексикографического порядка. Вопрос о базисе алгебры $\mathcal{A}_2^m$, максимальном относительно правого лексикографического порядка, остается открытым. В классической алгебре $\mathcal{A}_2$ ответ на этот вопрос дает C-базис Арнона. Показано, что естественные модификации C-базиса в мотивном случае не подходят, — приведены соответствующие контрпримеры. В алгебре $\mathcal{A}_2^m$ построены семейство P_t^s-базисов и семейство коммутаторных базисов, они являются аналогами одноименных базисов алгебры $\mathcal{A}_2$ (Монкс [113], Палмьери–Жанг [128]).

Треугольность матрицы перехода от базиса Милнора к базису допустимых мономов в $\mathcal{A}_2^m$ следует из результатов Воеводского. Доказано, что для следующих пар базисов алгебры $\mathcal{A}_2^m$ при подходящих выборах упорядочений элементов базисов матрица перехода от одного базиса к другому также треугольна: (базис Милнора — X-базис), (базис Милнора — любой базис из семества P_t^s-базисов), (любые два базиса из семейства P_t^s-базисов).

В [174] Вуд построил два базиса WX и WY и описал их свойства. Построены аналоги базисов Вуда WX и WY для алгебры $\mathcal{A}_2^m$ и показано, что они обладают свойствами базисов Вуда.

В главе 2 построены экстремальные базисы алгебр Стинрода $\mathcal{A}_p$ и алгебр $\overline{\mathcal{A}}_p$ (фактор алгебры $\mathcal{A}_p$ по двухстороннему идеалу, порожденному операцией Бокштейна β), $p > 2$. Для удобства изложения эти алгебры рассмотрены по-отдельности. В разделе 2.1 для алгебр $\overline{\mathcal{A}}_p$ построены новые X и Z базисы — они минимальны относительно левого, соответственно, правого лексикографических порядков на мономах от мультипликативных образующих $P^i \in \overline{\mathcal{A}}_p$. Введены перестановки специального типа в определенных подмономах элементов аддитивного Z-базиса (X-базиса), которые дают новые аддитивные базисы алгебры $\overline{\mathcal{A}}_p$. Этот факт не имеет аналога для алгебры $\mathcal{A}_2$ и является специфическим для случая $p > 2$. Раздел 2.2 посвящен построению экстремальных базисов в алгебре $\mathcal{A}_p$. Введены по два естественных продолжения для левого и правого лексикографических порядков с множества мономов от мультипликативных

образующих $P^i \in \overline{\mathcal{A}}_p$ на множество мономов от операций P^i и операции Бокштейна β — мультипликативных образующих алгебры $\mathcal{A}_p$. Естественность рассмотрения введенных двух продолжений связана со своего рода исключительным положением элемента Бокштейна в $\mathcal{A}_p$ — здесь снова проявляется отличие алгебр $\mathcal{A}_p$, $p > 2$, от $\mathcal{A}_2$. Для $p > 2$ операция Бокштейна позволяет ввести дополнительную градуировку в алгебре $\mathcal{A}_p$ — так называемый тип Картана, который играет важную роль в приложениях.

Продолжения правого лексикографического порядка обозначены через εR и IR, а левого — соответственно εL и IL. Явно описаны базисы алгебры $\mathcal{A}_p$, $p > 2$, экстремальные относительно порядков IR и IL. А именно, построен базис βX (соответственно, βZ), минимальный относительно порядка IL (соответственно, IR). В работе [132] базис βZ был построен из других соображений — в ней подход Уолла из [170] с алгебры $\mathcal{A}_2$ обобщен на $\mathcal{A}_p$. Наш базис βX является новым. Для базисов βX и βZ получен результат о перестановках сомножителей в некоторых подмономах, сохраняющих свойство набора элементов быть базисом. Построены базис XC — максимальный относительно порядка IR, и базис ZA — максимальный относительно порядка IL.

Кроме того, в этой главе описан важный базис βC алгебры $\mathcal{A}_p$, с помощью которого в разделе 4.1 построено новое семейство свободных мультипликативных образующих в кольце $H^*(K(\mathbb{Z}/p, n); \mathbb{Z}/p)$. Вопрос о порядке, относительно которого базис βC экстремален, остается открытым. Явный вид элементов βC-базиса был предложен Д. Ю. Емельяновым, доказательство того, что они образуют аддитивный базис алгебры $\mathcal{A}_p$, принадлежит автору диссертации.

Базис допустимых мономов алгебры $\mathcal{A}_p$ максимален относительно порядка εL. Вопрос явного описания экстремальных базисов в оставшихся трех случаях относительно порядков εL и εR остался открытым.

В главе 3 исследуется треугольность матриц перехода между базисами алгебр $\mathcal{A}_p$ и $\overline{\mathcal{A}}_p$, $p > 2$, как классическими, так и построенными в предыдущей главе. Для алгебр $\overline{\mathcal{A}}_p$ треугольность матриц перехода между базисом Милнора и базисом допустимых мономов доказана Милнором [109], а между базисом Милнора и любым базисом из P_t^s-семейства, и между базисом Милнора и X-базисом — Емельяновым [11]. В главе 3 для полноты изложения приведены доказательства этих результатов и дано доказательство результата автора диссертации о треугольности матрицы перехода между базисом Милнора и C-базисом в алгебре $\overline{\mathcal{A}}_p$.

Для алгебры $\mathcal{A}_p$ доказана треугольность матриц перехода для следующих пар базисов: (базис Милнора — βC-базис), (базис Милнора — βX-базис), (базис Милнора — XC-базис), (базис Милнора — ZA-базис), (базис Милнора — любой базис из βP_t^s-семейства). Треугольность матрицы перехода между базисом Милнора и базисом допустимых мономов в $\mathcal{A}_p$ доказана Милнором [109].

В главе 4 получены следующие приложения аддитивных базисов в алгебрах Стинрода. По теореме Картана [44; 45] кольцо когомологий $H^*(K(\mathbb{Z}/p, n); \mathbb{Z}/p)$, $p > 2$,

является свободной градуированной коммутативной алгеброй от мультипликативных образующих вида $P^I\varphi$, где $\varphi \in H^n(K(\mathbb{Z}/p,n);\mathbb{Z}/p)$ — фундаментальный класс, а P^I пробегает множество допустимых мономов избыточности меньше n. В разделе 4.1 в терминах βC-базиса из главы 2 построено новое семейство свободных мультипликативных образующих кольца когомологий $H^*(K(\mathbb{Z}/p,n);\mathbb{Z}/p)$, $p>2$, $n\geqslant 2$. В следующем разделе 4.2 βX-базис использован для решения известной задачи: доказана тривиальность двухстороннего идеала в $\mathcal{A}_p$, состоящего из операций, действующих тривиально в $\mathbb{Z}/p$-когомологиях пространства $K(\mathbb{Z}/p,2)$. Для данного пространства наше новое семейство образующих в его когомологиях совпадает с образующими Картана. В разделе 4.3 дано применение Z-базиса алгебры $\overline{\mathcal{A}}_p$ для решения известной задачи о короткой последовательности $\overline{\mathcal{A}}_p$-модулей, введенной Х. Тодой, который в [161] сформулировал гипотезу о ее точности. Для $p=2$ гипотеза Тоды была доказана Уоллом с помощью Z-базиса в $\mathcal{A}_2$. Справедливость $\bmod p$ гипотезы Тода, т. е. для $p>2$, ожидалась ввиду результатов Мура—Петерсона [115] и Адамса—Марголиса [15], характеризующих свободные ограниченные снизу модули над алгебрами $\mathcal{A}_2$ и $\mathcal{A}_p$, $p>2$. В разделе 4.3 показано, что для $p>2$ ситуация с гипотезой Тоды сложнее, чем для $p=2$. А именно, доказано, что точность рассматриваемой короткой последовательности левых модулей над $\overline{\mathcal{A}}_p$ выполняется до определенной критической градуировки, а в критической градуировке в среднем члене последовательности ядро следующего гомоморфизма строго содержит образ предыдущего гомоморфизма последовательности, т. е. в среднем члене возникает нетривиальная группа гомологий. Доказано, что эта группа изоморфна $\mathbb{Z}/p$ и в явном виде предъявлена образующая этой группы.

В главе 5 развита теория триградуированной спектральной последовательности Бухштабера Bss для градуированных алгебр Хопфа. Получена формула для дифференциала $d_1 : E_1^{p,q,t} \to E_1^{p-1,q,t}$. Показано, что дифференциалы d_k, $k\geqslant 1$, в Bss задают новую возрастающую исчерпывающую фильтрацию в когомологиях этих алгебр. В работе [66] введено понятие специального матричного произведения Масси. В разделе 5.2 доказано, что элемент фильтрации k, не лежащий в меньшей фильтрации, т. е. элемент, лежащий в образе дифференциала d_k с точностью до элементов меньшей фильтрации, представляется нетривиальным $k+1$-местным специальным матричным произведением Масси.

В главе 6 в разделе 6.1 вычислена фильтрация Бухштабера для действия алгебры $S\otimes\mathbb{Q}$ на кольце $\Omega_U^*\otimes\mathbb{Q}$, где S — алгебра Ландвебера–Новикова и Ω_U^*, согласно теореме Милнора—Новикова, — кольцо полиномов над $\mathbb{Z}$ от образующих, взятых по одной в каждой четной отрицательной размерности. Более точно, в кольце $\Omega_U^*\otimes\mathbb{Q}$ предъявлен набор полиномиальных образующих, такой что относительно введенной фильтрации мономы, попадающие в подпространство элементов фильтрации k, образуют в этом подпространстве базис. Более того, пространство фильтрации k распадается в прямую сумму подпространства фильтрации $k-1$ и подпространства, порож-

денного элементами точной фильтрации k.

В разделе 6.2 для универсальной обертывающей алгебры UL_1 явно описана фильтрация, двойственная фильтрации Бухштабера алгебры $(UL_1)^*$.

В проблеме вычисления когомологий алгебр Стинрода важную роль играет результат Мэя о фильтрации алгебр $\mathcal{A}_p$ степенями идеала аугментации. Его доказательство технически трудное, см. [106]. Из фильтрации Мэя можно получить фильтрацию Бухштабера в двойственных алгебрах Хопфа $(\mathcal{A}_p)_*$. В разделе 6.3 для алгебр Стинрода $\mathcal{A}_p$ дано вычисление фильтрации Бухштабера в двойственных алгебрах Хопфа $(\mathcal{A}_p)_*$, не зависящее от результата Мэя.

В главе 7 полностью вычислены спектральные последовательности Бухштабера для алгебр Хопфа, являющихся универсальными обертывающими алгебр Ли $\mathcal{G}L^3$, $\mathcal{G}L^4$, $\mathcal{GH}^5$ и $\mathcal{GH}^7$. Для неразложимых элементов размерности больше 1 в когомологиях алгебр Ли $\mathcal{G}L^3$, $\mathcal{G}L^4$ представления в виде произведений Масси извлекается, например, из доклада В.М.Бухштабера «Symplectic nilmanifolds and applications» в Осаке, 2011. В разделе 7.3 на основе полного вычисления Bss приведены явные формулы для представления этих произведений Масси в виде дифференциалов Bss. В когомологиях алгебр $\mathcal{GH}^{2n+1}$ разложимы все элементы, кроме элементов размерности 1 и $n+1$. Некоторых из элементов размерности $n+1$ были представлены в виде произведений Масси в работе [183]. В разделе 7.4 приведены представления этих элементов в виде дифференциалов Bss. Вместе с тем, когомологии алгебры $\mathcal{GH}^{2n+1}$ в размерности $n+1$ не исчерпываются этими элементами. В разделе 7.4 для алгебр $\mathcal{GH}^5$ и $\mathcal{GH}^7$ приведены представления всех оставшихся элементов в виде произведений Масси и дифференциалов Bss.

Глава 8 посвящена приложениям метода Bss к алгебрам Стинрода $\mathcal{A}_p$. Полностью вычислена Bss для когомологий подалгебры Хопфа $A(1) \subset \mathcal{A}_2$. В рамках демонстрации методов Bss решена обратная задача: получено новое явное вычисление s-мерных когомологий алгебры $A(1)$ для $s \leqslant 4$. Методами Bss также получены результаты о произведениях Масси и соотношениях в когомологиях алгебр Стинрода $\mathcal{A}_p$, $p \geqslant 2$.

В приложении приведены основные сведения об алгебрах Стинрода, двойственных им алгебрах Хопфа, об их подалгебрах Хопфа, об их когомологиях малой размерности. Там же приведены необходимые сведения о матричных произведениях Масси.

Публикации по теме диссертации

Основные результаты диссертации изложены в 13 статьях [1—13], опубликованных в изданиях, индексируемых в ведущих международных базах научного цитирования.

В работе [2] Ф. Ю. Попеленскому принадлежат теоремы 2.3 и 2.4, следствия 3.2–

3.5 — результаты о экстремальных X и Z-базисах алгебр $\overline{\mathcal{A}}_p$ и о модификациях этих базисов.

В работе [11] Ф. Ю. Попеленскому принадлежат теорема 2 и следствие 3 — результаты о треугольности матрицы перехода от базиса Милнора к C-базису алгебры $\overline{\mathcal{A}}_p$.

В работе [3] Ф. Ю. Попеленскому принадлежит пункт (2) теоремы 2 и целиком теоремы 3, 4, 6 и 9 — результаты о βZ, βX, βC, ZA, XC базисах алгебры $\mathcal{A}_p$.

В работе [6] Ф. Ю. Попеленскому принадлежат теоремы 1, 4, 7, 9 и 11, следствия 1 и 2 — результаты о треугольности матриц перехода между милноровским базисом и любым из базисов: PQ-модифицированный милноровский базис, βX, βC, ZA, XC.

В работе [4] Ф. Ю. Попеленскому принадлежат теоремы 1.2 и 1.3, доказательства из разделов 5, 6, 7 и 8.

В работе [5] Ф. Ю. Попеленскому принадлежат определение 2.1, предложение 2.7, лемма 2.3, теоремы 3.5, 4.1, 5.1, 5.10 и предложение 5.12, а именно: результаты о расширении N-оснащения при приклейке эквивариантной клетки, теоремы о выражении коэффициентов кватернионного уравнения сопряженности в терминах действия элементов базиса Милнора.

В работах [1; 10] основные результаты были получены Ф. Ю. Попеленским. Вклад В. М. Бухштабера состоит в постановке задач, обсуждениях доказательств, подходов к ним и связей с другими проблемами.

Остальные работы написаны Ф. Ю. Попеленским лично. Во всех случаях в основные результаты диссертации включены только результаты Ф. Ю. Попеленского.

Положения, выносимые на защиту

1. Развита теория спектральной последовательности Бухштабера (Bss) для градуированных алгебр Хопфа над кольцами. Показано, что для алгебр Хопфа над полем верны более глубокие результаты. Получено описание дифференциалов Bss в терминах нетривиальных специальных матричных скобок Масси.

2. Вычислена фильтрация Бухштабера и получены приложения для следующих известных алгебр Хопфа: для алгебры Ландвебера—Новикова над рациональными числами, для универсальной обертывающей UL_1 алгебры формальных векторных полей на прямой, обращающихся в 0 вместе с первой производной, для универсальных обертывающих некоторых конечномерных факторов алгебры Ли L_1, а также для алгебр Гейзенберга—Ли. Полностью вычислены Bss для нильпотентных алгебр $\mathcal{GL}^3$, $\mathcal{GL}^4$, $\mathcal{GH}^5$,$\mathcal{GH}^7$.

3. В терминах дифференциалов Bss решена известная задача о механизме возникновения соотношений между произведениями и скобками Масси в когомологи-

ях алгебр Хопфа. Показана эффективность разработанных методов на примере классических результатов Адамса и Новикова в случае групп $\mathrm{Ext}^{s,t}_{\mathcal{A}_2}(\mathbb{Z}/2,\mathbb{Z}/2)$, $s \leqslant 3$. Методами Bss получены эффективное описание фильтрации групп $\mathrm{Ext}^{s,t}_{A(1)}(\mathbb{Z}/2,\mathbb{Z}/2)$ в терминах дифференциалов Bss, явное представление элементов этих групп образами дифференциалов Bss и как следствие — представление элементов специальными скобками Масси.

4. Решена известная задача явного описания так называемых экстремальных базисов алгебр $\mathcal{A}_p$ для $p > 2$: βX, βZ, ZA, XC. Доказано, что βC-мономы образуют базис алгебры $\mathcal{A}_p$. Для $\mathbb{C}$-мотивной алгебры Стинрода $\bmod 2$ построены экстремальные базисы Z, X; построены аналоги базисов Вуда, семейство P^t_s-базисов и семейство базисов, составленных из итерированных коммутаторов.

   Решена известная задача описания пар базисов алгебры $\mathcal{A}_p$ для $p > 2$, для которых матрицы перехода треугольны; установлена треугольность матриц перехода для следующих пар базисов: (B_{Mil}, βX), (B_{Mil}, βC), (B_{Mil}, PQ), (B_{Mil}, XC), (B_{Mil}, βP^s_t). Для аддитивных базисов $\mathbb{C}$-мотивной алгебры $\mathcal{A}^m_2$ доказана треугольность матриц перехода для пар (базис Милнора, X-базис), (базис Милнора, любой P^s_t-базис).

5. В качестве приложения построенной теории базисов в алгебрах $\mathcal{A}_p$ для $p > 2$: (1) Получен ответ по гипотезе Тоды о точности известной короткой последовательности $\mathcal{A}_p$-модулей. А именно, получена явная формула для так называемой критической градуировки, такой что до этой градуировки точность имеет место, а в критической — нарушается; более того, вычислен фактор ядра по образу в среднем члене в критической градуировке. (2) Построено новое семейство мультипликативных образующих кольца $H^*(K(\mathbb{Z}/p,n);\mathbb{Z}/p)$. (3) Показано, что аннигиляторный идеал действия $\mathcal{A}_p$ на когомологиях пространства Эйленберга–Маклейна $K(\mathbb{Z}/p,2)$ тривиален.

6. Развита теория пространств с кватернионным сопряжением, т. е. пространств, на которых действуют две коммутирующие независимые инволюции, кольца когомологий пространства неподвижных точек и исходного пространства связаны алгебраическим изоморфизмом, изменяющим градуировки в 4 раза, причем в эквивариантых когомологиях соответствующие друг другу элементы при таком изоморфизме связаны уравнением специального вида. Показано, что категория таких пространств достаточно велика, в частности, замкнута относительно операции приклейки эквивариантных клеток. Введено понятие уравнения Q-сопряжения и вычислены его коэффициенты в терминах действия алгебры Стинрода $\mathcal{A}_2$.

7. В рамках известной проблемы о структуре канонического представления алгеб-

ры $\mathcal{A}_p$ в когомологиях произведений линзовых пространств получены результаты, часть из которых является общей для всех простых p, а другая — верна только для $p > 2$. Для двойственного действия $\mathcal{A}_p$ на алгебре, построенной по гомологиям групп $\mathbb{Z}/p \times \mathbb{Z}/p \times \ldots \times \mathbb{Z}/p$, показано, что для каждого $k \geqslant 1$ подалгебра, состоящая из элементов, аннулируемых подалгеброй $P(k) \subset \mathcal{A}_p$, является свободной. Вычислены размерности градуировочных компонент подалгебры элементов, аннулируемых подалгеброй $P(1)$.

Глава 1

Алгебра Стинрода $\mathcal{A}_2$: классический и $\mathbb{C}$-мотивный случаи

1.1 Аддитивные базисы в классической алгебре Стинрода $\mathcal{A}_2$

В этом разделе мы приведем результаты Ч. Т. К. Уолла, Д. Арнона, К. Монкса, Дж. Палмьери, Дж. Жанга и Р. Вуда о мономиальных базисах алгебры Стинрода $\mathcal{A}_2$ и результаты К. Монкса о треугольных заменах в $\mathcal{A}_2$, см. [26; 113; 128; 170; 174].

Определение 1.1. На множестве конечных последовательностей положительных целых чисел зададим левый лексикографический порядок и будем писать, что для $I = (i_m, i_{m-1}, \dots, i_0)$ и $J = (j_n, j_{n-1}, \dots, j_0)$ выполнено $I <_L J$, если выполнено одно из следующих условий:

(1) I пустая последовательность,

(2) I и J непусты, причем $i_m < j_n$,

(3) I, J непусты, $i_m = j_n$ и $(i_{m-1}, \dots, i_0) <_L (j_{n-1}, \dots, j_0)$.

Аналогичным образом определяется правый лексикографический порядок $<_R$ с выравниванием по правому краю.

Если $I <_L J$, то будем считать, что $Sq^I <_L Sq^J$. Наконец, для двух линейных комбинаций $A = \sum A_i$ и $B = \sum B_j$, где все A_i и B_j — мономы, будем писать $A <_L B$, если для всех i, j выполнено $A_i <_L B_j$. Аналогичные определения дадим и для правого лексикографического порядка.

Важно отметить, что этот частичный порядок определен для формальных линейных комбинаций мономов и, вообще говоря, не определен на элементах алгебры $\mathcal{A}_2$.

Легко проверить, что допустимые мономы — это в точности такие мономы, которые не могут быть записаны в виде суммы (линейной комбинации с ненулевыми коэффициентами) строго больших мономов. Моном, который не является допустимым,

однократным применением соотношений Адема приводится к линейной комбинации мономов, строго больших мономов.

Определение 1.2. Положим $Z^n_k = Sq^{2^k} \cdots Sq^{2^n}$ для $n \geqslant k \geqslant 0$. Опеределим Z-моном как произведение вида

$$Z^I = Z^{n_1}_{k_1} \cdots Z^{n_r}_{k_r} \tag{1.1}$$

где I — последовательность пар индексов $((n_1, k_1), \ldots, (n_r, k_r))$, где $n_j \geqslant k_j$ для всех $j = 1, \ldots, r$, удовлетворяющая условию

$$(n_r, k_r) <_L \ldots <_L (n_2, k_2) <_L (n_1, k_1).$$

Определение 1.3. Положим $X^n_k = P^{p^n} \cdots P^{p^k}$ для $n \geqslant k \geqslant 0$. Определим X-моном как произведение вида

$$X^I = X^{n_r}_{k_r} \cdots X^{n_1}_{k_1} \tag{1.2}$$

где I — последовательность пар индексов $((n_1, k_1), \ldots, (n_r, k_r))$, где $n_j \geqslant k_j$ для всех j, удовлетворяющая условию

$$(n_r, k_r) <_L \ldots <_L (n_2, k_2) <_L (n_1, k_1).$$

Теорема 1.1 (см. [26; 170])**.** *(a) Z-мономы образуют аддитивный базис алгебры $\mathcal{A}_2$. Ни один из Z-мономов не может быть записан в виде линейной комбинации мономов, меньших относительно порядка $<_R$.*

(b) X-мономы образуют аддитивный базис алгебры $\mathcal{A}_2$. Ни один из X-мономов не может быть записан в виде линейной комбинации мономов, меньших относительно порядка $<_L$.

Неформально следует понимать, что Z-мономы образуют базис из мономов, минимальных относительно $<_R$, а X-мономы — базис из мономов, минимальных относительно $<_L$.

Теорему 1.1(b) доказал Уолл в [170], исходя из соображений, не связанных с упорядочением мономов от символов Sq^i. А именно, он искал базис, приспособленный для доказательства одной из гипотез Тоды, см. [161]. Подробности см. в разделе 4.3.

Базис, максимальный относительно порядка $<_R$, оказался весьма любопытным.

Определение 1.4. Моном $Sq^{j_r} Sq^{j_{r-1}} \ldots Sq^{j_0}$ назовем *C-мономом*, если выполнены условия:

(i) $j_{k+1} \leqslant 2j_k$ для всех $k = 0, \ldots, r-1$,

(ii) j_k делится на 2^k для всех $k = 0, \ldots, r$.

Теорема 1.2 (см. [26])**.** *C-мономы образуют аддитивный базис алгебры $\mathcal{A}_2$. Ни один из C-мономов не может быть записан в виде линейной комбинации мономов, больших относительно порядка $<_R$.*

Семейство P_t^s-базисов. Напомним, что в алгебре $\mathcal{A}_2$ имеются элементы $P_t^s = Sq(0,\dots,0,2^s,0,\dots)$, где 2^s стоит на месте с номером t, $\deg P_t^s = 2^s(2^t-1)$.

Назовём P_t^s-*мономом* произведение вида $P_{t_1}^{s_1}\dots P_{t_k}^{s_k}$, где все $P_{t_j}^{s_j}$ попарно различны. В каждом конечном наборе пар целых чисел $\{(s_j,t_j) : j=1,\dots,k, s_j \geqslant 0, t_j > 0\}$ зафиксируем линейный порядок и именно в этом порядке будем перемножать $P_{t_j}^{s_j}$. Получим множество B_P элементов алгебры $\mathcal{A}_2$. Таких множеств бесконечно много, поскольку в каждом P_t^s-мономе порядок атомарных сомножителей $P_{t_j}^{s_j}$, хоть и фиксирован, однако может быть выбран независимо от других P_t^s-мономов.

Теорема 1.3 ([113]). *Любое множество $B_P \subset \mathcal{A}_2$ образует базис $\mathcal{A}_2$. Любой такой базис является треугольным по отношению базису Милнора B_{Mil}.*

Оригинальное доказательство Монкса было основано на следующей идее: при правильном выборе упорядочения элементов множества B_P матрица коэффициентов разложений элементов B_P по базису элементов Милнора оказывается верхнетреугольной с ненулевыми элементами на диагонали. Мотивное обобщение этого утверждения будет рассмотрено ниже в разделе 1.3.

Семейство коммутаторных базисов. Палмьери и Жанг в работе [128] построили семейства базисов в алгебрах $\mathcal{A}_p$, $p \geqslant 2$, состоящих из итерированных коммутаторов.

Для $p=2$ определим элементы $c_{s,t}$ алгебры $\mathcal{A}_2$ по индукции:

(i) для каждого целого $s \geqslant 0$, положим $c_{s,1} = Sq^{2^s}$;

(ii) для каждого целого $t \geqslant 2$ положим $c_{s,t} = [Sq^{2^{s+t-1}}, c_{s,t-1}]$.

Степень элемента равна $|c_{s,t}| = 2^s(2^t-1)$. Случай $p > 2$ будет рассмотрен ниже в разделе 2.1.4.

Теорема 1.4 (см. [128]). *Выберем произвольный линейный порядок $\prec$ на множестве $\{c_{s,t} \in \mathcal{A}_2 \ : \ s \geqslant 0, t \geqslant 1\}$ итерированных коммутаторов. Тогда произведения вида*

$$c_{s_1,t_1}c_{s_2,t_2}\dots c_{s_n,t_n},$$

где $c_{s_1,t_1} \prec c_{s_2,t_2} \prec \dots \prec c_{s_n,t_n}$, образуют аддитивный базис алгебры $\mathcal{A}_2$.

Базисы Вуда. Из формулы (1.14), см. ниже, следует, что мономы, составленные из $\overline{Z}_k^n = Sq^{2^{n+1}-2^k}$ по тем же правилам, по которым из элементов Z_k^n составлены Z-мономы (см. определение 1.2), образуют базис $\mathcal{A}_2$. При этом $\overline{Z}$-базис треуголен по отношению к Z-базису. Отсюда возникает интерес к произведениям элементов вида $Sq^{2^{n+1}-2^k}$.

В работе [174] Вуд предложил два базиса WZ и WY, обладающие следующими свойствами:

(1) элементы обоих базисов — мономы, составленные из элементов вида $Sq^{2^k(2^m-1)}$ взятых в определенном порядке, см. ниже;

(2) оба базиса ограничиваются до базисов подалгебр Хопфа $A(n) \subset \mathcal{A}_2$, где $A(n)$ порождена элементами $1, Sq^1, \ldots, Sq^{2^n}$.

Оба базиса не являются треугольными по отношению к базису Милнора, см. [113].

Элементы вида $Sq^{2^k(2^m-1)}$ назовем атомарными. Зададим на них два линейных порядка.

В порядке WY атомарные элементы $Sq^{2^k(2^m-1)}$ расположены по возрастанию следующим образом:

$$1, 3, 7, 15, \ldots, 2, 6, 14, 30, \ldots, 4, 12, 28, 60, \ldots$$

Более точно, $Sq^{2^k(2^m-1)}$ предшествует $Sq^{2^{k'}(2^{m'}-1)}$, если либо $k < k'$, либо если $k = k'$ и $m < m'$.

Порядок WZ получается из естественного упорядочения множества натуральных чисел по возрастанию обращением порядка внутри каждого отрезка от 2^m до $2^{m+1} - 1$:

$$1, 3, 2, 7, 6, 5, 4, 15, 14, 13, 12, 11, 10, 9, 8, \ldots$$

Пусть

$$W_n^k = Sq^{2^k(2^{n+1}-1)} Sq^{2^k(2^n-1)} \ldots Sq^{2^k}$$

и

$$WY_n = W_0^n W_1^{n-1} \ldots W_n^0. \tag{1.3}$$

Иными словами, WY_n — это произведение атомарных элементов с показателями, не превышающими $2^{n+1} - 1$ взятых в порядке, обратном к WY.

Теорема 1.5 ([174]). *Для каждого фиксированного натурального n элемент $WY_n \in A(n)$ является элементом максимальной градуировки. Произведения, полученные из* (1.3) *вычеркиванием произвольных атомарных сомножителей, образуют базис $A(n)$. Построенный таким образом базис подалгебры $A(n)$ является частью аналогичного базиса для $A(n+1)$. Объединение по включению этих базисов (по всем n) образует базис алгебры $\mathcal{A}_2$.*

Пусть $\tilde{W}_n = Sq^{1 \cdot 2^n} Sq^{3 \cdot 2^{n-1}} Sq^{7 \cdot 2^{n-2}} \ldots Sq^{2^{n+1}-1}$ и

$$WZ_n = \widetilde{W}_n \widetilde{W}_{n-1} \ldots \widetilde{W}_0. \tag{1.4}$$

Иными словами, WZ_n — это произведение атомарных элементов с показателями, не превышающими $2^{n+1} - 1$, взятых в порядке, обратном к WZ.

Теорема 1.6 ([174]). *Для каждого фиксированного натурального n элемент $WZ_n \in A(n)$ является элементом максимальной градуировки. Произведения, полученные из*

(1.4) *вычеркиванием произвольных атомарных сомножителей, образуют базис* $A(n)$. *Построенный таким образом базис подалгебры* $A(n)$ *является частью аналогичного базиса для* $A(n+1)$. *Объединение по включению этих базисов (по всем* n*) образует базис алгебры* $\mathcal{A}_2$.

Треугольные замены в классической алгебре Стинрода $\mathcal{A}_2$. Типично, что произведение двух элементов некоторого базиса B алгебры $\mathcal{A}_p$ не является элементом этого базиса, а разлагается в нетривиальную линейную комбинацию элементов из B. Единственный базис алгебры $\mathcal{A}_p$, $p \geqslant 2$, для которого имеется явное описание такой линейной комбинации — это базис Милнора, соответствующие формулы приведены в разделе А.1.5.

Для перемножения элементов других базисов возможны две процедуры (каждая требует выполнения определенных условий).

Во-первых, если имеется процедура редукции произвольного элемента алгебры $\mathcal{A}_p$ к линейной комбинации элементов базиса B, то очевидный вариант — следующий: для $a, b \in B$ рассмотрим произведение $a \cdot b$ и редуцируем его к линейной комбинации элементов базиса B. Такой вариант возможен для базиса допустимых мономов (редукция осуществляется с помощью применения соотношений Адема), а также для X- и Z-базисов (для $p = 2$ редукция описана в работе Арнона [26], а для $p > 2$ — далее в главе 2).

Во-вторых, предположим, что для подходящих упорядочений элементов базиса B и элементов базиса Милнора матрица перехода между этими базисами оказывается треугольной. Тогда для $a, b \in B$ можно найти a', b' — разложения соответственно a и b по базису Милнора. Затем нужно перемножить a' и b' с помощью формул (А.9) и (А.14) и, наконец, вернуться к разложению по базису B.

В общем случае при доказательстве треугольности некоторого базиса M по отношению к базису Милнора используется следующее рассуждение. Множество элементов базиса M будем обозначать B_M, аналогично, B_{Mil} — множество элементов базиса Минора. Предположим, что нам удалось найти:

(i) линейный порядок $\prec_{Mil}$ на множестве B_{Mil},

(ii) биекцию $\gamma : B_{Mil} \to B_M$ сохраняющую биградуировку, с помощью которой индуцируется порядок $\prec_M$ на B_M,

такие, что для любого $\theta \in B_M$ выполняются соотношения

$$(\theta)_{Mil} = \gamma^{-1}(\theta) + \sum_i \mu_i, \tag{1.5}$$

где $(\theta)_{Mil}$ — разложение θ по базису Милнора, $\mu_i \in B_{Mil}$ и $\mu_i \prec_{Mil} \gamma^{-1}(\theta)$ для всех i. Обратим внимание, что θ и $(\theta)_{Mil}$ — один и тот же элемент алгебры Стинрода.

Тогда матрица перехода от базиса Милнора к базису M имеет треугольный вид

по отношению к порядкам $\prec_M$ и $\prec_{Mil}$. Более того, формулу (1.5) и обратную к ней можно рассматривать как рекуррентные соотношения, с помощью которых элементы B_{Mil} можно раскладывать по базису B_M.

Описанная идея была использована в работе Монкса [113], в которой для алгебры $\mathcal{A}_2$ была доказана треугольность по отношению к базису Милнора для X- и C-базисов, для базиса допустимых мономов, а также для любого P_t^s-базиса; при этом во всех этих случаях показана, по крайней мере потенциально, возможность индуктивного вычисления строк (столбцов) матрицы перехода; кроме того, было получено новое доказательство теоремы Милнора, см. [109], о треугольности матрицы перехода между базисом допустимых мономов и базисом Милнора. Z-базис, а также WX- и WY-базисы Вуда не являются треугольными по отношению к базису Милнора.

Точные формулировки соответствующих результатов мы опустим, поскольку не будем ими пользоваться. В главе 3 исследована треугольность матриц перехода между различными базисами алгебр $\mathcal{A}_p$ и $\overline{\mathcal{A}}_p$, $p > 2$.

1.2 $\mathbb{C}$-мотивная алгебра Стинрода $\mathcal{A}_2^m$

До конца этой главе мы рассматриваем $\mathbb{Z}/2$-когомологии. В классическом случае кольцо коэффициентов имеет вид $H^*(pt; \mathbb{Z}/2) = \mathbb{Z}/2$, где образующая имеет градуировку 0. В мотивном контексте для простоты мы фиксируем $\mathbb{C}$ в качестве основного поля. Многие результаты остаются верными над полем характеристики 0, содержащем квадратный корень из -1, но для вещественного случая появятся определенные усложнения, которые заслуживают отдельного обсуждения.

В рассматриваемом случае кольцо коэффициентов биградуировано и имеет вид $\mathbb{M}_2 = \mathbb{F}_2[\tau]$, где $\deg \tau = (0, 1)$. Вообще говоря, все рассматриваемые объекты биградуированы и если некоторый элемент имеет биградуировку (n, w), то принято называть n топологической градуировкой, а w — мотивным весом.

Мотивная алгебра Стинрода $\mathcal{A}_2^m$ порождена над $\mathbb{M}_2$ элементами Sq^n, $n \geqslant 0$, $Sq^0 = 1$ и соотношениями Адема

$$Sq^a Sq^b = \sum_{i=0}^{[a/2]} \binom{b-1-i}{a-2i} \tau^{\varepsilon(a,b,i)} Sq^{a+b-i} Sq^i \quad \text{для} \quad a < 2b, \tag{1.6}$$

где

$$\deg Sq^{2k} = (2k, k), \quad \deg Sq^{2k+1} = (2k+1, k). \tag{1.7}$$

Показатель $\varepsilon(a, b, i)$ в формуле (1.6) равен 0 или 1 так, чтобы в ее левой и правых частях мотивный вес у всех слагаемых был один и тот же. Из этого соображения легко видеть, что $\varepsilon(a, b, i) = 1$ в единственном случае, когда a, b — четные, а i —

нечетное. Например,

$$Sq^2Sq^2 = \tau Sq^3Sq^1,$$
$$Sq^2Sq^4 = Sq^6 + \tau Sq^5Sq^1.$$

Мономы вида $Sq^{i_m}\dots Sq^{i_1}$, где $i_k \geqslant 2i_{k-1}$ для всех $1 < k \leqslant m$, называются *допустимыми*.

Теорема 1.7 ([166]). *Допустимые мономы образуют (свободный) базис алгебры $\mathcal{A}_2^m$, рассматриваемой как левый модуль над $\mathbb{M}_2$.*

Для $\mathcal{A}_2^m$ определено коумножение $\Delta : \mathcal{A}_2^m \to \mathcal{A}_2^m \otimes_{\mathbb{M}_2} \mathcal{A}_2^m$ по формулам

$$\Delta(Sq^{2k+1}) = \sum_{i=0}^{2k+1} Sq^{2k+1-i} \otimes Sq^i,$$
$$\Delta(Sq^{2k}) = \sum_{i=0}^{k} Sq^{2k-2i} \otimes Sq^{2i} + \sum_{i=0}^{k-1} \tau Sq^{2k-2i-1} \otimes Sq^{2i+1}.$$

В [166] показано, что коумножение Δ ассоциативно и кокоммутативно, а также, что оно перестановочно с умножением.

Двойственная алгебра $(\mathcal{A}_2^m)_*$ была описана в [166], ее строение несколько более сложное, чем для $\mathcal{A}_2$, полученное в [109]. А именно, алгебра $(\mathcal{A}_2^m)_*$ изоморфна фактору кольца многочленов $\mathbb{M}_2[\xi_i]$ от образующих $\xi_i \in (\mathcal{A}_2^m)_*$, $\deg \xi_i = (2^{i+1}-2, 2^i-1)$, и $\tau_i \in (\mathcal{A}_2^m)_*$, $\deg \tau_i = (2^{i+1}-1, 2^i-1)$, по идеалу соотношений $\xi_0 = 1, \tau_i^2 = \tau\xi_{i+1}$. В $(\mathcal{A}_2^m)_*$ традиционно рассматривается биградуировка в гомологическом смысле, поэтому нужно считать, что (гомологическая) биградуировка $\tau \in \mathbb{M}_2$ равна $(0,-1)$. В работе [56] было предложено рассматривать $(\mathcal{A}_2^m)_*$ как подалгебру

$$\mathbb{M}_2[\zeta_i, \tau^{-1}\zeta_i^2 \,:\, i \geqslant 1] \subset \mathbb{M}_2[\tau^{-1}, \zeta_1, \zeta_2, \dots],$$

где $\deg \zeta_i = (2^i-1, 2^{i-1}-1)$. Изоморфизм устанавливается соответствием $\zeta_i \mapsto \tau_{i-1}$, $\tau^{-1}\zeta_i^2 \mapsto \xi_i$.

Базис $(\mathcal{A}_2^m)_*$ над $\mathbb{M}_2$ образуют мономы вида $\tau^{\delta(R)}\zeta^R = \tau^{\delta(R)}\zeta_1^{r_1}\zeta_2^{r_2}\dots$, где $R = (r_1, r_2, \dots)$ — произвольная последовательность неотрицательных целых чисел, в которой имеется лишь конечное число членов, отличных от 0, а $\delta(R) = -\sum\limits_i [r_i/2]$. Двойственный базис $\mathcal{A}_2^m$ называется базисом Милнора; элемент, двойственный $\tau^{\delta(R)}\zeta^R$, будем обозначать $Sq(R)$. Биградуировка элемента $Sq(R)$ имеет вид

$$\Big(\sum_i r_i(2^i-1), \sum_i [r_i(2^i-1)/2]\Big).$$

Как и для алгебры $\mathcal{A}_2$, для мотивной алгебры Стинрода $\mathcal{A}_2^m$ имеется явная фор-

мула для произведения двух элементов базиса Милнора — она выражает произведение двух милноровских элементов

$$Sq(r_1, r_2, \ldots), Sq(s_1, s_2, \ldots) \in \mathcal{A}_2^m$$

в виде линейной комбинации других милноровских элементов. А именно,

$$Sq(r_1, r_2, \ldots)Sq(s_1, s_2, \ldots) = \sum_X \tau^{u(X)} c(X) Sq(t_1, t_2, \ldots), \tag{1.8}$$

где суммирование ведётся по всем матрицам $X = (x_{ij})$, $i, j \geqslant 0$, удовлетворяющим условиям:

$$\sum_i x_{ij} = s_j, j \neq 0, \tag{1.9}$$

$$\sum_j 2^j x_{ij} = r_i, i \neq 0, \tag{1.10}$$

$$t_h = \sum_{i+j=h} x_{ij}, \tag{1.11}$$

коэффициент $c(X) \in \mathbb{Z}/2$ является произведением мультиномиальных коэффициентов

$$c(X) = \prod_h (x_{h0}, x_{h-1,1}, \ldots, x_{0h}), \tag{1.12}$$

а показатель $u(X)$ находится из соотношения

$$\sum [t_h(2^h - 1)/2] + u(X) = \sum [r_i(2^i - 1)/2] + \sum [s_i(2^i - 1)/2].$$

1.3 Аддитивные базисы в $\mathbb{C}$-мотивной алгебре Стинрода $\mathcal{A}_2^m$ и треугольные замены

1.3.1 Базис допустимых мономов

В алгебре $\mathcal{A}_2^m$ матрица перехода между базисом допустимых мономов B_{adm} и базисом Милнора B_{Mil} треугольна. Для мотивной алгебры $\mathcal{A}_2^m$ сформулируем теорему 12.4 из работы В. А. Воеводского [166], используя образующие ζ_i. Для элемента $Sq(r_1, r_2, \ldots) \in B_{Mil} \subset \mathcal{A}_2^m$ рассмотрим последовательность $(t_1, t_2, \ldots)$, заданную соотношениями

$$t_i = \sum_{k \geqslant i} 2^{k-i} r_k, \quad i \geqslant 1.$$

Легко проверить, что последовательность $(t_1, t_2, \ldots)$ содержит конечное число ненулевых элементов и что соответствие

$$\gamma : Sq(r_1, r_2, \ldots) \mapsto Sq^{t_1} Sq^{t_2} \ldots \in \mathcal{A}_2^m$$

задает биективное отображение $\gamma : B_{Mil} \to B_{adm}$, причем γ сохраняет топологическую степень. Заметим, что для каждого i четность t_i совпадает с четностью r_i; отсюда следует, что γ сохраняет мотивный вес.

Введем на B_{Mil} (и на соответствующих последовательностях $(r_1, r_2, \ldots)$) линейный порядок следующим образом.

Определение 1.5. Для двух (бесконечных) последовательностей неотрицательных целых чисел $R = (r_1, r_2, \ldots)$ и $S = (s_1, s_2, \ldots)$, в которых лишь конечное число членов отличны от нуля, будем писать $R <_{Mil} S$, если существует такое i, что

(1) $r_j = s_j$ для всех $j > i$,

(2) $r_i < s_i$.

В этом случае также будем считать, что $Sq(R) <_{Mil} Sq(S)$.

Обратим внимание, что данный порядок отличается от правого лексикографического порядка из определения 1.1. Отличие состоит в том, что в определении 1.1 конечные последовательности из положительных целых чисел выравниваются справа, а в определении 1.5 сравниваются бесконечные последовательности, выравненные по левому краю.

С помощью биекции γ перенесем порядок $<_{Mil}$ на B_{adm} и множество соответствующих последовательностей

$$\{(t_1, t_2, \ldots) \,:\, t_i \geqslant 2t_{i+1} \text{ для всех } \; i\},$$

будем обозначать его $<_{adm}$.

Теорема 1.8 ([166, Теорема 12.4])**.** *Для спаривания алгебры $\mathcal{A}_2^m$ и двойственной к ней $(\mathcal{A}_2^m)_*$ выполнены соотношения*

$$\langle \tau^{\delta(R)} \zeta^R, Sq^{t_1} Sq^{t_2} \ldots \rangle = \begin{cases} 0, & \text{если } \; \gamma^{-1}(t_1, t_2, \ldots) <_{Mil} R \\ 1, & \text{если } \; \gamma^{-1}(t_1, t_2, \ldots) = R \end{cases}$$

Это в точности означает, что матрица перехода между базисами B_{Mil} и B_{adm} является треугольной относительно порядков $<_{Mil}$ и $<_{adm}$, причем ее диагональные элементы равны 1.

Доказательство треугольности из работы [113] (теорема 4.1 и следствие 4.2) применимо и для алгебры $\mathcal{A}_2^m$. При этом нужно использовать явную формулу (A.14)

умножения элементов Милнора и следить за степенью элемента τ при максимальных слагаемых в возникающих формулах.

1.3.2 Z и X базисы

В этом подразделе мы опишем два базиса в $\mathcal{A}_2^m$, аналогичные базисам, построенным Ч. Т. К. Уоллом и Д. Арноном в классической алгебре Стинрода $\mathcal{A}_2$, см. [26; 170]. В конце раздела мы обсудим вопрос треугольности матриц перехода от этих базисов к базису Милнора. На мономах, составленных из элементов $Sq^i \in \mathcal{A}_2^m$, определены порядки из определения 1.1.

Следующее утверждение обобщает результаты из [26; 170].

Теорема 1.9.

(*a*) *Z-мономы образуют аддитивный базис алгебры $\mathcal{A}_2^m$ как модуля над $\mathbb{M}_2$. Ни один из Z-мономов не может быть записан в виде линейной комбинации мономов, меньших относительно порядка $<_R$.*

(*b*) *X-мономы образуют аддитивный базис алгебры $\mathcal{A}_2^m$ как модуля над $\mathbb{M}_2$. Ни один из X-мономов не может быть записан в виде линейной комбинации мономов, меньших относительно порядка $<_L$.*

Доказательство. Мы начнем с доказательства пункта (*a*). Прежде всего отметим, что в каждой топологической градуировке $\mathcal{A}_2^m$ количество Z-мономов конечно и совпадает с размерностью соответствующего однородного $\mathbb{M}_2$-подмодуля $\mathcal{A}_2^m$, а именно, для любого фиксированного p выполнено равенство

$$\#\{x \text{ — } Z\text{-моном } : \deg x = (p,q), q \geqslant 0\} = \dim_{\mathbb{M}_2} \bigoplus_q (\mathcal{A}_2^m)^{p,q}.$$

Доказательство этого утверждения легко следует из аналогичного утверждения для алгебры $\mathcal{A}_2$, см. [26]. Таким образом, остается доказать представимость любого элемента алгебры $\mathcal{A}_2^m$ в виде линейной комбинации Z-мономов с коэффициентами из $\mathbb{M}_2$.

Прежде всего отметим, что в $\mathcal{A}_2^m$ любой элемент вида Sq^{2^n+a}, где $0 < a < 2^n$, разложим — проходит стандартное доказательство для $\mathcal{A}_2$, см. [109; 225]. Напомним его, потому что на этом примере мы увидим потенциальную трудность переноса классических результатов на случай алгебры $\mathcal{A}_2^m$.

Пусть $0 < a < 2^n$, тогда к произведению $Sq^a Sq^{2^n}$ можно применить соотношение Адема (1.6):

$$Sq^a Sq^{2^n} = \sum_{i \geqslant 1}^{[a/2]} \binom{2^n - 1 - i}{a - 2i} \tau^{\varepsilon(a,b,i)} Sq^{2^n+a-i} Sq^i + \binom{2^n - 1}{a} \tau^{\varepsilon(2^n,a,0)} Sq^{2^n+a}. \qquad (1.13)$$

Легко видеть, что в последнем слагаемом биномиальный коэффициент равен 1, а показатель $\varepsilon(2^n, a, 0)$ — нулевой, поэтому последнее слагаемое в точности равно Sq^{2^n+a},

откуда следует, что этот элемент разложим. Но если бы оказалось, что показатель $\varepsilon(2^n, a, 0)$ в последнем слагаемом равен 1, то была бы доказана разложимость другого элемента, а именно, τSq^{2^n+a}. Фактически при выборе процедур редукции нужно следить за тем, чтобы коэффициенты при нужных мономах не содержали τ. Вместе с тем, в подразделе 1.3.5 мы приведем пример утверждения, которое имеет место для классической алгебры $\mathcal{A}_2$, но не переносится на случай алгебры $\mathcal{A}_2^m$ простым добавлением в каждое слагаемое подходящей степени τ.

Далее, в алгебре $\mathcal{A}_2^m$ любой элемент вида Sq^{2^n} неразложим. В самом деле, если бы это было не так, то положив в соответствующем равенстве $\tau = 1$, мы бы получили доказательство разложимости элемента Sq^{2^n} в $\mathcal{A}_2$.

Отметим, что при преобразовании любого монома, содержащего элемент Sq^{2^n+a}, с помощью соотношения (1.13) в получающейся линейной комбинации все мономы будет $<_R$-меньше исходного. Следовательно, любой моном может быть представлен в виде линейной комбинации мономов, составленных из произведений элементов вида Sq^{2^m}, причем все эти произведения строго $<_R$-меньше исходного монома.

Теперь опишем процедуры редукции, которые уменьшают в $<_R$-порядке любой моном, составленный из элементов вида Sq^{2^j}, не являющийся Z-мономом. Достаточно предъявить такие процедуры для подмономов вида:

(a) $Sq^{2^j}Sq^{2^k}$ для $k > j+1$;

(b) $Sq^{2^n}Z_k^{n+1}$ для $k \leqslant n$;

(c) $Z_k^n Z_k^n$.

После применения этих редукций появятся мономы, содержащие Sq^m для $m \neq 2^n$. Не оговаривая это каждый раз явно, мы будем применять к ним соотношение (1.13) до тех пор, пока не останутся мономы, составленные только из элементов вида Sq^{2^j} — все они, как уже было сказано выше, будут $<_R$-меньше исходного.

Редукция для (a). Рассмотрим два соотношения Адема, см. (1.6),

$$Sq^{2^j}Sq^{2^k} = Sq^{2^j+2^k} + \sum_{i=1}^{[2^{j-1}]} \binom{2^k-1-i}{2^j-2i} \tau^{\varepsilon(2^j,2^k,i)} Sq^{2^j+2^k-i}Sq^i,$$

$$Sq^{2^{j+1}}Sq^{2^k-2^j} = Sq^{2^j+2^k} + Sq^{2^k}Sq^{2^j} + \sum_{1\leqslant i<2^j} \binom{2^k-2^j-1-i}{2^{j+1}-2i} \tau^{\varepsilon(2^{j+1},2^k-2^j,i)} Sq^{2^j+2^k-i}Sq^i.$$

Отметим, что коэффициенты при выписанных отдельно мономах не содержат τ и равны 1. Складывая эти два равенства, получаем, что произведение $Sq^{2^j}Sq^{2^k}$ для $k > j+1$ может быть записано в $\mathcal{A}_2^m$ как линейная комбинация произведений двух квадратов Стинрода, каждое из которых $<_R$-меньше, чем $Sq^{2^j}Sq^{2^k}$.

Редукция для (b). Нам понадобится вспомогательное утверждение: для $k < n$ имеет место равенство

$$Z_k^n = Sq^{2^{n+1}-2^k} + L_R(Sq^{2^k}). \tag{1.14}$$

Оно несложно доказывается нисходящей индукцией по k и применением на каждом шаге соотношения (1.6). Тогда

$$Sq^{2^n} Z_k^n Sq^{2^{n+1}} = Sq^{2^n} Sq^{2^{n+1}-2^k} Sq^{2^{n+1}} + L_R(Sq^{2^n} Z_k^{n+1}).$$

Теперь рассмотрим два соотношения Адема, см. (1.6), в которых мы в явном виде выпишем только те слагаемые, которые требуют отдельного внимания — остальные $<_R$-меньше редуцируемого монома:

$$Sq^{2^n} Sq^{2^{n+1}-2^k} = \binom{2^{n+1}-2^k-1}{2^n} Sq^{2^{n+1}+2^n-2^k} + L_R(Sq^{2^n} Z_k^n),$$
$$Sq^{2^{n+1}+2^n-2^k} Sq^{2^{n+1}} = \binom{2^{n+1}-1}{2^{n+1}+2^n-2^k} Sq^{2^{n+2}+2^n-2^k} + \overline{L}_R(Sq^{M_1} Sq^{[(2^{n+1}+2^n-2^k)/2]}),$$

где $M_1 = 2^{n+2} + 2^n - 2^k - [(2^{n+1} + 2^n - 2^k)/2]$. Теперь отметим, что биномиальный коэффициент $\binom{2^{n+1}-2^k-1}{2^n}$ равен 1 (mod 2), а биномиальный коэффициент $\binom{2^{n+1}-1}{2^{n+1}+2^n-2^k}$ нулевой. Отсюда следует, что

$$Sq^{2^n} Z_k^{n+1} = L_R(Sq^{2^n} Z_k^n) Sq^{2^{n+1}} + \overline{L}_R(Sq^{M_1} Sq^{[(2^{n+1}+2^n-2^k)/2]}) = L_R(Sq^{2^n} Z_k^{n+1}).$$

Редукция для (c). По формуле (1.14) имеет место равенство $Z_k^n = Sq^{2^{n+1}-2^k} + A$, где $A <_R Sq^{2^k}$. Тогда

$$Z_k^n Z_k^n = (Sq^{2^{n+1}-2^k} + A) Z_k^n = \\ = Sq^{2^{n+1}-2^k} (Sq^{2^{n+1}-2^k} + A) + A Z_k^n = Sq^{2^{n+1}-2^k} Sq^{2^{n+1}-2^k} + L_R(Z_k^n Z_k^n). \quad (1.15)$$

Чтобы редуцировать произведение $Sq^{2^{n+1}-2^k} Sq^{2^{n+1}-2^k}$ применим к нему соотношение Адема (1.6):

$$Sq^{2^{n+1}-2^k} Sq^{2^{n+1}-2^k} = \binom{2^{n+1}-2^k-1}{2^{n+1}-2^k} Sq^{2^{n+2}-2^{k+1}} + \\ + \sum_{i=1}^{[2^n-2^{k-1}]} \binom{2^{n+1}-2^k-1-i}{2^{n+1}-2^k-2i} \tau^\varepsilon Sq^{2^{n+2}-2^{k+1}-i} Sq^i = \overline{L}_R(Sq^{M_2} Sq^{[2^n-2^{k-1}]}), \quad (1.16)$$

поскольку биномиальный коэффициент $\binom{2^{n+1}-2^k-1}{2^{n+1}-2^k}$ равен 0; здесь $M_2 = 2^{n+2} - 2^{k+1} - [2^n - 2^{k-1}]$. Из формул (1.15) и (1.16) следует, что

$$Z_k^n Z_k^n = \overline{L}_R(Sq^{M_2} Sq^{[2^n-2^{k-1}]}) + L_R(Z_k^n Z_k^n) = L_R(Z_k^n Z_k^n).$$

Как видно, ключевой момент рассуждений состоит в том, что $<_R$-максимальные слагаемые, которые нужно контролировать, не содержат элемент τ.

Перейдем к доказательству пункта (b). На $\mathcal{A}_2^m$ определено антиподальное линейное отображение $\chi : \mathcal{A}_2^m \to \mathcal{A}_2^m$, которое является антиавтоморфизмом. Легко проверить, что $\chi(Sq^{2^n}) = Sq^{2^n} + K$, где одновременно $K <_L Sq^{2^n}$ и $K <_R Sq^{2^n}$. Теперь покажем, как уменьшить в $<_L$-порядке моном A, не являющийся X-мономом. Пусть $A = Sq^{2^{i_1}} Sq^{2^{i_2}} \dots Sq^{2^{i_n}}$. Тогда $B = Sq^{2^{i_n}} \dots Sq^{2^{i_2}} Sq^{2^{i_1}}$ не является Z-мономом. Имеем равенство $\chi(A) = B + L$, затем редуцируем B относительно $<_R$-порядка до суммы $\hat{L}$. Применив к $\hat{L} + L$ антигомоморфизм χ, получим сумму элементов, $<_L$-меньших исходного монома A. □

Обратимся к вопросу треугольности матриц замен от Z и X базисов к базису Милнора. Прежде всего отметим, что ни при каких линейных упорядочениях базиса Милнора и Z-базиса соответствующая матрица перехода не является треугольной. Пример буквально совпадает с примером из статьи [113], раздел 8. Он относится к топологической градуировке 9.

С другой стороны, матрица перехода от базиса Милнора к X-базису треугольна. Линейный порядок на B_{Mil} выбирается следующим нетривиальным способом, см. [113; 11].

Рассмотрим милноровский элемент $Sq(r_0, \dots, r_m)$. Для каждого r_j рассмотрим его 2-адическое разложение $r_j = \sum\limits_i \alpha_i(r_j) 2^i$. Из всевозможных $\alpha_{ij} = \alpha_i(r_j)$ сформируем таблицу так, что первые индексы меняются вдоль столбцов, вторые — вдоль строк; нумерация строк начинается с 0 и идёт снизу вверх; столбцы нумеруются с 0. Таблица, очевидно, содержит только 0 и 1, причем последних — конечно число. *Развёрткой* таблицы будем называть следующую последовательность её элементов: $(\alpha_{00}, \alpha_{01}, \alpha_{10}, \alpha_{02}, \alpha_{11}, \alpha_{20}, \dots)$. Левый лексикографический порядок на множестве развёрток, выровненных по левому краю, задаёт порядок на множестве элементов базиса Милнора. Будем обозначать этот порядок символом $\prec_X$.

Определение 1.6. Пусть элементу $Sq(r_0, \dots, r_m)$ соответствует развёртка

$$(\alpha_{00}, \alpha_{01}, \alpha_{10}, \alpha_{02}, \alpha_{11}, \alpha_{20}, \dots).$$

Заменим элементы данной последовательности по правилу $\alpha_{ij} \mapsto (X_i^{i+j})^{\alpha_{ij}}$, получим последовательность элементов X_k^n:

$$((X_0^0)^{\alpha_{00}}, (X_0^1)^{\alpha_{01}}, (X_1^1)^{\alpha_{10}}, (X_0^2)^{\alpha_{02}}, \dots).$$

Возьмём их произведение в имеющемся порядке (при $\alpha_{ij} = 0$ соответствующий X_i^{i+j} в произведение не входит, поэтому произведение конечно):

$$(X_0^0)^{\alpha_{00}} (X_0^1)^{\alpha_{01}} (X_1^1)^{\alpha_{10}} (X_0^2)^{\alpha_{02}} \dots$$

В итоге получим некоторый X-моном. Описанное соответствие задаёт отображение множества милноровских элементов в множество X-мономов

$$\gamma : Sq(r_0, \dots, r_m) \mapsto (X_0^0)^{\alpha_{00}} (X_0^1)^{\alpha_{01}} (X_1^1)^{\alpha_{10}} (X_0^2)^{\alpha_{02}} \dots$$

Отображение γ взаимно однозначно и сохраняет топологическую градуировку. Кроме того, γ сохраняет мотивный вес — для доказательства заметим, что количество нечетных r_i в точности равно количеству α_{0i}, равных 1, т. е. количеству вхождений Sq^1 в X-моном $\gamma(Sq(r_0, \dots, r_m))$.

С помощью γ перенесём порядок $\prec_X$ на множество X-мономов B_X.

Теорема 1.10. *Пусть θ — произвольный X-моном. Тогда его разложение $(\theta)_{Mil}$ по базису Милнора имеет вид*

$$(\theta)_{Mil} = \gamma^{-1}(\theta) + \sum_i \eta_i,$$

где $\gamma^{-1}(\theta) \prec_X \eta_i$ для всех i.

Доказательство проводится почти буквальным повторением весьма нетривиального доказательства аналогичного факта для $\mathcal{A}_2$ из [113]. Уточнение состоит в том, что коэффициент при $\gamma^{-1}(\theta)$ равен $1 \in \mathbb{M}_2$, т. е. не содержит τ. Это легко следует из того, что γ сохраняет мотивный вес. Из этой теоремы следует, что переход между B_X и B_{Mil} описывается треугольной матрицей с элементами из $\mathbb{M}_2$ и с единицами на главной диагонали. □

1.3.3 Семейство P_t^s-базисов

Назовём P_t^s-*мономом* произведение вида $P_{t_1}^{s_1} \dots P_{t_k}^{s_k}$, где все $P_{t_j}^{s_j}$ попарно различны. В каждом конечном наборе пар целых чисел $\{(s_j, t_j) : j = 1, \dots, k, s_j \geqslant 0, t_j > 0\}$ зафиксируем линейный порядок и именно в этом порядке будем перемножать $P_{t_j}^{s_j}$. Получим множество B_P элементов алгебры $\mathcal{A}_2^m$. Таких множеств бесконечно много, поскольку в каждом P_t^s-мономе порядок атомарных сомножителей $P_{t_j}^{s_j}$, хоть и фиксирован, однако может быть выбран независимо от других P_t^s-мономов.

Зафиксируем множество B_P и построим биекцию $\gamma : B_{Mil} \to B_P$. Для милноровского элемента $Sq(R) = Sq(r_1, r_2, \dots)$ рассмотрим 2-адическое разложение каждого $r_j = \sum \alpha_k(r_j) 2^k$ и рассмотрим набор пар целых чисел, построенный по последовательности R:

$$M(R) = \{(s, t)) : \text{ если } \alpha_s(r_t) > 0\}.$$

Положим $\gamma(Sq(R))$ равным произведению элементов P_t^s в том порядке, который зафиксирован для набора $M(R)$. Легко проверить, что γ является биекцией, сохраняющей топологическую градуировку. Кроме того, γ сохраняет мотивный вес, поскольку

количество сомножителей вида P_t^0 в $\gamma(Sq(R))$ в точности равно количеству нечетных r_j в $Sq(R)$.

Порядок, относительно которого матрица перехода от B_{Mil} к B_P оказывается треугольной, определяется следующим образом. Для элемента $Sq(R)$ положим $e(Sq(R)) = \sum r_j$.

Определение 1.7. Для $Sq(R), Sq(S) \in B_{Mil}$ будем писать $Sq(R) \prec_E Sq(S)$, если $e(Sq(R)) < e(Sq(S))$, или $e(Sq(R)) = e(Sq(S))$ и $Sq(R) \prec_R Sq(S)$.

С помощью биекции γ порядок $\prec_E$ переносится на B_P.

Теорема 1.11. *В алгебре $\mathcal{A}_2^m$ для любого $\theta \in B_P$ имеет место равенство*

$$(\theta)_{Mil} = \gamma^{-1}(\theta) + \sum \tau^{\varepsilon_i}\mu_i,$$

где μ_i — милноровский элемент, $\varepsilon_i \geqslant 0$ и $e(\mu_i) < e(\gamma^{-1}(\theta))$.

Доказательство проводится по аналогии с доказательством аналогичного факта для $\mathcal{A}_2$, см. [113]. Основная сложность состоит в том, чтобы показать, что коэффициент при $\gamma^{-1}(\theta)$ равен $1 \in \mathbb{M}_2$, т. е. не содержит τ. □

Из теоремы 1.11 немедленно получаем следующее утверждение.

Теорема 1.12. *Любое множество $B_P \subset \mathcal{A}_2^m$ образует базис $\mathcal{A}_2^m$. Любой такой базис является треугольным по отношению базису Милнора B_{Mil}.* □

Следствие 1.1. *Матрица перехода между двумя любыми базисами B'_P и B''_P, элементы которых упорядочены указанным выше способом, треугольна.*

Доказательство. Матрицы перехода для пар базисов (B_{Mil}, B'_P) и (B_{Mil}, B''_P) (верхне)треугольны, при этом в обоих случаях B_{Mil} упорядочен одним и те же способом. □

1.3.4 Коммутаторные базисы

Определим набор итерированных коммутаторов $c_t^s \in \mathcal{A}_2^m$, $s \geqslant 0, t > 0$ следующим образом:

(*i*) для $s \geqslant 0$ положим $c_1^s = Sq^{2^s}$;

(*ii*) для $t \geqslant 2$ положим по индукции $c_t^s = [Sq^{2^{s+t-1}}, c_{t-1}^s]$.

В явном виде

$$c_t^s = [Sq^{2^{s+t-1}}, [\ldots, [Sq^{2^{s+1}}, Sq^{2^s}]\ldots]]. \tag{1.17}$$

Степень элемента равна $|c_t^s| = 2^s(2^t - 1)$.

Рассмотрим всевозможные конечные множества попарно различных пар целых чисел

$$\{(s_j, t_j) : j = 1, \dots, k, s_j \geqslant 0, t_j > 0\} \tag{1.18}$$

и выберем на каждом таком множестве линейный порядок. Для каждого подмножества (1.18) перемножим элементы c_t^s в выбранном порядке, получим набор B_c элементов в $\mathcal{A}_2^m$. Имеется бесконечное множество таких наборов B_c (эта конструкция аналогична конструкции набора B_P из предыдущего раздела).

Стартовав с элементов $Sq^{2^s} \in \mathcal{A}_2$, Дж. Палмьери и Дж. Жанг в работе [128] доказали, что при любом выборе линейных порядков на конечных множествах пар индексов (1.18) соответствующий набор итерированных коммутаторов $B_c \subset \mathcal{A}_2$ образует базис алгебры $\mathcal{A}_2$, треугольный по отношению к соответствующему набору $B_P \subset \mathcal{A}_2$.

Мы докажем аналогичное утверждение для алгебры $\mathcal{A}_2^m$. Для этого рассмотрим в алгебре $\mathcal{A}_2^m$ фильтрацию степенями идеала I аугментации $\varepsilon : \mathcal{A}_2^m \to \mathbb{M}_2$; идеал I состоит из элементов положительной топологической степени. Фильтрации алгебр когомологических операций степенями идеала аугментации играют важную роль в вычислениях, см. [106; 142; 160].

Легко видеть, что неразложимый элемент $Sq^{2^s} = Sq(2^s) = P_1^s = c_1^s \in \mathcal{A}_2^m$ принадлежит $I \subset \mathcal{A}_2^m$, но не принадлежит $I^2 \subset I$. Повторяя рассуждения из [106], можно показать, что $P_t^s \in \mathcal{A}_2^m$ принадлежит I^t, но не принадлежит I^{t+1}. Из определения (1.17) следует, что $c_t^s \in I^t$.

Теорема 1.13.

(*a*) *В алгебре* $\mathcal{A}_2^m$ *имеет место равенство* $c_t^s \equiv P_t^s \bmod I^{t+1}$.

(*b*) *При любом выборе линейных порядков на множествах* (1.18) *соответствующий набор* B_c *произведений итерированных коммутаторов образует базис алгебры* $\mathcal{A}_2^m$.

Доказательство. Для (*a*) проведем индукцию по t. При $t = 1$ имеем $c_1^s = Sq^{2^s} = P(2^s) = P_1^s$.

По предположению индукции выполнено равенство $c_t^s \equiv P_t^s \bmod I^{t+1}$. Теперь заметим, что если $x \in I^k$ и $y \in I^m$, то $xy \in I^{k+m}$, поэтому для любого $z \in I^{t+1}$ коммутатор $[Sq^{2^{s+t}}, z]$ принадлежит I^{t+2}. Следовательно,

$$c_{t+1}^s = [Sq^{2^{s+t}}, c_t^s] \equiv [Sq^{2^{s+t}}, P_t^s] \mod I^{t+2}.$$

Остается проверить, что $[Sq^{2^{s+t}}, P_t^s] \equiv P_{t+1}^s \bmod I^{t+2}$.

Для этого с помощью формулы (A.14) вычислим коммутатор $[Sq^{2^{s+t}}, P_t^s]$. Для

$s \geqslant 1$ имеем

$$Sq^{2^{s+t}} P_t^s = Sq(0, \dots, \underbrace{2^s}_{(t+1)\text{-е место}}) + Sq(2^{s+t}, \dots, \underbrace{2^s}_{t\text{-е место}}) + \\ + \sum_{a=1}^{2^s-1} \tau^{w(a)} Sq(a \cdot 2^t, 0, \dots, 0, a, \underbrace{2^s - s}_{(t+1)\text{-е место}}),$$

где $w(a) = 1$ для нечетных a и $w(a) = 0$ для четных a. Все слагаемые в последней сумме, где $1 \leqslant a \leqslant 2^s - 1$, принадлежат I^{k+2}, это следует из простой части теоремы II.2.2 работы [106]. Отметим, что трудная часть теоремы II.2.2 состоит в точном вычислении максимальной степени идеала I, которой принадлежит элемент алгебры; нам же достаточно грубой оценки.

Для $s = 0$ формула упрощается:

$$Sq^{2^t} P_t^0 = Sq(0, \dots, \underbrace{1}_{(t+1)\text{-е место}}) + Sq(2^t, \dots \underbrace{1}_{t\text{-е место}}).$$

Далее,

$$P_t^s Sq^{2^{s+t}} = Sq(2^{t+s}, \dots, \underbrace{2^s}_{t\text{-е место}})$$

Пункт (b) очевидным образом вытекает из (a). □

1.3.5 Замечания о C-мономах и о базисах Вуда

Для алгебры $\mathcal{A}_2$ базис $<_R$-максимальных мономов был описан в работе [26], см. определение 1.4. Однако оказывается, что C-мономы *не* образуют базис алгебры $\mathcal{A}_2^m$ и препятствием служит мотивный вес. В самом деле, в топологической градуировке 4 алгебра $\mathcal{A}_2^m$ содержит всего два милноровских элемента

$$Sq(4) = Sq^4, \qquad \deg Sq(4) = (4, 2);$$
$$Sq(1,1) = Sq^3 Sq^1, \qquad \deg Sq(1,1) = (4, 1);$$

а также два C-монома

$$a = Sq^4,\ b = Sq^2 Sq^2.$$

Из соотношений Адема (1.6) следует, что $Sq^2 Sq^2 = \tau Sq^3 Sq^1$, поэтому a и b выражаются через B_{Mil} (или через B_{adm}, поскольку в топологической градуировке 4 эти два базиса состоят из одинаковых элементов) с помощью диагональной матрицы $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \tau \end{pmatrix}$, которая над $\mathbb{M}_2$ необратима.

Этот пример может навести на предположение, что C-моном делится на степень

элемента τ, так что в фиксированной топологической градуировке C-мономы, домноженные на подходящие отрицательные степени τ, принадлежат $\mathcal{A}_2^m$ и образуют в этой градуировке базис. Например, в рассмотренном только что случае нужно рассмотреть два модифицированных C-монома: $Sq^4, \tau^{-1}Sq^2Sq^2 \in \mathcal{A}_2^m$.

Это предположение, однако, оказывается неверным. Рассмотрим топологическую градуировку 6. В ней имеются три милноровских элемента

$$\begin{aligned} Sq(0,2), &\qquad \deg Sq(0,2) = (6,3);\\ Sq(3,1), &\qquad \deg Sq(3,1) = (6,2);\\ Sq(6), &\qquad \deg Sq(6) = (6,3). \end{aligned}$$

и три C-монома Sq^4Sq^2, Sq^2Sq^4 и Sq^6, причем эти 6 элементов связаны соотношениями

$$\begin{aligned} Sq^4Sq^2 &= Sq(0,2) + \tau Sq(3,1) + Sq(6),\\ Sq^2Sq^4 &= \tau Sq(3,1) + Sq(6),\\ Sq^6 &= Sq(6). \end{aligned}$$

Отсюда видно, что домножение C-мономов на целочисленные степени τ не позволяет получить базис $\mathcal{A}_2^m$. Таким образом, вопрос построения $<_R$-максимального базиса алгебры $\mathcal{A}_2^m$ остается открытым. С другой стороны, C-мономы выражаются через элементы базиса Милнора с помощью треугольной матрицы с элементами из $\mathbb{M}_2$, вообще говоря, необратимой над $\mathbb{M}_2$. Доказательство треугольности повторяет рассуждения из [113].

Определения базисов Вуда WY и WX со стр. 35 для алгебры $\mathcal{A}_2$ дословно переносятся на случай алгебры $\mathcal{A}_2^m$.

Теорема 1.14. *Для каждого фиксированного натурального n элемент $WY_n \in \mathcal{A}_2^m(n)$ является элементом максимальной топологической градуировки. Произведения, полученные из* (1.3) *вычеркиванием произвольных атомарных сомножителей, образуют базис $\mathcal{A}_2^m(n)$. Построенный таким образом базис подалгебры $\mathcal{A}_2^m(n)$ является частью аналогичного базиса для $\mathcal{A}_2^m(n+1)$. Объединение по включению этих базисов (по всем n) образует базис алгебры $\mathcal{A}_2^m$.* □

Теорема 1.15. *Для каждого фиксированного натурального n элемент $WZ_n \in \mathcal{A}_2^m(n)$ является элементом максимальной топологической градуировки. Произведения, полученные из* (1.4) *вычеркиванием произвольных атомарных сомножителей, образуют базис $\mathcal{A}_2^m(n)$. Построенный таким образом базис подалгебры $\mathcal{A}_2^m(n)$ является частью аналогичного базиса для $\mathcal{A}_2^m(n+1)$. Объединение по включению этих базисов (по всем n) образует базис алгебры $\mathcal{A}_2^m$.* □

Доказательства из работы [174] проходят без почти без модификаций, поэтому мы их опускаем.

Глава 2

Базисы алгебр Стинрода $\mathcal{A}_p$ и алгебр $\overline{\mathcal{A}}_p = \mathcal{A}_p/\beta$, $p > 2$

В главе 1 мы привели результаты, касающиеся базисов и их замен в алгебрах $\mathcal{A}_2$ и $\mathcal{A}_2^m$. Для алгебр $\mathcal{A}_p$ и $\overline{\mathcal{A}}_p$ аналогичные проблемы неоднократно ставились, см. например, большой обзор Вуда [175]. До последнего времени эти проблемы стояли открытыми. Их решения приводятся в этой и следующей главах.

В [86] И. Карача построил C-базис для алгебры $\overline{\mathcal{A}}_p$ (т. е. без учета элемента Бокштейна). Также в его статье содержится утверждение (теорема 1.5(i)(ii)) об обобщении Z-базиса и X-базиса на алгебру $\overline{\mathcal{A}}_p$, но доказательство содержит существенную ошибку, в частности — в конце предложения 2.3(iii), а формулировка его результата неверна.

Мы выделяем в отдельный случай подалгебры $\overline{\mathcal{A}}_p$ (раздел 2.1) для удобства изложения и разделения основных идей. Случай всей алгебры $\mathcal{A}_p$ (т. е. с учетом элемента Бокштейна β) рассматривается в разделе 2.2.

В разделе 2.1 мы построим X- и Z-базисы в подалгебре $\overline{\mathcal{A}}_p$ алгебры Стинрода по модулю p. Мы покажем, что Z-базис (X-базис) минимален относительно правого (левого) лексикографического порядка на мономах от мультипликативных образующих P^i. Также мы докажем, что после некоторых специальных перестановок сомножителей в Z-мономах (X-мономах) полученные мономы по-прежнему образуют базис $\overline{\mathcal{A}}_p$.

В разделе 2.2 мы строим базисы βX, βZ, βC, ZA и XC алгебры $\mathcal{A}_p$. Для всех них, исключая βC, мы доказываем свойство экстремальности по отношению к подходящему порядку. Порядок, относительно которого βC-базиса экстремален, неизвестен; это — открытый вопрос. Контрпримеры к некоторым естественным предположениям об этом порядке приведены в конце главы, см. стр. 76. Базис βC имеет полезные топологические применения, см. теорему 4.3.

Мы рассмотрим два способа расширить левый (правый) лексикографический порядки на мономах от приведенных степеней P^j до порядков на мономах от приве-

денных степеней и элемента Бокштейна β. Эти порядки мы будем обозначать через εL и IL (εR и IR, соответственно), определения будут даны в разделе 2.2. Допустимые мономы являются εL-максимальными. Будет показано, что βZ- и βX-базисы минимальны относительно IR- и IL-порядков, соответственно (см. теоремы 2.7 и 2.8). Кроме того, будет показано, что ZA- и XC-базисы максимальны относительно тех же порядков (см. теоремы 2.10 и 2.11).

2.1 Алгебры $\overline{\mathcal{A}}_p$, $p > 2$

2.1.1 Z-базис и X-базис алгебры $\overline{\mathcal{A}}_p$

На мономах вида P^I, где $I = (i_m, \dots, i_0)$, определены левый и правый лексикографические порядки, а именно, $P^I <_R P^J$ (соответственно, $P^I <_L P^J$) по определению тогда и только тогда, когда $I <_R J$ (соответственно, $I <_L J$) в смысле определения 1.1. Мы будем ссылаться на эти порядки как на $<_R$-порядок ($<_L$-порядок) или, для краткости, как на R-порядок (L-порядок).

Определение 2.1. Положим $Z_k^n = P^{p^k} \cdots P^{p^n}$ для $n \geqslant k \geqslant 0$. Определим *$Z$-моном* как произведение вида

$$Z^I = Z_{k_1}^{n_1} \cdots Z_{k_r}^{n_r} \tag{2.1}$$

где I — последовательность пар $((n_1, k_1), \dots, (n_r, k_r))$, удовлетворяющая двум условиям:

(1) $(n_r, k_r) \leqslant_L \dots \leqslant_L (n_2, k_2) \leqslant_L (n_1, k_1)$,

(2) если в последовательности I есть подпоследовательность равных пар:

$$(n_{t+s+1}, k_{t+s+1}) <_L (n_{t+s}, k_{t+s}) = \dots = (n_{t+1}, k_{t+1}) <_L (n_t, k_t)$$

то $s < p$ для каждой такой подпоследовательности.

Определение 2.2. Положим $X_k^n = P^{p^n} \cdots P^{p^k}$ для $n \geqslant k \geqslant 0$. Определим *$X$-моном* как произведение вида

$$X^I = X_{k_r}^{n_r} \cdots X_{k_1}^{n_1}$$

где I — последовательность пар $((n_1, k_1), \dots, (n_r, k_r))$, удовлетворяющая двум условиям:

(1) $(n_r, k_r) \leqslant_L \dots \leqslant_L (n_2, k_2) \leqslant_L (n_1, k_1)$,

(2) если в последовательности I есть подпоследовательность равных пар:

$$(n_{t+s+1}, k_{t+s+1}) <_L (n_{t+s}, k_{t+s}) = \dots = (n_{t+1}, k_{t+1}) <_L (n_t, k_t)$$

то $s < p$ для каждой такой подпоследовательности.

Определения 2.1 и 2.2 можно переформулировать следующим образом.

Определение 2.3. Моном $(X_{k_m}^{n_m})^{r_m} \cdots (X_{k_1}^{n_1})^{r_1}$ называется *X-мономом*, а моном $(Z_{k_1}^{n_1})^{r_1} \cdots (Z_{k_m}^{n_m})^{r_m}$ называется *Z-мономом*, если

$$(n_m, k_m) <_L \ldots <_L (n_2, k_2) <_L (n_1, k_1)$$

и $1 \leqslant r_j \leqslant p-1$ для всех $1 \leqslant j \leqslant m$.

Полезно рассматривать единицу $1 \in \overline{\mathcal{A}}_p$ как Z-моном или как X-моном, соответствующий пустой последовательности индексов.

Теорема 2.1. *Множество всех Z-мономов образует аддитивный базис $\overline{\mathcal{A}}_p$. Ни один из Z-мономов не может быть выражен в виде линейной комбинации мономов, меньших исходного относительно $<_R$-порядка.*

Теорема 2.2. *Множество всех X-мономов образует аддитивный базис $\overline{\mathcal{A}}_p$. Ни один из X-мономов не может быть выражен в виде линейной комбинации мономов, меньших исходного относительно $<_L$-порядка.*

Мы начнем с доказательства теоремы 2.1. Сначала мы проверим, что количество Z-мономов заданной степени совпадает с размерностью подпространства в $\overline{\mathcal{A}}_p$ той же степени. Затем мы покажем, как записать любой моном в $\overline{\mathcal{A}}_p$ в виде конечной линейной комбинации Z-мономов.

Утверждение 2.1 ([2])**.** *Количество Z-мономов заданной степени равно размерности подпространства той же степени в алгебре $\overline{\mathcal{A}}_p$.*

Доказательство. Напомним, что $(\overline{\mathcal{A}}_p)_* = \mathbb{Z}/p\,[\xi_1, \xi_2, \ldots]$, где $\deg \xi_k = 2p^k - 2$. Установим взаимно однозначное соответствие между множеством всех Z-мономов заданной степени N и множеством всех мономов от символов ξ_k, имеющих ту же степень N. Положим

$$Z_k^n \longleftrightarrow \xi_{n-k+1}^{p^k}.$$

Эти два элемента имеют одинаковую степень $2(p^{n+1} - p^k)$. Поставим в соответствие Z-моному $Z_{k_1}^{n_1} \cdots Z_{k_m}^{n_m}$ элемент $\xi_{n_1-k_1+1}^{p^{k_1}} \cdots \xi_{n_m-k_m+1}^{p^{k_m}}$.

Опишем обратное соответствие. Если для Z-монома $Z_{k_1}^{n_1} \cdots Z_{k_m}^{n_m}$ известны все элементы $Z_{k_j}^{n_j}$, то их порядок в произведении единственный. Поэтому для произвольного элемента $\xi_{i_1}^{l_1} \ldots \xi_{i_r}^{l_r} \in (\overline{\mathcal{A}}_p)_*$ достаточно описать набор элементов Z_n^k, произведение которых образуют соответствующий Z-моном. Для ξ_i^l рассмотрим p-адическое разложение $l = \alpha_j p^j + \ldots + \alpha_1 p + \alpha_0$. Для каждого ненулевого α_s (то есть для $\xi_i^{\alpha_s p^s}$) добавим в набор сомножителей соответствующего Z-монома элемент $(Z_s^{i+s-1})^r$. $\square$

Хорошо известно, что множество элементов P^{p^j}, $j \geqslant 0$, является множеством мультипликативных образующих алгебры $\overline{\mathcal{A}}_p$. Следующий результат существенно уточняет это утверждение.

В этом разделе временно будем обозначать равенство в свободной алгебре, порожденной P^j, через $=$, а равенство в алгебре $\overline{\mathcal{A}}_p$ (то есть равенство по модулю соотношений Адема (A.4)) через $\equiv$.

Утверждение 2.2 ([2]). *Предположим, что для монома $w = P^{j_1} \dots P^{j_n}$ некоторые из индексов j_k не являются степенями p. Тогда моном w в алгебре $\overline{\mathcal{A}}_p$ представляется в виде линейной комбинации мономов от P^{p^j}, которые строго меньше w как в $<_L$-порядке, так и в $<_R$-порядке.*

Доказательство. Для простоты предположим, что $w = uP^jv$, где u — произведение элементов вида P^{p^k}, а j не является степенью p. Пусть $j = a + bp^i$, $0 < b < p, 0 < a < p^i$. Применяя соотношение Адема (A.4) к $P^aP^{bp^i}$, получаем

$$P^aP^{bp^i} \equiv (-1)^a \binom{(p-1)bp^i - 1}{a} P^j + \sum_{k=1}^{[a/p]} c_k P^{a+bp^i-k} P^k,$$

где c_k определены формулой (A.4). Применяя лемму A.1, мы получаем, что коэффициент $\binom{(p-1)bp^i-1}{a}$ не равен нулю. Следовательно, P^j равен сумме мономов, которые строго меньше P^j (как в $<_L$-порядке, так и в $<_R$-порядке), и то же самое верно для uP^jv.

Эта процедура может применяться до тех пор, пока в мономах имеются сомножители P^j, где j не является степенью p. Эта редукция завершится, поскольку существует конечное число мономов степени $\deg w$, которые меньше w относительно $<_R$-порядка ($<_L$-порядка). □

Теперь мы опишем несколько процедур редукции, которые показывают, как выразить любой моном от элементов вида P^{p^i}, но не являющийся Z-мономом, в виде линейной комбинации $<_R$-меньших мономов. В результате таких процедур могут получаться мономы, содержащие P^k для k, не являющихся степенями p. Всегда будем предполагать, что с помощью предложения 2.2 эти мономы затем представляются в виде линейных комбинаций $<_R$-меньших мономов от элементов вида P^{p^j}.

Произведение $P^{p^{i_1}}P^{p^{i_2}} \dots P^{p^{i_m}}$ не является Z-мономом, если в нем существует подмоном одного из следующих пяти типов:

(1) $P^{p^s}P^{p^t}$, где $t \geqslant s + 2$;

(2) $Z_k^n P^{p^n}$, $n > k$;

(3) $P^{p^n} Z_k^{n+1}$, $n \geqslant k$;

(4) $Z_{k-1}^n Z_k^n$, $n \geqslant k \geqslant 1$;

(5) $\underbrace{Z_k^n \cdots Z_k^n}_{p \text{ раз}}$.

Эти случаи рассмотрены по-отдельности в леммах 2.1, 2.3, 2.4, 2.5, 2.6.

Лемма 2.1. *Элемент $P^{p^s}P^{p^t}$ алгебры $\overline{\mathcal{A}}_p$, где $t \geqslant s+2$, может быть представлен в виде линейной комбинации мономов, меньших в $<_R$-порядке.*

Доказательство. Из соотношений Адема (A.4) имеем

$$P^{p^s}P^{p^t} \equiv (-1)^{p^s}\binom{(p-1)p^t-1}{p^s}P^{p^s+p^t} + \overline{L}_R(P^{p^t+p^s-p^{s-1}}P^{p^s-1}). \tag{2.2}$$

Биномиальный коэффициент при $P^{p^s+p^t}$ по лемме A.1 равен

$$\binom{(p-1)p^t-1}{p^s} = \binom{p-2}{0}\binom{p-1}{0}\cdots\underbrace{\binom{p-1}{1}}_{s\text{-я цифра}}\cdots\binom{p-1}{0} = p-1 = -1 \pmod p.$$

В соотношении (2.2) только первое слагаемое $P^{p^s+p^s}$ больше левой части. Покажем, как свести его к $<_R$-младшим членам.

Рассмотрим произведение $P^{p^{s+1}}P^{p^t-(p-1)p^s}$. В силу условия $t \geqslant s+2$ этот моном не является допустимым и применение соотношений Адема (A.4) дает

$$P^{p^{s+1}}P^{p^t-(p-1)p^s} \equiv (-1)^{p^{s+1}}\binom{(p-1)(p^t-(p-1)p^s)-1}{p^{s+1}}P^{p^s+p^t} + \overline{L}_R(P^{p^t}P^{p^s}).$$

По лемме A.1 мы получаем

$$\binom{(p-1)(p^t-(p-1)p^s)-1}{p^{s+1}} = \underbrace{\binom{p-2}{0}}_{t\text{-я цифра}}\cdots\binom{p-1}{0}\underbrace{\binom{1}{1}}_{(s+1)\text{-я цифра}}\cdots\binom{*}{0} = 1,$$

следовательно,

$$P^{p^{s+1}}P^{p^t-(p-1)p^s} = -P^{p^s+p^t} + \overline{L}_R(P^{p^t}P^{p^s}). \tag{2.3}$$

Умножая равенство (2.3) на $(p-1)$ и вычитая его из (2.2), мы получаем

$$P^{p^s}P^{p^t} \equiv (p-1)P^{p^{s+1}}P^{p^t-(p-1)p^s} + \overline{L}_R(P^{p^t}P^{p^s}) = L_R(P^{p^s}P^{p^t}).$$

□

Лемма 2.2. *Для любых неотрицательных целых чисел $n \geqslant k$ выполняется соотношение*

$$Z_k^n \equiv P^{p^n+\ldots+p^k} + L_R(P^{p^n-1}). \tag{2.4}$$

Доказательство. Проведем доказательство нисходящей индукцией по k. Для $k = n$ утверждение тривиально. Для $k = n - 1$ имеем

$$P^{p^{n-1}}P^{p^n} \equiv (-1)^{p^{n-1}}\binom{(p-1)p^n - 1}{p^{n-1}}P^{p^n+p^{n-1}} + L_R(P^{p^{n-2}}) + \\ (-1)^{p^{n-1}+p^{n-2}}\binom{(p-1)(p^n - p^{n-2}) - 1}{0}P^{p^n+p^{n-1}-p^{n-2}}P^{p^{n-2}}.$$

По лемме A.1 биномиальный коэффициент $\binom{(p-1)p^n-1}{p^{n-1}}$ равен $p - 1 \equiv -1 \pmod p$. Следовательно,

$$P^{p^{n-1}}P^{p^n} \equiv P^{p^n+p^{n-1}} + L_R(P^{p^{n-2}}) + P^{p^n+p^{n-1}-p^{n-2}}P^{p^{n-2}} \equiv P^{p^n+p^{n-1}} + L_R(P^{p^{n-1}}).$$

Теперь предположим, что утверждение верно для Z^n_{k+1}, и докажем его для Z^n_k:

$$P^{p^k}Z^n_{k+1} \equiv P^{p^k}(P^{p^n+\ldots+p^{k+1}} + L_R(P^{p^{n-1}})) \equiv P^{p^k}P^{p^n+\ldots+p^{k+1}} + L_R(P^{p^{n-1}}) \equiv \\ \equiv (-1)^{p^k}\binom{(p-1)(p^n + \ldots + p^{k+1}) - 1}{p^k}P^{p^n+\ldots+p^k} + L_R(P^{p^{n-1}}).$$

Остается заметить, что биномиальный коэффициент $\binom{(p-1)(p^n+\ldots+p^{k+1})-1}{p^k}$ равен $(p-1) \equiv (-1) \mod p$. □

Лемма 2.3. *Для $n > k$ элемент $Z^n_k P^{p^n}$ алгебры $\overline{\mathcal{A}}_p$ может быть записан в виде линейной комбинации $<_R$-меньших мономов.*

Доказательство. Мы начинаем с соотношения (2.4):

$$Z^n_k P^{p^n} \equiv P^{p^n+\ldots+p^k}P^{p^n} + L_R(P^{p^{n-1}})P^{p^n}.$$

Произведение $P^{p^n+\ldots+p^k}P^{p^n}$ не является допустимым, поэтому мы имеем

$$P^{p^n+\ldots+p^k}P^{p^n} \equiv (-1)^{p^n+\ldots+p^k}\binom{(p-1)p^n - 1}{p^n + \ldots + p^k}P^{2p^n+p^{n-1}+\ldots+p^k} + A,$$

где A — элемент, меньший или равный $P^{2p^n-p^{k-1}}P^{p^{n-1}+\ldots+p^{k-1}}$. Биномиальный коэффициент $\binom{(p-1)p^n-1}{p^n+\ldots+p^k}$ равен

$$\underbrace{\binom{p-2}{1}}_{n\text{-я цифра}}\binom{p-1}{1}\cdots\underbrace{\binom{p-1}{1}}_{k\text{-я цифра}}\binom{p-1}{0}\cdots\binom{p-1}{0} = \\ = (-1)^{n-k}(p-2) = (-1)^{n-k+1}2 \pmod p.$$

Теперь для недопустимого произведения $P^{p^n}P^{p^n+\ldots+P^{p^k}}$ мы также применяем со-

отношение Адема (A.4):

$$P^{p^n}P^{p^n+\ldots+p^k} \equiv (-1)^{p^n}\binom{(p-1)(p^n+\ldots+p^k)-1}{p^n}P^{2p^n+p^{n-1}+\ldots+p^k} + B,$$

где B — элемент, меньший или равный $P^{2p^n+p^{n-1}+\ldots+p^k-p^{n-1}}P^{p^{n-1}}$.

Биномиальный коэффициент $\binom{(p-1)(p^n+\ldots+p^k)-1}{p^n}$ равен

$$\underbrace{\binom{p-1}{1}}_{n\text{-я цифра}}\binom{p-1}{0}\ldots\underbrace{\binom{p-2}{0}}_{k\text{-я цифра}}\binom{p-1}{0}\ldots\binom{p-1}{0} = p-1 = -1 \pmod p.$$

Учитывая, что и A, и B имеют вид $L_R(Z_k^nP^{p^n})$, мы получаем

$$\begin{aligned} Z_k^nP^{p^n} \equiv P^{p^n+\ldots+p^k}P^{p^n} + L_R(P^{p^{n-1}})P^{p^n} \equiv 2P^{2p^n+p^{n-1}+\ldots+p^k} + A + L_R(P^{p^{n-1}})P^{p^n} \equiv \\ \equiv 2P^{p^n}P^{p^n+p^{n-1}+\ldots+p^k} - 2B + A + L_R(P^{p^{n-1}})P^{p^n} \equiv \\ \equiv 2P^{p^n}Z_k^n + 2P^{p^n}L_R(P^{p^{n-1}}) - 2B + A + L_R(P^{p^{n-1}})P^{p^n} \equiv L_R(Z_k^nP^{p^n}). \end{aligned}$$

□

Лемма 2.4. *Для $n \geqslant k$ элемент $P^{p^n}Z_k^{n+1}$ алгебры $\overline{\mathcal{A}}_p$ может быть представлен в виде линейной комбинации $<_R$-меньших мономов.*

Доказательство. По лемме 2.2 имеем равенство

$$P^{p^n}Z_k^{n+1} = P^{p^n}Z_k^nP^{p^{n+1}} \equiv P^{p^n}P^{p^n+\ldots p^k}P^{p^{n+1}} + P^{p^n}L_R(P^{p^{n-1}})P^{p^{n+1}}. \tag{2.5}$$

Применим соотношение Адема (A.4) к произведению $P^{p^n}P^{p^n+\ldots p^k}$:

$$P^{p^n}P^{p^n+\ldots+p^k} \equiv (-1)^{p^n}\binom{(p-1)(p^n+\ldots+p^k)-1}{p^n}P^{2p^n+p^{n-1}\ldots+p^k} + A,$$

где A — сумма членов, меньших или равных $P^{2p^n+\ldots+p^k-p^{n-1}}P^{p^{n-1}}$. Для $k<n$ коэффициент первого члена равен

$$(-1)^{p^n}\binom{(p-1)(p^n+\ldots+p^k)-1}{p^n} = -\underbrace{\binom{p-1}{1}}_{n\text{-я цифра}}\binom{*}{0}\cdots\binom{*}{0} = 1 \pmod p.$$

а для $k=n$:

$$(-1)^{p^n}\binom{(p-1)p^n-1}{p^n} = -\underbrace{\binom{p-2}{1}}_{n\text{-я цифра}}\binom{*}{0}\cdots\binom{*}{0} = 2 \pmod p.$$

Следовательно, мы имеем соотношение $P^{p^n}P^{p^n+\ldots+p^k} \equiv \alpha P^{2p^n+\ldots+p^k} + A$, где $\alpha = 1$ для $k < n$ и $\alpha = 2$ для $k = n$. Подставим это в соотношение (2.5):

$$P^{p^n}Z_k^{n+1} \equiv \alpha P^{2p^n+\ldots+p^k}P^{p^{n+1}} + A \cdot P^{p^{n+1}} + P^{p^n}L_R(P^{p^{n-1}})P^{p^{n+1}}. \tag{2.6}$$

Произведение $P^{2p^n+\ldots+p^k}P^{p^{n+1}}$ не является допустимым, поэтому мы имеем:

$$P^{2p^n+\ldots+p^k}P^{p^{n+1}} \equiv (-1)^{2p^n+\ldots+p^k}\binom{(p-1)p^{n+1}-1}{2p^n+\ldots+p^k}P^{p^{n+1}+2p^n+\ldots+p^k} + B,$$

где B — сумма членов, меньших или равных $P^{p^{n+1}+2p^n+\ldots+p^k-(2p^{n-1}+\ldots+p^{k-1})}P^{2p^{n-1}+\ldots+p^{k-1}}$. Вычислим биномиальный коэффициент:

$$\begin{aligned}(-1)^{2p^n+\ldots+p^k}\binom{(p-1)p^{n+1}-1}{2p^n+\ldots+p^k} &= \\ = (-1)^{n-k}\binom{p-2}{0}\underbrace{\binom{p-1}{2}}_{n\text{-я цифра}}\binom{p-1}{1}\cdots\underbrace{\binom{p-1}{1}}_{k\text{-я цифра}}\binom{p-1}{0}\cdots\binom{p-1}{0} &= \\ = \frac{(p-1)(p-2)}{2} = \frac{p(p-3)+2}{2} &= 1 \pmod p,\end{aligned}$$

следовательно,

$$P^{2p^n+\ldots+p^k}P^{p^{n+1}} = P^{p^{n+1}+2p^n+\ldots+p^k} + B. \tag{2.7}$$

Теперь рассмотрим произведение $P^{p^{n+1}}P^{2p^n+\ldots+p^k}$, которое также не является допустимым:

$$P^{p^{n+1}}P^{2p^n+\ldots+p^k} = (-1)^{p^{n+1}}\binom{(p-1)(2p^n+\ldots+p^k)-1}{p^{n+1}}P^{p^{n+1}+2p^n+\ldots+p^k} + C,$$

где C — сумма членов, меньших или равных $P^{p^{n+1}+p^n+\ldots+p^k}P^{p^n}$. Для коэффициента мы имеем

$$\begin{aligned}(-1)^{p^{n+1}}\binom{(p-1)(2p^n+p^{n-1}+\ldots+p^k)-1}{p^{n+1}} &= \\ = -\binom{p^{n+1}+(p-2)p^n+(p-1)(p^{n-1}+\ldots+p^k)-1}{p^{n+1}} &= \\ = -\underbrace{\binom{1}{1}}_{(n+1)\text{-я цифра}}\binom{*}{0}\cdots\binom{*}{0} &= -1 \pmod p.\end{aligned}$$

Следовательно,

$$P^{p^{n+1}}P^{2p^n+\ldots+p^k} = -P^{p^{n+1}+2p^n+p^{n-1}\ldots+p^k} + C. \tag{2.8}$$

Из соотношений (2.6), (2.7), (2.8) мы получаем

$$P^{p^n}Z_k^{n+1} \equiv \alpha P^{2p^n+\ldots+p^k}P^{p^{n+1}} + A\cdot P^{p^{n+1}} + P^{p^n}L_R(P^{p^{n-1}})P^{p^{n+1}} \equiv$$
$$\alpha(P^{p^{n+1}+2p^n+\ldots+p^k} + B) + A\cdot P^{p^{n+1}} + P^{p^n}L_R(P^{p^{n-1}})P^{p^{n+1}} \equiv$$
$$\alpha(-P^{p^{n+1}}P^{2p^n+\ldots+p^k} + C + B) + A\cdot P^{p^{n+1}} + P^{p^n}L_R(P^{p^{n-1}})P^{p^{n+1}}.$$

Заметим, что все слагаемые в последнем выражении строго меньше $P^{p^n}Z_k^{n+1}$. □

Лемма 2.5. *Произведение $Z_{k-1}^n Z_k^n$ в алгебре $\overline{\mathcal{A}}_p$ может быть записано в виде линейной комбинации $<_R$-меньших мономов.*

Доказательство. По лемме 2.2

$$Z_k^n \equiv P^{p^n+\ldots+p^k} + L_R(P^{p^{n-1}}),\quad Z_{k-1}^n \equiv P^{p^n+\ldots+p^k+p^{k-1}} + L_R(P^{p^{n-1}}).$$

Для удобства положим $a = p^n + \ldots + p^k + p^{k-1}$ и $b = p^n + \ldots + p^k$. Тогда

$$Z_{k-1}^n Z_k^n = (P^a + L_R(P^{p^{n-1}}))Z_k^n = P^a Z_k^n + L_R(P^{p^{n-1}})Z_k^n =$$
$$= P^a P^b + L_R(P^{p^{n-1}}) + L_R(P^{p^{n-1}})Z_k^n = P^a P^b + L_R(Z_{k-1}^n Z_k^n). \quad (2.9)$$

Аналогичным образом получаем (нужна небольшая аккуратность, чтобы получить такую же оценку на R-меньшие слагаемые)

$$Z_k^n Z_{k-1}^n = P^b P^a + L_R(Z_{k-1}^n Z_k^n). \quad (2.10)$$

К произведениям P^aP^b и P^bP^a применимы соотношения Адема (A.4):

$$P^aP^b = (-1)^a\binom{b(p-1)-1}{a}P^{a+b} + L_R(P^{p^n-1}),$$
$$P^bP^a = (-1)^b\binom{a(p-1)-1}{b}P^{a+b} + L_R(P^{p^n-1}).$$

С помощью леммы A.1 легко проверить, что оба биномиальных коэффициента $\binom{b(p-1)-1}{a}$ и $\binom{a(p-1)-1}{b}$ отличны от 0, следовательно,

$$P^aP^b = \varepsilon P^bP^a + L_R(P^{p^n-1}),$$

где $0 \neq \varepsilon \in \mathbb{Z}/p$. Отсюда и из формул (2.9), (2.10) получаем

$$Z_{k-1}^n Z_k^n = \varepsilon' Z_k^n Z_{k-1}^n + L_R(Z_{k-1}^n Z_k^n),$$

где $0 \neq \varepsilon' \in \mathbb{Z}/p$. □

Лемма 2.6. *Произведение $(Z_k^n)^p$ в алгебре $\overline{\mathcal{A}}_p$ может быть выражено в виде линейной комбинации $<_R$-меньших мономов.*

Доказательство. Из леммы 2.2 получаем

$$Z_k^n \equiv P^{p^n+\ldots+p^k} + L_R(Z_k^n).$$

Предположим по индукции, что

$$(Z_k^n)^j \equiv (P^{p^n+\ldots+p^k})^j + L_R((Z_k^n)^j).$$

Тогда

$$\begin{aligned}(Z_k^n)^{j+1} &\equiv \left((P^{p^n+\ldots+p^k})^j + L_R((Z_k^n)^j)\right) Z_k^n \equiv (P^{p^n+\ldots+p^k})^j Z_k^n + L_R((Z_k^n)^{j+1}) \equiv \\ &\equiv (P^{p^n+\ldots+p^k})^j (P^{p^n+\ldots+p^k} + L_R(P^{p^{n-1}})) + L_R((Z_k^n)^{j+1}) \equiv \\ &\equiv (P^{p^n+\ldots+p^k})^{j+1} + L_R(P^{p^{n-1}}) + L_R((Z_k^n)^{j+1}) \equiv (P^{p^n+\ldots+p^k})^{j+1} + L_R((Z_k^n)^{j+1}).\end{aligned}$$

Для завершения доказательства применим индукцию по j и следующую лемму 2.7. □

Лемма 2.7. *В алгебре $\mathcal{A}_p$ выполнено соотношение*

$$P^{p^n+\ldots+p^k} P^{a(p^n+\ldots+p^k)} \equiv (a+1) P^{(a+1)(p^n+\ldots+p^k)} + L_R(P^{p^{n-1}+\ldots+p^{k-1}+1}).$$

В частности, для $a = p-1$ имеем $P^{p^n+\ldots+p^k} P^{a(p^n+\ldots+p^k)} \equiv L_R(P^{p^{n-1}+\ldots+p^{k-1}+1})$.

Доказательство. Ключевым моментом доказательства является вычисление биномиального коэффициента B первого члена в соотношении Адема (A.4)

$$P^{p^n+\ldots+p^k} P^{a(p^n+\ldots+p^k)} = (-1)^{p^n+\ldots+p^k} B \cdot P^{(a+1)(p^n+\ldots+p^k)} + L_R(P^{p^{n-1}+\ldots+p^{k-1}+1}).$$

По лемме A.1

$$\begin{aligned}B &= \binom{(p-1)a(p^n+\ldots+p^k)-1}{p^n+\ldots+p^k} = \binom{ap^{n+1}-ap^k-1}{p^n+\ldots+p^k} = \\ &= \binom{a-1}{0} \underbrace{\binom{p-1}{1}}_{n\text{-я цифра}} \cdots \binom{p-1}{1} \underbrace{\binom{p-1-a}{1}}_{k\text{-я цифра}} \binom{p-1}{0} \cdots \binom{p-1}{0} = \\ &= (p-1)^{n-k}(p-1-a) = (-1)^{n-k+1}(a+1) \pmod p.\end{aligned}$$

□

Теперь докажем теорему 2.2. Достаточно показать, как моном, не являющийся X-мономом редуцировать относительно $<_L$-порядка. Сопряжение $\chi : \overline{\mathcal{A}}_p \to \overline{\mathcal{A}}_p$ является антиавтоморфизмом и удовлетворяет $\chi(P^k) \equiv P^k + E$, где «ошибка» E — линейная комбинация мономов от P^j, $0 < j < k$. Следовательно, если подставить E вместо P^k в любой моном, результат уменьшится как в R-порядке, так и в L-порядке. Тогда к моному A от элементов P^{p^j}, который не является X-мономом, применим антипод χ, представим результат в виде линейной комбинации Z-мономов и снова применим χ. В результате получим элемент $B \in \overline{\mathcal{A}}_p$, который имеет вид $L_L(A)$. Теорема 2.2 доказана. □

2.1.2 Модифицированные Z-базис и X-базис для алгебры $\overline{\mathcal{A}}_p$

В этом разделе мы построим важные модификации Z-базиса и X-базиса.

Начнем с обсуждения Z-мономов. Некоторые из них содержат подпроизведения вида $(Z_k^n)^r$, $1 < r < p$. Оказывается, что некоторые перестановки сомножителей P^{p^j} в $(Z_k^n)^r$ сохраняют линейную независимость мономов, в то время как другие приводят к линейной зависимости модифицированных Z-мономов.

Рассмотрим перестановку τ символов P^{p^j} в произведении $(Z_k^n)^r$, которая фиксирует последний член P^{p^n}. Обозначим результат как $\tau((Z_k^n)^r)$. Определим $\alpha_{(l),j}$, $l = 1, \dots, (n-k+1)r$, $j = k, \dots, n$, как количество P^{p^j} в l правых членах произведения $\tau((Z_k^n)^r)$. Будем называть перестановку τ (фиксирующую самый правый P^{p^n}) *Z-допустимой*, а произведение $\tau((Z_k^n)^r)$ *допустимой* или *Z-допустимым*, если последовательность $\alpha_{(l)} = (\alpha_{(l),k}, \dots, \alpha_{(l),n})$ возрастает (не обязательно строго) для каждого l, и *не Z-допустимой* в противном случае.

Пример: последовательность $(P^{p^k})^r (P^{p^{k+1}})^r \dots (P^{p^n})^r$ является Z-допустимой, а последовательность $P^{p^2} P^{p^2} P^{p^4} P^{p^3} P^{p^3} P^{p^4}$ не является.

Лемма 2.8. *Предположим, что самый правый член произведения $\tau((Z_k^n)^r)$, $1 \leqslant r < p$, — элемент P^{p^n}. Тогда в алгебре $\overline{\mathcal{A}}_p$ выполняется равенство*

$$\tau((Z_k^n)^r) \equiv c\, P^{r(p^k + \dots + p^n)} + \overline{L}_R((P^{p^n})^{r(n-k+1)-1} P^{p^{n-1}}),$$

где $c = 0$ для не Z-допустимой перестановки τ и $c \neq 0$ для Z-допустимой перестановки τ.

Доказательство. Обозначим через Q_l произведение l правых символов в выражении $\tau((Z_k^n)^r)$. Докажем по индукции, что

$$Q_l = c_l P^{\alpha_{(l),k} p^k + \dots + \alpha_{(l),n} p^n} + \overline{L}_R((P^{p^n})^{l-1} P^{p^{n-1}}), \tag{2.11}$$

где c_l равен с точностью до знака произведению некоторых биномиальных коэффициентов, которые мы обсудим позже. Для $l = 1$ равенство (2.11) очевидно.

Пусть $(l+1)$-й символ — элемент P^{p^j}. Тогда

$$Q_{l+1} = P^{p^j} Q_l = c_l P^{p^j} P^{\alpha_{(l),n}p^n+\ldots+\alpha_{(l),k}p^k} + P^{p^j}\,\overline{L}_R((P^{p^n})^{l-1}P^{p^{n-1}}) = \\ = -b_l c_l P^{p^j+\alpha_{(l),n}p^n+\ldots+\alpha_{(l),k}p^k} + \overline{L}_R((P^{p^n})^l P^{p^{n-1}}),$$

где $b_l = \binom{(\alpha_{(l),n}p^n+\ldots+\alpha_{(l),k}p^k)(p-1)-1}{p^j}$. Следовательно, (2.11) выполняется для всех l. Также имеем $c_1 = 1$ и $c_{l+1} = -b_l c_l$. Таким образом, нам осталось доказать, что $b_l \neq 0$ для всех l, если τ является Z-допустимой, и что для недопустимой τ существует l, для которого $b_l = 0$.

Рассмотрим первый случай. Зафиксируем некоторое l. Так как $\alpha_{(l)}$ возрастает, имеем $\alpha_{(l),i} \leqslant \alpha_{(l),i+1}$ для всех $i = k, \ldots, n-1$. Заметим также, что $\alpha_{(l),j} + 1 = \alpha_{(l+1),j} \leqslant r \leqslant p-1$, следовательно, $\alpha_{(l),j} < p-1$. Для простоты будем писать α_i вместо $\alpha_{(l),i}$. Тогда имеем p-адическое разложение

$$A = (\alpha_n p^n + \ldots + \alpha_k p^k)(p-1) - 1 = \\ = (\alpha_n - 1)p^{n+1} + (p - 1 + \alpha_{n-1} - \alpha_n)p^n + \ldots + (p - 1 + \alpha_{j-1} - \alpha_j)p^j + \ldots + \\ + (p - 1 + \alpha_k - \alpha_{k+1})p^{k+1} + (p - 1 - \alpha_k)p^k + (p-1)p^{k-1} + \ldots + (p-1). \quad (2.12)$$

Следовательно, $b_l = \binom{A}{p^j} = \binom{p-1+\alpha_{j-1}-\alpha_j}{1} \neq 0$.

Рассмотрим второй случай. Выберем максимальное l, для которого последовательность $\alpha_{(l)}$ не возрастает. Так как $\alpha_{(l+1)}$ возрастает, имеем $\alpha_n \geqslant \ldots \geqslant \alpha_{j+1} > \alpha_j$, $\alpha_j = \alpha_{j-1} - 1$, $\alpha_{j-1} \geqslant \ldots \geqslant \alpha_k$. Из этого следует, что (2.12) больше не является p-адическим разложением A, так как коэффициент при p^j равен $p - 1 + \alpha_{j-1} - \alpha_j = p$. Модифицируя два слагаемых в (2.12), получаем p-адическое разложение $A = \ldots (p - 1 + \alpha_j - \alpha_{j+1} + 1)p^{j+1} + 0\,p^j + \ldots$, следовательно, $b_l = \binom{A}{1} = 0$. □

Теорема 2.3. *Модифицируем некоторые элементы в Z-базисе, заменяя некоторые подслова вида $(Z_k^n)^r$ на слова $\tau((Z_k^n)^r)$. Можно оставить некоторые подслова неизменными, а также использовать различные перестановки. Новый набор модифицированных Z-мономов является базисом алгебры $\overline{\mathcal{A}}_p$ тогда и только тогда, когда все использованные перестановки τ являются Z-допустимыми.*

Доказательство. Любой элемент вида $\overline{L}_R((P^{p^n})^{r(n-k+1)-1}P^{p^{n-1}}))$ является $L_R((Z_k^n)^r)$. Поэтому, выражая модифицированные Z-мономы заданной степени через Z-базис, мы получаем матрицу C, которая является треугольной относительно R-порядка. Из лемм 2.8, 2.2 и 2.7 следует, что матрица C невырождена, если все τ являются Z-допустимыми, и вырождена в противном случае. □

Следствие 2.1. *Заменив в некоторых Z-мономах некоторые произведения $(Z_k^n)^r$ на $(P^{p^k})^r \dots (P^{p^n})^r$, получим базис алгебры $\overline{\mathcal{A}}_p$.* □

Опишем модификацию предыдущей конструкции для случая X-мономов. Заметим, что X-моном является зеркальным отражением некоторого Z-монома. Определяем перестановку τ символов P^{p^j} в произведении $(X_k^n)^r$ как X-допустимую, если зеркальное отражение $\tau(X_k^n)^r$ является Z-допустимым. Применяя те же аргументы, которые мы использовали для вывода теоремы 2.2 из теоремы 2.1, получаем следующие утверждения.

Теорема 2.4. *Модифицируем некоторые элементы в X-базисе, заменяя некоторые подслова вида $(Z_k^n)^r$ на $\tau((X_k^n)^r)$. Можно оставить некоторые подслова неизменными, а также использовать различные перестановки. Полученный набор модифицированных X-мономов является базисом алгебры $\overline{\mathcal{A}}_p$ тогда и только тогда, когда все использованные перестановки τ являются X-допустимыми.* □

Следствие 2.2. *Заменив в некоторых X-мономах некоторые произведения $(X_k^n)^r$ на $(P^{p^n})^r \dots (P^{p^k})^r$, получим базис алгебры $\overline{\mathcal{A}}_p$.* □

2.1.3 Семейство P_s^t-базисов

Напомним, что в алгебре $\overline{\mathcal{A}}_p$ имеются элементы $P_t^s = P(0, \dots, 0, p^s, 0, \dots)$, где p^s стоит на месте с номером t, $\deg P_t^s = 2p^s(p^t - 1)$. Назовём P_t^s-мономом произведение вида $(P_{t_1}^{s_1})^{m_1} \dots (P_{t_k}^{s_k})^{m_k}$, где все $P_{t_j}^{s_j}$ попарно различны и $0 < m_j < p$. В каждом конечном наборе троек целых чисел $\{(s_j, t_j, m_j) : j = 1, \dots, k, 0 < m_j < p, s_j \geqslant 0, t_j > 0\}$ зафиксируем линейный порядок и именно в этом порядке будем перемножать $(P_{t_j}^{s_j})^{m_j}$. Дж. Палмьери и Дж. Жанг доказали в [128], что при любых таких фиксированных линейных порядках множество B_P полученных произведений образует базис алгебры $\overline{\mathcal{A}}_p$. Заметим, что таких базисов бесконечно много, поскольку в каждом P_t^s-мономе порядок атомарных сомножителей $(P_{t_j}^{s_j})^{m_j}$, хоть и фиксирован, однако может быть выбран произвольным образом. В главе 3 в разделе 3.1.3 мы дадим новое доказательство этой теоремы Палмьери–Жанга и заодно докажем, что каждый такой базис треуголен по отношению к базису Милнора. Все соответствующие определения и подробности приведены в главе 3. Базис вида B_P принято называть *P_s^t-базисом*.

2.1.4 Коммутаторные базисы

Дж. Палмьери и Дж. Жанг в работе [128] построили семейства базисов в алгебрах $\mathcal{A}_p$, $p \geqslant 2$, состоящих из итерированных коммутаторов. Случай $p = 2$ описан ранее на стр. 35.

Для $p > 2$ определим элементы $c_{s,t}$ алгебры $\mathcal{A}_p$ по индукции:

(i) для каждого целого $s \geqslant 0$, положим $c_{s,1} = P^{p^s}$;

(*ii*) для каждого целого $t \geqslant 2$ определим по индукции $c_{s,t} = [P^{p^{s+t-1}}, c_{s,t-1}]$.
Степень элемента равна $|c_{s,t}| = 2p^s(p^t - 1)$. Такой элемент $c_{s,t}$ называется итерированным коммутатором длины t. Элемент $Q_i \in \mathcal{A}_p$ может рассматриваться как коммутатор длины $i + 1$.

Те же элементы могут быть записаны (проиндексированы) другим способом. А именно, положим $s_i = P^i$. Затем по индукции определим:

(*i*) $s_{i,j} = [s_i, s_j]$;

(*ii*) $s_{i_1,i_2,\ldots,i_n} = [s_{i_1}, s_{i_2,\ldots,i_n}]$.

Степень элемента $s_{i_1,i_2,\ldots,i_n}$ равна $|s_{i_1,i_2,\ldots,i_n}| = 2p^s(i_1 + i_2 + \ldots + i_n)$.

Теорема 2.5 (см. [128]). *Пусть $p > 2$ — простое. Выберем произвольный линейный порядок $\prec$ на множестве $\{c_{s,t} \in \mathcal{A}_p \ : \ s \geqslant 0, t \geqslant 1\}$ итерированных коммутаторов. Тогда*

(*a*) *произведения вида*

$$Q_{i_1} Q_{i_2} \ldots Q_{i_m} c_{s_1,t_1}^{r_1} c_{s_2,t_2}^{r_2} \ldots c_{s_n,t_n}^{r_n},$$

где $t_1 < t_2 < \ldots < t_m$, $c_{s_1,t_1} \prec c_{s_2,t_2} \prec \ldots \prec c_{s_n,t_n}$ и $1 \leqslant r_j \leqslant p-1$ для всех $1 \leqslant j \leqslant n$, образуют аддитивный базис алгебры $\mathcal{A}_p$;

(*b*) *произведения вида*

$$c_{s_1,t_1}^{r_1} c_{s_2,t_2}^{r_2} \ldots c_{s_n,t_n}^{r_n},$$

где $c_{s_1,t_1} \prec c_{s_2,t_2} \prec \ldots \prec c_{s_n,t_n}$ и $1 \leqslant r_j \leqslant p-1$ для всех $1 \leqslant j \leqslant n$, образуют аддитивный базис алгебры $\overline{\mathcal{A}}_p$.

Палмьери и Жанг в работе [128] доказали, что при любом выборе линейных порядков на конечных множествах пар индексов (1.18) соответствующий набор итерированных коммутаторов $B_c \subset \mathcal{A}_p$ образует базис алгебры $\mathcal{A}_p$, треугольный по отношению к соответствующему набору $B_P \subset \mathcal{A}_p$. Подробности можно найти в [128].

2.1.5 Замечание о базисах Вуда

Обобщения базисов Вуда на случай алгебр $\overline{\mathcal{A}}_p$, $p > 2$, были получены в работах [200] и [11].

Из формулы (1.14) следует, что мономы, составленные из $\overline{Z}_k^n = Sq^{2^{n+1}-2^k}$ по тем же правилам, по которым из элементов Z_k^n составлены Z-мономы (см. определение 1.2), образуют базис $\mathcal{A}_2$. При этом $\overline{Z}$-базис треугольн по отношению к Z-базису — этот базис является аналогом базиса Вуда WZ. Подробности см. в подразделе 3.1.1 на странице 78.

Аналог базиса WY описывается следующим образом. Элементы вида $P^{p^k(p^m-1)}$ назовем атомарными. Положим $\bar{Z}_k^n = P^{p^k+p^{k+1}+\ldots+p^n}$.

Определение 2.4. Назовём *WY-мономом* произведение $\bar{Z}_{k_0}^{n_0}\bar{Z}_{k_1}^{n_1}\dots\bar{Z}_{k_r}^{n_r}$, где последовательность пар индексов $I = ((k_0, n_0), \dots, (k_r, n_r))$ удовлетворяет следующим условиям:

1) $(k_r, n_r) \leqslant_L \dots \leqslant_L (k_1, n_1) \leqslant_L (k_0, n_0)$;

2) если в последовательности I есть подпоследовательность одинаковых пар,

$$(k_t, n_t) \leqslant_L (k_{t+1}, n_{t+1}) = \dots = (k_{t+s}, n_{t+s}) \leqslant_L (k_{t+s+1}, n_{t+s+1}),$$

то $s < p$ для любой такой подпоследовательности.

Теорема 2.6 (Емельянов [200])**.** *Множество WY-мономов образует базис алгебры* $\overline{\mathcal{A}}_p$, $p > 2$.

2.2 Алгебры $\mathcal{A}_p$, $p > 2$

В этом разделе мы рассмотрим алгебру Стинрода $\mathcal{A}_p$, $p > 2$, т. е. включим в рассмотрение элемент Бокштейна β. Мы построим базисы βX, βZ, βC, ZA и XC. Для всех них, исключая βC, будет доказана экстремальность по отношению к подходящему порядку. Порядок, относительно которого βC-базиса экстремален, неизвестен. Некоторые естественные гипотезы о возможных порядках опровергаются в конце этого раздела — приводятся соответствующие контрпримеры.

Есть два способа расширить левый (правый) лексикографический порядки на мономах от приведенных степеней P^j до порядка на мономах от приведенных степеней и элементов Бокштейна β. Эти порядки мы будем обозначать через εL и IL (εR и IR, соответственно), определения см. ниже. Допустимые мономы являются εL-максимальными. Будет показано, что βZ- и βX-базисы минимальны относительно IR- и IL-порядков, соответственно (см. теоремы 2.7 и 2.8). Кроме того, будет показано, что ZA- и XC-базисы максимальны относительно тех же порядков (см. теоремы 2.10 и 2.11).

Напомним, через $L_R(a)$ ($L_L(a)$) мы обозначаем линейную комбинацию мономов, которые строго меньше a в R-порядке (соответственно, в L-порядке). Через $\overline{L}_R(b)$ ($\overline{L}_L(b)$) мы обозначаем линейную комбинацию мономов, которые меньше или равны b в R-порядке (соответственно, в L-порядке).

В этом разделе мы обозначаем равенство в свободной алгебре, порожденной β и P^j, $j > 0$, через $=$, а равенство в $\mathcal{A}_p$ или $\overline{\mathcal{A}}_p$ (то есть равенство по модулю соотношений Адема (A.4) и (A.5)) через $\equiv$.

2.2.1 βZ- и βX-базисы для алгебр $\mathcal{A}_p$

Нам нужно продолжить порядки $<_R$ и $<_L$ с мономов в алгебре $\overline{\mathcal{A}}_p$ на мономы в алгебре $\mathcal{A}_p$, содержащие элемент Бокштейна β. Для этого имеются два разных

способа, приводящие к важным результатам.

Для последовательности $J = (\varepsilon_{r+1}, j_r, \varepsilon_r, j_{r-1}, \ldots, \varepsilon_1, j_0, \varepsilon_0)$, где $\varepsilon_k = 0$ или 1 для $k = 0, \ldots, r+1$, и $j_k > 0$ для $k = 0, \ldots, r$, рассмотрим моном

$$P^J = \beta^{\varepsilon_{r+1}} P^{j_r} \beta^{\varepsilon_r} P^{j_{r-1}} \ldots \beta^{\varepsilon_1} P^{j_0} \beta^{\varepsilon_0}.$$

Моном β соответствует одноэлементной последовательности (1) с $r = -1$.

Определение 2.5. Пусть $P^J <_{\varepsilon R} P^I$ тогда и только тогда, когда $J <_R I$ в смысле определения 1.1, расширенного так, чтобы учитывать случаи, когда некоторые ε_k равны 0. Пусть $P^J <_{\varepsilon L} P^I$ тогда и только тогда, когда $J <_L I$ в смысле определения 1.1, расширенного аналогичным образом.

Теперь определим порядок IL на мономах в алгебре Стинрода $\mathcal{A}_p$. Произвольный моном в алгебре $\mathcal{A}_p$ единственным образом представляется в виде $P^{I_0}\beta P^{I_1} \ldots P^{I_{k-1}}\beta P^{I_k}$, где I_m — мультииндекс, $0 \leqslant m \leqslant k$, причем все P^{I_m} не содержат β, и одна или обе последовательности I_0, I_k могут быть пустыми; рассмотрим соответствующую последовательность мультииндексов $(I_0, I_1, \ldots, I_k)$.

Определение 2.6. Определим *левый* лексикографический порядок на последовательностях мультииндексов следующим образом: $I <_{IL} J$ для $I = (I_0, \ldots, I_n)$ и $J = (J_0, \ldots, J_m)$ если выполняется одно из следующих условий:

- I пуста, а J нет,
- $I_0, J_0 \neq \varnothing$ и $\deg I_0 < \deg J_0$,
- $\deg I_0 = \deg J_0$ и $I_0 <_L J_0$ в смысле определения 1.1,
- $I_0 = J_0$ и $(I_1, \ldots, I_n) <_{IL} (J_1, \ldots, J_m)$.

Правый лексикографический порядок $<_{IR}$ определяется аналогично.

Порядки $<_{\varepsilon L}$ и $<_{IL}$ совпадают с $<_L$ на мономах фиксированной степени в алгебре $\overline{\mathcal{A}}_p$. То же самое верно для порядков $<_{\varepsilon R}$, $<_{IR}$ и $<_R$. Следовательно, результаты из предыдущего раздела 2.1 справедливы для порядков $\varepsilon R, IR, R, \varepsilon L, IL, L$, так как в рассуждениях сравнивались только мономы одинаковых степеней.

Анализ стандартной процедуры редукции произвольного элемента алгебры $\mathcal{A}_p$ к сумме допустимых мономов, состоящей в применении (возможно, несколько раз) соотношений Адема (A.4) и (A.5), показывает, что допустимые мономы в алгебре $\mathcal{A}_p$ максимальны относительно εL-порядка.

Определение 2.7. Определим *βZ-моном* как моном от символов P^{p^j} и β вида

$$Z\beta Z_0^{m_r}\beta Z_0^{m_{r-1}} \cdots \beta Z_0^{m_1}\beta^{\varepsilon}$$

где Z — некоторый Z-моном или 1, и $m_r > m_{r-1} > \ldots > m_1,$ и $\varepsilon = 0, 1$.

Определение 2.8. Определим *βX-моном* как моном от символов P^{p^j} и β вида

$$\beta^\varepsilon X_0^{m_1} \cdots \beta X_0^{m_{r-1}} \beta X_0^{m_r} \beta X$$

где X — некоторый X-моном или 1, и $m_r > m_{r-1} > \ldots > m_1,$ и $\varepsilon = 0, 1$.

Наши основные результаты в этом разделе — следующие два утверждения.

Теорема 2.7.

(*a*) *Множество всех βZ-мономов образует аддитивный базис алгебры Стинрода $\mathcal{A}_p$.*

(*b*) *βZ-мономы минимальны относительно IR-порядка.*

Теорема 2.8.

(*a*) *Множество всех βX-мономов образует аддитивный базис алгебры Стинрода $\mathcal{A}_p$.*

(*b*) *βX-мономы минимальны относительно IL-порядка.*

Доказательство. Сначала покажем, что количество βZ-мономов фиксированной степени равно размерности подпространства элементов той же степени алгебры $\mathcal{A}_p$. Аналогичное утверждение верно для βX-мономов.

Напомним, что $(\mathcal{A}_p)_* = \mathbb{Z}/p[\xi_1, \xi_2, \ldots] \otimes \Lambda(\tau_0, \tau_1, \ldots)$, где $\deg \xi_k = 2p^k - 2$ и $\deg \tau_k = 2p^k - 1$. Установим взаимно однозначное соответствие между множеством всех βZ-мономов заданной степени N и множеством всех мономов от элементов ξ_k и τ_k той же степени. Определим соответствие, сопоставляя элемент $\xi_{n_1-k_1+1}^{p^{k_1}} \cdots \xi_{n_r-k_r+1}^{p^{k_r}} \tau_{m_r+1} \ldots \tau_{m_1+1} \tau_0^\varepsilon \in (\mathcal{A}_p)_*$ элементу $Z_{k_1}^{n_1} \cdots Z_{k_r}^{n_r} \beta Z_0^{m_r} \cdots \beta Z_0^{m_1} \beta^\varepsilon \in \mathcal{A}_p$. Это соответствие сохраняет степень.

Чтобы установить обратное соответствие, заметим, что порядок членов $Z_{k_j}^{n_j}$, $\beta Z_0^{m_j}$ и β^ε в βZ-мономе определен однозначно. Следовательно, βZ-моном полностью описывается набором своих сомножителей вида $Z_{k_j}^{n_j}$, $\beta Z_0^{m_j}$ и β^ε. Рассмотрим элемент $a = \xi_{i_1}^{m_1} \ldots \xi_{i_k}^{m_k} \tau_{s_0} \ldots \tau_{s_l} \in (\mathcal{A}_p)_*$. Если a содержит τ_0, мы добавляем элемент β в набор множителей. Для любого множителя τ_m $(m \geqslant 1)$ элемента a мы добавляем элемент βZ_0^{m-1} в набор множителей. Для множителя ξ_i^m элемента a рассмотрим p-адическое разложение $m = \sum \alpha_j p^j$, $0 \leqslant \alpha_j < p$. Тогда для любого $\xi_i^{\alpha_j p^j}$ мы добавляем элемент $(Z_j^{i+j-1})^{\alpha_j}$ в набор.

Теперь для доказательства теоремы 2.7 будем действовать следующим образом. Для любого монома в алгебре $\mathcal{A}_p$, который не является βZ-мономом, покажем, как свести его к линейной комбинации меньших мономов относительно IR-порядка. Прежде всего заметим, что переразложение любого P^{I_r} в произведении $P^{I_0} \beta P^{I_1} \ldots P^{I_{k-1}} \beta P^{I_k}$ в виде линейной комбинации Z-мономов уменьшает произведение в IR-порядке. Следовательно, достаточно рассмотреть элемент $Z_0 \beta Z_1 \beta Z_2 \beta \ldots \beta Z_k$, где Z_j — Z-моном для

любого j. Такое произведение не является βZ-мономом тогда и только тогда, когда оно содержит в качестве подпроизведения одно из следующих выражений:

(i) βP^{p^i}, $i > 0$,

(ii) $\beta Z_0^k P^{p^i}$, $0 \leqslant i \leqslant k-1$,

(iii) $\beta Z_0^j \beta Z_0^k$, $j \leqslant k$.

В леммах 2.9, 2.11 и 2.12 мы покажем, как свести эти выражения к линейным комбинациям мономов, строго меньших исходного в IR-порядке. □

Лемма 2.9. *В алгебре Стинрода $\mathcal{A}_p$ выполняется равенство*

$$(1-t)\beta P^t \equiv -P^1 \beta P^{t-1} + P^t \beta.$$

Доказательство. Применим соотношение Адема к произведению $P^1 \beta P^{t-1}$. □

Для случая (i) применим лемму 2.9 для $t = p^i$, где $i > 0$. Так как $p^i - 1 \equiv -1 \not\equiv 0 \bmod p$, то $\beta P^{p^i} \equiv -P^1 \beta P^{p^i-1} + P^{p^i}\beta$, что IR-меньше, чем βP^{p^i}.

Переформулируем лемму 2.2:

Лемма 2.10. *Для любых неотрицательных целых чисел $n \geqslant k$ выполняется соотношение*

$$Z_k^n \equiv P^{p^n+\ldots+p^k} + L_{IR}(P^{p^n-1}). \tag{2.13}$$

Лемма 2.11. *Произведение $\beta Z_0^k P^{p^i}$, где $0 \leqslant i \leqslant k-1$, может быть сведено к меньшим членам в IR-порядке.*

Доказательство. По лемме 2.10 имеет место равенство

$$\beta Z_0^k P^{p^i} \equiv \beta(P^{p^0+\ldots+p^k} + L_{IR}(P^{p^k-1}))P^{p^i},$$

следовательно, нам остается редуцировать только произведение $\beta P^{p^0+\ldots+p^k} P^{p^i}$.

Рассмотрим случай $i = 0$. Применяя соотношение Адема (A.4), получаем

$$P^{p^1} P^{2p^0+p^2+\ldots+p^k} \equiv -P^{2p^0+p^1+p^2+\ldots+p^k} + P^{p^0+p^1+\ldots+p^k} P^{p^0}.$$

Следовательно,

$$\beta P^{p^0+\ldots+p^k} P^{p^0} \equiv \beta P^{p^1} P^{2p^0+p^2+\ldots+p^k} + \beta P^{2p^0+p^1+p^2+\ldots+p^k}.$$

Оба слагаемых в правой части могут быть преобразованы по лемме 2.9:

$$\beta P^{p^p} \equiv -P^1 \beta P^{p^p-1} + P^{p^p}\beta,$$
$$\beta P^{2p^0+p^1+p^2+\ldots+p^k} \equiv -P^1 \beta P^{p^0+p^1+p^2+\ldots+p^k} + P^{2p^0+p^1+p^2+\ldots+p^k}\beta.$$

Рассмотрим случай $i > 0$. Из соотношения Адема (A.4) имеем

$$P^{p^{i+1}} P^{p^0+\ldots+2p^i+p^{i+2}+\ldots+p^k} \equiv -P^{p^0+\ldots+2p^i+p^{i+1}+\ldots+p^k} + P^{p^0+\ldots+p^k} P^{p^i} + A,$$
$$P^{p^i} P^{p^0+\ldots+p^k} \equiv P^{p^0+\ldots+2p^i+p^{i+1}+\ldots+p^k} + B,$$

где $A = L_{IR}(P^{p^i})$ и B — сумма членов, не больших $P^{p^{i-1}}$ в IR-порядке (следовательно, B также имеет вид $L_{IR}(P^{p^i})$). Отсюда следует, что

$$\beta P^{p^0+\ldots+p^k} P^{p^i} \equiv \beta P^{p^{i+1}} P^{p^0+\ldots+2p^i+p^{i+2}+\ldots+p^k} + \beta P^{p^i} P^{p^0+\ldots+p^k} + \beta L_{IR}(P^{p^i}).$$

Теперь первые два слагаемых в правой части могут быть редуцированы по лемме 2.9. □

Лемма 2.12. *Элемент $\beta Z_0^j \beta Z_0^k$ алгебры $\mathcal{A}_p$ при $j \leqslant k$ может быть записан в виде линейной комбинации элементов, меньших в IR-порядке.*

Доказательство. По лемме 2.10

$$Z_0^j \equiv P^{p^0+\ldots+p^j} + L_{IR}(P^{p^{j-1}})$$

и

$$Z_0^k \equiv P^{p^0+\ldots+p^k} + L_{IR}(P^{p^{k-1}}).$$

Следовательно, для доказательства утверждения нам нужно свести произведение

$$\beta P^{p^0+\ldots+p^j} \beta P^{p^0+\ldots+p^k} \tag{2.14}$$

к IR-меньшим членам. Так как $j \leqslant k$, можно применить соотношение Адема (A.5):

$$\beta P^{p^0+\ldots+p^j} \beta P^{p^0+\ldots+p^k} \equiv \beta\beta \sum \text{sign} \cdot \text{coefficient} \cdot P^\mu P^\nu + \\ + \beta \sum_{b=0}^{p^0+\ldots+p^{j-1}} \text{sign} \cdot \text{coefficient} \cdot P^{2p^0+\ldots+2p^j+p^{j+1}+\ldots+p^k-b} \beta P^b. \tag{2.15}$$

Первая сумма не дает вклад, так как $\beta^2 = 0$, а во второй сумме последний член P^b имеет степень меньше, чем Z_0^k. Следовательно, (2.15) дает редукцию (2.14) к IR-меньшим членам. Доказательство теоремы 2.7 завершено. □

Доказательство теоремы 2.8. Заметим, что сопряжение $\chi : \mathcal{A}_p \to \mathcal{A}_p$ является антиавтоморфизмом и удовлетворяет $\chi(\beta) = \beta$ и $\chi(P^k) \equiv P^k + E$, где «поправочный член» E — это линейная комбинация меньших мономов от P^j. Если подставить E вместо P^k в любой моном, то результат будет строго меньше как в IR-, так и в IL-порядке.

Для монома $A \in \mathcal{A}_p$, который не является βX-мономом, редукция проводится следующим образом: применим антипод χ, разложим результат по базису βZ-мономов, снова применим χ, и получим элемент $B \in \mathcal{A}_p$, который имеет вид $L_{IL}(A)$. $\square$

Результаты раздела 2.1.2 переносятся на алгебры $\mathcal{A}_p$. А именно, верны следующие утверждения.

Теорема 2.9.

(*a*) *Модифицируем некоторые элементы βZ-базиса, заменяя некоторые подслова вида $(Z_k^n)^r$ в подслове Z на $\tau((Z_k^n)^r)$.*

(*b*) *Модифицируем некоторые элементы βX-базиса, заменяя некоторые подслова вида $(X_k^n)^r$ в подслове X на $\tau((X_k^n)^r)$.*

Можно оставить некоторые подслова неизменными, а также использовать различные перестановки.

В обоих случаях новый набор модифицированных мономов является базисом алгебры $\mathcal{A}_p$ тогда и только тогда, когда все использованные перестановки τ допустимы.

Доказательства точно такие же, как доказательства теорем 2.3, 2.4 и следствий 2.1, 2.2 из раздела 2.1.2.

2.2.2 IR- и IL-максимальные базисы

Положим $\hat{Z}^m = P^{p^m+\ldots+p^0}$.

Определение 2.9. Будем называть *ZA-моном* произвольный моном вида

$$P^I \beta \hat{Z}^{m_r} \beta \hat{Z}^{m_{r-1}} \beta \ldots \beta \hat{Z}^{m_1} \beta^{\varepsilon},$$

где P^I — допустимый моном от элементов P^j, $m_r > m_{r-1} > \ldots > m_1 \geqslant 0$, и $\varepsilon = 0, 1$.

Теорема 2.10.

(*a*) *Множество всех ZA-мономов образует аддитивный базис алгебры $\mathcal{A}_p$.*

(*b*) *ZA-мономы максимальны в IL-порядке.*

Доказательство основано на следующем утверждении, которое является более точной версией леммы 2.10 для $k = 0$.

Лемма 2.13. *Для любого $m \geqslant 0$ выполняется равенство $Z_0^m = \hat{Z}^m$.*

Доказательство. Проведем индукцию по m. Очевидно, $Z_0^0 = P^1 = \hat{Z}^0$.

Теперь докажем, что $\hat{Z}^m P^{p^{m+1}} = \hat{Z}^{m+1}$. Для простоты обозначим $M = p^0 + p^1 + \ldots + p^m$. По соотношению Адема

$$\hat{Z}^m P^{p^{m+1}} = \sum_{a=0}^{[M/p]} (-1)^{m+1+a} \binom{(p-1)(p^{m+1}-a)-1}{M-pa} P^{M+p^{m+1}-a} P^a.$$

Для $a = 0$ биномиальный коэффициент в этой сумме равен $(-1)^{m+1}$. Следовательно, нам осталось доказать, что биномиальные коэффициенты в сумме равны нулю для любого $a > 0$.

Зафиксируем некоторое $a > 0$. Для простоты определим $a_j = \alpha_j(a)$. Выберем наименьшее j, такое что $a_j \neq 0$.

Случай 1. Если $a_j = 1$, то $\alpha_j((p-1)(p^{m+1}-a)-1) = 0$ и $\alpha_j(M-pa) = 1$.

Случай 2.1. Теперь $a_{j+1} \geqslant a_j > 1$. Тогда $\alpha_j((p-1)(p^{m+1}-a)-1) = a_{j+1} - a_j$ и $\alpha_j(M-pa) = p+1-a_j$.

Случай 2.2. Предположим, что существует $k > j$, такой что $a_{k+1} = 0 < a_k \leqslant a_{k-1} \leqslant \ldots \leqslant a_{j+1} < a_j$. Тогда легко проверить, что $\alpha_{k+1}((p-1)(p^{m+1}-a)-1) = p-1-a_k$ и $\alpha_j(M-pa) = p-a_k$.

Случай 2.3. Предположим, что существует $k > j$, такой что $a_{k+1} > a_k \leqslant a_{k-1} \leqslant \ldots \leqslant a_{j+1} < a_j$. Тогда легко проверить, что $\alpha_{k+1}((p-1)(p^{m+1}-a)-1) = a_{k+1} - a_k - 1$ и $\alpha_j(M-pa) = p-a_k$.

Во всех случаях мы нашли p-адическую цифру числа $M-pa$, которая больше соответствующей p-адической цифры числа $(p-1)(p^{m+1}-a)-1$. Следовательно, по лемме A.1 рассматриваемый биномиальный коэффициент равен 0. □

Доказательство теоремы 2.10. (*a*) Пусть $Z\beta Z_0^{m_r}\beta Z_0^{m_{r-1}} \cdots \beta Z_0^{m_1}\beta^\varepsilon$ — некоторый βZ-моном. Перепишем сомножитель Z как линейную комбинацию допустимых мономов от символов P^j и заменим $Z_0^{m_k}$ на $\hat{Z}^{m_k}$ для всех k. Остальное очевидно.

(*b*) Покажем, как свести моном M, который не является ZA-мономом, к линейной комбинации мономов больших в IL-порядке.

Случай 1. Предположим, что $M = M_1\beta\hat{Z}^{m_r}\beta\hat{Z}^{m_{r-1}}\beta\ldots\beta\hat{Z}^{m_1}\beta^\varepsilon$, где M_1 не содержит β, $m_r > m_{r-1} > \ldots > m_1 \geqslant 0$, и $\varepsilon = 0, 1$ (этот случай включает $k = 0$). Для недопустимого M_1 рассмотрим разложение $M_1 = \sum \lambda_j N_j$, где $\lambda_j \in \mathbb{Z}/p$ и N_j допустимы для всех j. Тогда $M_1 <_L N_j$ для всех j, следовательно, для всех j

$$M_1\beta\hat{Z}^{m_r}\beta\hat{Z}^{m_{r-1}}\beta\ldots\beta\hat{Z}^{m_1}\beta^\varepsilon <_{IL} N_j\beta\hat{Z}^{m_r}\beta\hat{Z}^{m_{r-1}}\beta\ldots\beta\hat{Z}^{m_1}\beta^\varepsilon$$

Случай 2. Предположим, что $M = M_1\beta M_2\hat{Z}^{m_k}\beta\hat{Z}^{m_{k-1}}\beta\ldots\beta\hat{Z}^{m_1}\beta^\varepsilon$, где M_2 не является $\hat{Z}^m$ для некоторого m (это включает случаи $M_1 = 1$ или $k = 0$). Сведем βM_2

как сумму βZ-мономов и применим лемму 2.13:

$$\beta M_2 = \sum \lambda_j N_j \beta \hat{Z}^{n_j} + \sum \mu_i L_i \beta + \nu \beta \hat{Z}^m,$$

где все N_j и L_i нетривиальны. Заметим, что последнее слагаемое может появиться только если $\deg M_2 = 2(p^{m+1} - 1)$. Все члены в правой части IL-больше, чем βM_2, и это сводит M к линейной комбинации IL-больших мономов.

Осталось рассмотреть случай $k \geqslant 1$ и $M_2 = \hat{Z}^m$, где $m \leqslant m_k$. Произведение $\beta \hat{Z}^m \beta \hat{Z}^{m_k}$ уже рассматривалось в доказательстве леммы 2.12, а именно, уравнение (2.15) дает нам требуемую редукцию к IL-большим членам. □

Определение 2.10 (см. [86])**.** Определим *C-моном* как моном $P^{j_r} \dots P^{j_1} P^{j_0}$, где $j_k \leqslant pj_{k-1}$ и p^k делит j_k для всех $k \geqslant 1$.

В неопубликованном препринте [86] было показано, что множество всех C-мономов образует аддитивный базис алгебры $\overline{\mathcal{A}}_p$. Более того, C-мономы максимальны в R-порядке.

Определение 2.11. Определим *XC-моном* как моном вида

$$\beta^\varepsilon X_0^{m_1} \beta \dots \beta X_0^{m_{r-1}} \beta X_0^{m_r} \beta P^I,$$

где P^I — C-моном, $m_r > m_{r-1} > \dots > m_1 \geqslant 0$, и $\varepsilon = 0, 1$.

Теорема 2.11.

(*a*) *Множество всех XC-мономов образует базис алгебры $\mathcal{A}_p$.*

(*b*) *XC-мономы максимальны в IR-порядке.*

Доказательство. (*a*) Рассмотрим элемент $\beta^\varepsilon X_0^{m_1} \beta \cdots \beta X_0^{m_r} \beta X$ из βX-базиса, затем представим сомножитель X в виде линейной комбинации C-мономов. Утверждение следует из того, что существуют X-базис и C-базис алгебры $\overline{\mathcal{A}}_p$. Отметим, что в следующем подразделе мы дадим независимое доказательство теоремы 2.12, более общей, чем упомянутый результат неопубликованной работы [86]. Тем самым, наше доказательство теоремы 2.11 не зависит от [86].

(*b*) Покажем, как свести моном M, который не является XC-мономом, к линейной комбинации IR-больших мономов.

Случай 1. Предположим, что $M = \beta^\varepsilon X_0^{m_1} \beta \dots \beta X_0^{m_{r-1}} \beta X_0^{m_r} \beta M_1$, где $m_r > m_{r-1} > \dots > m_1 \geqslant 0$, $\varepsilon = 0, 1$ (это включает случай $r = 0$). Запишем $M_1 = \sum \lambda_j N_j$, где $\lambda_j \in \mathbb{Z}/p$ и N_j — C-мономы. Тогда $M_1 <_R N_j$ для всех j, следовательно, $M <_{IR} \beta^\varepsilon X_0^{m_1} \beta \dots \beta X_0^{m_{r-1}} \beta X_0^{m_r} \beta N_j$.

Случай 2. Предположим, что $M = \beta^\varepsilon X_0^{m_1} \beta \dots \beta X_0^{m_{k-1}} \beta X_0^{m_k} \beta M_2 \beta M_1$, где M_2 не является X_0^m для некоторого m (это включает случаи $M_1 = 1$ или $k = 0$). Представим

$M_2\beta$ как сумму βX-мономов:

$$M_2\beta = \sum \lambda_j X_0^{n_j} \beta N_j + \sum \mu_i \beta L_i + \nu X_0^m \beta,$$

где все N_j и L_i нетривиальны. Покажем, что $\nu = 0$. Действительно, легко проверить, что ни одно произведение вида $P^{p^{j+1}} P^{p^j}$ или $P^1\beta$ не может появиться в правой части соотношений Адема (A.4) и (A.5). Другие слагаемые в разложении $M_2\beta$ IR-больше, чем $M_2\beta$, и дают нам требуемую редукцию M.

Осталось рассмотреть случай $k \geqslant 1$ и $M_2 = X_0^m$, где $m \leqslant m_k$. Разложение $X_0^{m_k}\beta X_0^m\beta$ в βX-базисе имеет вид

$$\sum \lambda_j \beta X_0^{a_j} \beta C_j + \sum \mu_i X_0^{b_i} \beta X_0^{d_i} \beta D_i + \sum \nu_n X_0^{e_n} \beta X_0^{f_n} \beta + \rho \beta X_0^l \beta,$$

где все мономы C_j и D_i нетривиальны, $\lambda_j, \mu_i, \nu_n \in \mathbb{Z}/p$. Первые два слагаемых больше в IR-порядке, чем левая часть уравнения. Из соображений размерности коэффициент ν_n монома $X_0^{e_n}\beta X_0^{f_n}\beta$ может быть ненулевым только если $f_n = m < m_k = e_n$, что также дает слагаемое IR-большее, чем левая часть. Наконец, $\rho = 0$, так как $\deg X_0^{m_k} + \deg X_0^m = 2(p^{m_k+1} - 1) + 2(p^{m+1} - 1)$ не равно $2(p^{l+1} - 1)$ для целого l. □

2.2.3 βC-базис для алгебры $\mathcal{A}_p$

Определение 2.12. Определим *βC-моном* как элемент вида

$$P^J = \beta^{\varepsilon_{r+1}} P^{j_r} \beta^{\varepsilon_r} \dots \beta^{\varepsilon_1} P^{j_0} \beta^{\varepsilon_0},$$

где последовательность $J = (\varepsilon_{r+1}, j_r, \varepsilon_r, \dots, \varepsilon_1, j_0, \varepsilon_0)$ удовлетворяет двум условиям:

(1) $j_k \leqslant pj_{k-1} + \varepsilon_k$ для всех k,

(2) p^k делит $j_k - pj_{k-1} - \varepsilon_k$ для всех k.

Последовательность J, удовлетворяющая условиям (1) и (2), называется *βC-последовательностью.*

Условие (2) может быть заменено эквивалентным:

(2′) p^k делит $j_k - \sum_{l=0}^{k} p^{k-l}\varepsilon_l$ для всех k.

Очевидно, что βC-моном с $\varepsilon_k = 0$ для всех k является C-мономом.

Теорема 2.12. *Множество всех βC-мономов образует аддитивный базис $\mathcal{A}_p$.*

Наше доказательство этой теоремы не использует результатов неопубликованной работы [86]. Множество βC-мономов, для которых все $\varepsilon_k = 0$, совпадает с множеством C-мономов. Тем самым, мы получим независимое от [86] доказательство того, что C-мономы образуют аддитивный базис алгебры $\overline{\mathcal{A}}_p$. Рассмотрим множество S

всех последовательностей вида $(\varepsilon_{r+1}, s_r, \varepsilon_r, \ldots, s_0, \varepsilon_0)$, где $\varepsilon_k = 0, 1$ и $s_k > 0$ — целое число для всех k. Напомним, что моном P^I, где $I = (\varepsilon_{r+1}, i_r, \varepsilon_r, \ldots i_0, \varepsilon_0)$, называется допустимым, если $i_k \geqslant pi_{k-1} + \varepsilon_k$ для всех $1 \leqslant k \leqslant r$.

Определим отображение

$$\Delta : \{\text{допустимые мономы}\} \to \{\beta C\text{-мономы}\},$$
$$\Delta : (\varepsilon_{r+1}, i_r, \varepsilon_r, \ldots i_0, \varepsilon_0) \mapsto (\varepsilon_{r+1}, j_r, \varepsilon_r, \ldots, \varepsilon_1, j_0, \varepsilon_0)$$

по формуле

$$j_k = p^k \sum_{l=0}^{r-k} (i_l - \varepsilon_l - pi_{l-1}) + \sum_{l=0}^{k} p^{k-l}\varepsilon_l. \tag{2.16}$$

Здесь мы предполагаем $i_{-1} = 0$.

Лемма 2.14. *Отображение Δ сохраняет степень, в частности $\sum i_k = \sum j_k$. Оно устанавливает взаимно однозначное соответствие между множеством всех допустимых последовательностей и множеством всех βC-последовательностей.*

Доказательство. Из формулы (2.16) следует

$$j_k - pj_{k-1} - \varepsilon_k = -p^k(i_{r-k+1} - pi_{r-k} - \varepsilon_{r-k+1}). \tag{2.17}$$

Следовательно, для допустимой последовательности I последовательность $J = \Delta(I)$ является βC-последовательностью.

Чтобы установить обратное соответствие, заметим, что для заданной βC-последовательности J можно найти допустимую последовательность $I = \Delta^{-1}(J)$ по рекуррентным формулам

$$i_0 = \frac{1}{p^r}(j_r - p^{r-1}\varepsilon_1 - \ldots - p\varepsilon_{r-1} - \varepsilon_r),$$
$$i_k - pi_{k-1} - \varepsilon_k = -\frac{1}{p^{r-k+1}}(j_{r-k+1} - pj_{r-k} - \varepsilon_{r-k+1}), k \geqslant 1.$$

□

Замечание 2.1. *Можно доказать, что*

$$i_0 = \frac{1}{p^r}(j_r - \sum_{l=1}^{r} p^{r-l}\varepsilon_l)$$

и

$$i_k = -\sum_{l=1}^{k} p^{-r+k-1}(j_{r-l+1} - pj_{r-l} - \varepsilon_{r-l+1}) + \\ + p^{-r+k}j_r - p^{-r+k}\sum_{l=1}^{k} p^{r-l}\varepsilon_l \quad \textit{для } 1 \leqslant k \leqslant r.$$

Для доказательства теоремы 2.12 остаётся показать, что βC-мономы линейно независимы. Рассмотрим отображение γ, заданное соответствием

$$\gamma : (\varepsilon_{r+1}, i_r, \varepsilon_r, \ldots, i_0, \varepsilon_0) \mapsto (\varepsilon_{r+1}, i_r - \varepsilon_r - pi_{r-1}, \varepsilon_r, \ldots, i_1 - \varepsilon_1 - pi_0, \varepsilon_1, i_0 - \varepsilon_0, \varepsilon_0).$$

Для допустимой последовательности I имеем $\deg \theta^{\gamma(I)} = \deg P^I$, где $\theta^{(\varepsilon_0,k_1,\varepsilon_1,k_2,\ldots)}$ определяется как $\tau_0^{\varepsilon_0}\xi_1^{k_1}\tau_1^{\varepsilon_1}\xi_2^{k_2}\ldots \in (\mathcal{A}_p)_*$. Для последовательности

$$J = (\varepsilon_{r+1}, j_r, \varepsilon_r, \ldots, \varepsilon_1, j_0, \varepsilon_0)$$

положим $\ell(J) = r$.

Линейная независимость βC-мономов вытекает из следующего утверждения.

Лемма 2.15. *Для любых допустимых последовательностей I и J выполняется*

$$\langle \theta^{\gamma(J)}, P^{\Delta(I)} \rangle = \begin{cases} 0, & \textit{если } \ell(I) < \ell(J), \\ 0, & \textit{если } \ell(I) = \ell(J),\ \Delta(I) <_{\varepsilon R} \Delta(J), \\ \pm 1, & \textit{если } I = J. \end{cases}$$

Доказательство. Предположим, что $J = (\varepsilon_{r+1}, j_r, \varepsilon_r, \ldots, j_0, \varepsilon_0)$. Проведём доказательство индукцией по $\sum j_k$. Рассмотрим

$$I_{r,\varepsilon} = (0, p^{r-1}, 0, p^{r-2}, 0, \ldots, 0, p, 0, 1, \varepsilon).$$

Заметим, что $\gamma(J - I_{r,\varepsilon_0})$ и $\gamma(J)$ отличаются только одним или двумя последними элементами, следовательно,

$$\theta^{\gamma(J)} = \theta^{\gamma(J - I_{r,\varepsilon_0})}\omega, \text{ где } \omega = \begin{cases} \xi_r, & \text{если } \varepsilon_0 = 0, \\ \tau_r, & \text{если } \varepsilon_0 = 1. \end{cases}$$

Имеем

$$\langle\theta^{\gamma(J)}, P^{\Delta(I)}\rangle = \langle\theta^{\gamma(J-I_{r,\varepsilon_0})}\omega, P^{\Delta(I)}\rangle = \langle\psi^*(\theta^{\gamma(J-I_{r,\varepsilon_0})}\otimes\omega), P^{\Delta(I)}\rangle =$$
$$\langle\theta^{\gamma(J-I_{r,\varepsilon_0})}\otimes\omega, \psi(P^{\Delta(I)})\rangle = \langle\theta^{\gamma(J-I_{r,\varepsilon_0})}\otimes\omega, \sum_{I'+I''=\Delta(I)} P^{I'}\otimes P^{I''}\rangle =$$
$$= \sum_{I'+I''=\Delta(I)} \pm\langle\theta^{\gamma(J-I_{r,\varepsilon_0})}, P^{I'}\rangle\langle\omega, P^{I''}\rangle,$$

где через ψ временно обозначено коумножение в алгебре Стинрода. Теперь, если $\ell(\Delta(I)) < \ell(J)$, то для всех I'' в сумме $\ell(I'') < \ell(J)$, следовательно, $\langle\omega, P^{I''}\rangle = 0$. Если $\ell(\Delta(I)) = \ell(J)$, то $\langle\omega, P^{I''}\rangle \neq 0$ в единственном случае, когда $I'' = I_{r,\varepsilon_0}$, поэтому

$$\langle\theta^{\gamma(J)}, P^{\Delta(I)}\rangle = \pm\langle\theta^{\gamma(J-I_{r,\varepsilon_0})}, P^{\Delta(I)-I_{r,\varepsilon_0}}\rangle.$$

Остаётся заметить, что $\Delta(I) - I_{r,\varepsilon_0} = \Delta(I - I_{r,\varepsilon_0})$. □

Замечание 2.2. *Хотя C-базис является R-максимальным для любого p (в алгебре $\mathcal{A}_2$ для $p = 2$ или в алгебре $\overline{\mathcal{A}}_p$ для $p > 2$), никаких утверждений о экстремальных свойствах βC-базиса неизвестно. Приведем два примера для иллюстрации.*

Пример 2.1. *Для $p = 3$ разложение $P^3\beta P^1$ в βC-базисе имеет вид*

$$P^3\beta P^1 \equiv \beta P^3 P^1.$$

Но $P^3\beta P^1 >_{\varepsilon R} \beta P^3 P^1$, следовательно, βC не является εR-максимальным.

Пример 2.2. *Для $p = 3$ разложение $P^5\beta P^1$ в βC-базисе имеет вид*

$$P^5\beta P^1 \equiv P^4\beta P^2 + 2\beta P^3 P^3 + \beta P^6 + P^6\beta.$$

Заметим, что $P^5\beta P^1 >_{IR} P^6\beta$, следовательно, βC не является IR-максимальным.

Глава 3

Треугольность матриц перехода между базисами в алгебрах Стинрода $\mathcal{A}_p$ и $\overline{\mathcal{A}}_p$, $p > 2$

В этой главе мы приводим результаты о треугольности матриц перехода для базисов алгебр $\mathcal{A}_p$ и $\overline{\mathcal{A}}_p$, $p > 2$, описанных в предыдущей главе 2. Как и ранее, для удобства изложения мы рассматриваем алгебры $\overline{\mathcal{A}}_p$ и $\mathcal{A}_p$ в отдельных разделах этой главы.

3.1 Матрицы перехода между базисами в алгебрах $\overline{\mathcal{A}}_p$

В этом разделе мы докажем, что матрицы перехода от базиса допустимых мономов, P^t_s-базиса, C-базиса и X-базиса к базису Милнора являются треугольными. Отметим, что, вообще говоря, матрица перехода от мономиального базиса к базису Милнора не обязана быть треугольной, в частности, матрица перехода от Z-базиса к базису Милнора треугольной не является, см. пример 3.1.

Несложные рассуждения, использующие результаты предыдущей главы 2, позволяют получить базис WZ, который является треугольным по отношению к Z-базису.

Определение 3.1. Два базиса M' и M'' называются *треугольными* друг по отношению к другу, если существуют линейные порядки на M' и M'' такие, что матрица перехода от одного базиса к другому треугольна относительно этих порядков.

При доказательстве треугольности некоторого базиса M, скажем, к базису Милнора мы будем пользоваться следующим рассуждением.

Множество элементов базиса M будем обозначать B_M, аналогично, B_{Mil} — множество элементов базиса Милнора. Предположим, что нам удалось найти:

(1) линейный порядок $<_{Mil}$ на множестве B_{Mil},

(2) биекцию $\gamma : B_{Mil} \to B_M$, сохраняющую степень, с помощью которой индуцируется порядок $<_M$ на B_M,

такие что для любого $\theta \in B_M$ выполняются соотношения

$$(\theta)_{Mil} = \gamma^{-1}(\theta) + \sum_i \mu_i,$$

где $(\theta)_{Mil}$ — разложение θ по базису Милнора, $\mu_i \in B_{Mil}$ и $\mu_i <_{Mil} \gamma^{-1}(\theta)$ для всех i. Обратим внимание, что θ и $(\theta)_{Mil}$ — один и тот же элемент алгебры Стинрода, и обозначение $(\theta)_{Mil}$ подчеркивает лишь одно обстоятельство, а именно, что нас интересует разложение элемента θ по базису Милнора.

Тогда матрица перехода от базиса Милнора к базису M имеет треугольный вид по отношению к порядкам $<_M$ и $<_{Mil}$.

Пример 3.1. *Для произвольного простого p несложно видеть, что подпространство размерности $2(p-1)(p+2)$ в $\overline{\mathcal{A}}_p$ — двумерно, и в этой размерности Z-базис содержит два элемента $Z_0^1 Z_0^0$ и $Z_1^1 Z_0^0 Z_0^0$. Простое вычисление показывает, что*

$$Z_0^1 Z_0^0 = P(1,1) + 2P(p+2)$$

$$Z_1^1 Z_0^0 Z_0^0 = 2P(1,1) + 2P(p+2).$$

Отсюда следует, что при любом выборе линейных порядков на Z-мономах и на базисе Милнора матрица перехода не будет треугольной.

Напомним, что символом $L_L(a)$ (соответственно, $L_R(a)$) будем обозначать произвольную линейную комбинацию мономов, строго меньших a в смысле левого (правого) лексикографического порядка, а символом $\overline{L}_L(a)$ (соответственно $\overline{L}_R(a)$) — произвольную линейную комбинацию мономов, которые меньше или равны a.

3.1.1 Z и WZ базисы

Напомним обозначение $\bar{Z}_k^n = P^{p^k + p^{k+1} + \ldots + p^n}, n \geqslant k \geqslant 0$.

По лемме 2.2 имеет место равенство

$$Z_k^n = \bar{Z}_k^n + L_R(P^{p^{n-1}}). \tag{3.1}$$

Определение 3.2. Назовём *WZ-мономом* произведение $\bar{Z}_{k_0}^{n_0}\bar{Z}_{k_1}^{n_1}\cdots\bar{Z}_{k_r}^{n_r}$, где последовательность пар $I=((n_0,k_0),\dots,(n_r,k_r))$ удовлетворяет тем же условиям, что и для Z-мономов, см. определение 2.1.

Как видно, Z-мономы и WZ-мономы сформированы из так называемых атомарных мономов Z_k^n и $\bar{Z}_k^n$ по одним и тем же правилам. Это наблюдение и соотношение (3.1) позволяют доказать следующее утверждение.

Утверждение 3.1. *Пусть Z^I — произвольный Z-моном, заданный набором индексов $I=((n_0,k_0),\dots,(n_r,k_r))$. Тогда для WZ-монома $\bar{Z}^I$ выполняется равенство*

$$\bar{Z}_{k_0}^{n_0}\bar{Z}_{k_1}^{n_1}\dots\bar{Z}_{k_r}^{n_r}=Z_{k_0}^{n_0}Z_{k_1}^{n_1}\dots Z_{k_r}^{n_r}+L,$$

где $L=L_R(Z^I)$.

Доказательство. Проведём индукцию по длине набора I. При $r=0$ утверждение совпадает с леммой 2.2.

Пусть утверждение верно при $r=l$, то есть имеет место разложение

$$\bar{Z}_{k_1}^{n_1}\cdots\bar{Z}_{k_l}^{n_l}=Z_{k_1}^{n_1}Z_{k_1}^{n_1}\cdots Z_{k_l}^{n_l}+L(Z_{k_1}^{n_1}Z_{k_1}^{n_1}\cdots Z_{k_l}^{n_l}).$$

Тогда при $r=l+1$ получим

$$\bar{Z}_{k_0}^{n_0}\bar{Z}_{k_1}^{n_1}\cdots\bar{Z}_{k_{l+1}}^{n_{l+1}}=(Z_{k_0}^{n_0}Z_{k_1}^{n_1}\cdots Z_{k_l}^{n_l}+L_R(Z_{k_0}^{n_0}Z_{k_1}^{n_1}\cdots Z_{k_l}^{n_l}))(Z_{k_{l+1}}^{n_{l+1}}+L_R(P^{p^{n_{l+1}+1}-1}))=$$
$$=Z_{k_0}^{n_0}Z_{k_1}^{n_1}\cdots Z_{k_{l+1}}^{n_{l+1}}+L_R(Z_{k_0}^{n_0}Z_{k_1}^{n_1}\cdots Z_{k_{l+1}}^{n_{l+1}}).$$

□

Следствие 3.1. *Множество WZ-мономов образует базис в $\overline{\mathcal{A}}_p$. Кроме того, базисы WZ и Z треугольны друг по отношению к другу.*

Доказательство. Упорядочим WZ-мономы следующим образом: $\bar{Z}^I<\bar{Z}^J$ тогда и только тогда, когда $Z^I<_R Z^J$. По лемме 2.2 матрица коэффициентов разложения WZ-мономов по Z-базису имеет треугольный вид с единицами на главной диагонали. □

3.1.2 Базис допустимых мономов и B_{Mil}

Треугольность базиса допустимых мономов по отношению к базису Милнора в $\overline{\mathcal{A}}_p$ доказана в классической работе [109]. В этом подразделе мы дадим новое доказательство этого факта и покажем, что соответствующая матрица замены может быть вычислена рекуррентно по столбцам, см. следствие 3.4.

Определение 3.3. Для двух последовательностей неотрицательных целых чисел $R = (r_1, r_2, \ldots)$ и $S = (s_1, s_2, \ldots)$, в которых лишь конечное число членов отличны от нуля, будем говорить, что R меньше S в смысле правого лексикографического порядка и писать $R \prec_{Mil} S$, если существует такое i, что $r_j = s_j$ для всех $j > i$, и $r_i < s_i$.

Обратим внимание, что данный порядок отличается от правого лексикографического порядка из определения 1.1. Отличие состоит в том, что в определении 1.1 конечные последовательности выравниваются справа, а в определении 3.3 сравниваются бесконечные последовательности с конечным числом ненулевых элементов, выровненные слева.

Определение 3.4. Пусть $P(R) = P(r_1, \ldots, r_m)$ — элемент базиса Милнора. Определим отображение $\gamma : B_{Mil} \to B_{Adm}$ формулой

$$\gamma : P(r_1, \ldots, r_m) \mapsto P^{t_1} P^{t_2} \cdots P^{t_m}, \quad \text{где} \quad t_i = \sum_{k=i}^{m} p^{k-i} r_k.$$

Известно, что γ является взаимно однозначным отображением и сохраняет степень, см. [225]. При помощи отображения γ перенесём порядок $\prec_{Mil}$ на множество допустимых мономов B_{Adm}.

Треугольность B_{Adm} по отношению к B_{Mil} вытекает из теоремы 3.1, доказанной ниже. Нам понадобится вспомогательное утверждение. Напомним, что для милноровских элементов имеется явная формула умножения А.14, слагаемые которой индексируются так называемыми допустимыми матрицами X.

Главной матрицей произведения $P(R)P(S)$ будем называть матрицу $X = \{x_{ij}\}$ вида

$$\begin{array}{cccccc}
* & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
r_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
r_{m-1} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
r_m - \sum p^k s_k & s_1 & s_2 & \cdots & s_n
\end{array}$$

Лемма 3.1. *Предположим, что для произведения $P(R)P(S)$ главная матрица произведения является допустимой и T — соответствующая ей последовательность. Тогда для любой другой допустимой матрицы $X = (x_{ij})$ соответствующая ей последовательность $U = (u_1, \ldots, u_{m+n})$ меньше T в смысле порядка $\prec_{Mil}$.*

Доказательство. В такой матрице X для некоторых индексов $0 \leqslant i < m$ и $1 \leqslant j < n$ соответствующий элемент матрицы не равен нулю $x_{ij} \neq 0$. Пусть j — наибольший индекс, для которого это верно. Тогда из условия (А.15) следует, что $x_{mj} < s_j$. Рассмотрим элемент $P(u_1, \ldots, u_{m+n})$, построенный по матрице X. Тогда $u_k = s_k = t_k$

при $m+j<k\leqslant m+n$ и $u_{m+j}=x_{mj}<s_j=t_j$. Получаем, что $P(U)\prec_{Mil}P(T)$. □

Следствие 3.2. *Предположим, что для произведения $P(R)P(S)$ главная матрица произведения является допустимой и T — соответствующая последовательность. Если $U\prec_{Mil}S$, то для любого слагаемого $P(V)$ разложения произведения $P(R)P(U)$ по базису Милнора верно $V\prec_{Mil}T$.* □

Теорема 3.1. *Пусть P^T — допустимый моном, тогда $\gamma^{-1}(P^T)$ является наибольшим слагаемым разложения $(P^T)_{Mil}$.*

Доказательство. Пусть $T=(t_1,\dots,t_m)$ — допустимая последовательность. Напомним, что $\gamma^{-1}(P^T)=P(r_1,\dots,r_m)$, где $r_m=t_m$ и $r_i=t_i-pt_{i+1}$ при $i<m$. Проведём индукцию по m.

При $m=1$ имеют место равенства $(P^{(T)})_{Mil}=P(t_1)$, $\gamma^{-1}(P^T)=P(t_1)$, то есть база индукции верна.

Предположим, что для любой допустимой последовательности S длины меньше m утверждение теоремы верно. В частности, $\gamma^{-1}(P^{(t_2,\dots,t_m)})=P(r_2,\dots,r_m)$ — наибольшее слагаемое $(P^{(t_2,\dots,t_m)})_{Mil}$, иными словами

$$(P^{(t_2,\dots,t_m)})_{Mil}=P(r_2,\dots,r_m)+\sum P(R_i),$$

где $P(R_i)\prec_{Mil}P(r_2,\dots,r_m)$ для каждого i. Тогда

$$\begin{aligned}(P^{(t_1,\dots,t_m)})_{Mil}&=(P(t_1)P^{(t_2,\dots,t_m)}))_{Mil}=\\&=\Big(P(t_1)\big(P(r_2,\dots,r_m)+\sum P(R_i)\big)\Big)_{Mil}=\\&=(P(t_1)P(r_2,\dots,r_m))_{Mil}+\Big(\sum P(t_1)P(R_i)\Big)_{Mil}.\end{aligned}$$

Рассмотрим главную матрицу произведения $P(t_1)P(r_2,\dots,r_m)$

$$\begin{matrix}*&0&0&\cdots&0\\ t_1-\sum_{k=2}^m p^{k-1}r_k&r_2&r_3&\cdots&r_m.\end{matrix}$$

Из допустимости последовательности T следует, что главная матрица допустима. Кроме того, соответствующее ей произведение мультиномиальных коэффициентов, определённое формулой (A.18), отлично от нуля.

Этой матрице соответствует элемент $P(r_1,\dots,r_m)$, поскольку

$$t_1-\sum_{k=2}^m p^{k-1}r_k=t_1-p\sum_{k=2}^m p^{k-2}r_k=t_1-pt_2=r_1.$$

Далее, по лемме 3.1 для любой другой допустимой матрицы произведения $P(t_1)P(r_2,\dots,r_m)$, соответствующий ей милноровский элемент меньше $P(r_1,\dots,r_m)$.

Кроме того, каждое слагаемое разложения $(P(t_1)P(R_i))_{Mil}$ меньше $P(r_1,\dots,r_m)$ по следствию 3.2. $\square$

Следствие 3.3. *В разложении $(P(R))_{Adm}$ моном $\gamma P(R)$ является наибольшим слагаемым относительно порядка $\prec_{Mil}$.*

Следствие 3.4. *Пусть $P(R) \in B_{Mil}$ и $\gamma(P(R))_{Mil} = P(R) + \sum_i P(R_i)$. Тогда*

$$P(R)_{Adm} = \gamma P(R) + \sum_i P(R_i)_{Adm}$$

задаёт рекуррентную формулу для вычисления $P(R)_{Adm}$.

3.1.3 Семейство P_t^s-базисов и B_{Mil}

Напомним определение P_t^s-базисов в алгебре $\overline{\mathcal{A}}_p$. Рассмотрим элементы $P_t^s = P(0,\dots,0,p^s,0,\dots) \in \overline{\mathcal{A}}_p$, где p^s стоит на месте с номером t, $\deg P_t^s = 2p^s(p^t-1)$. Назовём P_t^s-мономом произведение вида $(P_{t_1}^{s_1})^{m_1}\dots(P_{t_k}^{s_k})^{m_k}$, где все $P_{t_j}^{s_j}$ попарно различны и $0 < m_j < p$. В каждом конечном наборе троек целых чисел $\{(s_j,t_j,m_j) : j = 1,\dots,k, 0 < m_j < p, s_j \geqslant 0, t_j > 0\}$ зафиксируем линейный порядок и именно в этом порядке будем перемножать $(P_{t_j}^{s_j})^{m_j}$. Ниже мы докажем, что множество B_P полученных произведений связано с базисом Милнора треугольной матрицей с ненулевыми элементами на диагонали. Отсюда, в частности, получается новое доказательство того, что каждый набор вида B_P элементов алгебры $\overline{\mathcal{A}}_p$ образует в ней аддитивный базис, который к тому же является треугольным по отношению базису Милнора. Напомним, что таких базисов бесконечно много, поскольку в каждом P_t^s-мономе порядок атомарных сомножителей $(P_{t_j}^{s_j})^{m_j}$, хоть и фиксирован, однако может быть выбран произвольным образом.

Зафиксируем базис B_P из семейства P_t^s-базисов и построим биекцию $\gamma : B_{Mil} \to B_P$. Для милноровского элемента $P(R) = P(r_1, r_2, \dots)$ рассмотрим p-адическое разложение каждого $r_j = \sum \alpha_k(r_j)p^k$ и рассмотрим набор троек целых чисел, построенный по последовательности R:

$$M(R) = \{(s,t,\alpha_s(r_t)) : \text{ если } \alpha_s(r_t) > 0\}.$$

Положим $\gamma(P(R))$ равным произведению элементов $(P_t^s)^{\alpha_s(r_t)}$ в том порядке, который зафиксирован для набора $M(R)$. Легко проверить, что γ является биекцией, сохраняющей градуировку. Интересно отметить, что γ^{-1} определено корректно одновременно для всех базисов B_P. Это наблюдение пригодится нам в доказательстве теоремы 3.2. Для элемента $P(R)$ положим $e(P(R)) = \sum r_j$. Согласно [88] величина $2e(P(R))$ сов-

падает с избыточностью элемента $P(R)$. Для простоты величину $e(P(R))$ в этом подразделе тоже будем называть избыточностью, это не вызовет путаницы.

Определение 3.5. Для $P(R), P(S) \in B_{Mil}$ будем писать $P(R) \prec_E P(S)$, если $e(P(R)) < e(P(S))$, или $e(P(R)) = e(P(S))$ и $P(R) \prec_{Mil} P(S)$.

Отметим, что второй случай определения в дальнейшем использоваться не будет и добавлен лишь для того, чтобы порядок был линейным.

Лемма 3.2. *Пусть X — допустимая матрица произведения $P(R)P(S)$, соответствующая элементу $P(T)$, где $T \neq R + S$. Тогда $e(P(T)) < e(P(R + S))$.*

Доказательство. Для $P(T) = P(t_1, t_2, \ldots)$ имеем $e(P(T)) = \sum t_i$. По (A.17) каждое t_i равно сумме элементов на i-й диагонали матрицы $X = ||x_{ij}||$, откуда $e(P(T)) = \sum_{i,j} x_{ij}$. По (A.15) сумма элементов вне первого столбца

$$\sum_{\substack{i \geqslant 0 \\ j > 0}} x_{ij}$$

равна $e(P(S))$. По (A.16) $x_{i0} \leqslant x_i$ для каждого i. Однако по условию $T \neq R + S$, поэтому в матрице X для некоторых $u > 0$ и $v > 0$ найдётся элемент $x_{uv} \neq 0$. Поэтому имеет место строгое неравенство $x_{u0} < r_u$, и следовательно, сумма элементов первого столбца матрицы X строго меньше $e(P(R))$, то есть $\sum_i x_{i0} < e(P(R))$. Тогда

$$\begin{aligned} ex(P(T)) &= \sum_{i,j} x_{i,j} = \\ &= \sum_i x_{i0} + \sum_{\substack{i \geqslant 0 \\ j > 0}} x_{ij} < e(P(R)) + e(P(S)) = e(P(R + S)). \end{aligned}$$

□

Следствие 3.5. *Если $e(P(U)) < e(P(R))$, то каждое слагаемое $P(T)$ в разложении произведения $P(U)P(S)$ (или $P(S)P(U)$) по базису Милнора имеет избыточность строго меньшую, чем $P(R + S)$:*

$$e(P(T)) < e(P(R + S)).$$

Теорема 3.2. *Для любого $\theta \in B_P$ имеет место равенство*

$$(\theta)_{Mil} = a(\theta)\gamma^{-1}(\theta) + \sum \mu_i,$$

где $e(\mu_i) < e(\gamma^{-1}(\theta))$ и $a(\theta) \in \mathbb{Z}/p$ отлично от 0.

Доказательство. Пусть $\theta = (P_{t_1}^{s_1})^{m_1} \dots (P_{t_k}^{s_k})^{m_k}$. Проведём индукцию по длине k одновременно для всевозможных базисов B_P.

Индукцией по m легко проверить, что

$$(P_t^s)^m = m!P(0,\dots,0,mp^s,0,\dots) + \sum \nu_j,$$

где $e(\nu_j) < e(P(0,\dots,0,mp^s,0,\dots)))$. А так как $\gamma^{-1}((P_t^s)^m) = P(0,\dots,0,mp^s,0,\dots)$, то база индукции верна.

Теперь рассмотрим произведения $\theta' = (P_{t_1}^{s_1})^{m_1} \dots (P_{t_{k-1}}^{s_{k-1}})^{m_{k-1}}$ и $\theta = \theta'(P_{t_k}^{s_k})^{m_k}$. Пусть $P(r_1,\dots,r_m) = \gamma^{-1}(\theta)$. Тогда по определению отображения γ имеем равенство $\gamma^{-1}(\theta') = P(r_1,\dots,r_t - mp^s, r_{t+1},\dots,r_m)$.

По предположению индукции для θ' утверждение теоремы верно, т.е.

$$(\theta')_{Mil} = a(\theta')\gamma^{-1}(\theta') + \sum \mu_i,$$

где $e(\mu_i) < e(\gamma^{-1}(\theta'))$ и $a(\theta') \in \mathbb{Z}/p$ отлично от 0.

Тогда

$$\begin{aligned}
(\theta)_{Mil} &= ((\theta')_{Mil}(P_{t_k}^{s_k})^{m_k})_{Mil} = \\
&= a(\theta')(\gamma^{-1}(\theta')(P_{t_k}^{s_k})^{m_k})_{Mil} + \sum(\mu_i(P_{t_k}^{s_k})^{m_k})_{Mil} = \\
&= a(\theta')\left(\gamma^{-1}(\theta')(m!\gamma^{-1}((P_{t_k}^{s_k})^{m_k}) + \sum \nu_j)\right)_{Mil} + \sum(\mu_i(P_{t_k}^{s_k})^{m_k})_{Mil} = \\
&= a(\theta')m!\left(\gamma^{-1}(\theta')\gamma^{-1}((P_{t_k}^{s_k})^{m_k})\right)_{Mil} + a(\theta')\sum\left(\gamma^{-1}(\theta')\nu_j)\right)_{Mil} + \sum(\mu_i(P_{t_k}^{s_k})^{m_k})_{Mil}
\end{aligned}$$

По лемме 3.2 наибольшее значение избыточности в первом слагаемом имеет $P(r_1,\dots,r_m)$, причем, как легко подсчитать, соответствующий коэффициент (A.18) отличен от 0. По следствию 3.5 во второй и в третьей сумме избыточности слагаемых строго меньше $e(P(r_1,\dots,r_m))$. □

Из доказанной теоремы немедленно следует, что любой набор вида B_P является базисом $\overline{\mathcal{A}}_p$, причем треугольным по отношению к базису Милнора. При этом на B_P рассматривается порядок, индуцированный биекцией γ и порядком $\prec_E$ на множестве B_{Mil}.

Следствие 3.6. *Пусть $P(R) \in B_{Mil}$ и $\gamma(P(R))_{Mil} = P(R) + \sum_i P(R_i)$. Тогда выражение*

$$(P(R))_P = \gamma P(R) + \sum_i (P(R_i))_P$$

задаёт рекуррентную формулу для вычисления $(P(R))_P$ — разложения $P(R)$ по P_t^s-базису B_P.

Следствие 3.7. *Матрица перехода между двумя любыми базисами B'_P и B''_P алгебры*

$\overline{\mathcal{A}}_p$, элементы которых упорядочены указанным выше способом, треугольна.

Доказательство. Матрицы перехода для пар базисов (B_{Mil}, B'_P) и (B_{Mil}, B''_P) (верхне)треугольны, при этом в обоих случаях B_{Mil} упорядочен одним и те же способом. □

3.1.4 C-базис и B_{Mil}

Определение 3.6. Пусть $P(R) = P(r_1, \ldots, r_m)$ — элемент базиса Милнора. Определим отображение $\gamma : B_{Mil} \to B_C$ формулой

$$\gamma : P(r_1, \ldots, r_m) \mapsto P^{t_m} P^{t_{m-1}} \cdots P^{t_1}, \quad \text{где} \quad t_i = p^{i-1} \sum_{k=i}^{m} r_k.$$

Как видно из определения, t_i делится на p^{i-1} и $t_{i+1} = pt_i - p^i r_i$, откуда $t_{i+1} \leqslant pt_i$ и поэтому $\gamma P(R) \in B_C$. Далее, отображение γ является взаимно-однозначным: обратное отображение

$$\gamma^{-1}(P^{t_m} P^{t_{m-1}} \cdots P^{t_1}) = P(r_1, \ldots, r_m)$$

задаётся формулами $r_i = (pt_i - t_{i+1})/p^i$, при $1 \leqslant i < m$, и $r_m = t_m/p^{m-1}$. Наконец, легко видеть, что отображение γ сохраняет степень:

$$\begin{aligned} 2(p-1)r_1 + 2(p-1)(p+1)r_2 + \ldots + 2(p-1)(p^n + p^{n-1} + \ldots + 1)r_n = \\ = 2(p-1)\sum_{i=1}^{m} r_i + 2(p-1)p\sum_{i=2}^{m} r_i + \ldots + 2(p-1)p^{m-1} r_m = \\ = 2(p-1)t_1 + 2(p-1)t_2 + \ldots + 2(p-1)t_m. \end{aligned}$$

С помощью биекции γ перенесём порядок $\prec_{Mil}$ на B_C.

Теорема 3.3. *Пусть P^T — некоторый C-моном в алгебре $\overline{\mathcal{A}}_p$. Тогда $\gamma^{-1}(P^T)$ является наибольшим слагаемым в его разложении $(P^T)_{Mil}$ по базису Милнора.*

Доказательство. Пусть дан C-моном $P^{t_m} P^{t_{m-1}} \cdots P^{t_1}$. Доказательство будем вести индукцией по m.

При $m = 1$ получаем $(P^{t_1})_{Mil} = P(t_1) = \gamma^{-1}(P^{t_1})$, то есть база индукции верна.

Предположим, что для любого C-монома P^S, задаваемого последовательностью S длины меньше m, теорема верна. В частности, моном

$$\gamma^{-1}(P^{t_{m-1}} \cdots P^{t_1})$$

является наибольшим слагаемым в разложении $(P^{t_{m-1}} \cdots P^{t_1})_{Mil}$.

Заметим, что если

$$\gamma^{-1}(P^{t_{m-1}}\cdots P^{t_1}) = P(r'_1, r'_2, \ldots, r'_{m-1}),$$
$$\gamma^{-1}(P^{t_m}P^{t_{m-1}}\cdots P^{t_1}) = P(r_1, r_2, \ldots, r_{m-1}, r_m),$$

то $r'_1 = r_1, \ldots, r'_{m-2} = r_{m-2}$ и $r'_{m-1} = r_{m-1} + r_m$.

Таким образом, мы можем записать

$$(P^{t_{m-1}}\cdots P^{t_1})_{Mil} = P(r_1, r_2, \ldots, r_{m-1} + r_m) + \sum P(R_i),$$

где $P(R_i) \prec_{Mil} P(r_1, r_2, \ldots, r_{m-1} + r_m)$ для всех i. Тогда

$$\left(P^{t_m}P^{t_{m-1}}\cdots P^{t_1}\right)_{Mil} = \left(P^{t_m}\left(P(r_1, r_2, \ldots, r_{m-1} + r_m) + \sum P(R_i)\right)\right)_{Mil} =$$
$$= \left(P^{t_m}P(r_1, r_2, \ldots, r_{m-1} + r_m)\right)_{Mil} + \left(\sum P^{t_m}P(R_i)\right)_{Mil}.$$

Рассмотрим первое слагаемое. Докажем, что в этом разложении слагаемое $P(r_1, \ldots, r_m)$, соответствующее матрице

$$\begin{array}{cccccc} * & r_1 & r_2 & \cdots & r_{m-2} & r_{m-1} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & r_m, \end{array}$$

является максимальным. Пусть $P(t_1, \ldots, t_m)$ моном, соответствующий любой другой допустимой матрице. Из условия (А.16) следует, что $t_m < r_m$, и поэтому $P(t_1, \ldots, t_m) \prec_{Mil} P(r_1, \ldots, r_m)$.

Остаётся показать, что каждое слагаемое разложения $(P^{t_m}P(R_i))_{Mil}$ для любого i меньше $P(r_1, \ldots, r_m)$. Если длина R_i не превосходит $m-2$, то длина любого слагаемого разложения $(P^{t_m}P(R_i))_{Mil}$ не превосходит $m-1$, следовательно, все эти слагаемые меньше $P(r_1, \ldots, r_m)$. Пусть длина множителя $P(R_i) = P(u_1, \ldots, u_{m-1})$ равна $m-1$. Допустимая матрица произведения $P^{t_m}P(u_1, \ldots, u_{m-1})$ имеет вид

$$\begin{array}{ccccccc} * & u_1 - s_1 & u_2 - s_2 & \cdots & u_{m-2} - s_{m-2} & u_{m-1} - s_{m-1} \\ s_0 & s_1 & s_2 & \cdots & s_{m-2} & s_{m-1}, \end{array}$$

где $\sum p^i s_i = t_m$. Если $s_{m-1} < r_m$, то для соответствующего такой матрице монома получаем

$$P(s_0 + u_1 - s_1, \ldots, s_{m-2} + u_{m-1} - s_{m-1}, s_{m-1}) \prec_{Mil} P(r_1, \ldots, r_m).$$

Если $s_{m-1} = r_m$, то из условия $t_m/p^{m-1} = r_m$ следует, что $s_i = 0$ при $i < m-1$. Такой матрице соответствует моном $P(u_1, \ldots, u_{m-1} - r_m, r_m)$. Тогда по предположению индукции $P(R_i) = P(u_1, \ldots, u_{m-1}) \prec_{Mil} P(r_1, r_2, \ldots, r_{m-1} + r_m)$, и получаем, что данный

моном меньше $P(r_1, \ldots, r_m)$ в смысле порядка $\prec_{Mil}$. $\square$

Следствие 3.8. *Пусть* $P(R) \in B_{Mil}$ *и* $\gamma(P(R))_{Mil} = P(R) + \sum_i P(R_i)$. *Тогда выражение*

$$P(R)_C = \gamma P(R) + \sum_i P(R_i)_C$$

задаёт рекуррентную формулу для вычисления $P(R)_C$.

3.1.5 X-базис и B_{Mil}

Начнем с построения на множестве B_{Mil} специального порядка $\prec_L$, а затем построим биекцию $\gamma : B_{Mil} \to B_X$.

Рассмотрим милноровский элемент $P(r_0, \ldots, r_m)$. Каждому r_j сопоставим его p-адическое разложение

$$r_j = \sum_i \alpha_i(r_j) p^i.$$

Из всевозможных $\alpha_{ij} = \alpha_i(r_j)$ сформируем таблицу так, что первые индексы меняются вдоль столбцов, вторые — вдоль строк; нумерация строк начинается с 0 и идёт снизу вверх; столбцы нумеруются с 0. Например, при $p = 3$ для элемента $P(4, 9, 6)$ получается таблица

2	0	1	0
1	1	0	2
0	1	0	0
	0	1	2

Таким образом, в j-м столбце стоит p-адическое разложение r_j, и i-я строка содержит последовательность i-х разрядов $(\alpha_i(r_0), \ldots, \alpha_i(r_m))$ набора $(r_0, \ldots, r_m)$. Такую таблицу будем называть *таблицей разрядов* последовательности R.

Определение 3.7. *Развёрткой* таблицы будем называть следующую последовательность её элементов

$$(\alpha_{00}, \alpha_{01}, \alpha_{10}, \alpha_{02}, \alpha_{11}, \ldots).$$

Очевидно, сопоставление таблицы и её развёртки фиксированному милноровскому элементу взаимно–однозначно. Приведённой выше таблице соответствует последовательность

$$(1, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 2, 1, 0, \ldots).$$

Левый лексикографический порядок $\prec_L$ на множестве развёрток естественным образом задаёт порядок на множестве элементов базиса Милнора. Будем обозначать этот порядок символом $\prec_L$. Это не вызовет путаницы с L-порядком на множестве мономов от элементов P^j в смысле определения 1.1.

Определение 3.8. Пусть элементу $P(r_0, \ldots, r_m)$ соответствует развёртка

$$(\alpha_{00}, \alpha_{01}, \alpha_{10}, \alpha_{02}, \alpha_{11}, \ldots).$$

Заменим элементы данной последовательности по правилу $\alpha_{ij} \mapsto (X_i^{i+j})^{\alpha_{ij}}$, получим последовательность элементов X_k^n:

$$((X_0^0)^{\alpha_{00}}, (X_0^1)^{\alpha_{01}}, (X_1^1)^{\alpha_{10}}, (X_0^2)^{\alpha_{02}}, \ldots).$$

Возьмём их произведение в имеющемся порядке (при $\alpha_{ij} = 0$ соответствующий X_i^{i+j} в произведение не входит, поэтому произведение конечно):

$$(X_0^0)^{\alpha_{00}}(X_0^1)^{\alpha_{01}}(X_1^1)^{\alpha_{10}}(X_0^2)^{\alpha_{02}} \ldots$$

В итоге получим некоторый X-моном. Описанное соответствие задаёт отображение множества милноровских элементов в множество X-мономов

$$\gamma : P(r_0, \ldots, r_m) \mapsto (X_0^0)^{\alpha_{00}}(X_0^1)^{\alpha_{01}}(X_1^1)^{\alpha_{10}}(X_0^2)^{\alpha_{02}} \ldots$$

Лемма 3.3. *Отображение γ взаимно однозначно и сохраняет степень.*

Доказательство. Доказательство получается несложной модификацией доказательства утверждения 2.1. □

Теорема 3.4 (Емельянов, [11])**.** *Пусть θ — произвольный X-моном алгебры $\overline{\mathcal{A}}_p$. Тогда его разложение $(\theta)_{Mil}$ по базису Милнора имеет вид*

$$(\theta)_{Mil} = \gamma^{-1}(\theta) + \sum_i \eta_i,$$

где $\gamma^{-1}(\theta) \prec_L \eta_i$ для всех i.

Доказательство. Сначала проверим утверждение для $\theta = X_k^k$. В самом деле, $P(p^k) = P^{p^k} = X_k^k$ и $\gamma(P(p^k)) = X_k^k$. Тем самым, $(X_k^k)_{Mil} = \gamma^{-1}(X_k^k)$.

Далее рассмотрим моном $\theta = X_k^n X_{k_1}^{n_1} \cdots X_{k_l}^{n_l}$. Возможны два случая: $k = n$ и $k < n$. Сначала разберем первый случай.

Моном θ может быть записан в виде $(X_n^n)^w X_{k_1}^{n_1} \cdots X_{k_l}^{n_l}$, где $0 < w < p$. Предположим по индукции, что утверждение теоремы верно для монома $(X_n^n)^{w-1} X_{k_1}^{n_1} \cdots X_{k_l}^{n_l}$. Тогда

$$\begin{aligned}((X_n^n)^w X_{k_1}^{n_1} \cdots X_{k_l}^{n_l})_{Mil} &= (P^{p^n}((X_n^n)^{w-1} X_{k_1}^{n_1} \cdots X_{k_l}^{n_l})_{Mil})_{Mil} = \\ &= (P^{p^n}(P(\widetilde{R}) + \sum_l P(Q_l)))_{Mil} = (P^{p^n} P(\widetilde{R}))_{Mil} + (\sum_l P^{p^n} P(Q_l))_{Mil}, \quad (3.2)\end{aligned}$$

где $P(\widetilde{R}) = P(\widetilde{r}_0, \widetilde{r}_1, \ldots, \widetilde{r}_m) = \gamma^{-1}((X_n^n)^{w-1} X_{k_1}^{n_1} \cdots X_{k_l}^{n_l})$ и $P(\widetilde{R}) \prec_L P(Q_l)$ для любого l.

Последовательности R соответствует таблица разрядов, в которой на n-й диагонали и ниже стоят нули, исключая элемент $\alpha_{n0} = w$. Кроме того, $\tilde{r}_j = r_j$ при $j > 0$ и $\tilde{r}_0 + p^n = r_0$.

Мы покажем, что в разложении $(P^{p^n} P(\widetilde{R}))_{Mil}$ имеется слагаемое, равное $P(R)$, а все остальные слагаемые больше $P(R)$. Затем мы покажем, что в сумме $(P^{p^n} P(Q_l))_{Mil}$ все слагаемые больше $P(R)$.

Сначала выясним, при каких допустимых матрицах в формуле для произведения произведения $P^{p^n} P(\widetilde{R})$ могут встретиться слагаемые, не превосходящие $P(R)$.

Произведению $P^{p^n} P(\widetilde{R})$ соответствуют допустимые матрицы вида

$$\begin{array}{ccccccccc} * & r_0 - p^n - s_1 & & r_1 - s_2 & & \ldots & r_{n-1} - s_n & r_n & \ldots \\ s_0 & & s_1 & & s_2 & \ldots & s_n & 0 & \ldots \end{array} \tag{3.3}$$

Отсюда, в частности, следует, что для такой матрицы коэффициент $c(X)$, определенный соотношением (A.18), находится из формулы

$$c(X) = \prod_i \binom{t_i}{s_i}, \tag{3.4}$$

где t_i удовлетворяют равенству (A.17).

Далее, из $\sum s_i p^i = p^n$ следует, что $s_i \leqslant p^{n-i}$ для всех i. Более того, если при каком-то i достигается равенство $s_i = p^{n-i}$, то $s_j = 0$ при $j \neq i$.

Из условия на нулевые элементы в таблицах разрядов R и $\widetilde{R}$ следует, что $p^{n-j+1} | r_j$ при $j = 1, \ldots, n$. Если допустимая матрица (3.3) соответствует слагаемому, меньшему чем $P(R)$, то для нее с необходимостью выполняются условия

$$\begin{aligned} & p \mid r_n + s_n \\ & p^2 \mid r_{n-1} - s_n + s_{n-1} \\ & \ldots \\ & p^n \mid r_1 - s_2 + s_1. \end{aligned}$$

Рассматривая их последовательно и учитывая неравенства $s_i \leqslant p^{n-i}$, получаем, что $s_n = s_{n-1} = \ldots s_1 = 0$. Таким образом, остается единственная возможность $s_0 = p^n$. Такая допустимая матрица соответствуют $P(R)$.

Теперь обратимся ко второму слагаемому в (3.2) и докажем, что если $\widetilde{R} \prec_L Q$, то все слагаемые в $((P^{p^n})P(Q))_{Mil}$ больше $P(R)$.

Из равенства $p^n = \sum p^i s_i$ следует, что хотя бы одно $s_j \neq 0$. Предположим сначала, что $s_j \neq 0$ для некоторого $j > 0$ (иначе $s_0 = p^n$, и этот случай мы рассмотрим позже). У этого числа s_j один из разрядов p-адического разложения отличен от 0. А именно, пусть в сумме $s_j = \sum p^m \beta_m$ коэффициент $\beta_m \neq 0$. Напомним, что $s_j \leqslant p^{n-j}$,

поэтому $j + m \leqslant n$. Предположим, что соответствующий этой допустимой матрице милноровский элемент $P(T)$ присутствует в разложении $((P^{p^n})P(S))_{Mil}$. Тогда произведение коэффициентов (3.4) отлично от 0, в частности, $\binom{t_m}{s_m} \neq 0$. Из леммы А.1 следует, что m-й разряд p-адического разложения числа t_j отличен от 0. Но этот элемент появляется в таблице разрядов последовательности T не выше n-й диагонали, следовательно, $P(R) \prec_L P(T)$.

Рассмотрим теперь допустимую матрицу для $s_0 = p^n$, $s_1 = s_2 = \ldots = 0$. Легко видеть, что тогда для соответствующей последовательности $T = (t_0, t_1, \ldots)$ выполняются равенства $t_0 = q_0 + p^n$ и $t_j = q_j$ при $j > 0$. Аналогичным образом связаны R и $\widetilde{R}$: $r_0 = \tilde{r}_0 + p^n$ и $r_j = \tilde{r}_j$ при $j > 0$. Тогда если $\alpha_n(q_0) < p - 1$, то из $Q \succ_L \widetilde{R}$ следует, что $T \succ_L R$. Если же $\alpha_n(q_0) = p - 1$, то коэффициент (3.4) равен 0, так он содержит сомножитель $\binom{q_0+p_n}{p_n}$, равный 0 по лемме А.1. Поэтому такой соответствующий такой последовательности милноровский элемент $P(T)$ в разложении $(P^{p^n}P(\widetilde{R}))_{Mil}$ не встречается.

Теперь рассмотрим случай $k < n$. Предположим по индукции, что утверждение верно для монома $X_k^{n-1}X_{k_1}^{n_1}\cdots X_{k_l}^{n_l}$. Тогда

$$(X_k^n X_{k_1}^{n_1}\cdots X_{k_l}^{n_l})_{Mil} = (P^{p^n}(X_k^{n-1}X_{k_1}^{n_1}\cdots X_{k_l}^{n_l})_{Mil})_{Mil} = \\ = (P^{p^n}(P(\widetilde{R}) + \sum_l P(Q_l)))_{Mil} = (P^{p^n}P(\widetilde{R}))_{Mil} + (\sum_l P^{p^n}P(Q_l))_{Mil}, \quad (3.5)$$

где $P(\widetilde{R}) = P(\widetilde{r}_0, \widetilde{r}_1, \ldots, \widetilde{r}_m) = \gamma^{-1}(X_k^{n-1}X_{k_1}^{n_1}\cdots X_{k_l}^{n_l})$ и $P(\widetilde{R}) \prec_L P(Q_l)$ для любого l.

Из условия на последовательность R следует, что для чисел $r_{n-k+1}, \ldots, r_n$ имеет место делимость $p^{i+1} \mid r_{n-j}$, а для чисел $r_0, \ldots, r_{n-k}$ — делимость $p^i \mid r_{n-j}$.

Допустимая матрица для произведения $P^{p^n}P(\widetilde{R})$

$$\begin{array}{cccccccc} * & r_0 - s_1 & r_1 - s_2 & \ldots & r_{n-k-1} + p^k - s_{n-k} & r_{n-k} - p^k - s_{n-k+1} & \ldots \\ s_0 & s_1 & s_2 & \ldots & s_{n-k} & s_{s-k+1} & \ldots \end{array} \quad (3.6)$$

Как отмечалось выше, из равенства $\sum s_i p^i = p^n$ следует, что $s_i \leqslant p^{n-i}$ для всех i; если же при каком-то i достигается равенство $s_i = p^{n-i}$, то $s_j = 0$ при $j \neq i$.

Допустимая матрица, для которой $s_{n-k} = p^{n-k}$, а остальные s_j равны 0, дает слагаемое в разложении $P^{p^n}P(\widetilde{R})$ в точности равное $P(R)$. Теперь мы покажем, что не существует ни одной допустимой матрицы, отличной от только что описанной, которая дает слагаемое $P(T)$, у которого в таблице разрядов на $n-1$-й диагонали и ниже, а также на n-й диагонали в строках с 0-й по $k-1$-ю стоят нули. Отсюда будет следовать, что в разложении $P^{p^n}P(\widetilde{R})$ все слагаемые, отличные от $P(R)$, больше этого слагаемого.

Из условий на делимость элементов r_j следуют аналогичные условия на дели-

мость элементов t_j, откуда

$$\begin{aligned}
&p \mid r_n + s_n \\
&p^2 \mid r_{n-1} - s_n + s_{n-1} \\
&\dots \\
&p^k \mid r_{n-k+1} - s_{n-k+2} + s_{n-k+1}.
\end{aligned}$$

Рассматривая утверждения последовательно и учитывая, что для всех $s_i \leqslant p^{n-i}$ получаем, что $s_{n-k+1} = \ldots = s_n = 0$. Например, из первого условия следует, что $p \mid s_n$, но $s_n \leqslant p^0$, поэтому $s_n = 0$, и т.п.

Далее, $p^k \mid (r_{n-k} - p^k + s_{n-k})$, откуда $p^k \mid s_{n-k}$. Теперь заметим, что $s_{n-k} \leqslant p^k$, тем самым у нас две возможности: $s_{n-k} = p^k$, которая обсуждалась выше, и $s_{n-k} = 0$, которую мы сейчас рассмотрим.

Имеем

$$\begin{aligned}
&p^{k+1} \mid r_{n-k-1} + p^k + s_{n-k-1} \\
&p^{k+2} \mid r_{n-k-2} - s_{n-k-1} + s_{n-k-2} \\
&\dots \\
&p^{n-1} \mid r_1 - s_2 + s_1 \\
&p^n \mid r_0 - s_1 + s_0,
\end{aligned}$$

откуда

$$\begin{aligned}
&p^{k+1} \mid p^k + s_{n-k-1} \\
&p^{k+2} \mid -s_{n-k-1} + s_{n-k-2} \\
&\dots \\
&p^{n-1} \mid -s_2 + s_1 \\
&p^n \mid -s_1 + s_0.
\end{aligned}$$

Теперь домножим первое число на p^{n-k}, второе — на $p^{n-k-1}, \ldots$, последнее — на p, и полученные числа сложим. Полученное число $p^n + \sum\limits_{i=0}^{n-k-1} s_i p^{i+1} - \sum\limits_{i=1}^{n-k-1} s_i p^i$ должно делиться на p^{n+1}. Пользуясь равенством $\sum s_i p^i = p^n$, нетрудно понять, что это число равно $p^n + p^{n+1} - p^n + s_0$, откуда следует, что $s_0 = 0$, т. к. оно не превосходит p^n.

Теперь, рассмотрев условия

$$\begin{aligned}
&p^n \mid -s_1 \\
&p^{n-1} \mid -s_2 + s_1 \\
&\dots \\
&p^{k+2} \mid -s_{n-k-1} + s_{n-k-2} \\
&p^{k+1} \mid p^k + s_{n-k-1}
\end{aligned}$$

в указанном порядке, последовательно получим $s_1 = s_2 = \ldots = s_{n-k-1} = 0$, и тогда из последнего условия должно следовать, что p^k делится на p^{k+1}. Полученное противоречие показывает, что в разложении $(P^{p^n} P(\widetilde{R}))_{Mil}$ все слагаемые, отличные от $P(R)$,

больше чем $P(R)$.

Теперь обратимся ко второй сумме в формуле (3.5) и докажем, что если $\widetilde{R} \prec_L Q$, то все слагаемые в $((P^{p^n})P(Q))_{Mil}$ больше $P(R)$.

Рассмотрим произвольную допустимую матрицу для произведения $(P^{p^n})P(Q)$

$$\begin{matrix} * & q_0 - s_1 & q_1 - s_2 & \dots & q_l - s_{l+1} & \dots \\ s_0 & s_1 & s_2 & \dots & s_{l+1} & \dots \end{matrix} \tag{3.7}$$

Пусть ей соответствует милноровский элемент $P(T)$.

Из равенства $p^n = \sum p^l s_l$ следует, что $s_j > 0$ для некоторого j. Пусть m — отличный от нуля m-й разряд p-адического разложения s_j, т. е. $\alpha_m(s_j) \neq 0$. Предположим, что милноровский элемент $P(T)$ входит в разложение $((P^{p^n})P(Q))_{Mil}$ с ненулевым коэффициентом, см. (A.18). Тогда по лемме A.1 имеем $\alpha_m(t_j) \neq 0$. Таким образом, если $m + j < n$ или $m + j = n$, но при этом $j > n - k$, то $P(T) \succ_L P(R)$.

Остается рассмотреть случай, когда не найдется $\alpha_m(s_j)$ отличного от 0 для $m + j < n$ или же $m + j = n$ и $j > n - k$. Из равенства $p^n = \sum p^l s_l$ тогда следует, что $s_j = p^{n-j}$ для некоторого $j \leqslant n - k$, а остальные $s_l = 0$.

Заметим, что если $\alpha_\sigma(q_\tau) \neq 0$ при $\sigma + \tau \leqslant n-2$ или при $\sigma + \tau = n-1$ и $\tau \geqslant n-k$, то в последовательности T, соответствующей рассматриваемой допустимой матрице имеем $\alpha_\sigma(t_\tau) \neq 0$ и тогда $P(T) \succ_L P(R)$.

Теперь рассмотрим случай, когда $\alpha_\sigma(q_\tau) \neq 0$ при $\sigma+\tau \leqslant n-2$ или при $\sigma+\tau = n-1$ и $\tau \geqslant n - k$. В этом случае из равенства $\alpha_k(\tilde{r}_{n-k-1}) = 1$ следует, что $\alpha_k(q_{n-k-1}) \geqslant 1$. Если при этом $j < n - k$, то $\alpha_k(t_{n-k-1}) \geqslant 1$ и $P(T) \succ_L P(R)$.

Случай $j = n - k$ несколько интереснее. А именно, если $1 < \alpha_k(q_{n-k-1})$, то $\alpha_k(t_{n-k-1}) = \alpha_k(q_{n-k}) - 1 > 0$, и поэтому $P(T) \succ_L P(R)$. Если же $\alpha_k(q_{n-k-1}) = 1$, то $\alpha_k(t_{n-k-1}) = 0$, и все зависит от $\alpha_k(q_{n-k}) = 0$. А именно, если $\alpha_k(q_{n-k}) < p - 1$, то $\alpha_k(t_{n-k}) = \alpha_k(q_{n-k}) + 1$, остальные элементы разверток T и Q совпадают, за исключением $\alpha_k(t_{n-k-1}) = 0 = \alpha_k(q_{n-k-1}) - 1$. Поэтому $P(T) \succ_L P(R)$. Наконец, если $\alpha_k(q_{n-k}) = p - 1$, то $\alpha_k(t_{n-k}) = 0$ и возникают переносы в старшие разряды, что осложняет сравнение $P(T)$ и $P(R)$. Однако коэффициент (A.18), соответствующий T, в этом случае содержит множитель $\binom{t_{n-k}}{s_{n-k}}$, который равен 0 по лемме A.1, так как $\alpha_k(t_{n-k}) = 0$ и $\alpha_k(s_{n-k}) = 1$. □

3.2 Замены в алгебрах $\mathcal{A}_p$, $p > 2$

Этот раздел посвящен треугольным заменам в алгебре Стинрода $\mathcal{A}_p$, $p > 2$. Мы докажем, что матрицы перехода от базиса допустимых мономов, любого P^t_s-базиса, βC-базиса, XC-базиса и βX-базиса к базису Милнора являются треугольными. Кроме того, мы покажем, что треугольна матрица перехода от базиса Милнора к его

модификации — PQ-базису. Наконец, мы докажем, что ZA-базис треугольен по отношению к PQ-базису. Как мы уже видели, далеко не всегда матрица перехода от некоторого базиса к базису Милнора треугольна, например, матрица перехода от Z-базиса к базису Милнора треугольной не является. Мы опустили несколько несложных утверждений о треугольности базисов, которые тривиальным образом выводятся из результатов раздела 3.1 (например, про треугольность βWZ-базиса по отношению к βZ-базису), а также утверждения о возможности рекуррентного вычисления столбцов треугольных матриц замены через предшествующие столбцы, которые верны для всех рассматриваемых нами случаев.

3.2.1 PQ-базис

Милноровский элемент алгебры $\mathcal{A}_p$ (см. [109]) имеет вид $Q(E)P(R)$, где для элементов последовательностей $E = (\varepsilon_0, \varepsilon_1, \dots)$ и $R = (r_1, r_2, \dots)$ выполнено $\varepsilon_j \in \{0, 1\}$ и $r_k \geqslant 0$ для всех j, k, причем обе последовательности содержат только конечное число ненулевых элементов.

Любой милноровский элемент кодируется двумя последовательностями $E = (\varepsilon_0, \varepsilon_1, \dots)$ и $R = (r_1, r_2, \dots)$, для которых $\varepsilon_j \in \{0, 1\}$ и $r_k \geqslant 0$ для всех j, k, причем лишь конечное число ε_j и r_k отлично от 0. Определим левый лексикографический порядок на множестве последовательностей $E = (\varepsilon_0, \varepsilon_1, \dots)$ обычным образом: для двух последовательностей $E' = (\varepsilon'_0, \varepsilon'_1, \dots)$ и $E'' = (\varepsilon''_0, \varepsilon''_1, \dots)$ положим $E' <_{L\varepsilon} E''$ (или $Q(E') <_{L\varepsilon} Q(E'')$) тогда и только тогда, когда $e'_j < e''_j$ для некоторого j и $\varepsilon'_k = \varepsilon''_k$ для всех $k < j$.

Для последовательности $E = (\varepsilon_0, \varepsilon_1, \dots)$ рассмотрим последовательность $a_1 < a_2 < \dots < a_m$ такую, что $\varepsilon_j = 1$ в том и только в том случае, когда $j = a_k$ для некоторого k, $1 \leqslant k \leqslant m$. Ясно, что $Q(E) = Q_{a_1} Q_{a_2} \dots Q_{a_m}$. Пусть $a'_1 < \dots < a'_m$ и $a''_1 < \dots < a''_n$ соответствуют E' и E''. Тогда $Q(E') <_{L\varepsilon} Q(E'')$ тогда и только тогда, когда выполняется одно из условий:

(a) $n > m$ и $a'_j = a''_j$ для $j = 1, \dots, m$;

(b) $a''_k < a'_k$ для некоторого $k \leqslant \min(m, n)$ и $a''_j = a'_j$ для всех $j < k$.

Множество всех элементов вида $Q(E)P(R)$ образует базис $\mathcal{A}_p$ — он называется, напомним, базисом Милнора или базисом милноровских элементов. Нам будет удобно называть QP-базисом.

Оказывается, множество всех элементов вида $P(R)Q(E)$ тоже образует базис алгебры $\mathcal{A}_p$, который мы будем называть PQ-базисом. Он треугольен по отношению к базису Милнора в алгебре $\mathcal{A}_p$.

Определим порядок $<_{QP}$ на множестве рассматриваемых пар (E, R) следующим образом. Положим $(E', R') <_{QP} (E'', R'')$ (или эквивалентно $Q(E')P(R') <_{QP} Q(E'')P(R'')$ и $P(R')Q(E') <_{QP} P(R'')Q(E'')$) тогда и только тогда, когда

(1) $E' <_{L\varepsilon} E''$ или

(2) $E' = E''$ и R' меньше R'' относительно левого лексикографического порядка

Отметим, что второй пункт определения не используется в доказательстве теоремы 3.5 и добавлен лишь для того, чтобы порядок $<_{QP}$ был полным.

Теорема 3.5. *Для любого PQ-элемента $P(R)Q(E)$ его разложение $(P(R)Q(E))_{Mil}$ по базису Милнора имеет вид*

$$(P(R)Q(E))_{Mil} = Q(E)P(R) + \sum_j c_j Q(E_j)P(R_j), \tag{3.8}$$

где $c_j \in \mathbb{Z}/p$ и $E_j <_{L\varepsilon} E$ для всех j. В частности, $(E_j, R_j) <_{QP} (E, R)$ для всех j.

Доказательство. Если последовательность E состоит только из нулей, то утверждение теоремы очевидно. Пусть $Q(E) = Q_{a_1} \dots Q_{a_m}$, где $a_1 < a_2 < \dots < a_m$. Проведем индукцию по m. Для $m = 1$ утверждение следует из соотношения (A.20).

Для $m > 1$ рассмотрим последовательность $E' = (\varepsilon'_0, \varepsilon'_1, \dots)$, такую что $\varepsilon'_{a_m} = 0$ и $\varepsilon'_j = \varepsilon_j$ для всех $j \neq a_m$. Тогда, в частности, $Q(E')Q_{a_m} = Q(E)$. По предположению индукции имеет место равенство

$$(P(R)Q(E'))_{Mil} = Q(E')P(R) + \sum_j c_j Q(E_j)P(R_j),$$

где $c_j \in \mathbb{Z}_p$ и $E_j <_{L\varepsilon} E'$ для всех j. Тогда

$$\begin{aligned}(P(R)Q(E))_{Mil} &= (P(R)Q(E')Q_{a_m})_{Mil} = \\ &= (Q(E')P(R)Q_{a_m})_{Mil} + \sum_j c_j (Q(E_j)P(R_j)Q_{a_m})_{Mil}.\end{aligned}$$

Мы получим $Q(E)P(R)$ в качестве одного из слагаемых в разложении $(Q(E')P(R)Q_{a_m})_{Mil}$ с помощью коммутационных соотношений (A.20). Любое другое слагаемое в милноровском разложении $(Q(E')P(R)Q_{a_m})_{Mil}$ имеет вид $Q(E')Q_{a_m+k}P(R'_k)$ для некоторой последовательности R'_k и подходящего целого $k > 1$. Очевидно,

$$Q_{a_1} \dots Q_{a_{m-1}}Q_{a_m} >_{L\varepsilon} Q_{a_1} \dots Q_{a_{m-1}}Q_{a_m+k}$$

поскольку $a_1 < \dots < a_{m-1} < a_m < a_m + k$.

Любое слагаемое в милноровском разложении $(Q(E_j)P(R_j)Q_{a_m})_{Mil}$ имеет вид $Q(E_j)Q_{a_m+k}P(R_{j,k})$ для некоторого целого $k \geqslant 0$ и подходящей последовательности $R_{j,k}$. Пусть $Q(E_j) = Q_{b_1} \dots Q_{b_{m-1}}$, где $b_1 < b_2 < \dots < b_{m-1}$. Так как $E' >_{L\varepsilon} E_j$, то для некоторого $m - 1 \geqslant l \geqslant 1$

$$a_1 = b_1, \dots, a_{l-1} = b_{l-1}, a_l < b_l.$$

Заметим, что $a_m + k \geqslant a_m > a_l$, следовательно, $Q(E')Q_{a_m} >_{L\varepsilon} Q(E_j)Q_{a_m+k}$. □

3.2.2 Базис допустимых мономов

В этом разделе нам понадобится следующий порядок $<_A$ на множестве B_{Mil} милноровских элементов алгебры $\mathcal{A}_p$.

Определение 3.9. Для двух милноровских элементов $Q(E')P(R')$ и $Q(E'')P(R'')$ положим $Q(E')P(R') <_A Q(E'')P(R'')$ тогда и только тогда, когда выполняется одно из двух условий:

(i) $E' >_{L\varepsilon} E''$;

(ii) $E' = E''$ и $R' <_{MR} R''$ по отношению к правому лексикографическому порядку, иными словами, существует i такое, что $r'_i < r''_i$ и $r'_j = r''_j$ для всех $j > i$.

Напомним, что *допустимым* называется моном

$$\beta^{\varepsilon_0} P^{t_1} \beta^{\varepsilon_1} P^{t_2} \dots P^{t_m} \beta^{\varepsilon_m},$$

такой что $t_k \geqslant pt_{k+1} + \varepsilon_k$ для всех $1 \leqslant k \leqslant m-1$. Множество B_{Adm} допустимых мономов образует базис $\mathcal{A}_p$, см. [225].

Определение 3.10. Определим отображение $\gamma : B_{Mil} \to B_{Adm}$. Выберем целое число m, такое что $\varepsilon_j = 0$ и $r_j = 0$ для всех $j \geqslant m$. Положим

$$\begin{aligned} \gamma \ : & Q(\varepsilon_0, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m) P(r_1, r_2, \dots, r_m) \mapsto \beta^{\varepsilon_0} P^{t_1} \beta^{\varepsilon_1} P^{t_2} \dots P^{t_m} \beta^{\varepsilon_m}, \\ & \text{где } t_i = \sum_{k=i}^{m} p^{k-i}(r_k + \varepsilon_k). \end{aligned} \tag{3.9}$$

Отображение γ не зависит от выбора m. Нетрудно проверить, что γ сохраняет степень и является биекцией. Обратное отображение $\gamma^{-1} : B_{Adm} \to B_{Mil}$ задается формулами $r_m = t_m - \varepsilon_m$, $r_k = t_k - pt_{k+1} - \varepsilon_k$ для $1 \leqslant k \leqslant m-1$, и $r_j = 0$, $\varepsilon_j = 0$ для $j > m$.

Отображение γ и порядок $<_A$ на B_{Mil} индуцируют порядок на B_{Adm}.

Лемма 3.4 (Овчинникова, [6])**.** *Рассмотрим $E' = (\varepsilon'_0, \varepsilon'_1, \dots)$ и $E'' = (\varepsilon''_0, \varepsilon''_1, \dots)$, для которых $E' <_{L\varepsilon} E''$. Пусть Q_a — произвольный элемент, такой что $Q(E')Q_a \neq 0$ и $Q(E'')Q_a \neq 0$. Тогда $Q(E')Q_a <_{L\varepsilon} Q(E'')Q_a$.*

Доказательство состоит в очевидном применении соотношения (A.19).

Лемма 3.5 (Овчинникова, [6])**.** *Пусть A и B — два милноровских элемента, причем $A <_A B$. Пусть для некоторого Q_a выполняется $Q_a B \neq 0$. Тогда любое слагаемое в разложении по базису Милнора элемента AQ_a относительно порядка $<_A$ меньше, чем $Q_a B$.*

Доказательство следует из перестановочного соотношения (A.21) и леммы 3.4.

Лемма 3.6 (Овчинникова, [6]). *Максимальное слагаемое относительно порядка $<_A$ в разложении по базису Милнора элемента $P(t)Q_{a_1}\dots Q_{a_s}$, где $a_1 < a_2 < \dots < a_s$ и $t \geqslant \sum\limits_i p^{a_i}$, равно $Q_{a_1+1}\dots Q_{a_s+1}P(t-\sum\limits_i p^{a_i})$.*

Доказательство. Применим индукцию по s. Случай $s = 1$ следует из формулы (A.21).

Предположим $s > 1$. Тогда

$$P(t)Q_{a_1}\dots Q_{a_{s+1}} = (Q_{a_1+1}\dots Q_{a_s+1}P(t-\sum_{i=1}^{s} p^{a_i}) + A)Q_{a_{s+1}} =$$

$$= Q_{a_1+1}\dots Q_{a_s+1}Q_{a_{s+1}+1}P(t-\sum_{i=1}^{s+1} p^{a_i}) +$$

$$+ Q_{a_1+1}\dots Q_{a_s+1}Q_{a_{s+1}}P(t-\sum_{i=1}^{s} p^{a_i}) + AQ_{a_{s+1}},$$

где по предположению индукции любое слагаемое в милноровском разложении элемента A относительно порядка $<_A$ меньше, чем

$$Q_{a_1+1}\dots Q_{a_s+1}P(t-\sum_{i=1}^{s} p^{a_i}).$$

Следовательно, в правой части равенства первое слагаемое A-максимально. □

Теорема 3.6 (Овчинникова, [6]). *Для любого допустимого монома P^T милноровский элемент $P(\gamma^{-1}(T))$ является A-максимальным слагаемым в разложении $(P^T)_{Mil}$.*

Доказательство. Случай $m = 0$ совпадает с теоремой 4.1, [87] (см. также [113] теорема 4.1).

Для $m > 0$ будем рассуждать по индукции. Случай $m = 1$ покрывается соотношениями

$$\begin{aligned}\beta P^n &= Q_0P(n),\\ P^n\beta &= Q_0P(n) + Q_1P(n-1),\\ \beta P^n\beta &= Q_0Q_1P(n-1).\end{aligned}$$

Для $m > 1$ рассмотрим последовательность $T = (\varepsilon_0, t_1, \varepsilon_1, \dots, t_m, \varepsilon_m)$, отвечающую допустимому моному P^T. Без ограничения общности можно считать, что $\varepsilon_0 = 0$. По предположению индукции формула (3.9) верна для $T' = (\varepsilon_1, t_2, \varepsilon_2, \dots, t_m, \varepsilon_m)$. Яс-

но, что $\gamma^{-1}(P^{T'}) = Q(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_m, 0, \ldots)P(r_2, \ldots, r_m, 0, \ldots)$. Поэтому

$$P^T = P(t_1)(Q(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots)P(r_2, r_3, \ldots) + \sum_k Q(\Delta_k)P(S_k)), \tag{3.10}$$

где $Q(\Delta_k)P(S_k) <_A \gamma^{-1}(P^{T'})$ для всех k. Из леммы 3.6 следует, что слагаемым с $L\varepsilon$-минимальной Q-частью в милноровском разложении элемента $P(t_1)Q(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots)$ служит $Q(0, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots)P(t_1 - \sum\limits_{k=1}^{m} p^{k-1}p^k)$. Следовательно, A-максимальное слагаемое в разложении по базису Милнора элемента $P(t_1)Q(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots)P(r_2, r_3, \ldots)$ возникает из

$$Q(0, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots)P(t_1 - \sum_{k=1}^{m} p^{k-1}\varepsilon_k)P(r_2, r_3, \ldots),$$

поскольку у всех остальных слагаемых Q-части больше относительно порядка $<_{L\varepsilon}$.

Теперь определим A-максимальное слагаемое в милноровском разложении элемента $Q(0, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots)P(t_1 - \sum\limits_{k=1}^{m} p^{k-1}\varepsilon_k)P(r_2, r_3, \ldots)$. По лемме 4.2 [87] это в точности элемент $P(r_1, r_2, \ldots)$. Отметим, что доказательство этой леммы аналогично доказательству леммы 4.3 работы [113].

Рассмотрим оставшиеся слагаемые в (3.10). Для простоты обозначим произвольный элемент $Q(\Delta_k)R(S_k)$ через

$$Q(\Delta)R(S) = Q_0^{\delta_1}Q_1^{\delta_2}\ldots Q_{l-1}^{\delta_l}P(s_1, s_2, \ldots).$$

Этот элемент A-меньше, чем $Q(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots)P(r_2, r_3, \ldots)$, поэтому имеются два случая

Случай (1): $(\delta_1, \delta_2, \ldots) >_{L\varepsilon} (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots)$. По лемме 3.6 слагаемые с $L\varepsilon$-минимальной Q-частью в милноровском разложении $P(t_1)Q(\Delta)R(S)$ возникают из $Q(0, \delta_1, \delta_2, \ldots)P(t_1 - \sum\limits_k p^{k-1}\delta_k)P(R)$. Но все они A-меньше, чем $Q(0, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots)P(X)$ для всех X.

Случай (2): $(\delta_1, \delta_2, \ldots) = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots)$ и $S <_{MR} (r_2, r_3, \ldots)$. В милноровском разложении элемента $P(t_1)Q(\Delta)R(S)$ максимальное слагаемое возникает из $Q(0, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots)P(t_1 - \sum\limits_k p^{k-1}\varepsilon_k)P(S)$. Согласно следствию 4.1 из [87], которое является непосредственным обобщением на случай $p > 2$ следствия 4.4 из [113], любое слагаемое в $(P(t_1 - \sum\limits_k p^{k-1}\varepsilon_k)P(S))_{Mil}$ MR-меньше, чем $P(r_1, r_2, \ldots)$. □

3.2.3 Базис βC-мономов

Напомним, см. определение 2.12, что βC-моном — это моном

$$P^J = \beta^{\varepsilon_{r+1}}P^{j_r}\beta^{\varepsilon_r}\ldots\beta^{\varepsilon_1}P^{j_0}\beta^{\varepsilon_0},$$

для которого последовательность $J = (\varepsilon_{r+1}, j_r, \varepsilon_r, \ldots, \varepsilon_1, j_0, \varepsilon_0)$ удовлетворяет двум условиям:

(1) $j_k \leqslant pj_{k-1} + \varepsilon_k$ для всех k,

(2) p^k делит $j_k - pj_{k-1} - \varepsilon_k$ для всех k.

Последовательность J, удовлетворяющая условиям (1) и (2), называется βC-последовательностью. Условие (2) может быть быть заменено на эквивалентное:

(2′) p^k делит $j_k - \sum\limits_{l=0}^{k} p^{k-l}\varepsilon_l$ для всех k.

Моном, составленный только из элементов P^j называется *C-мономом*, если он является βC-мономом, для которого $\varepsilon_k = 0$ для всех k. Напомним также, что множество $B_{\beta C}$ всех βC-мономов образует аддитивный базис алгебры $\mathcal{A}_p$.

Рассмотрим на множестве B_{Mil} порядок, использованный в разделе 3.2.2 (см. определение 3.9).

Определение 3.11. Зададим отображение $\gamma : B_{Mil} \to B_{\beta C}$ следующим образом. Для элемента $Q(E)P(R)$ выберем целое m, для которого $\varepsilon_j = 0$ и $r_j = 0$ для всех $j > m$. Положим

$$\begin{aligned} \gamma\ :& Q(E)P(R) = Q(\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_m)P(r_1, r_2, \ldots, r_m) \mapsto \\ &\mapsto \beta^{\delta_m} P^{t_m} \beta^{\delta_{m-1}} P^{t_{m-1}} \ldots P^{t_1} \beta^{\delta_0}, \\ \text{где } \delta_i = \varepsilon_{m-i},&\quad t_i = p^{i-1} \sum_{k=i}^{m} r_k + \sum_{k=m-1+i}^{m} p^{m-1+i-k}\varepsilon_k. \end{aligned} \tag{3.11}$$

Легко проверить, что элемент $\gamma(Q(E)P(R))$ корректно определен, т. е. не зависит от выбора m. Также легко проверить, что γ сохраняет степень и является биекцией. Обратное отображение задается формулами

$$r_m = \frac{t_m - (\delta_{m-1} + p\delta_{m-2} + \ldots + p^{m-1}\delta_0)}{p^{m-1}}, \tag{3.12}$$

$$r_k = \frac{pt_k + \delta_k - t_{k+1}}{p^k}, \text{ for } k = 1, \ldots, m-1. \tag{3.13}$$

С помощью отображения γ перенесем A-порядок с B_{Mil} на $B_{\beta C}$.

Теорема 3.7. *Для произвольного βC-монома P^T милноровский элемент $Q(E)P(R) = \gamma^{-1}(P^T)$ является максимальным в милноровском разложении $(P^T)_{Mil}$.*

Доказательство. Проведем индукцию по m. Случай $m = 0$ очевиден, а случай $m = 1$ покрывается формулами

$$\begin{aligned} \beta P^n &= Q_0 P(n), \\ P^n \beta &= Q_0 P(n) + Q_1 P(n-1), \\ \beta P^n \beta &= Q_0 Q_1 P(n-1). \end{aligned}$$

Для $m > 1$ рассмотрим βC-моном $P^T = P^{t_m}\beta^{\delta_{m-1}}P^{t_{m-1}}\beta^{\delta_{m-2}}\dots\beta^{\delta_1}P^{t_1}\beta^{\delta_0}$, где без ограничения общности мы положили $\delta_m = 0$. Пусть $\gamma^{-1}(P^T) = Q(E)P(R)$, где $E = (\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_m)$ и $R = (r_1, \dots, r_m)$. По предположению индукции теорема верна для $P^{T'}$, где $T' = (\delta_{m-1}, t_{m-1}, \dots t_1, \delta_0)$. Пусть $\gamma^{-1}(P^{T'}) = Q(\varepsilon'_0, \dots, \varepsilon'_{m-1}, 0, \dots)P(r'_1, \dots, r'_{m-1}, 0, \dots)$, где

$$\begin{aligned} \varepsilon'_k &= \delta_{m-1-k}, \\ r'_{m-1} &= \frac{t_{m-1} - (\delta_{m-2} + p\delta_{m-3} + \dots + p^{m-2}\delta_0)}{p^{m-2}}, \\ r'_k &= \frac{pt_k + \delta_k - t_{k+1}}{p^k} \text{ для } k = 1, \dots, m-2. \end{aligned}$$

Нетрудно проверить, что $r'_1 = r_1, \dots, r'_{m-2} = r_{m-2}, r'_{m-1} = r_{m-1} + r_m$ и $\varepsilon'_j = \varepsilon_{j+1}$ для всех j. Тогда

$$\gamma^{-1}(P^{T'}) = Q(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots)P(r_1, \dots, r_{m-2}, r_m + r_{m-1}) + \sum_k c_k Q(\Delta_k)P(S_k),$$

где $c_k \in \mathbb{Z}/p$ и

$$Q(\Delta_k)P(S_k) <_A Q(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots)P(r_1, \dots, r_{m-2}, r_m + r_{m-1})$$

для всех k. Имеем равенство

$$\begin{aligned} (P^T)_{Mil} &= \big(P(t_m)P^T\big)_{Mil} = \\ &= \big(P(t_m)[Q(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots)P(r_1, \dots, r_{m-2}, r_m + r_{m-1}) + \\ &\qquad + \sum_k c_k Q(\Delta_k)P(S_k)]\big)_{Mil}. \end{aligned}$$

Максимальное слагаемое в милноровском разложении элемента

$$P(t_m)Q(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots)P(r_1, \dots, r_{m-2}, r_m + r_{m-1})$$

возникает из милноровского разложения слагаемого

$$Q(0, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots)P(t_m - \sum_k p^{k-1}\varepsilon_k)P(r_1, \dots, r_{m-2}, r_m + r_{m-1})$$

по лемме 3.6. Этот элемент в точности равен

$$Q(0, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots)P(r_1, \dots, r_{m-2}, r_{m-1}, r_m),$$

детали легко извлечь из доказательства теоремы 3.1.

Остается показать, что любое слагаемое в $(P(t_m)Q(\Delta_k)P(S_k))_{Mil}$ относительно

порядка $<_A$ меньше, чем $Q(E)P(R)$. Если $\Delta_k >_{L\varepsilon} (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots)$, то по лемме 3.6 Q-часть любого слагаемого в $(P(t_m)Q(\Delta_k)P(S_k))_{Mil}$ $L\varepsilon$-больше, чем $(0, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots)$. Если же $\Delta_k = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots)$ и $S_k <_{MR} (r_1, \ldots, r_{m-2}, r_{m-1} + r_m)$, то максимальное слагаемое в милноровском разложении $(P(t_m)Q(\Delta_k)P(S_k))_{Mil}$ возникает из произведения $Q(0, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots)P(t_m - \sum\limits_l p^{k-1}\varepsilon_k)P(S_k)$. Из доказательства теоремы 3.1 следует, что любое слагаемое в разложении $(P(t_m - \sum\limits_l p^{k-1}\varepsilon_k)P(S_k))_{Mil}$ в порядке $<_A$ меньше, чем $P(r_1, \ldots, r_{m-1}, r_m)$. □

Следствие 3.9. *Базис допустимых мономов и базис βC-мономов треугольны по отношению друг к другу.*

Это вытекает из теорем 3.6 и 3.7, так как в обеих теоремах используется один и тот же порядок на базисе Милнора.

3.2.4 βX-базис

Зададим специальный порядок на множестве всех элементов вида $P(R)$ и отображение γ множества B_{Mil} в множество всех βX-мономов. Для элемента $P(r_0, \ldots, r_m)$ (заметим, что здесь мы сдвинули нумерацию элементов r_j) рассмотрим p-адические разложения

$$r_j = \sum_i \alpha_i(r_j)p^i.$$

Положим $\alpha_{ij} = \alpha_i(r_j)$, $i, j \geqslant 0$. Расположим числа α_{ij} в последовательность

$$(\alpha_{00}, \alpha_{01}, \alpha_{10}, \alpha_{02}, \alpha_{11}, \alpha_{20}, \alpha_{03}, \ldots).$$

Левый лексикографический порядок на множестве всех таких последовательностей задает порядок $<_{ML}$ на множестве милноровских элементов вида $P(R)$.

Пусть $E = (\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots)$ выполняется $Q(E) = Q_{a_1} \ldots Q_{a_m}$, где $a_1 < \ldots < a_m$. Для милноровского элемента $Q(E)P(R)$ определим

$$\gamma(Q(E)P(R)) = X_0^{a_1-1}\beta \ldots X_0^{a_m-1}\beta(X_0^0)^{\alpha_{00}}(X_0^1)^{\alpha_{01}}(X_1^1)^{\alpha_{10}}(X_0^2)^{\alpha_{02}} \ldots (X_i^{i+j})^{\alpha_{ij}} \ldots,$$

где $X_0^{a_1-1} = 1$ для $a_1 = 0$.

Лемма 3.7. *Отображение γ сохраняет степень и является биекцией из множества B_{Mil} на множество $B_{\beta X}$ всех βX-мономов.*

Определение 3.12. Для двух милноровских элементов $Q(E')P(R')$ и $Q(E'')P(R'')$ положим

$$Q(E')P(R') <_{\beta X} Q(E'')P(R'')$$

тогда и только тогда, когда выполняется одно из двух условий:

(1) $E' >_{L\varepsilon} E''$;

(2) $E' = E''$ и $R' <_{ML} R''$.

Лемма 3.8. *Для любого $m \geqslant 0$ имеет место соотношение*

$$X_0^m \beta = Q_{m+1} + \sum_{j=0}^{m} Q_j P_j, \tag{3.14}$$

где $P_j \in \overline{\mathcal{A}}_p$ — элементы подалгебры $\overline{\mathcal{A}}_p$.

Доказательство. Для $m = 0$ утверждение следует из равенства $X_0^0\beta = P^1\beta = P^1Q_0 = Q_1 + Q_0P^1$.

Для $m > 0$ будем рассуждать по индукции:

$$X_0^{m+1}\beta = P^{p^{m+1}} X_0^m \beta = P^{p^{m+1}}(Q_{m+1} + \sum_{j=0}^{m} Q_j P_j) =$$

$$= Q_{m+2} + Q_{m+1}P^{p^{m+1}} + \sum_{j=0}^{m}(Q_j P^{p^{m+1}} + Q_{j+1}P^{p^{m+1}-p^j})P_j.$$

□

Теорема 3.8. *Для произвольного βX-монома $\theta = \beta^\varepsilon X_0^{a_1}\beta \dots X_0^{a_m}\beta X$ положим $Q(E)P(R) = \gamma^{-1}(\theta)$. Тогда милноровское разложение θ имеет вид*

$$(\theta)_{Mil} = Q(E)P(R) + \sum_j c_j Q(E_j)P(S_j), \tag{3.15}$$

где $c_j \in \mathbb{Z}/p$ и $Q(E_j)P(S_j) <_X Q(E)P(R)$ для всех j.

Доказательство. Без ограничения общности можно считать, что $\varepsilon = 0$; в противном случае нужно домножить формулы, которые будут получены ниже, на $\beta = Q_0$ слева. Применим индукцию по m. Для $m = 0$ утверждение совпадает с теоремой 3.4. Для $m > 0$ рассмотрим βX-моном $\theta' = X_0^{a_2}\beta \dots X_0^{a_m}\beta X$. По предположению индукции

$$(X_0^{a_2}\beta \dots X_0^{a_m}\beta X)_{Mil} = Q_{a_2+1} \dots Q_{a_m+1}P(R) + \sum_j c'_j Q(E'_j)P(S'_j), \tag{3.16}$$

где $c'_j \in \mathbb{Z}/p$ и $Q(E'_j)P(S'_j) <_X Q(E')P(R)$ для всех j. Таким образом, нам нужно вычислить X-наибольшее слагаемое в милноровском разложении

$$\big((Q_{a_1+1} + \sum_{k=0}^{a_1} Q_k P_k)(Q_{a_2+1} \dots Q_{a_m+1}P(R) + \sum_j c'_j Q(E'_j)P(S'_j))\big)_{Mil} \tag{3.17}$$

Это разложение содержит элемент $Q_{a_1+1}Q_{a_2+1}\dots Q_{a_m+1}P(R) = Q(E)P(R)$. Мы докажем, что все остальные слагаемые X-меньше, чем $Q(E)P(R)$.

Имеем $E'_j >_{L\varepsilon} E'$ для всех j, поэтому произведение $Q_{a_1+1}Q(E'_j)$ либо нулевое, либо $L\varepsilon$-больше, чем $Q_{a_1+1}Q(E') = Q(E)$.

Рассмотрим произвольное произведение $Q_kP_kQ_{a_2+1}\dots Q_{a_m+1}P(R)$. Прокоммутировав P_j с $Q_{a_2+1}\dots Q_{a_m+1}$, получим произведения вида $Q_{b_2}\dots Q_{b_m}$, где $b_l \geqslant a_l + 1$ для всех l, что следует из соотношения (A.20). В свою очередь, произведение $Q_kQ_{b_2}\dots Q_{b_m}$ либо нулевое, либо $L\varepsilon$-больше, чем $Q_{a_1+1}Q(E')$, так как $k \leqslant a_1$. Такое же рассуждение применимо к любому произведению $Q_kP_kQ(E'_j)P(S'_j)$. □

3.2.5 XC-базис

Напомним, что XC-моном — это моном вида

$$\beta^{\varepsilon}X_0^{m_1}\beta\dots\beta X_0^{m_{r-1}}\beta X_0^{m_r}\beta P^I,$$

где P^I — некоторый C-моном (см. определение 2.12) или 1, $m_r > m_{r-1} > \dots > m_1 \geqslant 0$ и $\varepsilon \in \{0,1\}$. Множество B_{XC} всех XC-мономов образует аддитивный базис алгебры $\mathcal{A}_p$, см. теорему 2.11.

Определим отображение $\gamma : B_{Mil} \to B_{XC}$ формулой

$$\gamma : Q_{a_1}\dots Q_{a_m}P(r_1,\dots,r_n) \mapsto X_0^{a_1-1}\beta\dots X_0^{a_m-1}\beta P^{t_m}\dots P^{t_0},$$

где $t_i = p^{i-1}\sum\limits_{k=i}^{n} r_k$. Здесь мы считаем, что $a_1 < \dots < a_m$ и что $X_0^{a_1-1} = 1$ для $a_1 = 0$.

Отображение γ сохраняет степень и является биекцией. Рассмотрим полный порядок $<_A$ на B_{Mil} (см. определение 3.9) и с помощью γ перенесем его на B_{XC}.

Теорема 3.9. *Для произвольного XC-монома $\theta = \beta^{\varepsilon}X_0^{a_1}\beta\dots X_0^{a_m}\beta P^I$ положим $Q(E)P(R) = \gamma^{-1}(\theta)$. Тогда милноровское разложение элемента θ имеет вид*

$$(\theta)_{Mil} = Q(E)P(R) + \sum_j c_jQ(E_j)P(S_j), \tag{3.18}$$

где $c_j \in \mathbb{Z}/p$ и $Q(E_j)P(S_j) <_X Q(E)P(R)$ для всех j.

Доказательство. Без ограничения общности можно считать, что $\varepsilon = 0$; в противном случае домножим итоговую формулу на слева на $\beta = Q_0$. Для $m = 0$ доказываемое утверждение совпадает с теоремой 3.3. Для $m > 0$ применим индукцию по аналогии с доказательством теоремы 3.8. □

Следствие 3.10. *Базис допустимых мономов, βC-базис и XC-базис треугольны по отношению друг к другу.*

Это следует из теорем 3.6, 3.8, и 3.9, поскольку в них используется одно и то же упорядочение элементов базиса Милнора.

3.2.6 ZA-базис

Напомним обозначение $\hat{Z}^m = P^{p^m+p^{m-1}+\ldots+p+1}$. По лемме 2.13 выполняется равенство $\hat{Z}^m = Z_0^m$.

Напомним, что ZA-моном — это моном вида

$$P^I \beta \hat{Z}^{m_r} \beta \hat{Z}^{m_{r-1}} \beta \ldots \beta \hat{Z}^{m_1} \beta^\varepsilon,$$

где P^I — допустимый моном, составленный только из элементов P^j, или 1, $m_r > m_{r-1} > \ldots > m_1 \geqslant 0$ и $\varepsilon \in \{0, 1\}$.

Множество B_{ZA} всех ZA-мономов образует базис $\mathcal{A}_p$, см. теорему 2.10.

Определим порядок на множестве B_{PQ} всех PQ-мономов следующим образом. Положим $P(R')Q(E') <_{ZA} P(R'')Q(E'')$, если выполняется одно из следующих условий:

(1) $E' >_{L\varepsilon} E''$,

(2) $E' = E''$ и $R' <_{MR} R''$.

Определим отображение $\gamma : B_{PQ} \to B_{ZA}$ по формуле

$$\gamma : P(r_1, r_2, \ldots, r_n)Q_{a_1} \ldots Q_{a_m} \mapsto P^{t_1} \ldots P^{t_n} \beta \hat{Z}^{a_m-1} \ldots \beta \hat{Z}^{a_1-1}, \tag{3.19}$$

где $a_1 < \ldots < a_m$, и $t_i = \sum\limits_{k=i}^{n} p^{k-i} r_k$. Здесь мы считаем, что $\hat{Z}^{a_1-1} = 1$ для $a_1 = 0$. Отображение γ является биекцией, сохраняющей степени. Порядок $<_{ZA}$ с помощью биекции γ перенесем на B_{ZA}.

Лемма 3.9. (*a*) *Для $j > m$ выполняется равенство $Q_j P^{p^m} = P^{p^m} Q_j$.*

(*b*) *Для $j < m$ выполняется равенство*

$$Q_j P^{p^m} = P^{p^m} Q_j - P^{p^m-p^j} Q_{j+1} + P^{p^m-p^j-p^{j+1}} Q_{j+2} + \ldots \pm P^{p^m-p^j-p^{j+1}-\ldots p^{m-1}} Q_m \tag{3.20}$$

(*c*) *Для $m \geqslant 0$ выполняется*

$$\beta \hat{Z}^m = (-1)^{m+1} Q_{m+1} + \sum_{j<m+1} P_j Q_j, \tag{3.21}$$

где для любого j элемент P_j является приведенной степенью из $\overline{\mathcal{A}}_p$ такой, что $\deg P_j + \deg Q_j = \deg \beta \hat{Z}^m = 2p^{m+1} - 1$.

Доказательство. Утверждение (a) следует из соотношения (A.21). Для (b) мы последовательно применяем соотношение (A.21):

$$\begin{aligned} Q_j P^{p^m} &= P^{p^m} Q_j - Q_{j+1} P^{p^m - p^j} = \\ &= P^{p^m} Q_j - P^{p^m - p^j} Q_{j+1} + Q_{j+2} P^{p^m - p^j - p^{j+1}} = \\ &\quad = \ldots = \\ &= P^{p^m} Q_j - P^{p^m - p^j} Q_{j+1} + \\ &\quad + P^{p^m - p^j - p^{j+1}} Q_{j+2} + \ldots \pm P^{p^m - p^j - p^{j+1} - \ldots p^{m-1}} Q_m. \end{aligned}$$

Для доказательства утверждения (c) мы применим те же рассуждения, что и для (b), но заметим при этом, что на последнем шаге самое последнее слагаемое равно $(-1)^{m+1} Q_{m+1}$. □

Теорема 3.10. *Для произвольного ZA-монома*

$$\theta = P^T \beta \hat{Z}^{a_m - 1} \ldots \beta \hat{Z}^{a_1 - 1}$$

положим

$$P(R)Q(E) = P(R) Q_{a_1} \ldots Q_{a_m} = \gamma^{-1}(\theta).$$

Тогда разложение θ по PQ-базису имеет вид

$$(\theta)_{PQ} = (-1)^{\delta} P(R)Q(E) + \sum_j c_j P(S_j)Q(E_j), \tag{3.22}$$

где $\delta = m(m-1)/2 + \sum\limits_j a_j$, $c_j \in \mathbb{Z}/p$ и $P(S_j)Q(E_j) <_{ZA} P(R)Q(E)$ для всех j.

Доказательство. Для $m = 0$ утверждение совпадает с теоремой 3.6. Для $m > 0$ применим индукцию. Рассмотрим ZA-моном

$$\theta' = P^T \beta \hat{Z}^{a_m - 1} \ldots \beta \hat{Z}^{a_2 - 1}$$

(заметим, что $a_2 > 0$). По предположению индукции

$$(\theta')_{PQ} = (-1)^{\delta'} P(R)Q(E') + \sum_{c'_j} P(S'_j)P(E'_j),$$

где $\delta' = (m-2)(m-1)/2 + \sum\limits_{j=2}^{m}$, $c_j \in \mathbb{Z}/p$, $P(S'_j)Q(E'_j) <_{ZA} P(R)Q(E')$ для всех j, и $Q(E') = Q_{a_2} \ldots Q_{a_m}$. По лемме 3.9

$$\beta \hat{Z}^{a_1 - 1} = (-1)^{a_1} Q_{a_1} + \sum_{i < a_1} P_i Q_i.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}(\theta)_{PQ} &= ((\theta')_{PQ}\beta\hat{Z}^{a_1-1})_{PQ} = \\ &= \Big[[(-1)^{\delta'}P(R)Q(E')+ \\ &\quad + \sum_{c'_j} P(S'_j)Q(E'_j)][(-1)^{a_1}Q_{a_1} + \sum_{i<a_1} P_iQ_i]\Big]_{PQ} = \\ &= \big[(-1)^{\delta'+a_1}P(R)Q(E')Q_{a_1}+ \\ &\quad + (-1)^{(m-2)(m-1)/2}P(R)Q(E')\sum_{i<a_1} P_iQ_i+ \\ &+ \sum_{c'_j} P(S'_j)Q(E'_j)(-1)^{a_1}Q_{a_1} + \sum_{c'_j,i<a_1} P(S'_j)Q(E'_j)P_iQ_i\big]_{PQ}\end{aligned}$$

Для первого слагаемого имеем

$$(-1)^{\delta'+a_1}P(R)Q(E')Q_{a_1} \quad = \quad (-1)^{\delta'+a_1+(m-1)}P(R)Q_{a_1}Q(E') \quad = \quad (-1)^{\delta}P(R)Q(E).$$

Это в точности нужное максимальное слагаемое в (3.22). Остальные слагаемые ZA-меньше, чем $P(R)Q(E)$. Это можно установить, рассуждая аналогично доказательству теоремы 3.5. А именно, достаточно проверить, что коммутирование $Q(E')$ с P_i и $Q(E'_j)$ с P_i не может увеличить соответствующие мономы. □

3.2.7 Семейство βP^s_t-базисов

Рассмотрим элементы $P^s_t = P(r_1, r_2, \ldots) \in \overline{\mathcal{A}}_p$, где все $r_k = 0$, исключая $r_t = p^s$. Напомним, P^s_t-мономом называется произведение вида $(P^{s_1}_{t_1})^{m_1} \ldots (P^{s_k}_{t_k})^{m_k}$ с попарно различными $P^{s_j}_{t_j}$ и $0 < m_j < p$. Зафиксируем полные порядки на каждом конечном множестве троек целых чисел $\{(s_j, t_j, m_j) : j = 1, \ldots, k, 0 < m_j < p, s_j \geqslant 0, t_j > 0\}$. Перемножим элементы $(P^{s_j}_{t_j})^{m_j}$ в каждом таком множестве получим множество B_P элементов алгебры $\overline{\mathcal{A}}_p$. Это множество B_P образует базис $\overline{\mathcal{A}}_p$, причем треугольный по отношению к базису Милнора подалгебры $\overline{\mathcal{A}}_p$, см. раздел 3.1.3 и теорему 3.2. Заметим, что имеется бесконечное число B_P таких базисов, поскольку порядки сомножителей $(P^{s_j}_{t_j})^{m_j}$ в каждом P^s_t-мономе можно выбирать независимым от других мономов способом.

Стандартный способ расширить B_P до базиса $\mathcal{A}_p$ состоит в том, чтобы рассмотреть набор элементов $\{Q_{a_1} \ldots Q_{a_m}\theta \mid m \geqslant 0, a_1 < \ldots < a_m, \theta \in B_P\}$, см. [128]. Такие базисы естественно называть *βP^s_t-базисами*. Треугольность любого такого базиса по отношению к базису Милнора B_{Mil} доказывается следующим образом: соответствующая матрица перехода имеет блочную структуру, причем блоки находятся во взаимно однозначном соответствии с последовательностями $Q_{a_1} \ldots Q_{a_m}$, где $m \geqslant 0$,

$a_1 < \ldots < a_m$. Каждый такой блок совпадает с матрицей перехода между B_P и базисом Милнора подалгебры $\overline{\mathcal{A}}_p$, которая при подходящем выборе упорядочений этих двух базисов треугольна, см. подраздел 3.1.3.

Закончим этот раздел замечанием, что порядок на множестве милноровских элементов подалгебры $\overline{\mathcal{A}}_p$, использованный в разделе 3.1.3 для доказательства треугольности матрицы перехода к B_P, был один и тот же для всех базисов вида B_P. Из этого наблюдения следует, что любые два βP_t^s-базиса алгебры $\mathcal{A}_p$ треугольны по отношению друг к другу.

Глава 4

Приложения аддитивных базисов алгебр Стинрода в алгебраической топологии

4.1 Свободные образующие алгебры $H^*(K(\mathbb{Z}/p,n),\mathbb{Z}/p)$

Напомним, для допустимой последовательности $I=(\varepsilon_{r+1},i_r,\varepsilon_r,i_{r-1},\ldots,\varepsilon_1,i_0,\varepsilon_0)$ *избыточность* определяется как

$$ex\ (I)=2i_r-(\varepsilon_0+\ldots+\varepsilon_r)-2(p-1)(i_0+\ldots+i_{r-1}). \tag{4.1}$$

Следующий результат является классическим.

Теорема 4.1. (Картан–Серр, см. [44; 149; 221]) *Алгебра когомологий $H^*(K(\mathbb{Z}/p,n);\mathbb{Z}/p)$ является свободной градуированной коммутативной алгеброй, порожденной элементами $P^I\iota_n$, где $\iota_n\in H^n(K(\mathbb{Z}/p,n);\mathbb{Z}/p)$ — фундаментальный класс, а P^I — произвольный допустимый моном, такой что $ex\ (I)<n$.*

Основной результат этого раздела — теорема 4.3, в которой строится новое семейство свободных образующих алгебры $H^*(K(\mathbb{Z}/p,n);\mathbb{Z}/p)$ в терминах βC-мономов.

Для последовательности $J=(\varepsilon_{r+1},j_r,\varepsilon_r,j_{r-1},\ldots,\varepsilon_1,j_0,\varepsilon_0)$ определим

$$e(J)=2j_0+(\varepsilon_1+\ldots+\varepsilon_r-\varepsilon_0). \tag{4.2}$$

Положим также $e(P^J)=e(J)$ и $\ell(J)=r$. Смысл этого определения объясняется следующим утверждением и теоремой 4.3.

Лемма 4.1. *Для βC–монома J выполнено равенство $e(J)=ex\ (\Delta^{-1}(J))$.*

Доказательство. Следует непосредственно из формулы (2.16), см. также лемму 2.14. □

Лемма 4.2. *Предположим, что $M \in \mathcal{A}_p$ — некоторый моном и x — класс когомологий некоторого пространства. Если $\deg x < e(M)$, то $Mx = 0$.*

Доказательство. Пусть $M = M^A$, где $A = (\varepsilon_{r+1}, a_r, \varepsilon_r, a_{r-1}, \ldots, \varepsilon_1, a_0, \varepsilon_0)$. Проведем индукцию по $r = \ell(A)$. Можно предположить, что $\varepsilon_0 = 0$, иначе рассмотрим βx вместо x. Также достаточно доказать утверждение для $\varepsilon_{r+1} = 0$.

Базой индукции является случай $\ell(A) = 0$. В этом случае $Mx = P^{a_0}x$ и $e(M) = 2a_0 > \deg x$. Тогда $Mx = P^{a_0}x = 0$ по соображениям размерности.

Для шага индукции пусть $M = M_1 P^{a_1}\beta^{\varepsilon_1}P^{a_0}$. Для простоты определим $\delta(x, M) = \deg x - e(M)$. Теперь рассмотрим два случая.

Случай 1: $a_1 \geqslant pa_0 + \varepsilon_1$. Рассмотрим $y = \beta^{\varepsilon_1}P^{a_0}x$ и $A_1 = (0, a_r, \varepsilon_r, a_{r-1}, \ldots, \varepsilon_2, a_1, 0)$. Тогда

$$\begin{aligned}\delta(y, P^{A_1}) = \deg y - e(A_1) = \\ = \deg x + 2(p-1)a_0 + \varepsilon_1 - 2a_1 - (\varepsilon_2 + \ldots + \varepsilon_r) = \\ = \deg x - 2a_0 - (\varepsilon_1 + \ldots + \varepsilon_r) + 2(pa_0 + \varepsilon_1 - a_1) \leqslant \delta(x, M) < 0.\end{aligned}$$

Но $\ell(A_1) < \ell(A)$, следовательно, применяется гипотеза индукции: $P^A x = P^{A_1} y = 0$.

Случай 2: $a_1 < pa_0 + \varepsilon_1$. В этом случае применим соотношения Адема (A.4) и (A.5) к произведению $P^{a_1}\beta^{\varepsilon_1}P^{a_0}$. Для $\varepsilon_1 = 1$ имеем

$$P^{a_1}\beta^{\varepsilon_1}P^{a_0} = \sum_{j=0}^{[a_1/p]} c'_j \beta^{\varepsilon_1}P^{a_0+bp+\varepsilon_1-j}P^j + \sum_{j=0}^{[(a_1-1)/p]} c''_j P^{a_0+bp+\varepsilon_1-j}\beta^{\varepsilon_1}P^j, \tag{4.3}$$

где c'_j, c''_j — биномиальные коэффициенты со знаками, см. формулу (A.5).

Для случая $\varepsilon_1 = 0$ имеем то же соотношение с опущенной второй суммой и коэффициентами c'_j, описываемыми формулой (A.4), поэтому мы можем рассматривать оба соотношения Адема (то есть случаи $\varepsilon_1 = 0$ и $\varepsilon_1 = 1$) одновременно.

Любое слагаемое из первой суммы в (4.3) равно нулю, если $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 1$. В противном случае рассмотрим $y = P^j x$ и $A_1 = (0, a_r, \varepsilon_r, a_{r-1}, \ldots, a_2, \varepsilon, a_1 + a_0 - j, 0)$, где $\varepsilon = 1$, если один из ε_1 и ε_2 равен 1, и $\varepsilon = 0$, если $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0$.

Имеем

$$\begin{aligned}\delta(y, A_1) = \deg y - e(A_1) = \deg x + 2(p-1)j - 2(a_0 + a_1 - j) - (\varepsilon + \varepsilon_3 + \ldots + \varepsilon_r) = \\ = \deg x - 2a_0 - (\varepsilon_1 + \ldots + \varepsilon_r) + 2(pj - a_1) \leqslant \delta(x, M) < 0,\end{aligned}$$

так как $j \leqslant a_1/p$.

Для слагаемого из второй суммы в (4.3) рассмотрим $y = \beta^{\varepsilon_1}P^j x$ и $A_1 =$

$(0, a_r, \varepsilon_r, a_{r-1}, \ldots, a_2, \varepsilon_2, a_1 + a_0 - j, 0)$. Имеем

$$\delta(y, A_1) = \deg y - e(A_1) = \deg x + 2(p-1)j + \varepsilon_1 - 2(a_0 + a_1 - j) - (\varepsilon_2 + \ldots + \varepsilon_r) =$$
$$= \deg x - 2a_0 - (\varepsilon_1 + \ldots + \varepsilon_r) + 2(pj + \varepsilon_1 - a_1) \leqslant \delta(x, M) < 0.$$

так как $j \leqslant (a_1 - 1)/p$.

В обоих случаях $\ell(A_1) < \ell(A)$, следовательно, применимо предположение индукции, и $P^{A_1} y = 0$. □

Теперь мы опишем действие монома $M = P^A$ на класс когомологий x при условии $e(M) = \deg x$. Наше утверждение является обобщением известного факта, что если $2a_0 = \deg x$, то

$$P^{a_r} \ldots P^{a_1} P^{a_0} x = \begin{cases} (P^{a_r/p} \ldots P^{a_1/p} x)^p & \text{если все } a_k, k \geqslant 1, \text{ делятся на } p, \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}$$

Элемент Mx может обратиться в нуль по лемме 4.2. Поэтому естественно рассмотреть следующий класс мономов.

Определение 4.1. Мы говорим, что M является *n-убивающим*, если существует k, $0 \leqslant k \leqslant r$, такое, что

$$2a_k + \varepsilon_{k+1} + \ldots + \varepsilon_r > n + 2(p-1)(a_0 + \ldots + a_{k-1}) + (\varepsilon_0 + \ldots + \varepsilon_k). \tag{4.4}$$

Пусть x, $\deg x = n$, — класс когомологий некоторого топологического пространства. Предположим, что M является n-убивающим. Тогда это определение позволяет применить лемму 4.2 к моному $M_1 = \beta^{\varepsilon_{r+1}} P^{a_r} \beta^{\varepsilon_r} \ldots \beta^{\varepsilon_{k+1}} P^{a_k}$ и классу $y = \beta^{\varepsilon_k} P^{a_{k-1}} \ldots P^{a_0} \beta^{\varepsilon_0} x$, чтобы показать, что $Mx = 0$. Действительно, неравенство в определении означает, что $e(M_1) > \deg y$.

Заметим, что более сильное неравенство $2a_k > n + 2(p-1)(a_0 + \ldots + a_{k-1}) + (\varepsilon_0 + \ldots + \varepsilon_k)$ дает $P^{a_k} y = 0$ просто по соображениям размерности.

Замечание 4.1. *Для $n = e(M)$ неравенство* (4.4) *может быть записано как*

$$0 > (pa_0 + \varepsilon_1 - a_1) + \ldots + (pa_{k-1} + \varepsilon_k - a_k).$$

Действие не-$\deg x$-убивающих мономов может быть описано следующим образом. Пусть $\varepsilon_j = 0$ для всех $1 \leqslant j \leqslant r$, за исключением $j = n_1, \ldots, n_k$, где $1 \leqslant n_1 < \ldots < n_k \leqslant r$. Для всех j определим b_j и δ_j по формуле $a_j = pb_j + \delta_j$, $0 \leqslant \delta_j < p$.

Теорема 4.2. *Пусть x — класс когомологий некоторого топологического пространства, и пусть $M = P^A$ — не-$\deg x$-убивающий моном. Тогда для $e(M) = \deg x$ имеем следующие случаи.*

(A) Если $\varepsilon_{r+1} = 0$, и $\delta_j = 0$ за исключением $\delta_{m_1} = \ldots = \delta_{m_k} = 1$, где

$$m_k \geqslant n_k > m_{k-1} \geqslant n_{k-1} > \ldots > m_1 \geqslant n_1,$$

то $P^A x = (P^{A_1} x)^p$, где

$$A_1 = (\delta_r, b_r, \delta_{r-1}, \ldots, \delta_1, b_1, \varepsilon_0). \tag{4.5}$$

(B) Если $\varepsilon_{r+1} = 0$, и $\delta_j = 0$ за исключением $\delta_{m_1} = \ldots = \delta_{m_{k-1}} = 1$, где

$$n_k > m_{k-1} \geqslant n_{k-1} > \ldots > m_1 \geqslant n_1,$$

то $P^A x = P^{A_1} x$, где

$$A_1 = (1, \sum_{j=0}^{r} a_j - \sum_{j=1}^{r} b_j, \delta_r, b_r, \delta_{r-1}, \ldots, \delta_1, b_1, \varepsilon_0). \tag{4.6}$$

(C) Если $\varepsilon_{r+1} = 0$ и δ_j не соответствуют условиям из пунктов (A) и (B), то $P^A x = 0$.

(D) Если $\varepsilon_{r+1} = 1$, то $P^A x = 0$.

Заметим, что на δ_0 условия не накладываются.

Доказательство. Без потери общности можно считать, что $\varepsilon_0 = 0$ (иначе используем βx вместо x). Заметим, что (D) следует из (A), (B) и (C) благодаря равенствам $\beta(y^p) = 0$ и $\beta^2 = 0$.

Проведем индукцию по $r = \ell(A)$. База индукции очень интересна. Она состоит из двух случаев:

(1) $P^{a_0} x$, где $2a_0 = \deg x$. Очевидно, что $P^A x = (x)^p$ (часть (A) теоремы).

(2) $P^{pa_0} \beta P^{a_0} x$, где $2a_0 + 1 = \deg x$. В этом случае применяем соотношение Адема к произведению $P^{pa_0} \beta P^{a_0}$. По соображениям размерности все слагаемые дают нулевой вклад в $P^{pa_0} \beta P^{a_0} x$, за исключением одного слагаемого $\beta P^{pa_0} P^{a_0} x$ (часть (B) теоремы).

Заметим, что все остальные возможности для $P^{a_1} \beta^{\varepsilon_1} P^{a_0} x$ покрываются шагом индукции.

Дальше мы используем обозначения из доказательства леммы 4.2. Продолжим шаг индукции так же, как в доказательстве леммы 4.2. Эта лемма также позволяет нам обращать внимание только на слагаемые $P^B y$, которые удовлетворяют $\delta(y, B) = 0$. Действительно, $P^B y = 0$, как только $\delta(y, B) < 0$.

Пусть $M = M' P^{a_1} \beta^{\varepsilon_1} P^{a_0}$. По предположению M является не-$\deg x$-убивающим, в частности неравенство (4.4) не выполняется для $k = 1$. Следовательно, $0 \leqslant pa_0 + \varepsilon_1 - a_1$.

Случай 1: $a_1 = pa_0 + \varepsilon_1$. Рассмотрим $y = \beta^{\varepsilon_1} P^{a_0} x$ и $A_1 = (0, a_r, \varepsilon_r, a_{r-1}, \ldots, \varepsilon_2, a_1, 0)$. Тогда

$$\delta(y, P^{A_1}) = \delta(x, M) = 0.$$

Поскольку $\ell(A_1) < \ell(A)$, предположение индукции применимо к классу когомологий y и не-$\deg y$-убивающему моному P^{A_1}.

Случай 2: $a_1 < pa_0 + \varepsilon_1$. К произведению $P^{a_1}\beta^{\varepsilon_1}P^{a_0}$ можно применить соотношение Адема. Для $\varepsilon_1 = 1$ имеем

$$P^{a_1}\beta P^{a_0} = \sum_{j=0}^{[a_1/p]} c'_j \beta P^{a_0+a_1+1-j} P^j + \sum_{j=0}^{[(a_1-1)/p]} c''_j P^{a_0+a_1+1-j}\beta P^j, \tag{4.7}$$

где c'_j, c''_j — биномиальные коэффициенты со знаками, которые задаются соотношением Адема (A.5).

Для $\varepsilon_1 = 0$ имеем

$$P^{a_1}P^{a_0} = \sum_{j=0}^{[a_1/p]} c'_j P^{a_0+a_1-j} P^j, \tag{4.8}$$

где c'_j — биномиальные коэффициенты со знаками, которые задаются соотношением Адема (A.4).

Докажем, что после преобразования элемента $Mx = M'P^{a_1}\beta^{\varepsilon_1}P^{a_0}x$ с помощью соответствующей формулы (4.7) или (4.8) только одно слагаемое может быть ненулевым по лемме 4.2. После этого мы применим предположение индукции к этому слагаемому.

Для слагаемого из первой суммы в (4.7) имеем

$$\delta(y, A_1) = \delta(x, M) + 2(pj - a_1),$$

что меньше нуля, за исключением случая, когда a_1 делится на p и $j = a_1/p$, то есть $\delta_1 = 0$ и $j = b_1$. В этом случае из соотношения (A.5) для $j = a_1/p$ имеем $c'_j = (-1)^{a_1+b_1}\binom{*}{a_1-pj} = (-1)^{b_1(p+1)}\binom{*}{0} = 1$.

Для слагаемого из второй суммы в (4.7) имеем

$$\delta(y, A_1) = \delta(x, A) + 2(pj + 1 - a_1),$$

что меньше нуля, за исключением случая, когда $a_1 - 1$ делится на p и $j = (a_1 - 1)/p$, то есть $\delta_1 = 1$ и $j = b_1$. В этом случае из соотношения (A.5) для $j = (a_1 - 1)/p$ имеем $c''_j = (-1)^{a_1+b_1-1}\binom{*}{a_1-pj-1} = (-1)^{b_1(p+1)}\binom{*}{0} = 1$.

Следовательно, в (4.7) все слагаемые дают нулевой вклад в $P^A x$, за исключением, возможно, одного.

Для слагаемого из суммы в (4.8) имеем

$$\delta(y, A_1) = \delta(x, M) + 2(pj - a_1),$$

что меньше нуля, за исключением случая, когда a_1 делится на p и $j = a_1/p$, то есть $\delta_1 = 0$ и $j = b_1$. В этом случае из соотношения (A.4) для $j = a_1/p$ имеем $c''_j = (-1)^{a_1+b_1}\binom{*}{a_1-pj} = (-1)^{b_1(p+1)}\binom{*}{0} = 1$.

В любом случае $\ell(A_1) < \ell(A)$, A_1 является не-$\deg y$-убивающим, следовательно, применимо предположение индукции. □

Лемма 4.3. *Предположим, что $M = P^A$, где $A = (0, a_r, \varepsilon_r, \ldots, \varepsilon_1, a_0, \varepsilon_0)$, является βC-мономом. Тогда*

(i) M является не-$e(M)$-убивающим;

(ii) M удовлетворяет предположениям теоремы 4.2(A);

(iii) P^{A_1}, где A_1 определено формулой (4.5), является βC-мономом.

Доказательство. Утверждение (i) следует непосредственно из определения 2.12 и замечания 4.1.

По определению $a_k - pa_{k-1} - \varepsilon_k$ делится на p^k для $k > 0$. Следовательно, любой βC-моном удовлетворяет условиям теоремы 4.2(A) с $m_j = n_j$ для всех j.

Чтобы доказать утверждение (iii), заметим, что для βC-монома A соответствующий моном

$$A_1 = (\delta_r, b_r, \delta_{r-1}, \ldots, \delta_1, b_1, \varepsilon_0)$$

может быть записан как

$$\begin{aligned} A_1 = (\varepsilon_r, [a_r/p], \varepsilon_{r-1}, [a_{r-1}/p], \ldots, \varepsilon_1, [a_1/p], \varepsilon_0) = \\ = (\varepsilon_r, (a_r - \varepsilon_r)/p, \varepsilon_{r-1}, (a_{r-1} - \varepsilon_{r-1})/p, \ldots, \varepsilon_1, (a_1 - \varepsilon_1)/p, \varepsilon_0). \end{aligned}$$

Для A_1, записанного в этой форме, условие делимости $(2')$ из определения 2.12 очевидно. Неравенство (1) из определения 2.12 для A_1

$$(a_k - \varepsilon_k)/p \leqslant \varepsilon_{k-1} + p(a_{k-1} - \varepsilon_{k-1})/p$$

эквивалентно $a_k \leqslant \varepsilon_k + pa_{k-1}$, что выполняется, поскольку A является βC-мономом. □

Теорема 4.3. *Кольцо когомологий $H^*(K(\mathbb{Z}/p, n); \mathbb{Z}/p)$ является свободной градуированной коммутативной алгеброй, порожденной элементами $P^J\iota_n$, где $\iota_n \in H^n(K(\mathbb{Z}/p, n); \mathbb{Z}/p)$ — фундаментальный класс, а P^J — произвольный βC-моном, такой что $e(J) < n$.*

Доказательство. Множество всех элементов $P^J\iota_n$, где $P^J\iota_n$ является βC-мономом, порождает $H^*(K(\mathbb{Z}/p,n);\mathbb{Z}/p)$, так как βC-мономы образуют аддитивный базис $\mathcal{A}_p$. Для $n-e(J)<0$ имеем $P^J\iota_n=0$ по лемме 4.2.

Теперь покажем, что для $n=e(J)$ либо $P^J\iota_n=0$, либо $P^J\iota_n$ равен некоторой степени $P^{J_1}\iota_n$, где J_1 — βC-моном с $e(J_1)<e(J)$. Проведем индукцию по $r=\ell(J)$. Базой индукции для четного $n=2a$ являются равенства $P^a\iota_n=\iota_n^p$ и $\beta P^a\iota_n=\beta(\iota_n^p)=0$, а для нечетного $n=2a-1$: равенства $P^a\beta\iota_n=(\beta\iota_n)^p$ и $\beta P^a\beta\iota_n=\beta(\beta\iota_n^p)=0$.

Рассмотрим βC-моном $J=(\varepsilon_{r+1},a_r,\varepsilon_r,a_{r-1},\ldots,\varepsilon_1,a_0,\varepsilon_0)$ с $e(J)=n$. Если $\varepsilon_{r+1}=1$, то $P^J\iota_n=0$ по теореме 4.2(D). Теперь рассмотрим $\varepsilon_{r+1}=0$. Тогда формула (4.5) определяет $J_1=(\varepsilon_r,[a_r/p],\varepsilon_{r-1},\ldots,\varepsilon_{k+1},[a_{k+1}/p],\varepsilon_k,a_{k-1},\varepsilon_{k-1},\ldots,a_0,\varepsilon_0)$, где k — наименьшее число, такое что $a_{k+1}<pa_k+\varepsilon_{k+1}$.

Заметим, что если $k=1$, то $e(J_1)<e(J)$ и $P^J\iota_n=(P^{J_1}\iota)^p$. Для $k>1$ имеем $e(J_1)=e(J)$, но $\ell(J_1)<\ell(J)$, следовательно, применимо предположение индукции. Тогда $P^J\iota_n=(P^{J_1}\iota_n)^p$, где $P^{J_1}\iota_n$ либо 0, либо некоторая степень $P^{J_2}\iota_n$ для βC-монома P^{J_2} с $e(J_2)<e(J)$.

Следовательно, классы когомологий $P^J\iota_n$ для βC-мономов P^J, удовлетворяющих $e(J)<n$, порождают кольцо $H^*(K(\mathbb{Z}/p,n);\mathbb{Z}/p)$. Отображение Δ (см. формулу (2.16)) устанавливает взаимно однозначное соответствие между βC-мономами J с $e(J)<n$ и допустимыми мономами I с $ex\,(I)<n$ и удовлетворяет $e(J)=ex\,(\Delta^{-1}(J))$ по лемме 4.1. Из этого следует, что $P^J\iota_n$ для βC-мономов P^J, удовлетворяющих $e(J)<n$, являются полиномиальными образующими $H^*(K(\mathbb{Z}/p,n);\mathbb{Z}/p)$. □

4.2 Аннигиляторный идеал действия алгебры Стинрода $\mathcal{A}_p$ в когомологиях $K(\mathbb{Z}/p,2)$

Аннигиляторный идеал $\mathcal{K}_2(X)\pmod 2$ для пространства X — это двухсторонний идеал в $\mathcal{A}_2$, состоящий из всех операций, которые принимают нулевое значение на любом элементе $H^*(X,\mathbb{Z}/2)$:

$$\mathcal{K}_2(X)=\{\theta\in\mathcal{A}_2\mid\theta(x)=0\text{ для любого }x\in H^*(X,\mathbb{Z}/2)\}.$$

Аналогичным образом определяется *аннигиляторный идеал* $\mathcal{K}_p(X)\pmod p$ для пространства X — это двухсторонний идеал в $\mathcal{A}_p$, состоящий из всех операций, принимающих нулевое значение на любом элементе $H^*(X,\mathbb{Z}/p)$:

$$\mathcal{K}_p(X)=\{\theta\in\mathcal{A}_p\mid\theta(x)=0\text{ для любого }x\in H^*(X,\mathbb{Z}/p)\}.$$

Аналогично можно определить аннигиляторный идеал для действия алгебры $\overline{\mathcal{A}}_p$,

Цель раздела — доказать тривиальность аннигиляторного идеала $\bmod p$ для действия алгебры $\mathcal{A}_p$ в $\mathbb{Z}/p$-когомологиях пространства Эйленберга–Маклейна $K(\mathbb{Z}/p, 2)$, $p > 2$, см. теорему 4.4 ниже.

В статье [64] В. Джамбалво и Ф. Петерсон рассмотрели вопрос вычисления аннигиляторного идеала действия алгебры $\mathcal{A}_2$ в $\mathbb{Z}/2$-когомологиях пространств Эйленберга–Маклейна $K(\mathbb{Z}/2, n)$. Они доказали, что идеал $\mathcal{K}_2(K(\mathbb{Z}/2, n))$ тривиален для $n \geqslant 2$. С другой стороны, легко видеть, что идеал $\mathcal{K}_2(K(\mathbb{Z}/2, 1)) = \mathcal{K}_2(\mathbb{R}P^\infty)$ ненулевой. Этот идеал был вычислен в той же статье, и результат оказался сложным. Вычисление использует соотношения Уолла (см. [170]). Для простого $p > 2$ вопрос явного описания структуры идеала $\mathcal{K}_p(K(\mathbb{Z}/p, 1))$ до сих пор открыт.

Теорема 4.4. *Для $p > 2$ аннигиляторный идеал $\mathcal{K}_p(K(\mathbb{Z}/p, 2))$ тривиален.*

Это утверждение дает новый (хотя и громоздкий) метод проверки тождеств в $\mathcal{A}_p$. Напомним, что стандартный способ проверить, равно ли нулю в $\mathcal{A}_p$ некоторое выражение от символов β и приведенных степеней P^j — сравнить с нулем его значение на фундаментальном классе в $\mathbb{Z}/p$-когомологиях конечного произведения конечного числа линзовых пространств $(L_p^\infty)^{\times N}$, где N достаточно велико, например, см. [225].

Используя аргументы, аналогичные тем, что использовались в [64] в доказательстве теорем 3, 4 и 5, можно показать, что аннигиляторный идеал $\mathcal{K}_p(BU)$ является двусторонним идеалом, порожденным β. Тем самым, не существует операции в $\mathcal{A}_p$, выраженной только через приведенные степени, которая аннулирует все $\mathbb{Z}/p$-когомологические классы BU. Это тоже предоставляет еще один метод проверки соотношений в алгебре $\overline{\mathcal{A}}_p$.

Напомним, что действие элементов P^j, $j \geqslant 1$, и β на произведениях классов когомологий удовлетворяет формуле Картана

$$P^j(xy) = \sum_{a+b=j} P^a(x)P^b(y), \tag{4.9}$$

$$\beta(xy) = \beta(x)\, y + (-1)^{\deg x} x\, \beta(y). \tag{4.10}$$

Из теоремы 4.3 или теоремы 4.1 получаем следующее утверждение.

Теорема 4.5. *Пусть $\phi \in H^2(K(\mathbb{Z}/p, 2), \mathbb{Z}/p)$ — фундаментальный класс. Тогда кольцо когомологий $H^*(K(\mathbb{Z}/p, 2), \mathbb{Z}/p)$ является свободной градуированной коммутативной алгеброй с образующими ϕ, $\beta\phi$, $X_0^k\beta\phi$, $\beta X_0^k\beta\phi$ для всех $k \geqslant 0$.*

Заметим, что $\deg X_0^k\beta\phi = 2p^{k+1} + 1$, следовательно, элементы $X_0^k\beta\phi$ и $\beta\phi$ порождают грассманову подалгебру в $H^*(K(\mathbb{Z}/p, 2), \mathbb{Z}/p)$. С другой стороны, $\deg \beta X_0^k\beta\phi = 2p^{k+1} + 2$, следовательно, элементы $\beta X_0^k\beta\phi$ и ϕ порождают полиномиальную подалгебру в $H^*(K(\mathbb{Z}/p, 2), \mathbb{Z}/p)$.

Теорема 4.6. *Для действия образующих алгебры $\mathcal{A}_p$ на классах из $H^*(K(\mathbb{Z}/p,2))$ выполнены следующие соотношения:*

(i) $P^{p^{k+1}}(X_0^k\beta\phi) = X_0^{k+1}\beta\phi$;

(ii) $P^j(X_0^k\beta\phi) = 0$ *для* $j \neq 0, p^{k+1}$;

(iii) $P^{p^{k+1}+1}(\beta X_0^k\beta\phi) = (\beta X_0^k\beta\phi)^p$;

(iv) $P^1(\beta X_0^k\beta\phi) = (\beta X_0^{k-1}\beta\phi)^p$ *для* $k > 0$;

(v) $P^j(\beta X_0^k\beta\phi) = 0$ *для* $j \neq 1, p^{k+1}, p^{k+1}+1$ *и для* $j = 1, k = 0$;

(vi) $P^{p^{k+1}}(\beta X_0^k\beta\phi) = \beta X_0^{k+1}\beta\phi$ *для* $k > 0$.

Доказательство. Утверждение (i) следует из определения X_k^n.

Утверждение (ii) тривиально для $j > p^{k+1}$, так как $\deg X_0^k\beta\phi = 2p^{k+1}+1$. Для $j < p^{k+1}$ применим индукцию по k. Сначала рассмотрим $k = 0$ и $j < p$. Из соотношений Адема следует, что $P^jP^1 = cP^{j+1}$, где $c \in \mathbb{Z}/p$, и этот элемент принимает нулевое значение на $\beta\phi$. Для $k > 0$, применяя соотношения Адема, получим

$$P^jX_0^k\beta\phi = P^jP^{p^k}X_0^{k-1}\beta\phi = \sum_{i=0}^{[j/p]} c_iP^{p^k+j-i}P^iX_0^{k-1}\beta\phi,$$

где $c_i \in \mathbb{Z}/p$, и все слагаемые в сумме равны нулю.

Для (iii) достаточно проверить, что $\deg \beta X_0^k\beta\phi = 2p^{k+1}+2$.

Из соотношений Адема имеем $P^1\beta P^{p^k} = P^{p^k+1}\beta$. Тогда (iv) можно вывести из (iii):

$$P^1(\beta X_0^k\beta\phi) = P^1\beta P^{p^k}X_0^{k-1}\beta\phi = P^{p^k+1}\beta X_0^{k-1}\beta\phi = (\beta X_0^{k-1}\beta\phi)^p.$$

Чтобы доказать (v), заметим, что $P^1\beta P^1\beta\phi = 0$. Сравнивая размерности, получим $P^j(\beta X_0^k\beta\phi) = 0$ для $j > p^{k+1}+1$. Для $j < p^{k+1}$ по индукции по k рассмотрим

$$P^j\beta X_0^k\beta\phi = (P^j\beta P^{p^k})X_0^{k-1}\beta\phi$$

и применим соотношение Адема к произведению $P^j\beta P^{P^k}$:

$$(P^j\beta P^{p^k})X_0^{k-1}\beta\phi = \sum_{i=0}^{[j/p]} c_i\beta P^{p^k+j-i}P^iX_0^{k-1}\beta\phi + \sum_{i=0}^{[(j-1)/p]} b_iP^{p^k+j-i}\beta P^iX_0^{k-1}\beta\phi. \qquad (4.11)$$

Тогда ясно, что все слагаемые в (4.11) равны нулю.

(vi) Для произведения $(P^{p^{k+1}}\beta P^{p^k})X_0^{k-1}\beta\phi$ можно записать формулу, аналогичную (4.11). Но в этом случае существует одно ненулевое слагаемое в правой части, а именно, $\beta X_0^{k+1}\beta\phi$.

□

Теорема 4.7. *Для действия алгебры $\overline{\mathcal{A}}_p$ в когомологиях $H^*(K(\mathbb{Z}/p,2);\mathbb{Z}/p)$ выполнены следующие соотношения.*

(*a*)

$$P^j(X_0^k\beta\phi) = \begin{cases} X_0^k\beta\phi, & \text{если } j = 0, \\ X_0^{k+1}\beta\phi, & \text{если } j = p^{k+1}, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases} \tag{4.12}$$

(*b*)

$$P^j\left((\beta X_0^k\beta\phi)^{p^i}\right) = \begin{cases} (\beta X_0^k\beta\phi)^{p^i}, & \text{если } j = 0, \\ (\beta X_0^{k-1}\beta\phi)^{p^{i+1}}, & \text{если } j = p^i, \\ (\beta X_0^{k+1}\beta\phi)^{p^i}, & \text{если } j = p^{k+i+1}, \\ (\beta X_0^k\beta\phi)^{p^{i+1}}, & \text{если } j = p^{k+i+1} + p^i, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases} \tag{4.13}$$

Доказательство. Уравнение (4.12) совпадает с теоремой 4.6(i, ii). Пусть $P = \sum P^j$. Тогда

$$\begin{aligned} &P((\beta X_0^k\beta\phi)^{p^i}) = (P(\beta X_0^k\beta\phi))^{p^i} = \\ &= (\beta X_0^k\beta\phi + (\beta X_0^{k-1}\beta\phi)^p + \beta X_0^{k+1}\beta\phi + (\beta X_0^k\beta\phi)^p)^{p^i} = \\ &\qquad = (\beta X_0^k\beta\phi)^{p^i} + (\beta X_0^{k-1}\beta\phi)^{p^{i+1}} + (\beta X_0^{k+1}\beta\phi)^{p^i} + (\beta X_0^k\beta\phi)^{p^{i+1}} \end{aligned}$$

и остается определить степени элементов в правой части. □

Мы перепишем эти формулы в следующем утверждении для удобства будущих вычислений.

Следствие 4.1. *Для действия алгебры $\overline{\mathcal{A}}_p$ в когомологиях $H^*(K(\mathbb{Z}/p, 2); \mathbb{Z}/p)$ выполнены следующие соотношения.*

(*a*) *Имеем*

$$P^j\left((\beta X_0^{k-l+1}\beta\phi)^{p^l}\right) = \begin{cases} (\beta X_0^{k-l+1}\beta\phi)^{p^l}, & \text{если } j = 0, \\ (\beta X_0^{k-l}\beta\phi)^{p^{l+1}}, & \text{если } j = p^l, \\ (\beta X_0^{k-l+2}\beta\phi)^{p^l}, & \text{если } j = p^{k+2}, \\ (\beta X_0^{k-l+1}\beta\phi)^{p^{l+1}}, & \text{если } j = p^{k+2} + p^l, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases} \tag{4.14}$$

(*b*) *Минимальная возможная степень $\beta X_0^0\beta\phi$, которая может быть получена как слагаемое после применения некоторого элемента из $\mathcal{A}_p$ к $(\beta X_0^{k-l+1}\beta\phi)^{p^l}$, равна p^{k+1} и может быть получена только применением X_l^k.*

Доказательство. Часть (*a*) — это просто другая форма записи теоремы 4.6(*b*), а часть (*b*) тривиально следует из (*a*). □

Теперь введем подходящие обозначения для элементов βX-базиса. Для элемента $\beta^\varepsilon X_0^{m_1}\beta\dots X_0^{m_q}(X_{k_m}^{n_m})^{q_m}\dots(X_{k_1}^{n_1})^{q_1}$ рассмотрим пару последовательностей (A,R):

(1) $A=(\varepsilon,a_0,a_1,\dots)$, где $a_j=1$, если $j=m_i$ для некоторого $i=1,\dots,q$, и $a_j=0$ иначе;

(2) $R=(r_0^0,r_0^1,r_1^1,r_0^2,r_1^2,r_2^2,\dots)$, где $r_k^n=q_j$ для $(n,k)=(n_j,k_j)$, $j=1,\dots,m$, и $r_k^n=0$ иначе.

Иногда полезно ссылаться на ε как на a_{-1}. В дальнейшем мы рассматриваем пары (A,R) последовательностей с конечным числом ненулевых элементов. Последовательность A содержит только 0 и 1, а последовательность R содержит неотрицательные целые числа. Элементы последовательности A ($\tilde A$, $\hat A$ и т.д.) обозначаются через a_j ($\tilde a_j$, $\hat a_j$ соответственно). То же соглашение примем для элементов последовательностей $R,\tilde R,\hat R$ и т.д.

Множество всех таких последовательностей находится во взаимно однозначном соответствии с множеством всех βX-мономов. А именно, для данной пары (A,R) мы рассматриваем βX-моном $\beta^\varepsilon\prod\limits_{i\geqslant 0}(X_0^i\beta)^{a_i}\prod\limits_{0\leqslant l\leqslant k}(X_l^k)^{r_l^k}$. Порядок членов в этом произведении фиксирован определениями 2.2 и 2.8.

Определим порядок на множестве всех пар (A,R). Мы определяем $(A',R')>(A'',R'')$ если выполняется одно из следующих условий:

(1) $\sum a_i'>\sum a_i''$;

(2) $\sum a_i'=\sum a_i''$ и $A'>_L A''$;

(3) $A'=A''$ и $R'>_L R''$.

Здесь $>_L$ — обычный левый лексикографический порядок.

Для пары (A,R) рассмотрим элемент

$$u(A,R)=\prod_{i\geqslant -1}(X_0^{i+1}\beta\phi)^{a_i}\prod_{0\leqslant l\leqslant k}(\beta X_0^{k-l+1}\beta\phi)^{r_l^k p^l} \tag{4.15}$$

из когомологий $H^*(K(\mathbb{Z}/p,2),\mathbb{Z}/p)$.

Определим спаривание $\langle X(A_1,R_1),u(A_2,R_2)\rangle$ как коэффициент при $(\beta X_0^0\beta\phi)^N$ в произведении $X(A_1,R_1)u(A_2,R_2)$, где $2(p+1)N=\deg X(A_1,R_1)+\deg u(A_2,R_2)$. В случае, если $\deg X(A_1,R_1)+\deg u(A_2,R_2)$ не делится на $2(p+1)$, положим $\langle X(A_1,R_1),u(A_2,R_2)\rangle=0$, так как в $X(A_1,R_1)u(A_2,R_2)$ нет слагаемых вида $(\beta X_0^0\beta\phi)^K$.

4.2.1 Доказательство основного утверждения

Наш основной результат, теорема 4.4, является следствием следующего утверждения.

Утверждение 4.1. *Пусть* $(A_2,R_2)>(A_1,R_1)$ *и* $\deg X(A_1,R_1)=\deg X(A_2,R_2)$. *Тогда* $\langle X(A_1,R_1),u(A_2,R_2)\rangle=0$ *и* $\langle X(A_1,R_1),u(A_1,R_1)\rangle\neq 0$.

Из этого следует, что для набора элементов $X(A_i, R_i)$ одинаковой степени матрица $(z_{i,j}) = (\langle X(A_i, R_i), u(A_j, R_j)\rangle)$ невырождена, более того, если элементы $X(A_i, R_i)$ упорядочены так, что $X(A_i, R_i) < X(A_{i+1}, R_{i+1})$, то матрица $(z_{i,j})$ является треугольной с ненулевыми диагональными элементами. Это доказывает теорему 4.4.

Доказательство утверждения 4.1 разобьем на несколько шагов, а именно, леммы 4.4, 4.5, 4.6.

Прежде всего заметим, что применение P^j к произведению (4.15) дает сумму произведений того же типа с разными a_i и r_l^k. Это легко следует из теоремы 4.6.

Лемма 4.4. *Пусть X — произвольный моном в P^j, $j \geqslant 1$, и β. Предположим, что X содержит β ровно k раз, $k \geqslant 1$. Тогда для любого $u(A, M)$ такого, что $k \neq \sum\limits_i a_i$, выполнено $\langle X, u(A, M)\rangle = 0$.*

Доказательство. Рассмотрим случай $k > \sum\limits_i a_i$, и проведем индукцию по k. Для базы индукции предположим, что $k = 1$. Тогда $\sum\limits_i a_i = 0$. Следовательно, X имеет вид $S\beta T$, где S и T содержат только приведенные степени P^j, $j > 0$. Из формулы Картана (4.9) и следствия 4.1 следует, что элемент $Tu(A, R)$ является суммой элементов вида $\prod\limits_{0 \leqslant l \leqslant k} (\beta X_0^{k-l+1}\beta\phi)^{r_l^k p^l}$, то есть $u(0, R^{(m)})$ для подходящих последовательностей $R^{(m)}$. По формуле Картана (4.10) применение β к $u(0, R^{(m)})$ дает сумму произведений, где каждое произведение содержит член $\beta(\beta X_0^{k-l+1}\beta\phi)^{r_l^k p^l}$, который обращается в нуль.

Для шага индукции предположим, что $X = S\beta T$, где T не содержит β, S содержит β ровно $(k-1)$ раз, $k \geqslant 2$. Мы применяем X к элементу $u(A, R)$, где A содержит не более $(k-1)$ ненулевых элементов. Как и в предыдущем абзаце, мы видим, что $Tu(A, R)$ является суммой элементов вида $u(A^{(m)}, R^{(m)})$, где $A^{(m)}$ содержит то же количество ненулевых элементов, что и A, то есть не более $(k-1)$. По формуле Картана, примененной к $\beta(u(A^{(m)}, R^{(m)}))$, мы видим, что нетривиальные слагаемые появляются только тогда, когда β применяется к членам $(X_0^a\beta\phi)$, соответствующим ненулевым элементам $A^{(m)}$. Следовательно, $\beta(u(A^{(m)}, R^{(m)}))$ является суммой элементов $u(A^{(m),k}, R^{(m),k})$, где $\sum\limits_i a_i^{(m)} = 1 + \sum\limits_i a_i^{(m),k}$. По предположению индукции любое из $Su(A^{(m),k}, R^{(m),k})$ не содержит слагаемых вида $(\beta X_0^0\beta\phi)^N$. Следовательно, $\langle X, u(A, R)\rangle = 0$.

Для случая $k < \sum\limits_i a_i$ проведем индукцию по $\sum\limits_i a_i$, рассуждая по аналогии с предыдущим случаем.

Другое доказательство основано на следующей идее. Грубо говоря, X содержит недостаточно вхождений элемента β, чтобы преобразовать члены $(X_0^{a_i}\beta\phi)$ начального $u(A, R)$ в члены $(\beta X_0^b\beta\phi)$. Следовательно, $Xu(A, R)$ является суммой $u(A^{(m)}, R^{(m)})$, где для всех m последовательность $A^{(n)}$ не тривиальна, и поэтому, $u(A^{(m)}, R^{(m)})$ не имеет вид $(\beta X_0^0\beta\phi)^N$. $\square$

Лемма 4.5. *Пусть* (A', R') *и* (A'', R'') *— две последовательности такие, что* $\sum\limits_i a'_i = \sum\limits_i a''_i$ *и* $A' >_L A''$ *в лексикографическом порядке слева. Тогда* $\langle X(A', R'), u(A'', R'')\rangle = 0$.

Доказательство. Из предположений леммы следует, что $k = \sum\limits_i a'_i = \sum\limits_i a''_i \geqslant 1$. Рассмотрим случай $k = 1$. Пусть $a'_i = 1$ для $i = m'$ и $a''_i = 1$ для $i = m''$. Тогда $m' < m''$, $X(A', R') = X_0^{m'}\beta X(0, R')$, и $u(A'', R'') = (X_0^{m''+1}\beta\phi)u(0, R'')$. Элемент $B = X(0, R')\big((X_0^{m''+1}\beta\phi)u(0, R'')\big)$ вычисляется по формуле Картана (4.9) примененной к каждому P^j в произведении $X(0, R')$. Следовательно, B является суммой элементов вида $(X_0^{n+1}\beta\phi)u(0, \tilde{R})$. Из теоремы 4.6(a) следует, что в каждом слагаемом $n \geqslant m$. Тогда $\beta\big((X_0^{n+1}\beta\phi)u(0, \tilde{R})\big) = (\beta X_0^{n+1}\beta\phi)u(0, \tilde{R})$. Элемент $\overline{\mathcal{A}}_p$, который может преобразовать $(\beta X_0^{n+1}\beta\phi)$ в некоторую степень $\beta X_0^0\beta\phi$, имеет степень не меньше $\deg X_0^n$ по следствию 4.1. Но нам остается применить элемент $X_0^{m'}$ к произведению $(\beta X_0^{n+1}\beta\phi)u(0, \tilde{R})$, и элементы на диагонали $X_0^{m'}$, которые применяются к $(\beta X_0^{n+1}\beta\phi)$, имеют степень не больше $X_0^{m'}$ и, следовательно, меньше $\deg X_0^n$. Следовательно, результат не является степенью $\beta X_0^0\beta\phi$, и $\langle X(A', R'), u(A'', R'')\rangle = 0$.

Теперь рассмотрим случай $k > 1$. Предположим, что ненулевые элементы в A' находятся на позициях $-1 \leqslant m_1 < m_2 < \ldots < m_k$, а ненулевые элементы в A'' находятся на позициях $-1 \leqslant n_1 < n_2 < \ldots < n_k$. Поскольку $A' >_L A''$, существует $i = 1, \ldots, k$ такое, что $m_j = n_j$ для $j < i$ и $m_i < n_i$. Запишем $X(A', R')$ как $(X_0^{m_1}\beta \ldots X_0^{m_{k-1}}\beta)X_0^{m_k}\beta X(0, R')$ и применим его к $u(A'', R'')$. Из формулы Картана (4.9) следует, что применение любого P^j к произведению не может уменьшить числа n_i, $i = 1, \ldots, k$. Следовательно, $X(0, R')u(A'', R'')$ является суммой элементов вида $u(A, R)$, где $A'' \geqslant_L A$. Применение β к такому элементу $u(A, R)$ дает сумму элементов, в которых ровно один из $(X_0^i\beta\phi)$ для $a_i = 1$ преобразуется в $(\beta X_0^i\beta\phi)$. Следовательно, $\beta X(0, R')u(A, R)$ является суммой элементов вида $u(\tilde{A}, \tilde{R})$, где $\sum\limits_i \tilde{a}_i = k - 1$. Рассмотрим последовательность $\tilde{A}'$, которая соответствует произведению $X_0^{m_1}\beta \ldots X_0^{m_{k-1}}\beta$. Тогда нетрудно видеть, что $\tilde{A}' >_L \tilde{A}$ для всех слагаемых $u(\tilde{A}, \tilde{R})$ в $X_0^{m_k}\beta X(0, R')u(A'', R'')$. Следовательно, применимо предположение индукции. Единственное исключение — случай, когда $m_j = n_j$ для $j = 1, \ldots, k-1$, $m_k < n_k$, и $\tilde{A}$ соответствует $n_1 < \ldots < n_{k-1}$. В этом случае $\tilde{A}' = \tilde{A}$. Тогда $\beta u(A, R)$ содержит $(\beta X_0^n\beta\phi)$ с $n \geqslant n_k$, и этот член не может быть преобразован в некоторую степень $(\beta X_0^0\beta\phi)$. Действительно, по следствию 4.1(b) наименьшая степень $(\beta X_0^0\beta\phi)$, которая может быть получена из $(\beta X_0^n\beta\phi)$, равна $(\beta X_0^0\beta\phi)^{p^n}$. Следовательно, последнее применение P^j, которое дает степень $(\beta X_0^0\beta\phi)$, — это P^j, где $j = p^N$ и $N \geqslant n$. Но $N \geqslant n \geqslant n_k > m_k$, следовательно, элемент P^{p^N} не может появиться на диагонали $X_0^{m_1}\beta \ldots X_0^{m_{k-1}}\beta X_0^{m_k}$, и это исключение не может внести вклад в $\langle X(A', R'), u(A'', R'')\rangle$. □

Лемма 4.6. *Предположим, что* $R >_L \tilde{R}$. *Тогда для любого* A *выполнено* $\langle X(A,R), u(A,\tilde{R})\rangle = 0$.

Доказательство. Из доказательств предыдущих лемм 4.4, 4.5, 4.6 мы видим, что

$$\langle X(A,R), u(A,\tilde{R})\rangle = \langle X(A,0), u(A,0)\rangle\langle X(0,R), u(0,\tilde{R})\rangle,$$

где $\langle X(A,0), u(A,0)\rangle \neq 0$. Теперь рассмотрим $Z = \langle X(0,R), u(0,\tilde{R})\rangle$. Поскольку $R >_L \tilde{R}$, существует (k_0,l_0) такое, что $p-1 \geqslant r_{l_0}^{k_0} > \tilde{r}_{l_0}^{k_0} \geqslant 0$ и $r_l^k = \tilde{r}_l^k$ для $(k,l) <_L (k_0,l_0)$. Пусть $X(0,R) = AX(r_{l_0}^{k_0})B$. Проведем индукцию по количеству $(k,l) <_L (k_0,l_0)$ таких, что $r_l^k \neq 0$, то есть по количеству различных членов в A.

Сначала рассмотрим базу индукции, то есть случай $A = 1$. Запишем $X(0,R)$ как $X(r_{l_0}^{k_0})B$ и $u(0,\tilde{R})$ как

$$(u_{l_0}^{k_0})^{\tilde{r}_{l_0}^{k_0}} \prod_{j:k_0\geqslant l>l_0} (u_{l_j}^{k_0})^{\tilde{r}_{l_j}^{k_0}} \prod_{(k,j):k>k_0} (u_l^k)^{\tilde{r}_l^k}.$$

Заметим, что по следствию 4.1 любая приведенная степень, примененная к u_l^k, может только увеличить k, или увеличить l, или увеличить оба из них (во всех случаях на 1), либо отобразить u_l^k в нуль. Следовательно, после применения B к произведению

$$(u_{l_0}^{k_0})^{\tilde{r}_{l_0}^{k_0}} \prod_{j:k_0\geqslant l>l_0} (u_{l_j}^{k_0})^{\tilde{r}_{l_j}^{k_0}} \prod_{(k,j):k>k_0} (u_l^k)^{\tilde{r}_l^k}$$

мы получаем сумму произведений u_l^k, и слагаемые, которые содержат u_l^k с $k > k_0$, не могут внести вклад в Z. Действительно, если произведение приведенных степеней $P^{j_1}\dots P^{j_m}$ преобразует u_l^k в некоторую степень $\beta X_0^0\beta\phi$, то $j_1 \geqslant p^k > p^{k_0}$ и P^{j_1} не может появиться на диагонали $X(r_{l_0}^{k_0})$.

Следовательно, только слагаемые в $Bu(u,\tilde{R})$ вида

$$U = (u_{l_0}^{k_0})^{\hat{r}_{l_0}^{k_0}} \prod_{j:k_0\geqslant l>l_0} (u_{l_j}^{k_0})^{\hat{r}_{l_j}^{k_0}} (\beta X_0^0\beta\phi)^K$$

могут внести вклад в Z. По следствию 4.1 имеем $r_{l_0}^{k_0} > \tilde{r}_{l_0}^{k_0} \geqslant \hat{r}_{l_0}^{k_0}$. Заметим, что в $X(r_{l_0}^{k_0})$ есть $r_{l_0}^{k_0}$ членов $P^{p^{l_0}}$, но только $\hat{r}_{l_0}^{k_0}$ членов в U, которые могут выжить после применения $P^{p^{l_0}}$. Следовательно, $X(r_{l_0}^{k_0})\big(U\big)$ не вносит вклад в Z.

Теперь перейдем к шагу индукции. Пусть $X(0,R) = AX(r_{l_0}^{k_0})B$. Запишем элемент $U(0,\tilde{R})$ как $\prod\limits_{(k,l)<_L(k_0,l_0)} u(r_{l_0}^{k_0})U$. Пусть $\Delta(X(r_{l_0}^{k_0})B) = \sum\limits_a B'_a \times B''_a$. Тогда если $B'_a \neq 1$, то в $B'_a(\prod\limits_{(k,l)<_L(k_0,l_0)} u(r_l^k))$ хотя бы один член $(\beta X_0^{k'-l'+1}\beta\phi)^{p^{l'}}$ преобразуется в $(\beta X_0^{k''-l''+1}\beta\phi)^{p^{l''}}$ с $(k'',l'') >_L (k',l')$. Каждый раз число $r_{l'}^{k'}$ уменьшается на 1, а числа r_l^k с $(k,l) <_L (k_0,l_0)$ не изменяются. Следовательно, любое слагаемое в разло-

жении $B'_a(\prod\limits_{(k,l)<_L(k_0,l_0)} u(r_l^k))B''_a(u(r_{l_0}^{k_0})U)$ соответствует последовательности $\hat{R}$, такой что $\hat{R} <_L \tilde{R} <_L R$, и поэтому по гипотезе индукции не может внести вклад в Z.

Таким образом, нетривиальный вклад в Z может появиться только от $B'_a = 1$, то есть от элемента

$$A\Big(\prod_{(k,l)<_L(k_0,l_0)} u(r_l^k))\Big) \cdot X(r_{l_0}^{k_0})B\big(u(\tilde{r}_{l_0}^{k_0})U\big). \tag{4.16}$$

Но по базе индукции $X(r_{l_0}^{k_0})B\big(u(\tilde{r}_{l_0}^{k_0})U\big)$ не содержит слагаемых вида $(\beta X_0^0 \beta\phi)^K$, следовательно, элемент (4.16) также не вносит вклад в Z, и поэтому $Z = 0$. □

4.3 mod p гипотеза Тоды

4.3.1 Формулировка гипотезы и предварительные сведения

Х. Тода в работе [161] высказал гипотезу о точности некоторых последовательностей модулей над алгеброй Стинрода по модулю 2. А именно, для алгебры Стинрода $\mathcal{A}_2$ рассмотрим ее подалгебру $\mathcal{S}_k$, порожденную элементами $Sq^1, Sq^2, Sq^4, \ldots, Sq^{2^k}$. Гипотеза Тоды — это утверждение о точности последовательности

$$\mathcal{A}_2 \xrightarrow{\varphi_r} \mathcal{A}_2/\mathcal{A}_2\mathcal{S}_{r-2} \xrightarrow{\varphi_r} \mathcal{A}_2/\mathcal{A}_2\mathcal{S}_{r-1} \tag{4.17}$$

где $\varphi_r(x) = x \cdot Sq^{2^r}$. Эта гипотеза была доказана Ч. Т. К. Уоллом в работе [170]. Его доказательство существенно использовало Z-базис алгебры $\mathcal{A}_2$, см. определение 1.2 и теорему 1.1.

В этом разделе приведены результаты по обобщенной гипотезы Тоды для случая $p > 2$. Показано, что гипотеза Тоды для $p > 2$ выполняется лишь до определенной градуировки, вопреки тому, что можно было бы ожидать, имея в виду результаты Ф. Адамса и Х. Марголиса [15], а также Дж. Мура и Ф. Петерсона [115], см. введение. Дана точная верхнюю оценку для градуировок, в которых точность выполняется. Рассмотрены точных последовательностей, близкие к последовательности Тоды. Основные результаты: теоремы 4.8, 4.9 и 4.10.

Зафиксируем простое число $p > 2$. Пусть $\mathcal{S}_r$ — подалгебра $\overline{\mathcal{A}}_p$, порожденная P^{p^j}, где $0 \leqslant j \leqslant r$, и $\mathcal{I}_j$ — левый идеал $\mathcal{S}_r\mathcal{S}_j$ в $\mathcal{S}_r$, порожденный $\mathcal{S}_j$. Имеется возрастающая последовательность левых идеалов алгебры $\mathcal{S}_r$:

$$\mathcal{I}_0 \subset \mathcal{I}_1 \subset \ldots \mathcal{I}_r \subset \mathcal{S}_r$$

и возрастающая последовательность левых идеалов алгебры $\overline{\mathcal{A}}_p \subset \mathcal{A}_p$:

$$\mathcal{I}_0 \subset \mathcal{I}_1 \subset \mathcal{I}_2 \subset \ldots \subset \mathcal{I}_k \subset \ldots \subset \overline{\mathcal{A}}_p \subset \mathcal{A}_p$$

.

Рассмотрим два отображения

$$\alpha_1 \text{ и } \alpha_2 : \overline{\mathcal{A}}_p \to \overline{\mathcal{A}}_p/\overline{\mathcal{A}}_p\mathcal{S}_{r-2}, \tag{4.18}$$

определенные формулами

$$\begin{aligned} \alpha_1(x) &= xP^{ap^r} \mod \overline{\mathcal{A}}_p\mathcal{S}_{r-2}, \\ \alpha_2(x) &= x(P^{p^r})^a \mod \overline{\mathcal{A}}_p\mathcal{S}_{r-2}, \end{aligned}$$

для некоторого фиксированного $1 \leqslant a \leqslant p-1$. Также рассмотрим два отображения

$$\beta_1 \text{ и } \beta_2 : \overline{\mathcal{A}}_p/\overline{\mathcal{A}}_p\mathcal{S}_{r-2} \to \overline{\mathcal{A}}_p/\overline{\mathcal{A}}_p\mathcal{S}_{r-1}, \tag{4.19}$$

определенные формулами

$$\begin{aligned} \beta_1(x) &= xP^{bp^r} \mod \overline{\mathcal{A}}_p\mathcal{S}_{r-1}, \\ \beta_2(x) &= x(P^{p^r})^b \mod \overline{\mathcal{A}}_p\mathcal{S}_{r-1}, \end{aligned}$$

для некоторого фиксированного $1 \leqslant b \leqslant p-1$. Мы докажем, что β_1 и β_2 корректно определены (лемма 4.9).

Для последовательности (4.17) равенство $\varphi_r \circ \varphi_r = 0$ следует из того, что $(Sq^{2^r})^2 \in \mathcal{S}_{r-1}$. Для $p > 2$ выполнено $(P^{p^r})^p \in \mathcal{S}_{r-1}$, но $(P^{p^r})^{p-1} \notin \mathcal{S}_{r-1}$. Следовательно, естественно рассмотреть последовательность

$$\overline{\mathcal{A}}_p \xrightarrow{\alpha_i} \overline{\mathcal{A}}_p/\overline{\mathcal{A}}_p\mathcal{S}_{r-2} \xrightarrow{\beta_j} \overline{\mathcal{A}}_p/\overline{\mathcal{A}}_p\mathcal{S}_{r-1} \tag{4.20}$$

где отображения α_i и β_j выбраны так, что $a + b = p$. В этом случае $\beta_j \circ \alpha_i = 0$ для любых $i, j = 1, 2$. Гипотезы Тоды для $p > 2$ — это утверждение, что $\ker \beta_j = \operatorname{im} \alpha_i$ для подходящих i, j.

Прежде чем мы сформулируем основные результаты, заметим, что $\overline{\mathcal{A}}_p$ является свободным модулем над $\overline{\mathcal{S}_r}$, где $\overline{\mathcal{S}_r}$ — подалгебра $\mathcal{S}_r$ вместе с единичным элементом (см. также лемму 4.11). Подалгебра $\overline{\mathcal{S}_r}$ совпадает с подалгеброй $P(n) \subset \mathcal{A}_p$, см. раздел А.1.3. Временная смена обозначений продиктована соображениями удобства. Следовательно, точность последовательности (4.20) эквивалентна точности последовательности

$$\overline{\mathcal{S}}_r \xrightarrow{\alpha_i} \mathcal{S}_r/\mathcal{I}_{r-2} \xrightarrow{\beta_j} \mathcal{S}_r/\mathcal{I}_{r-1}, \tag{4.21}$$

В этом разделе все рассматриваемые модули тривиальны в степенях, отличных от $2(p-1)k$, где k — целое число. Поэтому для простоты для такого модуля M удобно обозначить $M^{(k)}$ подмодуль всех элементов степени $2(p-1)k$, в частности, $M = \bigoplus\limits_k M^{(k)}$. В этом разделе мы временно ссылаемся на n как на градуировку элементов $M^{(n)}$, это не вызовет путаницы.

Последовательность (4.21) разбивается в прямую сумму по всем k последовательностей вида

$$\overline{\mathcal{S}}_r^{(k)} \xrightarrow{\alpha_i} (\mathcal{S}_r/\mathcal{I}_{r-2})^{(ap^r+k)} \xrightarrow{\beta_j} (\mathcal{S}_r/\mathcal{I}_{r-1})^{(p^{r+1}+k)}. \tag{4.22}$$

По лемме 4.8 гомоморфизмы β_1 и β_2 совпадают с точностью до ненулевого скалярного множителя, и поэтому они имеют одно и то же ядро. Следовательно, мы можем рассматривать только $\beta = \beta_1$ или $\beta = \beta_2$.

Наши основные результаты разбиваются на три случая: $r = 0$, $r = 1$ и $r \geqslant 2$.

Случай $r = 0$**.** Заметим, что $(P^1)^q = q!P^q$ для $1 \leqslant q \leqslant p-1$, следовательно, достаточно рассмотреть отображения $\alpha(x) = \alpha_2(x) = x(P^1)^a$ и $\beta(x) = \beta_2(x) = x(P^1)^b$. Оба идеала $\mathcal{I}_{r-1}$ и $\mathcal{I}_{r-2}$ тривиальны.

Теорема 4.8. *Для* $r = 0$ *последовательность*

$$\overline{\mathcal{A}}_p \xrightarrow{\alpha} \overline{\mathcal{A}}_p \xrightarrow{\beta} \overline{\mathcal{A}}_p$$

является точной.

Случай $r = 1$**.** Рассмотрим $\alpha(x) = xP^p$ и $\beta(x) = xP^{(p-1)p}$, то есть $a = 1$ и $b = p-1$.

Теорема 4.9. *Пусть* $r = 1$*. Для последовательности*

$$\overline{\mathcal{S}}_1^{(k)} \xrightarrow{\alpha} \mathcal{S}_1^{(p+k)} \xrightarrow{\beta} (\mathcal{S}_1/\mathcal{I}_0)^{(p^2+k)}.$$

выполнены следующие утверждения.

(*a*) *Последовательность точна для* $k < p$*.*

(*b*) *Для* $k = p$ *факторпространство* $(\ker\beta/\operatorname{im}\alpha)^{(p+k)}$ *имеет размерность* 1*. Более того, элемент* $P^1P^p(P^1)^{p-1}$ *принадлежит* $\ker\beta$ *и не содержится в образе* α*.*

Другими словами, для $r = 1$ и для нашего выбора α и β последовательность (4.22) является точной до некоторой «критической» градуировки, а в «критической» градуировке $\dim\ker\beta/\operatorname{im}\alpha = 1$. Аналогичное утверждение выполняется для $r > 1$, но с другой «критической» градуировкой.

Случай $r \geqslant 2$**.** Рассмотрим $\beta(x) = x \cdot P^{(p-1)p^r}$ и $\alpha(x) = x \cdot P^{p^r}$, то есть $a = 1$ и $b = p-1$.

Теорема 4.10. *Пусть $r \geqslant 2$. Для последовательности*

$$\overline{\mathcal{S}_r}^{(k)} \xrightarrow{\alpha} (\mathcal{S}_r/\mathcal{I}_{r-2})^{(p^r+k)} \xrightarrow{\beta} (\mathcal{S}_r/\mathcal{I}_{r-1})^{(p^{r+1}+k)}$$

выполнены следующие утверждения.

(*a*) *Последовательность точна для $k < 2p^{r-1} + p^{r-2}$.*

(*b*) *Для $k = 2p^{r-1} + p^{r-2}$ фактор $\ker\beta/\operatorname{im}\alpha$ имеет размерность один, более того, элемент $2P^{p^{r-1}}P^{p^r}P^{p^{r-2}}P^{p^{r-1}} - P^{p^{r-2}}P^{p^{r-1}}P^{p^r}P^{p^{r-1}}$ принадлежит $\ker\beta$, но не содержится в образе α.*

В следствиях 4.3, 4.4 мы показываем, что для любого другого выбора α_i с $1 < a < p$ нет точности для $r \geqslant 1$. Это объясняет, почему мы рассматриваем только случай $a = 1$, $b = p - 1$ в теоремах 4.9, 4.10.

Далее в этом подразделе мы приводим нужные предварительные сведения и затем в подразделе 4.3.2 доказываем некоторые важные соотношения в подалгебре $\mathcal{S}_r$ по модулю идеалов $\mathcal{I}_{r-1}$ и $\mathcal{I}_{r-2}$. В подразделе 4.3.3 мы доказываем теорему 4.8 и рассматриваем другой аналог последовательности $\mathcal{A}_2 \xrightarrow{\varphi_0} \mathcal{A}_2 \xrightarrow{\varphi_0} \mathcal{A}_2, \varphi_0(x) = xSq^1$, а именно, последовательность $\mathcal{A}_p \xrightarrow{\psi_j} \mathcal{A}_p \xrightarrow{\psi_j} \mathcal{A}_p, \psi_j(x) = xQ_j$. Элементы Q_j образуют внешнюю подалгебру в $\mathcal{A}_p$, подробности см. в [109]. В подразделах 4.3.4 и 4.3.5 мы доказываем теорему 4.9; части (*a*) и (*b*) разделены для удобства изложения. Аналогично, в подразделах 4.3.6 и 4.3.7 мы доказываем теорему 4.10. Наконец, в подразделе 4.3.8 мы приводим некоторые замечания, включая обсуждение случая (полной) алгебры Стинрода $\mathcal{A}_p$.

Лемма 4.7. *В алгебре $\mathcal{S}_r$ выполнены соотношения*

(1) $P^{p^r}P^{ap^r} \equiv (a+1)\,P^{(a+1)\,p^r} \mod \mathcal{I}_{r-1}$ *для* $a < p$.

(2) $(P^{p^r})^a \equiv a!\,P^{ap^r} \mod \mathcal{I}_{r-1}$ *для* $1 \leqslant a \leqslant p$.

(3) $P^{ap^r}P^{bp^r} \equiv (-1)^a \binom{p-1-b}{a} P^{(a+b)p^r} \mod \mathcal{I}_{r-1}$ *для целых чисел* $a, b \in [1, p-1]$.

Доказательство. (1): Применяя соотношение Адема к произведению $P^{p^r}P^{ap^r}$, получаем

$$P^{p^r}P^{ap^r} \equiv (-1)^{p^r}\binom{ap^r(p-1)-1}{p^r}P^{(a+1)\,p^r} \mod \mathcal{I}_{r-1}.$$

Имеем $ap^r(p-1) - 1 = (a-1)p^{r+1} + (p-a)p^r - 1$, следовательно, биномиальный коэффициент в последнем равенстве равен $p - a - 1 \mod p$.

Утверждение (2) следует из (1) по индукции.

(3): Из соотношения Адема получаем $P^{ap^r}P^{bp^r} \equiv (-1)^a\,c\,P^{(a+b)p^r} \mod \mathcal{I}_{r-1}$, где биномиальный коэффициент c равен

$$c = \binom{bp^r(p-1)-1}{ap^r} = \binom{(b-1)p^{r+1} + (p-b)p^r - 1}{ap^r} = \binom{p-b-1}{a} \mod p.$$

□

Рассмотрим два отображения $\hat{\beta}_j$, $j = 1, 2$:

$$\hat{\beta}_j : \overline{\mathcal{A}}_p \to \overline{\mathcal{A}}_p/\overline{\mathcal{A}}_p\mathcal{S}_{r-1}$$

где $\hat{\beta}_1(x) = xP^{bp^r}$ и $\hat{\beta}_2(x) = x(P^{p^r})^b$, $1 \leqslant b \leqslant p-1$.

Следующее утверждение является прямым следствием лемм 4.7.

Лемма 4.8. *Имеет место равенство* $\hat{\beta}_2 = b!\,\hat{\beta}_1$. *В частности,* $\ker\hat{\beta}_1 = \ker\hat{\beta}_2$ *для* $1 \leqslant b \leqslant p-1$.

Лемма 4.9. *Предположим, что* $r \geqslant 2$. *Тогда для* $i = 1, 2$ *и* $1 \leqslant b \leqslant p-1$ *имеем* $\hat{\beta}_i(x) \in \mathcal{I}_{r-1}$ *для любого* $x \in \mathcal{I}_{r-2}$. *Тем самым, гомоморфизмы* $\hat{\beta}_i$ *индуцируют корректно определённые гомоморфизмы* $\beta_i : \overline{\mathcal{A}}_p/\overline{\mathcal{A}}_p\mathcal{S}_{r-2} \to \overline{\mathcal{A}}_p/\overline{\mathcal{A}}_p\mathcal{S}_{r-1}$.

Доказательство. Достаточно проверить, что $P^{p^j}P^{bp^r} \in \mathcal{I}_{r-1}$ для $j \leqslant r-2$. Очевидно, имеем

$$P^{p^j}P^{bp^r} \equiv (-1)^{p^j}\binom{bp^r(p-1)-1}{p^j}P^{bp^r+p^j} \mod \mathcal{I}_{r-1}.$$

Вычисляя биномиальный коэффициент, получаем

$$P^{p^j}P^{bp^r} \equiv P^{bp^r+p^j} \mod \mathcal{I}_{r-1}. \tag{4.23}$$

Поскольку $P^{p^r-p^{j+1}+p^j} \in \mathcal{S}_{r-1}$, произведение $P^{(b-1)p^r+p^{j+1}}P^{p^r-p^{j+1}+p^j}$ принадлежит идеалу $\mathcal{I}_{r-1}$. Применяя соотношение Адема (что возможно, так как $r \geqslant j+2$), получаем

$$P^{(b-1)p^r+p^{j+1}}P^{p^r-p^{j+1}+p^j} \equiv (-1)^b\,c\,P^{bp^r+p^j} \mod \mathcal{I}_{r-1}, \tag{4.24}$$

где биномиальный коэффициент

$$c = \binom{(p^r-p^{j+1}+p^j)(p-1)-1}{p^{j+1}+(b-1)p^r} = \underbrace{\binom{p-2}{b-1}}_{r\text{-й}}\binom{*}{0}\cdots\binom{*}{0}\underbrace{\binom{1}{1}}_{j+1\text{-й}}\binom{*}{0}\cdots\binom{*}{0}$$

не равен нулю $\mod p$.

Равенства (4.23) и (4.24) влекут $P^{p^j}P^{bp^r} \in \mathcal{I}_{r-1}$. □

Из лемм 4.8 и 4.9 следует, что достаточно рассматривать только $\beta = \beta_1$.

Лемма 4.10. *Для* $a + b = p$ *и* $i = 1, 2$ *имеем* $\beta \circ \alpha_i = 0$ *в последовательности*

$$\overline{\mathcal{A}}_p \xrightarrow{\alpha_i} \overline{\mathcal{A}}_p/\overline{\mathcal{A}}_p\mathcal{S}_{r-2} \xrightarrow{\beta} \overline{\mathcal{A}}_p/\overline{\mathcal{A}}_p\mathcal{S}_{r-1} \tag{4.25}$$

Доказательство. Напомним, что $\beta(x) = xP^{bp^r}$. Тогда для $\alpha_1(x) = xP^{ap^r}$ утверждение следует непосредственно из леммы 4.7 (3).

Для $\alpha_1(x) = x(P^{p^r})^a$ проводим индукцию по a, применяя лемму 4.7 (1). □

Гипотезы Тоды mod p. Короткая последовательность (4.25)

$$\overline{\mathcal{A}}_p \xrightarrow{\alpha_i} \overline{\mathcal{A}}_p/\overline{\mathcal{A}}_p\mathcal{S}_{r-2} \xrightarrow{\beta} \overline{\mathcal{A}}_p/\overline{\mathcal{A}}_p\mathcal{S}_{r-1}$$

точна.

Наше доказательство существенно использует Z-базис алгебры $\overline{\mathcal{A}}_p$, см. определение 2.1 и теорему 2.1. Одно из полезных свойств Z-базиса иллюстрируется следующим утверждением. Напомним, $\overline{\mathcal{S}}_r$ — это подалгебра в $\overline{\mathcal{A}}_p$, порожденная $\mathcal{S}_r$ и единичным элементом.

Лемма 4.11. *Алгебра $\overline{\mathcal{A}}_p$ является свободным правым модулем над алгеброй $\overline{\mathcal{S}}_r$.*

Доказательство. Из теоремы 2.1 следует, что Z-мономы $Z_{k_1}^{n_1} \cdots Z_{k_j}^{n_j}$, где $n_j > r$, и элемент $1 = Z^{\varnothing}$ образуют свободный базис $\overline{\mathcal{A}}_p$, рассматриваемой как правый $\overline{\mathcal{S}}_r$-модуль. □

Поэтому вместо последовательности (4.25) можно рассматривать последовательность

$$\overline{\mathcal{S}}_r \xrightarrow{\alpha_i} \mathcal{S}_r/\mathcal{I}_{r-2} \xrightarrow{\beta} \mathcal{S}_r/\mathcal{I}_{r-1},$$

где $\overline{\mathcal{S}}_r$ — это $\mathcal{S}_r$ вместе с единичным элементом.

4.3.2 Вычисления по модулю идеалов $\mathcal{I}_{r-2}$ и $\mathcal{I}_{r-1}$

В этом разделе мы проведём вычисления в алгебре $\mathcal{S}_r$ по модулю идеалов $\mathcal{I}_{r-1}$ или $\mathcal{I}_{r-2}$, которые нам понадобятся в дальнейшем.

Рассмотрим произведение X элементов $P^{p^0}, P^{p^1}, \ldots P^{p^r}$ такое, что P^{p^j} содержится в произведении d_j раз, и самый правый элемент — это P^{p^r}. Пусть $L = \sum d_j$ — длина произведения. Определим набор конечных последовательностей $a_{(l)} = (a_{(l),0}, \ldots, a_{(l),r})$, где $a_{(l),j}$ — количество P^{p^j} в l самых правых членах произведения X. Например, $(a_{(1),0}, \ldots, a_{(1),r}) = (0, \ldots, 0, 1)$ и $(a_{(L),0}, \ldots, a_{(L),r}) = (d_0, \ldots, d_r)$.

Лемма 4.12. *Предположим, что $d_0 \leqslant \ldots \leqslant d_r \leqslant p-1$. Пусть $N = \sum d_j p^j$. Тогда*

$$X = \lambda P^N \mod \mathcal{I}_{r-1} \tag{4.26}$$

для некоторого ненулевого $\lambda \in \mathbb{Z}/p$ тогда и только тогда, когда все последовательности $a_{(l)}$ являются возрастающими (нестрого). Более того, если $d_r = 1$ и $k \leqslant r-1$

— максимальное число, для которого $d_k \neq 0$, то равенство выполняется по модулю идеала $\mathcal{I}_{k-1}$.

Доказательство. Обозначим через T_l произведение l самых правых символов в произведении X. Проведём индукцию, чтобы доказать, что

$$T_l = c_l P^{a_{(l),0}p^0 + \ldots + a_{(l),r}p^r} \mod \mathcal{I}_{r-1}, \tag{4.27}$$

где c_l равно с точностью до знака произведению некоторых биномиальных коэффициентов, которые мы обсудим позже. Для $l = 1$ равенство (4.27) тривиально.

Пусть $(l+1)$-й символ — это P^{p^j}. Тогда в силу соотношений Адема выполняется равенство

$$T_{l+1} = P^{p^j} T_l = c_l P^{p^j} P^{a_{(l),r}p^r + \ldots + a_{(l),0}p^0} = -b_l c_l P^{p^j + a_{(l),r}p^r + \ldots + a_{(l),0}p^0} \mod \mathcal{I}_{r-1},$$

где $b_l = \binom{(a_{(l),r}p^r + \ldots + a_{(l),0}p^0)(p-1)-1}{p^j}$. Следовательно, (4.27) выполняется для всех l. Также имеем $c_1 = 1$ и $c_{l+1} = -b_l c_l$. Таким образом, остаётся доказать, что все $b_l \neq 0$ тогда и только тогда, когда все последовательности $a_{(l)}$ являются неубывающими.

Зафиксируем некоторое l. Для простоты будем писать a_i вместо $a_{(l),i}$. Если $a_{(l)}$ возрастает, то $a_i \leqslant a_{i+1}$ для всех $i = 0, \ldots, r-1$. Заметим также, что $a_j + 1 = a_{(l+1),j} \leqslant p-1$, следовательно, $a_j < p-1$ и $a_j < a_{j+1}$. Тогда имеем p-адическое разложение

$$A = (a_r p^r + \ldots + a_0 p^0)(p-1) - 1 = (a_r - 1)p^{r+1} + \sum_{i-1}^{r} (p - 1 + a_{i-1} - a_i)p^i + (p - 1 - a_0). \tag{4.28}$$

Следовательно, биномиальный коэффициент $b_l = \binom{A}{p^j}$ равнен либо $\binom{p-1+\alpha_{j-1}-\alpha_j}{1}$, либо $\binom{p-1+\alpha_0}{1}$, и в обоих случаях $b_l \neq 0$.

Наоборот, выберем максимальное l такое, что последовательность $a_{(l)}$ не возрастает. Поскольку $a_{(l+1)}$ возрастает, имеем $a_r \geqslant \ldots \geqslant a_{j+1} > a_j$, $a_j = a_{j-1} - 1$, $a_{j-1} \geqslant \ldots \geqslant a_0$ для некоторого j. Из этого следует, что (4.28) больше не является p-адическим разложением A, так как коэффициент при p^j равен $p - 1 + a_{j-1} - a_j = p$. Модифицируя два слагаемых в (4.28), получаем p-адическое разложение A, в котором коэффициент при p^j равен нулю, следовательно, $b_l = \binom{A}{1} = 0$.

Для проверки последнего утверждения леммы достаточно заметить, что в этом случае все «остаточные члены» из соотношений Адема принадлежат $\mathcal{I}_{k-1}$. □

Следствие 4.2. *Для $r \geqslant 2$ выполнено $P^{p^{r-1}} P^{p^{r-2}} P^{p^r} \in \mathcal{I}_{r-2}$.*

Доказательство. Заметим, что последовательность $a_{(2)}$ равна $(0, \ldots, 0, 1, 0, 1)$. Следовательно, $P^{p^{r-1}} P^{p^{r-2}} P^{p^r} = \lambda P^{p^{r-2} + p^{r-1} + p^r} \mod \mathcal{I}_{r-1}$ с $\lambda = 0$ по лемме 4.12. □

Лемма 4.13.

(*a*) *Для* $k \leqslant r$ *имеем*

$$P^{p^k} \dots P^{p^r} = P^{p^k+\dots+p^r} \mod \mathcal{I}_{r-2} \tag{4.29}$$

(*b*) *Предположим, что* N *имеет* p*-адическое разложение* $\sum\limits_{j=0}^{r} a_j p^j$, $a_r \neq 0$. *Тогда*

$$(P^{p^0})^{a_0} \dots (P^{p^r})^{a_r} = \lambda P^N \mod \mathcal{I}_{r-1}, \text{ где } \lambda = \prod_j (a_j!) \neq 0. \tag{4.30}$$

Более того, если $a_r = 1$ *и* $k \leqslant r-1$ *— максимальное число, для которого* $a_k \neq 0$, *то равенство выполняется по модулю идеала* $\mathcal{I}_{k-1}$.

Доказательство. Для произведения из пункта (*a*) последовательности $a_{(l)}$ имеют вид $(0, \dots, 0, 1, \dots, 1)$ для всех l. Следовательно, $\lambda \neq 0$ в уравнении (4.26) по лемме 4.12. Более того, биномиальные коэффициенты из доказательства леммы 4.12 легко вычисляются:

$$b_l = \binom{(p^r + \dots p^{l+1})(p-1) - 1}{p^l} = \binom{\dots + (p-1)p^l + \dots}{p^l} = -1,$$

следовательно, $\lambda = 1$. Также заметим, что в равенстве (4.29) все «остаточные члены» из соотношений Адема принадлежат $\mathcal{I}_{r-2}$.

Для утверждения (*b*) докажем по убывающей индукции по k, что для N с p-адическим разложением $N = \sum\limits_{j=k}^{r} a_j p^j$ имеем

$$(P^{p^k})^{a_k} \dots (P^{p^r})^{a_r} = \lambda P^N \mod \mathcal{I}_{r-1}, \text{ где } \lambda = \prod_{j=k}^{r} (a_j!).$$

База индукции $(P^{p^r})^{a_r} = (a_r)! P^{a_r p^r} \mod \mathcal{I}_{r-1}$ следует из пункта (2) лемms 4.7.

Для шага индукции предположим, что $N = \sum\limits_{j=k}^{r} a_j p^j$, где $0 \leqslant a_j \leqslant p-1$ для $j \geqslant k$ и $0 \leqslant a_k < p-1$. Пусть $N = Mp^{k+1} + a_k p^k$, $M > 0$. Тогда $P^{p^k} P^N = -\binom{N(p-1)-1}{p^k} P^{N+p^k} \mod \mathcal{I}_{r-1}$. Если $a_k = 0$, то $N(p-1) - 1 = Mp^{k+1}(p-1) - 1 = \dots + (p-1)p^k + \dots$, а если $0 < a_k < p-1$, то $N(p-1) - 1 = M(p-1)p^{k+1} + (a_k - 1)p^{k+1} + (p - a_k)p^k - 1$. В обоих случаях $\binom{N(p-1)-1}{p^k} = -(a_k+1)$ и, наконец, $P^{p^k} P^N = (a_k+1) P^{N+p^k} \mod \mathcal{I}_{r-1}$. $\square$

Лемма 4.14. *Пусть* $r \geqslant 2$. *Тогда для любого* Z*-монома* $x = Z_{t_1}^{r-1} \dots Z_{t_p}^{r-1}$ *выполнено*

$$x = \lambda Z_{t_1}^{r-2} \dots Z_{t_p}^{r-2} P^{p^r} \mod \mathcal{I}_{r-2}, \tag{4.31}$$

где $\lambda \neq 0$, $\lambda \in \mathbb{Z}/p$.

Доказательство. Из леммы 4.12 получаем

$$Z_{t_2}^{r-1} \dots Z_{t_p}^{r-1} = \lambda_1 P^N \mod \mathcal{I}_{r-2} \tag{4.32}$$

и

$$Z_{t_2}^{r-2} \dots Z_{t_p}^{r-2} P^{p^r} = \lambda_2 P^{N-p^{r-1}} \mod \mathcal{I}_{r-2} \tag{4.33}$$

где $\lambda_1, \lambda_2 \neq 0$, $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{Z}/p$, и N — градуировка элемента $Z_{t_2}^{r-1} \dots Z_{t_p}^{r-1}$.

Из (4.33) следует, что

$$\begin{aligned} P^{p^{r-1}} Z_{t_2}^{r-2} \dots Z_{t_p}^{r-2} P^{p^r} &= \lambda_2 P^{p^{r-1}} P^{N-p^{r-1}} \mod \mathcal{I}_{r-2} \\ &= -\lambda_2 b P^N \mod \mathcal{I}_{r-2}, \end{aligned} \tag{4.34}$$

где b — биномиальный коэффициент

$$b = \binom{(N-p^{r-1})(p-1)-1}{p^{r-1}}.$$

Предположим, что в произведении x есть d_k членов P^{p^k}. Из предположения, что x является Z-мономом, следует, что $p = d_{r-1} = \dots = d_{t_1} > d_{t_1-1} \geqslant \dots \geqslant d_0 \geqslant 0$. Пусть d'_j равно d_j для $j \geqslant t_1$ и равно $d-j-1$ для $j < t_1$. Тогда имеем p-адическое разложение $N - p^{r-1}$:

$$(p-1)p^{r-1} + d'_{r-2}p^{r-2} + \dots + d'_0 p^0,$$

которое запишем как $N - p^{r-1} = (p-1)p^{r-1} + d'_{r-2}p^{r-2} + \varepsilon$. Имеем оценку $\varepsilon \leqslant d'_{r-3}(p^{r-3} + \dots + p^0) = d'_{r-3}\frac{p^{r-2}-1}{p-1}$. Из этого получаем необходимую информацию о p-адическом разложении $(N-p^{r-1})(p-1)-1$, а именно о коэффициенте при p^{r-1}. Имеем

$$\begin{aligned} (N-p^{r-1})(p-1)-1 &= (p-2)p^r + p^{r-1} + d'_{r-2}p^{r-2}(p-1) + \varepsilon(p-1) - 1 \\ &= (p-2)p^r + d'_{r-2}p^{r-1} + p^{r-2}(p-d'_{r-2}) + \varepsilon(p-1) - 1. \end{aligned}$$

Это всё, что нам нужно знать о p-адическом разложении $(N-p^{r-1})(p-1)-1$, так как $d'_{r-2} \geqslant 1$ и

$$\begin{aligned} p^{r-2}(p-d'_{r-2}) + \varepsilon(p-1) - 1 &\leqslant p^{r-2}(p-d'_{r-2}) + d'_{r-3}(p^{r-2}-1) - 1 \\ &= p^{r-1} - p^{r-2}(d'_{r-2} - d'_{r-3}) - d'_{r-3}) - 1 \leqslant p^{r-1} - 1. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$b = \binom{(N-p^{r-1})(p-1)-1}{p^{r-1}} = \binom{\dots + d'_{r-2}p^{r-1} + \dots}{p^{r-1}} \neq 0.$$

Учитывая равенства (4.32) и (4.34), остаётся доказать, что

$$Z_{t_1}^{r-2}P^N = \lambda_3 P^{N+p^{r-2}+\ldots+p^{t_1}} \mod \mathcal{I}_{r-2}$$

для некоторого $\lambda_3 \neq 0$, $\lambda_3 \in \mathbb{Z}/p$.

Проводя индукцию, видим, что

$$P^{p^k}P^{N+p^{r-2}+\ldots+p^{k+1}} = -b_k P^{N+p^{r-2}+\ldots+p^{k+1}+p^k} \mod \mathcal{I}_{r-2},$$

где

$$b_k = \binom{(N+p^{r-2}+\ldots+p^{k+1}+p^k)(p-1)-1}{p^k}.$$

Проверим, что $b_k \neq 0$ в $\mathbb{Z}/p$. Пусть

$$d''_j = \begin{cases} p = d_j & \text{для } r-2 \geqslant j \geqslant k+1, \\ p-1 = d_j - 1 & \text{для } j = k, \\ d_j - 1 & \text{для } k > j \geqslant t_1, \\ d_j & \text{для } j < t_1. \end{cases}$$

Тогда имеем p-адическое разложение $N + p^{r-2} + \ldots + p^{k+1} + p^k = p^{r-1} + \ldots + p^{k+2} + (p-1)p^k + d''_{k-1}p^{k-1} + \ldots + d''_0 p^0$, которое запишем как

$$Ap^{k+1} + (p-1)p^k + d''_{k-1}p^{k-1} + \varepsilon,$$

где $A > 0$ — целое число, и $\varepsilon \leqslant d''_{k-2}(p^{k-2} + \ldots + p^0) = d''_{k-2}(p^{k-1})/(p-1)$. Заметим, что $d''_{k-1} > 0$, иначе $x = (Z_k^{r-1})^p$, что противоречит предположениям леммы. Подчеркнуть, что это ключевой момент доказательства неравенства $b_k \neq 0$. Нам нужно найти коэффициент при p^k в p-адическом разложении $(N + p^{r-2} + \ldots + p^{k+1} + p^k)(p-1) - 1$. Запишем это выражение в виде

$$\begin{aligned} &(Ap^{k+1} + (p-1)p^k + d''_{k-1}p^{k-1} + \varepsilon)(p-1) - 1 = \\ &\quad = A(p-1)p^{k+1} + (p-2)p^{k+1} + d''_{k-1}p^{k-1}(p-1) + \varepsilon(p-1) \\ &\quad = Bp^{k+1} + d''_{k-1}p^k + p^{k-1}(p - d''_{k-1}) + \varepsilon(p-1), \end{aligned} \tag{4.35}$$

где $B > 0$ — целое число. Имеем оценку $p^{k-1}(p - d''_{k-1}) + \varepsilon(p-1) - 1 \leqslant p^{k-1}(p - d''_{k-1}) + d''_{k-2}(p^{k-1}) - 1 = p^k - p^{k-1}(d''_{k-1} - d''_{k-2}) - 1 \leqslant p^k - 1$, из чего следует, что коэффициент при p^k в (4.35) равен d''_{k-1}. Следовательно, $b_k = \binom{\ldots + d''_{k-1}p^k + \ldots}{p^k} = d''_{k-1} \neq 0$. □

Лемма 4.15. *Пусть $0 \leqslant k < r$. Рассмотрим произведение X элементов $P^{p^k}, P^{p^{k+1}}, \ldots, P^{p^r}$ такое, что P^{p^k} содержится в произведении не менее p раз, и самый правый сомножитель равен P^{p^r}.*

(*a*) *Тогда* $X \in \mathcal{I}_{r-1}$.

(*b*) *Если* P^{p^k} *содержится в произведении* X *только один раз* (*как самый правый элемент*), *то* $X \in \mathcal{I}_{r-2}$.

Доказательство. Без потери общности можно предположить, что P^{p^k} содержится в произведении X ровно p раз и что самый левый элемент — это P^{p^k}. Обозначим через M градуировку X. Тогда, рассуждая как в лемме 4.12 или лемме 4.14, можно легко показать, что

$$X = \lambda P^{p^k} P^{M-p^k} \mod \mathcal{I}_{r-1} \tag{4.36}$$

для некоторого $\lambda \in \mathbb{Z}/p$. Заметим, что у нас нет оснований утверждать, что λ равен нулю или нет. Однако

$$P^{p^k} P^{M-p^k} = -bP^M \mod \mathcal{I}_{r-1}, \tag{4.37}$$

где $b = \binom{(M-p^k)(p-1)-1}{p^k}$. Из предположений о членах M видим, что $M - p^k = Ap^{k+1} + (p-1)p^k$. Тогда $(M-p^k)(p-1)-1 = (Ap^{k+1}+(p-1)p^k)(p-1)-1 = A(p-1)p^{k+1} + p^{k+1}(p-2) + p^k - 1$, следовательно, в его p-адическом разложении коэффициент при p^k равен нулю. Поэтому $b = \binom{\cdots+0p^k+\cdots}{p^k} = 0$, и $X = 0 \mod \mathcal{I}_{r-1}$. Это доказывает пункт (*a*). Для доказательства пункта (*b*) применим те же рассуждения, но заметим, что из-за ограничений на градуировки сомножителей в X «остаточные члены» из соотношений Адема в равенствах (4.36) и (4.37) принадлежат $\mathcal{I}_{r-2}$. □

Лемма 4.16. *Для* $r \geqslant 2$ *имеем* $P^{p^r+p^{r-1}-p^{r-2}} P^{p^{r-2}} P^{p^{r-1}} = P^{p^r+p^{r-1}-p^{r-2}} P^{p^{r-2}+p^{r-1}} = 0 \mod \mathcal{I}_{r-2}$.

Доказательство. Заметим, что

$$P^{p^r+p^{r-1}-p^{r-2}} P^{p^{r-2}} P^{p^{r-1}} = P^{p^r+p^{r-1}-p^{r-2}} P^{p^{r-2}+p^{r-1}} \mod \mathcal{I}_{r-2}$$

по лемме 4.13.

Применим соотношение Адема к произведению

$$P^{p^r+(p-1)p^{r-2}} P^{p^{r-1}+p^{r-2}} = \sum_{j=0}^{h} (-1)^{1+j} \binom{(p^{r-1}+p^{r-2}-j)(p-1)-1}{p^r+(p-1)p^{r-2}-pj} P^{p^r+p^{r-1}-j} P^j,$$

где $h = [p^{r-1}+(p-1)p^{r-3}]$. Биномиальные коэффициенты для $j \leqslant p^{r-1}$ равны нулю, так как для таких j выполняется неравенство $(p^{r-1}+p^{r-2}-j)(p-1)-1 < p^r+(p-1)p^{r-2}-pj$. Для $r = 2$ других слагаемых нет, следовательно, произведение равно нулю. Для $r > 3$ есть слагаемые с $p^{r-1}+1 \leqslant j \leqslant p^{r-1}+(p-1)p^{r-3}$. В этом случае $a_{r-1}(j) = 1$ и $a_{r-2}(j) = 0$. Предположим, что $k \leqslant r-3$ — наибольшее целое число, для которого $a_k(j) \neq 0$. Тогда по лемме 4.13 имеем $P^j = \lambda z P^{p^k} P^{p^{r-1}} \mod \mathcal{I}_{r-2}$ для некоторого $\lambda \neq 0$ и $z \in \mathcal{S}_k$. По лемме 4.9 выполняется $P^{p^k} P^{p^{r-1}} \in \mathcal{I}_{r-2}$. Следовательно, $P^j \in \mathcal{I}_{r-2}$ для

любого целого $j \in [p^{r-1}+1, p^{r-1}+(p-1)p^{r-3}]$. □

4.3.3 Случай $r = 0$, точность

Доказательство теоремы 4.8. Напомним, что $\alpha(x) = x(P^1)^a$ и $\beta(x) = x(P^1)^b$, где $a = 1$ и $b = p-1$. Нам нужно доказать, что последовательность

$$\overline{\mathcal{A}}_p \xrightarrow{\alpha} \overline{\mathcal{A}}_p \xrightarrow{\beta} \overline{\mathcal{A}}_p \tag{4.38}$$

точна. Из соотношения $(P^1)^p = 0$ следует, что $\beta \circ \alpha = 0$.

Рассмотрим множество Z', состоящее из всех Z-мономов вида $\ldots (Z_0^0)^q$, где $q \geqslant a$, и обозначим через Z'' множество всех остальных Z-мономов. Очевидно, что линейная оболочка Z' совпадает с $\operatorname{im}\alpha$. С другой стороны, β является инъекцией Z'' в множество всех Z-мономов. Следовательно, $\ker\beta$ совпадает с $\operatorname{im}\alpha$. □

Стоит отметить, что последовательность (4.38) является аналогом последовательности

$$\mathcal{A}_2 \xrightarrow{\psi} \mathcal{A}_2 \xrightarrow{\psi} \mathcal{A}_2,$$

где $\psi(x) = x \cdot Sq^1$. Здесь $\phi \circ \phi = 0$, так как $Sq^1 Sq^1 = 0$. Известно, что эта последовательность точна, и это можно доказать тем же способом, что и теорему 4.8.

В алгебре $\mathcal{A}_2$ элемент Sq^1 совпадает с элементом Бокштейна. С другой стороны, для $p > 2$ элемент Бокштейна β не принадлежит подалгебре $\overline{\mathcal{A}}_p$. Алгебра $\mathcal{A}_p$ содержит набор элементов Q_j, $\deg Q_j = 2p^j - 1$, $j \geqslant 0$, которые образуют внешнюю алгебру: $Q_j^2 = 0$, $Q_jQ_i + Q_iQ_j = 0$ для любых $i \neq j$. Они могут быть определены по индукции: Q_0 совпадает с элементом Бокштейна β, а для $j > 0$ имеем $Q_{j+1} = [P^{p^j}, Q_j]$, подробности см. в [109].

Определим $\psi_j : \mathcal{A}_p \to \mathcal{A}_p$ формулой $\psi_j(x) = xQ_j$.

Утверждение 4.2. *Последовательность*

$$\mathcal{A}_p \xrightarrow{\psi_j} \mathcal{A}_p \xrightarrow{\psi_j} \mathcal{A}_p$$

точна.

Доказательство. Соотношение $\psi_j \circ \psi_j = 0$ следует из $Q_j^2 = 0$.

Теперь рассмотрим любой набор элементов $\{\theta_k\}$, образующих аддитивный базис $\overline{\mathcal{A}}_p$. Тогда набор элементов $\theta_k Q_{i_1} \ldots Q_{i_m}$, где $m \geqslant 0$, $i_1 < \ldots < i_m$, образует аддитивный базис $\mathcal{A}_p$. Например, можно использовать PQ-базис $P(r_1, r_2, \ldots)Q_0^{\varepsilon_0}Q_1^{\varepsilon_1}\ldots$, см. подраздел 3.2.1.

Утверждение, что если $\psi_j(x) = 0$, то $x = \psi_j(y)$ для некоторого y, теперь легко следует из рассмотрения этого базиса и из соотношений $Q_j^2 = 0$, $Q_jQ_i + Q_iQ_j = 0$ для любых $i \neq j$. □

4.3.4 Случай $r = 1$, точность.

Доказательство теоремы 4.9(a). Напомним, $\alpha(x) = xP^{ap}$ и $\beta(x) = xP^{bp}$, где $a = 1$ и $b = p - 1$. Мы хотим доказать точность последовательности

$$\overline{\mathcal{S}}_1^{(k)} \xrightarrow{\alpha} (\mathcal{S}_1)^{(p+k)} \xrightarrow{\beta} (\mathcal{S}_1/\mathcal{I}_0)^{(p^2+k)}. \tag{4.39}$$

для любого $k < p$.

Для $k < -p$ модули $\overline{\mathcal{S}}_1^{(k)}, (\mathcal{S}_1)^{(p+k)}$ тривиальны, и утверждение очевидно. Рассмотрим следующие случаи:

(a.1) $-p \leqslant k < 0$: $\operatorname{im}\alpha = 0$, так как его область определения тривиальна. Заметим, что $(\mathcal{S}_1)^{(p+k)}$ одномерен и порождается Z-мономом $(Z_0^0)^{p+k}$. По лемме 4.7(2) и лемме 4.13 имеем $\beta((Z_0^0)^{p+k}) = (Z_0^0)^{p+k}P^{(p-1)p} = \lambda P^{p^2+k} \mod \mathcal{I}_0$ для некоторого $\lambda \in \mathbb{Z}/p$, $\lambda \neq 0$. С другой стороны, $(\mathcal{S}_1/\mathcal{I}_0)^{(p^2+k)}$ содержит базисный элемент $(Z_1^1)^{-1-k}(Z_0^1)^{p+k}$, который по лемме 4.12 равен $\mu P^{p^2+k} \mod \mathcal{I}_0$ для некоторого $\mu \in \mathbb{Z}/p$, $\mu \neq 0$. Следовательно, $\ker\beta = 0$.

(a.2) $k = 0$: имеем $\dim(\mathcal{S}_1)^{(p+k)} = 1$ с базисным элементом $Z_1^1 = P^p$. Он принадлежит $\operatorname{im}\alpha$, так как $\alpha(1) = P^p$. Следовательно, в этом случае $\ker\beta = \operatorname{im}\alpha$.

(a.3) $0 < k < p$: имеем $\dim(\mathcal{S}_1)^{(p+k)} = 2$ с базисными элементами $Z_1^1(Z_0^0)^k$ и $Z_1^0(Z_0^0)^{k-1}$, и $\dim(\mathcal{S}_1)^{(k)} = 1$ с базисным элементом $(Z_0^0)^k$.

Прежде всего заметим, что $\alpha((Z_0^0)^k) = (Z_0^0)^kP^p$ с точностью до скалярного множителя $k!$ совпадает с P^kP^p, который равен $(-1)^k\binom{p-1}{k}P^{p+k}$ и, следовательно, не равен нулю.

Для $\ker\beta$ нужно вычислить β на элементах $Z_1^1(Z_0^0)^k$ и $Z_1^0(Z_0^0)^{k-1}$. Имеем

$$\begin{aligned}\beta(Z_1^1(Z_0^0)^k) &= P^p(P^1)^kP^{(p-1)p} = k!P^pP^kP^{(p-1)p} = \\ &= (-1)^k k!\binom{p-1}{k}P^pP^{(p-1)p+k} = \\ &= (-1)^{k+1}k!\binom{p-1}{k}kP^{p^2+k} \mod \mathcal{I}_0,\end{aligned} \tag{4.40}$$

и

$$\begin{aligned}\beta(Z_0^1(Z_0^0)^{k-1}) &= P^1P^p(P^1)^{k-1}P^{(p-1)p} = \\ &= (k-1)!\binom{p-1}{k-1}(k-1)P^1P^{p^2+k-1} = \\ &= (k-1)!\binom{p-1}{k-1}(k-1)kP^{p^2+k} \mod \mathcal{I}_0.\end{aligned}$$

С другой стороны, для Z-монома $(Z_1^1)^{p-k}(Z_0^1)^k$ в $\mathcal{S}_1/\mathcal{I}_0$ имеем $(Z_1^1)^{p-k}(Z_0^1)^k = \lambda P^{p^2+k}$ для некоторого ненулевого $\lambda \in \mathbb{Z}/p$. Следовательно, $\beta(Z_1^1(Z_0^0)^k) \neq 0$ в $\mathcal{S}_1/\mathcal{I}_0$, и $\beta(Z_0^1(Z_0^0)^{k-1}) = 0$ тогда и только тогда, когда $k = 1$. Из этих вычислений следует, что $\dim\ker\beta = 1$. Из предыдущих аргументов видим, что $\ker\beta$ содержит ненулевой элемент $\alpha((Z_0^0)^k) = (Z_0^0)^kP^p$. Следовательно, $\ker\beta = \operatorname{im}\alpha$. □

4.3.5 Случай $r = 1$, неточность

Доказательство теоремы 4.9(b). Как и выше, $\alpha(x) = xP^p$ и $\beta(x) = xP^{(p-1)p}$. Мы хотим доказать, что что в последовательности (4.39) для $k = p$ факторпространство $(\ker\beta/\operatorname{im}\alpha)^{(p+k)}$ имеет размерность 1, причем, элемент $Z_0^1(Z_0^0)^{p-1}$ принадлежит $\ker\beta$ и не содержится в образе α.

Имеем $\dim(\mathcal{S}_1)^{(p+k)} = 2$ с базисными элементами $(Z_1^1)^2$ и $Z_0^1(Z_0^0)^{p-1}$. Оба они принадлежат $\ker\beta$. В самом деле, $\beta((Z_1^1)^2) = (P^p)^{p+1} = P^p(P^p)^p \in \mathcal{I}_0$ по лемме 4.7, и, как в формуле (4.40), получаем

$$\begin{aligned}\beta(Z_0^1(Z_0^0)^{p-1}) &= P^1\big(P^p(P^1)^{p-1}P^{(p-1)p}\big) = \\ &= P^1(p-1)!\binom{p-1}{p-1}(p-1)P^{p^2+(p-1)} = P^1P^{p^2+(p-1)} = \\ &= \binom{(p^2+(p-1))(p-1)-1}{1}P^1P^{p^2+(p-1)} = 0 \mod \mathcal{I}_0.\end{aligned}$$

С другой стороны, $\dim(\mathcal{S}_1)^{(p)} = 1$ с базисным элементом Z_1^1. Очевидно, $\alpha(Z_1^1) = P^pP^p = (Z_1^1)^2 \neq 0$. Следовательно, $\dim(\ker\beta/\operatorname{im}\alpha)^{(2p)} = 1$. □

Следствие 4.3. *Выберем целые числа a и b такие, что $a + b = p$ и $2 \leqslant a \leqslant p-1$. Переопределим α и β формулами $\alpha(x) = xP^{ap}$ (или $\alpha(x) = x(P^p)^a$) и $\beta(x) = xP^{bp}$. Тогда $\dim(\ker\beta/\operatorname{im}\alpha)^{(2p)} = 1$ для последовательности (4.39).*

Доказательство. Применяя те же рассуждения, что и в части доказательства теоремы 4.9, касающейся неточности, можно показать, что $\dim(\ker\beta)^{(2p)} = 1$ для $a > 2$, в то время как $\operatorname{im}\alpha = 0$.

Для $a = 2$ образ α в градуировке $2p$ порождается элементом $\alpha(1) = P^{2p} \neq 0$ (или $\alpha(1) = (P^p)^2 = -P^{2p} + P^{2p-1}P^1 \neq 0$). С другой стороны, β обращается в нуль на $\mathcal{S}_1^{(2p)}$, так как $\beta((Z_1^1)^2) = (P^p)^2(P^p)^{p-2} = 0 \mod \mathcal{I}_0$ и $\beta(Z_0^1(Z_0^0)^{p-1}) = P^1P^p(P^1)^{p-1} = 0 \mod \mathcal{I}_0$. □

4.3.6 Случай $r \geqslant 2$, точность

Доказательство теоремы 4.10(a). Рассмотрим $\beta(x) = x \cdot P^{(p-1)p^r}$ и $\alpha(x) = x \cdot P^{p^r}$. Мы хотим доказать, что для $k < 2p^{r-1} + p^{r-2}$ последовательность

$$\overline{\mathcal{S}_r}^{(k)} \xrightarrow{\alpha} (\mathcal{S}_r/\mathcal{I}_{r-2})^{(p^r+k)} \xrightarrow{\beta} (\mathcal{S}_r/\mathcal{I}_{r-1})^{(p^{r+1}+k)} \tag{4.41}$$

является точной.

Рассмотрим следующие случаи:

$(a1)$ для $k < -p^r$ имеем $\mathcal{S}_r^{(k)} = 0$ и $(\mathcal{S}_r/\mathcal{I}_{r-2})^{(p^r+k)} = 0$, следовательно, утверждение тривиально;

$(a2)$ для $-p^r \leqslant k < 0$ имеем $\mathcal{S}_r^{(k)} = 0$, и утверждение состоит в том, что $\ker\beta = 0$;

$(a3)$ для $0 \leqslant k < 2p^{r-1} + p^{r-2}$ все три модуля, как правило, нетривиальны, и утверждение состоит в том, что $\ker\beta = \operatorname{im}\alpha$.

Начнём с $(a2)$. Базис $\mathcal{S}_r/\mathcal{I}_{r-2}$ состоит из Z-мономов вида

$$Z_{l_1}^r \dots Z_{l_s}^r Z_{k_1}^{r-1} \dots Z_{k_t}^{r-1}.$$

В градуировке $N = p^r - k$, где $-p^r < k < 0$, имеем $s = 0$ и $t \leqslant p-1$. Обозначим через $a_j(Z)$ количество P^{p^j}, $0 \leqslant j \leqslant r-1$, в произведении $Z = Z_{k_1}^{r-1} \dots Z_{k_t}^{r-1}$, $t \leqslant p-1$, градуировки N. Тогда $N = \sum a_j(Z)p^j$ является p-адическим разложением N. Заметим, что $0 \leqslant a_0(Z) \leqslant \dots \leqslant a_{r-1}(Z) = t \leqslant p-1$, следовательно, Z однозначно определяется числами $a_0, \dots, a_{r-1}$.

С другой стороны, рассмотрим p-адическое разложение $N = \sum a_j(N)\, p^j$ для $0 \leqslant N < p^r$. Если $0 \leqslant a_0(N) \leqslant \dots \leqslant a_{r-1}(N) \leqslant p-1$, то существует единственный Z-моном $Z_{k_1}^{r-1} \dots Z_{k_t}^{r-1}$ в градуировке N, и $\dim(\mathcal{S}_r/\mathcal{I}_{r-2})^{(N)} = 1$. В противном случае $\dim(\mathcal{S}_r/\mathcal{I}_{r-2})^{(N)} = 0$. Следовательно, остаётся доказать, что $\beta(Z_{k_1}^{r-1} \dots Z_{k_t}^{r-1}) \neq 0$ в $\mathcal{S}_r/\mathcal{I}_{r-1}$.

Из леммы 4.7(2) и леммы 4.12 следует, что

$$\beta(Z_{k_1}^{r-1} \dots Z_{k_t}^{r-1}) = Z_{k_1}^{r-1} \dots Z_{k_t}^{r-1} P^{(p-1)p^r} = \lambda P^{N+(p-1)p^r} \mod \mathcal{I}_{r-1}, \tag{4.42}$$

где $\lambda \neq 0$, $\lambda \in \mathbb{Z}/p$. С другой стороны, базис $\mathcal{S}_r/\mathcal{I}_{r-1}$ состоит из Z-мономов вида $Z_{l_1}^r \dots Z_{l_s}^r$. Рассмотрим Z-моном $(Z_r^r)^{p-1-t} Z_{k_1}^r \dots Z_{k_t}^r \in \mathcal{S}_r/\mathcal{I}_{r-1}$. Из той же леммы 4.12

следует, что

$$(Z_r^r)^{p-1-t} Z_{k_1}^r \dots Z_{k_t}^r = \mu P^{N+(p-1)p^r} \mod \mathcal{I}_{r-1}, \tag{4.43}$$

где $\mu \in \mathbb{Z}/p$ и $\mu \neq 0$. Следовательно, $\beta(Z_{k_1}^{r-1} \dots Z_{k_t}^{r-1}) \neq 0$.

Теперь рассмотрим случай $(a3)$. Прежде всего, рассмотрим вопрос о том, сколько Z-мономов вида $Z_{l_1}^r \dots Z_{l_s}^r Z_{k_1}^{r-1} \dots Z_{k_t}^{r-1}$ имеют градуировку, равную N, если $p^k \leqslant N < p^k + 2p^{k-1} + p^{k-2}$.

Из ограничения на N следует, что $s \leqslant 1$. Если Z-моном $x = Z_{l_1}^r \dots Z_{l_s}^r Z_{k_1}^{r-1} \dots Z_{k_t}^{r-1}$ содержит P^{p^r} (то есть $s = 1$), то он может содержать не более двух $P^{p^{r-1}}$. Следовательно, единственные Z-мономы этого типа:

$$Z_r^r,\ Z_{r-1}^r Z_{r-1}^{r-1},\ Z_r^r (Z_{r-1}^{r-1})^2,\ Z_r^r Z_k^{r-1},$$

где $k \leqslant r-1$. Если $s = 0$ (моном x не содержит P^{p^r}), то из $p^k \leqslant N < p^k + 2p^{k-1} + p^{k-2}$ следует, что $t = p$ или $t = p+1$. Легко проверить, что все эти мономы имеют разную градуировку, за исключением двух из них, а именно $Z_{r-1}^r Z_{r-1}^{r-1}, Z_r^r (Z_{r-1}^{r-1})^2$, которые имеют градуировку $p^r + 2p^{r-1}$. Другими словами, мы имеем следующие подслучаи:

$(a3.1)$ $p^k \leqslant N < p^k + 2p^{k-1} + p^{k-2}$ и $N \neq p^r + 2p^{r-1}$, тогда $\dim(\mathcal{S}_r/\mathcal{I}_{r-2})^{(N)} \leqslant 1$;

$(a3.2)$ $N = p^r + 2p^{r-1}$, тогда $\dim(\mathcal{S}_r/\mathcal{I}_{r-2})^{(p^r+2p^{r-1})} = 2$.

$(a3.3)$ $Z_{k_1}^{r-1} \dots Z_{k_t}^{r-1}$, $t = p$ или $t = p+1$.

Для $(a3.1)$ докажем, что ограничение β на $(\mathcal{S}_r/\mathcal{I}_{r-2})^{(N)}$ не имеет ядра. Рассмотрим $Z_r^r Z_k^{r-1}$ и пусть $N = p^r + p^{r-1} + \dots + p^k$. По лемме 4.7(2) и лемме 4.12 имеем

$$Z_k^{r-1} P^{(p-1)p^r} = \lambda P^{(p-1)p^r + p^{r-1} + \dots + p^k} \mod \mathcal{I}_{r-2}.$$

С помощью леммы A.1 можно показать, что $\lambda = 1$. Тогда

$$\begin{aligned}
\beta(Z_r^r Z_k^{r-1}) &= P^{p^r} P^{(p-1)p^r + p^{r-1} + \dots + p^k} \mod \mathcal{I}_{r-1} = \\
&= -\binom{(p^r(p-1) + p^{r-1} + \dots + p^k)(p-1) - 1}{p^r} P^{N+(p-1)p^r} \mod \mathcal{I}_{r-1} = \\
&= -P^{N+(p-1)p^r} \mod \mathcal{I}_{r-1}.
\end{aligned}$$

С другой стороны, в $(\mathcal{S}_r/\mathcal{I}_{r-1})^{(N+(p-1)p^r)}$ существует (ненулевой) Z-моном $(Z_r^r)^{p-1} Z_k^r$. Рассуждая аналогично, можно показать, что в $(\mathcal{S}_r/\mathcal{I}_{r-1})^{(N+(p-1)p^r)}$

$$(Z_r^r)^{p-1} Z_k^r = (p-1)! P^{N+(p-1)p^r} \mod \mathcal{I}_{r-1}.$$

По теореме Вильсона $(p-1)! + 1 = 0$ в $\mathbb{Z}/p$. Следовательно, $\beta(Z_r^r Z_k^{r-1}) \neq 0$.

Случай $(a3.2)$ более сложен. Прежде всего, нам нужно вычислить $\beta(Z_{r-1}^r Z_{r-1}^{r-1})$ и $\beta(Z_r^r (Z_{r-1}^{r-1})^2)$. Проследим доказательство леммы 4.12, аккуратно отслеживая значения биномиальных коэффициентов. Будем последовательно применять соотношения

Адема и сохранять слагаемые, не принадлежащие идеалам факторизации:

$$\begin{aligned}\beta(Z^r_{r-1}Z^{r-1}_{r-1}) &= P^{p^{r-1}}P^{p^r}P^{p^{r-1}}P^{(p-1)p^r} = \\ &= -P^{p^{r-1}}P^{p^r}\binom{p^r(p-1)^2-1}{p^{r-1}}P^{p^{r-1}+(p-1)p^r} \mod \mathcal{I}_{r-2} = \\ &= P^{p^{r-1}}P^{p^r}P^{p^{r-1}+(p-1)p^r} \mod \mathcal{I}_{r-2} = \\ &= -P^{p^{r-1}}P^{p^{r-1}+p^{r+1}} \mod \mathcal{I}_{r-1} = \\ &= -2P^{2p^{r-1}+p^{r+1}} \mod \mathcal{I}_{r-1}.\end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned}\beta(Z^r_r(Z^{r-1}_{r-1})^2) &= P^{p^r}P^{p^{r-1}}P^{p^{r-1}}P^{(p-1)p^r} = \\ &= P^{p^r}P^{p^{r-1}}P^{p^{r-1}+(p-1)p^r} \mod \mathcal{I}_{r-2} = \\ &= 2P^{p^r}P^{2p^{r-1}+(p-1)p^r} \mod \mathcal{I}_{r-2} = \\ &= -4P^{2p^{r-1}+p^{r+1}} \mod \mathcal{I}_{r-1}.\end{aligned}$$

В $(\mathcal{S}_r/\mathcal{I}_{r-1})^{(p^{r+1}+2p^{r-1})}$ по лемме 4.14 имеем равенство

$$(Z^r_r)^{p-2}(Z^r_{r-1})^2 = \lambda P^{2p^{r-1}+p^{r+1}} \mod \mathcal{I}_{r-1}$$

для некоторого $\lambda \neq 0$, $\lambda \in \mathbb{Z}/p$. В самом деле, по лемме 4.12

$$(Z^r_r)^{p-3}(Z^r_{r-1})^2 = \lambda P^{(p-1)p^r+2p^{r-1}} \mod \mathcal{I}_{r-1}$$

для некоторого $\lambda' \neq 0, \lambda' \in \mathbb{Z}/p$. Тогда

$$\begin{aligned}(Z^r_r)^{p-2}(Z^r_{r-1})^2 &= \lambda' P^{p^r}P^{(p-1)p^r+2p^{r-1}} = \\ &= -\lambda'\binom{((p-1)p^r+2p^{r-1})(p-1)-1}{p^r}P^{p^{r+1}+2p^{r-1}} = \\ &= -2\lambda' P^{p^{r+1}+2p^{r-1}} \mod \mathcal{I}_{r-1}.\end{aligned}$$

Следовательно, ядро β на $(\mathcal{S}_r/\mathcal{I}_{r-2})^{(p^r+2p^{r-1})}$ имеет размерность один и порождается элементом $x = Z^r_r(Z^{r-1}_{r-1})^2 - 2Z^r_{r-1}Z^{r-1}_{r-1}$. Теперь мы покажем, что $x \in \operatorname{im}\alpha$. Точнее, мы покажем, что $\alpha((Z^{r-1}_{r-1})^2) = -x$.

Основное отличие от предыдущих рассуждений заключается в том, что теперь мы проводим вычисления в $\mathcal{S}_r$ и применяем соотношения Адема по модулю идеала

$\mathcal{I}_{r-2}$. Для произведения $P^{p^r}P^{p^{r-1}}P^{p^{r-1}}$ имеем

$$\begin{aligned} P^{p^r}P^{p^{r-1}}P^{p^{r-1}} &= 2P^{p^r}P^{2p^{r-1}} = \\ &= -2\binom{2p^{r-1}(p-1)-1}{p^r}P^{p^r+2p^{r-1}} + 2P^{p^r+p^{r-1}}P^{p^{r-1}} = \\ &= -2P^{p^r+2p^{r-1}} + 2P^{p^r+p^{r-1}}P^{p^{r-1}} \mod \mathcal{I}_{r-2}. \end{aligned}$$

Можно проверить, что $P^{p^{r-1}}P^{p^{r-1}}P^{p^r} = 2P^{p^r+2p^{r-1}} \mod \mathcal{I}_{r-2}$ (см. также лемму 4.12). Следовательно, достаточно установить равенство

$$P^{p^r+p^{r-1}}P^{p^{r-1}} = P^{p^{r-1}}P^{p^r}P^{p^{r-1}} \mod \mathcal{I}_{r-2}.$$

Соотношение Адема даёт

$$P^{p^{r-1}}P^{p^r}P^{p^{r-1}} = (P^{p^r+p^{r-1}} + P^{p^r+p^{r-1}-p^{r-2}}P^{p^{r-2}} + y)P^{p^{r-1}},$$

где $y \in \mathcal{I}_{r-3}$. По лемме 4.9 имеем $yP^{p^{r-1}} \in \mathcal{I}_{r-2}$, и $P^{p^r+p^{r-1}-p^{r-2}}P^{p^{r-2}}P^{p^{r-1}} \in \mathcal{I}_{r-2}$ по лемме 4.16, что завершает доказательство $(a3.2)$.

Случай $(a3.3)$: Элемент $Z^{r-1}_{k_1}\dots Z^{r-1}_{k_t}$, где $t = p$ или $t = p+1$, по лемме 4.14 принадлежит $\operatorname{im}\alpha$. Заметим, что других Z-мономов той же градуировки в $\mathcal{S}_r/\mathcal{I}_{r-2}$ нет, следовательно, $\ker\beta = \operatorname{im}\alpha$ в этой градуировке. □

4.3.7 Случай $r \geqslant 2$, неточность

Доказательство теоремы 4.10(b). В этом разделе мы докажем, что для последовательности (4.41) при $k = 2p^{r-1} + p^{r-2}$ фактор $\ker\beta/\operatorname{im}\alpha$ имеет размерность один, и более того, элемент $2Z^r_{r-1}Z^{r-1}_{r-2} - Z^r_{r-2}Z^{r-1}_{r-1}$ принадлежит $\ker\beta$, но не содержится в $\operatorname{im}\alpha$.

В пространстве $(\mathcal{S}_r/\mathcal{S}_{r-2})^{(p^r+2p^{r-1}+p^{r-2})}$ есть три Z-монома, содержащих P^{p^r}, а именно $Z^r_{r-1}Z^{r-1}_{r-2}$, $Z^r_rZ^{r-1}_{r-1}Z^{r-1}_{r-2}$, $Z^r_{r-2}Z^{r-1}_{r-1}$. Прежде всего, мы вычислим образ этих элементов при отображении $\beta : \mathcal{S}_r/\mathcal{I}_{r-2} \to \mathcal{S}_r/\mathcal{I}_{r-1}$, $\beta : x \mapsto xP^{(p-1)p^r}$. Удобно, однако, рассмотреть более общее отображение $\beta_1 : \mathcal{S}_r/\mathcal{I}_{r-2} \to \mathcal{S}_r/\mathcal{I}_{r-1}$, определённое формулой $\beta_1(x) = xP^{bp^r}$ для некоторого фиксированного целого числа $1 \leqslant b \leqslant p-1$.

Лемма 4.17. *В факторпространстве $\mathcal{S}_r/\mathcal{I}_{r-1}$ выполнено равенство*

$$(Z^r_r)^{p-2}Z^r_{r-1}Z^r_{r-2} = P^{p^{r+1}+2p^{r-1}+p^{r-2}}.$$

Кроме того,

(1) $\beta_1(Z^r_{r-1}Z^{r-1}_{r-2}) = bP^{p^{r+1}+2p^{r-1}+p^{r-2}} \mod \mathcal{I}_{r-1}$,

(2) $\beta_1(Z^r_rZ^{r-1}_{r-1}Z^{r-1}_{r-2}) = (b-1)P^{p^{r+1}+2p^{r-1}+p^{r-2}} \mod \mathcal{I}_{r-1}$,

(3) $\beta_1(Z^r_{r-2}Z^{r-1}_{r-1}) = 2bP^{p^{r+1}+2p^{r-1}+p^{r-2}} \mod \mathcal{I}_{r-1}$.

Доказательство леммы 4.17. Следуя доказательствам лемм 4.12 и 4.7(2), можно проверить, что для Z-монома $(Z^r_r)^{p-2}Z^r_{r-1}Z^r_{r-2}$ выполняется равенство

$$(Z^r_r)^{p-2}Z^r_{r-1}Z^r_{r-2} = (p-2)!\, P^{p^{r+1}+2p^{r-1}+p^{r-2}} \mod \mathcal{I}_{r-1}.$$

По теореме Вильсона $(p-1)! + 1 = 0 \mod p$, следовательно, $(p-2)! = 1 \mod p$.

Для утверждения (1) проверяем, что по модулю идеала $\mathcal{I}_{r-1}$ выполняются равенства

$$\begin{aligned}\beta_1(Z^r_{r-1}Z^{r-1}_{r-2}) &= P^{p^{r-1}}P^{p^r}P^{p^{r-2}}P^{p^{r-1}}P^{bp^r} = \\ &= P^{p^{r-1}}P^{p^r}P^{p^{r-2}}P^{bp^r+p^{r-1}} = \\ &= bP^{p^{r-1}}P^{(b+1)p^r+p^{r-1}+p^{r-2}} = \\ &= bP^{(b+1)p^r+2p^{r-1}+p^{r-2}} \mod \mathcal{I}_{r-1}.\end{aligned}$$

Для утверждения (2) проверяем, что по модулю идеала $\mathcal{I}_{r-1}$ выполняются равенства

$$\begin{aligned}\beta_1(Z^r_rZ^{r-1}_{r-1}Z^{r-1}_{r-2}) &= P^{p^r}P^{p^{r-1}}P^{p^{r-2}}P^{p^{r-1}}P^{bp^r} = \\ &= P^{p^r}P^{p^{r-1}}P^{bp^r+p^{r-1}+p^{r-2}} = \\ &= (b-1)P^{(b+1)p^r+2p^{r-1}+p^{r-2}} \mod \mathcal{I}_{r-1}.\end{aligned}$$

Для утверждения (3) проверяем, что по модулю идеала $\mathcal{I}_{r-1}$ выполняются равенства

$$\begin{aligned}\beta_1(Z^r_{r-2}Z^{r-1}_{r-1}) &= P^{p^{r-2}}P^{p^{r-1}}P^{p^r}P^{p^{r-1}}P^{bp^r} = \\ &= 2bP^{(b+1)p^r+2p^{r-1}+p^{r-2}} \mod \mathcal{I}_{r-1}.\end{aligned}$$

□

Из леммы 4.17 следует, что на подпространстве, порождённом Z-мономами $Z^r_{r-1}Z^{r-1}_{r-2}$, $Z^r_rZ^{r-1}_{r-1}Z^{r-1}_{r-2}$, $Z^r_{r-2}Z^{r-1}_{r-1}$, ядро β_1 имеет размерность 2.

Теперь мы вычислим образ α в $(\mathcal{S}_r/\mathcal{I}_{r-2})^{(p^r+2p^{r-1}+p^{r-2})}$. Мы покажем, что

$$\dim\left(\operatorname{im}\alpha\right)^{(p^r+2p^{r-1}+p^{r-2})} = 1,$$

установив равенство

$$\alpha(Z^{r-1}_{r-1}Z^{r-1}_{r-2}) = -Z^r_rZ^{r-1}_{r-1}Z^{r-1}_{r-2} + Z^r_{r-2}Z^{r-1}_{r-1} \mod \mathcal{I}_{r-2} \tag{4.44}$$

и что α обращается в нуль на всех других Z-мономах градуировки $2p^{r-1}+p^{r-2}$.

Прежде всего заметим, что, используя лемму 4.13(a) во втором равенстве,

$$\begin{aligned}\alpha(Z_{r-1}^{r-1}Z_{r-2}^{r-1}) &= P^{p^{r-1}}P^{p^{r-2}}P^{p^{r-1}}P^{p^r} = \\ &= P^{p^{r-1}}P^{p^{r-2}+p^{r-1}+p^r} = \\ &= P^{p^r+2p^{r-1}+p^{r-2}} \mod \mathcal{I}_{r-2}.\end{aligned}$$

Чтобы доказать равенство (4.44), преобразуем $Z_r^r Z_{r-1}^{r-1}Z_{r-2}^{r-1}$ по модулю идеала $\mathcal{I}_{r-2}$:

$$\begin{aligned}Z_r^r Z_{r-1}^{r-1}Z_{r-2}^{r-1} &= P^{p^r}P^{p^{r-1}}P^{p^{r-2}}P^{p^{r-1}} = \\ &= P^{p^r}P^{p^{r-1}}P^{p^{r-2}+p^{r-1}} = \\ &= P^{p^r}P^{p^{r-2}+2p^{r-1}} = \\ &= -P^{p^r+2p^{r-1}+p^{r-2}} + P^{p^r+p^{r-1}+p^{r-2}}P^{p^{r-1}} \mod \mathcal{I}_{r-2}.\end{aligned}$$

Следовательно,

$$Z_r^r Z_{r-1}^{r-1}Z_{r-2}^{r-1} = -\alpha(Z_{r-1}^{r-1}Z_{r-2}^{r-1}) + P^{p^r+p^{r-1}+p^{r-2}}P^{p^{r-1}} \mod \mathcal{I}_{r-2}.$$

Остаётся доказать, что

$$P^{p^r+p^{r-1}+p^{r-2}}P^{p^{r-1}}P^{p^{r-1}} = P^{p^{r-2}}P^{p^{r-1}}P^{p^r}P^{p^{r-1}} \mod \mathcal{I}_{r-2}.$$

Из соотношений Адема получаем

$$P^{p^{r-1}}P^{p^r}P^{p^{r-1}} = (P^{p^{r-1}+p^r} + P^{p^r+p^{r-1}-p^{r-2}}P^{p^{r-2}} + y)P^{p^{r-1}},$$

где $y \in \mathcal{I}_{r-3}$. Тогда $yP^{p^{r-1}} \in \mathcal{I}_{r-2}$ по лемме 4.9, и $P^{p^r+p^{r-1}-p^{r-2}}P^{p^{r-2}}P^{p^{r-1}} \in \mathcal{I}_{r-2}$ по лемме 4.16. Наконец, из соотношений Адема имеем

$$\begin{aligned}&P^{p^{r-2}}P^{p^{r-1}}P^{p^r}P^{p^{r-1}} = P^{p^{r-2}}P^{p^{r-1}+p^r}P^{p^{r-1}} \\ &= (P^{p^{r-2}+p^{r-1}+p^r} + y')P^{p^{r-1}} = P^{p^{r-2}+p^{r-1}+p^r}P^{p^{r-1}} \mod \mathcal{I}_{r-2},\end{aligned}$$

поскольку $y' \in \mathcal{I}_{r-3}$ и снова $y'P^{p^{r-1}} \in \mathcal{I}_{r-2}$ по лемме 4.9. Таким образом, равенство (4.44) установлено. Теперь проверим, что α обращается в нуль на других базисных элементах градуировки $2p^{r-1}+p^{r-2}$. Существует только один базисный элемент, который не содержит P^{p^j} с $j < r-2$ и не совпадает с $P^{p^{r-1}}P^{p^{r-2}}P^{p^{r-1}}$, а именно $X = P^{p^{r-1}}P^{p^{r-1}}P^{p^{r-2}}$. Для элемента X имеем $\alpha(X) = 0 \mod \mathcal{I}_{r-2}$ по следствию 4.2. Предположим, что X — другой базисный элемент градуировки $2p^{r-1}+p^{r-2}$. Тогда он должен содержать P^{p^j} с $j < r-2$. Пусть j — наименьшее целое число, такое что X

содержит P^{p^j}. Тогда X содержит P^{p^j} не менее p раз. По лемме 4.15(b) имеем $\alpha(X) = 0 \bmod \mathcal{I}_{r-2}$.

Чтобы завершить доказательство части (a) теоремы 4.10, заметим, что из леммы 4.17, применённой к $b = p-1$, следует, что $2Z^r_{r-1}Z^{r-1}_{r-2} - Z^r_{r-2}Z^{r-1}_{r-1} \in \ker\beta$, но, как мы только что проверили, этот элемент не принадлежит $\operatorname{im}\alpha$. □

Следствие 4.4. *Выберем целые числа a и b такие, что $a+b=p$ и $2 \leqslant a \leqslant p-1$. Переопределим α и β для последовательности (4.22) как $\alpha(x) = xP^{ap}$ (или $\alpha(x) = x(P^{p^r})^a$) и $\beta(x) = xP^{bp^r}$. Тогда $(\operatorname{im}\alpha)^{(p^r+2p^{r-1}+p^{r-2})} = 0$ и $\dim(\ker\beta)^{(p^r+2p^{r-1}+p^{r-2})} \geqslant 2$. Более того, $2Z^r_{r-1}Z^{r-1}_{r-2} - Z^r_{r-2}Z^{r-1}_{r-1} \in \ker\beta$.*

Доказательство. Оценка размерности $\ker\beta$ в градуировке $p^r+2p^{r-1}+p^{r-2}$ следует из леммы 4.17. Для $a>1$ область определения α в градуировке $p^r+2p^{r-1}+p^{r-2}-ap^r$ тривиальна, следовательно, $(\operatorname{im}\alpha)^{(p^r+2p^{r-1}+p^{r-2})} = 0$. □

4.3.8 Некоторые замечания

Интересные результаты, касающиеся $\ker\beta$ (и ядра левого умножения на P^{p^r}) для $b=1$, были получены в [119]. Также следует отметить, что в статье Дж. Милнора [109] обсуждались свойства решений уравнения $xP^1 = 0$. Теорема 4.8 даёт другое описание этого пространства решений.

Последовательность

$$\mathcal{A}_2 \xrightarrow{\hat\varphi_r} \mathcal{A}_2/\mathcal{S}_{r-2}\mathcal{A}_2 \xrightarrow{\hat\varphi_r} \mathcal{A}_2/\mathcal{S}_{r-1}\mathcal{A}_2$$

где $\hat\varphi_r(x) = Sq^{2^r}\cdot x$, является точной, см. [121]. Используя наш подход, можно показать, что аналог этой последовательности для $p>2$ точен для $r=0$ и не точен для $r \geqslant 1$.

Также объясним, почему аналогичные результаты (точность для $r=0$ и неточность для $r \geqslant 1$) справедливы для всей алгебры Стинрода $\mathcal{A}_p$. Напомним, что алгебра $\mathcal{A}_p$ имеет аддитивный базис, состоящий из элементов вида $Q_0^{\varepsilon_0}Q_1^{\varepsilon_1}\dots P(r_1,r_2,\dots)$, см. [109] для подробностей. Для нас достаточно знать, что элементы Q_j, $j \geqslant 0$, образуют внешнюю алгебру, а набор всех элементов $P(r_1,r_2,\dots)$ является базисом $\overline{\mathcal{A}}_p$. Из этого следует, что аддитивно $\overline{\mathcal{A}}_p$ является прямой суммой подпространств $Q_0^{\varepsilon_0}Q_1^{\varepsilon_1}\dots\overline{\mathcal{A}}_p$, которые, очевидно, инвариантны относительно правого умножения на любой элемент $P^k, k \geqslant 1$. Факторы $\mathcal{A}_p/\mathcal{A}_p\mathcal{S}_{r-1}$ также разлагаются в прямую сумму подобного типа. Следовательно, для любого $r \geqslant 0$ последовательность

$$\mathcal{A}_p \xrightarrow{\alpha_i} \mathcal{A}_p/\mathcal{A}_p\mathcal{S}_{r-2} \xrightarrow{\beta_j} \mathcal{A}_p/\mathcal{A}_p\mathcal{S}_{r-1}$$

разлагается в прямую сумму последовательностей, с точностью до сдвига градуировки изоморфных последовательности (4.20).

4.4 Сопряженное действие алгебр операций в гомологиях элементарных групп

Рассмотрим сопряжённое действие алгебры Стинрода $\mathcal{A}_p$ на $\mathbb{Z}/p$-гомологиях пространства X. Будем говорить, что элемент $x \in H_*(X, \mathbb{Z}/p)$ *P-аннигилирован*, если и только если $xP^m = 0$ для всех $m > 0$, и *βP-аннигилирован*, если и только если он P-аннигилирован и $x\beta = 0$. Проблема состоит в описании подпространства всех P-аннигилированных или βP-аннигилированных элементов в $\mathbb{Z}/p$-гомологиях данного пространства X. В этом контексте, как показано во введении, пространства L^k и $(\mathbb{C}P^\infty)^k$.

Ш. Олт и У. Зингер в работе [28] предложили рассматривать проблему описания *частично* аннигилированных элементов. А именно, для произвольного правого $\mathcal{A}_2$-модуля M они определили подмодули частично аннигилированных элементов $\Delta_M(k) = \bigcap\limits_{i=0}^{k} \ker Sq^{2^i}$ и подмодуль аннигилированных элементов $\Delta_M(\infty) = \bigcap\limits_{i=0}^{\infty} \ker Sq^{2^i}$. В контексте проблемы Петерсона важный набор модулей M образован $\mathbb{Z}/2$-когомологиями смеш-произведений проективных пространств. А именно, алгебра $\Gamma = \{\Gamma_{*,*}\}$ для $p = 2$ определяется как

$$\Gamma_{m,d} = \begin{cases} \mathbb{Z}/2, & \text{если } m = d = 0; \\ \widetilde{H}_d((\mathbb{R}P^\infty)^{\wedge m}, \mathbb{Z}/2), & \text{если } m \geqslant 1; \\ 0 & \text{иначе,} \end{cases}$$

при этом умножение

$$\Gamma_{m_1,d_1} \otimes \Gamma_{m_2,d_2} \to \Gamma_{m_1+m_2,d_1+d_2}$$

определяется естественным отображением пространств:

$$(\mathbb{R}P^\infty)^{\wedge m_1} \times (\mathbb{R}P^\infty)^{\wedge m_2} \to (\mathbb{R}P^\infty)^{\wedge m_1+m_2}.$$

Удобно ввести обозначения $\Delta(k) = \Delta_\Gamma(k)$ и $\Delta(\infty) = \Delta_\Gamma(\infty)$.

В [25] было доказано, что для $p = 2$ подалгебра $\Delta(\infty) = \bigcap\limits_{k=0}^{\infty} \Delta(k)$ алгебры Γ является свободной ассоциативной алгеброй над $\mathbb{Z}/2$. В [28] было доказано, что для $p = 2$ и любого $k \geqslant 0$ подалгебра $\Delta(k)$ k-частично аннигилированных элементов тоже является свободной алгеброй, при этом авторы использовали метод Аника, см. [25; 28]. Важно отметить, что соответствующие доказательства не являются конструктивными и поэтому не предоставляют возможности найти явный набор свободных образующих.

Тем не менее, в [28] было доказано, что для $p = 2$ свободная алгебра $\Delta(0) = \ker Sq^1$ совпадает с $\operatorname{Im} Sq^1$, и было явно описано множество свободных мультипликативных образующих, см. теорему 4.12.

В подразделе 4.4.2 мы рассматриваем две алгебры, образованные $\mathbb{Z}/p$-гомологиями смеш-произведений линзовых пространств и комплексных проективных пространств соответственно. Мы покажем, что подмодули частично аннигилированных действием $\mathcal{A}_p$ элементов образуют ассоциативные подалгебры, причем эти подалгебры свободны. Для алгебры P^1-аннигилированных элементов мы найдем размерности однородных компонент.

В подразделе 4.4.3 мы рассмотрим понятие так называемой гомотопической системы, в терминах которой Олт дал условие совпадения подмодуля частично аннигилированных элементов $\Delta_M(k)$ с соответствующим спайк-подмодулем (simultaneous spike images) $I_M(k) = \bigcap\limits_{i=0}^{k} \operatorname{im} P^{p^{i+1}-1}$.

4.4.1 Предварительные сведения

Определим алгебру $\Lambda = \{\Lambda_{*,*}\}$ как

$$\Lambda_{m,d} = \begin{cases} \mathbb{Z}/p, & \text{если } m = d = 0; \\ \widetilde{H}_d(L^{\wedge m}, \mathbb{Z}/p), & \text{если } m \geqslant 1; \\ 0 & \text{иначе,} \end{cases}$$

с умножением

$$\Lambda_{m_1,d_1} \otimes \Lambda_{m_2,d_2} \to \Lambda_{m_1+m_2,d_1+d_2}$$

индуцированным естественным отображением пространств:

$$L^{\wedge m_1} \times L^{\wedge m_2} \to L^{\wedge m_1+m_2}.$$

Аналогично определим алгебру $\bar{\Lambda} = \{\bar{\Lambda}_{*,*}\}$, как

$$\bar{\Lambda}_{m,d} = \begin{cases} \mathbb{Z}/p, & \text{если } m = d = 0; \\ \widetilde{H}_d(\mathbb{C}P^{\wedge m}, \mathbb{Z}/p), & \text{если } m \geqslant 1; \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}$$

Опишем эти алгебры вместе с правым действием алгебры Стинрода на них. Известно, что

$$\begin{aligned} H^*(L) &= \mathbb{Z}/p[x] \otimes \Lambda(y), \\ H^*(\mathbb{C}P^\infty) &= \mathbb{Z}/p[x], \\ &\text{где } |x| = 2, |y| = 1. \end{aligned}$$

Как мы увидим ниже, обозначать двумерные образующие одним и тем же символом для этих двух пространств удобно, поскольку действие алгебры $\mathcal{A}_p$ на них задается одними и теми же формулами.

Действие алгебры Стинрода $\mathcal{A}_p$ на $H^*(L)$ задаётся соотношениями

$$\begin{aligned} P^k x^m &= \binom{m}{k} x^{k(p-1)+m}, \\ P^k x^m y &= \binom{m}{k} x^{k(p-1)+m} y, \\ \beta x^m &= 0, \\ \beta x^m y &= x^{m+1}. \end{aligned} \tag{4.45}$$

Обозначим через $[a]$, $a \geqslant 1$, образующую $\widetilde{H}_{2a}(L;\mathbb{Z}/p)$, двойственную x^a, и через $[\hat{a}]$, $a \geqslant 0$, — образующую $\widetilde{H}_{2a+1}(L;\mathbb{Z}/p)$, двойственную $x^a y$. Действие $\mathcal{A}_p$ на этих элементах описывается формулами:

$$\begin{aligned} [a]P^k &= \binom{a-(p-1)k}{k}[a-(p-1)k], \\ [\hat{a}]P^k &= \binom{a-(p-1)k}{k}[\widehat{a-(p-1)k}], \\ [a]\beta &= [\widehat{a-1}], \\ [\hat{a}]\beta &= 0. \end{aligned} \tag{4.46}$$

Действие $\mathcal{A}_p$ в $\mathbb{Z}/p$-когомологиях $\mathbb{C}P^\infty$ описывается формулами

$$P^k x^m = \binom{m}{k} x^{k(p-1)+m}, \quad \beta x^m = 0.$$

Обозначим через $[a]$, $a \geqslant 1$, образующую $\widetilde{H}_{2a}(\mathbb{C}P^\infty;\mathbb{Z}/p)$, двойственную x^a; тогда

$$[a]P^k = \binom{a-(p-1)k}{k}[a-(p-1)k], \quad [a]\beta = [\widehat{a-1}].$$

Формулы для $\mathbb{C}P^\infty$ являются частью формул (4.45) и (4.46), поэтому удобно рассматривать $\bar{\Lambda}$ как подалгебру Λ, причем соответствующее вложение согласовано с действием алгебр $\mathcal{A}_p$ и $\overline{\mathcal{A}}_p$.

Обе алгебры Λ и $\bar{\Lambda}$ являются свободными ассоциативными алгебрами над $\mathbb{Z}/p$, при этом свободными образующими для

$$\begin{aligned} &\Lambda \text{ являются } \{[a],[\hat{b}] \,:\, a \geqslant 1, b \geqslant 0\}; \\ &\bar{\Lambda} \text{ являются } \{[a] \,:\, a \geqslant 1\}. \end{aligned}$$

Используя сопряжённое действие алгебры $\mathcal{A}_p$, мы определяем модули (k-

частично) аннигилированных элементов (см. [27; 28; 9]):

$$\Delta(k) = \{x \in \Lambda \ : \ xP^{p^j} = 0 \text{ для всех } j \leqslant k\},$$
$$\Delta^\beta(k) = \Delta(k) \cap \{x \in \Lambda \ : \ x\beta = 0\},$$
$$\bar{\Delta}(k) = \{x \in \bar{\Lambda} \ : \ xP^{p^j} = 0 \text{ для всех } j \leqslant k\}.$$

Заметим, что $\bar{\Delta}(k) \subset \Delta^\beta(k) \subset \Delta(k)$. Очевидно, что эти модули замкнуты относительно умножения; таким образом, они являются подалгебрами в соответствующих Λ или $\bar{\Lambda}$. Хотя мы в основном интересуемся действием $\mathcal{A}_p$ на Λ и $\bar{\Lambda}$, такие подмодули k-частично аннигилированных элементов могут быть определены для любого правого $\mathcal{A}_p$-модуля M:

$$\Delta_M(k) = \bigcap_{i=0}^{k} \ker P^{p^i},$$
$$\Delta_M^\beta(k) = \Delta_M(k) \cap \ker \beta.$$

4.4.2 Подалгебры частично аннигилованных элементов

В этом подразделе мы докажем следующее утверждение.

Теорема 4.11. *Для простого числа $p > 2$ и каждого $0 \leqslant k \leqslant \infty$*

(a) $\Delta(k)$ и $\Delta^\beta(k)$ являются свободными подалгебрами Λ;

(b) $\bar{\Delta}(k)$ является свободной подалгеброй $\bar{\Lambda}$.

Затем мы рассмотрим свободную ассоциативную алгебру $\bar{\Delta}(0)$ и покажем, что она не совпадает с $\operatorname{Im} P^{p-1}$ и, более того, не порождается $\operatorname{Im} P^{p-1}$ и элементами $[1], \ldots, [p-2]$, вопреки тому, что можно было бы предположить по аналогии с результатами [28]. Мы вычислим размерности однородных компонент $\bar{\Delta}(0)_{1,*}$ и $\bar{\Delta}(0)_{2,2d}$ для $d \geqslant p(p-1)-1$ и опишем явные базисы в них (теоремы 4.13, 4.14, 4.15, следствие 4.5). А именно, мы докажем, что для $d \geqslant p(p-1)-1$, $d = pm + r$, $0 \leqslant r \leqslant p-1$, размерность $\bar{\Delta}(0)_{2,2d}$ задаётся формулой

$$\dim \bar{\Delta}(0)_{2,2d} = \begin{cases} m+p-2 & \text{для } r = p-1, \\ m+p-2-r & \text{для } r = 0, \ldots, p-2. \end{cases}$$

Также мы докажем, что $\dim \bar{\Delta}(0)_{1,d} = 0$, за исключением $\dim \bar{\Delta}(0)_{1,2d} = 1$ для $d = 1, \ldots, p-2$ и $d = Ap-1$, $A \geqslant 1$.

Нам понадобится следующая лемма Аника, которая была доказана в [25], см. также [28]. Пусть $\Bbbk$ — поле. Говорят, что $\Bbbk$-алгебра A является $\mathbb{Z}^K$-градуированной, если $A = \bigoplus\limits_{I \in \mathbb{Z}^K} A_I$ как $\Bbbk$-векторное пространство, и умножение согласовано с градуировкой, т.е. $A_I \cdot A_J \subset A_{I+J}$.

Для $x \in A_I$ мы говорим, что (мульти-)степень x равна I. Алгебра A называется связной, если $A_I = 0$ для всех I, содержащих хотя бы одну отрицательную компоненту, и $A_{(0,0,\ldots,0)} = \Bbbk$. Для связной $\mathbb{Z}^K$-градуированной алгебры A обозначим через A^+ идеал положительно градуированных элементов, который по определению равен $A^+ = \bigoplus\limits_{I \neq (0,0,\ldots,0)} A_I$.

Пусть A — $\mathbb{Z}^K$-градуированная алгебра над полем $\Bbbk$. Говорят, что алгебра A удовлетворяет *условию Аника*, если для любого соотношения

$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i = 0$$

в A, где $y_i \neq 0$ для всех $1 \leqslant i \leqslant n$, существует индекс i_0 такой, что

$$a_{i_0} \in \sum_{i \neq i_0} a_i A.$$

Лемма 4.18 ([25; 28])**.** *Пусть A — связная $\mathbb{Z}^K$-градуированная алгебра над полем $\Bbbk$. Тогда A является свободной алгеброй $A = \Bbbk\langle S\rangle$ на некотором множестве S положительно градуированных элементов из A^+ тогда и только тогда, когда A удовлетворяет условию Аника.* □

Лемма 4.19 ([25; 28])**.** *Пусть A — связная $\mathbb{Z}^K$-градуированная алгебра над полем $\Bbbk$, и предположим, что A является свободной алгеброй на некотором множестве положительно градуированных элементов. Пусть S — множество положительно градуированных элементов, порождающих A, и никакое собственное подмножество S не порождает A. Тогда A является свободной алгеброй $\Bbbk\langle S\rangle$.* □

Доказательство теоремы 4.11. Проверим, что алгебры $\Delta(k), \Delta^\beta(k), \bar{\Delta}(k)$, $0 \leqslant k \leqslant \infty$, удовлетворяют условию Аника.

Предположим, что в алгебре $\Delta(k)$ выполнено соотношение

$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i = 0, \text{ где } y_i \neq 0 \text{ для всех } i. \tag{4.47}$$

Нужно проверить, что существует индекс i_0 такой, что

$$a_{i_0} \in \sum_{i \neq i_0} a_i \Delta(k).$$

Без потери общности можно считать, что элементы a_i попарно различны.

Соотношение (4.47) можно рассматривать как соотношение в свободной алгебре Λ. Предположим, что k — наименьшее целое число, для которого существует подмножество $\{x_{i_1}, \ldots, x_{i_k}\}$, $1 \leqslant i_1 < \ldots i_k \leqslant n$, удовлетворяющее соотношению вида (4.47) в

Λ:

$$\sum_{j=1}^{k} x_{i_j} z_j = 0, \text{ где } 0 \neq z_j \in \Lambda \text{ для всех } 1 \leqslant j \leqslant k. \tag{4.48}$$

По условию Аника (см. лемму 4.18) существует индекс $1 \leqslant j_0 \leqslant k$ такой, что

$$x_{i_{j_0}} = \sum_{j \neq j_0} x_{i_j} w_j \tag{4.49}$$

для некоторых элементов $w_j \in \Lambda$, $1 \leqslant j \leqslant k, j \neq j_0$.

Мы утверждаем, что $w_j \in \Delta(k)$ для всех j. Пусть s — целое число, $0 \leqslant s \leqslant k$. Применение P^{p^s} к обеим частям (4.49) даёт соотношение

$$0 = \sum_{j \neq j_0} x_{i_j} (w_j P^{p^s}). \tag{4.50}$$

Если существуют ненулевые элементы $w_j P^{p^s}$, то (4.50) является соотношением вида (4.48), но для меньшего числа элементов, чем k. Таким образом, $w_j P^{p^s} = 0$ для всех $0 \leqslant s \leqslant k$ и w_j, т. е.

$$x_{i_{j_0}} \in \sum_{j \neq j_0} x_{i_j} \Delta(k).$$

Следовательно, алгебра $\Delta(k)$ удовлетворяет условию Аника, и по лемме 4.18 она является свободной.

Доказательство для $\Delta^\beta(k)$ и $\bar{\Delta}(k)$ требует незначительных изменений. А именно, для алгебры $\Delta^\beta(k)$ мы дополнительно проверяем, что $w_j \beta = 0$, применяя β к обеим частям (4.49); таким образом, $w_j \in \Delta^\beta(k)$. Для $\bar{\Delta}(k)$ мы рассматриваем соотношение (4.48) как соотношение в $\bar{\Lambda}$ и повторяем приведённые выше рассужденияа для элементов $z_j, w_j \in \bar{\Lambda}$. Теорема 4.11 доказана. □

Как упоминалось выше, доказательство теоремы 4.11 не даёт никаких подсказок для описания порождающего множества. Для $p = 2$ в [28] был получен следующий результат.

Теорема 4.12 (см. [28])**.**

(1) $\Delta(0) = \ker Sq^1$ *совпадает с* $\operatorname{Im} Sq^1$*; здесь*

$$\ker Sq^1 = \{x \in \Lambda_{*,*} \mid xSq^1 = 0\},$$
$$\operatorname{Im} Sq^1 = \{x \in \Lambda_{*,*} \mid x = ySq^1 \text{ для некоторого } y \in \Lambda_{*,*}\}.$$

(2) *Пусть* $S_0 = \{[2m_1, \ldots, 2m_s] \mid s \geqslant 1, m_j \geqslant 1 \text{ для всех } j = 1, \ldots, s\}$. *Тогда* $\Delta(0)$ *является свободной ассоциативной алгеброй* $\mathbb{Z}/2\langle S_0 \rangle$ *с множеством свободных образующих* S_0.

(3) *Обозначим* $c_{m,d} = \dim \Delta(0)_{m,d}$. *Тогда* $c_{0,0} = 1$, $c_{m,0} = 0$ *при* $m > 0$, $c_{0,d} = 0$

при $d > 0$. При $m, d > 0$ имеет место рекуррентное соотношение

$$c_{m,d} = \sum_{r=1}^{s} \sum_{a=1}^{d} \eta_{r,a} c_{m-r,d-a},$$

где

$$\eta_{m,d} = \begin{cases} 0, & d \text{ — четное}, \\ \binom{(d-1)/2}{s-1}, & d \text{ — нечетное}. \end{cases}$$

(4) *Для $m = 1, 2$ имеют место формулы:*

$$c_{1,d} = \begin{cases} 0, & d \text{ чётное}, \\ 1, & d \text{ нечётное} \end{cases} \quad \text{и} \quad c_{2,d} = \begin{cases} \frac{d}{2}, & d \text{ чётное}, \\ \frac{d-1}{2}, & d \text{ нечётное}. \end{cases}$$

Случай $p > 2$ оказался значительно сложнее. Для $p = 2$ включение $\operatorname{Im}\ Sq^1 \subset \ker Sq^1$ является следствием соотношения $Sq^1 Sq^1 = 0$ в $\mathcal{A}_2$. Обратное включение $\operatorname{Im}\ Sq^1 \supset \ker Sq^1$ — нетривиальный факт. Для $p > 2$ естественно рассмотреть соотношение $P^{p-1}P^1 = 0$ в $\mathcal{A}_p$, см. также раздел 4.3. Для сопряжённого действия на гомологиях это соотношение влечёт $\operatorname{Im}\ P^{p-1} \subset \ker P^1$, где

$$\begin{aligned} \ker P^1 &= \{x \in \bar{\Lambda}_{*,*} \mid xP^1 = 0\}, \\ \operatorname{Im}\ P^{p-1} &= \{x \in \bar{\Lambda}_{*,*} \mid x = yP^{p-1} \text{ для некоторого } y \in \bar{\Lambda}_{*,*}\}. \end{aligned}$$

Следующее утверждение показывает, что $\operatorname{Im}\ P^{p-1} \neq \ker P^1$.

Теорема 4.13. *Как векторное пространство над $\mathbb{Z}/p$, пространство $\bar{\Delta}(0)_{1,*}$ имеет базис $\{[1], [2], \ldots, [p-2]\} \cup \{[pm + (p-1)] \ : \ m \geqslant 0\}$.*

Более того, $[pm + (p-1)] = [pm + p(p-1)]P^{p-1}$, в то время как $[j] \notin \operatorname{Im}\ P^{p-1}$ для $1 \leqslant j \leqslant p-2$.

Доказательство. Из формул (4.46) следует, что

$$[pm + p(p-1)]P^{p-1} = [pm + (p-1)],$$

в то время как для остальных элементов $\bar{\Lambda}_{1,*}$ имеем $xP^{p-1} = 0$, так как соответствующий биномиальный коэффициент равен нулю.

С другой стороны,

$$[a]P^1 = \binom{a-(p-1)}{1}[a-(p-1)],$$

что не равно нулю для всех a, за исключением $a \leqslant p-1$ или $a \equiv p-1 \mod p$. $\square$

Следствие 4.5. $\dim \bar{\Delta}(0)_{1,d} = 0$, *за исключением* $\dim \bar{\Delta}(0)_{1,2d} = 1$ *для* $d = 1, \ldots, p-2$ *и* $d = Ap - 1$, $A \geqslant 1$.

Теорема 4.13 наводит на гипотезу: $\bar{\Delta}(0)$ *порождается элементами* $[1], \ldots, [p-2]$ *и* $\operatorname{Im}\ P^{p-1}$. Следующий пример показывает, что эта гипотеза неверна. Очевидно, $\bar{\Delta}(0)_{2,2d+1} = 0$.

Для краткости введем обозначение $W_d = \bar{\Delta}(0)_{2,2d}$.

Пример. Пусть $p = 3$. Тогда $x = [1,3] - [3,1] \in \bar{\Delta}_{2,8}$ и $xP^1 = 0$, т.е. $x \in W_4$. С другой стороны, $[1], [3] \notin \operatorname{Im}\ P^2$, и для $P^2 : \bar{\Delta}_{2,16} \to \bar{\Delta}_{2,8}$ имеем

$$[1,7]P^2 = [7,1]P^2 = [3,5]P^2 = [5,3]P^2 = 0,$$
$$[2,6]P^2 = [4,4]P^2 = [6,2]P^2 = [2,2].$$

Таким образом, x не принадлежит подалгебре, порождённой $[1], [2]$, и $\operatorname{Im}\ P^2$.

Далее мы вычислим размерности однородных подпространств $\bar{\Delta}(0)_{2,2d}$ для $d \geqslant p(p-1) - 1$.

Теорема 4.14. *Пусть* $d \geqslant p(p-1)-1$. *Представим* d *виде* $d = mp+r$, *где* $0 \leqslant r \leqslant p-1$. *Тогда размерность* $\bar{\Delta}(0)_{2,2d} = W_d$ *задаётся формулой*

$$\dim \bar{\Delta}(0)_{2,2d} = \begin{cases} m + p - 2 & \text{для } r = p-1, \\ m + p - 2 - r & \text{для } r = 0, \ldots, p-2. \end{cases} \tag{4.51}$$

Замечание. Очевидно, что для $d \leqslant p$ имеем $W_d = \bar{\Lambda}_{2,2d}$; таким образом, $\dim W_d = d - 1$. Используя методы, описанные ниже, можно, хотя и с некоторым трудом, доказать, что для $p + 1 \leqslant d \leqslant p(p-2) - 2$ выполняется $\dim W_d = \max((*), p-2)$, где $(*)$ — значение из правой части формулы (4.51).

Прежде чем мы приступим к доказательству теоремы 4.14, введём удобные обозначения и докажем несколько вспомогательных утверждений. Элементы

$$[i,j], \text{ где } i,j \geqslant 1, i + j = d,$$

образуют базис в $\bar{\Lambda}_{2,2d}$. Будем считать, что $[i,j] = 0$ для $i \leqslant 0$ или $j \leqslant 0$. Определим операторы

$$d_1[i,j] = ([i]P^1) \cdot [j] = \binom{i-p+1}{1}[i-p+1, j] = (i+1)[i-p+1, j],$$
$$d_2[i,j] = [i] \cdot ([j]P^1) = \binom{j-p+1}{1}[i, j-p+1] = (j+1)[i, j-p+1].$$

Тогда $x = \sum\limits_{i=1}^{d-1} \lambda_i[i, d-i] \in \bar{\Lambda}_{2,2d}$ принадлежит W_d тогда и только тогда, когда

$$\lambda_{i+p-1} d_1[i+p-1, j-p+1] + \lambda_i d_2[i,j] = 0 \tag{4.52}$$

для всех $i + j = d$. Предположим, что $i = i_0$ — наименьшее целое число, для которого $\lambda_{i_0} \neq 0$. Тогда соответствующее уравнение (4.52) упрощается:

$$d_1[i,j] = 0.$$

Таким образом, можно рассматривать (4.52) как рекуррентные формулы для восстановления коэффициентов $\lambda_{i_0+(p-1)k}$ по значению коэффициента λ_{i_0}. Заметим, что в системе (4.52) конечное число уравнений, так как для каждого d существует лишь конечное число ненулевых элементов $[i,j]$, $i + j = d$.

Лемма 4.20. *Пусть* $x = \sum\limits_{i=1}^{d-1} \lambda_i[i, d-i] \in W_d$, *и пусть* i_0 — *наименьшее целое число, для которого* $\lambda_{i_0} \neq 0$. *Тогда либо* $i_0 = 1, \ldots, p-2$, *либо* $i_0 = pA - 1$, $A \geqslant 1$.

Доказательство. Из уравнений (4.52) следует, что $d_1[i_0, d-i_0] = 0$. Теперь утверждение о i_0 следует из теоремы 4.13. □

Лемма 4.21. *Пусть* $\delta = Ap - 1$, $A \geqslant 1$, $d \geqslant \delta + 1$, *и* $\mu_0 = 1$. *Тогда существует элемент*

$$Y_A = \sum_{i=0}^{\left[\frac{d-Ap}{p-1}\right]} \mu_i[Ap - 1 + i(p-1), d - (Ap - 1 + i(p-1))] \in W_d$$

такой, что $Y_A P^1 = 0$.

Доказательство. Рассмотрим формулы (4.52) как рекуррентные соотношения на μ_i, $i \geqslant 0$, $\mu_0 = 1$, где $\mu_i = \lambda_{\delta+i(p-1)}$:

$$\mu_k(\delta + (k-1)(p-1)) + \mu_{k-1}(d - (\delta + (k-1)(p-1)) - (p-1)) = 0.$$

В предположениях леммы эти соотношения можно записать в виде

$$-k\mu_k + (d + 1 + k)\mu_{k-1} = 0$$

или, эквивалентно,

$$\begin{cases} -\mu_1 + (d+2)\mu_0 = 0, \\ -2\mu_2 + (d+3)\mu_1 = 0, \\ -3\mu_3 + (d+4)\mu_2 = 0, \\ \dots\dots\dots \\ -k\mu_k + (d+k+1)\mu_{k-1} = 0, \\ \dots\dots\dots \end{cases} \tag{4.53}$$

Предположим, что $d = mp + r$, где $0 \leqslant r \leqslant p-2$. Тогда из этой системы можно последовательно найти

$$\mu_0, \dots, \mu_{k-1},$$

где $k = p - r - 1$. Уравнение, связывающее μ_k и μ_{k-1}, имеет вид

$$-k\mu_k + (kp + r + (p - r - 1))\mu_{k-1} = 0,$$

что упрощается до $k\mu_k = 0$. Наконец, полагая $\mu_i = 0$ для $i \geqslant k$, получаем нетривиальное решение для системы (4.53), где $d = mp + r$ и $0 \leqslant r \leqslant p-2$.

Теперь предположим, что $d = mp + p - 1$. Тогда первые $p-1$ уравнений системы (4.53) имеют вид

$$-k\mu_k + k\mu_{k-1} = 0, \quad \text{где} \quad k = 1, \dots, p-1.$$

Таким образом, $\mu_0 = \mu_1 = \dots = \mu_{p-1} = 1$. Следующее уравнение имеет вид

$$-p\mu_p + p\mu_{p-1} = 0;$$

поэтому, полагая $\mu_i = 0$ для всех $i \geqslant p$, получаем нетривиальное решение для (4.53) при $d = mp + p - 1$.

Таким образом, элемент Y_A найден для всех значений r. □

Лемма 4.22. *Пусть $d \geqslant p(p-1)-1$, $x = \sum\limits_{i=1}^{d-1} \lambda_i[i, d-i] \in W_d$, и $xP^1 = 0$. Предположим, что $\delta = i < p-1$ — наименьшее целое число, для которого $\lambda_\delta \neq 0$. Пусть $d-\delta = Ap-\varepsilon$, где $0 \leqslant \varepsilon \leqslant p-1$. Тогда $0 < \varepsilon \leqslant \delta + 1$. В частности, не существует $x \in W_d$ такого, что $xP^1 = 0$ и ($\varepsilon > \delta + 1$ или $\varepsilon = 0$).*

С другой стороны, для всех $0 < \varepsilon \leqslant \delta + 1$ существует элемент

$$X_\delta = \sum_{i=0}^{k-1} \mu_i[\delta + i(p-1), d - \delta - i(p-1)]$$

такой, что $\mu_0 = 1$ и $X_\delta P^1 = 0$.

Доказательство. Условие $xP^1 = 0$ эквивалентно системе уравнений (4.52). Усло-

вие на δ влечёт, что $d_1[\delta, d-\delta] = 0$. Часть уравнений (4.52) можно рассматривать как рекуррентные соотношения, которые, по крайней мере в принципе, позволяют найти коэффициенты $\lambda_{\delta+k(p-1)}$, $k \geqslant 1$. А именно, запишем $\mu_k = \lambda_{\delta+k(p-1)}$, и предположим, что $\mu_0 = \lambda_\delta = 1$. Тогда из (4.52) получаем

$$\begin{cases} \mu_0(d-\delta-(p-1)) + \mu_1\delta = 0, \\ \mu_1(d-\delta-2(p-1)) + \mu_2(\delta+(p-1)) = 0, \\ \mu_2(d-\delta-3(p-1)) + \mu_3(\delta+2(p-1)) = 0, \\ \cdots\cdots\cdots \\ \mu_{k-1}(d-\delta-k(p-1)) + \mu_k(\delta+(k-1)(p-1)) = 0, \\ \cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

В обозначениях из условий теоремы эти соотношения можно записать в виде

$$\begin{cases} (-\varepsilon+1) + \mu_1\delta = 0, \\ \mu_1(-\varepsilon+2) + \mu_2(\delta-1) = 0, \\ \mu_2(-\varepsilon+3) + \mu_3(\delta-2) = 0, \\ \cdots\cdots\cdots \\ \mu_{k-1}(-\varepsilon+k) + \mu_k(\delta-k+1) = 0, \\ \cdots\cdots\cdots \end{cases} \tag{4.54}$$

Из этой системы можно последовательно найти $\mu_1, \mu_2, \ldots$, по крайней мере до тех пор, пока оба коэффициента $(-\varepsilon+k)$ и $(\delta-k+1)$ в уравнении (4.54), связывающем μ_k и μ_{k+1}, не обратятся в нуль. Таким образом, вопрос согласованности системы требует найти наименьшее целое число $k \geqslant 1$ такое, что либо $(-\varepsilon+k)$, либо $(\delta-k+1)$ обращается в нуль. Рассмотрим такое k. Есть только два случая.

Согласованность. В этом случае находятся μ_i с $i \leqslant k-1$, и для уравнения (4.54), связывающего μ_k и μ_{k-1}, выполняется

$$-\varepsilon+k = 0, \quad \delta-k+1 \geqslant 0. \tag{4.55}$$

Тогда существует решение с $\mu_i = 0$ для всех $i \geqslant k$. Обозначим соответствующий элемент как

$$X_\delta = \sum_{i=0}^{k-1} \mu_i[\delta+i(p-1), d-\delta-i(p-1)].$$

Условия (4.55) эквивалентны неравенству $0 < \varepsilon \leqslant \delta+1$.

Несогласованность. В этом случае находятся μ_i с $i \leqslant k-1$, но уравнение (4.54),

связывающее μ_k и μ_{k-1}, не может быть решено для μ_k. Таким образом,

$$(-\varepsilon + k < 0 \quad \text{и} \quad \delta - k + 1 = 0) \quad \text{или} \quad (\varepsilon = 0 \quad \text{и} \quad \delta - k + 1 = 0). \tag{4.56}$$

Условия (4.56) эквивалентны неравенству $\delta + 1 < \varepsilon$.

Остаётся объяснить условие $d \geqslant p(p-1) - 1$, упомянутое в предположениях леммы 4.22. Поскольку система (4.54) решается для $\mu_i \in \mathbb{Z}/p$, один из коэффициентов $-\varepsilon + k$ или $\delta - k + 1$ равен нулю для некоторого $k \in \{0, \dots, p\}$.

Выражения в (4.54) являются коэффициентами при определённых базисных элементах $[i, j]$ из W_{i+j}, и, таким образом, уравнение в (4.54) может быть использовано в аргументах выше, при условии, что соответствующие элементы $[i, j] \in W_{i+j}$ ненулевые, т.е. $i \geqslant 1$ и $j \geqslant 1$. В противном случае уравнение является пустым. Эта идея даёт нижнюю границу для d (которая будет получена ниже). Для d, не удовлетворяющих этой нижней границе, имеем:

– для $0 < \varepsilon \leqslant \delta + 1$ существует решение для (4.54) с $\mu_0 = 1$, и, таким образом, элемент X_δ существует;

– для $\varepsilon > \delta + 1$ или $\varepsilon = 0$ возможно, что уравнение в (4.54), которое даёт препятствие для существования X_δ, является пустым, и, следовательно, может существовать нетривиальное решение для некоторых δ, таких что $\varepsilon > \delta + 1$, см. пример ниже.

Теперь перейдём к установлению нижней границы для d. Рассмотрим для системы (4.54) решение вида $X_\delta = \sum_{i=0} \mu_i[\delta + i(p-1), d - \delta - i(p-1)]$. Единственным препятствием для существования такого решения является уравнение

$$\mu_{k-1}(-\varepsilon + k) + \mu_k(\delta - k + 1) = 0$$

для $k = \delta + 1$. Это уравнение является следствием равенства

$$\mu_{k-1} d_2[\delta + (k-1)(p-1), d - \delta - (k-1)(p-1)] + \mu_k d_1[\delta + k(p-1), d - \delta - k(p-1)] = 0.$$

Таким образом, чтобы использовать это уравнение как препятствие для существования нетривиального решения, необходимо условие

$$[\delta + k(p-1), d - \delta - k(p-1)] \neq 0 \quad \text{в} \quad W_d,$$

что эквивалентно

$$d - \delta - k(p-1) \geqslant 1 \quad \text{или, то же самое,} \quad d \geqslant 1 + \delta + k(p-1).$$

Это уравнение выполнено для всех $0 \leqslant \delta \leqslant p - 2$, если

$$d \geqslant 1 + (p-2) + (p-1)(p-1) = p(p-1);$$

здесь использовано соотношение $k = \delta + 1$.

Оставшийся случай $d = p(p-1) - 1$ прост. Для $0 \leqslant \delta \leqslant p-2$ имеем $d - \delta = p(p-1) - (\delta + 1)$ и $\varepsilon = \delta + 1$. Таким образом, для всех $\delta = 0, \ldots, p-2$ существует нетривиальное решение X_δ для (4.54), и утверждение выполняется для $d = p(p-1) - 1$. □

Пример. Выберем $p = 5$. Рассмотрим элемент

$$x = [1, 7] + 3[5, 3] \in W_8.$$

Для этого элемента имеем $\delta = 1$ и $\varepsilon = 3$; следовательно, $\varepsilon > \delta + 1$. С другой стороны, $xP^1 = 0$. Таким образом, элемент $x \in W_8$ не описывается леммой 4.22. Это наблюдение не противоречит лемме 4.22, поскольку $8 < 5(5-1) - 1 = 19$.

Аналогично, для $p = 5$ можно рассмотреть

$$x = [2, 11] + 4[6, 7] + 3[10, 3] \in \bar{\Delta}(0)_{2,2\cdot 13}$$

с $\delta = 2$ и $\varepsilon = 4$.

Теорема 4.15. *Для простого числа $p > 2$ и $d \geqslant p(p-1)-1$ элементы X_δ, описанные в лемме* 4.22*, и элементы Y_A, описанные в лемме* 4.21*, образуют базис в $\bar{\Delta}(0)_{2,2d} = W_d$.*

Доказательство. Напомним, что

$$X_\delta = [\delta, d - \delta] + \sum_{i > \delta} \lambda_i [i, d - i],$$
$$Y_A = [Ap - 1, d - Ap + 1] + \sum_{i > Ap-1} \lambda_i [i, d - i],$$

где δ принадлежит определённому подмножеству $\{1, \ldots, p-2\}$, а $1 \leqslant A \leqslant d/p$. Эти элементы линейно независимы, так как они имеют попарно различные "нижние члены"$[\delta, d - \delta]$ и $[Ap - 1, d - Ap + 1]$.

Покажем, что любой элемент $x \in \bar{\Delta}(0)_{2,2d}$ может быть представлен в виде линейной комбинации элементов X_δ и Y_A. Предположим, что $x = \sum\limits_{i \geqslant i_0} \alpha_i [i, d-i]$, $\alpha_{i_0} \neq 0$. По лемме 4.20, либо $1 \leqslant i_0 \leqslant p-2$, либо $i_0 = Ap - 1$. Рассмотрим элемент

$$y = \begin{cases} x - \alpha_{i_0} X_{i_0}, & \text{если } \ 1 \leqslant i_0 \leqslant p-2, \\ x - \alpha_{i_0} Y_A, & \text{если } \ i_0 = Ap - 1, A \geqslant 1. \end{cases}$$

Очевидно, что $y \in \bar{\Delta}(0)_{2,2d}$ и y имеет вид $y = \sum\limits_{j \geqslant j_0} \beta_j [j, d-j]$, $j_0 > i_0$. Тогда либо $y = 0$, либо мы можем повторить вычитание кратного подходящего X_δ или Y_A снова. □

Доказательство теоремы 4.14. Нам остаётся для каждого $d \geqslant p(p-1)-1$ вычислить количество элементов X_δ, описанных в лемме 4.22, и количество элементов Y_A, описанных в лемме 4.21. Напомним, что $d = mp + r$.

Элемент вида $[Ap-1, d-Ap+1]$ существует (является ненулевым в W_d) тогда и только тогда, когда $A \geqslant 1$ и $d - Ap + 1 \geqslant 1$, что эквивалентно $1 \leqslant A \leqslant m$. По лемме 4.21, каждый ненулевой $[Ap-1, d-Ap+1] \in W_d$ определяет $Y_A \in \bar{\Delta}(0)_{2,2d}$. Таким образом,

$$\#\{Y_A\} = m.$$

Чтобы вычислить $\#\{X_\delta\}$, необходимо рассмотреть несколько случаев.

Случай 1. Предположим, что $d = pm + p - 1$. Тогда для любого $\delta = 1, \ldots, p-2$, равенство $d - \delta = pm + p - 1 - \delta$ влечёт $\varepsilon = \delta + 1$, см. утверждение леммы 4.22 для определения ε. Поскольку $0 < \varepsilon \leqslant \delta + 1$, по лемме 4.22, X_δ определён для всех $\delta = 1, \ldots, p-2$. Таким образом, $\#\{X_\delta\} = p - 2$, и формула (4.51) для $d = pm + p - 1$ установлена.

Случай 2. Предположим, что $d = pm + r$, где $r = 0, \ldots, p-2$. Выберем $\delta = 1, \ldots, p-2$.

Случай 2.1. Если $\delta = r+1, \ldots, p-2$, то из $d-\delta = pm+r-\delta$ следует, что $\varepsilon = \delta - r$ и $0 < \varepsilon \leqslant \delta + 1$. По лемме 4.22 элементы X_δ определены для всех $\delta = r+1, \ldots, p-2$. Количество таких элементов равно $p - r - 2$.

Случай 2.2. Если $\delta = r$, то из $d - \delta = pm$ следует, что $\varepsilon = 0$. По лемме 4.22, элемент X_r не существует.

Случай 2.3. Если $\delta = 1, \ldots, r-1$, то из $d-\delta = pm+r-\delta = p(m+1)-(p+\delta-r)$ следует, что $\varepsilon = p+\delta-r$. Следовательно, $\varepsilon > \delta+1$. По лемме 4.22, для $\delta = 1, \ldots, r-1$, элемент X_δ не существует.

Таким образом, в случае 2 имеем $\#\{X_\delta\} = p - r - 2$. Добавляя $\#\{Y_A\} = m$, получаем формулу (4.51) для $d = pm + r$, $0 \leqslant r \leqslant p-2$.

□

4.4.3 Гомотопическая система Олта

В этом подразделе исследована связь между пересечением ядер приведённых степеней P^{p^i} и элемента Бокштейна β с пересечением образов $P^{p^{i+1}-1}$ и β. При $p > 2$ имеют место включения (см. ниже лемму 4.23)

$$\bigcap_{i=0}^{k} \operatorname{im} P^{p^{i+1}-1} \quad \subset \quad \bigcap_{i=0}^{k} \ker P^{p^i}$$

и

$$(\bigcap_{i=0}^{k} \operatorname{im} P^{p^{i+1}-1}) \bigcap \operatorname{im} \beta \quad \subset \quad (\bigcap_{i=0}^{k} \ker P^{p^i}) \bigcap \ker \beta$$

и аналогичные для $p = 2$. Для $p = 2$ Олт в [27] предложил понятие гомотопической системы, существование которой является критерием обратного включения. В этом разделе мы обобщим понятие гомотопической системы на случай $p > 2$ и исследуем, когда обратные включения верны.

Для правого $\mathcal{A}_p$-модуля M определим следующие подпространства:

$$I_M(k) = \bigcap_{i=0}^{k} \operatorname{im} P^{p^{i+1}-1},$$
$$I_M^\beta(k) = I_M(k) \cap \operatorname{im} \beta.$$

Операции вида Sq^{2^k-1} для $p = 2$ в литературе, посвященной проблеме Петерсона, часто называются спайками или шипами (spikes). Будем называть подпространства $I_M(k)$ и $I_M^\beta(k)$ подпространствами одновременных спайк-образов (simultaneous spike images). Для $M = \Lambda, \overline{\Lambda}$ обозначим эти модули через $I(k)$, $I^\beta(k)$, $\overline{I}(k)$, $\overline{I}^\beta(k)$, соответственно.

Лемма 4.23. *Для произвольного $\mathcal{A}_p$-модуля M и $k \geqslant 0$ имеют место включения $I_M(k) \subset \Delta_M(k)$ и $I_M^\beta(k) \subset \Delta_M^\beta(k)$.*

Доказательство. Утверждения легко следуют из соотношений $\beta\beta = 0$ и $P^{p^{m+1}-1}P^{p^m} = 0$. Последнее является частным случаем общего соотношения $P^{pm-1}P^m = 0$. Чтобы проверить это, заметим, что соотношение Адема применимо к произведению $P^{pm-1}P^m$:

$$P^{pm-1}P^m = \sum_{j=0}^{m-1} (-1)^{pm-1+j} \binom{(p-1)(m-j)-1}{pm-1-pj} P^{(p+1)m-1-j}P^j.$$

Легко проверить, что из ограничения $j \leqslant m-1$ следует неравенство $(p-1)(m-j)-1 < pm-1-pj$. Следовательно, все биномиальные коэффициенты в сумме в правой части равенства нулевые. □

Замечание 4.2. *В общем случае $I_M(k) \not\subset \Delta_M^\beta(k)$.*

Тем не менее, в некоторых случаях можно доказать обратные включения $\Delta_M(k) \subset I_M(k)$ и $\Delta_M^\beta(k) \subset I_M^\beta(k)$. Мы опишем алгебраическую структуру, которая отвечает за эти включения.

Определение 4.2. Для правого $\mathcal{A}_p$-модуля M определим *гомотопическую систему k-го порядка* как набор $\mathbb{Z}/p$-гомоморфизмов $Q_m : M \to M$ для $0 \leqslant m \leqslant k$ и *инвариантный $\mathbb{Z}/p$-подмодуль* $N \subset M$, для которых

(*i*) $Q_m(N) \subset N$ для $0 \leqslant m \leqslant k$;

(*ii*) для $1 \leqslant m \leqslant k$ и $l < p^m$ диаграмма

$$\begin{array}{ccc} N & \xrightarrow{P^l} & M \\ {\scriptstyle Q_m}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle Q_m} \\ N & \xrightarrow{P^l} & M \end{array}$$

коммутативна;

(*iii*) для любого $x \in N$ выполнено равенство $(x)(P^{p^m}Q_m - Q_m P^{p^m}) = x$.

Определение 4.3. Для правого $\mathcal{A}_p$-модуля M определим *β-гомотопическую систему k-го порядка* как гомотопическую систему k-го порядка $\{Q_m\}$ с инвариантным подмодулем $N \subset M$, которая снабжена $\mathbb{Z}/p$-гомоморфизмом $\alpha : M \to M$ таким, что

(iv) $\alpha(N) \subset N$ и для любого $x \in N$ выполняется $x\alpha\beta + x\beta\alpha = x$.

В этом разделе для неотрицательного целого числа s будем обозначать через $0 \leqslant d_j(s) < p$ коэффициенты разложения $s = \sum d_j(s)p^j$ по основанию p.

Лемма 4.24. *Для $1 \leqslant a \leqslant p-1$ выполняется*

$$(P^{p^0})^a (P^{p^1})^a \dots (P^{p^{n-1}})^a (P^{p^n})^a = cP^{a(p^0+p^1+\dots+p^{n-1}+p^n)},$$

для некоторого ненулевого $c \in \mathbb{Z}/p$.

Доказательство. Сначала покажем, что для любого a такого, что $1 \leqslant a \leqslant p-1$, выполняется $(P^1)^a = cP^a$ для некоторого ненулевого $c \in \mathbb{Z}/p$. Для $a = 1$ утверждение тривиально. Предположим, что утверждение верно для $a = b$, где $b < p-1$. Тогда $(P^1)^{b+1} = (P^1)^b P^1 = cP^b P^1$, где $c \neq 0$. Применим соотношение Адема к $P^b P^1$:

$$P^b P^1 = (-1)^b \binom{p-2}{b} P^{b+1},$$

следовательно, $(P^1)^{b+1} = c(-1)^b \binom{p-2}{b} P^{b+1}$. Легко проверить, что биномиальный коэффициент $\binom{p-2}{b}$ ненулевой в $\mathbb{Z}/p$.

Теперь проведём индукцию по b, чтобы доказать, что для любых целых чисел a и b таких, что $1 \leqslant a \leqslant p-1$ и $0 \leqslant b < a$, выполняется равенство

$$P^{a(p^0+p^1+\dots+p^m)+bp^{m+1}} P^{p^{m+1}} = d\, P^{a(p^0+p^1+\dots+p^m)+(b+1)p^{m+1}}$$

для некоторого ненулевого $d \in \mathbb{Z}/p$.

Обозначим $a(p^0 + p^1 + \dots + p^m) + bp^{m+1}$ через K. Применим соотношение Адема к произведению $P^K P^{p^{m+1}}$:

$$P^K P^{p^{m+1}} = \sum_{t=0}^{[K/p]} (-1)^{K+t} \binom{(p-1)(p^{m+1}-t)-1}{K-pt} P^{K+p^{m+1}-t} P^t.$$

Коэффициент при $t = 0$ по лемме А.1 равен $(-1)^K \binom{p-2}{b} \binom{p-1}{a}^{m+1}$ и, следовательно, не равен нулю.

Остаётся доказать, что для $t > 0$ биномиальный коэффициент равен нулю. По лемме А.1 достаточно найти j такое, что $d_j((p-1)(p^{m+1}-t)-1) < d_j(K-pt)$. Зафиксируем $0 < t < [K/p]$. Для простоты пусть $a_j = d_j(t)$. Выберем наименьшее j такое, что $a_j \neq 0$.

Случай 1. Если $1 \leqslant a_j \leqslant a$, то $d_j(K-pt) = a$, а $d_j((p-1)(p^{m+1}-t)-1) = a_j - 1$. Но $a_j - 1 < a$.

Случай 2. Если $a_{j+1} \geqslant a_j > a$, то $d_{j+1}(K-pt) = p + a - a_j$, а $d_{j+1}((p-1)(p^{m+1}-t)-1) = a_{j+1} - a_j$. Заметим, что $a_{j+1} - a_j < p + a - a_j$.

Случай 3. Предположим, что для некоторого k выполняется $a_{k+1} > a_k \geqslant a$ и $a_k \leqslant a_{k-1} \leqslant \ldots \leqslant a_{j+2} \leqslant a_{j+1} < a_j$. Тогда $d_{k+1}(K-pt) = p - 1 + a - a_k$ и $d_{k+1}((p-1)(p^{m+1}-t)-1) = -1 + a_{k+1} - a_k$. Заметим, что $p - 1 + a - a_k > -1 + a_{k+1} - a_k$.

Случай 4. Предположим, что для некоторого k выполняется $a_{k+1} < a \leqslant a_k \leqslant a_{k-1} \leqslant \ldots \leqslant a_{j+2} \leqslant a_{j+1} < a_j$. Тогда $d_{k+1}(K-pt) = p - 1 + a - a_k$ и $d_{k+1}((p-1)(p^{m+1}-t)-1) = p-1+a_{k+1}-a_k$. Заметим, что $p-1+a-a_k > p-1+a_{k+1}-a_k$. □

Теорема 4.16. *Предположим, что для правого $\mathcal{A}_p$-модуля M существует гомотопическая система k-го порядка $\{Q_m\}$ с инвариантым подмодулем N. Тогда $\Delta_M(k) \cap N = I_M(k) \cap N$. Более того, если $x \in \Delta_M(k) \cap N$, то $y = xQ_m^{p-1}Q_{m-1}^{p-1}\ldots Q_0^{p-1}$ удовлетворяет $yP^{p^{m+1}-1} = cx$ для некоторого ненулевого $c \in \mathbb{Z}/p$.*

Доказательство. Обозначим для простоты P^{p^m} через P_m. Используя стандартную технику для вычислений с коммутаторами, включающими операторы типа рождения—уничтожения, докажем для $j = 0, \ldots, m-1$, что

$$xQ_m^{p-1}Q_{m-1}^{p-1}\ldots Q_j^{p-1}P_j^{p-1} = -xQ_m^{p-1}Q_{m-1}^{p-1}\ldots Q_{j+1}^{p-1}.$$

Соотношение

$$xQ_m^{p-1}P_m^{p-1} = -x$$

доказывается аналогично. Обозначим $xQ_m^{p-1}Q_{m-1}^{p-1}\ldots Q_{j+1}^{p-1}$ через W. Поскольку все Q_n оставляют подмодуль N инвариантным и P_j коммутирует с $Q_m, \ldots, Q_{j+1}$ на подмодуле N, то $WP_j = 0$. Заметим, что

$$[Q_j^n, P_j^n] = \sum_{s+t=n-1} P_j^s [Q_j^n, P_j] P_j^t.$$

Применим это соотношение для $n = p-1$ к произведению $W(Q_j)^{p-1}(P_j)^{p-1}$:

$$WQ_j^{p-1}P_j^{p-1} = WP_j^{p-1}Q_j^{p-1} + \sum_{s+t=p-2} WP_j^s [Q_j^{p-1}, P_j] P_j^t.$$

В правой части все слагаемые обращаются в нуль, кроме $W[Q_j^{p-1}, P_j]P_j^{p-2}$. Теперь используем равенство

$$[Q_j^{p-1}, P_j] = \sum_{s+t=p-2} Q_j^s [Q_j, P_j] Q_j^t$$

и перепишем произведение $W[Q_j^{p-1}, P_j]P_j^{p-2}$ как

$$W[Q_j^{p-1}, P_j]P_j^{p-2} = \sum_{s+t=p-2} WQ_j^s [Q_j, P_j] Q_j^t P_j^{p-2}.$$

Поскольку $WQ_j^s \in N$, то $WQ_j^s[Q_j, P_j] = -WQ_j^s$. Наконец,

$$W[Q_j^{p-1}, P_j]P_j^{p-2} = \sum_{s+t=p-2} -WQ_j^s Q_j^t P_j^{p-2} = -(p-1)WQ_j^{p-2}P_j^{p-2}.$$

Продолжая таким же образом, получим равенство

$$WQ_j^{p-1}P_j^{p-1} = (-1)^{p-1}(p-1)!W = -W.$$

Здесь мы используем простую часть теоремы Вильсона, которая утверждает, что для простого числа p выполняется $(p-1)! + 1 \equiv 0 \mod p$.

По лемме 4.24 $P^{p^{m+1}-1} = d\, P_0^{p-1} \dots P_m^{p-1}$ для некоторого ненулевого $d \in \mathbb{Z}/p$. Тогда

$$\begin{aligned} yP^{p^{m+1}-1} &= d\, xQ_m^{p-1} \dots Q_1^{p-1} Q_0^{p-1} P_0^{p-1} P_1^{p-1} \dots P_m^{p-1} \\ &= -d\, xQ_m^{p-1} \dots Q_1^{p-1} P_1^{p-1} \dots P_m^{p-1} \\ &= \dots = (-1)^m d\, xQ_m^{p-1} P_m^{p-1} = (-1)^{m+1} d\, x. \end{aligned}$$

□

Следствие 4.6. *Предположим, что для правого $\mathcal{A}_p$-модуля M существует β-гомотопическая система k-го порядка $\{Q_m\}$ с инвариантным подмодулем N и $\mathbb{Z}/p$-гомоморфизмом α. Тогда $\Delta_M^\beta(k) \cap N = I_M^\beta(k) \cap N$. Более того, если $x \in \Delta_M^\beta(k) \cap N$, то $y = x\alpha$ принадлежит N и удовлетворяет $y\beta = x$.*

Доказательство. Из $x\beta\alpha + x\alpha\beta = x$ и $x \in \ker\beta$ следует, что $y\beta = x\alpha\beta = x$. Из определения 4.3 следует, что $y \in N$. □

4.4.4 Отображения сдвига

В этом разделе рассмотрены примеры гомотопических систем для $\mathcal{A}_p$-модуля Λ. Определим *отображение сдвига* $\Psi_i^l : \Lambda_{s,*} \to \Lambda_{s,*+l}$ по формулам

$$[u_1, \dots, u_i, \dots, u_s]\Psi_i^l = [u_1, \dots, u_i + l, \dots, u_s].$$

Здесь $u_j + l$ обозначает $a_j + l$, если $u_j = a_j$, и $\widehat{a_j + l}$, если $u_j = \hat{a}_j$. Также определим $[u_1, \dots, a_i, \dots, u_s]\alpha_i = 0$ и $[u_1, \dots, \hat{a}_i, \dots, u_s]\alpha_i = [u_1, \dots, a_i + 1, \dots, u_s]$. Очевидно, что $(\Psi^{p^m})^k = \Psi^{kp^m}$.

В дальнейшем для $s = 1$ обозначим $\Psi^l = \Psi^l_1$ и $\alpha = \alpha_j$.

Лемма 4.25. *Для отображений $\Psi^l_i : \Lambda_{s,*} \to \Lambda_{s,*+l}$ и операций $P^j, \beta \in \mathcal{A}_p$ имеют место следующие перестановочные соотношения:*

(a) $[a]\Psi^{kp^m}P^n = [a]P^n\Psi^{kp^m}$ *для* $a \geqslant (p-1)n$, $p^m > n$, $1 \leqslant k \leqslant p-1$;

(b) $[\hat{a}]\Psi^{kp^m}P^n = [\hat{a}]P^n\Psi^{kp^m}$ *для* $a \geqslant (p-1)n$, $p^m > n$, $1 \leqslant k \leqslant p-1$;

(c) $[a]\Psi^{kp^m}\beta = [a]\beta\Psi^{kp^m} \neq 0$;

(d) $[\hat{a}]\Psi^{kp^m}\beta = 0 = [\hat{a}]\beta\Psi^{kp^m}$.

Доказательство. По формулам (4.46) имеем

$$[a]\Psi^{kp^m}P^n = \binom{a + kp^m - (p-1)n}{n}[a + kp^m - (p-1)n],$$
$$[a]P^n\Psi^{kp^m} = \binom{a - (p-1)n}{n}[a + kp^m - (p-1)n].$$

Два биномиальных коэффициента совпадают при условиях леммы. Остальные утверждения доказываются аналогично. □

Лемма 4.26. *Для отображений Ψ^l_i, α и операций $P^j, \beta \in \mathcal{A}_p$ имеют место следующие перестановочные соотношения:*

(a) $[a]P^{p^m}\Psi^{(p-1)p^m} - [a]\Psi^{(p-1)p^m}P^{p^m} = [a]$ *для* $m \geqslant 0$ *и* $a \geqslant (p-1)p^m$;

(b) $[\hat{a}]P^{p^m}\Psi^{(p-1)p^m} - [\hat{a}]\Psi^{(p-1)p^m}P^{p^m} = [\hat{a}]$ *для* $m \geqslant 0$ *и* $a \geqslant (p-1)p^m$;

(c) $[a]\alpha\beta + [a]\beta\alpha = [a]$ *для* $a \geqslant 1$;

(d) $[\hat{a}]\alpha\beta + [\hat{a}]\beta\alpha = [\hat{a}]$ *для* $a \geqslant 0$.

Доказательство. Прямым вычислением получаем $[a]P^{p^m}\Psi^{(p-1)p^m} = \binom{a-(p-1)p^m}{p^m}[a]$ и $[a]\Psi^{(p-1)p^m}P^{p^m} = \binom{a}{p^m}[a]$. Предположим, что $a = \sum b_k p^k$, где $0 \leqslant b_k < p$. Если $b_m = p-1$, то $\binom{a}{p^m} = p-1$ и $\binom{a-(p-1)p^m}{p^m} = 0$. Если $b_m < p-1$, то $\binom{a}{p^m} = b_m$ и $\binom{a-(p-1)p^m}{p^m} = b_m + 1$. Доказательство пункта (b) аналогично, а утверждения (c) и (d) очевидны. □

Лемма 4.27. *Предположим, что $x = [u_1, \dots, u_s]$, где каждый u_j — это a_j или $\hat{a}_j$. Если $p^m > n$, $a_i \geqslant (p-1)n$, $1 \leqslant k \leqslant p-1$, то выполняется соотношение $x\Psi^{kp^m}_i P^n = xP^n\Psi^{kp^m}_i$.*

Доказательство. Без потери общности можно предположить $i = 1$. Случай $s = 1$ был рассмотрен в лемме 4.25, поэтому предположим $s > 1$. Пусть $y = [u_2, \dots, u_s]$.

Тогда $x = [u_1] \times y$, и по лемме 4.25 имеем

$$([u_1] \times y)P^n\Psi_1^{kp^m} = \sum_l ([u_1]P^l \times yP^{n-l})\Psi_1^{kp^m} =$$
$$= \sum_l (-1)^{k\deg y}(xP^l\Psi_1^{kp^m} \times yP^{n-l}) = \sum_l (-1)^{k\deg y}([u_1]\Psi_1^{kp^m}P^l \times yP^{n-l}) =$$
$$= (-1)^{k\deg y}([u_1]\Psi_1^{kp^m} \times y)P^n = x\Psi_1^{kp^m}P^n.$$

Здесь мы использовали стандартное правило знаков. □

Лемма 4.28. *Предположим, что $x = [u_1, \dots, u_s]$, где каждый u_j — это a_j или $\hat{a}_j$. Если $a_i \geqslant (p-1)p^m$, то $xP^{p^m}\Psi_i^{(p-1)p^m} - x\Psi_i^{(p-1)p^m}P^{p^m} = x$.*

Доказательство. Снова можно рассматривать только $i = 1$. Для $s = 1$ утверждение совпадает с леммой 4.26, поэтому предположим $s > 1$. Пусть $y = [u_2, \dots, u_s]$, тогда $x = [u_1] \times y$. По лемме 4.25 имеем

$$([u_1] \times y)P^{p^m}\Psi_1^{(p-1)p^m} =$$
$$= \sum_{l=0}^{p^m-1} ([u_1]P^l \times yP^{p^m-l})\Psi_1^{(p-1)p^m} + ([u_1]P^{p^m} \times y)\Psi_1^{(p-1)p^m} =$$
$$= \sum_{l=0}^{p^m-1} ([u_1]P^l\Psi_1^{(p-1)p^m} \times yP^{p^m-l}) + ([u_1]P^{p^m}\Psi_1^{(p-1)p^m} \times y); \quad (4.57)$$

$$([u_1] \times y)\Psi_1^{(p-1)p^m}P^{p^m} =$$
$$= \sum_{l=0}^{p^m-1} ([u_1]\Psi_1^{(p-1)p^m}P^l \times yP^{p^m-l}) + ([u_1]\Psi_1^{(p-1)p^m}P^{p^m} \times y). \quad (4.58)$$

Возьмём разность (4.57) и (4.58) и заметим, что суммы в правых частях сокращаются по лемме 4.25. Разность последних слагаемых в (4.57) и (4.58) равна x по лемме 4.26. □

Лемма 4.29. *Пусть $x = [u_1, \dots, u_s]$. Тогда $x\beta\alpha_i + x\alpha_i\beta = x$.*

Доказательство. Снова можно рассматривать только $i = 1$. Для $s = 1$ утверждение совпадает с леммой 4.26(b, c), поэтому предположим $s > 1$. Пусть $y = [u_2, \dots, u_s]$. Тогда $x = [u_1] \times y$, и по лемме 4.25 имеем

$$([u_1] \times y)\beta\alpha_1 = ((-1)^{\deg y}[u_1]\beta \times y + [u_1] \times y\beta)\alpha_1 =$$
$$= [u_1]\beta\alpha_1 \times y + (-1)^{\deg y\beta}[u_1]\alpha_1 \times y\beta. \quad (4.59)$$

$$([u_1] \times y)\alpha_1\beta = (-1)^{\deg y}([u_1]\alpha_1 \times y)\beta = \\ = [u_1]\alpha_1\beta \times y + (-1)^{\deg y}[u_1]\alpha_1 \times y\beta. \quad (4.60)$$

Складывая (4.59) и (4.60), получаем $(x)\beta\alpha_1 + (x)\alpha_1\beta = [u_1]\beta\alpha_1 \times y + [u_1]\alpha_1\beta \times y = ([u_1]\beta\alpha_1 + [u_1]\alpha_1\beta) \times y$, что по лемме 4.26(b,c) равно $[u_1] \times y = x$. □

Пример. Выберем $i = 1, \ldots, s$ и обозначим через $N_s(i,k)$ подмодуль в $\tilde{\Lambda}_{s,*} = \tilde{H}_*(L^{\wedge s})$, порождённый $[u_1, \ldots, u_s]$, где $u_i = a_i$ или $u_i = \hat{a}_i$ и $a_i \geqslant (p-1)p^k$.

Лемма 4.30. *Для $s \geqslant 1$ и $k \geqslant 0$ набор отображений $\{Q_m = \Psi_i^{(p-1)p^m} \mid m \leqslant k\}$ образует k-го порядка гомотопическую систему для $\tilde{\Lambda}_{s,*}$ с инвариантым подмодулем $N_s(i,k)$.*

Доказательство. Подмодуль $N_s(i,k)$ инвариантен относительно действия Q_m. Свойства (ii) и (iii) из определения 4.2 проверены в леммах 4.27 и 4.27. Свойство (iv) из определения 4.3 проверено в лемме 4.29. □

Теорема 4.17. *Зафиксируем $s \geqslant 1$ и $k \geqslant 0$. Предположим, что $x \in N_s(i,k)$ для всех $1 \leqslant i \leqslant s$. Тогда $x \in \Delta(k)$ тогда и только тогда, когда $x \in I(k)$, и $x \in \Delta^\beta(k)$ тогда и только тогда, когда $x \in I^\beta(k)$.*

Доказательство. Утверждение следует непосредственно из леммы 4.30, теоремы 4.16 и следствия 4.6. □

4.5 Кватернионное уравнение сопряжения

В этом разделе рассматриваются когомологии с коэффициентами в $\mathbb{Z}/2$.

4.5.1 Предварительные сведения

Существуют многочисленные примеры пространств X, снабжённых инволюцией τ, таких что кольца когомологий $H^{2*}(X)$ и $H^*(X^\tau)$ изоморфны, где X^τ — пространство неподвижных точек инволюции, причём изоморфизм уменьшает степени вдвое. Наиболее простые примеры — комплексные проективные пространства $\mathbb{C}P^n$, $1 \leqslant n \leqslant \infty$, где инволюция τ — комплексное сопряжение. Ответим, что изоморфизм колец $H^{2*}(\mathbb{C}P^n)$ и $H^*(\mathbb{R}P^n)$ не индуцируется отображением пространств.

В [71] было показано, что часто такой изоморфизм является частью определённой структуры на эквивариантных когомологиях пространств X и X^τ, которая называется (когомологическим) *H-оснащением*. Важной частью структуры H-оснащения является так называемое *уравнение сопряжения* (4.61) (см. определение 4.4). В [63] коэффициенты уравнения сопряжения были вычислены в терминах операций Стинрода. Позже были получены и другие доказательства, см. [125; 136].

Пространства с сопряжением (conjugation spaces, [71]) или пространства с H-оснащением возникают из различных контекстов. Один из них описан в статье Бореля—Хефлигера [34]. Предположим, что X — неособое комплексное проективное многообразие, определённое над вещественными числами, и предположим, что множество его вещественных точек X^τ непусто. Борель и Хефлигер показали, что при условии, что $H_*(X)$ и $H_*(X^\tau)$ порождены алгебраическими циклами, определёнными над вещественными числами, ограничение λ^τ алгебраического цикла λ с X на многообразие вещественных точек X^τ определяет изоморфизм $H_*(X) \to H_{*/2}(X^\tau)$, сохраняющий градуировку и согласованный с операцией пересечения. Другие важные примеры пространств с сопряжением можно найти в [70; 71], среди которых стоит особо выделить так называемые пространства многоугольников и орбиты коприсоединенного представления с инволюцией Шевалле для полупростых компактных групп Ли. Там же доказано, что если для компактного симплектического многообразия X с антисимплектической инволюцией τ, согласованной с гамильтоновым действием тора T, пространство X^T допускает H-оснащение, то само многообразие X тоже имеет H-оснащение.

В данном разделе мы развиваем теорию (когомологического) Q-оснащения, которое возникает в ситуации, когда пространство X снабжено двумя коммутирующими инволюциями τ_1, τ_2, а кольца когомологий $H^{4*}(X)$ и $H^*(X^{\tau_1,\tau_2})$ изоморфны. Основные примеры — кватернионные грассманианы, многообразия флагов и проективные пространства, снабжённые двумя комплексными инволюциями. Наш основной результат — вывод кватернионного уравнения сопряжения и определение его коэффициентов

в терминах операций Стинрода. Также показано, что ряд операций над топологическими пространствами сохраняет класс Q-оснащенных пространств; среди таких операций одна из важных — операция приклейки Q-эквивариантных клеток.

Введём необходимые определения и обозначения. Для топологического пространства X с действием конечной дискретной группы G определим его эквивариантные когомологии $H^*_G(X) = H^*(EG \times_G X)$. Пространство $X_G = EG \times_G X$ называется *борелевской конструкцией* пространства X. Определим пространство X^G как пространство G-неподвижных точек $X^G = \{x \in X \,:\, x = gx \text{ для всех } g \in G\}$.

Гомоморфизмы ограничения $r : H^*(X) \to H^*(X^G)$ и $r_G : H^*_G(X) \to H^*_G(X^G) \cong H^*(X) \otimes H^*(BG)$ индуцированы вложениями $X^G \subset X$ и $(X^G)_G \subset X_G$. Также имеется проекция $\rho : H^*(X_G) = H^*_G(X) \to H^*(X)$, определённая вложением $X \to X_G$ на слой расслоения $X_G \to BG$. Эти отображения определены, если мы заменим пространство X на пару (X, Y), где $Y \subset X$ — G-инвариантное подпространство.

Пара пространств (X, Y) с инволюцией τ может рассматриваться как пара с действием группы $C = \{1, \tau\}$. Подпространство Y предполагается τ-инвариантным. Имеем $H^*(BC) = \mathbb{Z}/2[u]$, где $u \in H^1(BC)$ — образующая. Тогда у нас есть гомоморфизмы r, r_C и ρ, определённые как выше для группы $G = C$.

Определение 4.4. (см. [71]) Пара топологических пространств (X, Y), снабжённая действием инволюции τ, называется *парой с сопряжением* или *H-оснащенной парой*, если

(i) $H^{odd}(X, Y) = 0$;

(ii) заданы аддитивное сечение $\sigma : H^*(X, Y) \to H^*_C(X, Y)$ проекции ρ и аддитивный изоморфизм $\varkappa : H^{2*}(X, Y) \to H^*(X^\tau, Y^\tau)$, уменьшающий степени вдвое;

(iii) для любого n и любого $x \in H^{2n}(X, Y)$ выполняется следующее равенство

$$r_C \circ \sigma(x) = \varkappa(x)u^n + \ell t_n, \tag{4.61}$$

где $\ell t_n \in H^n_C(X^\tau) = H^*(X^\tau)[u]$ — многочлен от u степени меньше n. Равенство (4.61) называется (комплексным) *уравнением сопряжения*. Пространство X называется H-оснащенным, если пара $(X, \varnothing)$ является H-оснащенной. Пара отображений $(\varkappa, \sigma)$ называется *H-оснащением* пары (X, Y).

Эквивариантное отображение $f : (X_1, Y_1) \to (X_2, Y_2)$ индуцирует гомоморфизмы

$$H^*(f) : H^*(X_2, Y_2) \to H^*(X_1, Y_1),$$
$$H^*(f^\tau) : H^*(X_2^\tau, Y_2^\tau) \to H^*(X_1^\tau, Y_1^\tau),$$
$$H^*_G(f) : H^*_G(X_2, Y_2) \to H^*_G(X_1, Y_1).$$

В [71] было доказано, что

(1) σ и $\varkappa$ мультипликативны (*a priori* они предполагаются аддитивными);

(2) σ и $\varkappa$ естественны: для эквивариантного отображения $f : (X_1, Y_1) \to (X_2, Y_2)$ пар с соответствующими H-оснащениями $(\sigma_1, \varkappa_1)$ и $(\sigma_2, \varkappa_2)$, выполняется

$$H^*_G(f) \circ \sigma_2 = \sigma_1 \circ H^*(f) \quad \text{и} \quad H^*(f^\tau) \circ \varkappa_2 = \varkappa_1 \circ H^*(f);$$

(3) если для пары пространств (X, Y) с заданной инволюцией τ существует H-оснащение, то оно единственно.

В [71] было показано, что H-оснащение может быть определено для копределов и произведений H-оснащенных пар пространств. H-оснащение также может быть построено для эквивариантной связной суммы H-оснащенных многообразий. Среди прочего, есть очень важный результат о расширениях H-оснащений. Предположим, что пространство X снабжено инволюцией τ, и $Z \subset Y$ — τ-инвариантные подпространства. Если пары (X, Y) и (Y, Z) H-оснащенные, то пара (X, Z) также H-оснащенная, причем это оснащение естественно. Это даёт H-оснащения для многих известных примеров, где пространство строится путём приклеивания τ-эквивариантных клеток, см. раздел 5 [71] или раздел 2 [125].

В [63] были вычислены все слагаемые ℓt_n из формулы (4.61): а именно, было показано, что для любого $x \in H^{2n}(X, Y)$, уравнение (4.61) имеет вид

$$r_C \circ \sigma(x) = \sum_{i=0}^{n} Sq^i(\varkappa(x))u^{n-i}.$$

В частности, $r(x) = \varkappa(x)^2$. Кроме того, $\varkappa(Sq^{2i}(x)) = Sq^i\varkappa(x)$ (очевидно, $Sq^{2i+1}x = 0$).

Опишем структуру этого раздела. В подразделе 4.5.2 мы вводим симметричные и несимметричные кватернионные оснащения (Q-оснащения и N-оснащения, см. определение 4.5). Мы доказываем их основные свойства (утверждения 4.3, 4.4), единственность оснащения при условии его существования (утверждение 4.5). В утверждении 4.6 приведены условия, которые гарантируют, что N-оснащение является симметричным, т. е. Q-оснащением.

В подразделе 4.5.3 обсуждаются важные примеры: пары (D^{4m}, S^{4m-1}), сферы S^{4m} и кватернионные проективные пространства $\mathbb{H}P^k$, $k \leqslant \infty$. Последние представляют первый нетривиальный пример симметричного кватернионного уравнения сопряжения. Точная форма этого уравнения для $\mathbb{H}P^\infty$ окажется важной в подразделе 4.5.5, где мы доказываем важные теоремы 4.20 и 4.21. Основной результат этого подраздела 4.5.5 заключается в том, что для любого класса когомологий $x \in H^{4m}(X, Y)$ пары (X, Y) с Q-оснащением выполняется соотношение

$$r_Q \circ \sigma(x) = \sum_{0 \leqslant i+j \leqslant m} Sq(j, i)(\varkappa(x)) f_2^j f_3^{m-i-j},$$

где $Sq(j, i)$ — милноровский элемент алгебры Стинрода $\mathcal{A}_2$, $f_2 = u^2 + uv + v^2$,

$f_3 = uv(u+v)$, а u, v — образующие в $H^*(B\mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/2) = \mathbb{Z}/2[u,v]$. Мы также доказываем в утверждении 4.9, что $\varkappa$ в некотором смысле коммутирует с действием алгебры Стинрода $\mathcal{A}_2$. А именно, $\varkappa(Sq^{4k}x) = Sq^k(\varkappa(x))$ для любого $x \in H^{4m}(X,Y)$, и $Sq^m x = 0$ для m, не делящихся на 4.

Подраздел 4.5.4 показывает, что класс Q-оснащенных или N-оснащенных пар (см. определение 4.5) достаточно велик, а именно, он замкнут относительно произведений, копределов и приклеивания эквивариантных клеток. В частности, кватернионные грассманианы, многообразия флагов и проективные пространства являются Q-оснащенными.

4.5.2 Кватернионные оснащения и их основные свойства

Рассмотрим пару пространств (X,Y), снабжённую двумя коммутирующими инволюциями τ_1 и τ_2. Обозначим $\tau_3 = \tau_1\tau_2$. Тогда на (X,Y) определено действие коммутативной группы $Q = \{e, \tau_1, \tau_2, \tau_3\}$. Иногда полезно зафиксировать изоморфизм $Q \cong \mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/2$, такой что τ_1 и τ_2 являются образующими первого и второго прямого слагаемого соответственно. Имеет место изоморфизм колец $H^*(BQ) = \mathbb{Z}/2[u,v]$, где удобно рассматривать образующую u как элемент, двойственный к τ_1, а v — как элемент, двойственный к τ_2. Здесь Q обозначает «кватернионный», так как наши основные примеры — кватернионное проективное пространство, кватернионный грассманиан и кватернионное многообразие флагов, снабжённые комплексными инволюциями, см. подраздел 4.5.3. Как и в случае действия произвольной дискретной группы, определены гомоморфизмы ограничения $r\colon H^*(X,Y) \to H^*(X^Q, Y^Q)$, $r_Q\colon H^*_Q(X,Y) \to H^*_Q(X^Q,Y^Q) \cong H^*(X^Q,Y^Q) \otimes H^*(BQ) \cong H^*(X^Q,Y^Q) \otimes \mathbb{Z}[u,v]$ и $\rho\colon H^*_Q(X,Y) \to H^*(X,Y)$, индуцированные вложениями пространств.

Определение 4.5. Пусть пара (X,Y) снабжена действием группы Q. Предположим, что когомологии $H^m(X,Y)$ равны нулю для всех m, не делящихся на 4. *Несимметричное кватернионное когомологическое оснащение* или *N-оснащение* для (X,Y) — это пара $(\varkappa, \sigma)$, где

(i) $\varkappa\colon H^{4*}(X,Y) \to H^*(X^Q,Y^Q)$ — аддитивный изоморфизм, уменьшающий степени в четыре раза;

(ii) $\sigma : H^{4*}(X,Y) \to H^{4*}_Q(X,Y)$ — аддитивное сечение ρ;

(iii) $\varkappa$ и σ удовлетворяют уравнению сопряжения

$$r_Q \circ \sigma(a) = \varkappa(a) f_3^m + \ell t_{3m} \tag{4.62}$$

для всех $m \in \mathbb{N}$ и всех $a \in H^{4m}(X,Y)$, где $f_3 = uv(u+v)$ и $\ell t_{3m} \in H^*_Q(X^Q,Y^Q) = H^*(X^Q,Y^Q)[u,v]$ обозначает любой многочлен степени меньше $3m$ по переменным u, v.

Симметричное кватернионное когомологическое оснащение или Q-*оснащение* для пары (X, Y) — это N-оснащение $(\varkappa, \sigma)$, такое что его уравнение сопряжения имеет вид

$$r_Q \circ \sigma(a) = \varkappa(a) f_3^m + \sum_{0<i+j\leqslant m} a_{i,j}(\varkappa(a)) f_2^j f_3^{m-i-j}, \tag{4.63}$$

где $\deg a_{i,j}(x) = \deg x + 3i + j$ и $f_2 = u^2 + uv + v^2$.

Замечание 4.3. *(1) Из определения N-оснащения следует, что $\rho : H^*(EQ \times_Q X, EQ \times_Q Y) \to H^*(X, Y)$ является эпиморфизмом, и по теореме Лере—Хирша мы имеем изоморфизм $H^*(BQ)$-модулей $H_Q^*(X, Y)$ и $H^*(X, Y)[u, v]$.*

(2) Симметрия (действие группы перестановок) между инволюциями τ_1, τ_2 и τ_3 может привести к соответствующей симметрии в уравнении сопряжения. Инволюция τ_3 двойственна к $u + v$, поэтому соответствующая симметрия — это инвариантность уравнения относительно действия $GL_2(\mathbb{Z}/2)$ на образующих u, v линейными подстановками. В [50] доказано, что кольцо инвариантных многочленов $\mathbb{Z}/2[u, v]^{GL_2(\mathbb{Z}/2)}$ является кольцом многочленов $\mathbb{Z}/2[f_2, f_3]$, где $f_2 = u^2 + uv + v^2$, $f_3 = uv(u + v)$. Это объясняет форму уравнения (4.63). Мы вернёмся к подробному обсуждению этого вопроса в конце этого подраздела. Форма старшего члена $\varkappa(a) f_3^m$ объясняется в подразделе 4.5.4.

В оставшейся части этого подраздела обсуждаются несколько основных свойств N- и Q-оснащений. А именно, доказано, что $\varkappa$ и σ мультипликативны, устанавлена их естественность относительно Q-эквивариантных отображений. Описаны условия, которые гарантируют, что N-оснащение является Q-оснащением. Все примеры в подразделе 4.5.3 являются Q-оснащенными. Было бы интересно привести явный пример N-оснащенного пространства, которое не является Q-оснащенным, или доказать, что любое N-снащение является Q-оснащением.

Утверждение 4.3 (мультипликативность $\varkappa$ и σ)**.** *Пусть $(\varkappa, \sigma)$ — N-оснащение для пары (X, Y). Тогда $\varkappa$ и σ являются гомоморфизмами колец.*

Доказательство. Сначала докажем, что

$$\sigma(ab) = \sigma(a)\sigma(b) \tag{4.64}$$

для всех $a \in H^{4k}(X, Y)$ и $b \in H^{4l}(X, Y)$. Пусть $m = k + l$. Поскольку $\rho\colon H_Q^0(X, Y) \to H^0(X, Y)$ является изоморфизмом, уравнение (4.64) выполняется для $m = 0$. Теперь предположим, что $m > 0$. Поскольку $\rho \circ \sigma(ab) = \rho(\sigma(a)\sigma(b))$, уравнение (4.64) выполняется по модулю $\ker \rho$, который является идеалом, порождённым u, v. Поскольку когомологии $H^*(X, Y)$ сосредоточены в степенях, делящихся на 4, имеем

$$\sigma(ab) = \sigma(a)\sigma(b) + \sum_{p+q=4} \sigma\left(d_{4m-4}^{(p,q)}\right) u^p v^q + \cdots + \sum_{p+q=4m} \sigma\left(d_0^{(p,q)}\right) u^p v^q \tag{4.65}$$

для некоторых $d_i^{(p,q)} \in H^i(X,Y)$. Нужно доказать, что все $d_i^{(p,q)}$ в (4.65) равны нулю.

Применим $r : H_Q^*(X,Y) \to H_Q^*\left(X^Q, Y^Q\right)$ к уравнению (4.65). Левая часть даёт

$$r_Q \circ \sigma(ab) = \varkappa(ab) f_3^m + \ell t_{3m}, \tag{4.66}$$

тогда как правая часть даёт

$$\begin{aligned} r_Q \circ \sigma(ab) = \varkappa(a)\varkappa(b) f_3^m + \ell t_{3m} + \\ + \sum_{p+q=4} \left(\varkappa\left(d_{4m-4}^{(p,q)}\right) f_3^{m-1} + \ell t_{3m-3}\right) u^p v^q + \cdots + \sum_{p+q=4m} \varkappa\left(d_0^{(p,q)}\right) u^p v^q. \end{aligned} \tag{4.67}$$

Следовательно,

$$r_Q \circ \sigma(ab) = \sum_{p+q=4m} \varkappa\left(d_0^{(p,q)}\right) u^p v^q + \ell t_{4m}.$$

Сравнивая это уравнение с (4.66), мы заключаем, что $d_0^{(p,q)} = 0$, поскольку гомоморфизм $\varkappa$ инъективен. Тогда из уравнения (4.67) следует равенство

$$r_Q \circ \sigma(ab) = \sum_{p+q=4m-4} \varkappa\left(d_4^{(p,q)}\right) f_3 u^p v^q + \ell t_{4m-4}.$$

Сравнивая это уравнение с (4.66), заключаем, что $d_4^{(p,q)} = 0$. Продолжая эти рассуждения последовательно до $d_{4m-4}^{(p,q)}$, покажем, что в (4.65) все $d_i^{(p,q)}$ равны нулю. Следовательно, $\sigma(ab) = \sigma(a)\sigma(b)$.

Чтобы доказать мультипликативность $\varkappa$, применим r_Q к обеим частям $\sigma(ab) = \sigma(a)\sigma(b)$:

$$r_Q \circ \sigma(ab) = (r_Q \circ \sigma(a)) \cdot (r_Q \circ \sigma(b)).$$

Тогда уравнение (4.62) даёт

$$\varkappa(ab) f_3^m + \ell t_{3m} = \left(\varkappa(a) f_3^k + \ell t_{3k}\right)\left(\varkappa(b) f_3^l + \ell t_{3l}\right) = \varkappa(a)\varkappa(b) f_3^k f_3^l + \ell t_{3m}.$$

Следовательно, $\varkappa$ мультипликативен. □

Утверждение 4.4 (естественность N-оснащения)**.** *Предположим, что $f : (Y, Y_0) \to (X, X_0)$ — эквивариантное отображение пар, снабжённых действием группы Q. Обозначим через f^Q ограничение $f|_{Y^Q}$. Предположим, что обе пары N-оснащены, и $(\sigma_X, \varkappa_X)$, $(\sigma_Y, \varkappa_Y)$ — соответствующие структурные отображения. Тогда*

$$H_Q^* f \circ \sigma_X = \sigma_Y \circ H^* f \tag{4.68}$$

и

$$H^* f^Q \circ \varkappa_X = \varkappa_Y \circ H^* f.$$

Доказательство. Пусть $\rho_X : H_Q^*(X, X_0) \to H^*(X, X_0)$ и $\rho_Y : H_Q^*(Y, Y_0) \to H^*(Y, Y_0)$ — гомоморфизмы ограничения. Рассмотрим элемент $a \in H^{4k}(X, X_0)$. Из $H^*f \circ \rho_X = \rho_Y \circ H_Q^*f$ следует, что

$$\rho_Y \circ H_Q^*f \circ \sigma_X(a) = H^*f \circ \rho_X \circ \sigma_X(a) = H^*f(a) = \rho_Y \circ \sigma_Y \circ H^*f(a).$$

Следовательно, уравнение (2.4) выполняется по модулю ядра ρ_Y, которое является идеалом, порождённым u и v, и мы имеем соотношение

$$H_Q^*f \circ \sigma_X(a) = \sigma_Y \circ H^*f(a) + \sum_{p+q=4} \sigma_Y\left(d_{4k-4}^{(p,q)}\right) u^p v^q + \cdots + \sum_{p+q=4k} \sigma_Y\left(d_0^{(p,q)}\right) u^p v^q, \quad (4.69)$$

для некоторых элементов $d_i^{(p,q)} \in H^i(Y, Y_0)$.

Мы имеем

$$H_Q^*f^Q \circ r_X \circ \sigma_X(a) = H_Q^*f^Q\left(\varkappa_X(a) f_3^k + \ell t_{3k}\right) = H^*f^Q \circ \varkappa_X(a) f_3^k + \ell t_{3k}. \quad (4.70)$$

С другой стороны, $H_Q^*f^Q \circ r_X = r_Y \circ H_Q^*f$, поэтому

$$H_Q^*f^Q \circ r_X \circ \sigma_X(a) = r_Y \circ H_Q^*f \circ \sigma_X(a) \overset{(4.69)}{=\!=} \sum_{p+q=4k} \varkappa_Y\left(d_0^{(p,q)}\right) u^p v^q + \ell t_{4k}.$$

Сравнивая эту формулу для $H_Q^*f^Q \circ r_X \circ \sigma_X(a)$ с (4.70), получаем, что все $d_0^{(p,q)}$ равны нулю.

Теперь мы имеем $r_Y \circ H_Q^*f \circ \sigma(a) = \sum_{p+q=4k-4} \varkappa_Y\left(d_4^{(p,q)}\right) u^p v^q f_3 + \ell t_{4k-1}$. Сравнивая это выражение с (4.70), получаем $d_4^{(p,q)} = 0$.

Повторяя эти рассуждения последовательно до $d_{4k-4}^{(p,q)}$, получим, что все $d_i^{(p,q)}$ равны нулю, и, следовательно, равенство (4.68) выполняется.

Естественность $\varkappa$ может быть выведена из естественности σ следующим образом. Из (4.68) мы получаем

$$r_Y \circ H_Q^*f \circ \sigma_X(a) = r_Y \circ \sigma_Y \circ H^*f(a) = \varkappa_Y \circ H^*f(a) f_3^k + \ell t_{3k}.$$

С другой стороны,

$$H_Q^*f^Q \circ r_X \circ \sigma_X(a) = H_Q^*f^Q\left(\varkappa_X(a) f_3^k + \ell t_{3k}\right) = H^*f^Q \circ \varkappa_X(a) f_3^k + \ell t_{3k}.$$

Остаётся сравнить старшие члены этих двух выражений. □

Следствие 4.7 (единственность кватернионного оснащения)**.** *Пусть пара* (X, X_0) *снабжена действием группы* Q*. Предположим, что* $(\sigma_1, \varkappa_1)$ *и* $(\sigma_2, \varkappa_2)$ *— два*

N-оснащения пары (X, X_0). Тогда $\sigma_1 = \sigma_2$ и $\varkappa_1 = \varkappa_2$.

Доказательство. Применим утверждение 4.4 к $f = \mathrm{id}\colon (X, X_0) \to (X, X_0)$. □

Утверждение 4.5. *Предположим, что (X, Y) — пара с N-оснащением. Тогда гомоморфизм $r\colon H_Q^*(X, Y) \to H_Q^*(X^Q, Y^Q)$ является мономорфизмом.*

Доказательство. Пусть $0 \neq y \in \ker r$. Тогда элемент y может быть записан в виде $y = \sum\limits_j \sigma(a_j) u^j v^{k-j} + \ell t_k$ для некоторых элементов $a_j \in H^{4n}(X, Y)$. Применяя r_Q, мы получаем соотношение $0 = \sum\limits_j \varkappa(a_j) u^j v^{k-j} f_3^n + \ell t_{k+3n}$. Поскольку $\varkappa$ биективен, мы видим, что $a_j = 0$ для всех j, что противоречит $y \neq 0$. □

Теперь вернёмся к отношениям между N-оснащением и Q-оснащением, как было обещано в замечании 4.3. Заметим, что существуют три внешних автоморфизма θ_a, $a = 1, 2, 3$, группы Q, такие что θ_a фиксирует τ_a и меняет местами два других нетривиальных элемента Q. Автоморфизмы θ_a определяют гомеоморфизмы BQ на себя.

Выберем образующие в $H^*(BQ)$ следующим образом. Заметим, что $H_1(BQ) = \pi_1(BQ) = \mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/2$. Пусть $(1, 0)$ соответствует τ_1, а $(0, 1)$ соответствует τ_2. Пусть $u, v \in H^1(BQ) \cong \mathrm{Hom}(H_1(BQ), \mathbb{Z}/2)$ — элементы, двойственные к τ_1, τ_2, рассматриваемым как образующие $H_1(BQ)$.

Индуцированные автоморфизмы θ_a^* из $H^*(BQ) = \mathbb{Z}/2[u, v]$ порождают действие $GL_2(\mathbb{Z}/2)$ линейными подстановками образующих. Действительно, θ_3^* меняет местами u и v, θ_1^* фиксирует u и отображает v в $u + v$, тогда как θ_2^* фиксирует v и отображает u в $u + v$. Из [50] следует, что $\mathbb{Z}/2[u, v]^{GL_2(\mathbb{Z}/2)} = \mathbb{Z}/2[f_2, f_3]$, где $f_2 = u^2 + uv + v^2$, $f_3 = uv(u + v)$.

Утверждение 4.6. *Пусть (X, X_0) — пара, снабжённая действием коммутирующих инволюций τ_1, τ_2. Пусть $(\sigma, \varkappa)$ — N-оснащение пары (X, X_0). Предположим, что существуют три гомеоморфизма θ_1, θ_2 и θ_3 пары (X, X_0), такие что*

(1) $\theta_a \tau_a = \tau_a \theta_a$ и $\theta_a \tau_b = \tau_c \theta_a$ для $\{a, b, c\} = \{1, 2, 3\}$;

(2) $\theta_a^* : H^*(X, X_0) \to H^*(X, X_0)$ и $\tilde{\theta}_a^* = (\theta_a|_{(X, X_0)})^* : H^*(X^Q, X_0^Q) \to H^*(X^Q, X_0^Q)$ являются тождественными изоморфизмами.

Тогда коэффициенты уравнения сопряжения (4.62) *являются $GL_2(\mathbb{Z}/2)$-инвариантными многочленами. В частности, уравнение сопряжения может быть записано как* (4.63):

$$r_Q \circ \sigma(a) = \varkappa(a) f_3^m + \sum_{0 < i+j \leqslant m} a_{i,j}(\varkappa(a)) f_2^j f_3^{m-i-j}, \quad \deg a_{i,j}(x) = 3i + j + \deg x.$$

Доказательство. Для простоты будем писать X вместо (X, X_0). Рассмотрим пространство X, снабжённое инволюциями

$$\tau_1' = \tau_2, \tau_2' = \tau_1.$$

Тогда сечение σ и изоморфизм $\varkappa$ задают N-оснащение для X, снабжённого инволюциями τ_a'. Соответствующее уравнение сопряжения — это уравнение (4.62) после замены u' и v' на u и v соответственно.

Отображение θ_3 является эквивариантным отображением из пространства X с инволюциями τ_a в пространство X с инволюциями τ_a'. В частности, θ_3 определяет отображение $\hat{\theta}_3 : EQ\times_Q(X^Q) \to EQ\times_Q(X^Q)$. По утверждению 4.4 мы имеем $(\hat{\theta}_3)^*\circ(r_Q\circ\sigma) = (r_Q\circ\sigma)\circ\theta_3^* = r_Q\circ\sigma$. Следовательно, уравнение сопряжения для X, снабжённого инволюциями $\tau_1', \tau_2', \tau_3'$, получается из уравнения сопряжения для X с инволюциями τ_1, τ_2, τ_3 заменой u' на v и v' на u. Таким образом, уравнение сопряжения для X должно быть инвариантным относительно перестановки u и v.

Теперь рассмотрим пространство X, снабжённое инволюциями $\tau_1' = \tau_1, \tau_2' = \tau_1\tau_2 = \tau_3, \tau_3' = \tau_2$. Аналогичные рассуждения показывают, что уравнение сопряжения для (X, τ) должно быть инвариантным относительно замены образующих $u \mapsto u$, $v \mapsto u + v$. Таким же образом доказывается, что уравнение сопряжения инвариантно относительно замены $u \mapsto u + v$, $v \mapsto v$.

Следовательно, правая часть уравнения сопряжения $GL_2(\mathbb{Z}/2)$-инвариантна. □

4.5.3 Примеры

Рассмотрим инволюции τ_1, τ_2, τ_3 на $\mathbb{H}$, определённые формулами

$$\begin{aligned}
&\tau_1 : a + bi + cj + dk \mapsto a + bi - cj - dk\\
&\tau_2 : a + bi + cj + dk \mapsto a - bi + cj - dk\\
&\tau_3 : a + bi + cj + dk \mapsto a - bi - cj + dk.
\end{aligned} \tag{4.71}$$

Эти инволюции коммутируют, и $\tau_a\tau_b = \tau_c$ для $\{a, b, c\} = \{1, 2, 3\}$. Прямым вычислением легко проверить следующее утверждение.

Лемма 4.31. *Инволюции τ_s, $s = 1, 2, 3$, являются автоморфизмами кольца $\mathbb{H}$, и они коммутируют с кватернионным сопряжением, то есть $\tau_s(q_1q_2) = \tau_s(q_1)\tau_s(q_2)$ и $\tau_s(\overline{q}) = \overline{\tau_s(q)}$ для любых $q, q_1, q_2 \in \mathbb{H}$.*

Очевидно, что покоординатное применение τ_s определяет инволюции τ_s на $\mathbb{H}^n$, на единичном диске $D^{4n} \subset \mathbb{H}^n$, на его границе ∂D^{4n}, на паре $(D^{4n}, \partial D^{4n})$, на сфере $S^{4n} = D^{4n}/S^{4n-1}$, есть и другие очевидные примеры.

По лемме 4.31, инволюции τ_s индуцируют инволюции τ_s на кватернионных проективных пространствах $\mathbb{H}P^n$, на кватернионных грассманианах $Gr_{\mathbb{H}}(n,k)$ и на многообразиях флагов (мы рассматриваем левые $\mathbb{H}$-векторные пространства).

Позже в этом подразделе мы докажем, что все эти пространства Q-оснащены. Чтобы убедиться, что мы имеем дело именно с Q-оснащениями, а не просто с N-оснащениями, воспользуемся утверждением 4.6. Рассмотрим кватернионы

$$h_1 = \frac{j+k}{\sqrt{2}},\ h_2 = \frac{i+k}{\sqrt{2}},\ h_3 = \frac{i+j}{\sqrt{2}}.$$

Определим автоморфизм θ_s, $s = 1,2,3$, кольца $\mathbb{H}$ как сопряжение элементом h_s:

$$\theta_s(q) = h_s q h_s^{-1}, s = 1,2,3.$$

Снова прямым вычислением легко проверяется следующее утверждение.

Лемма 4.32. *Отображения θ_s и τ_s удовлетворяют соотношениям:*

$$\theta_a \circ \tau_a = \tau_a \circ \theta_a,\ \textit{для } a = 1,2,3;$$
$$\theta_a \circ \tau_b = \tau_c \circ \theta_a,\ \textit{для } \{a,b,c\} = \{1,2,3\}.$$

Более того, все θ_s коммутируют с сопряжением кватернионов $q \mapsto \bar{q}$.

Из этой леммы видно, что θ_s, $s = 1,2,3$, могут быть определены на $D^{4n} \subset \mathbb{H}^n$, $S^{4n} = D^{4n}/S^{4n-1}$, $\mathbb{H}P^n$, $Gr_{\mathbb{H}}(n,k)$, кватернионных многообразиях флагов и т. п. По утверждению 4.6 и лемме 4.32, эти пространства Q-оснащены при условии, что они N-оснащены.

Пара $(D^{4k}, \partial D^{4k})$.

Рассмотрим единичный шар $D = D^{4k} \subset \mathbb{H}^k$, снабжённый инволюциями τ_a, заданными формулой (4.71). Пусть $S = \partial D^{4k}$. Тогда $(D^Q, S^Q) = (D^k, S^{k-1})$. Группа $H^m(D^Q, S^Q)$ нетривиальна только для $m = k$. Из спектральной последовательности расслоения $(D,S) \hookrightarrow EQ \times_Q (D,S) \to BQ$ следует, что $\rho : H^k_Q(D,S) \to H^k(D,S)$ является изоморфизмом. Пусть $\sigma = \rho^{-1}$. Заметим, что у нас есть только один возможный выбор для $\varkappa : H^{4k}(D,S) \to H^k(D^Q, S^Q)$. Теперь докажем, что $(\sigma, \varkappa)$ задаёт Q-оснащение пары (D,S).

По теореме локализации (см. [51]) гомоморфизм $r_Q : H^*_Q(D,S) \to H^*_Q(D^Q, S^Q) = H^*(D^Q, S^Q)[u,v]$ инъективен. Следовательно, для образующей $a \in H^{4k}(D,S)$ выполнено равенство $r_Q \circ \sigma(a) = \varkappa(a)P(u,v)$, где $P \in \mathbb{Z}/2[u,v]$ — некоторый нетривиальный однородный многочлен степени $3k$.

Повторяя рассуждения из доказательства утверждения 4.6, получаем, что многочлен $P(u,v)$ является $GL_2(\mathbb{Z}/2)$-инвариантным. Следовательно, $r_Q \circ \sigma(a) =$

$b\sum\limits_{j=0}^{[k/2]} m_j f_3^{k-2j} f_2^{3j}$, где $b = \varkappa(a)$, $m_j \in \mathbb{Z}/2$, $j = 0, \ldots, [k/2]$.

Лемма 4.33. *При описанных выше предположениях $m_j = 0$ для $j > 0$ и $m_0 = 1$. Уравнение сопряжения для $(D^{4k}, \partial D^{4k})$ имеет вид*

$$r_Q \circ \sigma(a) = b f_3^k.$$

Доказательство. По теореме локализации (см. [51]) гомоморфизм $r_Q : H_Q^{4k}(D, S) \to H_Q^{4k}(D^Q, S^Q)$ является изоморфизмом $\mathbb{Z}/2[u, v, u^{-1}, v^{-1}, (u+v)^{-1}]$-модулей после тензорного произведения с $\mathbb{Z}/2[u, v, u^{-1}, v^{-1}, (u+v)^{-1}]$ над $\mathbb{Z}/2[u, v]$. Обозначим локализованные когомологии через $\widehat{H}^*$. Тогда в $\widehat{H}_Q^{4k}(D, S)$ существует элемент вида $\sigma(a)Q(u, v)u^{-x}v^{-y}(u+v)^{-z}$, который отображается в b под действием r_Q. Тогда

$$\begin{aligned} b = r\big(\sigma(a)Q(u,v)u^{-x}v^{-y}(u+v)^{-z}\big) = r_Q(\sigma(a))Q(u,v)u^{-x}v^{-y}(u+v)^{-z} = \\ = \big(b \otimes \sum_{j=0}^{[k/2]} m_j f_3^{k-2j} f_2^{3j}\big)Q(u,v)u^{-x}v^{-y}(u+v)^{-z} = \\ = b \otimes \sum_{j=0}^{[k/2]} m_j f_3^{k-2j} f_2^{3j} Q(u,v)u^{-x}v^{-y}(u+v)^{-z}. \end{aligned}$$

Следовательно, в кольце $\mathbb{Z}/2[u, v, u^{-1}, v^{-1}, (u+v)^{-1}]$ имеет место соотношение

$$\left(\sum_{j=0}^{[k/2]} m_j f_3^{k-2j} f_2^{3j}\right) Q(u, v)u^{-x}v^{-y}(u+v)^{-z} = 1.$$

Поэтому в $\mathbb{Z}/2[u, v]$ выполнено равенство

$$\left(\sum_{j=0}^{[k/2]} m_j f_3^{k-2j} f_2^{3j}\right) Q(u, v) = u^x v^y (u+v)^z.$$

Следовательно, что $m_0 = 1$, иначе левая часть делится на f_2.

Заметим, что $Q(u, v)$ является произведением u, v и $(u + v)$, взятых с неотрицательными степенями; тем самым,

$$\sum_{j=0}^{[k/2]} m_j f_3^{k-2j} f_2^{3j} = u^\alpha v^\beta (u+v)^\gamma,$$

где α, β, γ — неотрицательные целые числа. Левая часть $GL_2(\mathbb{Z}/2)$-инвариантна, поэтому $\alpha = \beta = \gamma$, и, наконец, $m_1 = m_2 = \ldots = m_{[k/2]} = 0$. □

Сфера $S^{4k} = D^{4k}/\partial D^{4k}$

Рассмотрим пару $(D^{4k}, \partial D^{4k})$ с инволюциями τ_a. Факторпространство $D^{4k}/\partial D^{4k}$ — сфера S^{4k} с индуцированными инволюциями. Пространство неподвижных точек — сфера S^k. Сфера S^{4k} является Q-оснащенным пространством по следующему общему утверждению.

Лемма 4.34. *Предположим, что пространство X, снабженное инволюциями τ_a, линейно связно, а пространство X^Q непусто и линейно связно. Зафиксируем отмеченную точку $pt \in X^Q$. Тогда X является Q-оснащенным тогда и только тогда, когда пара (X, pt) является Q-оснащенной. То же самое верно для N-оснащенний.* □

Уравнение сопряжения для S^{4n} имеет вид $r_Q \circ \sigma(a) = \varkappa(a) f_3^k$. Можно также использовать рассуждения, аналогичные доказательству утверждения 7.1.15 и следствия 7.1.17 из книги [70].

Проективное пространство $\mathbb{H}P^n$

Этот пример очень важен. Рассмотрим $\mathbb{H}P^n$, где $n \leqslant \infty$, снабженное инволюциями τ_s, $s = 1, 2, 3$, индуцированными (4.71). Тогда $(\mathbb{H}P^n)^Q = \mathbb{R}P^n$. Обозначим образующую в $H^4(\mathbb{H}P^n)$ через a, а образующую в $H^1(\mathbb{R}P^n)$ через b.

Теорема 4.18. *Кватернионное проективное пространство $\mathbb{H}P^k$, $1 \leqslant k \leqslant \infty$, может быть снабжено Q-оснащением $(\varkappa, \sigma)$. Изоморфизм $\varkappa$ задаётся формулой $\varkappa(a) = b$. Уравнение сопряжения для образующей $a \in H^4(\mathbb{H}P^n)$ имеет вид*

$$r_Q \circ \sigma(a) = bf_3 + b^2 f_2 + b^4 \tag{4.72}$$

(напомним, что это соотношение следует понимать как равенство в кольце $H^*(\mathbb{R}P^k)[u, v]$), а для остальных элементов выполняется

$$r_Q \circ \sigma(a^p) = (bf_3 + b^2 f_2 + b^4)^p, \quad p \leqslant k.$$

Доказательство. Существование Q-оснащения для $\mathbb{H}P^k$, $k \leqslant \infty$, может быть доказано с помощью следствием 4.8, применимого для большого числа случаев. Поскольку $\varkappa$ является изоморфизмом колец, он удовлетворяет $\varkappa(a) = b$.

Тем не менее, полезно иметь прямое доказательство, поскольку проективные пространства достаточно просты. Факторпространство $\mathbb{H}P^k/\mathbb{H}P^{k-1}$ — сфера $S^{4k} = D^{4k}/\partial D^{4k}$, описанная в предыдущем примере. Следовательно, в коммутативной диаграмме

$$\begin{array}{ccc} H_Q^{4k}(\mathbb{H}P^k, \mathbb{H}P^{k-1}) & \xrightarrow{\hat{\imath}} & H_Q^{4k}(\mathbb{H}P^k) \\ \downarrow{\scriptstyle \rho_{rel}} & & \downarrow{\scriptstyle \rho} \\ H^{4k}(\mathbb{H}P^k, \mathbb{H}P^{k-1}) & \xrightarrow{i} & H^{4k}(\mathbb{H}P^k) \end{array}$$

левый вертикальный гомоморфизм ρ_{rel} является изоморфизмом, поэтому гомоморфизм ρ сюръективен. Положим $\sigma_{\mathrm{rel}} := \rho_{\mathrm{rel}}^{-1}$, а затем определим сечение σ для ρ по формуле $\sigma := \hat{\imath} \circ \sigma_{rel} \circ i^{-1}$. Существует единственный способ определить изоморфизм

$$\varkappa_{\mathrm{rel}} : H^{4*}(\mathbb{H}P^k, \mathbb{H}P^{k-1}) \xrightarrow{\approx} H^*(\mathbb{R}P^k, \mathbb{R}P^{k-1}).$$

Имеем соотношение $i^Q \circ \varkappa_{\mathrm{rel}} = \varkappa \circ i$, где $\varkappa : H^{4*}(\mathbb{H}P^k) \xrightarrow{\approx} H^*(\mathbb{R}P^k)$ — изоморфизм колец, определённый формулой $\varkappa(a) = b$. Гомоморфизм $\hat{\sigma}_{\mathrm{rel}}$ индуцирует изоморфизм $H_Q^*(\mathbb{H}P^k, \mathbb{H}P^{k-1}) = H^{4k}(\mathbb{H}P^k, \mathbb{H}P^{k-1})[u, v]$. По изоморфизму Кюннета $H_Q^*(\mathbb{R}P^k, \mathbb{R}P^{k-1}) = H^k(\mathbb{R}P^k, \mathbb{R}P^{k-1})[u, v]$. Обозначим через $c \in H^{4k}(\mathbb{H}P^k, \mathbb{H}P^{k-1})$ и $c' \in H^k(\mathbb{R}P^k, \mathbb{R}P^{k-1})$ ненулевые элементы. Поскольку $\mathbb{H}P^k/\mathbb{H}P^{k-1}$ — это сфера S^{4k} с действием группы Q из предыдущего примера, мы имеем $r_Q \circ \sigma_{\mathrm{rel}}(c) = c' f_3^k$. Следовательно, $r \circ \sigma(a^k) = b^k f_3^k \in H_Q^{4k}(\mathbb{R}P^k)$.

Для $k \leqslant n \leqslant \infty$ гомоморфизмы $H^{4j}(\mathbb{H}P^n) \to H^{4j}(\mathbb{H}P^k)$, $H^j(\mathbb{R}P^n) \to H^j(\mathbb{R}P^k)$, и $H_Q^j(\mathbb{R}P^n) \to H_Q^j(\mathbb{R}P^k)$ являются изоморфизмами для $j \leqslant k$. Следовательно, соотношение $r_Q \circ \sigma(a^k) = b^k f_3^k$ в $H_Q^{4k}(\mathbb{R}P^n)$ выполняется по модулю элементов из ядра гомоморфизмов $H_Q^{4k}(\mathbb{R}P^n) \to H_Q^{4k}(\mathbb{R}P^k)$. Легко видеть, что все такие элементы имеют вид ℓt_{3k}. Таким образом, получено N-уравнение сопряжения для $\mathbb{H}P^n$: $r_Q \circ \sigma(a^k) = b^k f_3^k + \ell t_{3k}$. По утверждению 4.6 правая часть уравнения $GL_2(\mathbb{Z}/2)$-инвариантна, поэтому получено Q-оснащение для $\mathbb{H}P^n$.

Теперь мы установим явную формулу для $r_Q \circ \sigma(a)$. Согласно утверждению 4.6 выполнено равенство

$$r_Q \circ \sigma(a) = bf_3 + \alpha b^2 f_2 + \beta b^4$$

для некоторых $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}/2$. Действительно, других $GL_2(\mathbb{Z}/2)$-инвариантных многочленов степени до 3 не существует. Покажем, что $\alpha = \beta = 1$.

Пусть $\rho^Q \colon H_Q^*(\mathbb{R}P^n) \to H^*(\mathbb{R}P^n), r_0 \colon H^*(\mathbb{H}P^n) \to H^*(\mathbb{R}P^n)$ — гомоморфизмы, индуцированные вложениями. Тогда $\rho^Q \circ r_Q \circ \sigma = r_0 \circ \rho \circ \sigma = r_0$. Имеем $r_0(a) = b^4$. Действительно, a — класс Эйлера кватернионного расслоения Хопфа η над $\mathbb{H}P^n$, а b — класс Эйлера вещественного расслоения Хопфа η^Q над $\mathbb{R}P^n$. Для этих расслоений выполняется $\eta|_{\mathbb{R}P^\infty} = \eta^Q \oplus \eta^Q \oplus \eta^Q \oplus \eta^Q$. Следовательно, $\beta = 1$.

Запишем уравнение сопряжения (4.63) для произвольного Q-оснащения (X, Y) в виде

$$r_Q \circ \sigma(x) = \sum_{0 \leqslant i+j \leqslant m} a_{i,j}(\varkappa(x)) f_2^j f_3^{m-i-j},$$

где $x \in H^{4m}(X, Y)$, $a_{0,0} = \mathrm{id}$. Согласно лемме 4.37, имеем $a_{i,2k+1}(\varkappa(x)) = Sq^1 a_{i,2k}(\varkappa(x))$ для $i + 2k < m$.

В частности, $a_{0,1}(\varkappa(x)) = Sq^1(a_{0,0}(\varkappa(x))) = Sq^1\varkappa(x)$. Для проективного пространства $\mathbb{H}P^n$ имеем $a_{0,1}(b) = Sq^1 b = b^2$, следовательно, $\alpha = 1$. Это доказывает уравнение сопряжения (4.72) для образующей a. Уравнение для $r_Q \circ \sigma(a^p)$ следует из

мультипликативности σ, см. утверждение 4.3. $\square$

4.5.4 Построение новых N- или Q-оснащений

При достаточно слабых предположениях на N-оснащения пар (X, X_0) и (Y, Y_0) существует N-оснащение для произведения $(X \times Y, (X \times Y_0) \cup (X_0 \times Y))$. Аналогичное утверждение верно для Q-оснащенных пар.

Предположим, что (X_i, f_{ij}) — направленная система N-оснащенных (Q-оснащенных) пространств, и все отображения f_{ij} являются Q-инвариантными вложениями. Предположим также, что каждое X_i является T_1-пространством. Тогда пространство $\varinjlim X_i$ допускает естественное N-оснащение (Q-оснащение).

Доказательства обоих утверждений аналогичны доказательствам утверждений 4.5 и 4.6 из [71].

Гораздо важнее теорема 4.19 о продолжении N-оснащения при приклейке Q-эквивариантной клетки.

Определим *Q-шар* или *Q-клетку* как единичный шар $D^{4m} \subset \mathbb{H}^m$, снабженный инволюциями τ_1, τ_2 (и $\tau_3 = \tau_1\tau_2$). Определим CW_Q-комплекс как CW-комплекс, построенный обычным образом путем приклейки Q-клетки с помощью Q-эквивариантного отображения граничной сферы. На любом CW_Q-комплексе (а также на любом его остове) определено действие группы Q, согласованное с действием Q на каждой клетке.

Теорема 4.19. *Любой CW_Q-комплекс допускает N-оснащение.*

Доказательство. Пусть $X = \bigcup\limits_{n \geqslant 0} sk^{4n}X$ и пусть $f_\alpha : \partial D^{4n}_\alpha \to sk^{4n-4}X$, $\alpha \in I_n$, — отображения присоединения для $4n$-клеток. Проведем индукцию по n, чтобы показать, что $sk^{4n}X$ имеет N-оснащение, затем перейдем к пределу, чтобы получить утверждение теоремы. Рассмотрим пару $(A, B) = (sk^{4n}X, sk^{4n-4}X)$.

Шаг 1 : *Длинные точные последовательности когомологий пар (A, B) и (A^Q, B^Q) расщепляются.* Рассуждения из утверждения 4.1 статьи [71] можно применить к парам $(B, \varnothing) \subset (A, \varnothing) \subset (A, B)$ и доказать, что для любых Q-оснащений пар $(B, \varnothing)$ и (A, B) длинные точные последовательности когомологий пар (A, B) и (A^Q, B^Q) расщепляются (как обычные, так и Q-эквивариантные). Однако в нашем случае рассуждения упрощаются. В самом деле, имеются четыре связывающих гомо-

морфизма:

$$\begin{aligned}\delta' &: H^m(B) \to H^{m+1}(A,B)\\ \delta'_Q &: H^m_Q(B) \to H^{m+1}_Q(A,B)\\ \delta'' &: H^m(B^Q) \to H^{m+1}(A^Q,B^Q)\\ \delta''_Q &: H^m_Q(B^Q) \to H^{m+1}_Q(A^Q,B^Q).\end{aligned}$$

Гомоморфизм δ' нулевой по соображениям размерности. Гомоморфизм δ'' обращается в нуль для $m \neq n-1$ по соображениями размерности. Любой класс в $H^{n-1}(B^Q)$ имеет вид $\varkappa_B(y)$ для единственного $y \in H^{4n-4}(B)$. Тогда

$$\delta'_Q\sigma_B(y) \in H^{4n-3}_Q(A,B) = H^{4n-3}_Q(\sqcup D^{4n}_\alpha, \sqcup \partial D^{4n}_\alpha),$$

и, следовательно, $\delta'_Q\sigma_B(y) = 0$. С другой стороны,

$$0 = r_{A,B}\delta'_Q\sigma_B(y) = \delta''_Q r_B\sigma_B(y) = \delta''_Q(\varkappa_B(y)f_3^{n-1} + \ell t_{3n-3}) = \delta''(\varkappa_B(y))f_3^{n-1}$$

в $H^{4n-3}_Q(\sqcup D^n_\alpha, \sqcup \partial D^n_\alpha)$. Следовательно, δ'' также обращается в нуль для $m = n-1$. Связывающий гомоморфизм δ''_Q является полиномиальным расширением δ'', поэтому $\delta''_Q = 0$.

Рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} H^m_Q(B) & \xrightarrow{\delta'_Q} & H^{m+1}_Q(A,B) \\ \downarrow{\scriptstyle r_B} & & \downarrow{\scriptstyle r_{A,B}} \\ H^m_Q(B^Q) & \xrightarrow{\delta''_Q} & H^{m+1}_Q(A^Q,B^Q). \end{array}$$

Вертикальные гомоморфизмы являются мономорфизмами по лемме 4.5, $\delta''_Q = 0$; следовательно, δ'_Q также обращается в нуль.

Шаг 2 : *Построение* σ_A *и* $\varkappa_A$. Согласно предыдущему шагу, имеет место диаграмма с точными строками:

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & H^{4m}_Q(A,B) & \xrightarrow{\hat{\imath}} & H^{4m}_Q(A) & \xrightarrow{\hat{\jmath}} & H^{4m}_Q(B) & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle \rho_{A,B}} & & \downarrow{\scriptstyle \rho_A} & & \downarrow{\scriptstyle \rho_B} & & \\ 0 & \longrightarrow & H^{4m}(A,B) & \xrightarrow{i} & H^{4m}(A) & \xrightarrow{j} & H^{4m}(B) & \longrightarrow & 0. \end{array}$$

Сечения $\sigma_{A,B}$ и σ_B определены по предположению индукции. Для изоморфизмов $\varkappa_B$

и $\varkappa_{A,B}$ имеет место диаграмма с точными строками:

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & H^{4m}(A,B) & \xrightarrow{i} & H^{4m}(A) & \xrightarrow{j} & H^{4m}(B) & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle \varkappa_{A,B}} & & & & \downarrow{\scriptstyle \varkappa_B} & & \\ 0 & \longrightarrow & H^m(A^Q,B^Q) & \xrightarrow{\tilde{i}} & H^m(A^Q) & \xrightarrow{\tilde{j}} & H^m(B^Q) & \longrightarrow & 0. \end{array}$$

Для $m \leqslant n-1$ имеем $H^m(A^Q,B^Q) = H^{4m}(A,B) = H^{4m}_Q(A,B) = 0$; следовательно, j, $\hat{j}$ и $\tilde{j}$ являются изоморфизмами. Для $m \geqslant n$ имеем $H^{4m}(B) = H^m(B^Q) = 0$; следовательно, i и $\tilde{i}$ являются изоморфизмами.

Определим гомоморфизмы $\sigma_A : H^{4m}(A) \to H^{4m}_Q(A)$ и $\varkappa_A : H^{4m}(A) \to H^m(A^Q)$ по формулам:

$$\sigma_A(x) = \begin{cases} \hat{j}^{-1} \circ \sigma_B \circ j & \text{для } m \leqslant n-1; \\ \hat{\imath} \circ \sigma_{A,B} \circ i^{-1} & \text{для } m \geqslant n \end{cases}$$

и

$$\varkappa_A(x) = \begin{cases} \tilde{j}^{-1} \circ \varkappa_B \circ j & \text{для } m \leqslant n-1; \\ \tilde{\imath} \circ \varkappa_{A,B} \circ i^{-1} & \text{для } m \geqslant n. \end{cases}$$

Шаг 3 : *Проверка уравнения сопряжения.* Теперь нам нужно проверить уравнение сопряжения (4.62) для пространства A с гомоморфизмами σ_A и $\varkappa_A$, определенными на предыдущем шаге. Для $m = n$ элемент $a \in H^{4m}(A)$ лежит в образе i, то есть $a = i(a')$ для некоторого $a' \in H^{4m}(A,B)$. Следовательно, $\sigma_A(a) = \hat{\imath} \circ \sigma_{A,B}(a')$. Отсюда $\hat{j} \circ \sigma_A(a) = 0$ и $\tilde{j} \circ r_A \circ \sigma_A(a) = 0$. Таким образом, элемент $r_A \circ \sigma_A(a) \in H^{4m}_Q(A)$ лежит в образе $\tilde{\imath} : H^{4m}(A,B) \to H^{4m}(A)$. Из уравнения сопряжения для (A,B) получаем $r_A \circ \sigma_A(a) = \varkappa_A(a) f_3^m$.

Для простоты обозначений мы используем те же символы для $\tilde{\imath}$ и $\tilde{j}$ и их полиномиальных расширений.

Случай $m < n$ более тонкий. Для $a \in H^{4m}(A)$ элемент $\tilde{j} \circ r_A \circ \sigma_A(a) \in H^{4m}_Q(B)$ равен $r_B \circ \sigma_B \circ j(a)$. По уравнению сопряжения для B этот элемент может быть записан в виде $\tilde{j} \circ \varkappa_A(a) f_3^m + \sum\limits_{p+q>0} b'_{p,q}(a) f_2^p f_3^{m-p-q}$, где $b'_{p,q}(a) \in H^{m+p+3q}(B^Q)$. Для некоторых значений m гомоморфизм $\tilde{j} : H^{4m}_Q(A^Q) \to H^{4m}_Q(B^Q)$ является изоморфизмом, и для этих размерностей мы получаем уравнение сопряжения для A. С другой стороны, для некоторых значений m (по крайней мере, для тех, которые удовлетворяют $4m \geqslant n$), $\ker \tilde{j} \neq 0$. Тогда поднятие $r_B \circ \sigma_B \circ j(a)$ в $H^{4m}_Q(A)$ определено с точностью до $\operatorname{im} \tilde{\imath}$. Заметим, что элемент из $\operatorname{im} \tilde{\imath}$ является суммой элементов вида $b''_{n,s} u^s v^{4m-n-s}$, где $b''_{n,s} \in \operatorname{im} \tilde{\imath} : H^n(A^Q,B^Q) \to H^n(A^Q)$. Он имеет вид ℓt_n, следовательно, $r_A \circ \sigma_A(a) = \varkappa(a) f_3^m + \sum\limits_{i+j<3m} b_{i,j}(a) u^i v^j, \deg b_{i,j}(x) = 4m - i - j$. Таким образом, уравнение сопряжения для A установлено. $\square$

Следствие 4.8. *Кватернионные многообразия флагов, грассманианы и проективные пространства являются Q-оснащенными.*

Это следует из теоремы 4.19 и утверждения 4.6 благодаря существованию специфических клеточных структур на этих пространствах. □

Замечание о связи между кватернионым Q-оснащением и комплексным H-оснащением

Как видно из теоремы 4.19, CW_Q-комплекс X допускает N-оснащение $(\sigma_Q, \varkappa_Q)$. В то же время из раздела 5 [71] или раздела 2 [125] следует, что X, снабженный любой из инволюций τ_a, $a = 1, 2, 3$, допускает H-оснащение $(\sigma_a, \varkappa_a)$ (т. е. компленсное оснащение).

Имет место коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccccc} X & \longrightarrow & EQ \times_Q X & \longrightarrow & EQ/Q = BQ \\ \| & & \uparrow{\scriptstyle p} & & \uparrow \\ X & \longrightarrow & EQ \times_{\tau_1} X & \longrightarrow & EQ/\tau_1 = B\tau_1, \end{array}$$

в которой строки являются расслоениями. Заметим, что пространство $EQ \times_{\tau_1} X$ гомотопически эквивалентно пространству $E\tau_1 \times_{\tau_1} X$, где $E\tau_1$ — универсальное пространство $E\mathbb{Z}/2$ для $\mathbb{Z}/2$ с образующей τ_1, и $B\tau_1 = (E\tau_1)/\tau_1$. В коммутативной диаграмме

$$\begin{array}{ccc} H^*(X) & \xleftarrow[\rho_Q]{} & H^*(EQ \times_Q X) \\ \| & & \downarrow{\scriptstyle p^*} \\ H^*(X) & \xleftarrow[\rho_1]{} & H^*(EQ \times_{\tau_1} X), \end{array}$$

гомоморфизмы ρ_Q и ρ_1 допускают сечения σ_Q и σ_1, соответственно.

Утверждение 4.7. *Диаграмма*

$$\begin{array}{ccc} H^*(X) & \xrightarrow{\sigma_Q} & H^*(EQ \times_Q X) \\ \| & & \downarrow{\scriptstyle p^*} \\ H^*(X) & \xrightarrow{\sigma_1} & H^*(EQ \times_{\tau_1} X) \end{array}$$

коммутативна, то есть $p^* \circ \sigma_Q = \sigma_1$.

Аналогичные утверждения верны для σ_2 и σ_3.

Доказательство. Проведем индукцию по остовам пространства X, сохраняя обозначения теоремы 4.19. Прежде всего, рассмотрим пару $(D^{4n}, \partial D^{4n})$ и коммута-

тивну диаграмму

$$\begin{array}{ccc} H^{4n}(D^{4n},\partial D^{4n}) & \xleftarrow[\rho_Q]{} & H^{4n}_Q(D^{4n},\partial D^{4n}) \\ \| & & \downarrow p^* \\ H^{4n}(D^{4n},\partial D^{4n}) & \xleftarrow[\rho_1]{} & H^{4n}_{\tau_1}(D^{4n},\partial D^{4n}), \end{array}$$

в которой ρ_1 и ρ_Q являются изоморфизмами, следовательно, для $\sigma_Q = \rho_Q^{-1}$ и $\sigma_1 = \rho_1^{-1}$ имеем $p^* \circ \sigma_Q = \sigma_1$. Далее, $H^{4k}(D^{4n},\partial D^{4n}) = 0$ для $k \neq n$, поэтому в этих градуировках сечения σ_Q и σ_1 тривиальны.

Для шага индукции рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & H^{4m}_Q(A,B) & \xrightarrow{\hat{\imath}} & H^{4m}_Q(A) & \xrightarrow{\hat{\jmath}} & H^{4m}_Q(B) & \longrightarrow & 0 \\ & & {\scriptstyle p^*}\uparrow{\scriptstyle \sigma_Q^{A,B}}\ \downarrow{\scriptstyle \rho_Q^{A,B}} & & {\scriptstyle p^*}\uparrow{\scriptstyle \sigma_Q^{A}}\ \downarrow{\scriptstyle \rho_Q^{A}} & & {\scriptstyle p^*}\uparrow{\scriptstyle \sigma_Q^{B}}\ \downarrow{\scriptstyle \rho_Q^{B}} & & \\ 0 & \longrightarrow & H^{4m}(A,B) & \xrightarrow{i} & H^{4m}(A) & \xrightarrow{j} & H^{4m}(B) & \xrightarrow{i} & 0 \\ & & {\scriptstyle \sigma_1^{A,B}}\downarrow\ \uparrow{\scriptstyle \rho_1^{A,B}} & & {\scriptstyle \sigma_1^{A}}\downarrow\ \uparrow{\scriptstyle \rho_1^{A}} & & {\scriptstyle \sigma_1^{B}}\downarrow\ \uparrow{\scriptstyle \rho_1^{B}} & & \\ 0 & \longrightarrow & H^{4m}_{\tau_1}(A,B) & \xrightarrow{\hat{\imath}} & H^{4m}_{\tau_1}(A) & \xrightarrow{\hat{\jmath}} & H^{4m}_{\tau_1}(B) & \longrightarrow & 0. \end{array}$$

В левом треугольнике имеем $p^* \circ \sigma_Q^{A,B} = \sigma_1^{A,B}$, так как пара (A,B) эквивалентна объединению пар $(D^{4n},\partial D^{4n})$, в то время как для правого треугольника равенство $p^* \circ \sigma_Q^{B} = \sigma_1^{B}$ выполняется по предположению индукции. С помощью диаграммного поиска получаем равенство $p^* \circ \sigma_Q^{A} = \sigma_1^{A}$ в среднем треугольнике. □

Для CW_Q-комплекса X пространство неподвижных точек X^{τ_1} инвариантно относительно инволюций τ_2 и τ_3. Ограничения $\tau_2|_{X^{\tau_1}}$ и $\tau_3|_{X^{\tau_1}}$ совпадают; обозначим эту инволюцию через τ_{23}. Комплекс X^{τ_1}, снабженный инволюцией τ_{23}, обладает H-оснащением $(\sigma_{23}, \varkappa_{23})$, см. [71] для подробностей. Аналогично, у нас есть H-оснащения $(\sigma_{13}, \varkappa_{13})$ и $(\sigma_{12}, \varkappa_{12})$ для X^{τ_2} с инволюцией $\tau_{13} = \tau_1|_{X^{\tau_2}} = \tau_3|_{X^{\tau_2}}$ и X^{τ_3} с инволюцией $\tau_{12} = \tau_1|_{X^{\tau_3}} = \tau_2|_{X^{\tau_3}}$, соответственно.

Проводя индукцию по остовам так же, как в утверждении 4.7, мы можем доказать следующее утверждение.

Утверждение 4.8. *$\varkappa_Q = \varkappa_{bc} \circ \varkappa_a$ для $\{a,b,c\} = \{1,2,3\}$, $b < c$.* □

4.5.5 Уравнение Q-сопряжения и алгебра Стинрода

В этом подразделе мы рассматриваем Q-оснащенную пару (X,Y). Запишем соответствующее уравнение сопряжения в виде

$$r_Q \circ \sigma(x) = \sum_{0 \leqslant i+j \leqslant m} a_{i,j}(\varkappa(x)) f_2^j f_3^{m-i-j}, \tag{4.73}$$

где x — произвольный класс когомологий в $H^{4m}(X,Y)$, $a_{0,0}=\mathrm{id}$, и $\deg a_{i,j}(x)=\deg x+3i+j$. Поскольку гомоморфизм $\varkappa$ биективен, коэффициенты уравнения сопряжения определяют гомоморфизмы $a_{i,j}: H^*(X^Q,Y^Q)\to H^{*+3i+j}(X^Q,Y^Q)$.

Мы докажем, что эти гомоморфизмы могут быть вычислены в терминах действия алгебры Стинрода $\mathcal{A}_2$ на элемент $\varkappa(x)$. Точнее, $a_{i,j}(z)=Sq(j,i)(z)$ для любого $z\in H^m(X^Q,Y^Q)$, где $Sq(j,i)$ — элемент базиса Милнора алгебры $\mathcal{A}_2$.

Доказательство разделено на два шага. Первый (наиболее сложный) — доказать, что действие $a_{i,j}$ на классы из $H^*(X^Q,Y^Q)$ совпадает с действием *некоторой* когомологической операции из $\mathcal{A}_2$.

Теорема 4.20. *Существуют когомологические операции $s_{i,j}\in\mathcal{A}_2$ степени $3i+j$ такие, что для любой Q-оснащенной пары (X,Y) коэффициенты уравнения сопряжения* (4.73) *удовлетворяют соотношениям*

$$a_{i,j}(\varkappa(x))=s_{i,j}(\varkappa(x)).$$

На втором шаге используется уравнение сопряжения для пространства $(\mathbb{H}P^\infty)^n$ с достаточно большим n, чтобы доказать совпадение $s_{i,j}$ с элементом Милнора $Sq(j,i)$, см. теорему 4.21.

Пример 4.1. *Рассмотрим кватернионное проективное пространство $\mathbb{H}P^n$ с комплексными инволюциями* (4.71). *Пусть $a\in H^4(\mathbb{H}P^n)$ и $b\in H^1(\mathbb{R}P^n)$ — образующие. По теореме* 4.18, *$\mathbb{H}P^n$ является Q-оснащенным, и уравнение сопряжения имеет вид*

$$r_Q\circ\sigma(a)=bf_3+b^2f_2+b^4.$$

В этом примере $a_{0,1}=Sq^1=Sq(1)$ и $a_{1,0}=Sq^2Sq^1=Sq(0,1)$.

Лемма 4.35. *Действие алгебры Стинрода $\mathcal{A}_2$ на $GL_2(\mathbb{Z}/2)$-инвариантной части $\mathbb{Z}/2[f_2,f_3]$ кольца $\mathbb{Z}/2[u,v]=H^*(BQ)$ определяется равенствами*

$$\begin{aligned}&Sq^0f_2=f_2,\ Sq^1f_2=f_3,\ Sq^2f_2=f_2^2,\\ &Sq^0f_3=f_3,\ Sq^1f_3=0,\ Sq^2f_3=f_2f_3,\ Sq^3f_3=f_3^2.\end{aligned}$$

Доказательство проводится прямым вычислением. □

Заметим, что Sq^k коммутирует с $r: H^*_Q(X,Y)\to H^*_Q(X^Q,Y^Q)$, в частности, $Sq^k(r_Q\circ\sigma(x))=r_Q(Sq^k(\sigma(x)))$, и может не коммутировать с $\sigma: H^*(X,Y)\to H^*_Q(X,Y)$. Для элемента $x\in H^*(X,Y)$ теорема Лере–Хирша позволяет записать

$$Sq^k(\sigma(x))=\sum_{\alpha,\beta}\sigma(\tilde{x}_{\alpha,\beta})u^\alpha v^\beta, \tag{4.74}$$

где $\tilde{x}_{\alpha,\beta} \in H^*(X,Y)$, $\deg \tilde{x}_{\alpha,\beta} = \deg x + k - \alpha - \beta$. Сначала докажем два факта об этом разложении.

Лемма 4.36. (*a*) *В правой части* (4.74) *индексы* α *и* β *любого нетривиального слагаемого удовлетворяют неравенству* $0 \leqslant \alpha + \beta \leqslant k$.

(*b*) *Полином в правой части* (4.74) *является* $GL_2(\mathbb{Z}/2)$*-инвариантным.*

Следовательно, мы можем записать соотношение (4.74) *в виде*

$$Sq^k(\sigma(x)) = \sum_{2p+3q \leqslant k} \sigma(x_{p,q}) f_2^p f_3^q, \tag{4.75}$$

где $\deg x_{p,q} = \deg x + k - 2p - 3q$.

Доказательство. Сравним обе части (4.74) после применения гомоморфизма r_Q, который является мономорфизмом по утверждению 4.5.

(*a*) Пусть $x \in H^{4m}(X,Y)$. Предположим, что существуют нетривиальные слагаемые с $\alpha + \beta > k$. Рассмотрим нетривиальные слагаемые $\sigma(\tilde{x}_{\alpha,\beta}) u^\alpha v^\beta$ с максимальным $\alpha + \beta$ и выберем одно из них с максимальным α. Поскольку $\deg \tilde{x}_{\alpha,\beta} = 4m + k - \alpha - \beta$, разложение элемента $r_Q \circ \sigma(\tilde{x}_{\alpha,\beta}) u^\alpha b^\beta$ является полиномом по u и v степени $3m + \frac{3k+\alpha+\beta}{4}$.

С другой стороны, $r_Q(Sq^k(\sigma(x))) = Sq^k(r_Q(\sigma(x))) = Sq^k(\varkappa(x) f_m^3 + \ell t_{3m})$, что является полиномом по u и v степени не более $3m + k$. Следовательно, $\alpha + \beta \leqslant k$.

(*b*) Выберем k_0 так, что в выражении

$$\sum_{\alpha+\beta>k_0} \sigma(\tilde{x}_{\alpha,\beta}) u^\alpha v^\beta + \sum_{\alpha+\beta=k_0} \sigma(\tilde{x}_{\alpha,\beta}) u^\alpha v^\beta + \sum_{\alpha+\beta<k_0} \sigma(\tilde{x}_{\alpha,\beta}) u^\alpha v^\beta$$

первая сумма является $GL_2(\mathbb{Z}/2)$-инвариантной, а вторая сумма — нет. Применяя r_Q и используя уравнение сопряжения, мы получаем, что в $r_Q(Sq^k(\sigma(x)))$ (которое является $GL_2(\mathbb{Z}/2)$-инвариантным) сумма элементов степени $3m + \frac{3k+k_0}{4}$ по переменным u и v содержит инвариантную часть (из первой суммы) и

$$\sum_{\alpha+\beta=k_0} \varkappa(\tilde{x}_{\alpha,\beta}) f_3^{m+(k-k_0)/4} u^\alpha v^\beta$$

что не является $GL_2(\mathbb{Z}/2)$-инвариантным. □

Мы докажем теорему 4.20, сравнивая для нескольких значений a, b коэффициенты при мономах $f_2^a f_3^b$ в разложениях обеих частей равенства

$$Sq^k(r_Q \circ \sigma(x)) = r(\sum \sigma(x_{p,q}) f_2^p f_3^q).$$

Для проведения индукции вводим специальное упорядочение символов $a_{i,j}$. А именно, положим $a_{i_1,j_1} \succ a_{i_2,j_2}$ тогда и только тогда, когда выполняется одно из следующих условий:

(1) $3i_1 + j_1 > 3i_2 + j_2$ (то есть $\deg a_{i_1,j_2} > \deg a_{i_2,j_2}$),

(2) $3i_1 + j_1 = 3i_2 + j_2$ и $j_1 = 0$, $j_2 \neq 0$,

(3) $3i_1 + j_1 = 3i_2 + j_2$ и $j_1 > j_2 > 0$.

Например, $a_{1,1} \succ a_{0,2}$, $a_{1,0} \succ a_{0,3}$, $a_{2,0} \succ a_{0,6} \succ a_{1,3}$.

Для упрощения обозначений будем писать $A_1 \equiv A_2$ для элементов $A_1, A_2 \in H^*(X^Q, Y^Q)$ тогда и только тогда, когда $A_1 - A_2$ является линейной комбинацией элементов $\theta_{i,j} a_{i,j}(z)$, где $\theta_{i,j} \in \mathcal{A}_2$ и $\deg \theta_{i,j} > 0$. Для полиномов $B_1, B_2 \in H^*(X^Q, Y^Q)[u, v]$ мы пишем $B_1 \equiv B_2$ тогда и только тогда, когда разность $B_1 - B_2$ может быть записана в виде полинома по u и v со всеми коэффициентами $\equiv 0$ в $H^*(X^Q, Y^Q)$. Это обозначение будет полезно в доказательстве по индукции относительно упорядочения $\succ$. В частности, мы говорим, что некоторый $a_{i,j}(z)$ сводится к более низким $\succ$-членам, если существует формула, которая выполняется для всех z и которая дает выражение $a_{i,j}(z)$ в виде суммы элементов $\theta_{s,t} a_{s,t}(z)$, где $\theta_{s,t} \in \mathcal{A}_2$, $\deg \theta_{s,t} + \deg a_{s,t} = \deg a_{i,j}$ и $a_{i,j} \succ a_{s,t}$. Шаг индукции фактически состоит в том, чтобы доказать, что $a_{i,j}(z) \equiv \sum a_{s,t}(z)$, где $\deg a_{s,t} = \deg a_{i,j}$ и $a_{i,j} \succ a_{s,t}$ для всех s, t.

Зафиксируем Q-оснащенную пару (X, Y). Пусть x — произвольный элемент из $H^{4m}(X, Y)$. Будем обозначать $z = \varkappa(x)$, $z_{p,q} = \varkappa(x_{p,q})$ и т. п.

Нам понадобится следующее утверждение с отдельным доказательством, так как оно использовалось в доказательстве теоремы 4.18.

Лемма 4.37. *Тождество $a_{i,2k+1}(\varkappa(x)) = Sq^1 a_{i,2k}(\varkappa(x))$ выполняется для любого Q-оснащения (X, Y) и любого класса $x \in H^{4m}(X, Y)$, $i + 2k < m$. В частности, $a_{0,1}(z) = Sq^1(z)$.*

Доказательство. По лемме 4.36, $Sq^1 \sigma(x) = 0$. Применим r_Q:

$$Sq^1\Big(\sum_{i,j} a_{i,j}(z) f_2^j f_3^{m-i-j}\Big) = 0.$$

По формуле Картана и лемме 4.35,

$$\sum_{i,j} Sq^1(a_{i,j}(z))\, f_2^j f_3^{m-i-j} + \sum_{i,j} a_{i,j}(z) Sq^1(f_2^j f_3^{m-i-j}) = \\ = \sum_{i,j} Sq^1(a_{i,j}(z))\, f_2^j f_3^{m-i-j} + \sum_{i,j} j a_{i,j}(z) f_2^{j-1} f_3^{m-i-j+1} = 0.$$

Следовательно,

$$Sq^1 a_{i,j}(z) + (j+1) a_{i,j+1}(z) = 0.$$

□

Лемма 4.38. *Для коэффициентов уравнения сопряжения (4.73) выполняются следующие соотношения*:

(*i*) $a_{i,2}(z) \equiv 0$ *для всех* i,
(*ii*) $a_{i,4s+2}(z) + (i+1)a_{i+1,4s-1}(z) \equiv 0$ *для* $s > 0$,
(*iii*) $a_{2s+1,0}(z) + a_{2s,3}(z) \equiv 0$.

Замечание 4.4. *Утверждения* (*i*) *и* (*ii*) *позволяют нам свести* $a_{i,4s+2}(z)$ *к* $\succ$*-меньшим членам. Соответствующая часть доказательства является прототипом для доказательства леммы 4.39, где мы показываем, применяя* Sq^{2^k}*, что* $a_{i,2^k(2s+1)}(z)$ *сводится к* $\succ$*-меньшим членам.*

Доказательство. По лемме 4.36 имеем равенство $Sq^2\sigma(x) = \sigma(x_{1,0})f_2$. Следовательно,

$$Sq^2(\sum_{i,j} a_{i,j}(z) f_2^j f_3^{m-i-j}) = \sum_{i,j} a_{i,j}(z_{1,0}) f_2^{j+1} f_3^{m-i-j}.$$

Раскрывая левую часть этого равенства по формуле Картана, получаем

$$\sum_{i,j} a_{i,j}(z)\, Sq^2(f_2^j f_3^{m-i-j}) + \sum_{i,j} a_{i,j}(z_{1,0}) f_2^{j+1} f_3^{m-i-j} \equiv 0.$$

Тогда формула Картана и лемма 4.35 дают

$$\sum_{i,j} a_{i,j}(z) \left[(m-i) f_2^{j+1} f_3^{m-i-j} + \binom{j}{2} f_2^{j-2} f_3^{m-i-j+2} \right] + \sum_{i,j} a_{i,j}(z_{1,0}) f_2^{j+1} f_3^{m-i-j} \equiv 0.$$

Для коэффициента при мономе $f_2 f_3^m$ имеем равенство $m a_{0,0}(z) + a_{0,0}(z_{1,0}) \equiv 0$. Следовательно, $z_{1,0} = mz$, откуда получаем соотношение

$$\sum_{i,j} a_{i,j}(z) \left[i f_2^{j+1} f_3^{m-i-j} + \binom{j}{2} f_2^{j-2} f_3^{m-i-j+2} \right] \equiv 0.$$

Коэффициент при f_3^{m-i} в этом разложении дает (*i*), коэффициент при $f_2^{4s} f_3^{m-i-4s}$ дает (*ii*). Наконец, коэффициент при $f_2 f_3^{m-1-i}$ дает $a_{i,3}(z) + (i+1)a_{i+1,0}(z) \equiv 0$, что для $i = 2s$ дает (*iii*). □

Лемма 4.39. *Для* $i_0 \geqslant 0$, $k > 1$ *и* $s \geqslant 0$ *любой* $a_{i_0,2^k(2s+1)}(z)$ *может быть сведен к низшим термам.*

Доказательство. Пусть $x \in H^{4m}(X, Y)$ и $z = \varkappa(x)$. Обозначим $j_0 = 2^k(2s+1)$. Рассмотрим равенство

$$Sq^{2^k}(r_Q \circ \sigma(x)) = r_Q(Sq^{2^k}\sigma(x)) \tag{4.76}$$

и разложим обе части в ряд по $f_2^s f_3^t$. Мы докажем утверждение леммы, сравнивая коэффициенты при определенных степенях.

Шаг 1. Рассмотрим левую часть. Имеем

$$Sq^{2^k}(r_Q \circ \sigma(x)) \equiv \sum_{0 \leqslant i+j \leqslant m} a_{i,j}(z) Sq^{2^k}(f_2^j f_3^{m-i-j}).$$

Результат применения Sq^{2t} к $f_2^j f_3^M$ выглядит достаточно сложно, нам достаточно следующее выражение для $j \geqslant 2t$:

$$Sq^{2t}(f_2^j f_3^M) = \binom{j}{2t} f_2^{j-2t} f_3^{M+2t} + \sum_{s=1}^{t} \alpha_s f_2^{j-2t+3s} f_3^{M+2t-2s}, \ \alpha_s \in \mathbb{Z}/2,$$

что легко получается из леммы 4.35 и формулы Картана.

Тогда

$$\sum_{0 \leqslant i+j \leqslant m} a_{i,j}(z) Sq^{2^k}(f_2^j f_3^{m-i-j}) =$$

$$= \sum_{0 \leqslant i+j \leqslant m} a_{i,j}(z) \left[\binom{j}{2^k} f_2^{j-2^k} f_3^{m-i-j+2^k} + \sum_{s=1}^{2^{k-1}} \alpha_s f_2^{j-2^k+3s} f_3^{m-i-j+2^k-2s} \right].$$

Из этого разложения мы можем найти коэффициент при

$$f_2^{j_0-2^k} f_3^{m-i_0-j_0+2^k} = f_2^{2^{k+1}s} f_3^{m-i_0-2^{k+1}s}$$

в левой части. С точностью до элементов вида $\theta_{s,t} a_{s,t}(z)$, $\theta_{s,t} \in \mathcal{A}_2$, $\deg \theta_{s,t} > 0$, он равен $a_{i_0,j_0}(z) + \sum\limits_{s=1}^{2^{k-1}} \alpha_s a_{i_0+s,j_0-3s}(z)$. Все слагаемые под знаком суммы являются $\succ$-меньшими, чем $a_{i_0,j_0}(z)$. Действительно, $\deg a_{i_0+s,j_0-3s} = \deg a_{i_0,j_0}$, $j_0 - 3s < j_0$, и $j_0 - 3s = 2^k(2s+1) - 3s \neq 0$. Другими словами, коэффициент при $f_2^{j_0-2^k} f_3^{m-i_0-j_0+2^k}$ в левой части равен сумме $a_{i_0,j_0}(z)$ и $\prec$-меньшим членов.

Шаг 2. Рассмотрим правую часть. По лемме 4.36 выполнено равенство $Sq^{2^k}\sigma(x) = \sum\limits_{0 \leqslant 2p+3q \leqslant 2^k} \sigma(x_{p,q}) f_2^p f_3^q$. Пусть $z_{p,q} = \varkappa(x_{p,q})$ и $\deg z_{p,q} = m'$. Наша следующая цель — доказать, что все элементы $z_{p,q}$ могут быть выражены как линейные комбинации элементов $\theta_{s,t} a_{s,t}(z)$, $\theta_{s,t} \in \mathcal{A}_2$.

В разложении

$$Sq^{2^k}\sigma(x) = \sum_{0 \leqslant 2p+6q \leqslant 2^k} \sigma(x_{p,2q}) f_2^p f_3^{2q}$$

(здесь немного изменены обозначения, так как f_3 входит только в четных степенях)

сумма берется по множеству Δ троек (m', p, q) таких, что

$$4m' + 2p + 6q = 4m + 2^k, \tag{4.77}$$

$$p \geqslant 0, \quad q \geqslant 0,$$

$$2p + 6q \leqslant 2^k. \tag{4.78}$$

Заметим, что эти три условия подразумевают

$$m \leqslant m' \leqslant m + 2^{k-2}. \tag{4.79}$$

Из соотношения (4.77) следует, что для любых двух целых чисел из тройки (m', p, q) третье число определяется однозначно. Теперь мы определим упорядочение элементов $z_{p,2q}$ или, эквивалентно, упорядочение троек $(m', p, q) \in \Delta$, следующим образом. Определим отображение $(m', p, q) \mapsto (A, B)$ по формулам

$$A = m' - m - 2^{k-1} + q,$$
$$B = p = 2(m - m') + 2^{k-1} - 3q.$$

Очевидно, что $(m', q) \mapsto (A, B)$ является линейным отображением с ненулевым определителем, следовательно, это соответствие взаимно однозначно. Говорим, что z_{p_1,q_1} является $\lhd$-меньшим, чем z_{p_2,q_2}, тогда и только тогда, когда

(1) $B_1 < B_2$ или

(2) $B_1 = B_2$ и $A_1 < A_2$.

Целые числа (A, B) имеют очень простой смысл. А именно, применим r_Q к $\sigma(x_{p,2q}) f_2^p f_3^{2q}$:

$$r_Q \circ \sigma(x_{p,2q}) f_2^p f_3^{2q} = z_{p,2q} f_2^p f_3^{m'+2q} + \ell t = z_{p,2q} f_2^B f_3^{m-A-B} + \ell t,$$

где ℓt имеет меньшую степень по переменным u, v.

Из неравенств (4.79) и (4.78) легко вывести, что $A < 0$ и $B \geqslant 0$.

Теперь выберем $\lhd$-минимальный $z_{p,2q}$ в Δ. Вычисляя коэффициент при соответствующем мономе $f_2^B f_3^{m-A-B}$, видим, что в правой части (4.76) нет вклада от $\lhd$-больших элементов Δ. Следовательно, $\lhd$-минимальный $z_{p,2q}$ выражается в терминах $a_{i,j}(z)$ той же степени $m' = m + 3i + j$ и операций $\theta_{i,k} \in \mathcal{A}_2$, примененных к $a_{i,j}(z)$ меньшей степени. Затем применим индукцию по $\lhd$-упорядочению Δ и получим выражение $z_{p,2q}$ в терминах $\lhd$-меньших элементов Δ и некоторых $\theta_{i,j} a_{i,j}(z)$ из левой части.

Чтобы завершить шаг 2, приравняем коэффициенты при $f_2^{2^{k+1}s} f_3^{m-i_0-2^{k+1}s}$ в уравнении (4.76). По соображения размерности, элементы $z_{p,q}$ степени $m' > m$ выражаются через $a_{i,j}(z)$ с $i + j > 0$. Следовательно, приравнивая коэффициенты, мы получаем слагаемые вида $a_{s,t}(z_{p,q})$, где $\deg a_{s,t} < 3i_0 + j_0$. Таким образом, предположение индук-

ции применимо ко всем таким $a_{s,t}$ и $a_{i,j}$, и нам остается рассмотреть вклад слагаемых $z_{p,q}$ степени $m' = m$.

Шаг 3. В правой части нам нужно найти вклад слагаемых с $(m' = m, p, 2q)$. Эти слагаемые в $r_Q(Sq^{2^k}(\sigma(x)))$ дают $\sum\limits_{q=0}^{[2^{k-1}/3]} r_Q \circ \sigma(x_{p,2q}) f_2^{2^{k-1}-3q} f_3^{2q}$. Нам нужно разложить $r_Q \circ \sigma(x_{p,2q})$ с помощью уравнения сопряжения и определить коэффициент при $f_2^{j_0-2^k} f_3^{m-i_0-j_0+2^k} = f_2^{2^{k+1}s} f_3^{m-i_0-2^{k+1}s}$. Для $s = 0$, никакой $r_Q \circ \sigma(x_{p,2q})$ не может внести вклад, так как $2^{k-1} - 3q > 0$ для всех $q < [2^{k-1}/3]$.

Для $s > 0$, разложение $r_Q \circ \sigma(x_{p,2q})$ вносит вклад $a_{s,t}(z_{p,2q})$ с $t = 2^{k+1}s - 2^{k-1} + 3q$. Заметим, что $3s + t = 3i_0 + j_0$, но $t < j_0 = 2^{k+1}s + 2^k$, следовательно, применимо предположение индукции, что завершает доказательство.

Учитывая леммы 4.37, 4.38, 4.39, остается редуцировать $a_{2i_0,0}(z)$ для $i_0 \geqslant 1$. □

Лемма 4.40. *Для $i_0 \geqslant 0$ любой $a_{2i_0,0}(z)$ может быть сведен к $\succ$-меньшим слагаемым.*

Доказательство. Пусть $x \in H^{4m}(X, Y)$ и $z = \varkappa(x)$. Пусть $2i_0 = 2^k(2s + 1)$. Рассмотрим равенство

$$Sq^{3\cdot 2^k}(r_Q \circ \sigma(x)) = r(Sq^{3\cdot 2^k}\sigma(x)) \tag{4.80}$$

и разложим обе части в ряд по $f_2^s f_3^t$. Мы получаем утверждение леммы, сравнивая коэффициенты при $f_3^{m-2^{k+1}s}$.

Шаг 1: Левая часть (4.80). Поскольку $a_{i,0}$ является $\succ$-наибольшим среди $a_{s,t}$ той же степени, можно следить только за вкладом элементов $a_{i,0}(z)$. Следовательно, в разложении $Sq^{3\cdot 2^k}\left(\sum a_{i,j}(z) f_2^j f_3^{m-i-j}\right)$ нам нужно рассмотреть только $\sum a_{i,0}(z) Sq^{3\cdot 2^k}(f_3^{m-i})$. Вклад в коэффициент при $f_3^{m-2^{k+1}s}$ содержится в сумме $\sum a_{i,0}(z)\binom{m-i}{2^k} f_3^{m-i+2^k}$, так как другие слагаемые либо обращаются в нуль, либо содержат f_2 с положительным показателем. Таким образом, коэффициент при $f_3^{m-2^{k+1}s}$ в левой части равен

$$\binom{m-2i_0}{2^k} a_{2i_0,0}(z) + \succ\text{-меньшие слагамые.} \tag{4.81}$$

Шаг 2: Правая часть (4.80). В разложении

$$Sq^{3\cdot 2^k}\sigma(x) = \sum_{p,q} \sigma(x_{p,q}) f_2^p f_3^q$$

мы можем рассмотреть только слагаемые $\sum\limits_q \sigma(x_{0,q}) f_3^q$, так как другие не могут внести вклад в коэффициент при $f_3^{m-2^{k+1}s}$ из-за f_2 с положительным показателем. Более того, в этой сумме мы можем рассмотреть только один элемент $\sigma(x_{0,2^k}) f_3^{2^k}$. Действительно, другие $x_{0,q}$ имеют степень больше $4m$. Вклад любого такого элемента в коэффициент при $f_3^{m-2^{k+1}s}$ имеет вид $a_{i,j}(z_{0,q})$, где $3i + j < 6i_0$, что является $\succ$-меньшим, чем $a_{2i_0,0}$.

Заметим, что $x_{0,2^k}$ является наименьшим в $\lhd$-упорядочении $x_{p,q}$. Мы можем определить $z_{0,2^k}$, как в лемме 4.39, сравнивая коэффициенты при $f_3^{m+2^k}$ в обеих частях (4.80). В правой части он точно равен $z_{0,2^k}$. В левой части, с точностью до $\succ$-низших термов, коэффициент содержится в разложении $zSq^{3\cdot 2^k}(f_3^m)$ и, следовательно, равен $\binom{m}{2^k}z$. Наконец, вклад правой части (4.80) в коэффициент при $f_3^{m-2^{k+1}s}$ с точностью до $\succ$-низших термов содержится в $r_Q\circ\sigma(x_{0,2^k})f_3^{2^k}$, и, следовательно, равен

$$\binom{m}{2^k}a_{2i_0,0}(z)+\succ\text{-меньшие слагамые.} \tag{4.82}$$

Поскольку (4.81) и (4.82) равны, мы получаем

$$\left[\binom{m}{2^k}+\binom{m-2i_0}{2^k}\right]a_{2i_0,0}(z) \quad = \quad \succ\text{-меньшие слагаемые.}$$

Чтобы завершить доказательство, заметим, что по элементарным свойствам биномиальных коэффициентов по модулю 2, один из биномиальных коэффициентов $\binom{m}{2^k}$ и $\binom{m-2i_0}{2^k}=\binom{m-2^{k+1}s-2^k}{2^k}$ равен нулю, а другой равен 1.

Таким образом, теорема 4.20 доказана. □

Пусть $x\in H^1(\mathbb{R}P^\infty)$ и $a\in H^4(\mathbb{H}P^\infty)$ — образующие. Рассмотрим пространство $(\mathbb{R}P^\infty)^n$ и пусть $p_j:(\mathbb{R}P^\infty)^n\to\mathbb{R}P^\infty$ — проекция на k-ю копию $\mathbb{R}P^\infty$. Определим $x_k=p_k^*(x)$. Аналогично определим $a_k\in H^4((\mathbb{H}P^\infty)^n)$. По утверждению 3.2 из [225], ненулевые операции из $\mathcal{A}_2$ степени не больше n действуют на класс $x_1x_2\dots x_n$ нетривиально. Следовательно, класс $\theta(x_1x_2\dots x_n)$ может быть использован для выражения операции $\theta\in\mathcal{A}_2$ через известные элементы алгебры $\mathcal{A}_2$, если $\deg\theta\leqslant n$.

По теореме 4.18, проективное кватернионное пространство $\mathbb{H}P^\infty$ является Q-оснащенным. Произведение $(\mathbb{H}P^\infty)^n$ также является Q-оснащенным. Из естественности и мультипликативности структурных отображений σ и $\varkappa$ следует, что

$$r_Q\circ\sigma(a_1a_2\dots a_n)=\prod_{k=1}^n r_Q\circ\sigma(a_k)=\prod_{k=1}^n(x_kf_3+x_k^2f_2+x_k^4).$$

Положим $N=\{1,2,\dots,n\}$, и для любого подмножества $I\subseteq N$ рассмотрим элемент $x_I=\prod\limits_{s\in I}x_s$. Тогда $r_Q\circ\sigma(a_1a_2\dots a_n)$ может быть записано как

$$\sum_{0\leqslant i+j\leqslant n}\left[\sum_{|I|=i,|J|=j,I\cap J=\varnothing}x_I^4x_J^2x_{N\setminus(I\cup J)}\right]f_2^jf_3^{n-i-j}.$$

Следовательно,

$$a_{i,j}(x_N)=\sum_{|I|=i,|J|=j,I\cap J=\varnothing}x_I^4x_J^2x_{N\setminus(I\cup J)}. \tag{4.83}$$

Напомним, см. раздел A.1.5, что в алгебре Стинрода $\mathcal{A}_2$ имеются элементы Милнора $Sq(i_1, i_2, \dots, i_r)$, где $r \geqslant 1$, $i_k \geqslant 0$ для $k = 1, \dots, r$. Формула произведения для элементов Милнора довольно сложна, но коумножение Δ задается простой формулой

$$\Delta Sq(i_1, i_2, \dots, i_r) = \sum_{i'_k + j''_k = i_k, 1 \leqslant k \leqslant r} Sq(i'_1, i'_2, \dots, i'_r) \otimes Sq(i''_1, i''_2, \dots, i''_r).$$

Теорема 4.21. *Для любых $i \geqslant 0, j \geqslant 0$, выполняется*

$$a_{i,j} = Sq(j, i).$$

Лемма 4.41. *Пусть x — одномерный класс когомологий. Тогда действие элемента Милнора $Sq(i_1, \dots, i_r)$ с $r \leqslant 2$ задается формулами*

$$\begin{aligned} &Sq(0,0)x = x, \\ &Sq(1,0)x = x^2, \\ &Sq(0,1)x = x^4, \\ &Sq(a,b)x = 0 \quad \textit{для} \quad ab > 0. \end{aligned}$$

Доказательство. Первые три формулы следуют из равенств $Sq(0,0) = 1$, $Sq(1,0) = Sq^1$, $Sq(0,1) = Sq^2 Sq^1 + Sq^3$.

В остальных случаях элемент $Sq(a,b)x$ равен 0 по соображениям размерности, так как $Sq(a,b)$ является суммой допустимых мономов длины не больше 2. □

Доказательство теоремы 4.21. Проверим, что $Sq(j,i)(x_1 \dots x_n)$ для $3i + j \leqslant n$ дает тот же результат, что и (4.83).

Применим $(n-1)$ раз итерированное коумножение Δ к $Sq(j,i)$ и получим

$$\sum Sq(j_1, i_1) \otimes Sq(j_2, i_2) \otimes \dots \otimes Sq(j_n, i_n),$$

где сумма берется по всем неотрицательным j_k, i_k таким, что $\sum j_k = j$ и $\sum i_k = i$. Тогда

$$Sq(j,i)(x_1 \dots x_n) = \sum \prod_k Sq(j_k, i_k) x_k.$$

По лемме 4.41 только те слагаемые нетривиальны, которые являются произведениями $x_k = Sq(0,0)x_k$, $x_k^2 = Sq(1,0)x_k$ или $x_k^4 = Sq(0,1)x_k$, $k = 1, \dots, n$. Обозначим через I множество $k \in \{1, \dots, n\}$ таких, что $(j_k, i_k) = (0,1)$, и через J множество $k \in \{1, \dots, n\}$ таких, что $(j_k, i_k) = (1,0)$. Тогда $\sum \prod_k Sq(j_k, i_k) x_k$ в точности совпадает с правой частью (4.83).

□

Обозначим через Sq формальную сумму $\sum\limits_{k\geqslant 0} Sq^k$.

Утверждение 4.9. *Предположим, что пара (X, Y) является Q-оснащенной. Тогда для любого $x \in H^{4m}(X, Y)$ выполняется $\varkappa(Sq(x)) = Sq(\varkappa(x))$. В частности, $\varkappa(Sq^{4k}x) = Sq^k(\varkappa x)$, и $Sq^m x = 0$ для m, не делящегося на 4.*

Доказательство. Сначала покажем, что для фиксированного $k \geqslant 0$ существует элемент $s_k \in \mathcal{A}_2$ степени k такой, что $\varkappa(Sq^{4k}x) = s_k(\varkappa(x))$ для всех x. Заметим, что

$$Sq^{4k}x = Sq^{4k}(\rho \circ \sigma(x)) = \rho(Sq^{4k}\sigma(x)),$$

где по лемме 4.36 $Sq^{4k}\sigma(x) = \sum\limits_{2p+3q\leqslant 4k} \sigma(x_{p,q}) f_2^p f_3^q$. Тогда

$$Sq^{4k}x = \rho\left(\sum_{2p+3q\leqslant 4k} \sigma(x_{p,q}) f_2^p f_3^q\right) = \sum_{2p+3q=4k} \rho\circ\sigma(x_{p,q}) = \sum_{2p+3q=4k} x_{p,q}.$$

Применяя $\varkappa$, получаем $\varkappa(Sq^{4k}x) = \sum\limits_{2p+3q=4k} \varkappa(x_{p,q}) = \sum\limits_{2p+3q=4k} z_{p,q}$. В доказательстве теоремы 4.20 было показано, что все $z_{p,q}$ выражаются через $z = \varkappa(x)$ и элементы $\mathcal{A}_2$, следовательно, $\varkappa(Sq^{4k}x) = s_k(\varkappa(x))$ для некоторого $s_k \in \mathcal{A}_2$.

Таким образом, достаточно проверить формулу $\varkappa(Sq(x)) = Sq(\varkappa(x))$ для класса $x = x_1 x_2 \dots x_n \in H^{4n}((\mathbb{H}P^\infty)^n)$, $n \geqslant k$. По мультипликативности $\varkappa$ и Sq мы можем рассмотреть только $n = 1$. Тогда

$$\varkappa(Sq(x_1)) = \varkappa(x_1 + x_1^2) = \varkappa(x_1) + \varkappa(x_1)^2 = Sq(\varkappa(x_1)).$$

□

Глава 5

Спектральные последовательности и соотношения в когомологиях алгебр Хопфа

5.1 Построение и свойства Bss

5.1.1 Градуированные алгебры

Пусть A — градуированная алгебра над основным кольцом R с единицей, предполагается, что $A = \bigoplus\limits_{n\geqslant 0} A^n$, причем каждая однородная компонента является конечнопорожденным R-модулем, и $A^0 = R$. Удобно считать, что R тоже градуировано, причем нулевая градуировка совпадает с R, остальные однородные компоненты нулевые.

Напомним определение $\mathrm{Ext}_A^{s,t}(M,N)$, где M и N — левые градуированные A-модули (т. е. $A^iM^j \subset M^{i+j}$). Пусть $\ldots \to P_2 \to P_1 \to P_0 \to M$ — проективная резольвента модуля M над A. Применяя к резольвенте функтор $\mathrm{Hom}_A^t(-,N)$ (напомним, что группа $\mathrm{Hom}_A^t(M,N)$ состоит из A-линейных гомоморфизмов, повышающих градуировку на t), получаем комплекс $\mathrm{Hom}_A^t(P_s,N)$ с дифференциалом d, индуцированным дифференциалом резольвенты, который сохраняет градуировку t и увеличивает на 1 градуировку s. Когомологии этого комплекса относительно d по определению называются $\mathrm{Ext}_A^{s,t}(M,N)$.

Определение 5.1. Пусть N — некоторый A-модуль, а N_0 — его A-инвариантный R-подмодуль. Введем в N (возрастающую) *фильтрацию Бухштабера* по индукции:

$$N_{p+1} = \{n \in N \ : \ s\cdot n \in N_p \text{ для всех } s \in A^+ = \bigoplus_{n>0} A^n\}. \tag{5.1}$$

Основное свойство этой фильтрации состоит в том, что действие элементов из

A^+ на факторах N_{p+1}/N_p тривиально при $p \geqslant 1$, а единица кольца A на N_{p+1}/N_p действует тождественно.

Фильтрация Бухштабера индуцирует на комплексе $(\mathrm{Hom}_A^t(P_s, N), d)$ возрастающую фильтрацию подкомплексами $\mathrm{Hom}_A^t(P_s, N_p)$. Поскольку она согласована с дифференциалом, то возникает триградуированная спектральная последовательность Бухштабера (Bss) со следующими основными свойствами:

1. $E_1^{p,q,t} = \mathrm{Ext}_A^{-(p+q),t}(M, N_p/N_{p-1})$. Более того, группы $\mathrm{Ext}_A^{-(p+q),t}(M, N_p/N_{p-1})$ по теореме об универсальных коэффициентах связаны с $\mathrm{Ext}_A^{-(p+q),t}(M, R)$ и N_p/N_{p-1}. При $p \geqslant 1$ эта связь упрощается, так как тогда действие A на N_p/N_{p-1} тривиально. В частности, если R является полем, то $E_1^{p,q,t} = \bigoplus\limits_{t=t_1+t_2} \mathrm{Ext}_A^{-(p+q),t_1}(M, R) \otimes (N_p/N_{p-1})^{t_2}$.

2. $E_r^{*,*,*}$ при $r \geqslant 1$ не зависит от выбора проективной резольвенты $\ldots \to P_2 \to P_1 \to P_0 \to M$.

3. Дифференциал d_1 является связывающим гомоморфизмом длинной точной последовательности тройки комплексов, соответствующей вложениям $N_{p-2} \subset N_{p-1} \subset N_p$:

$$\mathrm{Ext}_A^{-(p+q),t}(M, N_p/N_{p-1}) \to \mathrm{Ext}_A^{-(p+q)+1,t}(M, N_{p-1}/N_{p-2});$$

   в частности, d_1 уменьшает градуировку p на 1 и сохраняет градуировки q и t:

$$d_1 : E_1^{p,q,t} \to E_1^{p-1,q,t}.$$

4. Дифференциал d_r меняет градуировки следующим образом:

$$d_r : E_r^{p,q,t} \to E_r^{p-r,q+r-1,t}.$$

5. Учитывая ограничения на градуировку в A и фильтрацию в N, получаем, что $E_1^{p,q,t} = 0$ при $p < 0$ или при $p + q > 0$.

6. $E_1^{0,q,t} = \mathrm{Ext}_A^{-q,t}(M, N_0)$ (по построению фильтрации).

7. $E_1^{p,-p,t} = \mathrm{Hom}_A^t(M, N_p/N_{p-1})$ (по построению фильтрации и из определения $\mathrm{Ext}_A^{*,*}$).

8. Если фильтрация N_p удовлетворяет стандартным условиям (например, исчерпывание любой градуировки за конечное число шагов фильтрации), то спектральная последовательность сходится к $\mathrm{Ext}_A^{s,t}(M, N)$.

9. (важный частный случай предыдущего пункта) Для связной градуированной алгебры Хопфа A и $N = A_*$ группы $\mathrm{Ext}_A^{s,t}(R, A_*)$ нулевые при $(s,t) \neq (0,0)$. Следовательно предельные группы в этой Bss тривиальны: $E_\infty^{0,0,0} = R$ и $E_\infty^{j,q,t} = 0$ при $(j,q,t) \neq (0,0,0)$. Значит, нулевой столбец $E_1^{0,q,t} = \mathrm{Ext}_A^{-q,t}(R, N_0)$ исчерпывается образами дифференциалов Bss.

   Сходимость Bss к тривиальным группам $\mathrm{Ext}_A^{*,*}(R, A_*)$ можно рассматривать как задаваемые дифференциалами Bss сложные рекуррентные соотношения между группами $\mathrm{Ext}_A^{*,*}(R, R)$ и N_j/N_{j-1}. В главе 8 будет продемонстрировано, как именно эта идея используется для получения информации о когомологиях алгебры A.

В работе [106] с помощью фильтрации алгебры $\mathcal{A}_p$ степенями идеала аугментации определялась фильтрация кобар-резольвенты, вычисляющей когомологии $\mathrm{Ext}_{\mathcal{A}_p}^{s,t}(\mathbb{Z}/p, \mathbb{Z}/p)$. Соответствующая спектральная последовательность сходится к $\mathrm{Ext}_{\mathcal{A}_p}^{s,t}(\mathbb{Z}/p, \mathbb{Z}/p)$. Она называется спектральной последовательностью Мэя и является одним из важных инструментов для вычисления когомологий алгебр стабильных операций.

Напротив, спектральная последовательность Бухштабера Bss определяется по фильтрации комплекса, вычисляющего $\mathrm{Ext}_{\mathcal{A}_p}^{s,t}(\mathbb{Z}/p, (\mathcal{A}_p)_*)$, и поэтому член $E_\infty^{*,*,*}$ тривиален. В то же время, первый член Bss явно выражается через $\mathrm{Ext}_{\mathcal{A}_p}^{*,*}(\mathbb{Z}/p, \mathbb{Z}/p)$ и последовательные факторы фильтрации, в частности нулевой столбец в члене E_1 состоит только из групп $\mathrm{Ext}_{\mathcal{A}_p}^{*,*}(\mathbb{Z}/p, \mathbb{Z}/p)$. По построению образы дифференциалов Bss должны исчерпать эти группы. В этом состоит одно из важных отличий Bss от большинства других спектральных последовательностей, традиционно используемых в гомологической алгебре.

Здесь уместно ввести следующую терминологию. Подмодуль $N_0 \subset N$ будем называть *тривиальным*, если N_1 (а следовательно, все N_p, $p > 1$) совпадает с N_0, и будем называть $N_0 \subset N$ *полным*, если фильтрация N_p исчерпывает N.

В рассматриваемом случае градуированных алгебр Хопфа модуль $N_0 = R \subset A_* = N$ всегда является полным, это легко проверить, используя градуировку. В контексте алгебр Ли, см. раздел 7.1, фильтрация Бухштабера строится на двойственной к универсальной обвертывающей алгебре рассматриваемой алгебры Ли. В этом случае Bss тоже можно построить, но, вообще говоря, она оказывается не триградуированной, а биградуированной, поскольку универсальная обертывающая алгебра является неградуированной алгеброй Хопфа. В этом случае полнота модуля $N_0 = R$ равносильна остаточной нильпотентности алгебры Ли. Модуль $N_0 = \mathbb{R}$ является тривиальным в нашей терминологии, например, для универсальной обвертывающей алгебры Ли $\mathfrak{so}(3)$.

5.1.2 Градуированные алгебры Хопфа

Предположим теперь, что A — биалгебра, и пусть A_* — двойственная ей алгебра. Отметим, что в интересных примерах A является алгеброй Хопфа, поэтому мы регулярно будем говорить об алгебрах Хопфа, хотя в конструкциях этого раздела антиподальное отображение не используется (напомним, что алгебра Хопфа — это биалгебра, снабженная антиподальным отображением, например, см. [202]). Пусть $N_0 \subset A_*$ — некоторый A-инвариантный подмодуль, содержащий $1 \in A_*$. В приложениях часто $N_0 = R \subset A_*$. Легко проверить, что из ограничений на градуировки следует, что N_0 — полный подмодуль. Рассмотрим фильтрацию Бухштабера $N_0 \subset N_1 \subset \ldots \subset A_*$. Из определения действия A на A_* следует, что индуктивное определение (5.1) подмодулей N_p можно переформулировать:

$$N_{p+1} = \{x \in A_* \,:\, x_i^{(1)} \in N_p \text{ для всех } i, \text{ где } \Delta x = x \otimes 1 + \sum x_i^{(1)} \otimes x_i^{(2)}\}. \tag{5.2}$$

Напомним, см. [207], что (приведенная) двухсторонняя бар-конструкция определяется как комплекс A-бимодулей $(B_\bullet(A,A,A), d_B)$, где $B_s(A,A,A) = A \otimes (\overline{A})^{\otimes s} \otimes A$, где $\overline{A} = A/R$ — идеал аугментации. Дифференциал d_B задан формулой

$$d_B(a_0 \otimes a_1 \otimes \ldots \otimes a_{n+1}) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{\varepsilon_k} a_0 \otimes \ldots \otimes a_k a_{k+1} \otimes \ldots \otimes a_{n+1},$$

где $(-1)^{\varepsilon_k}$ — некоторый знак, который мы уточним позже. Комплекс $(B_\bullet(A,A,A), d_B)$ является свободной резольвентой A-бимодуля A. Далее, $B_\bullet(A,A,M) = B_\bullet(A,A,A) \otimes_A M$ является свободной A-резольвентой A-модуля M, и в частности, $B_\bullet(A,A,R) = B_\bullet(A,A,A) \otimes_\varepsilon R$ — резольвента основного кольца R, на котором структура A-модуля задана аугментацией $\varepsilon : A \to R$.

Пусть A_* — двойственная алгебра Хопфа с диагональю Δ. Определим $\bar{\Delta}$ и $\hat{\Delta}$ следующим образом: $\hat{\Delta}(x) = \Delta(x) - x \otimes 1$ и $\bar{\Delta}(x) = \Delta(x) - x \otimes 1 - 1 \otimes x$.

Тогда непосредственная проверка позволяет установить, что $\mathrm{Hom}_A^*(B_\bullet(A,A,R), A_*)$ — это односторонняя кобар-конструкция для A_*, а именно, комплекс модулей $F^s(A_*, A_*, R) = A_* \otimes (\overline{A}_*)^{\otimes s}$ с дифференциалом

$$\begin{aligned} &d_F : F^s(A_*,A_*,R) \to F^{s+1}(A_*,A_*,R) \\ &d_F(x_0 \otimes x_1 \otimes \ldots \otimes x_s) = 1 \otimes x_0 \otimes x_1 \otimes \ldots \otimes x_s + (-1)^{|x_{0,j}^{(1)}|} x_{0,j}^{(1)} \otimes x_{0,j}^{(2)} \otimes x_1 \otimes \ldots \otimes x_s + \\ &\qquad + \sum_{k=1}^{s} \sum_j (-1)^{\varepsilon_k} x_0 \otimes \ldots \otimes x_{k,j}^{(1)} \otimes x_{k,j}^{(2)} \otimes \ldots \otimes x_s, \end{aligned} \tag{5.3}$$

где $\Delta x_k = x_k \otimes 1 + 1 \otimes x_k + \sum_j x_{k,j}^{(1)} \otimes x_{k,j}^{(2)}$ и $\varepsilon_k = |x_0| + \ldots + |x_{k-1}| + |x_{k,j}^{(1)}| - k$. Уточним, что если $x_0 = 1$, то в формуле (5.3) первые два слагаемых отбрасываются.

Комплекс $F^\bullet(R, A_*, R)$, вычисляющий $\mathrm{Ext}_A^{*,*}(R, R)$, вкладывается в $F^\bullet(A_*, A_*, R)$ как подкомплекс, при этом элементу $x_1 \otimes \ldots \otimes x_s \in F^s(R, A_*, R)$ соответствует $1 \otimes x_1 \otimes \ldots \otimes x_s \in F^s(A_*, A_*, R)$.

Также нетрудно проверить, что комплекс

$$\mathrm{Hom}_A^*(B_\bullet(A, A, R), N_p) \subset \mathrm{Hom}_A^*(B_\bullet(A, A, R), A_*)$$

изоморфен подкомплексу $F^\bullet(N_p, A_*, R) \subset F^\bullet(A_*, A_*, R)$. Тем самым, фильтрацию и соответствующую триградуированную спектральную последовательность Бухштабера можно строить также и с помощью кобар-резольвенты.

Лемма 5.1. *Предположим, что основное кольцо R является полем $\Bbbk$. Тогда для триградуированной спектральной последовательности, ассоциированной с фильтрацией $N_0 \subset N_1 \subset \ldots \subset A_*$, первый лист изоморфен когомологиям комплекса $\bigoplus\limits_p N_p/N_{p-1} \otimes F(\Bbbk, A_*, \Bbbk)$ относительно дифференциала d_F в $F(\Bbbk, A_*, \Bbbk)$.*

Доказательство. В самом деле, первый лист триградуированной спектральной последовательности — это когомологии факторкомплекса $F(N_p, A_*, \Bbbk)/F(N_{p-1}, A_*, \Bbbk)$. Остается заметить, что по определению фильтрации Бухштабера первое слагаемое в формуле (5.3) для d_F на факторкомплексе равно 0. □

Пусть A — биалгебра над произвольным кольцом R и $N_0 \subset A_*$ — некоторый A-инвариантный подмодуль, $1 \in N_0$. Рассмотрим фильтрацию Бухштабера N_p в A_*, начинающуюся с выбранного N_0.

Лемма 5.2. *Предположим, что N_0 является подкольцом в A_*. Тогда фильтрация N_p мультипликативна, т. е. если $x \in N_i$ и $y \in N_j$, то $xy \in N_{i+j}$.*

Доказательство. Проведем индукцию по $p + q$. База индукции $N_0 \cdot N_0 \subset$ верна по условию леммы. Предположим, что $y \in N_p$ и $x \in N_q$. Пусть $\Delta x = x \otimes 1 + \sum x_i^{(1)} \otimes x_i^{(2)}$, $\Delta y = y \otimes 1 + \sum y_j^{(1)} \otimes y_j^{(2)}$. Тогда

$$\Delta(xy) = xy \otimes 1 + \sum xy_j^{(1)} \otimes y_j^{(2)} + \sum \pm x_i^{(1)} y \otimes x_i^{(2)} + \sum \pm x_i^{(1)} y_j^{(1)} \otimes x_i^{(2)} y_j^{(2)}.$$

Остается заметить, что у всех слагаемых, кроме первого, первый сомножитель в тензорном произведении по предположению индукции имеет фильтрацию не выше $p + q - 1$. □

Теперь предположим, что R — некоторое поле, обозначаемое $\Bbbk$. Обозначим через I идеал аугментации алгебры A. Рассмотрим в A фильтрацию степенями идеала I. А именно, положим $F^0 = F^0A = A$, $F^1 = F^1A = I$, $F^p = F^pA = I^p$. Легко видеть,

что $F^0/F^1 = \Bbbk$. Модуль F^1/F^2 называется модулем неразложимых элементов алгебры A. Фильтрация степенями идеала аугментации в алгебрах Хопфа была введена в [110]. Спектральные последовательности, определенные фильтрацией, двойственной к фильтрации степенями идеала аугментации, рассматривалась в литературе (например, см. §5 в [66]) с целями, отличающимися от приложений Bss.

Лемма 5.3. *Рассмотрим фильтрацию Бухштабера в A_*, которая начинается с модуля $N_0 = \Bbbk \subset A_*$.*

Фильтрация $N_p(A_*)$ двойственна фильтрации $F^p(A)$ в следующем смысле: $N_p(A_*)$ состоит в точности из тех линейных функционалов на A, которые принимают нулевое значение на всех элементах $I^{p+1} = F^{p+1}(A)$.

В частности,

$$N_p(A_*)/N_{p-1}(A_*) = (F^pA/F^{p+1}A)^*$$
$$\dim N_p(A_*)/N_{p-1}(A_*) = \dim F^pA/F^{p+1}A.$$

Доказательство. $N_0(A_*) = \Bbbk$ и это в точности такие функционалы на A, которые принимают нулевое значение на I. Далее применим индукцию, а именно, $\phi \in N_{p+1}(A_*)$ тогда и только тогда, когда для всех $u \in I$ функционал $u \cdot \phi$ принадлежит $N_p(A_*)$. Это в точности означает, что $x \mapsto \phi(xu)$ обращается в 0 для любого $x \in I^{p+1}$, иными словами, $\phi(I^{p+2}) = 0$. □

5.1.3 Фильтрация в группах когомологий $\mathrm{Ext}_A^{*,*}(R,R)$

Пусть A — алгебра Хопфа над кольцом R. В нулевом столбце $E_1^{0,-q,*}$ расположены группы $\mathrm{Ext}_A^{q,*}(R,R)$, при этом по соображениям размерности все дифференциалы на группах $E_r^{0,-q,*}$ тривиальные. Но поскольку $E_\infty^{0,-q,*} = 0$, $q \geqslant 1$, то нулевой столбец триградуированной спектральной последовательности должен исчерпываться образами дифференциалов d_r, $r \geqslant 1$ в следующем смысле: на $\mathrm{Ext}_A^{q,*}(R,R) = E_1^{0,-q,*}$ имеется возрастающая фильтрация $\Phi^r = \Phi^r\mathrm{Ext}_A^{q,*}(R,R)$, такая что

(i) $\Phi^0 = R = E_\infty^{0,0,0}$;

(ii) $\Phi^r/\Phi^{r-1} \subset \mathrm{Ext}_A^{q,*}(R,R)/\Phi^{r-1}$ совпадает с образом дифференциала $d_r : E_r^{r,*-r+1,*} \to E_r^{0,*,*}$;

(iii) $\mathrm{Ext}_A^{q,*}(R,R)/\Phi^{r-1} = E_r^{0,-q,*}$.

Пусть R — поле $\Bbbk$, тогда формула для дифференциала d_1 из теоремы 5.2, примененная к

$$N_1/N_0 \otimes \mathrm{Ext}_A^{q-1,*}(\Bbbk,\Bbbk) \xrightarrow{d_1} \mathrm{Ext}_A^{q,*}(\Bbbk,\Bbbk),$$

показывает, что $\Phi^2\mathrm{Ext}_A^{q,*}(\Bbbk,\Bbbk)$ в точности состоит из элементов, представимых в виде $\sum a_ib_i$, где $a_i \in \mathrm{Ext}_A^{1,*}(\Bbbk,\Bbbk)$, $b_i \in \mathrm{Ext}_A^{q-1,*}(\Bbbk,\Bbbk)$.

Фильтрация Φ^r функториальна в следующем смысле.

Теорема 5.1. *Пусть $f : A \to A'$ — гомоморфизм биалгебр, $f^* : A'_* \to A_*$ — двойственный гомоморфизм. Пусть также $N_0 \subset A_*$ — A-инвариантный подмодуль, $N'_0 \subset A'_*$ — A'-инвариантный подмодуль, причем $f^*(N'_0) \subset N_0$. Тогда гомоморфизм f^* согласован с фильтрациями Бухштабера в A_* и A'_*, начинающимися с N_0 и N'_0 соответственно, а именно $f^*(N'_p) \subset N_p$.*

Следовательно, определен гомоморфизм соответствующих триградуированных спектральных последовательностей, в частности, $f^*(\Phi^r \mathrm{Ext}_{A'}^{q,*}(R,R)) \subset \Phi^r \mathrm{Ext}_A^{q,*}(R,R)$.

Доказательство. Включение $f^*(N'_p) \subset N_p$ легко доказывается индукцией по p. В самом деле, пусть $x \in N'_p$, это в точности означает, что в равенстве $\hat{\Delta}(x) = \sum\limits_i x_i^{(1)} \otimes x_i^{(2)}$ все элементы $x_i^{(1)} \in N'_{p-1}$. Тогда $\hat{\Delta} f^*(x) = f^*(\hat{\Delta} x) = \sum\limits_i f^*(x_i^{(1)}) \otimes f^*(x_i^{(2)})$ и для элементов в этой сумме по предположению индукции выполняется $f^*(x_i^{(1)}) \in N_{p-1}$ для всех i, а значит, $f^*(x) \in N_p$. □

5.1.4 Дифференциал d_1

Ненадолго откажемся от предположения, что R — поле. Напомним, дифференциал $d_1 : E_1^{p,q,*} \to E_1^{p-1,q,*}$ является связывающим гомоморфизмом длинной точной последовательности тройки комплексов

$$F(N_{p-2}, A_*, R) \subset F(N_{p-1}, A_*, R) \subset F(N_p, A_*, R).$$

Для $q = -1$ нетривиальным может быть только $d_1 : E_1^{1,-1,*} \to E_1^{0,-1,*}$ и он легко описывается.

Лемма 5.4. *$d_1 : E_1^{1,-1,*} \to E_1^{0,-1,*}$ совпадает со стандартным изоморфизмом $\delta : P(A_*) \to \mathrm{Ext}_A^{1,*}(R,R)$.*

Доказательство. В самом деле, $E_1^{1,-1,*} = N_1/N_0$ и по определению фильтрации этот модуль естественно отождествляется с модулем примитивных элементов

$$P(A_*) = \{x \in A_* \,:\, \Delta x = 1 \otimes x + x \otimes 1\}.$$

Далее, $E_1^{0,-1,*} = \mathrm{Ext}_A^{1,*}(R,R)$, а этот модуль изоморфен модулю $P(A_*)$. Легко проверить, что на уровне представляющих коциклов d_1 отображает $x \in N_1/N_0$ в $1 \otimes x \in F(R, A_*, R)$, так что d_1 является изоморфизмом. □

Следствие 5.1 (см. [190; 228])**.** *$d_1 : N_2/N_1 = E_1^{2,-2,*} \to E_1^{1,-2,*}$ является вложением.*

Доказательство. Единственными нетривиальными дифференциалами $d_r : E_r^{2,-2,*} \to E_r^{2-r,-3+r,*}$ по соображениям размерности могут быть только d_1 и d_2. Из леммы 5.4 следует, что $d_2 : E_2^{2,-2,*} \to E_2^{0,-1,*}$ принимает значения в нулевой группе, поэтому $E_2^{2,-2,*} = E_\infty^{2,-2,*} = 0$, а значит, $d_1 : N_2/N_1 = E_1^{2,-2,*} \to E_1^{1,-2,*}$ является вложением. □

Далее будем предполагать, что R — поле $\Bbbk$. Тогда по лемме 5.1 имеет место изоморфизм

$$E_1^{p,-(p+s),*} = (N_p/N_{p-1}) \otimes \operatorname{Ext}_A^{s,*}(\Bbbk, \Bbbk), \tag{5.4}$$

а значит дифференциал d_1 можно рассматривать как отображение

$$d_1 : (N_p/N_{p-1}) \otimes \operatorname{Ext}_A^{s,*}(\Bbbk, \Bbbk) \to (N_{p-1}/N_{p-2}) \otimes \operatorname{Ext}_A^{s+1,*}(\Bbbk, \Bbbk). \tag{5.5}$$

Из определения фильтрации Бухштабера следует, что $\operatorname{im} \hat{\Delta} \subset N_{p-1} \otimes A_*$, где $\hat{\Delta} = \Delta - \mathrm{id} \otimes 1 : N_p \to A_* \otimes A_*$. Поэтому $\hat{\Delta}$ индуцирует отображение

$$\begin{aligned} &D : N_p/N_{p-1} \to N_{p-1}/N_{p-2} \otimes A_*, \\ &\quad (x \mod N_{p-1}) \mapsto \sum_j (-1)^{|x_j^{(1)}|} (x_j^{(1)} \mod N_{p-2}) \otimes x_j^{(2)}. \end{aligned} \tag{5.6}$$

Теорема 5.2.

(*a*) *Образ* $D : N_p/N_{p-1} \to N_{p-1}/N_{p-2} \otimes A_*$ *содержится в* $N_{p-1}/N_{p-2} \otimes P(A_*)$.

(*b*) *Дифференциал*

$$d_1 : (N_p/N_{p-1}) \otimes \operatorname{Ext}_A^{s,*}(\Bbbk, \Bbbk) \to (N_{p-1}/N_{p-2}) \otimes \operatorname{Ext}_A^{s+1,*}(\Bbbk, \Bbbk).$$

раскладывается в композицию

$$\begin{aligned} &(N_p/N_{p-1}) \otimes \operatorname{Ext}_A^{s,*}(\Bbbk, \Bbbk) \xrightarrow{D \otimes 1} (N_{p-1}/N_{p-2}) \otimes P(A_*) \otimes \operatorname{Ext}_A^{s,*}(\Bbbk, \Bbbk) \xrightarrow{1 \otimes \delta \otimes 1} \\ &\quad \xrightarrow{1 \otimes \delta \otimes 1} (N_{p-1}/N_{p-2}) \otimes \operatorname{Ext}_A^{1,*}(\Bbbk, \Bbbk) \otimes \operatorname{Ext}_A^{s,*}(\Bbbk, \Bbbk) \xrightarrow{1 \otimes m} (N_{p-1}/N_{p-2}) \otimes \operatorname{Ext}_A^{s+1,*}(\Bbbk, \Bbbk), \end{aligned}$$

где m — *умножение в* $\operatorname{Ext}_A^{*,*}(\Bbbk, \Bbbk)$, *которое определяется конкатенацией в стандартной* B*-резольвенте* $B(\Bbbk, A_*, \Bbbk)$, *[207].*

(*c*) *Дифференциал*

$$d_1 : (N_p/N_{p-1}) \to (N_{p-1}/N_{p-2}) \otimes \operatorname{Ext}_A^{1,*}(\Bbbk, \Bbbk).$$

является вложением.

Доказательство. Рассмотрим произвольный элемент $a \otimes b \in (N_p/N_{p-1}) \otimes \operatorname{Ext}_A^{s,*}(\Bbbk, \Bbbk)$ и его представителя $x \otimes y \in N_p \otimes \bar{A}_*^{\otimes s} \subset N_p \otimes F(\Bbbk, A_*, \Bbbk)$. Отметим,

что y является циклом кобар-конструкции $F(\Bbbk, A_*, \Bbbk)$. Тогда элемент $d_1(a \otimes b)$ в $(N_{p-1}/N_{p-2}) \otimes \operatorname{Ext}_A^{s+1,*}(\Bbbk, \Bbbk)$ представлен коцепью $1 \otimes x \otimes y + (-1)^{|x_j^{(1)}|} x_j^{(1)} \otimes x_j^{(2)} \otimes y \in F^{s+1}(N_{p-1}, A_*, \Bbbk)$.

Теперь нам нужно в последнем выражении отбросить элементы, которые заведомо имеют фильтрацию меньше, чем $p-1$. Для этого построим в $\bar{A}_*$ аддитивный базис (для простоты можно считать, что его элементы однородны) по индукции: сначала выберем базис в N_1 затем дополним его до базиса N_2 и т. д.

Тогда $\hat{\Delta}x$ можно записать в виде $\sum\limits_i e_i \otimes z_i$, где e_i попарно различны и принадлежат множеству элементов выбранного базиса, $z_i \in \bar{A}_*$. По построению фильтрации в этом разложении все $e_i \in N_{p-1}$. Выделим среди них элементы $e_{i_k} \notin N_{p-2}$. Тогда

$$D(x \bmod N_{p-1}) = \sum_k e_{i_k} \otimes z_{i_k} \in (N_{p-1}/N_{p-2}) \otimes \bar{A}_*.$$

Теперь легко видеть, что $d_1(a \otimes b)$ представлен коцепью

$$\sum_k e_{i_k} \otimes z_{i_k} \otimes y \in N_{p-1} \otimes \bar{A}_*^{\otimes s+1} \subset F(N_{p-1}, \bar{A}_*, \Bbbk) \mod F(N_{p-2}, \bar{A}_*, \Bbbk).$$

В соответствующем факторкомплексе эта коцепь должна быть коциклом, откуда получаем равенство

$$\sum_k e_{i_k} \otimes \hat{\Delta}(z_{i_k}) \otimes y = 0 \bmod F(N_{p-2}, \bar{A}_*, \Bbbk).$$

Из линейной независимости элементов e_{i_k} после проектирования в фактор N_{p-1}/N_{p-2} получаем, что все $\hat{\Delta} z_{i_k} = 0$, т. е. все элементы z_{i_k} примитивны в A_*. Отсюда немедленно получаем утверждения (a) и (b).

Для доказательства пункта (c) рассмотрим $a \in N_p/N_{p-1}$, представленный элементом $x \in N_p$. Тогда $d_1(a)$ представлен классом элемента $\sum\limits_k e_{i_k} \otimes z_{i_k} \in N_{p-1}/N_{p-1} \otimes P(A_*)$. Проекции e_{i_k}-ых в N_{p-1}/N_{p-2} линейно независимы, поэтому из равенства нулю этой суммы следует, что все z_{i_k} нулевые. Тем самым, в сумме $\hat{\Delta}(x) = \sum e_i \otimes z_i$ все e_i принадлежат N_{p-2}, а значит, $x \in N_{p-1}$, следовательно, $a = 0$. □

5.1.5 *Bss*-операции на когомологиях алгебр Хопфа

Напомним, что если $V = \bigoplus\limits_{j \in \mathbb{Z}} V^j$ — градуированное векторное пространство, то его надстройкой sV называется градуированное векторное пространство $\bigoplus\limits_{j \in \mathbb{Z}} (sV)^j$, где $(sV)^j = V^{j-1}$. Обозначим через $H = H^*$ градуированное векторное пространство $\operatorname{Ext}_A^{1,*}(\Bbbk, \Bbbk)$.

Тензорная алгебра $T(V) = \bigoplus\limits_{k\geqslant 0} V^{\otimes k}$ градуированного векторного пространства V снабжается так называемым шафл–произведением ш, относительно которого $T(sH)$ является ассоциативной и градуированно коммутативной алгеброй. Напомним,

$$(x_1 \otimes \ldots \otimes x_p) \,\text{ш}\, (x_{p+1} \otimes \ldots \otimes x_{p+q}) = \sum_{\sigma \in S_{p,q}} (-1)^{\varepsilon} x_{\sigma(1)} \otimes x_{\sigma(2)} \otimes \ldots \otimes x_{\sigma(p+q)},$$

где $S_{p,q}$ — множество (p,q)-перетасовок, т. е. таких перестановок $\sigma \in S_{p+q}$, для которых $\sigma(1) < \ldots < \sigma(p)$ и $\sigma(p+1) < \ldots < \sigma(p+q)$, а $\varepsilon = \sum\limits_{(i-j)(\sigma(i)-\sigma(j))<0} |x_i| \cdot |x_j|$. Шафл-произведение допускает индуктивное описание:

(1) $x \,\text{ш}\, 1 = 1 \,\text{ш}\, x = x$ для любого $x \in V$;

(2) $(A \otimes x) \,\text{ш}\, (B \otimes y) = (-1)^{|x|\cdot(|B|+|y|)} \big(A \,\text{ш}\, (B \otimes y)\big) \otimes x + \big((A \otimes x) \,\text{ш}\, B\big) \otimes y$ для любых $A, B \in T(V)$ и $x, y \in V$.

Далее, пусть $\mathrm{gr}(A_*) = \bigoplus\limits_p N_p/N_{p-1}$ — градуированная алгебра, присоединенная к фильтрации $\{N_p\}$ в A_*,

С помощью изоморфизма $\delta : P(A_*) \to \mathrm{Ext}_A^{1,*}(R,R)$ гомоморфизм $D : N_p/N_{p-1} \to N_{p-1}/N_{p-2} \otimes P(A_*)$ можно понимать как сохраняющий градуировку гомоморфизм $N_p/N_{p-1} \to N_{p-1}/N_{p-2} \otimes sH$. Определим гомоморфизм

$$\begin{aligned} \widetilde{D} &: N_p/N_{p-1} \to N_{p-1}/N_{p-2} \otimes sH, \\ &(x \mod N_{p-1}) \mapsto \sum_j (x_j^{(1)} \mod N_{p-2}) \otimes x_j^{(2)}, \end{aligned} \tag{5.7}$$

который отличается от него знаком в некоторых градуировках, см. также формулу (5.6).

Теорема 5.3. (*i*) *Итерированный гомоморфизм* $\widetilde{D}$, *т. е.*

$$\begin{aligned} &\widetilde{D}_p = (\widetilde{D} \otimes 1 \otimes \ldots \otimes 1) \circ \ldots \circ (\widetilde{D} \otimes 1) \circ \widetilde{D}, \\ &\widetilde{D}_p : N_p/N_{p-1} \to N_{p-1}/N_{p-2} \otimes sH \to N_{p-2}/N_{p-3} \otimes (sH)^{\otimes 2} \to \ldots \to (sH)^{\otimes p} \end{aligned}$$

является вложением.

(*ii*) *Сумма всех* p*-кратных итераций* $\widetilde{D}$ *определяет инъективный гомоморфизм алгебр*

$$\widehat{D} = \bigoplus \widetilde{D}_p : \mathrm{gr}(A_*) \to (T(V), \,\text{ш}\,)$$

$$\widehat{D} = \bigoplus \widetilde{D}_p : \bigoplus_p N_p/N_{p-1} \to \bigoplus_p (sH)^{\otimes p}$$

алгебр, где $\bigoplus \widetilde{D}_p : \bigoplus\limits_p N_p/N_{p-1}$ *понимается как* $\mathrm{gr}(A_*)$, *а* $\bigoplus\limits_p (sH)^{\otimes p}$ — *как* $T(V)$ *с* ш*-умножением.*

Доказательство. Для (i) достаточно почти дословно повторить доказательство пункта (c) теоремы 5.2.

Пункт (ii) докажем, используя индуктивное описание ш-произведения. Если $x, y \in N_1$ и $x, y \notin N_0$, то $\widehat{D}(x) = x$, $\widehat{D}(y) = y$, $\widehat{D}(1) = 1$ и прямой проверкой легко убедиться в том, что $\hat{D}(x) \,\text{ш}\, 1 = 1 \,\text{ш}\, \hat{D}(x) = \hat{D}(x)$ и $\widehat{D}(xy) = x \otimes y + (-1)^{|x|\cdot|y|} y \otimes x = \widehat{D}(x) \,\text{ш}\, \widehat{D}(y)$.

Далее, пусть $x \in N_p/N_{p-1}$, $y \in N_q/N_{q-1}$. Проведем индукцию по $p+q$. Для $p+q \leqslant 1$ утверждение, как мы только что убедились, верно.

Пусть $\widetilde{D}(x) = \sum\limits_i x_i^{(1)} \otimes x_i^{(2)}$, $\widetilde{D}(y) = \sum\limits_j y_j^{(1))} \otimes y_j^{(2)}$, где $x_i^{(1)} \in N_{p-1}/N_{p-2}$, $y_j^{(1)} \in N_{q-1}/N_{q-2}$ и $x_i^{(2)}, y_j^{(2)} \in P(A_*) = sH$. Заметим, что из определения $\widehat{D}$ следует, что $\widehat{D}(x) = \sum\limits_i \widehat{D}(x_i^{(1)}) \otimes x_i^{(2)}$, $\widehat{D}(y) = \sum\limits_j \widehat{D}(y_j^{(1)}) \otimes y_j^{(2)}$.

Тогда

$$\widehat{D}(xy) = \widetilde{D}_{p+q}(xy) = \sum_j \widetilde{D}_{p+q-1}(xy_j^{(1)}) \otimes y_j^{(2)} + \sum_i (-1)^{|x_i^{(2)}|\cdot|y|} D_{p+q-1}(x_i^{(1)} y) \otimes x_i^{(2)} =$$
$$= \sum_j \widehat{D}(xy_j^{(1)}) \otimes y_j^{(2)} + \sum_i (-1)^{|x_i^{(2)}|\cdot|y|} \widehat{D}(x_i^{(1)} y) \otimes x_i^{(2)}.$$

По предположению индукции это равно

$$\sum_j (\widehat{D}(x) \,\text{ш}\, \widehat{D}(y_j^{(1)})) \otimes y_j^{(2)} + \sum_i (-1)^{|x_i^{(2)}|\cdot|y|} (\widehat{D}(x_i^{(1)}) \,\text{ш}\, \widehat{D}(y)) \otimes x_i^{(2)},$$

что в свою очередь, равно $\widehat{D}(x) \,\text{ш}\, \widehat{D}(y)$.

□

Дифференциалы Bss задают на $\text{Ext}_A^{*,*}(\Bbbk, \Bbbk)$ некоторые частично определенные многозначные операции Bss_p, к определению которых мы сейчас переходим.

Рассмотрим дифференциал $d_p : E_p^{p,-s-p+1,*} \to E_p^{0,-s,*}$, принимающий значение в нулевом столбце. По определению фильтрации $\Phi^p \text{Ext}_A^{s,*}(\Bbbk, \Bbbk)$ образ d_p совпадает с фактором

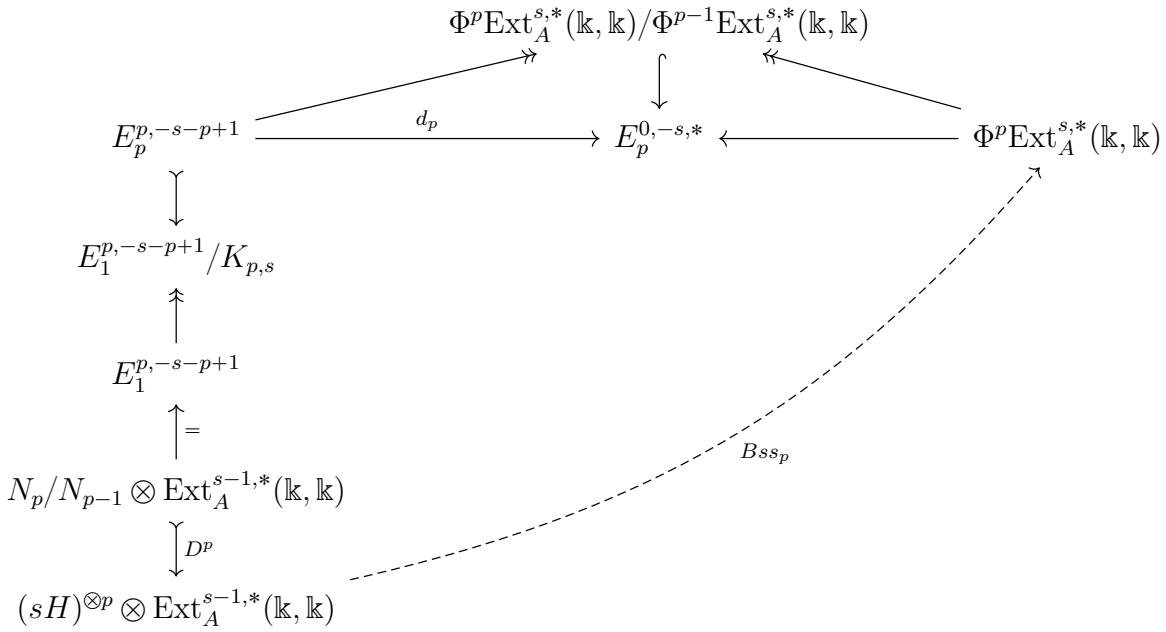
$$\Phi^p \text{Ext}_A^{s,*}(\Bbbk, \Bbbk)/\Phi^{p-1} \text{Ext}_A^{s,*}(\Bbbk, \Bbbk) \subset \text{Ext}_A^{s,*}(\Bbbk, \Bbbk)/\Phi^{p-1} \text{Ext}_A^{s,*}(\Bbbk, \Bbbk) \subset E_p^{0,-s,*}.$$

Таким образом, d_p можно понимать как многозначное отображение в $\text{Ext}_A^{s,*}(\Bbbk, \Bbbk)$, причем многозначность состоит в прибавлении элементов из подгруппы $\Phi^{p-1} \text{Ext}_A^{s,*}(\Bbbk, \Bbbk)$.

Область определения дифференциала d_p — группа (точнее, группы) $E_p^{p,-s-p+1,*}$, вложенная в фактор $E_1^{p,-s-p+1}/K_{p,s}$, где подгруппа $K_{p,s}$ определяется образами дифференциалов $d_1, \ldots, d_{p-1}$ в группах $E_r^{p,-s-p+1,*}$.

Тогда операция Bss_p определяется из коммутативной диаграммы, в которой

неподписанные стрелки являются очевидными вложениями или эпиморфизмами:



Из нее видно, что операция Bss_p определена на подгруппе в $(sH)^{\otimes p} \otimes \mathrm{Ext}_A^{s-1,*}(\Bbbk,\Bbbk)$, а ее значения — подмножества в $\Phi^p\mathrm{Ext}_A^{s,*}(\Bbbk,\Bbbk)$, которые являются смежными классами по подгруппе $\Phi^{p-1}\mathrm{Ext}_A^{s,*}(\Bbbk,\Bbbk)$. Если из контекста ясно, о каком p идет речь, то операции Bss_p будем называть Bss-операциями. Например, операция Bss_1 определена на всем $sH \otimes \mathrm{Ext}_A^{s,*}(\Bbbk,\Bbbk)$ и однозначна. Легко проверить, что с точностью до знака она совпадает с умножением или, что то же самое, с двуместной операцией Масси, см. раздел А.2.

5.1.6 Реализация классов $\mathrm{Ext}_A^{s,*}(\Bbbk,\Bbbk)$ образами Bss-операций на $T(s\mathrm{Ext}_A^{1,*}(\Bbbk,\Bbbk))$

Будем говорить, что элемент $x \in \mathrm{Ext}_A^{s,*}(\Bbbk,\Bbbk)$ реализуется нетривиальной операций Bss_p, если для некоторого $y \in (sH)^{\otimes p} \otimes \mathrm{Ext}_A^{s-1,*}(\Bbbk,\Bbbk)$ выполнено $x \in Bss_p(y)$ и $0 \notin Bss_p(y)$. Будем говорить, что класс x реализуется единственной Bss-операцией, если из если $x \in Bss_p(y_1)$ и $x \in Bss_p(y_2)$ следует, что $Bss_p(y_1) = Bss_p(y_2)$.

Теорема 5.4. *Любой класс когомологий $x \in \mathrm{Ext}_A^{s,*}(\Bbbk,\Bbbk)$ реализуется единственной, причем нетривиальной, Bss-операцией.*

Доказательство. Напомним, что образы дифференциалов спектральной последовательности Бухштабера задают возрастающую исчерпывающую фильтрацию $\Phi^p\mathrm{Ext}_A^{*,*}(\Bbbk,\Bbbk)$ в когомологиях алгебры A. Пусть $x \in \Phi^p\mathrm{Ext}_A^{*,*}(\Bbbk,\Bbbk)$, но $x \notin \Phi^{p-1}\mathrm{Ext}_A^{*,*}(\Bbbk,\Bbbk)$. Тогда по построению операции Bss_p найдется такой $y \in (sH)^{\otimes p} \otimes \mathrm{Ext}_A^{s-1,*}(\Bbbk,\Bbbk)$, что $x \in Bss_p(y)$, а поскольку $x \notin \Phi^{p-1}\mathrm{Ext}_A^{*,*}(\Bbbk,\Bbbk)$, то x, а точнее классы,

которые он задает в группах $E_r^{0,-s,*}$, не лежат в образах дифференциалов $d_1, \dots, d_{p-1}$, а значит, $0 \notin Bss(y)$.

Единственность реализации следует из того, что два смежных класса по одной подгруппе либо не пересекаются, либо совпадают. □

Иными словами, образами Bss-операций каждая группа $\mathrm{Ext}_A^{*,*}(\Bbbk, \Bbbk)$ разбивается на попарно непересекающиеся и не содержащие 0 смежные классы по подгруппам $\Phi^p \mathrm{Ext}_A^{*,*}(\Bbbk, \Bbbk)$.

Следствие 5.2. *Любой класс $x \in \mathrm{Ext}_A^{s,*}(\Bbbk, \Bbbk)$ реализуется итерированными Bss-операциями от классов из $\mathrm{Ext}_A^{1,*}(\Bbbk, \Bbbk)$.*

5.2 Реализация дифференциалов специальными произведениями Масси

5.2.1 Специальные матричные произведения Масси

Рассмотрим алгебру Хопфа A над кольцом R. На двойственной алгебре Хопфа A_* зададим фильтрацию Бухштабера $\{N^k \subset A_* \,:\, k \geqslant 0\}$, начинающуюся с $N^0 = R$, см. определение 5.1 и формулу (5.2). Далее говоря о спектральной последовательности Bss, мы имеем в виду $E_r^{*,*,*}$, задаваемую этой фильтрацией.

Напомним, что при $r \geqslant 1$ все дифференциалы $d_r : E_r^{0,*,*} \to E_r^{-r,*+r-1,*}$ тривиальны, поэтому образы дифференциалов $d_r : E_r^{r,*-r+1,*} \to E_r^{0,*,*}$ задают фильтрацию Φ^r в группах $E_1^{0,-s,t} = \mathrm{Ext}_A^{s,t}(R, R)$, см. раздел 5.1.3. Напомним ее простейшие свойства:

(i) $\Phi^0 = R = E_\infty^{0,0,0}$;

(ii) $\Phi^r/\Phi^{r-1} \subset \mathrm{Ext}_A^{q,*}(R, R)/\Phi^{r-1}$ совпадает с образом дифференциала $d_r : E_r^{r,*-r+1,*} \to E_r^{0,*,*}$;

(iii) $\mathrm{Ext}_A^{q,*}(R, R)/\Phi^{r-1} = E_r^{0,-q,*}$.

Следующее утверждение решает задачу реализации Bss-операций нетривиальными матричными произведениями Масси. А именно, пусть для алгебры Хопфа A над полем $\Bbbk$ класс когомологий $x \in \mathrm{Ext}_A^{s,*}(\Bbbk, \Bbbk)$ имеет точную фильтрацию k. По теореме 5.4 класс x реализуется нетривиальной Bss_k-операцией. Мы покажем, что этот же класс x реализуется нетривиальным произведением Масси.

Теорема 5.5. *Рассмотрим алгебру Хопфа A над полем $\Bbbk$. Пусть $x \in \Phi^k \mathrm{Ext}_A^{s,*}(\Bbbk, \Bbbk)$ и $x \notin \Phi^{k-1} \mathrm{Ext}_A^{s,*}(\Bbbk, \Bbbk)$.*

Тогда x является представителем нетривиального матричного $(k+1)$-местного произведения Масси вида $\langle a_1, a_2, \dots, a_k, a_{k+1} \rangle$, где матрицы $a_1, a_2, \dots, a_k$ состоят из элементов группы $\mathrm{Ext}_A^{1,*}(\Bbbk, \Bbbk)$, а матрица a_{k+1} — из элементов группы $\mathrm{Ext}_A^{s-1,*}(\Bbbk, \Bbbk)$.

Важное свойство фильтрации $\{\Phi^r \mathrm{Ext}_A^{*,*}(\Bbbk,\Bbbk) \ : \ r \geqslant 0\}$ состоит в том, что она исчерпывает каждую группу $\mathrm{Ext}_A^{s,t}(\Bbbk,\Bbbk)$, иными словами любой элемент группы $\mathrm{Ext}_A^{s,t}(\Bbbk,\Bbbk)$ удовлетворяет условиям теоремы 5.5. В самом деле, $E_\infty^{*,*,*}$ нулевой, исключая $E_\infty^{0,0,0} = \Bbbk$, а значит, образы дифференциалов d_r, $r \geqslant 1$, исчерпывают группы $E_1^{0,-s,t} = \mathrm{Ext}_A^{s,t}(\Bbbk,\Bbbk)$.

Введем понятия *специальнього матричного произведения Масси* и *специальнього итерированного матричного произведения Масси*:

Для $s \geqslant 2$ *специальным* будем называть матричное произведение Масси вида $\langle a_1, a_2, \dots, a_k, y\rangle$, где $a_1, \dots, a_k$ — матрицы, составленные из элементов группы $\mathrm{Ext}_A^{1,*}(\Bbbk,\Bbbk)$, а y — матрица, составленная из элементов группы $\mathrm{Ext}_A^{s-1,*}(\Bbbk,\Bbbk)$. Заметим, что любого $k \geqslant 1$ его представитель принадлежит группе $\mathrm{Ext}_A^{s,*}(\Bbbk,\Bbbk)$.

Для $s = 2$ *специальным итерированным* произведением Масси будем называть специальное произведение Масси, у которого y — матрица, составленная из элементов группы $\mathrm{Ext}_A^{1,*}(\Bbbk,\Bbbk)$.

Для $s > 2$ *специальным итерированным* произведением Масси будем называть специальное произведение Масси, у которого y — матрица, составленная из элементов группы $\mathrm{Ext}_A^{s-1,*}(\Bbbk,\Bbbk)$, которые являются представителями специальных итерированных произведений Масси.

Как видно, для $s = 2$ специальное матричное произведение Масси не содержит итераций.

Специальное итерированное произведение Масси будем называть *нетривиальным*, если все участвующие в нем произведения Масси нетривиальны, т.е. не содержат 0.

Следствие 5.3. *Пусть A — алгебра Хопфа над полем $\Bbbk$. Тогда любой элемент группы когомологий $\mathrm{Ext}_A^{s,*}(\Bbbk,\Bbbk)$ при $s \geqslant 2$ выражается в виде нетривиального специального итерированного матричного произведения Масси от элементов $\mathrm{Ext}_A^{1,*}(\Bbbk,\Bbbk)$.*

5.2.2 Реализация дифференциалов

В этом разделе доказывается теорема 5.5, а также утверждение 5.4, служащее в приложениях полезным дополнением к ней.

Зафиксируем следующие обозначения:

— комплекс $F^\bullet(A_*, A_*, \Bbbk)$, см. раздел 5.1.2, будем обозначать $\widetilde{F}^\bullet(A_*)$; напомним, это стягиваемый комплекс;

— комплекс $F^\bullet(\Bbbk, A_*, \Bbbk)$ будем обозначать $F^\bullet(A_*)$;

— элемент $a_0 \otimes a_1 \otimes \dots a_s \in \widetilde{F}^s(A_*)$ будем обозначать $a_0 \otimes [\![a_1 \otimes \dots \otimes a_s]\!]$;

— элемент $a_1 \otimes \dots a_s \in F^s(A_*)$ будем обозначать $[\![a_1 \otimes \dots \otimes a_s]\!]$;

— $F^\bullet(A_*)$ будем рассматривать как подкомплекс $\widetilde{F}^\bullet(A_*)$; при таком вложении элементу $[\![a_1 \otimes \dots \otimes a_s]\!] \in F^s(A_*)$ соответствует элемент $1 \otimes [\![a_1 \otimes \dots \otimes a_s]\!] \in \widetilde{F}^s(A_*)$

Выберем в A_* специальный базис $\{m_{i_p}(p)\}$, согласованный с фильтрацией $\{N_p\}$. В N_0 базисный элемент в точности один: $m_1(0) = 1 \in N_0$. Выберем в N_1 однородные элементы $m_{i_1}(1)$, где $1 \leqslant i_1 \leqslant \dim N_1/N_0$, так что $\{m_1(0)\} \cup \{m_{i_1}(1)\}$ образуют базис N_1. Предположим, мы выбрали базис $\{m_{i_k}(k) : k < p\}$ в N_{p-1}. Выберем однородные элементы $m_{i_p}(p)$, где $1 \leqslant i_p \leqslant \dim N_p/N_{p-1}$, так что $\{m_{i_k}(k) : k < p\} \cup \{m_{i_p}(p)\}$ образуют базис N_p. По построению элементы $\{m_{i_p}(p)\}$ при проектировании на фактор N_p/N_{p-1} образуют в нем базис. Элементы объединения $\bigcup\limits_{j=1}^{p} \{m_{i_j}(j) \ : \ 1 \leqslant i_j \leqslant \dim N_j/N_{j-1}\}$ образуют базис в N_p/N_0. В случаях, когда используются элементы этого объединения, используется обозначение $\widehat{m}_k(p)$ так, что $\{\widehat{m}_k(p)\} = \bigcup\limits_{j=1}^{p} \{m_{i_j}(j) \ : \ 1 \leqslant i_j \leqslant \dim N_j/N_{j-1}\}$.

Перед тем как рассматривать случай произвольной фильтрации n, разберем случаи $n = 1, 2, 3$.

$p = 1$

По лемме 5.4 все элементы $\mathrm{Ext}_A^{1,*}(\Bbbk, \Bbbk)$ принадлежат фильтрации Φ^1. По теореме 5.2 ненулевой элемент $a \in \mathrm{Ext}_A^{s,*}(\Bbbk, \Bbbk)$ при $s > 1$ лежит в образе дифференциала $d_1 : N_1/N_0 \otimes \mathrm{Ext}_A^{s-1,*}(\Bbbk, \Bbbk) \to \mathrm{Ext}_A^{s,*}(\Bbbk, \Bbbk)$ в точности тогда, когда он представляется в виде двухместного матричного произведения Масси.

$p = 2$

Предположим, что $a \in \Phi^2\mathrm{Ext}_A^{s,*}(\Bbbk, \Bbbk)$. Это означает, что его образ в факторе $\mathrm{Ext}_A^{s,*}(\Bbbk, \Bbbk)/\mathrm{im}\, d_1$ представляется в виде d_2 от какого-то класса $y \in E_2^{2,-s+1,*}$. В комплексе $\widetilde{F}(A_*)$ коцепь y записывается в виде

$$\sum_\alpha m_\alpha(2) \otimes [\![x_\alpha]\!] + \sum_\beta m_\beta(1) \otimes [\![y_\beta]\!] + 1 \otimes [\![z]\!],$$

где $[\![x_\alpha]\!], [\![y_\beta]\!], [\![z]\!] \in F(A_*)$. Итак, с точностью до прибавления элемента вида $d_1(\sum\limits_\beta m_\beta(1) \otimes [\![y'_\beta]\!] + 1 \otimes [\![z']\!])$ класс a имеет представителя вида dy. Кроме того, слагаемые $d(1 \otimes [\![z']\!]) = 1 \otimes d[\![z]\!]$ и $d(1 \otimes [\![z']\!]) = 1 \otimes d[\![z]\!]$ можно отбросить, так как они меняют представителя a на когранцы. Итак, поменяв подходящим образом обозначения, мы видим, что класс $a \in \Phi^2\mathrm{Ext}_A^{s,*}(\Bbbk, \Bbbk)$ имеет представителя вида dy, где

$$y = \sum_\alpha m_\alpha(2) \otimes [\![x_\alpha]\!] + \sum_\beta m_\beta(1) \otimes [\![y_\beta]\!], \tag{5.8}$$

где $[\![x_\alpha]\!], [\![y_\beta]\!] \in F(A_*)$.

По определению фильтрации $\{N_p\}$ действие коумножения на базисных элементах

$m_\alpha(2)$ имееет вид

$$\Delta m_\alpha(2) = m_\alpha(2) \otimes 1 + 1 \otimes m_\alpha(2) + \sum_{\beta,\gamma} \theta_\alpha^{\beta\gamma} m_\beta(1) \otimes m_\gamma(1), \tag{5.9}$$

где $\theta_\alpha^{\beta\gamma} \in \Bbbk$.

Выпишем теперь dy в явном виде:

$$\begin{aligned} dy &= U + V, \\ U &= \sum_\alpha [\![m_\alpha(2) \otimes x_\alpha]\!] + \sum_\beta [\![m_\beta(1) \otimes y_\beta]\!] \\ V &= \sum_{\alpha,\beta,\gamma} (-1)^{|m_\beta(1)|} \theta_\alpha^{\beta\gamma} m_\beta(1) \otimes [\![m_\gamma(1) \otimes x_\alpha]\!] + \sum_\beta (-1)^{|m_\beta(1)|} m_\beta(1) \otimes d[\![y_\beta]\!]. \end{aligned}$$

Поскольку dy принадлежит подкомплексу $F(A_*) \subset \widetilde{F}(A_*)$, то $V = 0$, а поскольку $m_\beta(1)$ линейно независимы, то для каждого β выполняется равенство

$$\sum_{\alpha,\gamma} \theta_\alpha^{\beta\gamma} [\![m_\gamma(1) \otimes x_\alpha]\!] + d[\![y_\beta]\!] = 0. \tag{5.10}$$

Значит, класс $a \in \Phi^2 \mathrm{Ext}_A^{s,*}(\Bbbk, \Bbbk)$ представляется коцепью $U = \sum_\alpha [\![m_2(\alpha) \otimes x_\alpha]\!] + \sum_\beta [\![x_\beta(1) \otimes y_\beta]\!]$.

Утверждение 5.1.

(i) Элемент dy, где $y \in \widetilde{F}(A_*)$ задан формулой (5.8), является представителем трехместного матричного произведения Масси

$$\langle (\overline{[\![m_\beta(1)]\!]}), (-\sum_\gamma \theta_\alpha^{\beta\gamma} \overline{[\![m_\gamma(1)]\!]}), ([\![x_\alpha]\!]) \rangle$$

в когомологиях комплекса $F(A_*)$, т. е. в $\mathrm{Ext}_A^{*,*}(\Bbbk, \Bbbk)$.

(ii) Это произведение Масси нетривиально.

Замечание. Здесь $(\overline{[\![m_\beta(1)]\!]})$ — вектор–строка, $([\![x_\alpha]\!])$ — вектор–столбец и $(-\sum_\gamma \theta_\alpha^{\beta\gamma} \overline{[\![m_\gamma(1)]\!]})$ — матрица.

Доказательство. Утверждение (i) доказывается предъявлением в явном виде матричной определяющей системы из коцепей в $F(A_*)$ для указанного произведения Масси:

$$\begin{array}{lll} X(1,1) = (\overline{[\![m_\beta(1)]\!]}) & X(1,2) = (\overline{[\![m_\alpha(2)]\!]}) & \\ & X(2,2) = (-\sum_\gamma \theta_\alpha^{\beta\gamma} \overline{[\![m_\gamma(1)]\!]}) & X(2,3) = ([\![y_\beta]\!]) \\ & & X(3,3) = ([\![x_\alpha]\!]) \end{array}$$

Одно соотношение, которому должны удовлетворять элементы определяющей систе-

мы, а именно,

$$dX(1,2) = \overline{X(1,1)}\, X(2,2)$$

равносильно формуле (5.9). В самом деле,

$$d\overline{[\![m_\alpha(2)]\!]} = (-1)^{|m_\alpha(2)|+1} d[\![m_\alpha(2)]\!] = (-1)^{|m_\alpha(2)|+1} \sum_{\beta,\gamma} (-1)^{|m_\beta(1)+1|} \theta_\alpha^{\beta\gamma} [\![m_\beta(1) \otimes m_\gamma(1)]\!] =$$

$$= \sum_{\beta,\gamma} (-1)^{|m_\gamma(1)|} \theta_\alpha^{\beta\gamma} [\![m_\beta(1) \otimes m_\gamma(1)]\!] = \sum_\beta \left([\![m_\beta(1)]\!] \otimes (-\sum_\gamma \theta_\alpha^{\beta\gamma} \overline{[\![m_\gamma(1)]\!]}) \right).$$

Другое соотношение $dX(2,3) = \overline{X(2,2)}\, X(3,3)$ очевидным образом равносильно равенствам (5.10).

Построенная определяющая система задает коцепь

$$\overline{X(1,1)}\, X(2,3) + \overline{X(1,2)}\, X(3,3) = \sum_\alpha [\![m_2(\alpha) \otimes x_\alpha]\!] + \sum_\beta [\![x_\beta(1) \otimes y_\beta]\!] = U,$$

которая, как было показано выше, представляет класс a.

Теперь докажем (ii). Идея этого доказательства применима и в общем случае. Предположим, что нашлась определяющая система с теми же $X(1,1)$, $X(2,2)$, $X(3,3)$:

$$\begin{array}{lll} X(1,1) & Y(1,2) & Y(1,3) \\ & X(2,2) & Y(2,3) \\ & & X(3,3) \end{array}$$

в которой имеется коцепь $Y(1,3)$ такая, что $dY(1,3) = \overline{X(1,1)}Y(2,3) + \overline{Y(1,2)}X(3,3)$ в $F(A_*)$.

Элемент $Y(1,2)$ является строкой, составленной из коцепей вида $(\sum_{i,p} \lambda_{i,p} [\![m_i(p)]\!])$. Соотношение $dY(1,2) = \overline{X(1,1)}X(2,2)$ означает, что $\widetilde{D}(\sum_{i,p} \lambda_{i,p} m_i(p)) = \sum \theta_\alpha^{\beta\gamma} m_\beta(1) \otimes m_\gamma(1)$. С другой стороны, по построению определяющей системы $X(i,j)$ выполнено равенство $\widetilde{D}(m_\alpha(2)) = \sum \theta_\alpha^{\beta\gamma} m_\beta(1) \otimes m_\gamma(1)$. По теореме 5.2(c) D является мономорфизмом, откуда получаем $Y(1,2) = X(1,2)$.

Теперь в качестве коцепи, представляющей класс a, вместо U рассмотрим $U - dY(1,3)$. Имеем

$$U - dY(1,3) = \overline{X(1,1)}X(2,3) + \overline{X(1,2)}X(3,3) - (\overline{X(1,1)}Y(2,3) + \overline{Y(1,2)}X(3,3)) =$$

$$= \overline{X(1,1)}(X(2,3) - Y(2,3)).$$

Поскольку $X(1,1)$ — вектор-строка, составленная из базисных коциклов, то вектор-столбец $X(2,3) - Y(2,3)$ составлен из коциклов. Отсюда следует, что класс, представленный коциклом $U - dY(1,3)$, является элементом фильтрации 1, в противоречии с предположением, что $a \in \Phi^2$, $a \notin \Phi^1$. $\square$

$p = 3$

Предположим, что $a \in \Phi^2\mathrm{Ext}_A^{s,*}(\Bbbk, \Bbbk)$. Как и в предыдущем пункте, можно показать, что у этого класса есть представитель в $F(A_*)$ вида dy, где $y \in \widetilde{F}(A_*)$

$$y = \sum_\alpha m_\alpha(3) \otimes [\![x_\alpha]\!] + \sum_\beta m_\beta(2) \otimes [\![y_\beta]\!] + \sum_\gamma m_\gamma(1) \otimes [\![z_\gamma]\!], \tag{5.11}$$

где $[\![x_\alpha]\!], [\![y_\beta]\!], [\![z_\gamma]\!] \in F(A_*)$, причем все x_α — коциклы.

По определению фильтрации $\{N_p\}$

$$\begin{aligned}
&\Delta m_\beta(2) = 1 \otimes m_\beta(2) + m_\beta(2) \otimes 1 + \sum_{\gamma,\gamma'} \theta_\beta^{\gamma\gamma'} m_\gamma(1) \otimes m_{\gamma'}(1), \\
&\Delta m_\alpha(3) = 1 \otimes m_\alpha(3) + m_\alpha(3) \otimes 1 + \sum_{\beta,\beta'} \theta_\alpha^{\beta\beta'} m_\beta(2) \otimes m_{\beta'}(1) + \sum_{\gamma,\gamma''} \theta_\alpha^{\gamma,\gamma''} m_\gamma(1) \otimes \widehat{m}_{\gamma''}(2).
\end{aligned} \tag{5.12}$$

Тогда

$$\begin{aligned}
dy &= U + V + W, \\
U &= \sum_\alpha [\![m_\alpha(3) \otimes x_\alpha]\!] + \sum_\beta [\![m_\beta(2) \otimes y_\beta]\!] + \sum_\gamma [\![m_\gamma(1) \otimes z_\gamma]\!]; \\
V &= \sum_{\alpha,\beta,\beta'} (-1)^{|m_\beta(2)|} \theta_\alpha^{\beta\beta'} m_\beta(2) \otimes [\![m_{\beta'}(1) \otimes x_\alpha]\!] + \sum_\beta (-1)^{|m_\beta(2)|} m_\beta(2) \otimes d[\![y_\beta]\!]; \\
W &= \sum_{\alpha,\gamma,\gamma''} (-1)^{|m_\gamma(1)|} \theta_\alpha^{\gamma,\gamma''} m_\gamma(1) \otimes [\![\widehat{m}_{\gamma''}(2) \otimes x_\alpha]\!] + \\
&\quad + \sum_{\beta,\gamma,\gamma'} (-1)^{|m_\gamma(1)|} \theta_\beta^{\gamma\gamma'} m_\gamma(1) \otimes [\![m_{\gamma'}(1) \otimes y_\beta]\!] + \sum_\gamma (-1)^{|m_\gamma(1)|} m_\gamma(1) \otimes d[\![z_\gamma]\!].
\end{aligned}$$

Поскольку dy принадлежит подкомплексу $F(A_*) \subset \widetilde{F}(A_*)$, то $V = 0$ и $W = 0$, а раз элементы вида $m_\beta(2)$ и $m_\gamma(1)$ линейно независимы, то для каждого β и для каждого γ выполняются равенства

$$\begin{aligned}
&\sum_{\alpha,\beta'} \theta_\alpha^{\beta\beta'} [\![m_{\beta'}(1) \otimes x_\alpha]\!] + d[\![y_\beta]\!] = 0; \\
&\sum_{\alpha,\gamma''} \theta_\alpha^{\gamma,\gamma''} [\![\widehat{m}_{\gamma''}(2) \otimes x_\alpha]\!] + \sum_{\beta,\gamma'} \theta_\beta^{\gamma\gamma'} [\![m_{\gamma'}(1) \otimes y_\beta]\!] + d[\![z_\gamma]\!] = 0.
\end{aligned} \tag{5.13}$$

Значит, класс $a \in \Phi^2\mathrm{Ext}_A^{s,*}(\Bbbk, \Bbbk)$ представляется коцепью

$$U = \sum_\alpha [\![m_\alpha(3) \otimes x_\alpha]\!] + \sum_\beta [\![m_\beta(2) \otimes y_\beta]\!] + \sum_\gamma [\![m_\gamma(1) \otimes z_\gamma]\!].$$

Утверждение 5.2.

(*i*) *Элемент* dy, *где* $y \in \widetilde{F}(A_*)$ *задан формулой (5.11), является представителем четырехместного матричного произведения Масси*

$$\langle(\overline{[\![m_\gamma(1)]\!]}), (-\sum_{\gamma'} \theta_\beta^{\gamma\gamma'} \overline{[\![m_{\gamma'}(1)]\!]}), (-\sum_{\beta'} \theta_\alpha^{\beta\beta'} \overline{[\![m_{\beta'}(1)]\!]}), ([\![x_\alpha]\!])\rangle$$

(*ii*) *Это произведение Масси нетривиально.*

Доказательство. Утверждение (*i*) доказывается предъявлением в явном виде матричной определяющей системы из коцепей в $F(A_*)$ для указанного произведения Масси:

$$\begin{array}{llll} X(1,1) = (\overline{[\![m_\gamma(1)]\!]}) & X(1,2) = (\overline{[\![m_\beta(2)]\!]}) & X(1,3) = (\overline{[\![m_\alpha(3)]\!]}) & \\ & X(2,2) = (-\sum_\gamma \theta_\beta^{\gamma\gamma'} \overline{[\![m_{\gamma'}(1)]\!]}) & X(2,3) = (-\sum_{\gamma''} \theta_\alpha^{\gamma,\gamma''} \overline{[\![\widehat{m}_{\gamma''}(2)]\!]}) & X(2,4) = ([\![z_\gamma]\!]) \\ & & X(3,3) = (-\sum_{\beta'} \theta_\alpha^{\beta\beta'} \overline{[\![m_{\beta'}(1)]\!]}) & X(3,4) = ([\![y_\beta]\!]) \\ & & & X(4,4) = ([\![x_\alpha]\!]) \end{array}$$

Два соотношения, которому должны удовлетворять элементы определяющей системы, а именно,

$$dX(1,2) = \overline{X(1,1)}\, X(2,2) \text{ и } dX(1,3) = \overline{X(1,1)}\, X(2,3) + \overline{X(1,2)}\, X(3,3)$$

следуют из формул (5.12).

Два оставшихся соотношения $dX(2,4) = \overline{X(2,2)}\, X(3,4) + \overline{X(2,3)}\, X(4,4)$ и $dX(3,4) = \overline{X(3,3)}\, X(4,4)$ очевидным образом равносильны равенствам (5.13).

Наибольшую трудность представляет соотношение $dX(2,3) = \overline{X(2,2)}\, X(3,3)$ (соотношение такого типа не возникало для элементов фильтраций 1 и 2). Мы выведем его из формулы (5.12) и коассоциативности Δ. В выражении для

$$dX(2,3) = (-\sum_{\gamma''} \theta_\alpha^{\gamma,\gamma''} d\overline{[\![\widehat{m}_{\gamma''}(2)]\!]})$$

при вычислении $d[\![\widehat{m}_{\gamma''}(2)]\!]$ можно отбросить слагаемые $[\![m_{\gamma''}(1)]\!]$ фильтрации 1, поскольку они все лежат в ядре d, и оставить только элементы $[\![m_{\gamma''}(2)]\!]$ фильтрации 2. Итак,

$$dX(2,3) = (-\sum_{\gamma''} \theta_\alpha^{\gamma,\gamma''} d\overline{[\![m_{\gamma''}(2)]\!]}) = (\sum_{\gamma'',\gamma',\beta'} (-1)^{|m_{\beta'}(1)|+1} \theta_\alpha^{\gamma\gamma''} \theta_{\gamma''}^{\gamma'\beta'} [\![m_{\gamma'}(1) \otimes m_{\beta'}(1)]\!]).$$

С другой стороны,

$$\overline{X(2,2)}\, X(3,3) = (\sum_{\gamma',\beta,\beta'} \theta_\beta^{\gamma\gamma'} \theta_\alpha^{\beta\beta'} (-1)^{|m_{\beta'}(1)|+1} [\![m_{\gamma'}(1) \otimes m_{\beta'}(1)]\!])$$

Нам остается проверить, что

$$\sum_{\gamma''} \theta_{\alpha}^{\gamma\gamma''}\theta_{\gamma''}^{\gamma'\beta'} = \sum_{\beta} \theta_{\beta}^{\gamma\gamma'}\theta_{\alpha}^{\beta\beta'}. \tag{5.14}$$

Воспользуемся коассоциативностью Δ и вычислим коэффициент при $m_\gamma(1)\otimes m_{\gamma'}(1)\otimes m_{\beta'(1)}$ в

$$(\Delta\otimes 1)\circ\Delta m_\alpha(3) = (1\otimes\Delta)\circ\Delta m_\alpha(3). \tag{5.15}$$

Напомним,

$$\Delta m_\alpha(3) = 1\otimes m_\alpha(3) + m_\alpha(3)\otimes 1 + \sum_{\beta,\beta'}\theta_\alpha^{\beta\beta'} m_\beta(2)\otimes m_{\beta'}(1) + \sum_{\gamma,\gamma''}\theta_\alpha^{\gamma,\gamma''} m_\gamma(1)\otimes \widehat{m}_{\gamma''}(2). \tag{5.16}$$

Легко видеть, что вклад в нужный коэффициент в выражении для $(\Delta\otimes 1)\circ\Delta m_\alpha(3)$ дает только предпоследнее слагаемое в правой части формулы (5.16):

$$\begin{aligned}(\Delta\otimes 1)\circ\Delta m_\alpha(3) = \ldots + \sum_{\beta,\beta'}\theta_\alpha^{\beta\beta'}\Delta(m_\beta(2))\otimes m_{\beta'}(1) = \\ = \ldots + \sum_{\beta,\beta',\gamma,\gamma'}\theta_\alpha^{\beta\beta'}\theta_\beta^{\gamma\gamma'} m_\gamma(1)\otimes m_{\gamma'}(1)\otimes m_{\beta'}(1).\end{aligned} \tag{5.17}$$

Здесь многоточие обозначает несущественные для нас элементы. С другой стороны, вклад в нужный коэффициент в выражении для $(1\otimes\Delta)\circ\Delta m_\alpha(3)$ дает только последнее слагаемое формулы (5.16):

$$\begin{aligned}(1\otimes\Delta)\circ\Delta m_\alpha(3) = \ldots + \sum_{\gamma,\gamma''}\theta_\alpha^{\gamma,\gamma''} m_\gamma(1)\otimes\Delta\widehat{m}_{\gamma''}(2) = \\ = \ldots + \sum_{\gamma,\gamma''}\theta_\alpha^{\gamma,\gamma''} m_\gamma(1)\otimes\Delta m_{\gamma''}(2) = \ldots + \sum_{\beta',\gamma,\gamma',\gamma''}\theta_\alpha^{\gamma,\gamma''}\theta_{\gamma''}^{\gamma'\beta'} m_\gamma(1)\otimes m_{\gamma'}(1)\otimes m_{\beta'}(1).\end{aligned} \tag{5.18}$$

Приравнивая в (5.17) и в (5.18) коэффициенты при $m_\gamma(1)\otimes m_{\gamma'}(1)\otimes m_{\beta'}(1)$, получаем нужное нам равенство (5.14).

Часть (ii) доказывается так же, как и для элементов фильтрации Φ^2, поэтому в этом случае доказательство мы не приводим. □

$p > 3$

Доказательство в случае общего k аналогично случаям $k = 2$ и $k = 3$. Все идеи и тонкости общего случая были показаны для $k = 2, 3$.

Итак, пусть $a \in \Phi^k \mathrm{Ext}_A^{*,*}(\Bbbk, \Bbbk)$. Тогда в комплексе $\widetilde{F}(A_*)$ найдется элемент

$$y = \sum_{j=1}^{k} \sum_{\alpha_j} m_{\alpha_j}(j) \otimes [\![x_{\alpha_j}(j)]\!] \tag{5.19}$$

такой, что dy является представителем класса a в комплексе $F(A_*)$. Здесь $m_{\alpha_j}(j)$ — элементы базиса A_*, построенного выше, индекс α_j пробегает некоторое подмножество индексов из $\{1, \ldots, \dim N_j/N_{j-1}\}$, а $x_{\alpha_j}(j)$ — некоторые коцепи из $F(A_*)$. Поскольку dy принадлежит подкомплексу $F(A_*) \subset \widetilde{F}(A_*)$, все элементы $x_{\alpha_k}(k)$ являются коциклами в $F(A_*)$.

Разложение $\Delta m_{\alpha_j}(j)$ по выбранному базису имеет вид

$$\Delta m_{\alpha_j}(j) = 1 \otimes m_{\alpha_j}(j) + m_{\alpha_j}(j) \otimes 1 + \sum_{t=1}^{j-1} \sum_{\alpha_t, \alpha_{j,t}} \theta_{\alpha_j}^{\alpha_t \alpha_{j,t}} m_{\alpha_t}(t) \otimes \widehat{m}_{\alpha_{j,t}}(j-t). \tag{5.20}$$

Отметим, что группа слагаемых для $t = j-1$ имеет вид

$$\sum_{\alpha_{j-1}, \alpha_{j,j-1}} \theta_{\alpha_j}^{\alpha_{j-1}, \alpha_{j,j-1}} m_{\alpha_t}(j-1) \otimes m_{\alpha_{j,t}}(1),$$

здесь второй сомножитель тензорного произведения имеет точную фильтрацию 1, поэтому вместо $\widehat{m}_{\alpha_{j,t}}(1)$ можно писать $m_{\alpha_{j,t}}(1)$.

Теперь определим матрицы $X(i,j)$, состоящие из коцепей комплекса $F(A_*)$, здесь $1 \leqslant i \leqslant j \leqslant k+1$, $(i,j) \neq (1, k+1)$.

Положим

$$X(1,j) = (\overline{[\![m_{\alpha_j}(j)]\!]}) \quad \text{(вектор-строка)}, \tag{5.21}$$

$$X(i+1, k+1) = ([\![x_{\alpha_i}(i)]\!]) \quad \text{(вектор-столбец)}, \tag{5.22}$$

$$X(t+1,j) = (-\sum_{\alpha_{j,t}} \theta_{\alpha_j}^{\alpha_t \alpha_{j,t}} \overline{[\![\widehat{m}_{\alpha_{j,t}}(j-t)]\!]}) \text{ для } 1 < t+1 \leqslant j < k+1 \quad \text{(матрица)}. \tag{5.23}$$

Легко проверить, что диагональные элементы вид

$$X(j,j) = (\sum_{\alpha_{j,j-1}} -\theta_{\alpha_j}^{\alpha_{j-1}, \alpha_{j,j-1}} \overline{[\![m_{\alpha_{j,t}}(1)]\!]})$$

и состоят из коциклов, поскольку для любого α выполнено $d[\![m_\alpha(1)]\!] = 0$.

Утверждение 5.3.

(*i*) *Построенные матрицы* $X(i,j)$, $1 \leqslant i \leqslant j \leqslant k+1$, $(i,j) \neq (1, k+1)$ *образуют матричную определяющую систему.*

(*ii*) *Матричное произведение Масси*

$$\langle X(1,1), X(2,2), \ldots, X(k+1,k+1)\rangle$$

содержит класс $a \in \mathrm{Ext}_A^{*,*}(\Bbbk,\Bbbk)$.

(*iii*) *Матричное произведение Масси*

$$\langle X(1,1), X(2,2), \ldots, X(k+1,k+1)\rangle$$

нетривиально, т. е. не содержит нулевой класс когомологий.

Доказательство. Проверим (i). Для этого рассмотрим три случая.

Случай 1. Соотношение $dX(1,j) = \sum\limits_{t=1}^{j-1} \overline{X(1,t)}\, X(t+1,j)$ немедленно следует из равенства (5.20) с учетом формул (5.21) и (5.23), которые определяют $X(1,t)$ и $X(t+1,j)$ для $1 < t+1 \leqslant j \leqslant k$.

Случай 2. Соотношение $dX(i,k+1) = \sum\limits_{t=i}^{k} \overline{X(i,t)}\, X(t+1,k+1)$ выполняется по другим причинам. Рассмотрим y, заданный формулой (5.19). Тогда dy можно представить в виде суммы $U + U_1 + U_2 + \ldots + U_{k-1}$, где

$$U = \sum_{j,\alpha_j} [\![m_{\alpha_j}(j) \otimes x_{\alpha_j}(j)]\!]; \tag{5.24}$$

$$\begin{aligned} U_{k-1} = \sum_{\alpha_{k-1}} (-1)^{|m_{\alpha_{k-1}}(k-1)|} m_{\alpha_{k-1}}(k-1) \otimes \Bigg(& d[\![x_{\alpha_{k-1}}(k-1)]\!] + \\ & + \sum_{\alpha_k, \alpha_{k,k-1}} \theta_{\alpha_k}^{\alpha_{k-1}, \alpha_{k,k-1}} [\![m_{\alpha_{k,k-1}}(1) \otimes x_{\alpha_k}(k)]\!] \Bigg); \end{aligned} \tag{5.25}$$

$$\begin{aligned} U_{k-2} = \sum_{\alpha_{k-2}} (-1)^{|m_{\alpha_{k-2}}(k-2)|} m_{\alpha_{k-2}}(k-2) \otimes \Bigg(& d[\![x_{\alpha_{k-2}}(k-2)]\!] + \\ & + \sum_{\alpha_{k-1}, \alpha_{k-1,k-2}} \theta_{\alpha_{k-1}}^{\alpha_{k-2}, \alpha_{k-1,k-2}} [\![m_{\alpha_{k-1,k-2}}(1) \otimes x_{\alpha_{k-1}}(k-1)]\!] + \\ & + \sum_{\alpha_k, \alpha_{k,k-2}} \theta_{\alpha_k}^{\alpha_{k-2}, \alpha_{k,k-2}} [\![\widehat{m}_{\alpha_{k,k-2}}(2) \otimes x_{\alpha_k}(k)]\!] \Bigg); \end{aligned} \tag{5.26}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$U_1 = \sum_{\alpha_1} (-1)^{|m_{\alpha_1}(1)|} m_{\alpha_1}(1) \otimes \Bigg(d[\![x_{\alpha_1}(1)]\!] + \sum_{t=2}^{k} \sum_{\alpha_t, \alpha_{t,1}} \theta_{\alpha_t}^{\alpha_1, \alpha_{t,1}} [\![\widehat{m}_{\alpha_{t,1}}(t-1) \otimes x_{\alpha_t}(1)]\!] \Bigg). \tag{5.27}$$

В общем виде

$$U_s = \sum_{\alpha_s} (-1)^{|m_{\alpha_s}(s)|} m_{\alpha_s}(s) \otimes \Bigg(d[\![x_{\alpha_s}(s)]\!] + \sum_{t=s+1}^{k} \sum_{\alpha_t, \alpha_{t,s}} \theta_{\alpha_t}^{\alpha_s, \alpha_{t,s}} [\![\widehat{m}_{\alpha_{t,s}}(t-s) \otimes x_{\alpha_t}(s)]\!] \Bigg). \tag{5.28}$$

Поскольку dy принадлежит подкомплексу $F(A_*) \subset \widetilde{F}(A_*)$, все элементы $U_1, \dots, U_{k-1}$ нулевые. Тогда из линейной независимости элементов вида $m_{\alpha_s}(s)$ получаем, что для всех s, α_s выполнены соотношения

$$d[\![x_{\alpha_s}(s)]\!] + \sum_{t=s+1}^{k} \sum_{\alpha_t, \alpha_{t,s}} \theta_{\alpha_t}^{\alpha_s, \alpha_{t,s}} [\![\widehat{m}_{\alpha_{t,s}}(t-s) \otimes x_{\alpha_t}(s)]\!] = 0,$$

из которых и следуют равенства

$$dX(s+1, k+1) = \sum_{t=s+1}^{k} \overline{X(s+1,t)} X(t+1, k+1).$$

Случай 3: соотношения для $dX(i,j)$ при $i > 1$ и $j < k+1$ выводятся из формулы (5.23) и ассоциативности коумножения; соответствующее рассуждение буквально повторяет доказательство соотношения для $dX(2,3)$ из утверждения 5.2.

Для доказательства (ii) вспомним, что выше мы доказали равенство $dy = U$, где коцепь $U \in F(A_*)$ задана формулой (5.24). С другой стороны, легко видеть, что коцикл $\sum\limits_{t=1}^{k} \overline{X(1,t)}\, X(t+1, k+1)$, представляющая рассматриваемое произвение Масси, в точности совпадает с U.

Наконец, докажем (iii). Предположим от противного, что существует определяющая система $Y(i,j)$, для которой $Y(i,i) = X(i,i)$ для всех $i = 1, \dots, k+1$, такая, что коцикл $\sum\limits_{t=1}^{k} \overline{Y(1,t)}\, Y(t+1, k+1)$ является кограницей некоторого элемента, который мы обозначим $Y(1, k+1)$.

Докажем по индукции, что для всех t элемент $Y(1,t)$ отличается от $X(1,t)$ на слагаемые вида $\delta(1,t) = (\sum\limits_{i,p<t} c_{\mu,i,p} m_i(p))$, т.е. на слагаемые фильтрации строго меньше t. Для $Y(1,1) = X(1,1)$ это утверждение, очевидно, верно.

По индукции рассмотрим вектор-строку $Y(1, t+1)$ — она составлена из элементов вида $\sum\limits_{i,p<t} c_{\mu,i,p} m_i(p)$, где μ — номер элемента в строке и априори нет ограничений на p. Из определяющего соотношения и предположения индукции

$$d(Y(1,t+1)) = \sum_{s=1}^{t} \overline{Y(1,s)} Y(s+1, t+1) = \sum_{s=1}^{t} \overline{X(1,s) + \delta(1,s)} Y(s+1, t+1).$$

В разложении правой части по естественному базису $F(A_*)$, который составлен из тензорных произведений элементов $m_i(j)$, слагаемые, которые начинаются с $m_{\alpha_p}(p)$ для $p > t$ отсутствуют, а слагаемые, начинающиеся с $m_{\alpha_t}(t)$, происходят из $X(1,t)X(t+1, t+1)$, а значит, в точности имеют вид

$$\sum_{\alpha_t, \alpha_{t+1,t}} \theta_{\alpha_{t+1}}^{\alpha_t, \alpha_{t+1,t}} m_{\alpha_t}(t) \otimes m_{\alpha_{t+1,t}} = \widetilde{D}(m_{\alpha_{t+1}}(t+1)).$$

Поскольку $\tilde{D}$ является вложением, то элементов фильтрации большей, чем $t+1$ в $Y(1,t+1)$ нет, а элементы фильтрации t входят с теми же коэффициентами, что и в $X(1,t+1)$.

Итак, $dY(1,k+1) = \overline{X(1,k)}\,X(k+1,k+1)+T$, где через T обозначены элементы фильтрации, меньшей k. Отсюда получаем, что класс когомологий a имеет представителя $U - dY(1,k+1)$ фильтрации меньше, чем k, что противоречит предположению, что класс a имеет точную фильтрацию k. □

Завершим этот раздел утверждением, которая в дальнейшем окажется полезным дополнением к теореме 5.5.

Утверждение 5.4. *Пусть элемент $x \in \Phi^k$ представлен специальным матричным произведением Масси $\langle a_1, \dots, a_k, y\rangle$, $a_i \in \mathrm{Ext}_A^{1,*}(R,R)$, $1 \leqslant i \leqslant k$, и $y \in \mathrm{Ext}_A^{s,*}(R,R)$, и $\{X(i,j)\}$ — соответствующая определяющая система. Тогда*

(a) коцепь $X(i,j)$ при $i \leqslant j \leqslant k$ имеет вид $[\theta_{ij}] \in F^1(R, A_*, R)$, причем $\theta_{ij} \in N_j \backslash N_{j-1}$;

(b) $x \mod \Phi^{k-1} = d_k(\theta_{1k} \otimes y)$.

Доказательство. Элементы a_i, $1, \leqslant i \leqslant k$, принадлежат $\mathrm{Ext}_A^{1,*}(R,R)$, а значит, представляющие их коцепи $X(i,i)$ имеют вид $[\theta_{ii}] \in F^1(R, A_*, R)$, причем $\theta_{ii} \in N_1 \backslash N_0$.

Далее индукцией по j для $i \leqslant j \leqslant k$ легко показать, что коцепь $X(i,j)$ имеет вид $[\theta_{ij}] \in F^1(R, A_*, R)$ (по определению дифференциала d_F), а элемент $\theta_{ij} \in A_*$ принадлежит N_j, но не принадлежит N_{j-1} (по определению фильтарции N_j).

Тогда $\theta_{1k} \otimes y \in N_k/N_{k-1} \otimes \mathrm{Ext}_A^{s,*}(R,R) = E_1^{k,-k-s,*}$. Из существования определяющей системы следует, что $\theta_{1k} \otimes y$ является циклом всех дифференциалов d_r, $1 \leqslant r \leqslant k-1$ и что $d_k(\theta_{1k} \otimes y) = x$. □

Замечание 5.1. *Если в условиях предыдущего утверждения класс x относится к фильтрации $\Phi^{\tilde{k}}$, где $\tilde{k} < k$, то элемент $\theta_{1k} \otimes y$ определен и является циклом всех дифференциалов d_r, $1 \leqslant r \leqslant k-1$, однако для какого-то $r \leqslant k-1$ класс $[\theta_{1k} \otimes y] \in E_r^{k,-s-k,*}$ является кограницей. В этом случае формула $x \mod \Phi^{k-1} = d_k(\theta_{1k} \otimes y)$ остается верной, но в обеих частях равенства стоят нули.*

Глава 6

Вычисление фильтраций двойственных алгебр Хопфа

6.1 Фильтрация Бухштабера в $S_* \otimes \mathbb{Q} = \Omega_U^* \otimes \mathbb{Q}$

Напомним необходимые для нас факты, касающиеся теории U-кобордизмов. Кольцо коэффициентов $\Omega_U^* = U^*(pt)$ является кольцом многочленов $\Omega_U^* = \mathbb{Z}[y_1, y_2, \ldots]$ от образующих y_i, $|y_i| = -2i$ для всех целых $i \geqslant 1$. Алгебра стабильных когомологических операций в теории U-кобордизмов является пополненным тензорным произведением кольца коэффициентов Ω_U^* и алгебры Ландвебера—Новикова S, см. [92; 215]. Аддитивный базис в алгебре S образуют операции S_ω, проиндексированные разбиениями $\omega = (i_1, \ldots, i_k)$ целых положительных чисел n в суммы положительных целых чисел $\sum i_k = n$, $|S_\omega| = 2n$. Удобно считать, что единица алгебры S соответствует «пустому» разбиению. Уточним, что разбиения, отличающиеся лишь порядком слагаемых, считаются одинаковыми. Коумножение в алгебре S определено формулой $\Delta S_\omega = \sum\limits_{\omega_1 \sqcup \omega_2 = \omega} S_{\omega_1} \otimes S_{\omega_2}$.

Тот факт, что S является алгеброй (т. е. S замкнута относительно произведения), доказан в [92; 215]. Отметим также, что формулы для произведения в S еще недостаточно для описания умножения в алгебре стабильных операции в теории U-кобордизмов. В самом деле, из-за нетривиальности действия S на кольце коэффициентов Ω_U^* теории U-кобордизмов, представление композиции двух элементов из $\Omega_U^* \hat{\otimes} S$ в виде элемента этого тензорного произведения, требует знания перестановочных соотношений для элементов Ω_U^* и S. Соответствующие формулы были получены в [215].

Далее мы вычислим фильтрацию Бухштабера в алгебре S_*, используя важный изоморфизм $S_* \otimes \mathbb{Q} = \Omega_U^* \otimes \mathbb{Q}$, полученный в [190; 193].

В работе [190] было показано, что имеет место вложение S-модулей $\phi : \Omega_U^* \to S_*$; оно определяется формулой

$$\phi_x(s) = \mu(s(x)),$$

где $\mu : \Omega_U^* \to \mathbb{Z}$ — аугментация, $s \in S$, $x \in \Omega_U^*$. Кроме того, легко проверить, что ϕ согласовано с кольцевыми структурами и является гомоморфизмом S-модулей. Наконец, из [190, лемма 2.1] и [193, лемма 2.2] следует, что $\phi \otimes \mathbb{Q}$ — изоморфизм. Таким образом, для построения триградуированной спектральной последовательности можно вместо $S \otimes \mathbb{Q}$-модуля $S_* \otimes \mathbb{Q}$ рассматривать $\Omega_U^* \otimes \mathbb{Q}$.

Мы опишем фильтрацию Бухштабера, начинающуюся с $N_0 = \mathbb{Q} \subset \Omega_U^* \otimes \mathbb{Q}$. Для этого нам нужны удобные полиномиальные образующие в $\Omega_U^* \otimes \mathbb{Q}$ и описание действия S на них в терминах этих образующих.

Напомним, в работе [190] был определен характер Черна—Дольда в U-кобордизмах — естественное преобразование теорий когомологий

$$\mathrm{ch}_U : U^*(X) \to H^*(X, \Omega_U^* \otimes \mathbb{Q}).$$

Для $X = pt$ характер Черна—Дольда является естественным вложением $\Omega_U^* \to \Omega_U^* \otimes \mathbb{Q}$. Пусть $u \in U^2(\mathbb{C}P^\infty)$ — первый класс Черна в U-кобордизмах универсального линейного расслоения. Тогда элемент $\mathrm{ch}_U(u) \in H^*(\mathbb{C}P^\infty, \Omega_U^* \otimes \mathbb{Q})$ может быть записан в виде ряда

$$\mathrm{ch}_U(u) = \beta(z) = z + \sum_{n=1}^{\infty} t_n \frac{z^{n+1}}{(n+1)!},$$

где $z \in H^2(\mathbb{C}P^\infty, \mathbb{Z})$ — стандартный класс Черна в когомологиях того же универсального линейного расслоения. Классы $t_n \in \Omega_U^{-2n}$ полностью охарактеризованы в работе [190]. Существование для этих классов представителей, являющихся гладкими неприводимыми алгебраическими многообразиями, долгое время представляло открытый вопрос. Недавно в работе [42] на него был получен положительный ответ, а именно было показано, что в качестве представителей классов t_n можно взять неособые тэта-дивизоры Θ^n, $n = 1, 2, \ldots$, общих главно поляризованных абелевых многообразий. Тогда $\Omega_U^* \otimes \mathbb{Q} = \mathbb{Q}[t_1, t_2, \ldots]$.

Введем формальный ряд

$$Q_v(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n v_n \frac{z^n}{(n+1)!},$$

у которого коэффициенты выбраны так, чтобы выполнялось соотношение

$$Q_v(z)\beta(z) = z,$$

которое более подробно можно записать в виде

$$\left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n v_n \frac{z^n}{(n+1)!}\right)\left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} t_n \frac{z^n}{(n+1)!}\right) = 1. \tag{6.1}$$

Легко видеть, что элементы $v_1, v_2, \ldots$ образуют семейство полиномиальных образующих кольца $\Omega_U^* \otimes \mathbb{Q}$:

$$\Omega_U^* \otimes \mathbb{Q} = \mathbb{Q}[t_1, t_2, \ldots] = \mathbb{Q}[v_1, v_2, \ldots].$$

Базис в $\Omega_U^* \otimes \mathbb{Q}$, состоящий из мономов от образующих v_i будем называть базисом v-мономов.

В небольших размерностях образующие t_n и v_n связаны друг с другом формулами

$$\begin{aligned}
t_1 &= v_1, \\
t_2 &= -v_2 + \frac{3}{2}v_1^2, \\
t_3 &= v_3 - 4v_2v_1 + 3v_1^3, \\
t_4 &= -v_4 + 5v_3v_1 + \frac{10}{3}v_2^2 - 15v_2v_1^2 + \frac{15}{2}v_1^4, \\
t_5 &= v_5 - 6v_4v_1 - 10v_3v_2 + \frac{45}{2}v_3v_1^2 + 30v_2^2v_1 - 60v_2v_1^3 + \frac{45}{2}v_1^5.
\end{aligned}$$

В общем случае верно следующее утверждение, которое легко доказывается по индукции.

Лемма 6.1. *Для любого n элемент t_n является полиномом с рациональными коэффициентами от образующих v_i, $i = 1, \ldots, n$, при этом коэффициенты при v_n и v_1^n отличны от 0. Более точно, коэффициент при v_n равен $(-1)^{n+1}$, а коэффициент при v_1^n равен $\frac{(n+1)!}{2^n}$.*

Действие алгебры Ландвебера—Новикова на образующих t_n и v_n описывается следующим утверждением.

Утверждение 6.1 ([42; 193])**.**

(*a*) *$S_\omega t_n = 0$, если $\omega \neq (k)$;*

(*b*) *$S_{(k)}t_n$ равняется коэффициенту при z^{n+1} в разложении $(n+1)!\beta(z)^{k+1}$ в ряд по степеням z; в частности,*

$$\begin{aligned}
S_{(n)}t_n &= (n+1)! \\
S_{(n-1)}t_n &= \frac{n(n+1)}{2}\, n!\, t_1 \\
S_{(1)}t_n &= \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n+1}{k+1} t_k t_{n-k-1}
\end{aligned}$$

(*c*) *$S_{(k)}v_n$ равняется коэффициенту при z^{n+1} в разложении $-(n+1)!z\beta(z)^{k-1}$ в*

ряд по степеням z; в частности,

$$S_{(1)}v_1 = -2$$
$$S_{(1)}v_n = 0 \text{ для } n > 1$$
$$S_{(2)}v_n = (-1)^{n+1}n(n+1)t_{n-2}$$

Формулы из пунктов (b) и (c) можно кратко записать в виде равенств формальных рядов $S_{(k)}(\beta(z)) = \beta(z)^{k+1}$ и $S_{(k)}(Q_v(z)) = -z\beta(z)^{k-1}$.

Теперь перейдем к вычислению фильтрации $N_0 \subset N_1 \subset \ldots \subset \Omega^*_U \otimes \mathbb{Q}$. Напомним, что $N_0 = \mathbb{Q} \subset \Omega^*_U \otimes \mathbb{Q}$ и далее по индукции

$$N_{p+1} = \{x \in \Omega^*_U \otimes \mathbb{Q} \,:\, s \cdot x \in N_p \text{ для всех } S_\omega, |\omega| > 0\}.$$

Ясно, что однородный элемент $\Omega^*_U \otimes \mathbb{Q}$ степени $-2d$ принадлежит N_d, но, вообще говоря, может принадлежать N_p с $p < d$.

Мономы $v_1^{i_1}v_2^{i_2}\ldots v_m^{i_m}$ удобно кодировать бесконечными последовательностями неотрицательных целых чисел $(i_1, i_2, \ldots)$ с конечным числом ненулевых элементов. Для такой последовательности $I = (i_1, i_2, \ldots)$ через v_I будем обозначать моном $\prod\limits_k v_k^{i_k}$. Для $I = (i_1, i_2, \ldots)$ положим

$$p(I) = i_1 + \sum_k (k-1)i_k. \tag{6.2}$$

Пусть также $d(I) = \sum\limits_k ki_k$, ясно, что $|v_I| = -2d(I)$.

Теорема 6.1.

(a) Элемент v_I принадлежит $N_{p(I)}$.

(b) Аддитивный базис $\Omega^*_U \otimes \mathbb{Q}$ согласован с фильтрацией N_p в следующем смысле:

$$\mathbb{Q}\langle v_I \,:\, p(I) = p\rangle \oplus N_{p-1} = N_p.$$

В частности, v_I не принадлежит $N_{p(I)-1}$.

Доказательству предпошлем вспомогательное утверждение.

Лемма 6.2.

(a) $v_1 \in N_1$, $v_1^k \in N_k$, $v_1 \notin N_{k-1}$;

(b) $v_k \in N_{k-1}$ для $k \geqslant 2$;

(c) $t_k \in N_k$ и $t_k \notin N_{k-1}$;

(d) $v_k \notin N_{k-2}$ для $k \geqslant 2$.

Доказательство. (a) $S_{(1)}v_1 = -2$, остальные $S_\omega \neq 1$ принимают на v_1 нулевое значение, так что $v_1 \in N_1$. Поскольку $|v_1^k| = -2k$, имеем $v_1^k \in N_k$. Соотношение $S_{(1)}v_1^k = -2kv_1^{k-1}$ позволяет проверить, что $v_1^k \notin N_{k-1}$ индукцией по k.

(b) Для любой операции $S_{(\omega)}$, отличной от 1 и от $S_{(1)}$ элемент $S_\omega v_k$ принадлежит N_{k-2} по соображениям размерности. По утверждению 6.1 $S_{(1)}v_k = 0 \in N_0 \subset N_{k-2}$ при $k \geqslant 2$. Поэтому $v_k \in N_{k-1}$.

(c) Ясно, что $t_k \in N_k$, т. к. $|t_k| = -2k$.

По лемме 6.1 выполнено равенство $t_k = \frac{(k+1)!}{2^k} v_1^k + V$, где через V обозначена линейная комбинация мономов, содержащих хотя бы один сомножитель вида v_m, $m \geqslant 2$. Из соображений размерности, леммы 5.2 и пункта (b) получаем $V \in N_{k-1}$. С другой стороны, $v_1^k \notin N_{k-1}$, поэтому $t_k \notin N_{k-1}$.

(d) Очевидно, что $v_2 \notin N_0$. Далее, при $k \geqslant 3$ элемент v_k не может принадлежать N_{k-2}, так как $S_{(2)}v_k = (-1)^{k+1}k(k+1)t_{k-2} \notin N_{k-3}$. □

Доказательство теоремы 6.1. Пункт (a) вытекает из лемм 5.2 и 6.2(a, b).

Для пункта (b) докажем, что никакая линейная комбинация мономов v_I одной степени, для которых $p(I) = p$, не может принадлежать N_{p-1}. Предположим, что это неверно и пусть p — наименьшее, для которого существует нетривиальная линейная комбинация $x = \sum\limits_{\substack{d(I_k)=d,\\ p(I_k)=p}} \lambda_k v_{I_k} \in N_{p-1}$, где $\lambda_k \in \mathbb{Q}$. Теперь разберем два случая.

Сначала предположим, что среди мономов v_{I_k} найдутся такие, в которые v_1 входит в ненулевых степенях. Тогда $S_{(1)}x \neq 0$, причем $S_{(1)}x$ является линейной комбинацией мономов вида v_I, где $d(I) = d-1$, $p(I) = p-1$. В самом деле, легко проверить, что $S_{(1)}v_I = 0$, если в последовательности $I = (i_1, i_2, \ldots)$ выполняется $i_1 = 0$. Если же $i_1 > 0$, то $S_{(1)}v_I = -2i_1 v_J$, где $J = (i_1 - 1, i_2, \ldots)$. Так как $x \in N_{p-1}$, то $S_{(1)}x \in N_{p-2}$, что противоречит минимальности p.

Теперь предположим, что v_1 не входит ни в один из мономов v_{I_k} (в этом случае $S_{(1)}x = 0$ и это нам ничего не дает). Покажем, что $S_{(2)}x \neq 0$ и что $S_{(2)}x$ обязательно содержит слагаемое $v_{\hat{I}}$ с ненулевым коэффициентом, для которого $p(\hat{I}) = p-1$. Тогда по определению фильтрации из $x \in N_{p-1}$ следует, что $S_{(2)}x \in N_{p-2}$, а это противоречит выбору минимального p.

Введем на последовательностях неотрицательных целых чисел $I = (i_1, i_2, \ldots)$, с конечным количеством ненулевых элементов правый лексикографический порядок, а именно, положим $I > J$, если найдется целое $k > 0$, для которого $I_k > j_k$ и $i_m = j_m$ для всех $j > m$.

Лемма 6.3.

(a) *Пусть* $v_I = v_k^{i_k} v_{k+1}^{i_{k+1}} \ldots v_m^{i_m}$, *где* $2 \leqslant k \leqslant m$ *и* $i_k > 0$. *Рассмотрим разложение* $S_{(2)}v_I = \sum\limits_J \lambda_J v_J$ *по базису мономов от образующих* v_i. *В нем для мономов* v_J *выполняется* $p(J) \leqslant p(I) - 2$, *за исключением* v_{I_s}, *где*

$$I_s = (i_s, 0, \ldots, 0, i_k, \ldots, i_s - 1, \ldots, i_m, 0, \ldots), s = k, \ldots, m, \tag{6.3}$$

для которых, в частности, $p(I_s) = p(I) - 1$.

(*b*) *Пусть* $I > J$, *причем* $d(I) = d(J)$ *и* $p(I) = p(J)$. *Пусть для определенности* $v_I = v_k^{i_k} v_{k+1}^{i_{k+1}} \dots v_m^{i_m}$, *где* $2 \leqslant k \leqslant m$ *и* $i_k > 0$. *Тогда* $I_k > J_t$ *для всех возможных* t.

Из этой леммы следует, что если $v_I = v_k^{i_k} v_{k+1}^{i_{k+1}} \dots v_m^{i_m}$, где $2 \leqslant k \leqslant m$ и $i_k > 0$, является старшим мономом в разложении x по v-базису, то в качестве монома $v_{\hat{I}}$ в разложении $S_{(2)}x$ по v-базису можно взять моном, соответствующий I_k, — коэффициент при нем будет ненулевым. Это завершает доказательство теоремы 6.1. □

Доказательство леммы 6.3. Операция $S_{(2)}$ является дифференцированием, т. е. $S_{(2)}(xy) = S_{(2)}(x)y + xS_{(2)}(y)$. Отсюда следует соотношение:

$$S_{(2)}(v_j^i) = iv_j^{i-1} S_{(2)} v_j = iv_j^{i-1}(-1)^{j+1} j(j+1) t_{j-2} = \tag{6.4}$$

$$= iv_j^{i-1}(-1)^{j+1} j(j+1) \frac{(j-1)!}{2^{j-2}} v_1^{j-2} + A = (-1)^{j+1} i \frac{(j+1)!}{2^{j-2}} v_j^{i-1} v_1^{j-2} + A, \tag{6.5}$$

где A является линейной комбинацией v-мономов степени $ij-2$, причем каждый такой моном содержит не менее i сомножителей v_s, $s > 1$.

В следующем вычислении мы не будем приводить в явном виде коэффициенты, как в последней формуле, — нам достаточно будет знать, что какие-то конкретные коэффициенты отличны от 0; мы будем обозначать их символами ϵ с различными индексами.

Итак, пусть $v_I = v_k^{i_k} v_{k+1}^{i_{k+1}} \dots v_m^{i_m}$, где $2 \leqslant k \leqslant m$ и $i_k > 0$. Положим $d = d(I)$ и $p = p(I)$, заметим, что количество сомножителей v_j, $j > 1$, в мономе v_I в точности равно $d - p$. Тогда

$$S_{(2)}(v_I) = \sum_{j=k}^{m} v_k^{i_k} \dots S_{(2)}(v_j^{i_j}) \dots v_m^{i_m} = \sum_{j=k}^{m} \epsilon_j v_1^j v_k^{i_k} \dots (v_j^{i_j - 1}) \dots v_m^{i_m} + A, \tag{6.6}$$

где A — линейная комбинация v-мономов степени $d-2$ и в каждый из них сомножители v_j, $j > 1$, входят не менее $d - p$ раз, поэтому у каждого такого монома v_J величина $p(J)$ не превосходит $(d-2) - (d-p) = p - 2$. Заметим, кстати, что отсюда следует $A \in N_{p-2}$.

Остальные мономы, входящие в сумму в правой части формулы (6.6), соответствуют последовательностям

$$I_s = (i_s, 0, \dots, 0, i_k, \dots, i_s - 1, \dots, i_m, 0, \dots), \quad s = k, \dots, m,$$

Легко проверить, что $d(I_s) = d-2$, $p(I_s) = p-1$. Пункт (*a*) доказан, перейдем к пункту (*b*).

Пусть $I = (0, \dots, i_k, \dots, i_m, 0, \dots)$, $J = (0, j_2, \dots)$, причем $d(I) = d(J)$, $I > J$.

Поскольку $p(I) = p(J)$, то $\sum\limits_t i_t = \sum\limits_t j_t$.

Так как $I > J$, то найдется q, для которого $i_q > j_q$, $i_r = j_r$ при $r > q$. Покажем, что $q > k$. От противного, пусть $q = k$. Тогда из $d(I) = d(J)$ следует

$$ki_k = kj_k + \sum_{t=2}^{k-1} tj_t, \tag{6.7}$$

а из $p(I) = p(J)$ следует

$$i_k = j_k + \sum_{t=2}^{k-1} j_t. \tag{6.8}$$

Вычтем из (6.7) равенство (6.8), домноженное на k, и получим

$$0 = \sum_{t=2}^{k-1} (k-t)j_t,$$

поскольку коэффициенты $k - t$ положительны, а $j_t \geqslant 0$, из этого равенства следует, что $j_2 = \ldots = j_{k-1} = 0$, тем самым, I совпадает с J во всех позициях, кроме k-ой, а значит, $d(I) \neq d(J)$, что противоречит условию леммы.

Итак, $q > k$. Но тогда q-й член последовательности $I_k = (i_k, 0, \ldots, 0, i_k - 1, \ldots, i_m, 0, \ldots)$ будет строго больше q-го члена любой последовательности вида J_t. Лемма доказана. □

Замечание. *Фильтрация степенями идеала аугментации в* $S \otimes \mathbb{Q}$. Ранее в этом разделе мы кодировали v-мономы бесконечными последовательностями $(i_1, i_2, \ldots)$, в которых все элементы равны нулю за исключением конечного числа элементов, которые являются положительными целыми числами. Сейчас нам удобно кодировать v-мономы другим способом — теми же разбиениями, которыми кодируются операции Ландвебера—Новикова. А именно, разбиения положительного целого n в суммы $n = j_1 + \ldots + j_s$ находятся во взаимно однозначном соответствии с v-мономами степени $-2n$: разбиению $\omega = (j_1, \ldots, j_s)$ ставится в соответствие v-моном $v_\omega = v_{j_1} \ldots v_{j_s}$. Положим

$$p(\omega) = \sum_{k:j_k>1} (j_k - 1) + \#\{k : j_k = 1\}. \tag{6.9}$$

Это определение согласовано с формулой (6.2).

Напомним (см. выше), что вложение S-модулей $\phi : \Omega^*_U \to S_*$ становится изоморфизмом после тензорного умножения на $\mathbb{Q}$. Изоморфизм $\phi \otimes \mathbb{Q}$ переносит фильтрацию N_p на S_*.

Пусть I — идеал аугментации $S \otimes \mathbb{Q}$. Положим $F^p S \otimes \mathbb{Q} = I^p$.

Напомним, см. [193], что элементы v_ω образуют базис $S_* \otimes \mathbb{Q}$, двойственный базису *касательных* операций Ландвебера—Новикова (см. [215]). Касательная операция,

соответствующая ω, обозначается $\bar{S}_\omega$.

Из леммы 5.3 получается следующее описание фильтрации $S \otimes \mathbb{Q}$ степенями идеала аугментации.

Теорема 6.2.

(a) $\bar{S}_\omega \in F^{p(\omega)}S \otimes \mathbb{Q} = I^{p(\omega)}$.

(b) $\bar{S}_\omega \notin F^{p(\omega)+1}S \otimes \mathbb{Q} = I^{p(\omega)+1}$. *Больше того,*

$$I^p = \mathbb{Q}\langle \bar{S}_\omega \,:\, p(\omega) = p\rangle \oplus I^{p+1}.$$

6.2 Фильтрация степенями идеала аугментации алгебры UL_1

Напомним, что алгебра Ли L_1 порождается над $\mathbb{Q}$ элементами e_i, $i = 1, 2, \ldots$ и соотношениями $[e_i, e_j] = (j-i)e_{i+j}$. Универсальная обвертывающая UL_1 над полем $\mathbb{Q}$ — это ассоциативная алгебра с 1, порожденная элементами e_i, $i \geqslant 1$, и соотношениями $e_ie_j - e_je_i = (j-i)e_{i+j}$. По теореме Пуанкаре—Биркгофа—Витта мономы вида $e_{i_1} \ldots e_{i_n}$, где $i_1 \leqslant i_2 \leqslant \ldots \leqslant i_n$, образуют базис универсальной обвертывающей алгебры UL_1.

Во многих задачах, связанных с алгеброй Ли L_1, используется градуировка алгебры L_1, относительно которой коммутатор однороден, а именно, элементу e_i приписывается градуировка i. Эта градуировка индуцирует градуировку универсальной обвертывающей алгебры UL_1: моному $e_{i_1} \ldots e_{i_n}$ приписывается градуировка $\sum\limits_{j=1}^{n} i_j$.

Отметим, что аналогичным образом вводится вторая градуировка комплекса Шевалле—Эйленберга, а именно, элементу $\omega_{i_1} \wedge \ldots \wedge \omega_{i_n}$ приписывается биградуировка $(n, \sum\limits_{j=1}^{n} i_j)$. Дифференциал комплекса Шевалле—Эйленберга сохраняет вторую градуировку, следовательно, комплекс Шевалле—Эйленберга алгебры Ли L_1 расщепляется в прямую сумму подкомплексов, что дает нетривиальное расщепление когомологий алгебры Ли L_1.

Теорема 6.3. *Обозначим через I идеал аугментации алгебры UL_1. Тогда имеют место следующие утверждения.*

(a) $e_1 \in I^1$, $e_1 \notin I^2$.

(b) $e_n \in I^{n-1}$, $e_n \notin I^n$ *для* $n \geqslant 2$.

(c) Для $1 < j_1 \leqslant \ldots \leqslant j_n$ *элемент вида* $e_1^s e_{j_1} \ldots e_{j_n}$ *принадлежит* I^ν, *где* $\nu = s + \sum\limits_{k=1}^{n} (j_k - 1)$

Доказательство. Очевидно, $e_1, e_2 \in I$. Предположим, что $e_1 \in I^2$. Тогда e_1 представляется виде $\sum a_ib_i$, где элементы $a_i, b_i \in I$. Легко видеть, что градуировка каждого из элементов a_i и b_i не меньше 1, но тогда e_1 должен иметь градуировку не меньше 2.

Из формулы $e_n = \frac{1}{n-2}[e_1, e_{n-1}]$ следует, что $e_n \in I^{n-1}$ при $n \geqslant 3$. Покажем, что $e_n \notin I^n$. Предположим от противного, что e_n является линейной комбинацией произведений длины не меньше n. Учитывая градуировку, получаем, что в таком случае эта линейная комбинация должна состоять из одного слагаемого, $e_n = \lambda e_1^n$, $\lambda \in \mathbb{Q}$, что противоречит теореме Пуанкаре—Биркгофа—Витта. $\square$

Запишем базисный моном $e_{i_1} \dots e_{i_n}$ в виде $x = e_1^m e_{j_1} \dots e_{j_k}$, где $1 < j_1 \leqslant \dots j_k$, и положим

$$\nu(x) = m + \sum_{s=1}^{k} (j_s - 1).$$

Теперь мы можем дать полное описание фильтрации $F^p UL_1 = I^p$.

Теорема 6.4. *В приведенных выше обозначениях $x \in F^{\nu(x)} UL_1 \backslash F^{\nu(x)+1} UL_1$. Более того, базис Пуанкаре—Биркгофа—Витта согласован с фильтрацией $F^p UL_1$ в следующем смысле:*

$$\mathbb{Q}\langle x = e_1^m e_{j_1} \dots e_{j_k} \,:\, \nu(x) = p \rangle \oplus I^{p+1} = I^p.$$

Доказательство. Для монома $x = e_1^m e_{j_1} \dots e_{j_k}$ обозначим через $d(x) = m + \sum\limits_{s=1}^{k} j_s$ его степень. Зафиксируем степень d и параметр $p \leqslant d$. Докажем, что никакая линейная комбинация вида

$$y = \sum_{d(x_j)=d, \nu(x_j)=p} \lambda_j x_j, \tag{6.10}$$

где x_j — моном базиса Пуанкаре—Биркгофа—Витта, не может принадлежать I^{p+1}, $\lambda_j \in \mathbb{Q}$. От противного, предположим, что $y = \sum\limits_s \mu_s y_s$, $\mu_s \in \mathbb{Q}$, а каждый y_s — произведение базисных элементов $e_i, i \geqslant 1$, длины по меньшей мере $p + 1$.

Оценим, сколько в мономе y_s имеется сомножителей, отличных от e_1. Обозначим через m количество сомножителей e_1, а через k — количество сомножителей e_i при $i \geqslant 2$. Тогда $m + 2k \leqslant d$ и $p + 1 \leqslant m + k$, откуда $k \leqslant d - p - 1$.

В алгебре UL_1 порождающие соотношения имеют вид $e_i e_j - e_j e_i = (j - i) e_{i+j}$. Запишем их в виде

$$e_j e_i = e_i e_j - (j - i) e_{i+j} \text{ для } j > i > 1, \tag{6.11}$$

$$e_j e_1 = e_1 e_j - (j - 1) e_{j+1} \text{ для } j > 1. \tag{6.12}$$

Тогда последовательно заменяя вхождения $\dots e_j e_i \dots$, $j > i$, в мономах y_s на правые части вышеприведенных соотношений, мы за конечное число шагов приведем $y = \sum\limits_s \mu_s y_s$ к линейной комбинации мономов базиса Пуанкаре—Биркгофа—Витта, т. е. получим выражение (6.10).

Теперь заметим, что на каждом шаге такой редукции в каждом мономе количество вхождений символов e_i, $i \geqslant 2$ (т. е. отличных от e_1) не увеличивается, тем

самым не превышает $d-p-1$. С другой стороны, для каждого монома $e_1^m e_{j_1}\dots e_{j_k}$ из формулы (6.10) количество вхождений символов e_i, отличных от e_1, в точности равно $k = d(x) - \nu(x) = d - p$. □

6.3 Фильтрация Бухштабера алгебры $(\mathcal{A}_p)_*$, $p \geqslant 2$

Введем следующие обозначения: для $I = (a_1, a_2, a_3, \dots)$, где $a_i \geqslant 0$, $J = (\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots)$, где $\varepsilon_i = 0, 1$, причем лишь конечное число элементов в этих последовательностях отличны от 0, положим

$$\xi^I = \xi_1^{a_1}\xi_2^{a_2}\xi_3^{a_3}\dots \in \mathcal{A}_2,$$
$$\xi^I\tau^J = \xi_1^{a_1}\xi_2^{a_2}\xi_3^{a_3}\dots\tau_0^{\varepsilon_0}\tau_1^{\varepsilon_1}\dots \in \mathcal{A}_p.$$

Степень монома $\xi^I \in \mathcal{A}_2$ равна

$$|\xi^I| = \sum_{k\geqslant 1} a_k(2^k - 1).$$

Степень монома $\xi^I\tau^J \in \mathcal{A}_p$ равна

$$|\xi^I\tau^J| = \sum_{k\geqslant 1} a_k(2p^k - 2) + \sum_{k\geqslant 0}\varepsilon_k(2p^k - 1).$$

Если J состоит только из 0, то $\xi^I\tau^J \in \overline{\mathcal{A}}_p$. Эти обозначения не вызовут путаницы, поскольку всегда будет оговорено, какой из двух случаев $p = 2$ или $p > 2$ рассматривается.

Отметим, что в некоторых случаях нам будет удобно использовать другие обозначения: $\xi(I)$ вместо ξ^I и $\tau(J)$ — вместо τ^J.

Пусть p — простое число. Определим функцию $\alpha_p(n)$, где n — неотрицательное целое число, как сумму цифр записи числа n по основанию p, т. е. $\alpha_p(n) = \sum\limits_i d_i$, если $n = \sum\limits_i d_i p^i$, $0 \leqslant d_i < p$. Для $I = (a_1, a_2, a_3, \dots)$, $J = (\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots)$ определим функции

$$\text{для } p = 2: \qquad \sigma_2(I) = \sum_k k\,\alpha_2(a_k),$$
$$\text{для } p > 2: \qquad \sigma_p(I, J) = \sum_k k\,\alpha_p(a_k) + \sum_k (k+1)\,\varepsilon_k,$$
$$\text{для } p > 2: \qquad \sigma_p(I) = \sigma_p(I, 0) = \sum_k k\,\alpha_p(a_k).$$

Теорема 6.5. *Для алгебр $\mathcal{A}_2$, $\mathcal{A}_p$ и $\overline{\mathcal{A}}_p$ для пространств фильтраций $\{N_j\}$ в двойственных алгебрах выполняются следующие утверждения.*

(*a*) *Для* $p = 2$

$$N_j((\mathcal{A}_2)_*) = N_{j-1}((\mathcal{A}_2)_*) \oplus \mathbb{Z}/2(\xi^I \ : \ j = \sigma_2(I)).$$

(*b*) *Для* $p > 2$

$$N_j((\mathcal{A}_p)_*) = N_{j-1}((\mathcal{A}_p)_*) \oplus \mathbb{Z}/p(\xi^I\tau^J \ : \ j = \sigma_p(I,J)).$$

($\bar{b}$) *Для* $p > 2$

$$N_j((\overline{\mathcal{A}}_p)_*) = N_{j-1}((\overline{\mathcal{A}}_p)_*) \oplus \mathbb{Z}/p(\xi^I \ : \ j = \sigma_p(I)).$$

Для подалгебр Хопфа $A(n) \subset \mathcal{A}_2$ и $P(n) \subset \overline{\mathcal{A}}_p \subset \mathcal{A}_p$, см. подраздел А.1.3, получаем следствие, которое нам понадобится в главе 8.

Следствие 6.1. (*a*) $p = 2$*: В алгебре Хопфа* $A(n)_*$*, двойственной к* $A(n) \subset \mathcal{A}_2$*, мономы вида*

$$\xi^I = \xi_1^{a_1}\xi_2^{a_2}\dots\xi_{n+1}^{a_{n+1}}, \quad \textit{где} \quad a_i < 2^{n+2-i}, i = 1,\dots,n+1,$$

образуют базис, причем имеет место изоморфизм

$$N_j(A(n)_*) = N_{j-1}(A(n)_*) \oplus \mathbb{Z}/2(\xi^I \ : \ j = \sigma_2(I), a_i < 2^{n+2-i}, i = 1,\dots,n+1).$$

(*b*) $p > 2$*: В алгебре Хопфа* $P(n)_*$*, двойственной к* $P(n) \subset \mathcal{A}_p$*, мономы вида*

$$\xi^I = \xi_1^{a_1}\xi_2^{a_2}\dots\xi_{n+1}^{a_{n+1}}, \quad \textit{где} \quad a_i < p^{n+2-i}, i = 1,\dots,n+1,$$

образуют базис, причем имеет место изоморфизм

$$N_j(\mathcal{A}_{p_*}) = N_{j-1}(\mathcal{A}_{p_*}) \oplus \mathbb{Z}/p(\xi^I\tau^J \ : \ j = \sigma_p(I,J), a_i < p^{n+2-i}, i = 1,\dots,n+1).$$

Мы дадим прямое доказательство теоремы 6.5, использующее структуру алгебры Хопфа $(\mathcal{A}_p)_*$. Вместе с леммой 5.3 это дает новое доказательство теоремы Мэя 6.6 о фильтрации алгебр $\mathcal{A}_p$ степенями идеала аугментации $I(\mathcal{A}_p)$. Наоборот, с помощью леммы 5.3 теорему 6.5 можно вывести из теоремы Мэя. Назовем весом элемента $x \in \mathcal{A}_p$ целое неотрицательное число n, такое что $x \in (I(\mathcal{A}_p))^n$ и $x \notin (I(\mathcal{A}_p))^{n+1}$.

Теорема 6.6 (Дж. П. Мэй, [106])**.**

(*a*) *Вес элемента* $Sq(r_1, r_2, \dots) \in \mathcal{A}_2$ *равен* $\sigma_2(r_1, r_2, \dots)$.

(*b*) *Вес элемента* $P(r_1, r_2, \dots) \in \mathcal{A}_p$ *равен* $\sigma_p(r_1, r_2, \dots)$.

(*c*) *Вес линейной комбинации милноровских элементов равен наименьшему весу милноровского элемента с ненулевым коэффициентом.* □

Доказательство теоремы 6.5 разобьем на несколько промежуточных утверждений.

Лемма 6.4.

(*a*) *Для любого простого* p *имеем* $\xi_k^{p^m} \in N_k$ *и* $\xi_k^{p^m} \notin N_{k-1}$.

(*b*) *Для* $p > 2$ *имеем* $\tau_k \in N_{k+1}$ *и* $\tau_k \notin N_k$.

(*c*) Для любого $p \geqslant 2$ выполняется $\xi^I \in N_{\sigma_p(I)}$ и для $p > 2$ выполняется $\xi^I \tau^J \in N_{\sigma_p(I,J)}$.

Доказательство.

(*a*) Проведем индукцию по k. Элемент $\xi_1^{p^m}$ примитивен, поэтому $\xi_1^{p^m} \in N_1$. Кроме того, $\xi_1^{p^m} \notin N_0$. Предположим по индукции, что утверждение верно для $\xi_k^{p^m}$. Тогда

$$\Delta\xi_{k+1}^{p^m} = \xi_{k+1}^{p^m} \otimes 1 + 1 \otimes \xi_{k+1}^{p^m} + \xi_k^{p^{m+1}} \otimes \xi_1^{p^m} + \sum_{i=2}^{k} \xi_{k+1-i}^{p^{i+m}} \otimes \xi_i^{p^m}.$$

В правой части в четвертом слагаемом все элементы вида $\xi_{k+1-i}^{p^{i+m}}$ принадлежат N_{k-1}, а в третьем слагаемом по предположению индукции $\xi_k^{p^{m+1}} \in N_k$ и $\xi_k^{p^{m+1}} \notin N_{k-1}$. Отсюда по определению фильтрации $\{N_j\}$ получаем нужное утверждение для $\xi_{k+1}^{p^m}$.

(*b*) В правой части равенства

$$\Delta\tau_k = \tau_k \otimes 1 + 1 \otimes \tau_k + \xi_k \otimes \tau_0 + \sum_{i=1}^{k-1} \xi_{k-i}^{p^i} \otimes \tau_i$$

в четвертом слагаемом все элементы вида $\xi_{k-i}^{p^i}$ принадлежат N_k, а в третьем слагаемом по только доказанному пункту (*a*) $\xi_k \in N_k$. Отсюда по определению фильтрации $\{N_j\}$ получаем нужное утверждение для τ_k.

Пункт (*c*) следует из леммы 5.2 и двух предыдущих пунктов доказываемой леммы. □

Для удобства сформулируем в явном виде следующее элементарное утверждение.

Лемма 6.5. *Пусть* $I = (a_1, a_2, \ldots)$ *и* $J = (b_1, b_2, \ldots)$. *Положим* $I + J = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots)$, *так что* $\xi^I \xi^J = \xi^{I+J}$. *Тогда* $\sigma_p(I + J) \leqslant \sigma_p(I) + \sigma_p(J)$. *Более того, равенство достигается тогда и только тогда, когда в каждой сумме* $a_i + b_i$ *нет «переносов», т. е. если* $a_i = \sum\limits_j a_{ij} p^j$, $b_i = \sum\limits_j b_{ij} p^j$, *то для всех* j *выполняется неравенство* $a_{ij} + b_{ij} < p$. □

Имеем

$$\Delta(\xi^I) = \Delta(\prod_i \xi_i^{a_i}) = \Delta(\prod_{i,k} \xi_i^{a_{ik}p^k}) = \prod_{i,k} \Delta(\xi_i^{p^k}))^{a_{ik}} = \prod_{i,k} (\xi_i^{p^k} \otimes 1 + \sum_{t=1}^{i} \xi_{i-t}^{p^{k+t}} \otimes \xi_t^{p^k})^{a_{ik}}. \quad (*)$$

На правую часть этого равенства будем ссылаться как на выражение $(*)$. При формальном раскрытии скобок в этом выражении получается набор слагаемых вида $\xi^{I'} \otimes \xi^{I''}$, среди которых нас интересует те, у которых $\sigma_p(I') = \sigma_p(I) - 1$. Отметим, что если в каждой скобке берется первое слагаемое, то соответствующее слагаемое $\xi^{I'} \otimes \xi^{I''}$ равно $\xi^I \otimes 1$.

Для любого монома ξ^I (или же мультииндекса $I = (a_1, a_2, \ldots)$) определим матрицу (таблицу) $A(I) = (a_{ik} \ : \ i \geqslant 1, k \geqslant 0)$, где $a_i = \sum\limits_k a_{ik}p^k$, причем $0 \leqslant a_{ik} < p$. Например, если $p = 3$ и $I = (7, 12, 34)$, то $A(I)$ имеет вид

$$\begin{array}{cccc} \vdots & \vdots & & \\ 0 & 0 & 1 & \\ 0 & 1 & 0 & \\ 2 & 1 & 2 & \cdots \\ 1 & 0 & 1 & \cdots \end{array}$$

И наоборот, по любой такой матрице $A = (a_{ik} \ : \ i \geqslant 1, k \geqslant 0)$ с конечным числом отличных от 0 элементов a_{ik}, где $0 \leqslant a_{ik} < p$, соответствующий мультииндекс I (т.е. такой, что $A = A(I)$) восстанавливается однозначно. Отметим, что здесь в матрице $A(I) = (a_{ik})$ первый индекс нумерует столбцы слева направо, а второй — строки снизу вверх.

Лемма 6.6. *Для слагаемого $\xi^{I'} \otimes \xi^{I''}$ выполняется соотношение $\sigma_p(I') = \sigma_p(I) - 1$ тогда и только тогда, когда во всех скобках выражения $(*)$ взяты первые слагаемые $\xi_i^{p^k} \otimes 1$ и либо*

(a) лишь в одной — $\xi_{i-1}^{p^{k+1}} \otimes \xi_1^{p^k}$, $i \geqslant 2$ причем $a_{i-1,k+1} < p - 1$,

либо

(b) лишь в одной — $1 \otimes \xi_1^{p^k}$, $p > a_{1,k} \geqslant 1$ (это соответствует $i = 1$).

Доказательство. Любое слагаемое $\xi^{I'} \otimes \xi^{I''}$, полученное после формального раскрытия скобок в выражении $(*)$ имеет вид

$$\prod_{i,k} (\xi_i^{p^k} \otimes 1)^{a'_{ik}} \prod\nolimits' (\xi_{i-t}^{p^{k+t}} \otimes \xi_t^{p^k}).$$

Здесь $a'_{ik} \leqslant a_{ik}$, а произведение $\prod'$ содержит в точности $M = \sum\limits_{i,k} (a_{ik} - a'_{ik})$ сомножителей, в каждом из которых параметр $t \geqslant 1$ выбирается независимо от других

сомножителей произведения. Имеем

$$\sigma_p(I) = \sum_{i,k} i a_{ik} = \sum_{i,k} i a'_{ik} + \sum_{i,k} i(a_{ik} - a'_{ik}).$$

Вторую сумму перепишем в виде $\sum' i$, где штрих у знака суммы имеет тот же смысл, что и выше штрих у произведения $\prod'$. Имеем:

$$\sigma_p(I) = \sum_{i,k} i a'_{ik} + \sum{}' i = \sigma_p(\prod_{i,k} \xi_i^{p^k a'_{ik}}) + \sum{}' \sigma_p(\xi_i^{p^k}) \geqslant$$
$$\geqslant \sigma_p(\prod_{i,k} \xi_i^{p^k a'_{ik}}) + \sum{}' \sigma_p(\xi_{i-t}^{p^{k+t}}) + M \geqslant \sigma_p(\prod_{i,k} \xi_i^{p^k a'_{ik}} \prod{}' \xi_{i-t}^{p^{k+t}}) + M = \sigma(I') + M.$$

Здесь в последнем неравенстве мы воспользовались леммой 6.5. Из этой оценки немедленно следует, то при $M \geqslant 2$ элемент $\xi^{I'}$ имеет фильтрацию не выше $\sigma_p(I) - 2$.

Тем самым, если $\sigma_p(I') = \sigma_p(I) - 1$, то $M = 1$, а кроме того, неравенство, в котором мы использовали лемму 6.5, должно обратиться в равенство. Это в точности означает, то во всех скобках выражения $(*)$, кроме одной, выбрано первое слагаемое, и

(a) лишь в одной — слагаемое $\xi_{i-1}^{p^{k+1}} \otimes \xi_1^{p^k}$, т. е. $I' = (a_1, \ldots, a_{i-1} + p^{k+1}, a_i - p^k, \ldots)$, либо

(b) лишь в одной — слагаемое $1 \otimes \xi_1^{p^k}$, т. е. $I' = (a_1 - p^k, a_2, a_3, \ldots)$.

Легко проверить, что в случае (a) из $\sigma_p(I') = \sigma_p(I) - 1$ следует, что в сумме $a_{i-1} + p^{k+1}$ нет «переноса», иными словами, $a_{i-1,k+1} < p - 1$. □

Основная трудность в теореме 6.5 состоит в доказательстве следующего утверждения.

Утверждение 6.2. *Зафиксируем целое $j > 0$. Любая нетривиальная линейная комбинация мономов вида ξ^I, где $\sigma_p(I) = j$, одной и той же степени d, не может принадлежать N_{j-1}.*

Далее для удобства вместо ξ^I будем также писать $\xi(I)$ или $\xi(A) = \xi(A(I))$.

Доказательство. Предположим от противного, что существуют такие мультииндексы $I_1, \ldots, I_s$, для которых $\sigma_p(I_t) = j$ для всех $t = 1, \ldots, s$ и ненулевые коэффициенты $\lambda_t \in \mathbb{Z}/p$ такие, что линейная комбинация $\sum_t \lambda_t \xi(I_t)$ принадлежит N_{j-1}. Пусть d — наименьшая степень, для которой это возможно.

Для мультииндекса I_t обозначим через $I'_t(\mu)$, где μ пробегает подходящее множество, те мультииндексы, которые описаны в лемме 6.6. Напомним, они в точности соответствуют тем слагаемым в $\Delta\xi(I) = \sum \xi(I') \otimes \xi(I'')$, для которых $\sigma_p(I') = j - 1$.

Связь матриц $A(I'_t(\mu)) = (a_{ik}(t, \mu))$ и $A(I_t) = (a_{ik}(t))$ легко описать. А именно, любая матрица $A(I'_t(\mu)) = (a_{ik}(t, \mu))$ получается из матрицы $A(I_t) = (a_{ik}(t))$ следую-

щим образом:

(a) либо для некоторого $i \geqslant 2$ найдется $a_{ik}(t) \neq 0$, для которого $a_{i-1,k+1}(t) < p-1$, и все элементы матриц $A(I'_t(\mu))$ и $A(I_t)$ совпадают, за исключением $a_{i-1,k+1}(t,\mu) = a_{i-1,k+1}(t) + 1$ и $a_{ik}(t,\mu) = a_{ik}(t) - 1$,

(b) либо найдется $a_{1k}(t) \neq 0$ и все элементы матриц $A(I'_t(\mu))$ и $A(I_t)$ совпадают, за исключением $a_{1,k}(t,\mu) = a_{1,k}(t) - 1$.

По определению фильтрации (5.2) наше предположение $\sum\limits_t \lambda_t \xi(I_t) \in N_{j-1}$ равносильно условию $\sum\limits_{t,\mu} \lambda_t \xi(I'_t(\mu)) \in N_{j-2}$. Однако предположение о минимальности d дает нам более сильное условие:

$$\sum_{t,\mu} \lambda_t \xi(I'_t(\mu)) = 0.$$

Поясним это наблюдение.

Рассмотрим выражение

$$\Delta\Big(\sum_t \lambda_t \xi(I_t)\Big) = \sum_{t,\mu} \lambda_t \xi(I'_t(\mu)) \otimes \xi(I''_t(\mu)) + \delta,$$

где δ — сумма мономов вида $x \otimes y, x \in N_{j-2}$

Из леммы 6.6 следует, что любой моном $\xi(I''_t(\mu))$ в этом выражении имеет вид $\xi_1^{p^a}$ для подходящего a.

После «приведения подобных» мы получим, что $\Delta\big(\sum\limits_i \lambda_t \xi(I_t)\big)$ записывается в виде суммы

$$\sum_a \Big(\sum_b \nu_{a,b} \xi(I_{a,b}) \Big) \otimes \xi_1^{p^a} + \delta,$$

при этом $0 \neq \nu_{a,b} \in \mathbb{Z}/p$, а мономы $I_{a,b}$ обладают двумя свойствами:

- $\sigma_p(I_{a,b}) = j - 1$,
- $|\xi(I_{a,b})| = d - 2(p-1)p^a$.

Разделяя однородные компоненты и используя предположение минимальности d, получаем, что $\sum\limits_b \xi(I_{a,b}) = 0$ для всех a.

Покажем, что среди мономов $\xi(I'_t(\mu))$ найдутся те, которые не могут сократиться, т. е. какая-то из сумм $\sum\limits_b \xi(I_{a,b})$ отлична от 0.

Пусть $k = k_0$ — наименьшее, для которого в k-й строке хотя бы одной таблицы $A(I_t)$ имеется ненулевой элемент, т. е. найдутся i, t, для которых $a_{i,k_0}(t) \neq 0$, но $a_{ik}(t) = 0$ для всех i, t и $k < k_0$.

Затем среди отобранных мономов выберем мономы с наибольшей суммой $\sum\limits_i a_{i,k_0}(t)$. Эту сумму обозначим через σ_0. Пусть для таких мономов индекс t пробегает множество T. Теперь разобьем множество индексов T в дизъюнктное объединение $T = T_1 \sqcup T_2 \sqcup \ldots \sqcup T_S$: отнесем к одному подмножеству T_q два индекса $t', t'' \in T$ в том и только в том случае, когда последовательности $(a_{1,k_0}(t'), a_{2,k_0}(t'), \ldots)$

и $(a_{1,k_0}(t''), a_{2,k_0}(t''), \ldots)$ совпадают. Теперь разберем два случая.

Случай 1. Найдется такое подмножество индексов T_m, $1 \leqslant m \leqslant S$, что для некоторого $t \in T_m$ матрица $A(I_t)$ содержит ненулевые элементы вне k_0-й строки. Из оценок на степень монома $\xi(I_t)$ следует, что этим свойством обладают все $t \in T_m$.

Для любого $t \in T_m$ мономы $I'_t(\mu)$ можно разбить на две группы: мономы $\widehat{I}'_t(\mu)$, у которых матрицы $A(\widehat{I}'_t(\mu))$ отличаются от матрицы $A(I_t)$ только вне k_0-й строки, и мономы $\widetilde{I}'_t(\mu)$, у которых k_0-я строка матрицы $A(\widetilde{I}'_t(\mu))$ отличается от k_0-й строки матрицы $A(I_t)$.

Легко видеть, что

(i) множество мономов вида $\widehat{I}'_t(\mu)$ непусто;

(ii) среди всех слагаемых в $\Delta(\sum\limits_t \lambda_t \xi(I_t))$ слагаемые, соответствующие мономам $(\widehat{I})'_t(\mu)$, $t \in T_m$, могут сокращаться только между собой.

Построим новое семейство мономов K_t, $t \in T_m$, следующим образом:

матрица $A(K_t)$ монома K_t получается из матрицы $A(I_t)$ монома I_t заменой всех элементов k_0-й строки на нули. Этой же процедурой из мономов $\widehat{I}'_t(\mu)$ получаются все мономы $K'(t)$. Но тогда $\sigma_p(K_t) = j - \sigma_0$ и при этом $\sum\limits_{t \in T_m} \lambda_t \xi(K_t) \in N_{j-\sigma_0-1}$, что противоречит минимальности d.

Случай 2. Любое множество T_m обладает свойством: для всех $t \in T_m$, $1 \leqslant m \leqslant S$, матрица $A(t)$ содержит ненулевые слагаемые только в k_0-й строке. Это означает, что каждое множество T_m содержит в точности один элемент, которому соответствует матрица с единственной ненулевой строкой $(a_{1,k_0}, a_{2,k_0}, a_{3,k_0}, \ldots)$, при этом функция σ_p для всех таких элементов принимает одно и то же значение j, т. е. $\sum\limits_i a_{i,k_0} = j$, а степень каждого такого монома равна $\sum\limits_i a_{i,k_0} 2(p^i - 1) = d$ для $p > 2$ и $\sum\limits_i a_{i,k_0}(2^i - 1) = d$ для $p = 2$.

Покажем, что последнее равенство может выполняться не более чем для одного набора величин a_{i,k_0}. В самом деле, пусть $\{a'_{i,k_0} \ : \ i \geqslant 1\}$ и $\{a''_{i,k_0} \ : \ i \geqslant 1\}$ — два таких набора. Пусть i_0 — максимальное значение индекса, для которого $a'_{i_0,k_0} \neq a''_{i_0,k_0}$, причем $a'_{i,k_0} = a''_{i,k_0}$ для всех $i > i_0$. Без ограничения общности пусть $a'_{i_0,k_0} < a''_{i_0,k_0}$. Тогда для $p > 2$

$$\sum_{i \leqslant i_0} a'_{i,k_0} 2(p^i - 1) = \sum_{i \leqslant i_0} a''_{i,k_0} 2(p^i - 1),$$

а значит,

$$\sum_{i < i_0} a'_{i,k_0} 2(p^i - 1) \geqslant \sum_{i < i_0} a''_{i,k_0} 2(p^i - 1) + (2p^{i_0} - 2).$$

С другой стороны,

$$\sum_{i < i_0} a'_{i,k_0} 2(p^i - 1) \leqslant (p-1) \sum_{i=1}^{i_0 - 1} (2p^i - 2) < 2p^{i_0} - 2.$$

Для $p = 2$ оценки проводятся аналогично. Отсюда получаем, что множество индексов T состоит из одного элемента I.

Таким образом, матрица $A(I)$ подержит только одну ненулевую строку $(a_{1,k_0}, a_{2,k_0}, \ldots)$. Пусть a_{i_0,k_0} — первый ненулевой элемент в этой строке:

$$(0, \ldots, 0, a_{i_0,k_0}, a_{i_0+1,k_0}, \ldots).$$

Обозначим также через $\widetilde{I}$ моном, которому соответствует матрица $A(\widetilde{I})$ с единственной ненулевой строкой

$$(0, \ldots, 0, a_{i_0,k_0} - 1, a_{i_0+1,k_0}, \ldots).$$

Без ограничения общности можно считать, что коэффициент λ при мономе $\xi(I)$ в сумме $\sum\limits_t \lambda_t \xi(I_t)$ удовлетворяет соотношению $\lambda a_{i_0 k_0} = 1$. Проанализируем, какие еще слагаемые должны присутствовать в сумме $\sum\limits_t \lambda_t \xi(I_t)$. По предположению все суммы $\sum\limits_b \nu_{a,b} \xi(I_{a,b})$ равны 0, поэтому элемент

$$x_1 = \xi_{i_0-1}^{p^{k_0+1}} \xi(\widetilde{I}) \otimes \xi_1^{p_0^k}.$$

в выражении $\Delta\bigl(\sum \lambda_t \xi(I_t)\bigr)$ должен сокращаться вкладом какого-то другого монома. Из минимальности k_0 следует, что единственный моном, вклад которого может сократить x_1, — это моном

$$y_1 = -\xi_1^{p^{k_0}} \xi_{i_0-1}^{p^{k_0+1}} \xi(\widetilde{I}).$$

Далее, $\Delta(y_1)$ содержит слагаемое

$$x_2 = -\xi_1^{p^{k_0}} \xi_{i_0-2}^{p^{k_0+2}} \xi(\widetilde{I}) \otimes \xi_1^{p^{k_0+1}},$$

которое по соображениям, аналогичным приведенным выше, может сократиться лишь вкладом монома

$$y_2 = \xi_1^{p^{k_0}+p^{k_0+1}} \xi_{i_0-2}^{p^{k_0+2}} \xi(\widetilde{I}).$$

В свою очередь, $\Delta(y_2)$ содержит слагаемое

$$x_3 = \xi_1^{p^{k_0}+p^{k_0+1}} \xi_{i_0-3}^{p^{k_0+3}} \xi(\widetilde{I}) \otimes \xi_1^{p^{k_0+2}},$$

которое может сократиться лишь вкладом монома

$$y_3 = -\xi_1^{p^{k_0}+p^{k_0+1}+p^{k_0+2}} \xi_{i_0-3}^{p^{k_0+3}} \xi(\widetilde{I}).$$

Продолжая рассуждения, получаем, что сумма $\sum\limits_t \lambda_t \xi(I)$ содержит слагаемые

$$\lambda\xi(I) + \sum_{j=1}^{i_0} (-1)^j \xi_1^{p^{k_0}+\ldots+p^{k_0+j-1}} \xi_{i_0-j}^{p^{k_0+j}} \xi(\widetilde{I}).$$

Здесь мы, наконец, приходим к противоречию, потому что вклад монома

$$\xi_1^{p^{k_0}+\ldots+p^{k_0+i_0-1}} \xi(\widetilde{I})$$

содержит слагаемое

$$\xi_1^{p^{k_0}+\ldots+p^{k_0+i_0-2}} \xi(\widetilde{I}) \otimes \xi_1^{p^{k_0+i_0-1}},$$

которое не может сократиться вкладом никакого другого монома. □

Утверждение 6.2 доказывает пункты (a) и $(\bar{b})$ теоремы 6.5.

Утверждение 6.3. *Зафиксируем целое $j > 0$. Любая нетривиальная линейная комбинация мономов вида $\xi^I \tau^J$ одной и той же степени d, где $\sigma_p(I, J) = j$, не может принадлежать N_{j-1}.*

Доказательство. Предположим от противного, что такая линейная комбинация нашлась, а именно, $X = \sum\limits_{t=1}^{s} \lambda_t \xi(I_t)\tau(J_t) \in N_{j-1}$ для ненулевых $\lambda_t \in \mathbb{Z}/p$, $\sigma_p(I_t, J_t) = j$ и $|\xi(I_t)\tau(J_t)| = d$ для всех $t = 1, \ldots, s$. Пусть d — наименьшая степень, для которой это возможно.

Можно считать, что хотя бы для одного монома $\xi(I_t)\tau(J_t)$ мультииндекс J_t ненулевой (в противном случае воспользуемся утверждением 6.2).

Для мультииндекса $J = (\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots)$, состоящего только из 0 и 1, положим $\gamma(J) = \sum\limits_{i \geqslant 0} \varepsilon_i$.

Выберем один из мономов J_t с максимальной величиной $\gamma(J_t) = \gamma_0$, пусть это будет J_{t_0}. Пар мультииндексов (I_t, J_t) с $J_t = J_{t_0}$, вообще говоря, может быть несколько. Сгруппируем вместе соответствующие слагаемые:

$$X = (\sum_s \alpha_s \xi(I_{t,s}))\tau(J_{t_0}) + \delta,$$

где $I_{t,s}$ — это мономы I_t для которых $J_t = J_{t_0}$, $\alpha_s = \lambda_t$, а δ — линейная комбинация оставшихся мономов, т. е. таких, у которых $J_t \neq J_{t_0}$.

В $\Delta(X)$ имеется группа слагаемых $(\sum_s \alpha_s \Delta(\xi(I_{t,s}))) \cdot (\tau(J_{t_0}) \otimes 1)$, которые независимы от остальных слагаемых в $\Delta(X)$; это означает, что $(\sum_s \alpha_s \Delta(\xi(I_{t,s}))) \cdot (\tau(J_{t_0}) \otimes 1) \in N_{j-1}$. Отсюда получаем, что линейная комбинация $\sum_s \alpha_s \Delta(\xi(I_{t,s}))$ является контрпримером к предложению 6.2.

Таким образом, получаем, что у всех мономов вида $\xi(I_t)\tau(J_t)$ с максимальным $\gamma(J_t) = \gamma_0$ мультииндексы I_t нулевые.

Итак, $X = \sum\limits_t \lambda_t \tau(J_t) + \delta$, где $\gamma(J_t) = \gamma_0$, а δ — линейная комбинация мономов $\xi(I)\tau(J)$ с $\gamma(J) < \gamma_0$.

Однако, в этой сумме все мультииндексы J_t имеют одинаковые степени и одинаковые величины $\gamma(J_t)$. С другой стороны мультииндексов J с фиксированными степенью и величиной $\gamma(J)$ может быть не более одного; доказательство повторяет рассуждение из случая 1 доказательства утверждения 6.2.

Тем самым, $X = \lambda_0\tau(J_0) + \delta$, где δ — как и выше, линейная комбинация оставшихся мономов $\xi(I_t)\tau(J_t)$, т. е. таких, у которых $\gamma(J_t) < \gamma_0 = \gamma(J_0)$. Для простоты будем считать, что $\lambda_0 = 1$.

Пусть теперь $\tau(J_0) = \tau_{i_1}\tau_{i_2}\dots\tau_{i_k}$. Теперь разберем несколько случаев.

Случай 1. Если $k = 1$ и $\tau_{i_1} = \tau_0$, т. е. $\tau(J_0) = \tau_0$, то речь идет об элементах степени 1, все они в $\mathcal{A}_p$ известны, так что $X = \tau_0$. По лемме 6.4 $\tau_0 \in N_1\backslash N_0$.

Случай 2. Если $k \geqslant 2$ и $\tau(J_0) = \tau_0\tau_{i_2}\dots\tau_{i_k}$, т.е. $\tau_0 = \tau_{i_1}$, то $\Delta(\tau(J_0))$ содержит слагаемое $\tau_{i_2}\dots\tau_{i_k} \otimes \tau_0$, которое не может сократиться никаким слагаемым из $\Delta(X)$. Легко видеть, что $\sigma_p(\tau_{i_2}\dots\tau_{i_k}) = j - 1$, поэтому $X \in N_j$, а не $X \in N_{j-1}$, как указано в предположениях доказываемого утверждения.

Случай 3. Если $k \geqslant 1$ и $i_1 \geqslant 1$, $\Delta\tau(J_0)$ содержит слагаемое $\xi_{i_1}\tau_{i_2}\dots\tau_{i_k} \otimes \tau_0$.

Единственный моном, коумножение от которого может сократить такое слагаемое, — моном $\xi_{i_1}\tau_0\tau_{i_2}\dots\tau_{i_k}$, который, следовательно, должен содержаться в X, что противоречит предположению, что слагаемых $\xi(I)\tau(J)$ с $\gamma(J) = \gamma_0$ и ненулевым I в сумме X нет.

Доказательство утверждения 6.3 закончено, а вместе с ним — доказательство теоремы 6.5.

□

Глава 7

Нильпотентные алгебры Ли и соотношения в их когомологиях

7.1 Предварительные сведения

Пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли над полем $\Bbbk$. Отметим, что известная специфика, возникающая в случае характеристики поля, равной 2 или 3, на дальнейшие рассуждения не влияет.

Универсальная обертывающая алгебра $U\mathfrak{g}$ является алгеброй Хопфа, вообще говоря, не градуированной. Напомним, что когомологии $H^*(\mathfrak{g}, N)$ алгебры Ли $\mathfrak{g}$ с коэффициентами в $\mathfrak{g}$-модуле N — это $\mathrm{Ext}^*_{U\mathfrak{g}}(\Bbbk, N)$. В частности, когомологии $H^*(\mathfrak{g}, (U\mathfrak{g})^*)$ тривиальны. В общем случае фильтрация Бухштабера

$$\Bbbk = N_0 \subset N_1 \subset \ldots \subset N_p \subset \ldots \subset (U\mathfrak{g})^*$$

не обязательно исчерпывает $(U\mathfrak{g})^*$. В самом деле, по лемме 5.3 условие $\bigcup\limits_p N_p = (U\mathfrak{g})^*$ равносильно $\bigcap\limits_p I^p = 0$, где I — идеал аугментации алгебры $U\mathfrak{g}$. Условие $\bigcap\limits_p I^p = 0$ равносильно остаточной нильпотентости алгебры Ли $\mathfrak{g}$, см. [144, Cor.3.5]. Напомним, что для любой алгебры Ли $\mathfrak{g}$ определен нижний центральный ряд $\mathfrak{g} \supset \gamma_2(\mathfrak{g}) = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \supset \ldots \supset \gamma_p(\mathfrak{g}) \supset \ldots$, где $\gamma_p(\mathfrak{g}) = [\mathfrak{g}, \gamma_{p-1}(\mathfrak{g}_n)]$. Алгебра Ли называется *нильпотентной*, если найдется p, для которого $\gamma_p(\mathfrak{g}) = 0$, и называется *остаточно нильпотентной*, если $\bigcap\limits_p \gamma_p(\mathfrak{g}) = 0$. Конечномерная остаточно нильпотентная алгебра Ли нильпотентна.

Таким образом, для остаточно нильпотентных алгебр Ли модуль $N_0 = \Bbbk \subset (U\mathfrak{g})^*$ полный, а значит, спектральная последовательность Бухштабера определена корректно и сходится к тривиальному модулю $E_\infty^{*,*}$, но является не триградуированной, а биградуированной. Если алгебра Ли $\mathfrak{g}$ имеет градуировку положительными целыми числами, то градуировка переносится на $U\mathfrak{g}$ и $(U\mathfrak{g})^*$, и тогда Bss оказывается триградуированной. Именно такие алгебры Ли будут рассмотрены в разделах 7.3 и 7.4.

В случае алгебр Ли вместо бар-резольвенты для $U\mathfrak{g}$, вычисляющей $\mathrm{Ext}^*_{U\mathfrak{g}}(\Bbbk, -)$, удобно использовать резольвенту Шевалле—Эйленберга. Напомним, что резольвентой Шевалле—Эйленберга модуля $\Bbbk$ называется комплекс $C_*(\mathfrak{g})$ с дифференциалом d_{CE}, где

$$C_s(\mathfrak{g}) = U\mathfrak{g} \otimes \Lambda^s \mathfrak{g},$$

а дифференциал $d_{CE} : C_s(\mathfrak{g}) \to C_{s-1}(\mathfrak{g})$ задан формулой

$$\begin{aligned} d_{CE}(u \otimes g_1 \wedge \ldots \wedge g_s) = \sum_{i=1}^{s} (-1)^i u g_i \otimes g_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{g}_i \wedge \ldots \wedge g_s + \\ + \sum_{i,j} (-1)^{i+j+1} u \otimes [g_i, g_j] \wedge g_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{g}_i \wedge \ldots \wedge \widehat{g}_j \wedge \ldots \wedge g_s. \end{aligned} \tag{7.1}$$

Для градуированной алгебры Ли $\mathfrak{g}$ с конечномерными однородными компонентами (например, такой является бесконечномерная алгебра Ли L_1) двойственный комплекс имеет вид $(U\mathfrak{g})^* \otimes \Lambda^s \mathfrak{g}^*$. Начинающаяся с $N_0 = \Bbbk$ фильтрация Бухштабера в $(U\mathfrak{g})^*$, , определяет триградуированную спектральную последовательность, для которой верно следующее утверждение.

Теорема 7.1. *Пусть $\mathfrak{g}$ — нильпотентная алгебра Ли, для которой $\gamma_n(\mathfrak{g}) = 0$. Тогда в спектральной последовательности Бухштабера все дифференциалы d_r при $r \geqslant n$ нулевые, в частности, $E_n^{*,*} = E_\infty^{*,*}$.*

Доказательство. Из стандартного описания спектральной последовательности комплекса с фильтрацией (например, см. [207, гл. XI]) видно, что если дифференциал изменяет фильтрацию не более, чем на k, то спектральная последовательность стабилизируется на $k+1$ члене, т. е. $E_{k+1} = E_\infty$.

Рассмотрим гомологический комплекс Шевалле—Эйленберга $C_s(\mathfrak{g}) = U\mathfrak{g} \otimes \Lambda^s \mathfrak{g}$ с дифференциалом (7.1). Степени идеала аугментации задают фильтрацию $F^p C_s(\mathfrak{g}) = I^p \otimes \Lambda^s \mathfrak{g}$ в $C_s(\mathfrak{g})$. Покажем, что дифференциал (7.1) изменяет фильтрацию не больше, чем на $n-1$. Произвольный элемент $x \in F^p C_s(\mathfrak{g})$ представляется в виде $\sum x_i \otimes y_i$, где $x_i \in I^p$ и $y_i \in \Lambda^s \mathfrak{g}$. Тогда $d_{CE}x$ имеет вид $\sum x_i g_j \otimes \tilde{y}_{ij}$, где $g_j \in \mathfrak{g}$, $\tilde{y}_{ij} \in \Lambda^{s+1}\mathfrak{g}$. По следствию 3.3 из [144] выполняется равенство $\gamma_j(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g} \cap I^j$, поэтому из условия теоремы следует, что ни один ненулевой элемент алгебры Ли $\mathfrak{g}$ не принадлежит I^n. Следовательно, произведения $x_i g_j$ могут принадлежать только I^k для $k < n + p$. Тем самым, d_{CE} в гомологическом комплексе изменяет фильтрацию не больше, чем на $n-1$. По лемме 5.3 фильтрация Бухштабера в $(U\mathfrak{g})^*$ двойственна фильтрации степенями идеала аугментации, поэтому переходя к двойственному комплексу, получаем нужное утверждение. □

7.2 Конечномерная абелева алгебра Ли

В этом разделе рассматривается абелева алгебра Ли $\mathfrak{g}$ конечной размерности n над полем $\Bbbk$ нулевой характеристики. Пусть $e_i, i = 1, \ldots, n$ — некоторый базис алгебры Ли $\mathfrak{g}$, тогда $[e_i, e_j] = 0$ для всех i, j. Универсальная обертывающая $U\mathfrak{g}$ является алгеброй многочленов $A = \Bbbk[x_1, \ldots, x_n]$. Можно считать A градуированной, положив $|x_i| = 2$. Диагональ определена соотношениями $\Delta x_i = 1 \otimes x_i + x_i \otimes 1$, т. е. мультипликативные образующие A являются примитивными относительно коумножения.

Мы дадим прямое доказательство стабилизации Bss такой алгебры Хопфа в члене $E_2^{*,*,*}$, иными словами, докажем тривиальность дифференциалов d_r при $r \geqslant 2$, что в общем случае доказано в теореме 7.1. Более того, мы увидим, что $E_1^{*,*,*}$ — это комплекс, двойственный над $\Bbbk$ резольвенте Кошуля, расщепленной в прямую сумму дополнительной градуировкой.

Двойственная алгебра A_* изоморфна тензорному произведению n копий алгебры разделенных степеней. Более точно, обозначим через $\gamma_i^{[k]} \in A_*$ элемент, который равен 1 на мономе x_i^k и 0 на всех остальных мономах. Для удобства положим $\gamma_i^{[0]} = 1$. Тогда элементы $\gamma_1^{[r_1]} \ldots \gamma_n^{[r_n]}$ образуют аддитивный базис A_*. Коумножение задается формулой

$$\Delta\gamma_1^{[r_1]} \ldots \gamma_n^{[r_n]} = \sum_{\substack{r_i = s_i + t_i, \\ i = 1, \ldots, n}} \gamma_1^{[s_1]} \ldots \gamma_n^{[s_n]} \otimes \gamma_1^{[t_1]} \ldots \gamma_n^{[t_n]},$$

а умножение — формулой

$$(\gamma_1^{[s_1]} \ldots \gamma_n^{[s_n]}) \cdot (\gamma_1^{[t_1]} \ldots \gamma_n^{[t_n]}) = \left(\prod_{i=1}^{n} \frac{(s_i + t_i)!}{s_i! t_i!} \right) \gamma_1^{[s_1+t_1]} \ldots \gamma_n^{[s_n+t_n]}.$$

Отсюда, в частности, следует, что модуль примитивных элементов A_* аддитивно над $\Bbbk$ порожден элементами $\gamma_i^{[1]}$.

Вычислим в A_* фильтрацию Бухштабера, начинающуюся с $N_0 = \Bbbk$. Это можно сделать либо напрямую, либо через фильтрацию степенями идеала аугментации I алгебры A. Легко видеть, что I^p состоит из линейных комбинаций мономов $x_1^{i_1} \ldots x_n^{i_n}$, для которых $\sum\limits_j i_j \geqslant p$. В частности,

$$I^p = I^{p+1} \oplus \Bbbk\langle x_1^{i_1} \ldots x_n^{i_n} \ : \ \sum_j i_j = p \rangle$$

Тогда лемме 5.3

$$N_p = \Bbbk\langle \gamma_1^{[r_1]} \ldots \gamma_n^{[r_n]} \ : \ \sum_j r_j \leqslant p \rangle$$

и

$$N_p = N_{p-1} \oplus \Bbbk\langle \gamma_1^{[r_1]} \dots \gamma_n^{[r_n]} \ : \ \sum_j r_j = p \rangle.$$

Резольвента Кошуля для $\mathfrak{g}$ описывается следующим образом. Пусть V — векторное пространство с базисом $y_1, \dots, y_n$, где элементы y_i имеют биградуировку $(-1, 2)$. Полиномиальным образующим x_i припишем биградуировку $(0, 2)$. Резольвента Кошуля представляет собой биградуированную дифференциальную алгебру $\Bbbk[x_1, \dots, x_n] \otimes \Lambda(y_1, \dots, y_n)$ с дифференциалом

$$d(f(x_1, \dots, x_n) \otimes y_{k_1} \wedge \dots \wedge y_{k_s}) = \sum_{i=1}^{s} (-1)^{i+1} f(x_1, \dots, x_n) x_{k_i} \otimes y_{k_1} \wedge \dots \wedge \widehat{y}_{k_i} \wedge \dots \wedge y_{k_s} \quad (7.2)$$

бистепени $(1, 0)$. Легко видеть, что резольвента состоит из свободных A-модулей $P^s = A \otimes \Lambda^s V$. Применяя к резольвенте Кошуля функтор $\mathrm{Hom}_A^*(-, \Bbbk)$ получаем комплекс модулей $\mathrm{Hom}_\Bbbk^*(\Lambda^s V, \Bbbk)$ с тривиальным дифференциалом. Таким образом, $\mathrm{Ext}_A^{s,*}(\Bbbk, \Bbbk)$ изоморфен $\Bbbk$-модулю $(\Lambda^s V)^*$, двойственному к $\Lambda^s V$.

Теперь отметим, что резольвента Кошуля имеет третью градуировку — так называемый вес: для монома $x_1^{r_1} \dots x_n^{r_n} \otimes y_{k_1} \wedge \dots \wedge y_{k_s}$ он определяется как $s + \sum r_j$ (неформально вес монома — это количество символов x_i и y_i в его записи). Легко видеть, что дифференциал сохраняет вес, а вся резольвента Кошуля распадается в прямую сумму ацикличных подкомплексов, состоящих из элементов одного и того же веса.

Теорема 7.2. *$(-q)$-я строка триградуированной спектральной последовательности*

$$E_1^{0,-q,*} \xleftarrow{d_1} E_1^{1,-q,*} \xleftarrow{d_1} E_1^{2,-q,*} \xleftarrow{d_1} \dots$$

изоморфна комплексу, двойственному над $\Bbbk$ прямому слагаемому резольвенты Кошуля, состоящему из элементов веса q. В частности, каждая такая строка точна и поэтому $E_2^{*,*,*} = E_\infty^{*,*,*}$.

Доказательство. Воспользуемся изоморфизмами $E_1^{p,-q,*} = (N_p/N_{p-1}) \otimes \mathrm{Ext}_A^{q-p,*}(\Bbbk, \Bbbk) = (N_p/N_{p-1}) \otimes (\Lambda^{q-p} V)^*$.

Для вычисления

$$d_1 : (N_p/N_{p-1}) \otimes (\Lambda^{q-p} V)^* \to (N_{p-1}/N_{p-2}) \otimes (\Lambda^{q-p+1} V)^*$$

воспользуемся теоремой 5.2. Из формулы для коумножения в A_* следует, что $D : (N_p/N_{p-1}) \to (N_{p-1}/N_{p-2}) \otimes P(A_*)$ задается формулой

$$D(\gamma_1^{[r_1]} \dots \gamma_n^{[r_n]}) = \sum_{j=1}^{n} \gamma_1^{[r_1]} \dots \gamma_j^{[r_j - 1]} \dots \gamma_n^{[r_n]} \otimes \gamma_j^{[1]},$$

где $\sum r_i = p$, причем если $r_j = 0$ для какого-то j, то соответствующее слагаемое в правой части отбрасывается. Таким образом,

$$d_1(\gamma_1^{[r_1]} \dots \gamma_n^{[r_n]} \otimes y^*_{i_1} \wedge \dots \wedge y^*_{i_{q-p}}) = \sum_{j=1}^{n} \gamma_1^{[r_1]} \dots \gamma_j^{[r_j-1]} \dots \gamma_n^{[r_n]} \otimes y^*_j \wedge y^*_{i_1} \wedge \dots \wedge y^*_{i_{q-p}}.$$

Легко видеть, что такая формула для d_1 получается из формулы (7.2) для дифференциала резольвенты Кошуля переходом к двойственным модулям, причем в ней фигурируют только элементы веса q. □

Фильтрация Φ^r для данного примера легко описывается. В самом деле, $d_1 : E_1^{1,-q,*} \to E_1^{0,-q,*}$ является эпиморфизмом, поэтому $\Phi^1 = \operatorname{Ext}^{*,*}_{\Bbbk[x_1,\dots,x_n]}(\Bbbk, \Bbbk)$, а значит, Φ^r, $r \geqslant 2$, тоже совпадают с $\operatorname{Ext}^{*,*}_{\Bbbk[x_1,\dots,x_n]}(\Bbbk, \Bbbk)$.

7.3 Алгебры Ли $\mathcal{G}L^n$

Рассмотрим алгебру Ли $\mathcal{G}L^n$ над $\mathbb{Q}$, заданную базисом $e_1, \dots, e_n$ и соотношениями $[e_i, e_j] = (j-i)e_{i+j}$, если $i + j \leqslant n$, и $[e_i, e_j] = 0$, если $i + j > n$. Легко видеть, что $\mathcal{G}L^n$ изоморфна фактору алгебры Ли L_1 по идеалу, порожденному элементами e_k, $k \geqslant n + 1$.

Эта серия алгебр интересна по нескольким причинам. Во-первых, $\mathcal{G}L^n$ служат конечномерными «аппроксимациями» к бесконечномерной алгебре Ли L_1, универсальная обертывающая которой тесно связана с алгеброй Ландвебера–Новикова S, [193]. Во-вторых, этим алгебрам Ли (рассматриваемым над $\mathbb{R}$) соответствуют важные нильмногообразия.

Напомним, что нильмногообразие — это компактное однородное пространство конечномерной односвязной нильпотентной группы Ли (над $\mathbb{R}$). Мальцев показал, см. [208], что для данной односвязной нильпотентной группы Ли нильмногообразие существует тогда и только тогда, когда соответствующая алгебра Ли обладает базисом с рациональными структурными константами. Для нильмногообразий имеет место теорема Номидзу, см. [122], об изоморфизме алгебры когомологий де Рама нильмногообразия и алгебры когомологий соответствующей нильпотентной алгебры Ли. Тем самым, алгебраические свойства когомологий алгебры Ли дают информацию о когомологиях де Рама соответствующего нильмногообразия и наоборот. К циклу работ [29; 181; 182] о произведениях Масси в когомологиях симплектических многообразий относится важная статья [183], в которой было показано, что для любого n нильмногообразие, соответствующее алгебре Ли $\mathcal{G}L^{2n}$, является симплектическим, причем в его когомологиях имеется нетривиальное $2n$-местное произведение Масси. Кроме того, среди нильмногообразий, соответствующих алгебрам Ли $\mathcal{G}L^n$, имеются однородные многообразия групп полиномиальных преобразований прямой [185; 188]. На $\mathbb{R}^n$

можно ввести структуру нильпотентной группы следующим образом. Положим

$$L^n = \{p_x(t) = t + \sum_{k=1}^{n} x_k t^{k+1}, x_k \in \mathbb{R}\}.$$

Как многообразие пространство L^n диффеоморфно $\mathbb{R}^n$. Произведение двух элементов L^n определено с помощью композиции:

$$(p_x * p_y)(t) = p_z(t) = p_y(p_x(t)) \mod t^{n+2}.$$

В группе L^n (группе полиномиальных преобразований прямой) имеется решетка Γ^n, состоящая из элементов $p_x(t)$ с целочисленными коэффициентами x_k. Получаем гладкое замкнутое нильмногообразие $M^n = L^n/\Gamma^n$, где Γ^n действует на L^n правыми сдвигами. Гомоморфизм групп $L^k \to L^{k-1}$, состоящий в отбрасывании последней координаты x_k, порождает две башни групп

$$\ldots \to L^n \to L^{n-1} \to \ldots \to L^1 \quad \text{и} \quad \ldots \to \Gamma^n \to \Gamma^{n-1} \to \ldots \to \Gamma^1$$

и башню расслоений

$$\ldots \to M^n \to M^{n-1} \to \ldots \to M^1 = S^1 \tag{7.3}$$

со слоем S^1. Отметим, что это не единственный выбор решеток в группах L^n, согласованных с проекциями, а значит, порождающих башню расслоений нильмногообразий. См. также обзор [180].

Естественно поставить проблему: какую информацию о кольце когомологий нильмногообразия несет Bss соответствующей алгебры Ли.

Далее в этом разделе приведено решение для нильмногообразий размерности 3 и 4. Как будет видно, уже в этих случаях проблема нетривиальна. Мы приводим достаточно детальное описание решения в этих размерностях для демонстрации общего подхода в случае более высоких размерностей. В следующем разделе мы рассмотрим аналогичную проблему для нильмногообразий Гейзенберга—Ли.

Завершая введение в этот раздел, отметим, что на $\mathcal{G}L^n$ можно ввести градуировку: положим $|e_k| = 2k$; коммутатор относительно этой градуировки однороден.

Рассмотрим внешнюю алгебру $\Lambda(\mathcal{G}L^n)^*$, порожденную элементами $\omega_1, \ldots, \omega_n$, двойственными к $e_1, \ldots, e_n$. Биградуировка элемента ω_k равна $(1, -2k)$. Дифференциал d_{CE} в комплексе Шевалле–Эйленберга $\Lambda(\mathcal{G}L^n)^*$ задается на образующих формулой $d_{CE}\omega_k = \sum\limits_{i<k/2} (k-2i)\omega_{k-i} \wedge \omega_i$. Легко видеть, что он повышает первую градиуровку на 1 и сохраняет вторую градуировку. Тем самым, в этом случае Bss триградуирована.

Далее для краткости $d_{CE} : \Lambda\mathfrak{g}^* \to \Lambda\mathfrak{g}^*$ будем обозначать через d. Все необходимые определения и сведения о произведениях Масси приведены в разделе 5.2.

7.3.1 Алгебра Ли $\mathcal{G}L^3$

Алгебра Ли $\mathcal{G}L^3$ совпадает с хорошо известной алгеброй Ли—Гейзенберга. Она имеет три образующие e_1, e_2, e_3 и коммутационные соотношения: $[e_1, e_2] = e_3$, $[e_2, e_3] = [e_1, e_3] = 0$. Когомологии $H^*(\mathcal{G}L^3)$ легко получить из резольвенты Шевалле—Эйленберга. Как векторные пространства над $\mathbb{R}$ когомологии $H^k(\mathcal{G}L^3)$ имеют следующие наборы базисных элементов (мы обозначаем через ω_k элемент двойственный к e_k):

$$\begin{aligned} k &= 0 \qquad 1 \\ k &= 1 \qquad \omega_1, \omega_2 \\ k &= 2 \qquad \omega_3 \wedge \omega_1, \omega_3 \wedge \omega_2 \\ k &= 3 \qquad \omega_3 \wedge \omega_2 \wedge \omega_1 \end{aligned}$$

За исключением тех произведений элементов дополнительных размерностей, которые нетривиальны по двойственности Пуанкаре, остальные произведения в $H^*(\mathcal{G}L^3)$ тривиальны.

Классы в размерности 2 реализуются тройными нетривиальными произведениями Масси:

$$\begin{aligned} \omega_3 \wedge \omega_1 &= \langle \omega_1, \omega_1, \omega_2 \rangle \\ \omega_3 \wedge \omega_2 &= \langle -\omega_1, \omega_2, \omega_2 \rangle. \end{aligned}$$

Напомним (см. раздел А.2), что $\overline{x} = (-1)^q x$ для элемента x градуировки q. Проверим первое равенство. Для этого положим $u = 0, v = \omega_3$. Тогда $du = 0 = \overline{\omega}_1 \wedge \omega_1, dv = \omega_2 \wedge \omega_1 = \overline{\omega}_1 \wedge \omega_2$. Откуда $\overline{u} \wedge \omega_2 + \overline{\omega}_1 \wedge v = \omega_3 \wedge \omega_1$, что доказывает первое равенство.

Для проверки второго равенства положим $u = -\omega_3, v = 0$. Тогда $dv = 0 = \overline{\omega}_2 \wedge \omega_2$, $du = -\omega_2 \wedge \omega_1 = (-\overline{\omega}_1) \wedge \omega_2$. Откуда $\overline{u} \wedge \omega_2 + \overline{\omega}_1 \wedge v = \omega_3 \wedge \omega_2$, что и требовалось.

Опишем теперь Bss для алгебры Хопфа $U\mathcal{G}L^3$. В этом разделе временно будем использовать обозначение $\mathfrak{g} = \mathcal{G}L^3$.

Базис универсальной обертывающей алгебры $U\mathfrak{g}$ составляют мономы вида $e_1^a e_2^b e_3^c$. Положим $p(e_1^a e_2^b e_3^c) = a + b + 2c$.

Лемма 7.1.

(*a*) *Элемент* $x = e_1^a e_2^b e_3^c$ *принадлежит* N_p *и не принадлежит* N_{p-1}, *где* $p = p(x)$.

(*b*) *Более того,* $N_p = N_{p-1} \oplus \mathbb{Q}\langle e_1^a e_2^b e_3^c \ : \ a + b + 2c = p \rangle$.

Доказательство. Аналогично доказательству теоремы 6.1. □

Следствие 7.1. *Производящий ряд последовательности* $k_p = \dim N_p / N_{p-1}$ *равен*

$\frac{1}{(1-x)^2(1-x^2)}$. *В частности,* $k_{2n} = \dim N_{2n}/N_{2n-1} = (n+1)^2$ *и* $k_{2n+1} = \dim N_{2n+1}/N_{2n} = (n+1)(n+2)$.

Рассмотрим теперь комплекс $(U\mathfrak{g})^* \otimes \Lambda\mathfrak{g}^*$, двойственный к резольвенте $U\mathfrak{g} \otimes \Lambda\mathfrak{g}$. Элементы $\mathfrak{g}^*$, двойственные элементам e_i, будем обозначать ω_i, тогда $d\omega_k$ задается формулой (7.10), в частности, $d\omega_1 = d\omega_2 = 0, d\omega_3 = \omega_2 \wedge \omega_1$.

Дифференциал d_{CE} комплекса $(U\mathfrak{g})^* \otimes \Lambda\mathfrak{g}^*$ легко описать явно на любом мономе вида $(e_1^a e_2^b e_3^c)^* \otimes \omega$ (здесь $\omega \in \Lambda\mathfrak{g}^*$):

$$d_{CE}((e_1^a e_2^b e_3^c)^* \otimes \omega) = (e_1^{a-1} e_2^b e_3^c)^* \otimes \omega_1 \wedge \omega + (e_1^a e_2^{b-1} e_3^c)^* \otimes \omega_2 \wedge \omega + \\ + (e_1^a e_2^b e_3^{c-1})^* \otimes \omega_3 \wedge \omega - (b+1)(e_1^a e_2^{b+1} e_3^{c-1})^* \otimes \omega_1 \wedge \omega + (e_1^a e_2^b e_3^c)^* \otimes d\omega. \quad (7.4)$$

Разумеется, если среди показателей a, b, c есть нулевые, то соответствующие слагаемые в правой части опускаются.

Соберем вместе утверждения о дифференциалах Bss для алгебры Ли $\mathfrak{g} = \mathcal{G}L^3$.

Утверждение 7.1.

(*a*) $d_1 : N_p/N_{p-1} \to N_{p-1}/N_{p-2} \otimes H^1(\mathfrak{g})$ *является вложением. Для* $p = 1$ *это изоморфизм.*

(*b*) $d_1 : N_{p-1}/N_{p-2} \otimes H^1(\mathfrak{g}) \to N_{p-2}/N_{p-3} \otimes H^2(\mathfrak{g})$ *является нулевым гомоморфизмом.*

(c) $d_1 : N_{p-2}/N_{p-3} \otimes H^2(\mathfrak{g}) \to N_{p-3}/N_{p-4} \otimes H^3(\mathfrak{g})$ *является эпиморфизмом для всех* $p \geqslant 3$.

Доказательство. Пункты (*a*) и (*b*) являются следствиями общих свойств дифференциала d_1, см. теорему 5.2.

Для доказательства пункта (*c*) заметим, что $(e_1^a e_2^b e_3^c)^* \otimes \omega_3 \wedge \omega_2 \wedge \omega_1$ равен $d_1((e_1^a e_2^{b+1} e_3^c)^* \otimes \omega_1 \wedge \omega_3)$. □

Утверждение 7.1 дает нам достаточно информации, чтобы вычислить как $E_2^{*,*,*}$, так и d_2. В самом деле, нетривиальными в $E_2^{*,*,*}$ могут быть только $E_2^{q-2,-q,*}$, $q \geqslant 2$, и $E_2^{p,-p-1,*}$, $p \geqslant 2$. Из утверждения 7.1 для их размерностей получаем формулы

$$\dim E_2^{q-2,-2,*} = \dim E_1^{q-2,-q} - \dim E_1^{q-3,-q} = 2k_{q-2} - k_{q-3};$$
$$\dim E_2^{p,-p-1,*} = \dim E_1^{p,-p-1,*} - E_1^{p+1,-p-1,*} = 2k_p - k_{p+1}.$$

Утверждение 7.2. *Для* $p \geqslant 2$ *выполняется равенство* $\dim E_2^{p,-p-1,*} = \dim E_2^{p-2,-p,*}$

Доказательство. Нам нужно доказать, что для $p \geqslant 2$ выполнено соотношение $2k_p - k_{p+1} = 2k_{q-2} - k_{q-3}$.

Обозначим через $f(x) = \frac{1}{(1-x)^2(1-x^2)}$ производящий ряд последовательности (k_p). Тогда нужное нам равенство означает, что в выражении $(1-2x+2x^3-x^4)f(x)$ коэффи-

циенты при x^k для $k \geqslant 3$ нулевые. Но легко проверить, что $(1-2x+2x^3-x^4)f(x) = 1$. □

Теорема 7.3. *В Bss для алгебры Ли $U\mathcal{G}L^3$ дифференциал d_2 является изоморфизмом, исключая группу $E_2^{0,0,0}$. В частности, $E_3^{*,*,*} = E_\infty^{*,*,*}$.*

Доказательство. Нетривиальными дифференциалами могут быть только $d_2 : E_2^{p,-p-1,*} \to E_2^{p-2,-p,*}$, $p \geqslant 2$. Покажем, что все они изоморфизмы. Рассуждение нужно провести последовательно по всем $p \geqslant 2$. Для $p = 2$ по соображениям размерности $d_2 : E_2^{p,-p-1,*} \to E_2^{p-2,-p,*}$ должен быть вложением, но размерности этих двух пространств совпадают по утверждению 7.2, а значит, для $p = 2$ дифференциал d_2 — изоморфизм, затем переходим к $p = 3$ и т. д. □

Замечание. (a) Теорему 7.3 можно также вывести из теоремы 7.1.

(b) В размерности 3 имеются только две нильпотентные алгебры Ли: абелева алгебра Ли и $\mathcal{G}L^3$. Первый случай был рассмотрен в разделе 7.2.

7.3.2 Алгебра Ли $\mathcal{G}L^4$

Мы начнем этот раздел со следующего замечания. Классификация четырехмерных вещественных нильпотентных алгебр Ли очень проста — таких алгебр всего три:

– абелева;

– прямая сумма одномерной алгебры и $\mathcal{G}L^3$;

– алгебра $\mathcal{G}L^4$.

Случай абелевой алгебры Ли был рассмотрен в разделе 7.2. Алгебра $\mathbb{R} \oplus \mathcal{G}L^3$ соответствует известному многообразию Кодаиры—Терстона. Легко проверить, что универсальная обертывающая алгебры $\mathbb{R} \oplus \mathcal{G}L^3$ изоморфна тензорному произведению универсальных обертывающих слагаемых, а фильтрация Бухштабера на $U(\mathbb{R} \oplus \mathcal{G}L^3)^*$ индуцирована соответствующими фильтрациями на $U(\mathbb{R})^*$ и $U(\mathcal{G}L^3)^*$, что позволяет легко свести описание триградуированной спектральной последовательсти для $\mathbb{R} \oplus \mathcal{G}L^3$ к приведенным выше результатам.

В этом разделы мы детально опишем Bss для алгебры $\mathcal{G}L^4$, которая порождена элементами e_1, e_2, e_3, e_4 и соотношениями $[e_i, e_j] = (j-i)e_{i+j}$ для $i + j \leqslant 4$ и $[e_i, e_j] = 0$ для $i + j > 4$.

Когомологии $H^*(\mathcal{G}L^4)$ хорошо известны и их легко получить из резольвенты Шевалле—Эйленберга. Как векторные пространства над $\mathbb{R}$ когомологии $H^k(\mathcal{G}L^4)$ име-

ют следующие наборы базисных элементов:

$$\begin{aligned}
&k=0 \qquad 1\\
&k=1 \qquad \omega_1,\omega_2\\
&k=2 \qquad \omega_3\wedge\omega_2,\omega_4\wedge\omega_1\\
&k=3 \qquad \omega_4\wedge\omega_3\wedge\omega_1,\omega_4\wedge\omega_3\wedge\omega_2\\
&k=4 \qquad \omega_4\wedge\omega_3\wedge\omega_2\wedge\omega_1
\end{aligned}$$

За исключением тех произведений элементов дополнительных размерностей, которые нетривиальны по двойственности Пуанкаре, остальные произведения в $H^*(\mathcal{G}L^4)$ тривиальны.

Все классы в размерности 3 и класс $\omega_3\wedge\omega_2$ в размерности 2 реализуются тройными нетривиальными произведениями Масси:

$$\begin{aligned}
\omega_3\wedge\omega_2 &= \langle -\omega_1,\omega_2,\omega_2\rangle\\
\omega_4\wedge\omega_3\wedge\omega_2 &= \langle \omega_2,\omega_2,\omega_4\wedge\omega_1\rangle\\
\omega_4\wedge\omega_3\wedge\omega_1 &= \langle \omega_1,\frac{1}{2}\omega_2,\omega_4\wedge\omega_1\rangle.
\end{aligned}$$

Первое равенство было проверено в разделе про алгебру $\mathcal{G}L^3$. Для проверки второго равенства рассмотрим $u=0$ и $v=\omega_3\wedge\omega_4$. Тогда $du=0=\overline{\omega}_2\wedge\omega_2$ и $dv=\omega_2\wedge\omega_1\wedge\omega_4=\overline{\omega}_2\wedge\omega_4\wedge\omega_1$. Откуда $\overline{u}\wedge\omega_4\wedge\omega_1+\overline{\omega}_2\wedge v=-\omega_2\wedge\omega_3\wedge\omega_4=\omega_4\wedge\omega_3\wedge\omega_2$, что доказывает второе равенство. Для проверки третьего равенства положим $u=\frac{1}{2}\omega_3$ и $v=\frac{1}{2}\omega_3\wedge\omega_4$. Тогда $du=\frac{1}{2}\omega_2\wedge\omega_1=\overline{\omega}_1\wedge\frac{1}{2}\omega_2$ и $dv=\frac{1}{2}\omega_2\wedge\omega_1\wedge\omega_4=\frac{1}{2}\overline{\omega}_2\wedge\omega_4\wedge\omega_1$. Откуда $\overline{u}\wedge\omega_4\wedge\omega_1+\overline{\omega}_1\wedge v=-\frac{1}{2}\omega_3\wedge\omega_4\wedge\omega_1-\frac{1}{2}\omega_1\wedge\omega_3\wedge\omega_4=\omega_4\wedge\omega_3\wedge\omega_1$, что доказывает третье равенство.

Класс $\omega_4\wedge\omega_1$ реализуется четверным нетривиальным произведением Масси:

$$\omega_4\wedge\omega_1=\langle 2\omega_2,\omega_1,\omega_1,-\omega_1\rangle.$$

В самом деле, выберем три элемента, $a_1=-2\omega_3$, $a_2=0$, $a_3=0$, заклеивающие произведения соседних элементов в последовательности $2\omega_2,\omega_1,\omega_1,-\omega_1$: $da_1=-2\omega_2\wedge\omega_1=\overline{2\omega_2}\wedge\omega_1$, $da_2=da_3=0$. Произведения Масси трех последовательных элементов исходной последовательности тоже тривиальны: положим $b_1=\omega_4$, $b_2=0$. Тогда $db_1=2\omega_3\wedge\omega_1=\overline{a}_1\wedge\omega_1+\overline{2\omega_2}\wedge a_2$, $db_2=0=\overline{a}_2\wedge(-\omega_1)+\overline{\omega}_1\wedge a_3$. Тогда четверное произведение Масси представлено циклом $\overline{b}_1\wedge(-\omega_1)+\overline{a}_1\wedge a_3+\overline{2\omega_2}\wedge b_2=\omega_4\wedge\omega_1$.

Продемонстрируем нетривиальность произведения Масси $\langle 2\omega_2,\omega_1,\omega_1,-\omega_1\rangle$. Это удобно сделать в обозначениях пункта А.2. Положим $x(1,1)=2\omega_2, x(2,2)=x(3,3)=\omega_1, x(4,4)=-\omega_1$. Тогда элемент $x(1,2)$ определен однозначно и равен $-2\omega_3$, а элементы $x(2,3)=x$, $x(3,4)=y$ могут независимо принимать одно из трех значений: $\pm\omega_2$ и

0. Тогда $x(1,3) = \omega_4$, а элемент $x(2,4)$ равен $\alpha\omega_3$, где α — некоторый числовой коэффициент, зависящий от выбора x и y. Таким образом, мы получили определяющую систему, которая задает коцикл $\omega_4 \wedge \omega_1 + \beta\omega_3 \wedge \omega_2$, где β — числовой коэффициент, зависящий от x и y. Легко видеть, что ни при каких x, y этот коцикл не когомологичен 0.

Опишем теперь Bss для универсальной обертывающей алгебры $U\mathcal{G}L^4$. Базис алгебры $U\mathcal{G}L^4$ составляют мономы вида $e_1^a e_2^b e_3^c e_4^d$. Положим $p(e_1^a e_2^b e_3^c e_4^d) = a+b+2c+3d$.

Лемма 7.2. (*a*) *Элемент* $x = e_1^a e_2^b e_3^c e_4^d$ *принадлежит* N_p *и не принадлежит* N_{p-1}, *где* $p = p(x)$.

(*b*) *Более того,* $N_p = N_{p-1} \oplus \mathbb{Q}\langle e_1^a e_2^b e_3^c e_4^d \ : \ a+b+2c+3d = p\rangle$.

Доказательство. Аналогично доказательству теоремы 6.1. □

Следствие 7.2. *Производящий ряд последовательности* $k_p = \dim N_p/N_{p-1}$ *равен* $\sum\limits_{p\geqslant 0} k_p x^p = \frac{1}{(1-x)^2(1-x^2)(1-x^3)}$.

Рассмотрим теперь комплекс $(U\mathfrak{g})^* \otimes \Lambda\mathfrak{g}^*$, двойственный к резольвенте $U\mathfrak{g} \otimes \Lambda\mathfrak{g}$. Элементы $\mathfrak{g}^*$, двойственные элементам e_i, будем обозначать ω_i, тогда $d\omega_k$ задется формулой (7.10), в частности, $d\omega_1 = d\omega_2 = 0, d\omega_3 = \omega_2 \wedge \omega_1$, $d\omega_4 = 2\omega_3 \wedge \omega_1$. Элемент, двойственный моному $e_1^a e_2^b e_3^c e_4^d$, будем для краткости обозначать (a,b,c,d).

Дифференциал d_{CE} комплекса $(U\mathfrak{g})^* \otimes \Lambda\mathfrak{g}^*$ легко описать явно на любом мономе вида $(a,b,c,d) \otimes \omega$ (здесь $\omega \in \Lambda\mathfrak{g}^*$):

$$\begin{aligned} d_{CE}((a,b,c,d)\otimes\omega) &= (a-1,b,c,d)\otimes\omega_1\wedge\omega + \\ &+ (a,b-1,c,d)\otimes\omega_2\wedge\omega + (a,b,c-1,d)\otimes\omega_3\wedge\omega + (a,b,c,d-1)\otimes\omega_4\wedge\omega - \\ &- (b+1)(a,b+1,c-1,d)^*\otimes\omega_1\wedge\omega - 2(c+1)(a,b,c+1,d-1)^*\otimes\omega_1\wedge\omega + \\ &+ (a,b,c,d)\otimes d\omega. \quad (7.5) \end{aligned}$$

Разумеется, если среди показателей a, b, c, d есть нулевые, то соответствующие слагаемые в правой части опускаются.

Соберем вместе утверждения о дифференциалах в триградуированной спектральной последовательности Бухштабера для алгебры Ли $\mathfrak{g} = \mathcal{G}L^4$.

Прежде всего отметим, что в члене $E_1^{*,*,*}$ отличными от тривальных могут быть только группы $E_1^{p,q,*}$, находящиеся на одной из пяти диагоналей $-4 \leqslant p+q \leqslant 0$. Более того,

$$\begin{aligned} &E_1^{p,-p,*} = N_p/N_{p-1}, && \dim E_1^{p,-p,*} = k_p, \\ &E_1^{p,-p-1,*} = N_p/N_{p-1}\otimes H^1, && \dim E_1^{p,-p-1,*} = 2k_p, \\ &E_1^{p,-p-2,*} = N_p/N_{p-1}\otimes H^2, && \dim E_1^{p,-p-2,*} = 2k_p, \\ &E_1^{p,-p-3,*} = N_p/N_{p-1}\otimes H^3, && \dim E_1^{p,-p-4,*} = k_p; \end{aligned}$$

здесь и далее в этом параграфе для краткости используется обозначение $H^k = H^k(\mathcal{G}L^4)$.

Утверждение 7.3.

(*a*) $d_1 : N_p/N_{p-1} \to N_{p-1}/N_{p-2} \otimes H^1$ *является вложением. Для* $p = 1$ *это изоморфизм.*

(*b*) $d_1 : N_{p-1}/N_{p-2} \otimes H^1 \to N_{p-2}/N_{p-3} \otimes H^2$ *является нулевым гомоморфизмом.*

(*c*) $d_1 : N_{p-2}/N_{p-3} \otimes H^2 \to N_{p-3}/N_{p-4} \otimes H^3$ *является нулевым гомоморфизмом.*

(*d*) $d_1 : N_{p-3}/N_{p-4} \otimes H^3 \to N_{p-4}/N_{p-5} \otimes H^4$ *является эпиморфизмом для всех* $p \geqslant 3$.

Доказательство. Пункты (*a*), (*b*) и (*c*) являются следствиями общих свойств дифференциала d_1, см. теорему 5.2.

Для доказательства пункта (*d*) заметим, что $(a, b, c, d) \otimes \omega_4 \wedge \omega_3 \wedge \omega_2 \wedge \omega_1$ равен $d_1((a, b + 1, c, d) \otimes \omega_4 \wedge \omega_3 \wedge \omega_1)$. □

В качестве следствия немедленно получаем следующее описание члена $E_2^{*,*,*}$.

Теорема 7.4.

(0) $E_2^{p,-p,*} = 0$;

(1) $\dim E_2^{p,-p-1,*} = 2k_p - k_{p+1}$;

(2) $E_2^{p,-p-2,*} = E_1^{p,-p-2,*}$, $\dim E_2^{p,-p-2,*} = 2k_p$;

(3) $\dim E_2^{p,-p-3,*} = 2k_p - k_{p-1}$;

(4) $E_2^{p,-p-4,*} = 0$.

Чтобы описать дифференциал d_2, нам нужно выбрать базисные элементы в $E_2^{p,-p-1,*}$ в терминах их представителей в $E_1^{p,-p-1,*}$. Любой элемент в $E_1^{p,-p-1,*}$ является линейной комбинацией элементов вида $(a, b, c, d) \otimes \omega_1$ и $(a, b, c, d) \otimes \omega_2$, где $a + b + 2c + 3d = p$.

Лемма 7.3. *Независимыми элементами в* $E_2^{p,-p-1,*}$ *являются элементы, представленные в* $E_1^{p,-p-1,*}$ *циклами следующих видов:*

(*i*) $(a, b, c, d) \otimes \omega_1$, *где* $b \geqslant 2$;

(*ii*) $(a, 0, c, d) \otimes \omega_1$, *где* $c \geqslant 2$;

(*iii*) $(a, 0, 0, d) \otimes \omega_1$, *где* $d \geqslant 1$.

Доказательство. Элементы $E_2^{p,-p-1,*}$ определены представляющими циклами из $E_1^{p,-p-1,*}$ с точностью до прибавления элементов вида $d_1(A, B, C, D)$, где $(A, B, C, D) \in E_1^{p+1,-p-1,*}$.

Легко видеть, что $d_1(a, b + 1, c, d) = (a, b, c, d) \otimes \omega_2 + u \otimes \omega_1$, где $u \in N_p/N_{p-1}$. Тем самым, в $E_2^{p,-p-1,*}$ выполнено равенство $(a, b, c, d) \otimes \omega_2 = -u \otimes \omega_1$, а значит, любой элемент $E_2^{p,-p-1,*}$ представляется циклом из $E_1^{p,-p-1,*}$, который является линейной комбинацией элементов вида $(a, b, c, d) \otimes \omega_1$.

Теперь заметим, что $d_1(a,0,c+1,d) = \big((a-1,0,b+1,d) - 2(c+2)(a,0,c+2,d-1) - (a,1,c,d)\big)\otimes\omega_1$. Следовательно, в $E_2^{p,-p-1,*}$ выполнено равенство

$$(a,1,c,d)\otimes\omega_1 = (a-1,0,b+1,d)\otimes\omega_1 - 2(c+2)(a,0,c+2,d-1)\otimes\omega_1.$$

Далее, $d_1(a,0,0,d+1) = \big((a-1,0,0,d+1) - 3(a,0,1,d)\big)\otimes\omega_1$. Следовательно, в $E_2^{p,-p-1,*}$ выполнено равенство

$$(a,0,1,d)\otimes\omega_1 = \frac{1}{3}(a-1,0,0,d+1)\otimes\omega_1.$$

Наконец, элемент вида $(a,0,0,0)\otimes\omega_1$ равен $d_1(a+1,0,0,0)$.

Остается показать, что количество элементов $(a,b,c,d)\otimes\omega_1$, где $a+b+2b+3c=p$, указанного в формулировке леммы вида, в точности равно $2k_p - k_{p+1}$.

Для этого подчитаем количества элементов разной формы с помощью производящих рядов. А именно, производящий ряд фильтрации p для количества элементов

- вида (a,b,c,d), где $b\geqslant 2$, равен $\frac{x^2}{(1-x)^2(1-x^2)(1-x^3)}$;
- вида $(a,0,c,d)$, где $c\geqslant 2$, равен $\frac{x^4}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)}$;
- вида $(a,0,0,d)$, где $d\geqslant 1$, равен $\frac{x^3}{(1-x)(1-x^3)}$.

Теперь нужное утверждение следует из легко проверяемого равенства

$$\frac{x^2}{(1-x)^2(1-x^2)(1-x^3)} + \frac{x^4}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)} + \frac{x^3}{(1-x)(1-x^3)} = \\ = \frac{2-1/x}{(1-x)^2(1-x^2)(1-x^3)} + \frac{1}{x},$$

Здесь дробь в правой части — производящий ряд для последовательности $2k_p - k_{p+1}$ для $p\geqslant 0$, слагаемое $\frac{1}{x}$ нужно, чтобы убрать из суммы не имеющее смысла слагаемое для $p=-1$. □

Следующий шаг состоит в вычислении дифференциалов d_2 и d_3 на элементах, описанных в лемме 7.3.

Лемма 7.4. (*a*) *Дифференциал* $d_2 : E_2^{p,-p-1,*} \to E_2^{p-2,-p,*} = N_{p-2}/N_{p-3}\otimes H^2$ *на элементах типа* $(a,b,c,d)\otimes\omega_1$, *где* $b\geqslant 2$, *нетривиален, более точно,*

$$d_2\big((a,b,c,d)\otimes\omega_1\big) = (a,b-2,c,d)\otimes\omega_3\wedge\omega_2. \tag{7.6}$$

(*b*) *Дифференциал* $d_2 : E_2^{p,-p-1,*} \to E_2^{p-2,-p,*} = N_{p-2}/N_{p-3}\otimes H^2$ *на элементах типа* $(a,0,c,d)\otimes\omega_1$, *где* $c\geqslant 2$, *и на элементах вида* $(a,0,0,d)\otimes\omega_1$, *где* $d\geqslant 1$, *тривиален.*

Доказательство. Прямое вычисление. □

Следствие 7.3. (*a*) *В качестве базиса в* $E_3^{-p,-p-1,*}$ *можно взять классы с представителями* $(a,0,c,d)\otimes\omega_1$, *где* $c\geqslant 2$, *и* $(a,0,0,d)\otimes\omega_1$, *где* $d\geqslant 1$.

Лемма 7.5. *Дифференциал*

$$d_2 : E_2^{p,-p-2,*} = N_p/N_{p-1}\otimes H^2 \to E_2^{p-2,-p-1,*} = N_{p-2}/N_{p-3}\otimes H^3$$

является эпиморфизмом. В частности, $E_3^{p-2,-p-1,*}=0$.

Доказательство. Рассмотрим в $E_2^{p,-p-2,*} = N_p/N_{p-1}\otimes H^2$ подмодуль M, порожденный элементами $(a,b,c,d)\otimes\omega_4\wedge\omega_1$, $b\geqslant 2$, и $(a,0,c,d)\otimes\omega_4\wedge\omega_1$, $c\geqslant 1$. Из леммы 7.4 следует, что пересечение этого подмодуля с образом d_2 нулевое. Прямым вычислением нетрудно показать, что

$$\begin{aligned} d_2\big((a,b,c,d)\otimes\omega_4\wedge\omega_1\big) &= -(a,b-2,c,d)\otimes\omega_4\wedge\omega_3\wedge\omega_2 + u\otimes\omega_4\wedge\omega_3\wedge\omega_1;\\ d_2\big((a,0,c,d)\otimes\omega_4\wedge\omega_1\big) &= -(a,0,c-1,d)\otimes\omega_4\wedge\omega_3\wedge\omega_1, \end{aligned}$$

где u — некоторый элемент N_{p-2}/N_{p-3}. Легко сообразить, что элементы в правых частях этих равенств элементов независимы. Таким образом, мы получаем вложение M на подмодуль в $E_2^{p-2,-p-1,*} = N_{p-2}/N_{p-3}\otimes H^3$. Покажем, что в действительности это изоморфизм.

Размерности модуля M во всевозможных фильтрациях находятся из производящего ряда

$$\frac{x^2}{(1-x)^2(1-x^2)(1-x^3)} + \frac{x^2}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)}. \tag{7.7}$$

С другой стороны, как мы видели в теореме 7.4(3), размерности $E_2^{p-2,-p-1,*}$ находятся из производящего ряда

$$\frac{2-x}{(1-x)^2(1-x^2)(1-x^3)}.$$

Нам надо показать, что коэффициенты этого ряда и ряда (7.7) совпадают со сдвигом размерностей на 2. Это следует из легко проверяемого равенства

$$\frac{x^2}{(1-x)^2(1-x^2)(1-x^3)} + \frac{x^2}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)} = x^2\,\frac{2-x}{(1-x)^2(1-x^2)(1-x^3)}.$$

□

Итогом предыдущих рассуждений являются следующие факты о $E_3^{*,*,*}$. Ненулевые группы расположены на двух диагоналях: $E_3^{p,-p-1,*}$ и $E_3^{p,-p-2,*}$. Базисные элементы в $E_3^{p,-p-1,*}$ представлены элементами $(a,0,c,d)\otimes\omega_1$, $c\geqslant 2$, и $(a,0,0,d)\otimes\omega_1$, $d\geqslant 1$,

см. лемму 7.4. Отсюда получаем производящий ряд для $\dim E_3^{p,-p-1,*}$:

$$A(x) = \frac{x^4}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)} + \frac{x^3}{(1-x)(1-x^3)}.$$

С другой стороны, лемма 7.5 не позволяет явно перечислить представители элементов группы $E_3^{p,-p-2,*}$, но мы можем вычислить ее размерность. Для этого вспомним, что

$$E_2^{p,-p-2,*} = N_p/N_{p-1} \otimes \omega_3 \wedge \omega_2 \oplus N_p/N_{p-1} \otimes \omega_4 \wedge \omega_1.$$

В этой прямой сумме первое подпространство совпадает с образом d_2, см. лемму 7.4, а второе подпространство под действием d_2 эпиморфно отображается на $E_2^{p-2,-p-1,*}$, см. лемму 7.5. Значит, $\dim E_3^{p,-p-2,*} = \dim N_p/N_{p-1} - \dim E_2^{p-2,-p-1,*} = k_p - (2k_{p-2} - k_{p-3})$. Соответствующий производящий ряд равен

$$B(x) = \frac{1-2x^2+x^3}{(1-x)^2(1-x^2)(1-x^3)}.$$

Лемма 7.6. *Размерности ненулевых групп $E_3^{*,*,*}$, связанных дифференциалом d_3, равны, а именно:*

$$\dim E_3^{p,-p-1,*} = \dim E_3^{p-3,-p+1}.$$

Доказательство. Очевидным образом следует из равенства производящих рядов со сдвигом размерностей на 3: $A(x) = x^3\, B(x)$. □

Теорема 7.5. *Дифференциалы $d_3 : E_3^{p,-p-1,*} \to E_3^{p-3,-p+1}$ являются изоморфизмами. В частности, $E_4^{*,*,*} = E_\infty^{*,*,*}$.*

Доказательство. Рассуждение проведем по $p \geqslant 3$ последовательно. По соображениям размерности для $p = 3$ дифференциал d_3 должен быть вложением, тогда по лемме 7.6 он — изоморфизм. Затем рассматриваем d_3 для $p = 4$ и т. д. □

Замечание. Эту теорему можно также вывести из теоремы 7.1.

Для полноты приведем явные формулы для значений d_3 на образующих $E_3^{p,-p-2,*}$, хотя мы их не используем.

Лемма 7.7. *Дифференциал $d_3 : E_3^{p,-p-1,*} \to E_3^{p-2,-p,*} = N_{p-3}/N_{p-4} \otimes H^2$ на элементах типа $(a,0,c,d) \otimes \omega_1$, где $c \geqslant 2$, и на элементах вида $(a,0,0,d) \otimes \omega_1$, где $d \geqslant 1$, нетривиален. Более точно,*

$$d_3\big((a,0,c,d) \otimes \omega_1\big) = -\frac{1}{2}(a,1,c-2,d) \otimes \omega_4 \wedge \omega_1 + \frac{1}{2}(a-1,0,c-1,d) \otimes \omega_4 \wedge \omega_1. \quad (7.8)$$

$$d_3\big((a,0,0,d) \otimes \omega_1\big) = (a,0,0,d-1) \otimes \omega_4 \wedge \omega_1. \quad (7.9)$$

7.3.3 Реализация двумерных классов когомологий

Реализация классов двумерных когомологий многообразий M^3 и M^4 обсуждалась выше. В этом разделе мы обсудим реализацию образующих в двумерных когомологиях нильмногообразий M^n для $n \geqslant 5$. Хорошо известно, что второе число Бетти нильмногообразия M^n при $n \geqslant 5$ равно 3, см. [210]. Образующими служат два класса $[\omega_3 \wedge \omega_2]$ и $[\omega_5 \wedge \omega_2 - 3\omega_4 \wedge \omega_3]$, которые стабильны в башне (7.3), т. е. эти классы переходят в одноименные при гомоморфизме в когомологиях, индуцированном проекцией расслоения $p_n : M^{n+1} \to M^n$ при $n \geqslant 5$. Заметим, что именно эти два класса и только они имеются в двумерных когомологиях бесконечномерной алгебры Ли L_1, пополнение которой в топологии, задаваемой градуировкой, представляет собой обратный предел алгебр $\mathcal{G}L^n$. Реализация этих классов в виде произведений Масси или образов дифференциалов Bss точно такая же, как и в когомологиях алгебры Ли L_1.

Замечание *о когомологиях алгебры L_1 в размерностях 1 и 2.* Дифференциал в комплексе Шевалле—Эйленберга $\Lambda(L_1)^*$ на образующих ω_k, двойственных образующим $e_k \in L_1$, $k \geqslant 1$, задается формулой

$$d\omega_k = \sum_{i=0}^{[(k-1)/2]} (k-2i)\,\omega_{k-i} \wedge \omega_i. \tag{7.10}$$

Легко видеть, что пространство $H^1(L_1)$ двумерно и базисом в нем служат классы ω_1 и ω_2, двойственные образующим алгебры e_1 и e_2, соответственно.

Сложнее проверяется, но это все еще можно сделать элементарными методами, что $H^2(L_1)$ тоже двумерно, причем базис в нем образуют классы x_-^2 и x_+^2, представленные коциклами $\omega_3 \wedge \omega_2$ и $\omega_5 \wedge \omega_2 - 3\omega_4 \wedge \omega_3$, соответственно. Класс x_-^2 представляет тройное произведение Масси $\langle -\omega_1, \omega_2, \omega_2 \rangle$ Соответствующая определяющая система записывается в виде

$$\begin{matrix} -\omega_1 & -\omega_3 & \\ 0 & \omega_2 & 0 \\ 0 & 0 & \omega_2 \end{matrix}$$

Класс x_+^2 представляет пятиместное произведением Масси $\langle \omega_1, \omega_2, -2\omega_1, \omega_1, \omega_2 \rangle$ с определяющей системой

$$\begin{matrix} \omega_1 & \omega_3 & 2\omega_4 & -\omega_5 & \\ 0 & \omega_2 & 2\omega_3 & -\omega_4 & 0 \\ 0 & 0 & -2\omega_1 & \omega_2 & -\omega_4 \\ 0 & 0 & 0 & \omega_1 & \omega_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \omega_2 \end{matrix}$$

Опишем представления этих двумерных классов когомологий в виде дифференциалов Bss.

Класс x_-^2 в триградуированной спектральной последовательности Бухштабе-

ра представляется в виде $d_2\bigl(-(e_1e_2)^*\otimes\omega_2\bigr)$. В самом деле, применение d_1 к классу $-(e_1e_2)^*\otimes\omega_2\in E_1^{2,*,*}$ дает $-(e_2)^*\otimes\omega_1\wedge\omega_2$, что является 0 в E_1, поскольку является образом дифференциала от $-(e_2)^*\otimes\omega_3$. Тем самым, цепь $-(e_1e_2)^*\otimes\omega_2-(e_2)^*\otimes\omega_3$ представляет в $E_1^{*,*,*}$ тот же класс, что и $-(e_1e_2)^*\otimes\omega_2$. Как мы только что видели, дифференциал d_{CE} на этой цепи дает $\omega_3\wedge\omega_2$, что в точности означает выполнение равенства $x_-^2=d_2(-(e_1e_2)^*\otimes\omega_2)$. Аналогичным образом можно проверить, что класс $[(e_5)^*\otimes\omega_2+6(e_3^2)^*\otimes\omega_1]\in E_1^{4,*,*}$ лежит в ядре дифференциалов d_2 и d_3, а под действием дифференциала d_4 он переходит в x_+^2, представленный коциклом $\omega_5\wedge\omega_2-3\omega_4\wedge\omega_3$. Для этого нужно заметить, что коцепи $(e_5)^*\otimes\omega_2+6(e_3^2)^*\otimes\omega_1$ и $(e_5)^*\otimes\omega_2+6(e_3^2)^*\otimes\omega_1-3e_4^*\otimes\omega_3$ задают в $E_1^{4,*,*}$ один и тот же класс и что $d_{CE}((e_5)^*\otimes\omega_2+6(e_3^2)^*\otimes\omega_1-3e_4^*\otimes\omega_3)=\omega_5\wedge\omega_2-3\omega_4\wedge\omega_3$.

Кроме того, в $H^2(M^n)$ имеется еще один класс

$$\Omega_n=\sum_{i=1}^{[n/2]}(n-2i)\,\omega_{n+1-i}\wedge\omega_i.$$

Легко понять, что $p_n^*(\Omega_n)$ в когомологиях M^{n+1} нулевой. В самом деле, на M^{n+1} имеется 1–форма ω_{n+1}, для которой $d\omega_{n+1}=\Omega_n$.

Для четных $n=2k$ этот класс очень важен: форма Ω_{2k} задает симплектическую структуру на многообразии M^{2k}. Кроме того, для любого n расслоение $p_n:M^{n+1}\to M^n$ является главным расслоением со слоем S^1, 1-форма ω_{n+1} является формой связности этого расслоения, а форма Ω_n на базе M^n — ее форма кривизны: $d\omega_{n+1}=p_n^*(\Omega_n)$.

Как показано в работе [183], двумерный класс $[\Omega_{2k}]\in H^2(M^{2k})$ представляет $(2k)$-местное произведение Масси

$$\langle\omega_1,(k-1)\omega_1,(k-2)\omega_1,\dots,2\omega_1,(\omega_1\ \ \omega_2),\begin{pmatrix}0\\-\omega_1\end{pmatrix},-2\omega_1,\dots,-(k-1)\omega_1,-k\omega_1\rangle\quad(7.11)$$

с определяющей системой

$$\begin{pmatrix}\omega_1 & \omega_2 & \dots & \omega_{2k-1} & \omega_{2k} & \\ & (k-1)\omega_1 & (k-1)\omega_2 & \dots & (k-1)\omega_{2k-1} & (k-1)\omega_{2k}\\ & & \dots & \dots & \dots & \dots\\ & & & & -(k-1)\omega_1 & -(k-1)\omega_2\\ & & & & & -k\omega_1\end{pmatrix}.$$

Кроме того, в [183] показано, что Ω_{2k} не является представителем линейной комбинацией произведений Масси меньшего числа аргументов. Отсюда легко вывести, что указанное представление $[\Omega_{2n}]$ в виде $2n$-местного произведения Масси нетривиально,

т. е. не содержит нуля. В самом деле, если бы это было не так, то неопределенность произведения Масси (7.11) содержала бы $[\Omega_{2n}]$. С другой стороны, неопределенность $2n$-местного матричного произведения Масси содержится в объединении некоторых $(2n-1)$-местных матричных произведений Масси, см. раздел A.2, откуда следует, что тогда $[\Omega_{2n}]$ является представителем какого-то $(2n-1)$-местного матричного произведения Масси.

Результат работы [183] можно распространить на нечетномерные многообразия M^n. А именно, для $n = 2k+1$ класс формы $[\Omega_{2k+1}] \in H^2(M^{2k+1})$ принадлежит $(2k+1)$-матричному произведению Масси

$$\langle \omega_1, k\omega_1, (k-1)\omega_1, \dots, 2\omega_1, (\omega_1 \ \ \omega_2), \begin{pmatrix} 0 \\ -\omega_1 \end{pmatrix}, -2\omega_1, \dots, -(k-1)\omega_1, -k\omega_1 \rangle \qquad (7.12)$$

с определяющей системой

$$\begin{pmatrix} \omega_1 & \omega_2 & \dots & \omega_{2k} & \omega_{2k+1} & \\ & k\omega_1 & k\omega_2 & \dots & k\omega_{2k} & k\omega_{2k+1} \\ & & \dots & \dots & \dots & \dots \\ & & & & -(k-1)\omega_1 & -(k-1)\omega_2 \\ & & & & & -k\omega_1 \end{pmatrix}.$$

и не является представителем линейной комбинации произведений Масси от меньшего числа аргументов. Доказательство непредставимости со случая $n = 2k$ дословно переносится на $n = 2k+1$, оно использует биградуировку, а также фильтрацию комплекса $\Lambda(\omega_1, \dots, \omega_n)$ подкомплексами $\Lambda(\omega_1, \dots, \omega_p)$, $p \leqslant n$. Как и выше, отсюда немедленно получается нетривиальность произведения Масси (7.12).

Теперь для небольших n мы приведем явные формулы для цепей θ_n, представляющих классы $(n-1)[e_n^* \otimes \omega_1]$, дифференциалы от которых в Bss для алгебры $U\mathcal{G}L^n$ заклеивают классы $[\Omega_n]$.

n = 4. Форма $\Omega_4 = 3\omega_4 \wedge \omega_1 + \omega_3 \wedge \omega_2$ является линейной комбнацией коциклов $\omega_4 \wedge \omega_1$ и $\omega_3 \wedge \omega_2$; первый представляет класс фильтрации 3, а второй — фильтрации 2. Сам класс $[\Omega_4]$ равен $d_3(3e_4^* \otimes \omega_1)$. Для проверки нужно рассмотреть коцепь $\theta_4 = 3e_4^* \otimes \omega_1 + e_3^* \otimes \omega_2 - (e_1 e_2)^* \otimes \omega_2$. В первом члене Bss, а точнее, в группе $E_1^{3,-4,*}$ она задает тот же класс, что и $3e_4^* \otimes \omega_1$. С другой стороны, прямым вычислением проверяется, что $d_{CE}(\theta_4) = \Omega_4$, поэтому класс формы $3e_4^* \otimes \omega_1$ лежит в ядрах дифференциалов d_1 и d_2, а под действием дифференциала d_3 переходит в $[\Omega_4]$.

n = 5. Класс $[\Omega_5] = [4\omega_5 \wedge \omega_1 + 2\omega_4 \wedge \omega_2]$ равен $d_4(4e_5^* \otimes \omega_1)$. Для проверки нужно рассмотреть коцепь $\theta_5 = 4e_5^* \otimes \omega_1 + 2e_4^* \otimes \omega_2$. В группе $E_1^{4,-5,*}$ она задает тот же класс, что и $4e_5^* \otimes \omega_1$. Прямым вычислением проверяется, что $d_{CE}(\theta_5) = \Omega_5$, поэтому класс формы $4e_5^* \otimes \omega_1$ лежит в ядрах дифференциалов d_1, d_2 и d_3, а под действием

дифференциала d_4 переходит в $[\Omega_5]$.

n = 6. Класс $[\Omega_6] = [5\omega_6 \wedge \omega_1 + 3\omega_5 \wedge \omega_2 + \omega_4 \wedge \omega_3]$ равен $d_5(5e_6^* \otimes \omega_1)$. Для проверки нужно рассмотреть коцепь $\theta_6 = 5e_6^* \otimes \omega_1 + 3e_5^* \otimes \omega_2 + e_4^* \otimes \omega_3 - 2(e_3^2)^* \otimes \omega_1$. В группе $E_1^{5,-6,*}$ она задает тот же класс, что и $5e_6^* \otimes \omega_1$. Прямым вычислением проверяется, что $d_{CE}(\theta_6) = \Omega_6$, поэтому класс формы $5e_6^* \otimes \omega_1$ лежит в ядрах дифференциалов d_1, d_2, d_3 и d_4, а под действием дифференциала d_5 переходит в $[\Omega_6]$.

n = 7. Класс $[\Omega_7] = [6\omega_7 \wedge \omega_1 + 4\omega_6 \wedge \omega_2 + 2\omega_5 \wedge \omega_3]$ равен $d_6(6e_7^* \otimes \omega_1)$. Для проверки нужно рассмотреть коцепь $\theta_7 = 6e_7^* \otimes \omega_1 + 4e_6^* \otimes \omega_2 + 2e_4^* \otimes \omega_4 + 2(e_3^2)^* \otimes \omega_2 - 2e_3^* \wedge \omega_5 + 2(e_3e_4)^* \otimes \omega_1 + 2(e_2e_5)^*\omega_1$. В группе $E_1^{6,-7,*}$ она задает тот же класс, что и $5e_7^* \otimes \omega_1$. Прямым вычислением проверяется, что $d_{CE}(\theta_6) = \Omega_7$, поэтому класс формы $6e_7^* \otimes \omega_1$ лежит в ядрах дифференциалов d_1, d_2, d_3, d_4 и d_5, а под действием дифференциала d_6 переходит в $[\Omega_7]$.

7.4 Нильмногообразия Гейзенберга M_H^{2n+1}

В этом разделе собраны необходимые результаты о когомологиях с вещественными коэффициентами нильмногообразий Гейзенберга и для алгебр Ли $\mathcal{GH}^{2n+1}$ приведены решения задач (1), (2) и (3).

7.4.1 Однородные многообразия группы Гейзенберга

Рассмотрим группу $\mathcal{H}^{2n+1}$ матриц вида

$$\begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_2 & \cdots & x_n & z \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & y_1 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots & \\ 0 & & & 1 & 0 & y_{n-1} \\ 0 & & \cdots & 0 & 1 & y_n \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{7.13}$$

с вещественными x_j, y_j и z. Как пространство она гомеоморфна $\mathbb{R}^{2n+1}$. В этой группе имеется кокомпактная решетка Γ_H^{2n+1}, состоящая из матриц с целочисленными x_j, y_j и z.

Алгебра Ли $\mathcal{GH}^{2n+1}$ состоит из матриц

$$A = \begin{pmatrix} 0 & x_1 & x_2 & \cdots & x_n & z \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & y_1 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots & \\ 0 & & & 0 & 0 & y_{n-1} \\ 0 & & \cdots & 0 & 0 & y_n \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

с вещественными x_j, y_j и z. Введем в $\mathcal{GH}^{2n+1}$ базис $e_0, e_{\pm 1}, \ldots, e_{\pm n}$ такой, что выполняется равенство

$$A = x_1 e_{-1} + \ldots x_n e_{-n} + y_1 e_1 + \ldots y_n e_n + z e_0 = \sum_{j=1}^{n} x_j e_{-j} + \sum_{j=1}^{n} y_j e_j + z e_0.$$

Прямая проверка показывает, что в алгебре Ли $\mathcal{GH}^{2n+1}$ все коммутаторы базисных элементов равны нулю, кроме $[e_{-j}, e_j] = e_0$, $j = 1, \ldots, n$. Тем самым, алгебра Ли $\mathcal{GH}^{2n+1}$ нильпотентна и ее структурные константы — целые числа.

Группа $\mathcal{H}^{2n+1}$ при $n \geqslant 3$ получила название обобщенной группы Гейзенберга; ее алгебра Ли соответствует замене канонической скобки Пуассона пространства $\mathbb{R}^{2n}$ на коммутатор, а единицы — на элемент e_0, который играет роль постоянной Планка.

Таким образом возникает серия нильмногообразий $M_H^{2n+1} = \mathcal{H}^{2n+1}/\Gamma_H^{2n+1}$, в которой $M_H^3 = M^3$. Имеет место последовательность вложений

$$S^1 = M_H^1 \xrightarrow{i_0} M_H^3 \xrightarrow{i_1} M_H^5 \xrightarrow{i_2} \ldots,$$

индуцированных вложениями групп

$$\mathcal{H}^1 \xrightarrow{i_0} \mathcal{H}^3 \xrightarrow{i_1} \mathcal{H}^5 \to \ldots,$$

где вложение $i_n : \mathcal{H}^{2n+1} \xrightarrow{i_k} \mathcal{H}^{2n+3}$ определено формулой

$$\begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_2 & \cdots & x_n & z \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & y_1 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots & \\ 0 & & & 1 & 0 & y_{n-1} \\ 0 & & \cdots & 0 & 1 & y_n \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_2 & \cdots & x_n & 0 & z \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & y_1 \\ \vdots & & \ddots & & 0 & \vdots & \\ 0 & & & 1 & 0 & 0 & y_{n-1} \\ 0 & & \cdots & 0 & 1 & 0 & y_n \\ 0 & & \cdots & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

при этом образующие $e_0, e_{\pm 1}, \ldots, e_{\pm n}$ алгебры $\mathcal{GH}^{2n+1}$ переходят в одноименные обра-

зующие алгебры $\mathcal{GH}^{2n+3}$.

По теореме Номидзу кольцо вещественных когомологий $H^*(M_H^{2n+1})$ изоморфно кольцу когомологий $H^*(\mathcal{GH}^{2n+1})$. Обозначим через ω_k элемент, двойственный к e_k. Тогда дифференциал комплекса Шевалле—Эйленберга $C^*_{CE}(\mathcal{GH}^{2n+1}) = \wedge(\omega_0, \omega_{\pm 1}, \ldots, \omega_{\pm n})$ описывается соотношениями

$$d\omega_{\pm 1} = \ldots = d\omega_{\pm n} = 0, \qquad d\omega_0 = \sum_{k=1}^{n} \omega_{-k} \wedge \omega_k.$$

Форма ω_0 задает на M_H^{2n+1} структуру *контактного многообразия*, поскольку форма $\omega_0 \wedge (d\omega_0)^n$ пропорциональна форме $\omega_0 \wedge \omega_{-1} \wedge \omega_1 \wedge \ldots \omega_{-n} \wedge \omega_n$, класс которой является образующей группы $H^{2n+1}(\mathcal{GH}^{2n+1})$.

Сопоставление матрице (7.13) матрицы того же вида, но с $z = 0$, задает отображение

$$\pi : M_H^{2n+1} \to T^{2n}, \tag{7.14}$$

которое является локально тривиальным расслоением со слоем S^1.

Для вещественных когомологий теорема Номидзу показывает, что проекция расслоения индуцирует морфизм комплексов Шевалле—Эйленберга

$$\pi^* : \Lambda((\mathfrak{t}^{2n})^*) = (\Lambda(\omega_{\pm k} \,:\, 1 \leqslant k \leqslant n), d_{CE} = 0) \to$$
$$\to (\Lambda(\omega_0, \omega_{\pm k} \,:\, 1 \leqslant k \leqslant n) = \Lambda((\mathcal{GH}^{2n+1})^*), d_{CE}),$$

причем значения d_{CE} на всех образующих нулевые, исключая $d_{CE}(\omega_0) = \sum\limits_{k=1}^{n} \omega_{-k} \wedge \omega_k$. Образующие здесь выбираются так, чтобы при $k \neq 0$ выполнялось условие

$$\Lambda((\mathfrak{t}^{2n})^*) \ni \omega_k \overset{\pi^*}{\mapsto} \omega_k \in \Lambda((\mathcal{GH}^{2n+1})^*),$$

ω_0 — образующая в когомологиях слоя S^1.

Спектральная последовательность расслоения (7.14) для вещественных когомологий совпадает со спектральной последовательностью Хохшильда—Серра одномерного идеала, порожденного элементом e_0, в алгебре Ли $\mathcal{GH}^{2n+1}$:

$$E_2^{p,q} = H^p(\mathfrak{t}^{2n}, H^q(\Lambda(\omega_0))).$$

Заметим, что представление алгебры $\mathfrak{t}^{2n}$ в когомологиях $H^q(\Lambda(\omega_0))$ тривиально, поскольку расширение $\mathfrak{t}^{2n} \subset \mathcal{GH}^{2n+1}$ центральное.

Легко видеть, что $d_2 : H^1(S^1) = E_2^{0,1} \to E_2^{2,0} = H^2(T^{2n})$ определяется уже хорошо знакомой нам формулой:

$$d_2(\omega_0) = \sum_{k=1}^{n} \omega_{-k} \wedge \omega_k.$$

На остальных группа $E_2^{p,1}$ дифференциал d_2 вычисляется по мультипликативности.

7.4.2 Когомологии алгебры Ли $\mathcal{GH}^{2n+1}$

Припишем форме ω_k биградуировку $(1,k)$. Тогда, как и в случае многообразий M^n, получаем, что дифференциал Шевалле—Эйленберга сохраняет вторую градиуровку. Таким образом, имеется расщепление комплексов $C^*_{CE}(\mathcal{GH}^{2n+1})$ в прямые суммы подкомплексов, которое индуцирует на кольце когомологий естественную биградуировку: $H^*(\mathcal{GH}^{2n+1}) = \bigoplus\limits_{p\geqslant 0,q} H^{p,q}(\mathcal{GH}^{2n+1})$. Наличие такой биградуировки позволяет ожидать, что многие результаты работы [188], посвященной многообразиям M^n, окажутся верными и для многообразий M^{2n+1}_H.

Замечание. Часто используется другая градуировка базисных элементов: $e_1,\dots,e_n$ переобозначаются через $e_{2n},\dots,e_{n+1}$; $e_{-n},\dots,e_{-1}$ переобозначаются через $e_1,\dots,e_n$; а элемент e_0 — через e_{2n+1}. Тогда коммутационные соотношения $[e_{-n},e_n] = e_0$ принимают вид $[e_i,e_{2n+1-i}] = e_{2n+1}$. Наш выбор нумерации базисных элементов диктуется тем, что при вложении $i_n : \mathcal{H}^{2n+1} \xrightarrow{i_k} \mathcal{H}^{2n+3}$ образующие алгебры $\mathcal{GH}^{2n+1}$ переходят в одноименные образующие алгебры $\mathcal{GH}^{2n+3}$.

Многообразия M^{2n+1}_H компактны и ориентируемы, а значит, для них имеет место двойственность Пуанкаре. В терминах когомологий алгебр $\mathcal{GH}^{2n+1}$ двойственность задается спариванием

$$\langle [\theta],[\eta]\rangle = B(\theta,\eta),\ \text{где } \theta\wedge\eta = B(\theta,\eta)\,\omega_0\wedge\omega_{-1}\wedge\omega_1\wedge\ldots\wedge\omega_{-n}\wedge\omega_n. \tag{7.15}$$

Двойственным к биоднородному подпространству $H^{p,q}(\mathcal{GH}^{2n+1})$ является биоднородное подпространство $H^{2n+1-p,-q}(\mathcal{GH}^{2n+1})$.

Числа Бетти многообразий $H^*(\mathcal{GH}^{2n+1})$ были вычислены в работе [147]. До сих пор вопрос о вычислений когомологий $H^*(\mathcal{GH}^{2n+1})$ привлекает внимание исследователей и повляются новые работы с доказательствами, использующие методы из совершенно разных областей. Одна из недавних — работа [23]. Задача вычисления целочисленных когомологий решетки Γ^{2n+1}_H, т. е. целочисленных когомологий пространства $M^{2n+1}_H = \mathcal{H}^{2n+1}/\Gamma^{2n+1}_H$, решается в [93]. В связи с этим отметим, что в целочисленных гомологиях пространств $\mathcal{H}^{2n+1}/\Gamma$, где $\Gamma\subset\mathcal{H}^{2n+1}$ — решетка, вообще говоря, имеется кручение. Для $n=1$ решетки Γ индексируются в терминах кручения в группе одномерных гомологий. Для $n>1$ уже имеется множество неэквивалентных решеток, которые не индексируются кручением в одномерных гомологиях.

Числа Бетти $b_p = \dim H^p(\mathcal{GH}^{2n+1})$ достаточно вычислить для $p=0,\dots,n$, так как в силу двойственности Пуанкаре $b_p = b_{2n+1-p}$.

Теорема 7.6 (см. [147])**.**

(*i*) *Для $p\leqslant n$ имеет место равенство $b_p = \binom{2n}{p} - \binom{2n}{p-2}$.*

(*ii*) *Пространство точных p-форм порождено формами вида* $\omega_{i_1} \wedge \ldots \wedge \omega_{i_p}$, *где* $i_1 < \ldots < i_p$, $i_j \neq 0$ *для всех* j;

(*iii*) *Пространство замкнутых p-форм порождено формами вида* $d\omega_0 \wedge \omega_{i_1} \wedge \ldots \wedge \omega_{i_{p-2}}$, *где* $i_1 < \ldots < i_{p-2}$, $i_j \neq 0$ *для всех* j. □

Мультипликативная структура когомологий $H^*(M_H^{2n+1}, R)$, где R — коммутативное кольцо с единицей, достаточно сложна даже в случае вещественных коэффициентов $R = \mathbb{R}$.

Для расслоения (7.14) рассмотрим точную последовательность Гизина

$$\ldots \to H^{k-2}(T^{2n}, R) \xrightarrow{\Omega} H^k(T^{2n}, R) \xrightarrow{\pi^*} H^k(M_H^{2n+1}, R) \xrightarrow{\pi_*} \\ \xrightarrow{\pi_*} H^{k-1}(T^{2n}, R) \xrightarrow{\Omega} H^{k+1}(T^{2n}, R) \to \ldots, \quad (7.16)$$

где Ω — операция умножения на форму $\Omega = d\omega_0$. Она распадается на короткие точные последовательности

$$0 \to \operatorname{coker} \Omega \xrightarrow{\pi^*} H^k(M_H^{2n+1}, R) \xrightarrow{\pi_*} \ker \Omega \to 0. \quad (7.17)$$

Отметим, что рассматриваемые группы когомологий несут естественную структуру модулей над алгеброй $H^*(T^{2n}, R)$, причем точные последовательности (7.16) и (7.17) являются точными последовательностями $H^*(T^{2n}, R)$-модулей — это дает частичную информацию о структуре умножения в кольце $H^*(M^{2n+1}, R)$.

Покажем, как $\ker \Omega$ и $\operatorname{coker} \Omega$ соотносятся со спектральной последовательностью расслоения (7.14). Воспользуемся отождествлением

$$\alpha : E_2^{p,0} \to E_2^{p,1}, \qquad \alpha : \theta \mapsto \omega_0 \wedge \theta.$$

Композиция $d_2 \circ \alpha^{-1} : H^p(T^{2n}, R) \to H^{p+2}(T^{2n}, R)$ задается формулой $\theta \mapsto \Omega \wedge \theta$. Значит, $E_\infty^{*,0} = E_3^{*,0}$ является фактором $H^*(T^{2n})$ по идеалу, порожденному Ω, а $\alpha^{-1}E_\infty^{*,1} = \alpha^{-1}E_3^{*,1}$ — является аннулятором Ω, т. е. состоит из таких классов $\theta \in H^*(T^{2n})$, для которых $\Omega \wedge \theta = 0$.

В случае $R = \mathbb{R}$ имеется красивая теория, которая описывает группы $\ker \Omega$ и $\operatorname{coker} \Omega$ с точки зрения теории представлений алгебры $\mathfrak{sl}_2$ на внешней алгебре симплектического пространства. Этот подход был реализован в работах [76; 201]. Приведем необходимые сведения из геометрии внешней алгебры симплектического векторного пространства, следуя первому разделу обзора [205], см. также книгу [91] и классическое руководство по теории комплексных многообразий, см. [227].

Затем мы вернемся к обсуждению кольца когомологий де Рама $H^*(M_H^{2n+1})$.

Представление $\mathfrak{sl}_2$ на $\Lambda(\omega_{\pm 1}, \dots, \omega_{\pm n})$

Алгебра вещественных когомологий тора T^{2n} изоморфна внешней алгебре $\Lambda(\omega_{\pm 1}, \dots, \omega_{\pm n})$. Пусть V — вещественное $2n$-мерное пространство с $e_{\pm 1}, \dots, e_{\pm n}$. Элементы двойственного базиса пространства V^* обозначим через $\omega_{\pm 1}, \dots, \omega_{\pm n}$. 2-форма $\Omega = \sum_{k=1}^{n} \omega_{-k} \wedge \omega_k$ задает на V симплектическую структуру.

Определим оператор $E^- : \Lambda^k V^* \to \Lambda^{k+2} V^*$ по формуле $E^-(\theta) = \Omega \wedge \theta$. С помощью бивектора $X_\Omega = \sum_{k=1}^{n} e_{-k} \wedge e_k \in \Lambda^2 V$ зададим оператор $E^+ : \Lambda^k V^* \to \Lambda^{k-2} V^*$ по формуле $E^+(\theta) = X_\Omega \lrcorner \theta$, где $X_\Omega \lrcorner \theta$ — внутреннее произведение формы θ с бивектором X_Ω. Наконец, рассмотрим оператор $H = [E^+, E^-]$.

Утверждение 7.4. *Имеют место соотношения*

$$[H, E^+] = 2E^+ \quad и \quad [H, E^-] = -2E^- \tag{7.18}$$

Соотношения (7.18) вместе с определением $H = [E^+, E^-]$ показывают, что выбор симплектической структуры Ω на V задает на внешней алгебре ΛV^* представление алгебры $\mathfrak{sl}_2$. В самом деле, в алгебре Ли $\mathfrak{sl}_2$ имеется стандартный базис H, E^+, E^- с коммутационными соотношениями $[E^+, E^-] = H$, $[H, E^+] = 2E^+$, $[H, E^-] = -2E^-$.

Все конечномерные $\mathfrak{sl}_2$-представления разлагаются в прямую сумму неприводимых. Каждое конечномерное неприводимое $\mathfrak{sl}_2$-представления определяется своей размерностью, таким образом, имеется по одному такому представлению в каждой размерности. Эти представления легко описать явно, например, см. [226] (в этой книге нормировка базисных векторов отличается от нашей). Пусть W_m — векторное пространство с базисом $v_0, v_1, \dots, v_m$. Положим

$$\begin{aligned} H(v_k) &= (m - 2k)v_k, \\ E^-(v_k) &= v_{k+1} \text{ при } k < m, \quad E^-(v_m) = 0, \\ E^+(v_k) &= k(m - k + 1)v_{k-1} \text{ при } k > 0, \quad E^+(v_0) = 0. \end{aligned}$$

Легко проверяется, что такие формулы задают $(m+1)$-мерное неприводимое представление алгебры Ли $\mathfrak{sl}_2$ в пространстве W_m.

Итак, внешняя алгебра ΛV^* разлагается в прямую сумму неприводимых $\mathfrak{sl}_2$-представлений. Описание разложения пространства ΛV^* в сумму неприводимых $\mathfrak{sl}_2$-представлений опирается на следующие факты о действии операторов $E^\pm$ и H в ΛV^*.

Утверждение 7.5 ([205])**.** (*i*) *Пусть* $\theta \in \Lambda^s V^*$. *Тогда* $H\theta = (n - s)\theta$.

(*ii*) *Отображение* $E^+ : \Lambda^s(V^*) \to \Lambda^{s-2}(V^*)$ *является мономорфизмом при* $s \geqslant n + 1$.

(*iii*) *Отображение* $E^- : \Lambda^s(V^*) \to \Lambda^{s+2}(V^*)$ *является мономорфизмом при* $s \leqslant n - 1$.

Внешняя форма $\theta \in \Lambda^s V^*$, где $s \leqslant n$ называется *примитивной*, если $E^+(\theta) = 0$.

Имеет место следующее утверждение о разложении Ходжа (также его называют разложением Ходжа—Лепажа).

Теорема 7.7 ([205]). *Для любой формы $\theta \in \Lambda^s(V^*)$ имеет место разложение*

$$\theta = \theta_0 + E^-(\theta_1) + (E^-)^2(\theta_2) + \ldots = \theta_0 + \Omega \wedge \theta_1 + \Omega \wedge \Omega \wedge \theta_2 + \ldots,$$

где $\theta_j \in \Lambda^{s-2j}(V^*)$ — однозначно определенные примитивные формы.

Утверждение 7.6 ([205]). *Отображения $(E^+)^s : \Lambda^{n+s}V^* \to \Lambda^{n-s}V^*$ и $(E^-)^s : \Lambda^{n-s}V^* \to \Lambda^{n+s}V^*$ являются изоморфизмами, причем для любой примитивной формы $\theta \in \Lambda^{n-s}$ выполнено равенство $(E^+)^s \circ (E^-)^s(\theta) = (s!)^2\theta$.*

Утверждение 7.6 показывает, что $\Lambda^s(V^*) \subset \operatorname{im}\Omega$ при $s \geqslant n+1$, т. е. ненулевые элементы $\operatorname{coker}\Omega$ имеют градуировки не больше n. Из предложения 7.5(iii) следует, что ненулевые элементы $\ker\Omega$ имеют градуировки не меньше n.

Вернемся к обсуждению спектральной последовательности расслоения $\pi : M_H^{2n+1} \to T^{2n}$. Из только что приведенного описания $\ker\Omega$ и $\operatorname{coker}\Omega$ следует, что член $E_\infty^{*,*}$ спектральной последовательности этого расслоения имеет вид

1	0	…	0	$E_\infty^{n,1}$	$E_\infty^{n+1,0}$	…	$E_\infty^{2n,1}$
0	$E_\infty^{0,0}$	…	$E_\infty^{n-1,0}$	$E_\infty^{n,0}$	0	…	0
	0	…	$n-1$	n	$n+1$	…	$2n$

Теорема 7.8. (*a*) *Группа $A = \oplus_{j=0}^n H^j(M_H^{2n+1})$ является подкольцом в $H^*(M_H^{2n+1})$ изоморфным факторкольцу внешней алгебры $\Lambda^*(\omega_{\pm 1}, \ldots, \omega_{\pm n}) = H^*(T^{2n})$ по идеалу, порожденному Ω. Иными словами, $A = \operatorname{coker}\Omega$ как кольцо со структурой $H^*(T^{2n})$-модуля.*

(*b*) *Группа $B = \oplus_{j=n+1}^{2n+1} H^j(M_H^{2n+1})$ состоит в точности из тех классов $\omega_0\Lambda^*(\omega_{\pm 1}, \ldots, \omega_{\pm n})$, которые лежат в ядре умножения на Ω. Иными словами $B = \ker\Omega$ как группа со структурой $H^*(T^{2n})$-модуля. Произведение любых двух элементов из B равно 0 по соображения размерности.*

(*c*) *Произведение ab, где $a \in A$ и $b \in B$, принадлежит B и задает представление кольца A на модуле B. Таким образом, $H^*(M_H^{2n+1})$ получается расширением кольца A по действию A на B.*

(*d*) *Расщепление $H^*(M_H^{2n+1}) = A \oplus B$ является расщеплением в прямую сумму $H^*(T^{2n})$-модулей.*

Следствие 7.4. (*i*) *Как* $H^*(T^{2n})$*-модуль градуированная группа* $H^*(M_H^{2n+1})$ *порождена* $1 \in H^0(M_H^{2n+1})$ *и образующими группы* $H^{n+1}(M_H^{2n+1})$.

(*ii*) *Кольцо когомологий* $H^*(M_H^{2n+1})$ *мультипликативно порождено образующими* $\omega_{\pm 1}, \dots, \omega_{\pm n}$ *группы* $H^1(M_H^{2n+1})$ *и образующими группы* $H^{n+1}(M_H^{2n+1})$.

В теореме 7.8 показано в частности, что короткая точная последовательность (7.17)

$$0 \to \operatorname{coker} \Omega \xrightarrow{\pi^*} H^k(M_H^{2n+1}, \mathbb{R}) \xrightarrow{\pi_*} \ker \Omega \to 0 \tag{7.19}$$

расщепляется как последовательность $H^*(T^{2n}, \mathbb{R})$-модулей. Оказывается, имеет место следующий важный факт.

Теорема 7.9 ([31])**.** *Пусть* $S^m \to X \xrightarrow{\pi} T$ *— ориентируемое сферическое расслоение над тором, и пусть* $\Omega \in H^{m+1}(T, \mathbb{Z})$ *— его характеристический класс. Тогда для любого* k *точная последовательность*

$$0 \to \operatorname{coker} \Omega \xrightarrow{\pi^*} H^k(X, \mathbb{Z}) \xrightarrow{\pi_*} \ker \Omega \to 0.$$

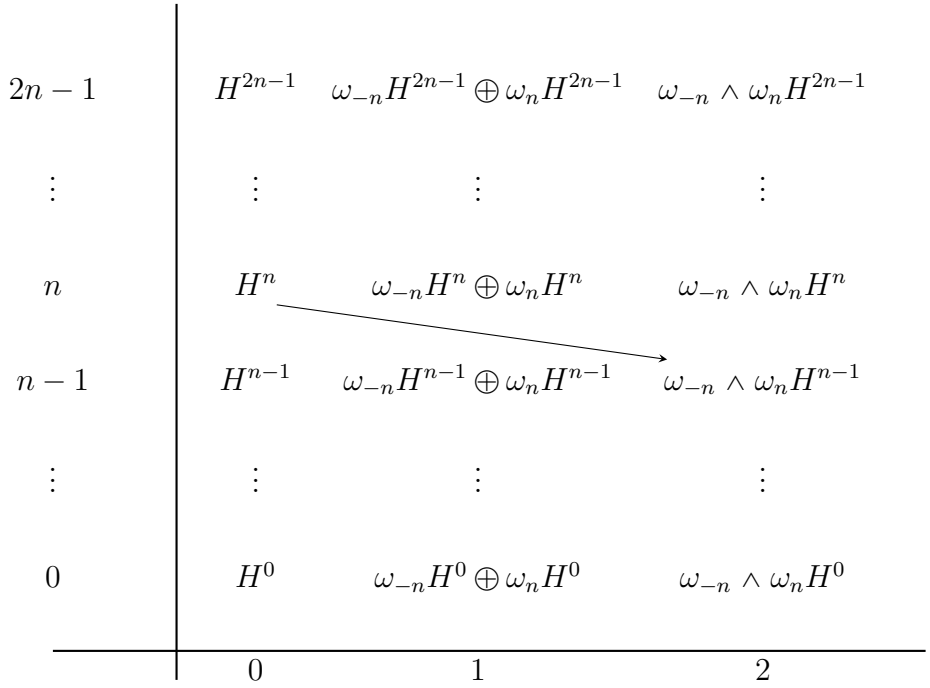
расщепляется как последовательность $H^*(T, \mathbb{Z})$*-модулей.*

Для целочисленных коэффициентов это утверждение достаточно нетривиально, оно требует анализа когомологического препятствия к расщеплению короткой точной последовательности и доказательства того, что это препятствие равно 0.

Теперь выясним, как связаны многочлены Пуанкаре когомологий алгебр Ли $\mathcal{GH}^{2n-1}$ и $\mathcal{GH}^{2n+1}$. Рассмотрим спектральную последовательность Хохшильда—Серра подалгебры Ли $\mathcal{GH}^{2n-1}$ в $\mathcal{GH}^{2n+1}$. Фактор $\mathcal{GH}^{2n+1}/\mathcal{GH}^{2n+1}$ является двумерной коммутативной алгеброй Ли $\mathfrak{t}^2$ с образующими $\omega_{\pm n}$, поэтому второй член этой спектральной последовательности имеет вид

$$E_2^{p,q} = H^p(\mathfrak{t}^2, H^q(\mathcal{GH}^{2n-1})). \tag{7.20}$$

Легко проверить, что действие $\mathfrak{t}^2$ в $H^q(\mathcal{GH}^{2n-1})$ тривиально, поэтому спектральная последовательность (7.20) имеет вид



Для краткости группа $H^s(\mathcal{GH}^{2n-1})$ обозначена через H^s.

Утверждение 7.7. *В спектральной последовательности Хохшильда—Серра подалгебры Ли $\mathcal{GH}^{2n-1}$ в $\mathcal{GH}^{2n+1}$ все дифференциалы нулевые, исключая $d_2 : E_2^{0,n} \to E_2^{2,n-1}$ (обозначен на диаграмме стрелкой), который является изоморфизмом.*

Следствие 7.5. *Полиномы Пуанкаре $P_n(t)$ и $P_{n-1}(t)$ когомологий алгебр Ли $\mathcal{GH}^{2n+1}$ и $\mathcal{GH}^{2n-1}$ связаны рекуррентным соотношением*

$$P_n(t) = (1+t)^2\, P_{n-1}(t) - \left(\binom{2n-2}{n-1} - \binom{2n-2}{n-3}\right)(1+t)\, t^n. \tag{7.21}$$

Доказательство. Положим $b_k = \dim H^k(\mathcal{GH}^{2n-1})$ и $\hat{b}_k = \dim H^k(\mathcal{GH}^{2n+1})$. В силу двойственности Пуанкаре достаточно сравнить коэффициенты при t^k в (7.21) при $0 \leqslant k \leqslant n$.

Для $k = 0$ или 1 это совсем просто: $\hat{b}_0 = b_0 = 1$, $\hat{b}_1 = b_1 + 2 = 2n$.

Для $2 \leqslant k \leqslant n-1$ нужно проверить равенство $\hat{b}_k = b_k + 2b_{k-1} + b_{k-2}$. Для этого запишем числа Бетти как разность двух биномиальных коэффициентов по теореме 7.6 и несколько раз воспользуемся формулой $\binom{N}{p} + \binom{N}{p-1} = \binom{N+1}{p}$. Отсюда следует, что все дифференциалы d_2, расположенные ниже показанного на диаграмме, нулевые. По двойственности Пуанкаре нулевыми являются и дифференциалы d_2, расположенные выше показанного на диаграмме.

С другой стороны, нетрудно убедиться, что $\hat{b}_n$ не равно $b_n + 2b_{n-1} + b_{n-2} = 3b_{n-1} + b_{n-2}$. Это означает, что в рассматриваемой спектральной последовательности дифференциал $d_2 : E_2^{0,n+1} \to E_2^{2,n}$ нетривиален. Покажем, что в действительности он

является изоморфизмом. Для этого заметим, что $\hat{b}_n = 2b_{n-1} + b_{n-2}$. В самом деле, как нетрудно проверить, это равенство равносильно тождеству

$$\binom{2n}{n-2} + \binom{2n-1}{n-1} + \binom{2n-2}{n-1} = \binom{2n}{n} + \binom{2n-1}{n-3} + \binom{2n-2}{n-3}.$$

Отсюда следует, что группы $E_3^{0,n+2}$ и $E_3^{2,n+1}$ нулевые, т. е. $d_2 : E_2^{0,n+2} \to E_2^{2,n+1}$ является изоморфизмом.

Полином Пуанкаре $\bigoplus\limits_{p+q=n} E_2^{p,q}$ равен $(1+t)^2\, P_{n-1}(t)$; при переходе к E_3 нужно учесть единственный нетривиальный дифференциал, т. е. от полученного выражения нужно отнять $b_{n-1}\,(1+t)\,t^n$. Поскольку $E_3 = E_\infty$, то на этом доказательство формулы (7.21) закончено. □

7.4.3 *Bss* для алгебр Ли $\mathcal{GH}^{2n+1}$

Теперь сформулируем и докажем несколько общих фактов, касающихся *Bss* для алгебр Ли $\mathcal{GH}^{2n+1}$.

Универсальная обертывающая алгебра $U\mathcal{GH}^{2n+1}$ обладает базисом, состоящим из элементов $e_-^a e_+^b e_0^c = e_{-1}^{a_1} \dots e_{-n}^{a_n} e_1^{b_1} \dots e_n^{b_n} e_0^c$, где для краткости мы используем обозначение $a = (a_1, \dots, a_n)$ и $b = (b_1, \dots, b_n)$. Двойственный к базисному элемент из $(U\mathcal{GH}^{2n+1})^*$ удобно обозначать $(e_-^a e_+^b e_0^c)^*$. Рассмотрим фильтрацию Бухштабера, начинающуюся с $N_0 = \mathbb{R}$.

Лемма 7.8. *Положим* $p(a,b,c) = p(a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n, c) = 2c + \sum\limits_{j=1}^{n} a_j + \sum\limits_{j=1}^{n} b_j$.

(*i*) *Элемент* $(e_-^a e_+^b e_0^c)^*$ *принадлежит* N_p *и не принадлежит* N_{p-1}, *где* $p = p(a,b,c)$.

(*ii*) *Более того,* $N_p = N_{p-1} \oplus \mathbb{R}\langle (e_-^a e_+^b e_0^c)^* \,:\, p(a,b,c) = p \rangle$.

Доказательство. Аналогично доказательству теоремы 6.1. □

Следствие 7.6. *Производящий ряд последовательности* $k_p = \dim N_p/N_{p-1}$ *равен* $\sum\limits_{p \geqslant 0} k_p x^p = \frac{1}{(1-x)^{2n}(1-x^2)}$.

Дифференциал Шевалле–Эйленберга на комплексе $(U\mathcal{GH}^{2n+1})^* \otimes \wedge(\omega_{\pm 1}, \dots, \omega_{\pm n}, \omega_0)$ повышает первую градуировку на 1, сохраняет вторую градуировку, и при этом может понижать фильтрацию не больше, чем на 2. Это в точности означает, что дифференциалы d_k в соответствующей *Bss* при $k \geqslant 3$ тривиальны, иначе говоря $E_3^{*,*,*} = E_\infty^{*,*,*}$, см. теорему 7.1.

Напомним, что в разделе 5.1.3 мы с помощью дифференциалов триградуированной спектральной последовательности Бухштабера определили возрастающую фильтрацию Φ^p на группах когомологий $H^k(\mathcal{GH}^{2n+1})$. В силу тривиальности дифференциалов d_k при $k \geqslant 3$, фильтрация стабилизируется на Φ^2, а именно, $\Phi^2 = \Phi^k$ для всех $k \geqslant 2$.

Теорема 7.10. (*i*) *Элементы групп когомологий* $H^k(\mathcal{GH}^{2n+1})$ *для* $k \neq 0, k \neq n$ *принадлежат* Φ^1.

(*ii*) *Элементы группы когомологий* $H^{n+1}(\mathcal{GH}^{2n+1})$ *принадлежат* Φ^2, *но не принадлежат* Φ^1.

Доказательство. Из леммы 5.4 следует, что $H^1(\mathcal{GH}^{2n+1}) \subset \Phi^1$.

Пункт (*i*) докажем индукцией по $n \geqslant 1$. База индукции ($n = 1$) следует из явного описания базисных коциклов когомологий алгебры $\mathcal{GH}^3$:

$$\begin{aligned} k &= 0 \qquad 1; \\ k &= 1 \qquad \omega_{-1},\ \omega_1; \\ k &= 2 \qquad \omega_0 \wedge \omega_{-1}\ \omega_0 \wedge \omega_1; \\ k &= 3 \qquad \omega_0 \wedge \omega_{-1} \wedge \omega_1. \end{aligned}$$

Отметим, что базисные коциклы когомологий алгебры $\mathcal{GH}^5$ приведены в следующем разделе 7.4.4.

Далее рассмотрим спектральную последовательность Хохшильда—Серра (7.20) По утверждению 7.7 член E_∞ имеет вид

$2n-1$	H^{2n-1}	$\omega_{-n}H^{2n-1} \oplus \omega_n H^{2n-1}$	$\omega_{-n} \wedge \omega_n H^{2n-1}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
n	0	$\omega_{-n}H^n \oplus \omega_n H^n$	$\omega_{-n} \wedge \omega_n H^n$
$n-1$	H^{n-1}	$\omega_{-n}H^{n-1} \oplus \omega_n H^{n-1}$	0
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
0	H^0	$\omega_{-n}H^0 \oplus \omega_n H^0$	$\omega_{-n} \wedge \omega_n H^0$
	0	1	2

При $k \geqslant n+2$ и $k \leqslant n$ в группе $H^k(\mathcal{GH}^{2n+1})$ определена трехчленная фильтрация, для которой присоединенная группа имеет вид

$$H^k(\mathcal{GH}^{2n-1}) \oplus \omega_{-n} H^{k-1}(\mathcal{GH}^{2n-1}) \oplus \omega_n H^{k-1}(\mathcal{GH}^{2n-1}) \oplus \omega_{-n} \wedge \omega_n H^{k-2}(\mathcal{GH}^{2n-1}),$$

применяя индукцию, получаем нужно утверждение.

С другой стороны, образ $d_1 : N_1/N_0 \otimes H^n(\mathcal{GH}^{2n+1}) \to H^{n+1}(\mathcal{GH}^{2n+1})$ нулевой, поскольку любая коцепь, представляющая элемент размерности $n+1$, должна содержать в своей записи ω_0 — это следует из невырожденности спаривания (7.15). Значит, в группе $H^{n+1}(\mathcal{GH}^{2n+1})$ нет нетривиальных элементов фильтрации Φ^1. □

В работе [183] были указаны элементы в группе $H^{n+1}(\mathcal{GH}^{2n+1})$, представимые в виде матричных произведения Масси.

Утверждение 7.8 ([183], §2.5)**.** *Коцепи $\omega_0 \wedge \omega_{\varepsilon_1 \cdot 1} \wedge \omega_{\varepsilon_2 \cdot 2} \wedge \ldots \wedge \omega_{\varepsilon_n \cdot n}$ где $\varepsilon_j = \pm 1$ представляют линейно независимые классы когомологий в $H^{n+1}(\mathcal{GH}^{2n+1})$, они не разлагаются в линейные комбинации нетривиальных произведений классов меньшей размерности, но представляются в виде нетривиальных трехместных матричных произведений Масси: класс коцикла $\omega_0 \wedge \omega_{\varepsilon_1 \cdot 1} \wedge \omega_{\varepsilon_2 \cdot 2} \wedge \ldots \wedge \omega_{\varepsilon_n \cdot n}$ принадлежит*

$$\Big\langle \big(\varepsilon_1 \omega_{-\varepsilon_1 \cdot 1},\ \varepsilon_2 \omega_{-\varepsilon_2 \cdot 2},\ \ldots,\ \varepsilon_n \omega_{-\varepsilon_n \cdot n}\big),\ \begin{pmatrix} \omega_{\varepsilon_1 \cdot 1} \\ \omega_{\varepsilon_2 \cdot 2} \\ \vdots \\ \omega_{\varepsilon_n \cdot n} \end{pmatrix},\ \omega_{\varepsilon_1 \cdot 1} \wedge \omega_{\varepsilon_2 \cdot 2} \wedge \ldots \wedge \omega_{\varepsilon_n \cdot n} \Big\rangle$$

Для проверки этого утверждения в обозначениях раздела A.2 достаточно положить $U = -\omega_0$ и $V = 0$.

Легко указать, образами каких элементов под действием дифференциала d_2 накрываются элементы, описанные в утверждении 7.8.

Утверждение 7.9. *Класс когомологий из группы $H^{n+1}(\mathcal{GH}^{2n+1})$, представленный $\omega_0 \wedge \omega_{\varepsilon_1 \cdot 1} \wedge \omega_{\varepsilon_2 \cdot 2} \wedge \ldots \wedge \omega_{\varepsilon_n \cdot n}$, равен*

$$d_2\Big((e_0^* + \sum_k \delta^1_{\varepsilon_k} (e_{-k} e_k)^*) \otimes \omega_{\varepsilon_1 \cdot 1} \wedge \omega_{\varepsilon_2 \cdot 2} \wedge \ldots \wedge \omega_{\varepsilon_n \cdot n}\Big),$$

где δ_i^j — символ Кронекера.

Для доказательства достаточно заметить, что в комплексе $(U\mathcal{GH}^{2n+1})^* \otimes$

$\wedge(\omega_{\pm 1}, \ldots, \omega_{\pm n}, \omega_0)$ выполнены равенства

$$d((e_0)^* \otimes \omega) = 1 \otimes \omega_0 \wedge \omega - \sum_{k=1}^{n} (e_k)^* \otimes \omega_{-k} \wedge \omega,$$
$$d((e_{-k}e_k)^* \otimes \omega) = (e_k)^* \otimes \omega_{-k} \wedge \omega + (e_{-k})^* \otimes \omega_k \wedge \omega.$$

Обратим внимание, что количество классов, о которых идет речь в утверждениях 7.8 и 7.9, равно 2^n, а это меньше, чем соответствующее число Бетти b_{n+1}, которое в силу двойственности Пуанкаре и теоремы 7.6 равно $b_{n+1} = b_n = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n-2}$. Иными словами, в группе $H^{n+1}(\mathcal{GH}^{2n+1})$ имеются элементы, не описанные в утверждениях 7.8 и 7.9. Согласно теореме 7.10 все ненулевые элементы $H^{n+1}(\mathcal{GH}^{2n+1})$ принадлежат Φ^2, но не принадлежат Φ^1. Как будет показано в разделе 5.2, теорема 5.5, такие элементы представляются в виде тройных матричных произведений Масси специального вида. В следующем подразделе мы найдем такие представления для оставшихся элементов группы $H^{n+1}(\mathcal{GH}^{2n+1})$ при $n = 2$ и $n = 3$.

7.4.4 Алгебры Ли $\mathcal{GH}^5$ и $\mathcal{GH}^7$

По теореме Номидзу кольцо вещественных когомологий многообразия M_H^{2n+1} изоморфно кольцу когомологий $H^*(\mathcal{GH}^{2n+1})$. В этом разделе мы рассмотрим случай алгебры $\mathcal{GH}^5$. Как и ранее, обозначим через ω_k элемент, двойственный e_k. Напомним, дифференциал d в комплексе Шевалле—Эйленберга $\wedge(\mathcal{GH}^5)^*$ определяется соотношениями

$$d\omega_{\pm 1} = d\omega_{\pm 2} = 0, \qquad d\omega_0 = \omega_{-1} \wedge \omega_1 + \omega_{-2} \wedge \omega_2.$$

Отсюда легко получить, что как векторные пространства над $\mathbb{R}$ когомологии $H^k(\mathcal{GH}^5)$ имеют следующие наборы базисных элементов:

$k = 0$ 1;

$k = 1$ $\omega_{-1},\ \omega_{-2},\ \omega_2,\ \omega_1$;

$k = 2$ $\omega_{-1} \wedge \omega_{-2},\ \omega_{-1} \wedge \omega_2,\ \omega_{-1} \wedge \omega_1 = -\omega_{-2} \wedge \omega_2,\ \omega_{-2} \wedge \omega_1,\ \omega_1 \wedge \omega_2$;

$k = 3$ $\omega_0 \wedge \omega_{-1} \wedge \omega_{-2},\ \omega_0 \wedge \omega_{-1} \wedge \omega_2,\ \omega_0 \wedge \omega_{-2} \wedge \omega_1,\ \omega_0 \wedge \omega_1 \wedge \omega_2,$
$\omega_0 \wedge (\omega_{-1} \wedge \omega_1 - \omega_{-2} \wedge \omega_2)$;

$k = 4$ $\omega_0 \wedge \omega_{-2} \wedge \omega_1 \wedge \omega_2,\ \omega_0 \wedge \omega_{-1} \wedge \omega_1 \wedge \omega_2,\ \omega_0 \wedge \omega_{-1} \wedge \omega_{-2} \wedge \omega_1,$
$\omega_0 \wedge \omega_{-1} \wedge \omega_{-2} \wedge \omega_2$;

$k = 5$ $\omega_0 \wedge \omega_{-1} \wedge \omega_{-2} \wedge \omega_1 \wedge \omega_2$.

Прямая проверка показывает, что все элементы размерностей 1, 2, 4, 5 имеют фильтрацию 1.

Элементы группы $H^3(\mathcal{GH}^5)$, представленные коциклами $\omega_0 \wedge \omega_{-1} \wedge \omega_{-2},\ \omega_0 \wedge \omega_{-1} \wedge$

ω_2, $\omega_0 \wedge \omega_{-2} \wedge \omega_1$, $\omega_0 \wedge \omega_1 \wedge \omega_2$, принадлежат члену фильтрации Φ^2, и как показано в утверждениях 7.8 и 7.9, представляются в виде нетривиальных тройных произведений Масси, а также лежат в образе дифференциала d_2 спектральной последовательности Бухштабера.

Для оставшегося класса $\omega_0 \wedge (\omega_{-1} \wedge \omega_1 - \omega_{-2} \wedge \omega_2)$ верно аналогичное утверждение.

Утверждение 7.10.

(i) Коцикл $\omega_0 \wedge (\omega_{-1} \wedge \omega_1 - \omega_{-2} \wedge \omega_2)$ является представителем тройного матричного произведения Масси

$$\left\langle (\omega_{-1} \;\; \omega_{-2}), \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\omega_1 \\ \frac{1}{2}\omega_2 \end{pmatrix}, \omega_{-1} \wedge \omega_1 - \omega_{-2} \wedge \omega_2 \right\rangle.$$

(ii) Класс, представленный формой $\omega_0 \wedge (\omega_{-1} \wedge \omega_1 - \omega_{-2} \wedge \omega_2)$, равен $d_2\big((e_0)^* \otimes (\omega_{-1} \wedge \omega_1 - \omega_{-2} \wedge \omega_2) - (e_2 e_1)^* \otimes \omega_{-1} \wedge \omega_{-2}\big)$.

Доказательство. Проверим (i). Положим $A = (\omega_{-1} \;\; \omega_{-2})$, $B = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\omega_1 \\ \frac{1}{2}\omega_2 \end{pmatrix}$ и $C = \omega_{-1} \wedge \omega_1 - \omega_{-2} \wedge \omega_2$.

Тогда $\overline{A}B = -\frac{1}{2}(\omega_{-1} \wedge \omega_1 + \omega_{-2} \wedge \omega_2)$ — точная форма, а именно для $U = -\frac{1}{2}\omega_0$ выполнено $\overline{A}B = dU$.

Далее, $\overline{B}C = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\omega_1 \wedge \omega_{-2} \wedge \omega_2 \\ -\frac{1}{2}\omega_2 \wedge \omega_{-1} \wedge \omega_1 \end{pmatrix}$ — матрица, составленная из точных форм, а именно, для $V = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\omega_1 \wedge \omega_0 \\ \frac{1}{2}\omega_2 \wedge \omega_0 \end{pmatrix}$ имеем $dV = \overline{B}C$.

Представителем тройного произведения Масси $\langle A, B, C \rangle$ является элемент

$$\overline{U}C + \overline{A}V = \frac{1}{2}\omega_0 \wedge (\omega_{-1} \wedge \omega_1 - \omega_{-2} \wedge \omega_2) - \frac{1}{2}\omega_{-1} \wedge (-\omega_1 \wedge \omega_0) - \frac{1}{2}\omega_{-2} \wedge (\omega_2 \wedge \omega_0) = \\ = \omega_0 \wedge (\omega_{-1} \wedge \omega_1 - \omega_{-2} \wedge \omega_2),$$

что и требуется.

Проверим пункт (ii):

$$d_{CE}\big((e_0)^* \otimes (\omega_{-1} \wedge \omega_1 - \omega_{-2} \wedge \omega_2)\big) = \omega_0 \wedge (\omega_{-1} \wedge \omega_1 - \omega_{-2} \wedge \omega_2) + \\ + (e_1)^* \otimes \omega_{-1} \wedge \omega_{-2} \wedge \omega_2 - (e_2)^* \otimes \omega_{-2} \wedge \omega_{-1} \wedge \omega_1;$$

$$d_{CE}\big((e_2 e_1)^* \otimes \omega_{-1} \wedge \omega_{-2}\big) = (e_2)^* \otimes \omega_1 \wedge \omega_{-1} \wedge \omega_{-2} + (e_1)^* \otimes \omega_2 \wedge \omega_{-1} \wedge \omega_{-2},$$

вычтем из первого соотношения второе и получим нужное равенство из (ii). □

Напомним, дифференциал d в комплексе Шевалле—Эйленберга $\wedge(\mathcal{GH}^7)^*$ опре-

деляется соотношениями

$$d\omega_{\pm1} = d\omega_{\pm2} = d\omega_{\pm3} = 0, \qquad d\omega_0 = \omega_{-1}\wedge\omega_1 + \omega_{-2}\wedge\omega_2 + \omega_{-3}\wedge\omega_3.$$

Отсюда легко можно получить в явном виде базисные элементы в группах когомологий $H^k(\mathcal{GH}^7)$. Но вместо этого мы сделаем замечание следующего общего характера.

Как мы уже знаем, для $k = 1, 2, 3, 5, 6, 7$ все элементы групп $H^k(\mathcal{GH}^7)$ принадлежат члену фильтрации Φ^1, в частности, лежат в образе дифференциала d_1 спектральной последовательности Бухштабера.

Все элементы группы $H^4(\mathcal{GH}^7)$ принадлежат члену фильтрации Φ^2, в частности, лежат в образе дифференциала d_2 спектральной последовательности Бухштабера.

В утверждениях 7.8 и 7.9 было доказано, что 8 независимых элементов $H^4(\mathcal{GH}^7)$, представленных коциклами вида $e_0\wedge\omega_{\pm1}\wedge\omega_{\pm2}\wedge\omega_{\pm3}$ представляются в виде нетривиальных тройных произведений Масси, также показано явной формулой, что каждый такой элемента принадлежит образу d_2.

С другой стороны, $b_4 = b_3 = \binom{6}{4} - \binom{6}{2} = 14$, т. е. в $H^4(\mathcal{GH}^7)$ имеются еще 6 независимых классов градуировки 4. Их легко указать явно (для краткости вместо $\omega_{i_1}\wedge\omega_{i_2}\wedge\ldots$ здесь мы пишем $(i_1, i_2, \ldots)$):

$$\begin{aligned}
&(0,-1,1,2)+(0,-3,2,3), && (0,-2,1,2)-(0,-3,1,3),\\
&(0,-2,2,3)-(0,-1,1,3), && (0,-2,-3,3)+(0,-1,-2,1),\\
&(0,-1,-3,3)-(0,-1,-2,2), && (0,-1,-3,1)-(0,-2,-3,2).
\end{aligned} \tag{7.22}$$

Каждый из них лежит в образе дифференциала d_2, а также представляется тройным произведением Масси. Мы продемонстрируем это только для элемента $(0,-1,1,2)+(0,-3,2,3)$, оставшиеся пять элементов рассматриваются аналогично. Во-первых, покажем, что этот элемент принадлежит тройному произведению Масси

$$\left\langle (\omega_{-1}\ \ \omega_{-2}\ \ \omega_{-3}),\ \begin{pmatrix}\frac12\omega_1\\ \frac12\omega_2\\ \frac12\omega_3\end{pmatrix}, \omega_{-1}\wedge\omega_1\wedge\omega_2 + \omega_{-3}\wedge\omega_2\wedge\omega_3\right\rangle.$$

Обозначим $A = (\omega_{-1}\ \ \omega_{-2}\ \ \omega_{-3})$, $B = \begin{pmatrix}\frac12\omega_1\\ \frac12\omega_2\\ \frac12\omega_3\end{pmatrix}$, $C = \omega_{-1}\wedge\omega_1\wedge\omega_2 + \omega_{-3}\wedge\omega_2\wedge\omega_3$. Тогда $\overline{A}B = -\frac12(\omega_{-1}\wedge\omega_1 + \omega_{-2}\wedge\omega_2 + \omega_{-3}\wedge\omega_3)$ — точная форма, а именно для $U = -\frac12\omega_0$ выполнено $\overline{A}B = dU$.

Далее, $\overline{B}C = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\omega_1 \wedge \omega_{-3} \wedge \omega_2 \wedge \omega_3 \\ 0 \\ -\frac{1}{2}\omega_3 \wedge \omega_{-1} \wedge \omega_1 \wedge \omega_2 \end{pmatrix}$ — матрица, составленная из точных форм, а именно, для $V = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\omega_0 \wedge \omega_1 \wedge \omega_2 \\ 0 \\ -\frac{1}{2}\omega_0 \wedge \omega_3 \wedge \omega_2 \end{pmatrix}$ имеем $dV = \overline{B}C$.

Представителем тройного произведения Масси $\langle A, B, C\rangle$ является элемент

$$\overline{U}C+\overline{A}V = \frac{1}{2}\omega_0\wedge(\omega_{-1}\wedge\omega_1\wedge\omega_2+\omega_{-3}\wedge\omega_2\wedge\omega_3)-\frac{1}{2}\omega_{-1}\wedge\omega_0\wedge\omega_1\wedge\omega_2+\frac{1}{2}\omega_{-3}\wedge\omega_0\wedge\omega_3\wedge\omega_2 = \\ = \omega_0 \wedge \big(\omega_{-1} \wedge \omega_1 \wedge \omega_2 - \omega_{-3} \wedge \omega_2 \wedge \omega_3\big),$$

что и требовалось.

Во-вторых, покажем, что $(0,-1,1,2)+(0,-3,2,3)$ представляется в виде

$$d_2\big((e_0)^*\otimes((-1,1,2)+(-3,2,3))+(e_1e_3)^*\otimes(-3,-1,2)+(e_{-2}e_2)^*\otimes((-3,2,3)+(-1,1,2))\big).$$

Для этого достаточно вычислить дифференциал Шевалле–Эйленберга от каждого из этих трех слагаемых:

$$\begin{aligned} d_{CE}\big((e_0)^* \otimes ((-1,1,2)+(-3,2,3))\big) &= (0,-1,1,2)+(0,-3,2,3) - \\ &- (e_2)^* \otimes (-2,-1,1,2) - (e_3)^* \otimes (-3,-1,1,2) - \\ &- (e_1)^* \otimes (-1,-3,2,3) - (e_2)^* \otimes (-2,-3,2,3); \\ d_{CE}\big((e_1e_3)^* \otimes (-3,-1,2)\big) &= (e_1)^* \otimes (3,-3,-1,2) + (e_3)^* \otimes (1,-3,-1,2); \\ d_{CE}\big((e_{-2}e_2)^* \otimes ((-3,2,3)+(-1,1,2))\big) &= (e_{-2})^* \otimes ((-2,-3,2,3)+(-2,-1,1,2)). \end{aligned}$$

Остается сложить эти три равенства.

Глава 8

Bss для алгебры Стинрода $\mathcal{A}_2$

В разделе 8.1 в явном виде вычислена структура на когомологиях алгебры $A(1)$, заданная дифференциалами Bss, в частности, мы получаем представление всех элементов этих когомологий в виде специальных произведений Масси, см. теоремы 8.1 и 8.2.

В разделе 8.2 мы показываем, как Bss используется в задаче вычисления когомологий алгебр Хопфа. А именно, не используя никакой априорной информации, мы вычисляем $\mathrm{Ext}^{s,*}_{A(1)}(\mathbb{Z}/2,\mathbb{Z}/2)$ для $s \leqslant 4$. Ясно, как продолжить вычисления $\mathrm{Ext}^{s,*}_{A(1)}(\mathbb{Z}/2,\mathbb{Z}/2)$ методом Bss и, например, доказать 4-периодичность из теоремы 8.1, но это не является целью настоящей работы.

Наконец, в разделе 8.3 получены результаты о когомологиях алгебр $\mathcal{A}_p$ методом Bss, в частности, показано, как известные соотношения в этих когомологиях реализуются в терминах дифференциалов Bss.

8.1 Bss для алгебры Хопфа $A(1)$

Напомним, подалгебра Хопфа $A(1) \subset \mathcal{A}_2$ порождена элементами $1, Sq^1, Sq^2$. Отметим, что $Sq^3 \in A(1)$, так как $Sq^1Sq^2 = Sq^3$. Двойственная алгебра Хофпа $A(1)_*$ является факторалгеброй $(\mathcal{A}_2)_*$ по идеалу соотношений $\xi_1^4 = 0$, $\xi_2^2 = 0$, $\xi_j = 0$, $j \geqslant 3$; иными словами, $A(1)_* = \mathbb{Z}/2[\xi_1,\xi_2]/\langle \xi_1^4 = 0, \xi_2^2 = 0\rangle$. Коумножение определено теми же формулами, что и в $(\mathcal{A}_2)_*$:

$$\Delta(\xi_1) = 1 \otimes \xi_1 + \xi_1 \otimes 1,$$
$$\Delta(\xi_2) = 1 \otimes \xi_2 + \xi_1^2 \otimes \xi_1 + \xi_2 \otimes 1.$$

В данном случае фильтрация $\{N_j\}$ двойственной алгебры $A(1)_*$ конечна:

$$\mathbb{Z}/2 = N_0 \subset N_1 \subset N_2 \subset N_3 \subset N_4 = A(1)_*$$

Последовательные факторы фильтрации легко вычисляются с помощью теоремы 6.5.

Утверждение 8.1. *Для алгебры $A(1)_*$ последовательные нетривиальные факторы фильтрации имеют вид*

$$\begin{aligned}
K_1 &= N_1/N_0 = \mathbb{Z}/2\langle \xi_1, \xi_1^2 \rangle, \\
K_2 &= N_2/N_1 = \mathbb{Z}/2\langle \xi_1^3, \xi_2 \rangle, \\
K_3 &= N_3/N_2 = \mathbb{Z}/2\langle \xi_2\xi_1, \xi_2\xi_1^2 \rangle, \\
K_4 &= N_4/N_3 = \mathbb{Z}/2\langle \xi_2\xi_1^3 \rangle.
\end{aligned}$$

□

Выпишем первый член Bss (здесь для краткости $E^k = \mathrm{Ext}^{k,*}_{A(1)}(\mathbb{Z}/2, \mathbb{Z}/2)$), при этом заметим, что при $j < 0$ и при $j > 4$ группы $E_1^{j,*,*}$ являются нулевыми:

$$\begin{array}{ccccccc}
E^0 & & & & & & \\
E^1 & K_1 & & & & & \\
E^2 & K_1 \otimes E^1 & K_2 & & & & \\
E^3 & K_1 \otimes E^2 & K_2 \otimes E^1 & K_3 & & & \\
E^4 & K_1 \otimes E^3 & K_2 \otimes E^2 & K_3 \otimes E^1 & K_4 & & \\
E^5 & K_1 \otimes E^4 & K_2 \otimes E^3 & K_3 \otimes E^2 & K_4 \otimes E^1 & & \\
E^6 & K_1 \otimes E^5 & K_2 \otimes E^4 & K_3 \otimes E^3 & K_4 \otimes E^2 & & \\
 & \vdots & \vdots & \vdots & & &
\end{array}$$

По теореме A.7 аддитивный базис в $\mathrm{Ext}^{*,*}_{A(1)}(\mathbb{Z}/2, \mathbb{Z}/2)$ состоит из элементов

$$\begin{aligned}
&h_0^n w^k, \quad n \geqslant 0, k \geqslant 0; \\
&h_1 w^k, \quad k \geqslant 0; \\
&h_1^2 w^k, \quad k \neq 0; \\
&h_0^n v w^k, \quad n \geqslant 0, k \geqslant 0.
\end{aligned}$$

Теорема 8.1. *Для Bss алгебры Хопфа $A(1)$ член $E_2^{j,q,*}$ описывается следующим образом. Для $-q = 0, 1, 2$ группы $E_2^{*,q,*}$ тривиальны. При $-q \geqslant 3$ в $E_2^{j,q,*}$ проявляется*

4-периодичность (здесь $k \geqslant 0$) по q:

$-q\backslash j$	0	1	2	3	4
$4k+3$	vw^k	$\xi_1^2 \otimes h_1^2 w^k$			
$4k+4$	$\boxed{w^{k+1}}$	$\xi_1^2 \otimes vw^k$	$\xi_1^3 \otimes h_1^2 w^k$	$\xi_2\xi_1 \otimes h_1 w^k$	
$4k+5$			$(\xi_2 + \xi_1^3) \otimes vw^k$	$\xi_2\xi_1^2 \otimes h_1^2 w^k$	
$4k+6$				$\boxed{\xi_2\xi_1^2 \otimes vw^k}$	$\xi_2\xi_1^3 \otimes h_1^2 w^k$

Для дифференциала d_2 имеют место равенства

$$
\begin{aligned}
&d_2(\xi_1^3 \otimes h_1^2 w^k) = vw^k,\\
&d_2(\xi_2\xi_1 \otimes h_1 w^k) = \xi_1^2 \otimes h_1^2 w^k,\\
&d_2(\xi_2\xi_1^2 \otimes h_1^2 w^k) = \xi_1^2 \otimes vw^k,\\
&d_2(\xi_2\xi_1^3 \otimes h_1^2 w^k) = (\xi_2 + \xi_1^3) \otimes vw^k.
\end{aligned}
$$

До $E_3^{*,*,*}$ доживают в точности обведенные в рамку элементы, т. е. $w^{k+1} \in E_3^{0,-4k-4,*}$ и $\xi_2\xi_1^2 \otimes vw^k \in E_3^{3,-4k-6,*}$; при этом в $E_3^{*,*,*}$ выполнено равенство

$$d_3(\xi_2\xi_1^2 \otimes vw^k) = w^{k+1}.$$

Доказательству предпошлем несколько вспомогательных утверждений.

Лемма 8.1. *Ядро*

$$d_1 : E_1^{4,*,*} \to E_1^{3,*,*}$$

состоит в точности из элементов $\xi_2\xi_1^3 \otimes h_1^2 w^k \in E_1^{4,*,*}$.

Доказательство. Прежде всего, отметим, что все элементы $\xi_2\xi_1^3 \otimes h_1^2 w^k$ лежат в ядре d_1, поскольку

$$d_1(\xi_2\xi_1^3 \otimes h_1^2 w^k) = \xi_2\xi_1^2 \otimes h_0 h_1^2 w^k + \xi_2\xi_1 \otimes h_1^3 w^k = 0.$$

Для остальных элементов из $E_1^{4,*,*}$ выполнены равенства

$$
\begin{aligned}
&d_1(\xi_2\xi_1^3 \otimes w^k) = \xi_2\xi_1 \otimes h_1 w^k + \xi_2\xi_1^2 \otimes h_0 w^k,\\
&d_1(\xi_2\xi_1^3 \otimes h_0^n w^k) = \xi_2\xi_1^2 \otimes h_0^{n+1} w^k, \quad n \geqslant 1,\\
&d_1(\xi_2\xi_1^3 \otimes h_1 w^k) = \xi_2\xi_1 \otimes h_1^2 w^k,\\
&d_1(\xi_2\xi_1^3 \otimes h_0^n vw^k) = \xi_2\xi_1^2 \otimes h_0^{n+1} vw^k.
\end{aligned}
$$

Легко видеть, что между элементами в правых частях этих равенств нет линейных зависимостей, причем для этого вывода не нужно использовать градуировки. □

Лемма 8.2. *В образе дифференциала* $d_1 : E_1^{1,*,*} \to E_1^{0,*,*}$ *лежат все элементы, кроме* vw^k *и* w^{k+1}, $k \geqslant 0$.

Доказательство. Достаточно заметить, что при $n \geqslant 1$ и $k \geqslant 0$ выполнены равенства $d_1(\xi_1 \otimes h_0^{n-1} w^k) = h_0^n w^k$ и $d_1(\xi_1 \otimes h_0^{n-1} v w^k) = h_0^n v w^k$, а при любом $k \geqslant 0$ — равенства $d_1(\xi_1^2 \otimes w^k) = h_1 w^k$ и $d_1(\xi_1^2 \otimes h_1 w^k) = h_1^2 w^k$.

Элементы vw^k и w^{k+1} не могут лежать в образе d_1, так как образ d_1 состоит из элементов, которые являются линейными комбинациями элементов, делящихся на h_0 или на h_1. □

Лемма 8.3. *Пусть* $x \in \mathrm{Ext}_{A(1)}^{*,*}(\mathbb{Z}/2, \mathbb{Z}/2)$, *причем* x *не делится на* h_1 *или, равносильно, выполнено равенство* $h_0 x \neq 0$. *Тогда в* $E^{1,*,*} \xleftarrow{d_1} E^{2,*,*} \xleftarrow{d_1} E^{3,*,*}$ *прямым слагаемым выделяется точный подкомплекс*

$$0 \longleftarrow L_1(x) \xleftarrow{d_1} L_2(x) \xleftarrow{d_1} L_3(x) \longleftarrow 0,$$

$$\begin{aligned} L_1(x) &= \mathbb{Z}/2\langle \xi_1^2 \otimes h_0^2 x \rangle, \\ L_2(x) &= \mathbb{Z}/2\langle \xi_2 \otimes h_0 x, \xi_1^3 \otimes h_0 x \rangle, \\ L_3(x) &= \mathbb{Z}/2\langle \xi_2 \xi_1 \otimes x \rangle. \end{aligned}$$

Доказательство. Утверждение легко следует из непосредственно проверяемых формул $d_1(\xi_2\xi_1 \otimes x) = \xi_2 \otimes h_0 x + \xi_1^3 \otimes h_0 x$, $d_1(\xi_2 \otimes h_0 x) = \xi_1^2 \otimes h_0^2 x$, $d_1(\xi_1^3 \otimes h_0 x) = \xi_1^2 \otimes h_0^2 x$. □

Перейдем к доказательству теоремы 8.1. Соберем информацию из лемм 8.1,8.2 и 8.3 в следующую таблицу, где $j \geqslant 2, k \geqslant 0$. В ней знаком $\bullet$ отмечены элементы, не доживающие до $E_2^{*,*,*}$ по лемме 8.2, знаком $*$ отмечены элементы, не доживающие до $E_2^{*,*,*}$ по лемме 8.1, и наконец, знаком $\circ$ отмечены элементы, не доживающие до $E_2^{*,*,*}$

по лемме 8.3.

	1	ξ_1	ξ_1^2	ξ_1^3	ξ_2	$\xi_1^3+\xi_2$	$\xi_2\xi_1$	$\xi_2\xi_1^2$	$\xi_2\xi_1^3$
w^k	$\square$	$\bullet$	$\bullet$	$\circledast$	$\circledast$		$\circ$	$\diamond$	$\circledcirc$
h_0w^k	$\bullet$	$\bullet$	$\circledast$	$\circ$	$\circ$		$\circ$	$\circledcirc$	$*$
$h_0^jw^k$	$\bullet$	$\bullet$	$\circ$	$\circ$	$\circ$		$\circ$	$*$	$*$
vw^k	$\square$	$\bullet$	$\square$		$\diamond$	$\square$	$\circ$	$\square$	$*$
h_0vw^k	$\bullet$	$\bullet$	$\diamond$	$\circ$	$\circ$		$\circ$	$*$	$*$
$h_0^jvw^k$	$\bullet$	$\bullet$	$\circ$	$\circ$	$\circ$		$\circ$	$*$	$*$
h_1w^k	$\bullet$	$\circledast$	$\bullet$	$\diamond$	$\diamond$		$\square\circledcirc$	$\diamond$	$*$
$h_1^2w^k$	$\bullet$	$\diamond$	$\square$	$\square$	$\diamond$		$*$	$\square$	$\square$

Далее, знаком $\diamond$ в таблице отмечены элементы, не доживающие до $E_2^{*,*,*}$ в силу соотношений

$$d_1(\xi_2\xi_1^2\otimes h_1w^k)=\xi_2\otimes h_1^2w^k,$$
$$d_1(\xi_2\otimes vw^k)=\xi_1^2\otimes h_0vw^k,$$
$$d_1(\xi_2\xi_1^2\otimes w^k)=\xi_2\otimes h_1w^k,$$
$$d_1(\xi_1^3\otimes h_1w^k)=\xi_1\otimes h_1^2w^k.$$

Элементы, отмеченные знаком $\circledast$, образуют выделяющийся прямым слагаемым точный подкомплекс

$$0\longleftarrow \mathbb{Z}/2\langle\xi_1^2\otimes h_0w^k,\xi_1\otimes h_1w^k\rangle\xleftarrow{d_1}\mathbb{Z}/2\langle\xi_1^3\otimes w^k,\xi_2\otimes w^k\rangle\longleftarrow 0$$

в силу соотношений

$$d_1(\xi_1^3\otimes w^k)=\xi_1^2\otimes h_0w^k+\xi_1\otimes h_1w^k,$$
$$d_1(\xi_2\otimes w^k)=\xi_1^2\otimes h_0w^k.$$

Тем самым, эти элементы тоже не доживают до $E_2^{*,*,*}$.

Далее, знаком $\circledcirc$ отмечены элементы, которые образуют выделяющийся прямым слагаемым подкомплекс

$$0\xleftarrow{j}\mathbb{Z}/2\langle\xi_2\xi_1^2\otimes h_0w^k,\xi_2\xi_1\otimes h_1w^k\rangle\xleftarrow{d_1}\mathbb{Z}/2\langle\xi_2\xi_1^3\otimes w^k\rangle\xleftarrow{i}0.$$

Легко проверить, что

$$d_1(\xi_2\xi_1^3\otimes w^k)=\xi_2\xi_1^2\otimes h_0w^k+\xi_2\xi_1\otimes h_1w^k.$$

Отсюда получаем, что $\xi_2\xi_1^3 \otimes w^k$ не доживает до $E_2^{*,*,*}$, а классы $[\xi_2\xi_1^2 \otimes h_0 w^k]$ и $[\xi_2\xi_1 \otimes h_1 w^k]$ в $E_2^{*,*,*}$ равны (и отличны от 0).

Наконец, оставшиеся элементы лежат в ядре d_1, и как следует из вышесказанного, не принадлежат образу d_1. Эти элементы, а также $[\xi_2\xi_1^2 \otimes h_0 w^k] = [\xi_2\xi_1 \otimes h_1 w^k]$, представляют собой все ненулевые классы в $E_2^{*,*,*}$. Эти элементы отмечены знаком $\square$. В точности эти элементы приведены в таблице в теореме 8.1.

Теперь докажем утверждения, касающиеся дифференциала d_2. Полезно представить себе таблицу из формулировки теоремы, дополнив ее сверху и снизу ее же копиями для $k-1$ и $k+1$ соответственно. Рассмотрим элементы этой таблицы в определенном порядке.

1) Элемент $x = \xi_2\xi_1 \otimes h_1 w^k$ не лежит в образах дифференциалов d_r, $r \geqslant 2$. Значит, либо $d_2 x \neq 0$, либо $d_2 x = 0, d_3 x \neq 0$. Однако последний случай невозможен, поскольку группа, где должен принимать значение дифференциал d_3 в этом случае нулевая. Тем самым, $d_2 x \neq 0$ и для этого есть единственная возможность $d_2(\xi_2\xi_1 \otimes h_1 w^k) = \xi_1^2 \otimes h_1^2 w^k$.

2) Аналогичным образом, $\xi_1^3 \otimes h_1^2 w^k$ не лежит в образах дифференциалов d_r, $r \geqslant 2$. Поэтому для него есть единственная возможность не дожить до $E_\infty^{*,*,*}$ — выполнение равенства $d_2(\xi_1^3 \otimes h_1^2 w^k) = v w^k$.

3) Аналогичным образом, $x = \xi_2\xi_1^2 \otimes h_1^2 w^k$ не лежит в образах дифференциалов d_r, $r \geqslant 2$. Значит, либо $d_2 x \neq 0$, либо $d_2 x = 0, d_3 x \neq 0$. Однако заметим, что во втором случае в $E_3^{*,*,*}$ выполнялось бы равенство $d_3 x = v w^k$, что невозможно по предыдущему пункту, так как $v w^k$ не доживает до $E_3^{*,*,*}$. Тем самым, остается единственная возможность $d_2(\xi_2\xi_1^2 \otimes h_1^2 w^k) = \xi_1^2 \otimes v w^k$.

4) Аналогично, для элемента $x = \xi_2\xi_1^3 \otimes h_1^2 w^k$ должно быть выполнено либо $d_2 x \neq 0$, либо $d_2 x = 0$ и $d_3 x \neq 0$, либо $d_2 x = 0$, $d_3 x = 0$ и $d_4 x = 0$. Последние два случая не могут реализоваться — согласно предыдущим рассуждениям элементы $\xi_1^2 \otimes v w^k$ и $v w^k$ — единственные возможные ненулевые значения $d_3 x$ и $d_4 x$ соответственно — не доживают до $E_3^{*,*,*}$. Остается единственная возможность $d_2(\xi_2\xi_1^3 \otimes h_1^2 w^k) = (\xi_2 + \xi_1^3) \otimes v w^k$.

Утверждение о дифференциале d_3 теперь тривиально. Теорема 8.1 доказана. $\square$

В следующем утверждении мы собрали всю полученную информацию об элементах в когомологиях алгебры $A(1)$. Напомним, что под двухместным произведением Масси мы понимаем обычное умножение в когомологиях.

Теорема 8.2. *Элементы* $\mathrm{Ext}_{A(1)}^{*,*}(\mathbb{Z}/2, \mathbb{Z}/2)$ *имеют следующие фильтрации и представления в виде дифференциалов* Bss *и итерированных специальных произведений*

Масси:

элемент	*фильтрация*	*представление дифференциалом*	*произведение Масси*
$h_0^n w^k, n \geqslant 1, k \geqslant 0$	1	$d_1(\xi_1 \otimes h_0^{n-1} w^k)$	$h_0 \cdot h_0^{n-1} w^k$
$w^k, k \geqslant 1$	3	$d_3(\xi_2 \xi_1^2 \otimes v w^{k-1})$	$\langle h_1, h_0, h_1, v w^{k-1} \rangle$
$h_1 w^k, k \geqslant 0$	1	$d_1(\xi_1^2 \otimes w^k)$	$h_1 \cdot w^k$
$h_1^2 w^k, k \geqslant 0$	1	$d_1(\xi_1^2 \otimes h_1 w^k)$	$h_1 \cdot h_1 w^k$
$h_0^n v w^k, n \geqslant 1, k \geqslant 0$	1	$d_1(\xi_1 \otimes h_0^{n-1} v w^k$	$h_0 \cdot h_0^{n-1} v w^k$
$v w^k, k \geqslant 0$	2	$d_2(\xi_1^3 \otimes h_1^2 w^k)$	$\langle \begin{pmatrix} h_0 & h_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} h_1 \\ h_0 \end{pmatrix}, h_1^2 w^k \rangle =$ $= \langle h_0, h_1, h_1^2 w^k \rangle$

8.2 Вычисление $\mathrm{Ext}_{A(1)}^{s,*}(\mathbb{Z}/2, \mathbb{Z}/2)$ для $s \leqslant 4$ с помощью *Bss*

8.2.1 $\mathrm{Ext}_{A(1)}^{1,*}(\mathbb{Z}/2, \mathbb{Z}/2)$

По лемме 5.4 дифференциал d_1 задает изоморфизм K_1 на E^1. Тем самым, E^1 содержит два независимых элемента

$$h_0 = d_1[\xi_1], \quad h_1 = d_1[\xi^2].$$

Легко проверить, что в кобар-конструкции элемент h_0 представлен коциклом $[\xi_1]$, а элемент h_1 — коциклом $[\xi_1^2]$.

8.2.2 $\mathrm{Ext}_{A(1)}^{2,*}(\mathbb{Z}/2, \mathbb{Z}/2)$

Утверждение 8.2. *В* $\mathrm{Ext}_{A(1)}^{2,*}(\mathbb{Z}/2, \mathbb{Z}/2)$ *имеются два независимых ненулевых элемента* h_0^2 *и* h_1^2*, и кроме того, выполнено соотношение* $h_0 h_1 = h_1 h_0 = 0$.

Доказательство.

Рассмотрим фрагмент

$$E_1^{0,-2,*} \xleftarrow{d_1} E_1^{1,-2,*} \xleftarrow{d_1} E_1^{2,-2,*}$$

триградуированной спектральной последовательности. Его удобно записать в виде

$$E^2 \xleftarrow{d_1} K_1 \otimes E^1 \xleftarrow{d_1} K_2$$

Непосредственным вычислением легко найти образ $d_1 : K_2 \to K_1 \otimes E^1$:

$$d_1(\xi_2) = \xi_1^2 \otimes h_0, \quad d_1(\xi_1^3) = \xi_1^2 \otimes h_0 + \xi_1 \otimes h_1,$$

а также ядро $d_1 : K_1 \otimes E^1 \to E^2$:

$$d_1(\xi_1 \otimes h_0) = h_0^2, \quad d_1(\xi_1 \otimes h_1) = h_0 h_1, \quad d_1(\xi_1^2 \otimes h_0) = h_1 h_0, \quad d_1(\xi_1^2 \otimes h_1) = h_1^2.$$

Теперь заметим, что $d_1 \circ d_1(\xi_2) = 0$. Далее, $d_1(\xi_2) = \xi_1^2 \otimes h_0$, а $d_1(\xi_1^2 \otimes h_0) = h_1 h_0$. Поэтому в группе $\mathrm{Ext}^{2,*}_{A(1)}(\mathbb{Z}/2, \mathbb{Z}/2)$ выполнено соотношение $h_1 h_0 = 0$.

Рассмотрим соотношение $d_1 \circ d_1(\xi_1^3) = 0$. Имеем равенства $d_1(\xi_1^3) = \xi_1 \otimes h_1 + \xi_1^2 \otimes h_0$ и $d_1(\xi_1 \otimes h_1 + \xi_1^2 \otimes h_0) = h_0 h_1 + h_1 h_0$. Тем самым, в группе $\mathrm{Ext}^{2,*}_{A(1)}(\mathbb{Z}/2, \mathbb{Z}/2)$ выполнено соотношение $h_0 h_1 + h_1 h_0 = 0$.

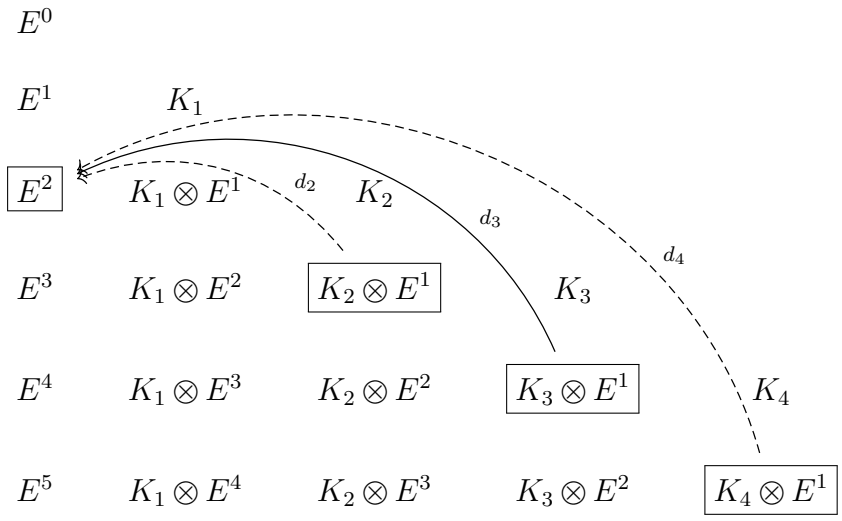
Элементы $h_0^2 = d_1(\xi_1 \otimes h_0)$ и $h_1^2 = d_1(\xi_1^2 \otimes h_1)$ в E^2 не должны быть нулевыми, в противном случае $E_2^{2,-1,*} \neq 0$ и из вида дифференциалов следует, что $E_2^{2,-1,*} = E_\infty^{2,-1,*} \neq 0$, а это противоречит тривиальности $E_\infty^{*,*,*}$. Итак, в E^2 имеется подмодуль M^2, порожденный h_0^2, h_1^2.

□

Если в E^2 имеются какие-то другие элементы, не описанные утверждением 8.2, то они должны лежать в образах дифференциалов

$$\begin{aligned} d_2 &: E_2^{2,-3,*} \to E_2^{0,-2,*}, \\ d_3 &: E_3^{3,-4,*} \to E_3^{0,-2,*}, \\ d_4 &: E_4^{4,-5,*} \to E_4^{0,-2,*}, \end{aligned}$$

показанных на следующей диаграмме



Утверждение 8.3. *Имеют место изоморфизмы* $E_2^{4,-5,*} = 0$ *и* $E_2^{2,-3,*} = 0$. *Следовательно, области определения дифференциалов* $d_2 : E_2^{2,-3,*} \to E_2^{0,-2,*}$ *и* $d_4 : E_4^{4,-5,*} \to E_4^{0,-2,*}$ *нулевые.*

Доказательство. Дифференциал $d_1 : E_1^{4,-5,*} \to E_1^{3,-5,*}$ раскладывается в композицию $d_1 : K_4 \otimes E^1 \to K_3 \otimes M^2 \subset K_3 \otimes E^2$. Легко вычислить d_1 на образующих:

$$d_1(\xi_2\xi_1^3 \otimes h_0) = \xi_2\xi_1^2 \otimes h_0^2,$$
$$d_1(\xi_2\xi_1^3 \otimes h_1) = \xi_2\xi_1 \otimes h_1^2.$$

Значит, этот дифференциал d_1 является вложением, и поэтому $E_2^{4,-5,*} = 0$.

Чтобы установить изоморфизм $E_2^{2,-3,*} = 0$, проверим точность в среднем члене последовательности

$$E_1^{3,-3,*} \xrightarrow{d_1} E_1^{2,-3,*} \xrightarrow{d_1} E_1^{1,-3,*}.$$

Перепишем ее в виде

$$K_3 \xrightarrow{d_1} K_2 \otimes E^1 \xrightarrow{d_1} K_1 \otimes M^2 \subset K_1 \otimes E^2.$$

Обратим внимание, что пока не известно, является ли вложение $K_1 \otimes M^2 \subset E_1^{1,-3,*}$ изоморфизмом, но образ дифференциала $d_1 : K_2 \otimes E^1 \to K_1 \otimes E^2$ содержится в $K_1 \otimes M^2$; для проверки точности этого достаточно.

Для $d_1 : K_3 \to K_2 \otimes E^1$ выполнены равенства: $d_1(\xi_2\xi_1) = \xi_2 \otimes h_0 + \xi_1^3 \otimes h_0$, $d_1(\xi_2\xi_1^2) = \xi_2 \otimes h_1$. Значит, $\operatorname{im} d_1$ двумерен.

Теперь вычислим $d_1 : K_2 \otimes E^1 \to K_1 \otimes M^2$: $d_1(\xi_2 \otimes h_0) = \xi_1^2 \otimes h_0^2, d_1(\xi_2 \otimes h_1) = 0, d_1(\xi_1^3 \otimes h_0) = \xi_1^2 \otimes h_0^2, d_1(\xi_1^3 \otimes h_1) = \xi_1 \otimes h_1^2$. Ядро этого дифференциала d_1 тоже двумерно, поэтому $E_2^{2,-3,*} = 0$. □

Тем самым, если в E^2 имеются элементы, не описанные утверждением 8.2, то они должны лежать в образе дифференциала $d_3 : E_3^{3,-4,*} \to E_3^{0,-2,*}$. Утверждения 8.4 и 8.5 (см. ниже) показывают, что $E_3^{3,-4,*} = 0$, тем самым, никаких других элементов, кроме описанных в утверждении 8.2, группа $\operatorname{Ext}_{A(1)}^{2,*}(\mathbb{Z}/2, \mathbb{Z}/2)$ не содержит.

Замечание. Можно высказать следующее соображение общего характера: если в Bss имеет место равенство $d_r(x) = 0 \in E_r^{0,*,*}$, то оно может быть интерпретировано как соотношение в когомологиях алгебры. Например, важные соотношения $h_1h_0 = 0$ и $h_0h_1 + h_1h_0 = 0$ в $\operatorname{Ext}_{A(1)}^{2,*}(\mathbb{Z}/2, \mathbb{Z}/2)$ были получены как следствия равенства $d_1^2 = 0$. Аналогичным образом в следующем разделе будут получены соотношения в $\operatorname{Ext}_{\mathcal{A}_2}^{2,*}(\mathbb{Z}/2, \mathbb{Z}/2)$

Обратимся к вычислению $E_2^{3,-4,*}$. Рассмотрим фрагмент триградуированной

спектральной последовательности

$$E_1^{2,-4,*} \xleftarrow{d_1} E_1^{3,-4,*} \xleftarrow{d_1} E_1^{4,-4,*},$$

который удобно записать в виде

$$K_2 \otimes E^2 \supset K_2 \otimes M^2 \xleftarrow{d_1} K_3 \otimes E^1 \xleftarrow{d_1} K_4.$$

Утверждение 8.4. *Имеет место изоморфизм* $E_2^{3,-4,*} = \mathbb{Z}/2$, *образующей служит класс* $[\xi_2\xi_1 \otimes h_1] = [\xi_2\xi_1^2 \otimes h_0] \in E_2^{3,-4,6}$.

Доказательство. Вычислим образ $d_1 : K_4 \to K_3 \otimes E^1$:

$$d_1(\xi_2\xi_1^3) = \xi_2\xi_1^2 \otimes h_0 + \xi_2\xi_1 \otimes h_1,$$

значит, этот образ одномерен.

Вычислим ядро $d_1 : K_3 \otimes E^1 \to K_2 \otimes M^2$. Из равенств

$$\begin{aligned} d_1(\xi_2\xi_1 \otimes h_0) &= \xi_2 \otimes h_0^2 + \xi_1^3 \otimes h_0^2, \\ d_1(\xi_2\xi_1 \otimes h_1) &= 0, \\ d_1(\xi_2\xi_1^2 \otimes h_0) &= 0, \\ d_1(\xi_2\xi_1^2 \otimes h_1) &= \xi_2 \otimes h_1^2 \end{aligned}$$

следует, что ядро ядро этого дифференциала d_1 двумерно. Из этих же равенств получаем нужный изоморфизм для $E_2^{3,-4,*}$ и выражение для образующей. □

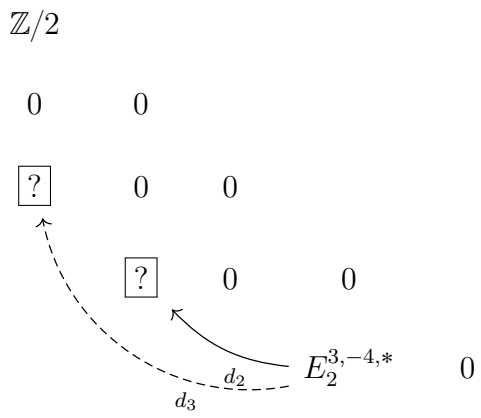
Теперь мы видим, что имеются два случая:

– либо $d_2[\xi_2\xi_1 \otimes h_1] \neq 0$ в $E_2^{1,-3,6}$,

– либо $d_2[\xi_2\xi_1 \otimes h_1] = 0$ в $E_2^{1,-3,6}$ и $d_3[\xi_2\xi_1 \otimes h_1] \neq 0$ в $E_2^{0,-2,6}$.

Если имеет место второй случай, то в группе $\mathrm{Ext}_{A(1)}^{2,*}(\mathbb{Z}/2, \mathbb{Z}/2)$ имеется еще одна образующая, в добавление к описанным в утверждении 8.2.

В действительности же реализуется первый вариант, т. е. из двух дифференциалов, показанных на диаграмме



на образующей, построенной в утверждении 8.4, отличен от 0 дифференциал d_2.

Утверждение 8.5. (*a*) *В группе* $\mathrm{Ext}^{3,*}_{A(1)}(\mathbb{Z}/2,\mathbb{Z}/2)$ *имеет место равенство* $h_1^3 = 0$.

(*b*) *Дифференциал* $d_2 : E_2^{3,-4,*} \to E_2^{1,-3,*}$ *(показан на диаграмме сплошной стрелкой) на образующей из утверждения 8.4 отличен от 0. Более точно,* $d_2([\xi_2\xi_1 \otimes h_1]) = [\xi_1^2 \otimes h_1^2]$.

Доказательство.

В кобар-конструкции коцикл $[\xi_1^2|\xi_1^2|\xi_1^2]$ представляет произведение h_1^3. Легко проверить, что имеет место равенство

$$d_F([\xi_2|\xi_2] + [\xi_2\xi_1^2|\xi_1] + [\xi_1^2|\xi_2\xi_1]) = [\xi_1^2|\xi_1^2|\xi_1^2],$$

поэтому $[\xi_1^2|\xi_1^2|\xi_1^2]$ является кограницей и $h_1^3 = 0$.

С другой стороны, в $E_1^{1,-3,6} = K_1 \otimes E^2$ имеется элемент $\xi_1^2 \otimes h_1^2$, для которого $d_1(\xi_1^2 \otimes h_1^2) = h_1^3 = 0$. Таким образом, в $E_2^{1,-3,6}$ имеется ненулевой класс $[\xi_1^2 \otimes h_1^2]$, который должен лежать либо в образе дифференциала $d_2 : E_2^{3,-4,*} \to E_2^{1,-3,*}$, либо в образе дифференциала $d_3 : E_3^{4,-5,*} \to E_3^{1,-3,*}$.

Согласно утверждению 8.3 имеет место изоморфизм $E_2^{4,-5,*} = 0$. Следовательно, остается единственная возможность: $[\xi_1^2 \otimes h_1^2]$ лежит в образе $d_2 : E_2^{3,-4,*} \to E_2^{1,-3,*}$. По утверждению 8.4 пространство $E_2^{3,-4,*}$ одномерно, откуда окончательно получаем $d_2([\xi_2\xi_1 \otimes h_1]) = [\xi_1^2 \otimes h_1^2]$. □

Было бы интересно получить равенство $h_1^3 = 0$, пользуясь только лишь вычислениями в Bss, не прибегая к вычислениям в бар-конструкции.

8.2.3 $\mathrm{Ext}^{3,*}_{A(1)}(\mathbb{Z}/2,\mathbb{Z}/2)$

Итак, мы установили:

– $\mathrm{Ext}^{1,*}_{A(1)}(\mathbb{Z}/2,\mathbb{Z}/2)$ аддитивно порождается независимыми классами h_0 и h_1;

– $\mathrm{Ext}^{2,*}_{A(1)}(\mathbb{Z}/2,\mathbb{Z}/2)$ аддитивно порождается независимыми классами h_0^2 и h_1^2, при этом выполнены соотношения $h_0h_1 = h_1h_0 = 0$;

– в $\mathrm{Ext}^{3,*}_{A(1)}(\mathbb{Z}/2,\mathbb{Z}/2)$ выполнено соотношение $h_1^3=0$.

Напомним, что кобар-конструкция биградиурована: $x_0[x_1,\dots,x_s]$ имеем биградуировку (s,t), где $t=|x_0|+\ldots+|x_n|$. Дифференциал d_F изменяют только первую градуировку, и сохраняют вторую. В рассматриваемом контексте вторая градуировка кобар-конструкции становится третьей градуировкой в Bss, при этом все дифференциалы Bss ее сохраняют. Для удобства будем называет ее t-градуировкой.

В $K_1\otimes E^2$ имеется элемент $\xi_1\otimes h_0^2$ с t-градуировкой 3. Заметим, что этот элемент (или соответствующий класс в $E_r^{*,*,*}, r\geqslant 2$, если он определен) не может лежать

а) в образе дифференциала $d_1: K_2\otimes E^1\to K_1\otimes E^2$, что легко видеть из явного описания этих групп и формулы для d_1 из теоремы 5.2;

б) в образе $d_2: E_2^{3,-4,*}\to E_2^{1,-3,*}$ или $d_3: E_3^{4,-5,*}\to E_3^{1,-3,*}$, поскольку в группах $E_1^{3,-4,*}=K_3\otimes E^1$ и $E_1^{4,-5,*}=K_4\otimes E^1$ нет элементов t-градуировки 3.

Единственная остающаяся возможность:

$$h_0^3=d_1(\xi_1\otimes h_0^2)\neq 0 \ \text{ в группе } \ E^3.$$

В следующей таблице оставлены только те ненулевые классы $E_2^{p,q,*}$, $p+q\geqslant -2$, которые порождены элементами h_0,h_1 и элементами групп K_j, $1\leqslant j\leqslant 4$.

$\mathbb{Z}/2$					
0	0				
0	0	0			
$\boxed{?}$	$[\xi_1^2\otimes h_1^2]_{(6)}$	0	0		
$\boxed{?}$	$\boxed{?}$	$[\xi_1^3\otimes h_1^2]_{(7)}$	$[\xi_2\xi_1^2\otimes h_0]_{(6)}=[\xi_2\xi_1\otimes h_1]_{(6)}$	0	
			$[\xi_2\xi_1^2\otimes h_1^2]_{(9)}$	0	
				$[\xi_2\xi_1^3\otimes h_1^2]_{(10)}$	

Остальные элементы $E_1^{p,q,*}$, $p+q\geqslant -2$, порожденые элементами h_0,h_1 и элементами групп K_j, $1\leqslant j\leqslant 4$, либо не лежат в ядре d_1, либо лежат в образе d_1. Индекс в кружочке около элемента указывает на его третью градуировку — именно она поможет нам минимизировать вычисления.

Напомним, утверждение 8.5 гласит, что $h_1^3=0$, а значит, $d_1(\xi_1^2\otimes h_1^2)=0$, т. е. в $E_2^{1,-3,*}$ имеется ненулевой класс $[\xi_1^2\otimes h_1^2]$ с t-градуировкой 6. Учет t-градуировки показывает, что единственная возможность для этого класса не дожить до E_∞ состоит в выполнении равенства $[\xi_1^2\otimes h_1^2]=d_2([\xi_2\xi_1^2\otimes h_0])$ (см. утверждение 8.5).

Теперь рассмотрим класс $[\xi_1^3 \otimes h_1^2]$ с t-градуировкой 7. Он не может лежать в образах дифференциалов d_1 и d_2, поскольку в соответствующих областях определения этих дифференциалов элементов t-градуировки 7 нет. Значит $d_2[\xi_1^3 \otimes h_1^2] \neq 0 \in E^3$. Обозначим этот новый элемент через v. По теореме 5.5 элемент v представляется в виде нетривиального специального матричного произведения Масси.

Утверждение 8.6.

(a) $v \in \langle \begin{pmatrix} h_0 & h_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} h_1 \\ h_0 \end{pmatrix}, h_1^2 \rangle$;

(b) $v \in \langle h_0, h_1, h_1^2 \rangle$;

(c) *неопределенность произведений Масси из пунктов* (a) *и* (b) *нулевая.*

Доказательство. Из равенства $v = d_2[\xi_1^3 \otimes h_1^2]$ и доказательства теоремы 5.5 (см. [10]) пункт (a) получается немедленно.

Для доказательства пункта (b) нужно заметить, что оба элемента $\xi_1^3 \otimes h_1^2$ и $\xi_2 \otimes h_1^2$ в $E_1^{2,-4,*} = K_2 \otimes E^3$ являются циклами относительно d_1, но при этом $\xi_1^3 \otimes h_1^2 = d_1(\xi_2 \xi_1^2 \otimes h_1)$, поэтому в $E_2^{2,-4,*}$ выполняется равенство $[\xi_2 \otimes h_1^2 + \xi_1^3 \otimes h_1^2] = [\xi_2 \otimes h_1^2]$, а значит, $v = d_2[(\xi_1^3 + \xi_2) \otimes h_1^2]$. Остается применить конструкцию из доказательства теоремы 5.5, см. [10].

Для (c) достаточно заметить, что неопределенность рассматриваемых произведений Масси состоит из элементов t-градуировки 7, и за исключением v таких классов в E^3 нет. □

Вообще говоря, в E^3 могут оказаться ненулевые элементы $d_3([\xi_2 \xi_1^2 \otimes h_1^2])$ и $d_4([\xi_2 \xi_1^3 \otimes h_1^2])$, но мы покажем, что указанные элементы исчезают на предыдущих листах Bss.

Для завершения вычисления E^3 дополним вышеприведенный фрагмент спектральной последовательности элементами, порожденными h_0, h_1, v и элементами групп K_m. Элементы без квадратных скобок принадлежат $E_1^{*,*,*}$, а элементы в квадратных скобках — $E_2^{*,*,*}$.

$\mathbb{Z}/2$				
0	0			
0	0	0		
$v_{\textcircled{7}}$	$[\xi_1^2 \otimes h_1^2]_{\textcircled{6}}$	0	0	
$\boxed{?}$	$\xi_1 \otimes v_{\textcircled{8}}$, $\xi_1^2 \otimes v_{\textcircled{9}}$	$[\xi_1^3 \otimes h_1^2]_{\textcircled{7}}$	$[\xi_2\xi_1^2 \otimes h_0]_{\textcircled{6}} =$ $= [\xi_2\xi_1 \otimes h_1]_{\textcircled{6}}$	0
	$\xi_1 \otimes h_0 v_{\textcircled{9}}$, $\xi_1^2 \otimes h_0 v_{\textcircled{10}}$	$\xi_2 \otimes v_{\textcircled{10}}$, $\xi_1^3 \otimes v_{\textcircled{10}}$	$[\xi_2\xi_1^2 \otimes h_1^2]_{\textcircled{9}}$	0
		$\xi_2 \otimes h_0 v_{\textcircled{11}}$, $\xi_1^3 \otimes h_0 v_{\textcircled{11}}$	$\xi_2\xi_1 \otimes v_{\textcircled{11}}$, $\xi_2\xi_1^2 \otimes v_{\textcircled{12}}$	$[\xi_2\xi_1^3 \otimes h_1^2]_{\textcircled{10}}$
				0

Здесь нам известны два дифференциала

$$d_2([\xi_1^3 \otimes h_1^2]) = v, \quad d_2([\xi_2\xi_1^2 \otimes h_0]) = d_2([\xi_2\xi_1 \otimes h_1]) = [\xi_1^2 \otimes h_1^2].$$

Утверждение 8.7.

(*a*) *В* E^4 *выполнено соотношение* $d_1(\xi_1 \otimes v) = h_0 v \neq 0$.

(*b*) *В* E^4 *выполнено соотношение* $d_1(\xi_1 \otimes h_0^3) = h_0^4 \neq 0$.

Доказательство. (*a*) От противного, если бы в E^4 было выполнено соотношение $h_0 v = 0$, то элемент $\xi_1 \otimes v$ (или класс, определенный им в $E_r^{*,*,*}$, $r \geqslant 2$) t-градуировки 8 должен был бы лежать в образе одного из дифференциалов

$$d_1 : E_1^{2,-4,*} \to E_1^{1,-4,*},$$
$$d_2 : E_2^{3,-5,*} \to E_2^{1,-4,*},$$
$$d_3 : E_3^{4,-6,*} \to E_3^{1,-4,*}.$$

Но в группах $E_1^{2,-4,*}$, $E_1^{3,-5,*}$, $E_1^{4,-6,*}$ нет подходящих элементов t-градуировки 8. Поэтому остается единственная возможность: $d_1(\xi_1 \otimes v) \neq 0$.

Пункт (*b*) доказывается аналогично. □

Утверждение 8.8.

(*a*) $d_1(\xi_1^2 \otimes v) = h_1 v = 0$;

(*b*) $d_2([\xi_2\xi_1^2 \otimes h_1^2]) = [\xi_1^2 \otimes v]$.

Доказательство. (a) Поскольку когомологии алгебры Хопфа $A(1)$ градуированно коммутативны, то будем проверять равенство $vh_1 = 0$. По теореме 5.5 элемент v представляется в виде тройного (матричного) произведения Масси. Из доказательства этого утверждения (см. [10]) следует, что это представление имеет вид $\langle \begin{pmatrix} h_0 & h_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} h_1 \\ h_0 \end{pmatrix}, h_1^2 \rangle$. Тогда для элемента vh_1 имеет место представление в виде матричного произведения Масси $A = \langle \begin{pmatrix} h_0 & h_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} h_1 \\ h_0 \end{pmatrix}, h_1^2 \rangle \cdot h_1 = \langle \begin{pmatrix} h_0 & h_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} h_1 \\ h_0 \end{pmatrix}, h_1^2 \cdot h_1 \rangle$. Теперь заметим, что из последней таблицы следует, что в E^4 имеется самое большее один элемент t-градуировки 9, а именно, элемент $h_1 v$, если он не равен 0. Там самым, неопределенность произведения Масси A нулевая, а значит,

$$\{vh_1\} = \langle \begin{pmatrix} h_0 & h_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} h_1 \\ h_0 \end{pmatrix}, h_1^2 \cdot h_1 \rangle = \langle \begin{pmatrix} h_0 & h_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} h_1 \\ h_0 \end{pmatrix}, 0 \rangle = \{0\}.$$

здесь мы воспользовались соотношением $h_1^3 = 0$ в группе E^3.

(b) По предыдущему пункту $d_1(\xi_1^2 \otimes v) = 0$. Единственная возможность для элемента $\xi_1^2 \otimes v$ не дожить до $E_\infty^{*,*,*}$ — выполнение в E^2 равенства $d_2([\xi_2 \xi_1^2 \otimes h_1^2]) = [\xi_1^2 \otimes v]$, что следует из рассмотрения элементов t-градуировки 9 в последней таблице. □

Итак, в $\mathrm{Ext}^{3,*}_{A(1)}(\mathbb{Z}/2, \mathbb{Z}/2)$ имеются 2 независимых элемента h_0^3 и v, выполнено соотношение $h_1^3 = 0$. Гипотетически в $\mathrm{Ext}^{3,*}_{A(1)}(\mathbb{Z}/2, \mathbb{Z}/2)$ может быть еще один элемент, представляющийся в виде $d_4[\xi_2^2 \xi_1^3 \otimes h_1^2]$. Мы покажем, что в действительности

$$d_2[\xi_2^2 \xi_1^3 \otimes h_1^2] = [(\xi_2 + \xi_1^3) \otimes v] \neq 0 \ \text{ в } \ E^2.$$

Итак, в группе $E_1^{2,-5,*}$ имеются два элемента $\xi_2 \otimes v$ и $\xi^3 \otimes v$, имеющие t-градуировку 10. Из предыдущих результатов следует, что $d_1(\xi_2 \otimes v) = d_1(\xi^3 \otimes v) = \xi_1^2 \otimes h_0 v \neq 0 \in E_1^{1,-5,*}$. Отсюда получаем, что в $E_2^{1,-5,*}$ имеется класс $[(\xi^3 + \xi_2) \otimes v]$. Этот класс ненулевой, потому что в $E_1^{3,-5,*}$ нет элемента t-градуировки 10, который мог бы заклеить $[(\xi^3 + \xi_2) \otimes v]$. Теперь мы имеем две возможности:

— $d_2[(\xi^3 + \xi_2) \otimes v] \neq 0 \in E^4$, тогда $d_4[\xi_2^2 \xi_1^3 \otimes h_1^2] \neq 0 \in E^4$;

— $d_2[\xi_2^2 \xi_1^3 \otimes h_1^2] = [(\xi^3 + \xi_2) \otimes v] \in E_2^{2,-5,*}$, тогда $d_2[(\xi^3 + \xi_2) \otimes v] = 0 \in E^4$.

Мы покажем, что реализуется второй вариант и поэтому в $\mathrm{Ext}^{3,*}_{A(1)}(\mathbb{Z}/2, \mathbb{Z}/2)$ имеются лишь описанные ранее 2 независимых элемента h_0^3 и v, а также выполнено соотношение $h_1^3 = 0$.

Утверждение 8.9. *В $E_2^{2,-5,*}$ выполнено соотношение*

$$d_2[\xi_2^2 \xi_1^3 \otimes h_1^2] = [(\xi^3 + \xi_2) \otimes v].$$

Доказательство. Мы докажем это соотношение прямым вычислением в кобар-комплексе алгебры $A(1)$.

Для этого воспользуемся представлением v в виде произведения Масси $\langle h_0, h_1, h_1^2\rangle$, см. утверждение 8.6(b). В кобар-комплексе элементы h_0, h_1 и h_1^2 представляются коцепями $[\xi_1], [\xi_1^2]$ и $[\xi_1^2|\xi_1^2]$, соответственно.

Пусть B — такая коцепь в $F^*(\mathbb{Z}/2, A(1)_*, \mathbb{Z}/2)$, для которой $d_F B = [\xi_1|\xi_1^2]$, а A — коцепь, для которой $d_F A = [\xi_1^2|\xi_1^2|\xi_1^2]$. Например, можно взять $B = [\xi_2 + \xi_1^3]$ и $A = [\xi_2|\xi_2] + [\xi_2\xi_1^2|\xi_1] + [\xi_1^2|\xi_2\xi_1]$, см. утверждение 8.5.

Как мы уже знаем, произведение Масси $\langle h_0, h_1, h_1^2\rangle$ содержит в точности один элемент v, и он представляется коцепью $[\xi_1|A] + [B|\xi_1^2|\xi_1^2]$ в $F^*(\mathbb{Z}/2, A(1)_*, \mathbb{Z}/2)$. Тогда класс $(\xi^3 + \xi_2) \otimes v$ представляется коцепью

$$(\xi^3 + \xi_2) \otimes ([\xi_1|A] + [B|\xi_1^2|\xi_1^2]) \in F^*(A(1)_*, A(1)_*, \mathbb{Z}/2).$$

Теперь обратимся к элементу $\xi_2\xi_1^3\,[\xi_1^2|\xi_1^2]$. Чтобы вычислить от него d_2, представим его коцепью $\xi_2\xi_1^3\,[\xi_1^2|\xi_1^2] \in F^*(N_4, A(1)_*, \mathbb{Z}/2)$, а затем добавим к ней элементы меньшей фильтрации так, чтобы значение d_F на полученном элементе имело фильтрацию не выше 2.

Пусть

$$a = \xi_2\xi_1\,[A] + \xi_2\xi_1^2\,[B|\xi_1^2] + \xi_2\,[\xi_2\xi_1^2|\xi_2^2].$$

Легко проверить, что

(1) $a \in F^*(N_3, A(1)_*, \mathbb{Z}/2)$;

(2) $\xi_2\xi_1^3\,[\xi_1^2|\xi_1^2] = \xi_2\xi_1^3\,[\xi_1^2|\xi_1^2] + a \in F^*(N_4, A(1)_*, \mathbb{Z}/2)$;

(3) $d_F(\xi_2\xi_1^3\,[\xi_1^2|\xi_1^2] + a) = (\xi^3 + \xi_2) \otimes ([\xi_1|A] + [B|\xi_1^2|\xi_1^2]) \in F^*(N_2, A(1)_*, \mathbb{Z}/2)$.

Пункт (3) прояверяется прямым вычислением и дает нужное утверждение

$$d_2[\xi_2^2\xi_1^3 \otimes h_1^2] = [(\xi^3 + \xi_2) \otimes v].$$

□

На этом вычисление $\mathrm{Ext}^{3,*}_{A(1)}(\mathbb{Z}/2, \mathbb{Z}/2)$ закончено.

8.2.4 $\mathrm{Ext}^{4,*}_{A(1)}(\mathbb{Z}/2, \mathbb{Z}/2)$

Мы уже знаем, что в $\mathrm{Ext}^{4,*}_{A(1)}(\mathbb{Z}/2, \mathbb{Z}/2)$ имеются независимые ненулевые элементы $h_0^4, h_0 v$, а также выполнено соотношение $h_1 v = 0$.

Заметим, что из таблицы, приведенной на странице 281, следует, что другие нетривиальные элементы в $\mathrm{Ext}^{4,*}_{A(1)}(\mathbb{Z}/2, \mathbb{Z}/2)$ могут возникнуть лишь как образы дифференциалов со значениям в нулевом столбце, вычисленных на элементах $\xi_2\xi_1 \otimes v$ и $\xi_2\xi_1^2 \otimes v$. По теореме 5.2 имеем $d_1(\xi_2\xi_1 \otimes v) = \xi_2 \otimes h_0 v + \xi_1^3 \otimes h_0 v \neq 0$.

Остается рассмотреть элемент $\xi_2\xi_1^2 \otimes v \in E_1^{3,-6,*}$, имеющий t-градиуровку 12. Имеем $d_1(\xi_2\xi_1^2 \otimes v) = \xi_2 \otimes h_1 v = 0$. Кроме того, $d_2([\xi_2\xi_1^2 \otimes v]) = 0$, поскольку в группе $E_2^{1,-5,*}$ нет элементов t-градуировки 12, см. таблицу на стр. 281.

Таким образом, остается единственная возможность

$$d_3(\xi_2\xi_1^2 \otimes v) \neq 0 \in E_3^{0,-4,*},$$

откуда следует, что в E^4 имеется еще один независимый от уже построенных ненулевой элемент, который мы обозначим через w.

По теореме 5.5 элемент w представляется в виде четырехместного произведения Масси. Из результатов работы [10] следует, что это представление имеет вид $\langle h_1, h_0, h_1, v\rangle$. Неопределенность этого произведения Масси нулевая, поскольку других элементов t-градуировки 12 в группе E^4 нет.

Таким образом, доказано следующее утверждение.

Утверждение 8.10. *В* $\operatorname{Ext}_{A(1)}^{4,*}(\mathbb{Z}/2, \mathbb{Z}/2)$ *имеются три ненулевых независимых элемента:* $h_0^4, h_0 v$ *и* w*, причем* $w = \langle h_1, h_0, h_1, v\rangle$ *с нулевой неопределенностью. Кроме того, выполнено соотношение* $h_0 v = 0$. □

8.3 Соотношения в когомологиях алгебры Стинрода $\mathcal{A}_2$

Для краткости сохраним обозначение $E^s = \operatorname{Ext}_{\mathcal{A}_2}^{s,*}(\mathbb{Z}/2, \mathbb{Z}/2)$. Ясно, что $E^0 = \mathbb{Z}/2$.

Группа E^1 порождена независимыми элементами h_i, $i \geqslant 0$, биградуировка h_i равна $(1, 2^i)$, $h_i = d_1[\xi_1^{2^i}]$. В самом деле, модуль N_1/N_0 описан в теореме 6.5, а именно, он порожден независимыми элементами $\xi_1^{2^i}$, а по лемме 5.4 дифференциал $d_1 : N_1/N_0 \to E^1$ является изоморфизмом.

Группа E^2 описана в теореме А.3. Мы покажем, как проверить в этой группе соотношения $h_i h_j + h_j h_i = 0$ и $h_{i+1} h_i = 0$. Для этого рассмотрим фрагмент Bss:

$$E_1^{2,-2,*} \xrightarrow{d_1} E_1^{1,-2,*} \xrightarrow{d_1} E_1^{0,-2,*},$$

который удобно представлять в виде

$$N_2/N_1 \xrightarrow{d_1} N_1/N_0 \otimes E^1 \xrightarrow{d_1} E^2.$$

По теореме 5.2 выполнены соотношения

$$\begin{aligned}
&d_1(\xi_1^{2^i} \otimes h_j) = h_i h_j,\\
&d_1(\xi_1^{2^i+2^j}) = \xi_1^{2^i} \otimes h_j + \xi_1^{2^j} \otimes h_i \quad \text{при} \quad i \neq j,\\
&d_1(\xi_2^{2^i}) = \xi_1^{2^{i+1}} \otimes h_i.
\end{aligned}$$

Поскольку $d_1 \circ d_1 = 0$, то при $i \neq j$

$$h_i h_j + h_j h_i = d_1(\xi_1^{2^i} \otimes h_j + \xi_1^{2^j} \otimes h_i) = d_1 \circ d_1(\xi_1^{2^i+2^j}) = 0.$$

Кроме того,

$$h_{i+1} h_i = d_1(\xi_1^{2^{i+1}} \otimes h_i) = d_1 \circ d_1(\xi_2^{2^i}) = 0.$$

О группе E^3 мы докажем несколько утверждений, из приведенных в теоремах A.4 и A.5, а именно, мы покажем, что в E^3 выполнены соотношения $h_i h_{i+2}^2 = 0$, $h_i^2 h_{i+2} + h_1^3 = 0$. Кроме того, мы укажем, как реализуются в Bss элементы c_i из теоремы A.5, а для элемента c_0 докажем нетривиальность соответствующего ему произведения Масси.

Наконец, мы покажем, как в терминах дифференциалов Bss интерпретируются соотношения в E^2, подержащие тройные произведения Масси: $\langle h_{i+2}, h_{i+1}, h_i\rangle = 0$, $\langle h_i, h_{i+1}, h_{i+2}\rangle = 0$, $\langle h_i, h_{i+1}, h_i\rangle = h_{i+1}^2$, $\langle h_{i+1}, h_i, h_{i+1}\rangle = h_{i+2} h_i$.

Соотношение $h_i h_{i+2}^2 = 0$.

Рассмотрим элемент $x = \xi_2^{2^{i+1}} \xi_1^{2^{i+1}} \otimes h_i$. Его t-градуировка равна $2^{i+3} + 2^i$. Легко проверить, что x не лежит в образе дифференциала $d_1 : K_4 \to K_3 \otimes E^1$, а следовательно, для какого-то $r = 1, 2, 3$ должно выполняться равенство $d_r(x) \neq 0$. В силу соотношения $h_{i+1} h_i = 0$ имеем $d_1(x) = 0$. Предположим, что вдобавок $d_2(x) = 0$. Тогда $d_3(x) \neq 0 \in E^2$. Однако в E^2 элемент с t-градуировкой $2^{i+3} + 2^i$ в точности один: $h_{i+3} h_i$, причем он не доживает до E_2, поскольку лежит в образе дифференциала d_1: $h_{i+3} h_i = d_1(\xi_1^{2^{i+3}} \otimes h_i)$.

Выберем для x в качестве представляющей коцепи

$$y = \xi_2^{2^{i+1}} \xi_1^{2^{i+1}} [\xi_1^{2^i}] + \xi_1^{3 \cdot 2^{i+1}} [\xi_2^{2^i}] + \xi_2^{2^{i+1}} [\xi_2^{2^i}] + \xi_1^{2^{i+1}} [\xi_3^{2^i}].$$

Прямым вычислением получаем равенство

$$d_F(y) = \xi_1^{2^{i+2}} [\xi_1^{2^{i+2}} | \xi_1^{2^i}] \mod N_0,$$

откуда следует, что элемент $d_2(x)$ в $E_2^{*,*,*}$ равен классу, представленному элементом $\xi_1^{2^{i+2}} \otimes h_{i+2} h_i \in E_1^{*,*,*}$. Это возможно при условии, что $d_1(\xi_1^{2^{i+2}} \otimes h_{i+2} h_i) = h_{i+2}^2 h_i = 0 \in E^3$, что требовалось.

Соотношение $h_i^2 h_{i+2} + h_{i+1}^3 = 0$.

Рассмотрим элемент $x = \xi_2^{2^i}\xi_1^{2^i} \otimes h_{i+1} \in K_3 \otimes E^1$. Его t-градуировка равна $3 \cdot 2^{i+1}$. Легко проверить, что x не лежит образе $d_1 : K_4 \to K_3 \otimes E^1$, а значит для какого-то $r = 1, 2, 3$ должно выполняться условие $d_r(x) \neq 0$. В силу соотношения $h_i h_{i+1} = 0$ выполнено $d_1(x) = 0$.

Предположим, что выполнено соотношение $d_2(x) = 0$. Тогда $d_3(x) \neq 0 \in E^2$. Однако в группе E^2 нет элементов t-градуировки $3 \cdot 2^{i+1}$, поскольку $3 \cdot 2^{i+1}$ не представляется ни в виде $2 \cdot 2^k$, ни в виде $2^k + 2^m$, $|k - m| \geqslant 2$. Следовательно, $d_2(x) \neq 0 \in K_1 \otimes E^2$.

Выберем в кобар-конструкции представляющую x коцепь

$$y = \xi_2^{2^i}\xi_1^{2^i}\,[\xi_1^{2^{i+1}}] + (\xi_1^{3\cdot 2^i} + \xi_2^{2^i})\,[\xi_1^{3\cdot 2^i} + \xi_2^{2^i}] + \xi_1^{2^i}\,[\xi_2^{2^i}\xi_1^{2^{i+1}}].$$

Прямым вычислением получаем, что

$$d_F(y) = \xi_1^{2^{i+1}}\,[\xi_1^{2^{i+1}}|\xi_1^{2^{i+1}}] + \xi_1^{2^i}\,[\xi_1^{2^{i+2}}|\xi_1^{2^i}] \mod N_0,$$

откуда следует, что элемент $d_2(x)$ в $E_2^{*,*,*}$ равен классу, представленному элементом $\xi_1^{2^{i+1}} \otimes h_{i+1}^2 + \xi_1^{2^i}\,[\xi_1^{2^{i+2}}|\xi_1^{2^i}] \in E_1^{*,*,*}$. Это возможно при условии, что

$$h_{i+1}^3 + h_i^2 h_{i+2} = d_1(\xi_1^{2^{i+1}} \otimes h_{i+1}^2 + \xi_1^{2^i}\,[\xi_1^{2^{i+2}}|\xi_1^{2^i}]) = 0 \in E^1,$$

что требовалось.

Элементы $c_i = \langle h_{i+1}, h_i, h_{i+2}^2\rangle \in E^3$.

Рассмотрим элемент $\xi_2^{2^i} \otimes h_{i+2}^2 \in K_2 \otimes E^2$. Легко проверить с помощью теоремы 5.2, что $d_1(\xi_2^{2^i} \otimes h_{i+2}^2) = 0$. Имеются две возможности: либо элемент $\xi_2^{2^i} \otimes h_{i+2}^2$ (или класс им определенный в $E_r^{*,*,*}$, $r \geqslant 2$) лежит в образе какого-то дифференциала, либо $d_2(\xi_2^{2^i} \otimes h_{i+2}^2) \neq 0 \in E^3$. Во втором случае мы получаем новый элемент в E^3, т. е. такой, который не выражается через суммы и произведения элементов h_i. Следуя доказательству теоремы 5.5 (см. [10]) легко проверить, что $d_2(\xi_2^{2^i} \otimes h_{i+2}^2) = \langle h_{i+1}, h_i, h_{i+2}^2\rangle$.

Таким образом, наиболее трудная часть этого рассуждения — доказать, что $\xi_2^{2^i} \otimes h_{i+2}^2$ не лежит в образе никакого дифференциала $d_r : E_r^{2+r,-3-r,*} \to E_r^{2,-4,*}$. Для простоты мы рассмотрим только случай $i = 0$, т. е. элемент $x = \xi_2 \otimes h_2^2 \in K_2 \otimes E^2$. Его t-градуировка равна 11.

Рассматривая группы $E_1^{2+r,-3-r,*} = K_{2+r} \otimes E^1$, $r \geqslant 1$, мы видим, что в них элементы t-градуировки 11 имеются только при $r = 1, 2, 3$.

В группе $K_3 \otimes E^1$ элементами t-градуировки 11 являются

$$\xi_3 \otimes h_2, \quad \xi_2^2\xi_1 \otimes h_2, \quad \xi_2\xi_1^4 \otimes h_2, \quad \xi_1^7 \otimes h_2, \quad \xi_1^4\xi_2^2 \otimes h_0.$$

Вычисляя по теореме 5.2 на этих элементах значения дифференциала $d_1 : K_3 \otimes E^1 \to$

$K_2 \otimes E^2$, мы видим, что $\xi_2 \otimes h_1^2$ не принадлежит $\operatorname{im} d_1$.

В группе $K_4 \otimes E^1$ элементами t-градуировки 11 являются

$$\xi_2^3 \otimes h_1, \quad \xi_3\xi_1^2 \otimes h_1, \quad \xi_2^2\xi_1^3 \otimes h_1, \quad \xi_2\xi_1^6 \otimes h_1.$$

Вычисляя по теореме 5.2 на этих элементах значения дифференциала $d_1 : K_4 \otimes E^1 \to K_3 \otimes E^2$, мы видим, что единственная линейная комбинация этих четырех элементов, принадлежащая $\ker d_1$ равна $\xi_2^3 \otimes h_1 + \xi_2\xi_1^6 \otimes h_1$, но она лежит в образе d_1:

$$d_1(\xi_2^3\xi_1^2) = \xi_2^3 \otimes h_1 + \xi_2\xi_1^6 \otimes h_1 \in K_4 \otimes E^1,$$

поэтому $E_2^{4,-5,11} = 0$.

В группе $K_5 \otimes E^1$ элементами t-градуировки 11 являются

$$\xi_3\xi_2 \otimes h_0, \quad \xi_2^3\xi_1 \otimes h_0, \quad \xi_3\xi_1^3 \otimes h_0, \quad \xi_2\xi_1^7 \otimes h_0.$$

С помощью теоремы 5.2 легко проверить, что никакая линейная комбинация этих элементов не лежит в ядре $d_1 : K_5 \otimes E^1 \to K_4 \otimes E^2$, а значит $E_2^{5,-6,11} = 0$.

Соотношения $\langle h_{i+2}, h_{i+1}, h_i\rangle = 0$ *и* $\langle h_i, h_{i+1}, h_{i+2}\rangle = 0$.

Эти произведения Масси специальные, их представляющие коциклы соответственно могут быть выбраны в виде

$$[\xi_2^{2^{i+1}}|\xi_1^{2^i}] + [\xi_1^{2^{i+2}}|\xi_2^{2^i}],$$
$$[\xi_1^{2^i}|\xi_2^{2^{i+1}} + \xi_1^{3\cdot 2^{i+1}}] + [\xi_2^{2^i} + \xi_1^{3\cdot 2^i}|\xi_1^{2^{i+2}}].$$

С помощью утверждения 5.4 и следующего за ним замечания легко показать, что первое произвдение Масси должно быть представлено в Bss в виде $d_2(\xi_2^{2^{i+1}} \otimes h_i)$, а второе — в виде $d_2((\xi_2^{2^i} + \xi_1^{3\cdot 2^i}) \otimes h_{i+2})$. В кобар-комплексе имеют место равенства

$$d_F[\xi_3^{2^i}] = [\xi_2^{2^{i+1}}|\xi_1^{2^i}] + [\xi_1^{2^{i+2}}|\ \xi_2^{2^i}],$$
$$d_F[\xi_3^{2^i} + \xi_2^{2^{i+1}}\xi_1^{2^i} + \xi_2^{2^i}\xi_1^{2^{i+2}} + \xi_1^{7\cdot 2^i}] = [\xi_1^{2^i}|\xi_2^{2^{i+1}} + \xi_1^{3\cdot 2^{i+1}}] + [\xi_2^{2^i} + \xi_1^{3\cdot 2^i}|\xi_1^{2^{i+2}}]$$

из которых следует, что в $E_1^{*,*,*}$ выполнены соотношения

$$\xi_2^{2^{i+1}} \otimes h_i = d_1(\xi_3^{2^i}),$$
$$(\xi_2^{2^i} + \xi_1^{3\cdot 2^i}) \otimes h_{i+2} = d_1(\xi_2^{2^i} + \xi_2^{2^{i+1}}\xi_1^{2^i} + \xi_2^{2^i}\xi^{2^{i+2}} + \xi_1^{7\cdot 2^i}),$$

так что оба элемента $\xi_2^{2^{i+1}} \otimes h_i$ и $(\xi_2^{2^{i+1}} + \xi_1^{3\cdot 2^{i+1}}) \otimes h_{i+2}$ не доживают до $E_2^{*,*,*}$, а соответствующие произведения Масси тривиальны.

Соотношение $\langle h_i, h_{i+1}, h_i\rangle = h_{i+1}^2$.

Произведение $x = \langle h_i, h_{i+1}, h_i\rangle$ представляется коциклом $\alpha = [\xi_2^{2^i} + \xi_1^{3\cdot 2^i}|\xi_1^{2^i}] + [\xi_1^{2^i}|\xi_2^{2^i}]$, откуда следует, что элемент x, рассматриваемый $\bmod \Phi^1$ должен быть равен $d_2((\xi_2^{2^i} + \xi_1^{3\cdot 2^i}) \otimes h_i)$.

Однако в $E_1^{*,*,*}$ выполнено $(\xi_2^{2^i} + \xi_1^{3\cdot 2^i}) \otimes h_i = d_1(\xi_2^{2^i}\xi_1^{2^i})$, поэтому $(\xi_2^{2^i} + \xi_1^{3\cdot 2^i}) \otimes h_i$ не доживает до $E_2^{*,*,*}$, а значит, $d_2((\xi_2^{2^i} + \xi_1^{3\cdot 2^i}) \otimes h_i)$ — нулевой класс $\bmod \Phi^1$.

Вычисление d_F от $[\xi_2^{2^i}\xi_1^{2^i}] \in F^1(R, A_*, R)$ показывает, что $\alpha = [\xi_1^{2^{i+1}}|\xi_1^{2^{i+1}}] + d_F([\xi_2^{2^i}\xi_1^{2^i}])$, поэтому x имеет фильтрацию 1 и представляется в виде $d_1(\xi_1^{2^{i+1}} \otimes h_{i+1}) = h_{i+1}^2$.

Соотношение $\langle h_{i+1}, h_i, h_{i+1}\rangle = h_i h_{i+2}$.

Произведение $x = \langle h_{i+1}, h_i, h_{i+1}\rangle$ представляется коциклом $\alpha = [\xi_1^{2^{i+1}}|\xi_2^{2^i} + \xi_1^{3\cdot 2^i}] + [\xi_2^{2^i}|\xi_1^{2^i+1}]$, откуда следует, что элемент x, рассматриваемый $\bmod \Phi^1$, должен быть равен $d_2(\xi_2^{2^i} \otimes h_{i+1})$.

Однако в $E_1^{*,*,*}$ выполнено $\xi_2^{2^i} \otimes h_{i+1} = d_1(\xi_2^{2^i}\xi_1^{2^{i+1}})$, поэтому $\xi_2^{2^i} \otimes h_{i+1}$ не доживает до $E_2^{*,*,*}$, а значит, $d_2(\xi_2^{2^i} \otimes h_{i+1})$ — нулевой класс $\bmod \Phi^1$.

Вычисление d_F от $[\xi_2^{2^i}\xi_1^{2^{i+1}}] \in F^1(R, A_*, R)$ показывает, что $\alpha = [\xi_1^{2^{i+2}}|\xi_1^{2^i}] + d_F([\xi_2^{2^i}\xi_1^{2^{i+1}}])$, поэтому x имеет фильтрацию 1 и представляется в виде $d_1(\xi_1^{2^i} \otimes h_{i+2}) = h_{i+2}h_i = h_i h_{i+2}$.

8.4 Замечание об элементах двумерных когомологий алгебры Стинрода $\mathcal{A}_p$

В теореме A.6 были приведены представления элементов

$$\mu_i, \nu_i, \lambda_i, \rho \in \mathrm{Ext}_{\mathcal{A}_p}^{2,*}(\mathbb{Z}/p, \mathbb{Z}/p)$$

в виде специальных произведений Масси:

$$\begin{aligned}
\mu_i &= \langle h_i, h_i, h_{i+1}\rangle; \\
\nu_i &= \langle h_i, h_{i+1}, h_{i+1}\rangle; \\
\lambda_i &= \langle h_i, h_i, \ldots, h_i\rangle \ \ (p \text{ сомножителей}); \\
\rho &= \langle h_0, h_0, \alpha_0\rangle.
\end{aligned}$$

В следующей таблице предъявлены представления этих элементов в виде значений дифференциалов Bss для алгебры $\mathcal{A}_p$:

элемент	фильтрация	представление дифференциалом	представляющая коцепь
$\mu_i,\quad i \geqslant 0$	2	$d_2\big(-\frac{1}{2}\xi_1^{2p^i} \otimes h_{i+1}\big)$	$-\frac{1}{2}[\xi_1^{2p^i}\vert\xi_1^{p^{i+1}}] - [\xi_1^{p^i}\vert\xi_1^{p^i+p^{i+1}} - \xi_2^{p^i}]$
$\nu_i,\quad i \geqslant 0$	2	$d_2\big((\xi_2^{p^i} - \xi_1^{p^i+p^{i+1}}) \otimes h_{i+1}\big)$	$-\frac{1}{2}[\xi_1^{p^i}\vert\xi_1^{2p^{i+1}}] - [\xi_1^{p^i+p^{i+1}} - \xi_2^{p^i}\vert\xi_1^{p^{i+1}}]$
$\lambda_i,\quad i \geqslant 0$	$p-1$	$d_{p-1}\big(\xi_1^{(p-1)p^i} \otimes h_i\big)$	$-\sum\limits_{k-1}^{p-1} \frac{1}{k!(p-k)!}[\xi_1^{k\cdot p^i}\vert\xi_1^{(p-k)p^i}]$
ρ	2	$d_2\big(-\frac{1}{2}\xi_1^2 \otimes \alpha_0\big)$	$-\frac{1}{2}[\xi_1^2\vert\tau_0] - [\xi_1\vert\tau_1]$

В представлении дифференциалом Bss элемента λ_i была использована формула Вильсона $(p-1)! \equiv -1 \pmod p$. Проверка этих формул может быть проделана прямым вычислением.

Соотношения между произведениями элементов $\mathrm{Ext}_{\mathcal{A}_p}^{s,*}(\mathbb{Z}/p, \mathbb{Z}/p)$, $s = 1, 2$, возможно включающие скобки Масси, могут быть описаны с помощью дифференциалов Bss таким же способом, как и для алгебры Стинрода $\mathcal{A}_2$, детали мы опускаем.

Приложение A

Предварительные сведения

A.1 Алгебры Стинрода, их подалгебры Хопфа, фильтрации

В этом разделе мы приведем основные факты об алгебрах Стинрода $\mathcal{A}_p$, $p \geqslant 2$, о структурах алгебр Хопфа на них, о двойственных к ним алгебрах Хопфа $(\mathcal{A}_p)_*$, напомним классификацию подалгебр Хопфа в $\mathcal{A}_p$. Затем приведем два классических базиса: базис допустимых мономов и базис Милнора, а также формулу умножения двух элементов базиса Милнора. Наконец, приведем некоторые результаты о когомологиях малой размерности алгебр $\mathcal{A}_p$.

Как обычно, при обсуждении биномиальных коэффициентов $\bmod p$ часто оказывается полезным следующее утверждение.

Лемма A.1 ([225], 2.6)**.** *Пусть p — простое число. Предположим, что $a = a_k p^k + \ldots + a_1 p + a_0$ и $b = b_k p^k + \ldots + b_1 p + b_0$, $0 \leqslant a_j, b_j < p$ являются p-адическими разложениями положительных целых чисел a и b. Тогда*

$$\binom{b}{a} = \binom{b_k}{a_k} \cdot \ldots \cdot \binom{b_1}{a_1}\binom{b_0}{a_0} \mod p.$$

A.1.1 Алгебра Стинрода $\bmod 2$

Алгебра Стинрода $\mathcal{A}_2$ как ассоциативная алгебра над $\mathbb{Z}/2$ порождена элементами Sq^k, $k \geqslant 0$, $|Sq^k| = k$, соотношениями $Sq^0 = 1$ и

$$\text{для } a < 2b: \quad Sq^a Sq^b = \sum_{j=0}^{[a/2]} \binom{b-j-1}{a-2j} Sq^{a+b-j} Sq^j, \tag{A.1}$$

где биномиальные коэффициенты вычисляются по модулю 2. Соотношения (A.1) называются *соотношениями Адема*. В [109] Дж. Милнор доказал, что алгебры Стинрода $\mathcal{A}_p$, $p \geqslant 2$, являются алгебрами Хопфа. Для $p = 2$ диагональ (коумножение)

$\Delta : \mathcal{A}_2 \to \mathcal{A}_2 \otimes \mathcal{A}_2$ на образующих определяется формулой

$$\Delta(Sq^k) = \sum_{j=0}^{k} Sq^j \otimes Sq^{k-j}, \tag{A.2}$$

распространяется на остальные элементы алгебры $\mathcal{A}_2$ по линейности и мультипликативности, и задает на $\mathcal{A}_2$ структуру биалгебры. Антиподальное отображение $\chi : \mathcal{A}_2 \to \mathcal{A}_2$ определяется индукцией по градуировке: $\chi(1) = 1$, и если $\Delta(x) = 1 \otimes x + x \otimes 1 + \sum_i x_i^{(1)} \otimes x_i^{(2)}$, то $\chi(x) = -x - \sum_i \chi(x_i^{(1)}) x_i^{(2)}$.

Двойственная алгебра Хопфа $(\mathcal{A}_2)_*$ является кольцом многочленов $\mathbb{Z}/2[\xi_j : j \geqslant 1]$ от образующих $\xi_j, j \geqslant 1$, степеней $|\xi_j| = 2^j - 1$, см. [109; 225]. Элемент ξ_k является двойственным к элементу $Sq^{2^{k-1}} Sq^{2^{k-2}} \dots Sq^2 Sq^1$. Удобно считать, что $\xi_0 = 1$. Коумножение на образующих задается формулой

$$\Delta(\xi_n) = \sum_{i=0}^{n} \xi_{n-i}^{2^i} \otimes \xi_i. \tag{A.3}$$

A.1.2 Алгебра Стинрода $\bmod p$, $p > 2$

Пусть $p > 2$ — простое число. Как ассоциативная алгебра с 1 над $\mathbb{Z}/p$ алгебра $\mathcal{A}_p$ порождена мультипликативными образующими $\beta, P^0 = 1, P^1, P^2, \dots$ степеней $|P^k| = 2(p-1)k$, $|\beta| = 1$, соотношением $\beta^2 = 0$ и соотношениями Адема:

$$\text{для } a < pb: \quad P^a P^b = \sum_{j=0}^{[a/p]} (-1)^{a+j} \binom{(p-1)(b-j)-1}{a-pj} P^{a+b-j} P^j, \tag{A.4}$$

$$\begin{aligned} \text{для } a \leqslant pb: \quad P^a \beta P^b = {} & \sum_{j=0}^{[a/p]} (-1)^{a+j} \binom{(p-1)(b-j)}{a-pj} \beta P^{a+b-j} P^j + \\ & + \sum_{j=0}^{[(a-1)/p]} (-1)^{a+j+1} \binom{(p-1)(b-j)-1}{a-pj-1} P^{a+b-j} \beta P^j. \end{aligned} \tag{A.5}$$

Диагональ (коумножение) $\Delta : \mathcal{A}_p \to \mathcal{A}_p \otimes \mathcal{A}_p$ на образующих определяется формулами

$$\Delta(\beta) = 1 \otimes \beta + \beta \otimes 1, \quad \Delta(P^k) = \sum_{j=0}^{k} P^j \otimes P^{k-j} \tag{A.6}$$

и распространяется на остальные элементы алгебры $\mathcal{A}_p$ по линейности и мультипликативности. Антипод определяется той же формулой, что и для $\mathcal{A}_2$. Умножение, коумножение и антипод определяют на $\mathcal{A}_p$ структуру алгебры Хопфа.

Двойственная алгебра Хопфа $(\mathcal{A}_p)_*$ является тензорным произведением кольца многочленов $\mathbb{Z}/p[\xi_j : j \geqslant 1]$ от образующих ξ_j степеней $|\xi_j| = 2(p^j - 1)$ и внешней

алгебры $\Lambda(\tau_j : j \geqslant 0)$ от образующих τ_j степеней $|\tau_j| = 2p^j - 1$, см. [109; 225]. Для удобства считается, что $\xi_0 = 1$. Элемент $\xi_k \in (\mathcal{A}_p)_*$, $k \geqslant 1$, является двойственным к $P^{p^{k-1}}P^{p^{k-2}}\dots P^pP^1$, а элемент τ_k, $k \geqslant 0$, — двойственным к $P^{p^{k-1}}P^{p^{k-2}}\dots P^pP^1\beta$. Коумножение на образующих задается формулой

$$\Delta(\xi_n) = \sum_{i=0}^{n} \xi_{n-i}^{p^i} \otimes \xi_i, \quad \Delta(\tau_n) = \tau_n \otimes 1 + \sum_{i=0}^{n} \xi_{n-i}^{p^i} \otimes \tau_i. \tag{A.7}$$

Полезно рассматривать алгебру $\overline{\mathcal{A}_p}$, которая определяется как фактор алгебры $\mathcal{A}_p$ по двухстороннему идеалу, порожденному β. Алгебра $\overline{\mathcal{A}_p}$ порождена элементами P^k и соотношениями (A.4). Она также является алгеброй Хопфа, причем коумножение и антипод определяются теми же формулами, что и для $\mathcal{A}_p$. Двойственная алгебра $(\overline{\mathcal{A}_p})_*$ — алгебра многочленов $\mathbb{Z}/p[\xi_j : j \geqslant 1] \subset (\mathcal{A}_p)_*$ с коумножением (A.7).

A.1.3 Подалгебры Хопфа алгебр $\mathcal{A}_p$

В алгебре Стинрода $\mathcal{A}_2$ содержится последовательность вложенных друг в друга подалгебр Хопфа $A(n)$. Алгебра $A(n)$ порождена 1 и элементами Sq^{2^k}, где $0 \leqslant k \leqslant n$; при этом формула (A.2) показывает, что $A(n)$ является алгеброй Хопфа.

Аналогично, в $\mathcal{A}_p$ содержится последовательность вложенных друг в друга подалгебр Хопфа $P(n)$, где $P(n)$ как алгебра порождается 1 и элементами P^{p^k}, $0 \leqslant k \leqslant n$.

Подалгебры Хопфа в $\mathcal{A}_p$, $p \geqslant 2$, полностью описаны Адамсом и Марголисом в работе [16]. Вместо подалгебр в $\mathcal{A}_p$ удобно рассматривать факторалгебры двойственной алгебры $(\mathcal{A}_p)_*$.

Для $p > 2$ рассмотрим две функции

$$h : \{1, 2, 3, \dots\} \to \{0, 1, 2, 3, \dots, \infty\}$$

и

$$k : \{0, 1, 2, 3, \dots\} \to \{1, 2\}.$$

Определим факторалгебру $B(h, k)_*$ алгебры $(\mathcal{A}_p)_*$ как фактор по идеалу, порожденному соотношениями

$$\xi_i^{p^{h(i)}} = 0, \quad \tau_j^{k(j)} = 0. \tag{A.8}$$

При этом считается, что если $h(i) = \infty$, то на ξ_i соотношение не накладывается.

Для $p = 2$ эта конструкция упрощается: нужно рассмотреть только одну функцию h и определить факторалгебру $B(h)$ как фактор $(\mathcal{A}_2)_*$ по идеалу, порожденному соотношениями $\xi_i^{2^{h(i)}} = 0$.

Двойственную к $B(h, k)_*$ коалгебру $B(h, k)$ будем рассматривать как подкоалгебру в $\mathcal{A}_p$. Аналогичным образом определим подкоалгебру $B(h) \subset \mathcal{A}_2$ как двойственную к $B(h)_*$.

Теорема А.1 ([16]). *(a) Для $p > 2$ коалгебра $B(h,k)$ является подалгеброй Хопфа в $\mathcal{A}_p$ тогда и только тогда, когда выполнены условия*

(i) для любых $i, j \geqslant 1$ выполяется либо неравенство $h(i) \leqslant j + h(i+j)$, либо неравенство $h(j) \leqslant h(i+j)$;

(ii) если для произвольных $i \geqslant 1$, $j \geqslant 0$ выполнено неравенство $k(i+j) = 1$, то или $h(i) \leqslant j$, или $k(j) = 1$.

(b) Для $p = 2$ подалгебра $B(h)$ является подалгеброй Хопфа в $\mathcal{A}_2$ тогда и только тогда, когда выполнено условие (i) из предыдущего пункта.

(c) Все подалгебры Хопфа в $\mathcal{A}_p$ имеют вид, описанный в пункте (a) для $p > 2$ и в пункте (b) для $p = 2$.

Подалгебры Хопфа в $\overline{\mathcal{A}_p}$ соответствуют функциям h и k, приведенным в теореме А.1, при дополнительном условии $k(j) = 1$ для всех j.

Подалгебре Хопфа $A(n) \subset \mathcal{A}_2$, $n \geqslant 1$, соответствует функция h, определяющая в $(\mathcal{A}_2)_*$ соотношения

$$\xi_1^{2^{n+1}} = 0,\ \xi_2^{2^n} = 0,\ \xi_3^{2^{n-1}} = 0,\ \ldots,\ \xi_{n+1}^2 = 0,\ \xi_{n+2} = 0,\ \xi_{n+3} = 0,\ \ldots$$

Для $p > 2$ подалгебре $P(n) \subset \mathcal{A}_p$, $n \geqslant 1$, соответствуют функции h и k, определяющие в $(\mathcal{A}_p)_*$ соотношения

$$\xi_1^{p^{n+1}} = 0,\ \xi_2^{p^n} = 0,\ \xi_3^{p^{n-1}} = 0,\ \ldots,\ \xi_{n+1}^p = 0,\ \xi_{n+2} = 0,\ \xi_{n+3} = 0,\ \ldots;\ \tau_j = 0,\ j \geqslant 0.$$

А.1.4 Базис допустимых мономов

Определение А.1. (a) Для $p = 2$ *допустимой* называется последовательность положительных целых чисел $(i_1, \ldots, i_k)$, для которой $i_j \geqslant 2i_{j+1}$, $1 \leqslant j \leqslant k-1$. Моном $Sq^I = Sq^{i_1} Sq^{i_2} \ldots Sq^{i_k} \in \mathcal{A}_2$ называется *допустимым*.

(b) Для $p > 2$ и алгебры $\mathcal{A}_p$ *допустимой* называется последовательность $(\varepsilon_0, i_1, \varepsilon_1, i_2, \varepsilon_2, \ldots, i_k, \varepsilon_k)$, для которой $\varepsilon_j \in \{0,1\}$, все $i_j > 0$ и $i_j \geqslant pi_{j+1} + \varepsilon_j$, $1 \leqslant j \leqslant k-1$. Моном $P^I = \beta^{\varepsilon_0} P^{i_1} \beta^{\varepsilon_1} P^{i_2} \beta^{\varepsilon_2} \ldots P^{i_k} \beta^{\varepsilon_k} \in \mathcal{A}_p$ называется *допустимым*.

(c) Для $p > 2$ и алгебры $\overline{\mathcal{A}_p}$ *допустимой* называется последовательность положительных целых чисел $(i_1, i_2, \ldots, i_k)$, для которой $i_j \geqslant pi_{j+1}$, $1 \leqslant j \leqslant k-1$. Моном $P^I = P^{i_1} P^{i_2} \ldots P^{i_k} \in \overline{\mathcal{A}_p}$ называется *допустимым*.

Пункт (c) этого определения является частным случаем пункта (b) для всех $\varepsilon_j = 0$. В некоторых случаях оказывается удобным дополнить допустимые последовательности нулями справа и считать их бесконечными.

Теорема А.2 ([44; 149]). *Для $p \geqslant 2$ и алгебр $\mathcal{A}_p$, а также для $p > 2$ и алгебр $\overline{\mathcal{A}_p}$ допустимые мономы образуют аддитивный базис.*

A.1.5 Базис Милнора и формула умножения

В работе [109] Дж. Милнор показал, что алгебры $(\mathcal{A}_p)_*$ для $p \geqslant 2$ и алгебры $\overline{\mathcal{A}_p}$ для $p > 2$ устроены достаточно просто, см. разделы А.1.1 и А.1.2. Он ввел аддитивные базисы алгебр $\mathcal{A}_p$ и $\overline{\mathcal{A}_p}$, состоящие из так называемых милноровских элементов, а именно:

— для $p = 2$ обозначим через $Sq(r_1, r_2, \ldots) \in \mathcal{A}_2$ элементы базиса, двойственного стандартному базису $\xi_1^{r_1}\xi_2^{r_2}\xi_3^{r_3}\ldots \in (\mathcal{A}_2)_*$;

— для $p > 2$ обозначим через $P(r_1, r_2, \ldots) \in \overline{\mathcal{A}_p}$ элементы базиса, двойственного стандартному базису $\xi_1^{r_1}\xi_2^{r_2}\xi_3^{r_3}\ldots \in (\overline{\mathcal{A}_p})_*$.

В обоих случаях $(r_1, r_2, \ldots)$ — последовательность неотрицательных целых чисел, в которой лишь конечное число чисел отлично от нуля. При этом

$$\deg Sq(r_1, r_2, \ldots) = \sum_{j=1}^{\infty} r_j(2^j - 1),$$
$$\deg P(r_1, r_2, \ldots) = \sum_{j=1}^{\infty} r_j 2(p^j - 1).$$

Легко проверить, что $Sq(n) = Sq^n$ и $P(n) = P^n$.

Теперь обратимся к базису Милнора в $\mathcal{A}_p$. Элементы базиса Милнора в $\mathcal{A}_p$ имеют вид

$$Q_{i_1}Q_{i_2}\ldots P(r_1, r_2, \ldots),$$

где элементы $P(r_1, r_2, \ldots) \in \overline{\mathcal{A}_p} \subset \mathcal{A}_p$ определены выше, $Q_0 = \beta$, а элементы Q_k, $k > 0$, задаются рекуррентным соотношением $Q_{n+1} = P^{p^n}Q_n - Q_nP^{p^n}$ для $n \geqslant 0$.

Произведение $Q_{i_1}Q_{i_2}\ldots$ кодируется конечной последовательностью индексов $i_1 < i_2 < \ldots$, но часто удобно записать $Q_{i_1}Q_{i_2}\ldots = Q_0^{\varepsilon_0}Q_1^{\varepsilon_1}Q_2^{\varepsilon_2}\ldots = Q(\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots)$, где каждое из ε_j равно 0 или 1, причем ненулевых ε_j конечно. Если $r_j = 0$ или $\varepsilon_j = 0$ для всех $j > m$, то мы можем использовать конечные последовательности и писать $P(r_1, \ldots, r_m)$ или $Q(\varepsilon_0, \ldots, \varepsilon_m)$, соответственно. Произведение $Q_{i_1}\ldots Q_{i_m}$ будем называть Q-частью элемента $Q_{i_1}Q_{i_2}\ldots P(r_1, r_2, \ldots)$, а элемент $P(r_1, \ldots)$ — его P-частью.

Формула умножения милноровских элементов

В отличие от других базисов в алгебрах $\mathcal{A}_p$ и $\overline{\mathcal{A}_p}$, для элементов базиса Милнора имеется явная формула для произведения. А именно, для $p = 2$ произведение двух элементов $Sq(r_1, r_2, \ldots)$ и $Sq(s_1, s_2, \ldots)$ задается формулой

$$Sq(r_1, r_2, \ldots)Sq(s_1, s_2, \ldots) = \sum_X c(X)Sq(t_1, t_2, \ldots), \tag{A.9}$$

где суммирование ведётся по всем матрицам $X = (x_{ij})$, $i, j \geqslant 0$, удовлетворяющим условиям:

$$\sum_i x_{ij} = s_j,\ j \neq 0, \tag{A.10}$$

$$\sum_j 2^j x_{ij} = r_i,\ i \neq 0, \tag{A.11}$$

$$t_h = \sum_{i+j=h} x_{ij}, \tag{A.12}$$

а $c(X)$ является произведением мультиномиальных коэффициентов

$$c(X) = \prod_h (x_{h0}, x_{h-1,1}, \ldots, x_{0h}), \tag{A.13}$$

рассматриваемым $\bmod 2$. Такие матрицы X называются *допустимыми* (для произведения двух рассматриваемых элементов).

Для $p > 2$ произведение двух элементов $P(r_1, r_2, \ldots)$ и $P(s_1, s_2, \ldots)$ задается формулой

$$P(r_1, r_2, \ldots)P(s_1, s_2, \ldots) = \sum_X c(X)P(t_1, t_2, \ldots), \tag{A.14}$$

где суммирование ведётся по всем матрицам $X = (x_{ij})$, $i, j \geqslant 0$, удовлетворяющим условиям:

$$\sum_i x_{ij} = s_j,\ j \neq 0, \tag{A.15}$$

$$\sum_j p^j x_{ij} = r_i,\ i \neq 0, \tag{A.16}$$

$$t_h = \sum_{i+j=h} x_{ij}, \tag{A.17}$$

а $c(X)$ является произведением мультиномиальных коэффициентов

$$c(X) = \prod_h (x_{h0}, x_{h-1,1}, \ldots, x_{0h}), \tag{A.18}$$

рассматриваемым $\bmod p$. Такие матрицы X называются *допустимыми* (для рассматриваемого произведения).

Умножение милноровских элементов с ненулевой Q-частью описывается следующими явными формулами, см. [109]:

$$Q_i Q_j + Q_j Q_i = 0 \text{ для } i \neq j, \tag{A.19}$$

$$\begin{aligned} P(r_1, r_2, \ldots)Q_k = {} & Q_k P(r_1, r_2, r_3) + Q_{k+1} P(r_1 - p^k, r_2, \ldots) + \\ & + Q_{k+2} P(r_1, r_2 - p^k, \ldots) + \ldots, \end{aligned} \tag{A.20}$$

в частности,

$$P^n Q_k = \begin{cases} Q_k P^n & \text{для } p^k > n, \\ Q_k P^n + Q_{k+1} P^{n-p^k} & \text{для } p^k \leqslant n. \end{cases} \tag{A.21}$$

A.1.6 Когомологии малой размерности алгебр Стинрода $\mathcal{A}_p$

Сформулируем некоторые известные результаты о группах $\mathrm{Ext}^{s,t}_{\mathcal{A}_p}(\mathbb{Z}/p, \mathbb{Z}/p)$ для небольших s. Определение Ext-групп можно приведено в разделах 5.1.1 и 5.1.2. Из него следует, что для каждых s, t эти группы можно рассматривать как конечномерные векторные пространства над $\mathbb{Z}/p$

Легко проверяется, что $\mathrm{Ext}^{0,t}_{\mathcal{A}_2}(\mathbb{Z}/2, \mathbb{Z}/2) = 0$ при $t \neq 0$ и $\mathrm{Ext}^{0,0}_{\mathcal{A}_2}(\mathbb{Z}/2, \mathbb{Z}/2) = \mathbb{Z}/2$.

Примитивными элементами коалгебры $(\mathcal{A}_2)_*$ являются элементы $\xi_1^{2^k}$, $k \geqslant 0$, и только они. Двойственным образом, для модуля неразложимых элементов алгебры $\mathcal{A}_2$ минимальный набор образующих состоит из элементов Sq^{2^k}, $k \geqslant 0$. Отсюда получается следующий результат.

Утверждение A.1 ([17]). *(a) Группа* $\mathrm{Ext}^{1,t}_{\mathcal{A}_2}(\mathbb{Z}/2, \mathbb{Z}/2)$ *тривиальна при* $t \neq 2^k$.

(b) При $t = 2^k$, $k \geqslant 0$, *группа* $\mathrm{Ext}^{1,t}_{\mathcal{A}_2}(\mathbb{Z}/2, \mathbb{Z}/2)$ *содержит в точности один ненулевой элемент* h_k, *представленный в кобар-комплексе классом* $[\xi_1^{2^k}]$.

Следующие два утверждения можно найти в [17; 213].

Теорема A.3 ([17; 213]). *Группа* $\mathrm{Ext}^{2,*}_{\mathcal{A}_2}(\mathbb{Z}/2, \mathbb{Z}/2)$ *порождена произведениями элементов из* $\mathrm{Ext}^{1,*}_{\mathcal{A}_2}(\mathbb{Z}/2, \mathbb{Z}/2)$. *В группе* $\mathrm{Ext}^{2,*}_{\mathcal{A}_2}(\mathbb{Z}/2, \mathbb{Z}/2)$ *имеют место соотношения* $h_i h_j = h_j h_i$ *и* $h_{i+1} h_i = 0$ *для всех* i, j. *Более того, в качестве аддитивного базиса* $\mathrm{Ext}^{2,*}_{\mathcal{A}_2}(\mathbb{Z}/2, \mathbb{Z}/2)$ *можно взять множество элементов вида* h_i^2 *и* $h_j h_i$, *где* $j \geqslant i+2 \geqslant 0$.

Теорема A.4 ([17; 213]). *В группах* $\mathrm{Ext}^{3,*}_{\mathcal{A}_2}(\mathbb{Z}/2, \mathbb{Z}/2)$ *между произведениями трех элементов из* $\mathrm{Ext}^{1,*}_{\mathcal{A}_2}(\mathbb{Z}/2, \mathbb{Z}/2)$ *в дополнение к тем, что вытекают из предыдущей теоремы, имеются соотношения* $h_{i+2}^2 h_i = 0$ *и* $h_{i+2} h_i^2 + h_{i+1}^3 = 0$. *Более точно, тройные произведения вида* h_k, h_j, h_i, *где* $k \geqslant j \geqslant i \geqslant 0$, *за исключением* $h_k h_{i+1} h_i$, $h_{j+1} h_j h_i$, $h_{i+2}^2 h_i$, $h_{i+2} h_i^2$ *линейно независимы.*

Важную роль в описании структуры когомологий алгебр Хопфа, в частности алгебр $\mathcal{A}_p$, играют высшие операции, примером которых служат произведения Масси (их определение см. в разделе A.2). Легко видеть, из-за наличия соотношений $h_{i+1} h_i = 0$ в $\mathrm{Ext}^{2,*}_{\mathcal{A}_2}(\mathbb{Z}/2, \mathbb{Z}/2)$ имеются тройные произведения Масси $\langle h_{i+1}, h_i, h_{i+1} \rangle$, $\langle h_i, h_{i+1}, h_i \rangle$, $\langle h_{i+2}, h_{i+1}, h_i \rangle$ и $\langle h_i, h_{i+1}, h_{i+2} \rangle$. Однако они не дают новых элементов, поскольку они

либо нулевые, либо сводятся к произведению двух элементов из $\mathrm{Ext}^{1,*}_{\mathcal{A}_2}(\mathbb{Z}/2,\mathbb{Z}/2)$:

$$\begin{aligned}\langle h_i, h_{i+1}, h_i\rangle &= h_{i+1}^2,\\ \langle h_{i+1}, h_i, h_{i+1}\rangle &= h_i h_{i+2},\\ \langle h_i, h_{i+1}, h_{i+2}\rangle &= 0,\\ \langle h_{i+2}, h_{i+1}, h_i\rangle &= 0,\end{aligned}$$

причем во всех этих случаях неопределенность нулевая. Интерпретацию этих соотношений в терминах дифференциалов спектральной последовательности Бухштабера (BSS) мы приведем в разделе 8.3.

Группа $\mathrm{Ext}^{3,*}_{\mathcal{A}_2}(\mathbb{Z}/2,\mathbb{Z}/2)$ не описывается полностью теоремой A.4. А именно, $\mathrm{Ext}^{3,*}_{\mathcal{A}_2}(\mathbb{Z}/2,\mathbb{Z}/2)$ содержит тройные произведения Масси, которые не сводятся к произведениям элементов из $\mathrm{Ext}^{1,*}_{\mathcal{A}_2}(\mathbb{Z}/2,\mathbb{Z}/2)$. Результаты о нетривиальности таких элементов $c_i = \langle h_{i+1}, h_i, h_{i+2}^2\rangle$, определенных в силу соотношений из теорем A.3 и A.4, приведены в работе С. П. Новикова [213]. Окончательное описание $\mathrm{Ext}^{3,*}_{\mathcal{A}_2}(\mathbb{Z}/2,\mathbb{Z}/2)$ получено в [171].

Теорема A.5 ([171]). *Все произведения Масси $c_i = \langle h_{i+1}, h_i, h_{i+2}^2\rangle \in \mathrm{Ext}^{3,*}_{\mathcal{A}_2}(\mathbb{Z}/2,\mathbb{Z}/2)$ нетривиальны. Если множество элементов, описанных в теореме A.4, объединить с множеством всех c_i, то получится аддитивный базис группа $\mathrm{Ext}^{3,*}_{\mathcal{A}_2}(\mathbb{Z}/2,\mathbb{Z}/2)$.*

В работе [171] Ванг в качестве следствия из вычислений когомологий алгебры Стинрода $\mathcal{A}_2$ получил новое доказательство теоремы Адамса об элементах с инвариантом Хопфа, равным 1. Из геометрических соображений класс $h_0h_3^2$ в спектральной последовательности Адамса не доживает до $E_\infty^{*,*}$. Единственный дифференциал, который может заклеить $h_0h_3^2$ — это дифференциал d_2, откуда получается соотношение $d_2h_4 = h_0h_3^2$. Ванг доказал, что элемент $h_0h_i^3 \in \mathrm{Ext}^{4,*}_{\mathcal{A}_2}(\mathbb{Z}/2,\mathbb{Z}/2)$ нетривиален, откуда по индукции несложно доказать, что $d_2h_i = h_0h_{i-1}^2$ для всех $i \geqslant 4$. Тем самым, для всех $i \geqslant 4$ элемент h_i не доживает до $E_\infty^{*,*}$. Отсюда следует, что в размерностях $k = 2^i - 1$ при $i \geqslant 4$ не существует элементов с инвариантом Хопфа, равным 1.

Вычислению когомологий алгебры $\mathcal{A}_p$ и подалгебры $\overline{\mathcal{A}_p}$ (она порождена элементами P^k, $k \geqslant 0$) посвящен ряд работ, из которых мы выделим следующие результаты.

Теорема A.6 ([98; 213], см. также [142]).

(*a*) *Векторное пространство $\mathrm{Ext}^{1,*}_{\mathcal{A}_p}(\mathbb{Z}/p,\mathbb{Z}/p)$ над $\mathbb{Z}/p$ аддитивно порождается независимыми элементами h_i, $i \geqslant 0$, $|h_i| = 2p^i(p-1)$ и α_0, $|\alpha_0| = 1$. В кобар-комплексе h_i представлен коциклом $[\xi_1^{p^i}]$, а α_0 — коциклом $[\tau_0]$.*

(*b*) *Векторное пространство $\mathrm{Ext}^{2,*}_{\mathcal{A}_p}(\mathbb{Z}/p,\mathbb{Z}/p)$ над $\mathbb{Z}/p$ аддитивно порождается*

независимыми классами

$$
\begin{array}{rll}
h_ih_j, & |h_ih_j| = 2(p-1)(p^i+p^j), & \text{где } 0 \leqslant i < j-1; \\
h_i\alpha_0, & |h_i\alpha_0| = 2p^i(p-1)+1, & \text{где } i \neq 0; \\
\mu_i, & |\mu_i| = 2(p-1)(p^{i+1}+2p^i); & \\
\nu_i, & |\nu_i| = 2(p-1)(2p^{i+1}+p^i); & \\
\lambda_i, & |\lambda_i| = 2(p-1)(2p^{i+1}); & \\
\rho, & |\rho| = 4(p-1)+1; & \\
\alpha_0^2, & |\alpha_0^2| = 2. &
\end{array}
$$

(*c*) *Имеют место следующие представления элементов* $\mu_i, \nu_i, \lambda_i, \rho$ *в виде произведений Масси:*

$$
\begin{aligned}
\mu_i &= \langle h_i, h_i, h_{i+1}\rangle; \\
\nu_i &= \langle h_i, h_{i+1}, h_{i+1}\rangle; \\
\lambda_i &= \langle h_i, h_i, \ldots, h_i\rangle \ \textit{(}p\textit{ сомножителей)}; \\
\rho &= \langle h_0, h_0, \alpha_0\rangle.
\end{aligned}
$$

Группы $\operatorname{Ext}^{3,*}_{\mathcal{A}_p}(\mathbb{Z}/p, \mathbb{Z}/p)$ были вычислены в работе [22]; полученный в ней результат слишком громоздкий, чтобы привести его здесь. Соотношения между произведениями элементов из $\operatorname{Ext}^{s,*}_{\mathcal{A}_p}(\mathbb{Z}/p, \mathbb{Z}/p)$, $s = 1, 2$, можно найти, например, в [22; 213]. В главе 8 будет показано, как элемент $\mu_i, \nu_i, \lambda_i, \rho$ представляется в виде дифференциала спектральной последоватальности Бухштабера для алгебры $\mathcal{A}_p$.

Вычислению когомологий алгебр $\mathcal{A}_p$ в высоких размерностях посвящен ряд работ, из них выделим работы Мэя [105; 106], Тангоры [160], а также современный обзор [39], в котором собраны наиболее полные, по всей видимости, результаты о вычислении $\operatorname{Ext}^{s,t}_{\mathcal{A}_2}(\mathbb{Z}/2, \mathbb{Z}/2)$; в нем рассмотрены $0 \leqslant s \leqslant 128$, $0 \leqslant t \leqslant 200$.

Когомологии некоторых подалгебр алгебры Стинрода $\mathcal{A}_2$

Алгебра когомологий $\operatorname{Ext}^{s,t}_{A(1)}(\mathbb{Z}/2, \mathbb{Z}/2)$ описывается следующей теоремой.

Теорема A.7 ([142, гл. 3])**.** (*a*) *Алгебра* $\operatorname{Ext}^{*,*}_{A(1)}(\mathbb{Z}/2, \mathbb{Z}/2)$ *изоморфна алгебре* $\mathbb{Z}/2[h_0, h_1, v, w]/\mathcal{I}$*, где*

$$
\begin{array}{ll}
h_0 \in \operatorname{Ext}^{1,1}_{A(1)}(\mathbb{Z}/2, \mathbb{Z}/2), & h_1 \in \operatorname{Ext}^{1,2}_{A(1)}(\mathbb{Z}/2, \mathbb{Z}/2), \\
v \in \operatorname{Ext}^{3,7}_{A(1)}(\mathbb{Z}/2, \mathbb{Z}/2), & w \in \operatorname{Ext}^{4,12}_{A(1)}(\mathbb{Z}/2, \mathbb{Z}/2),
\end{array}
$$

а идеал $\mathcal{I}$ *порожден соотношениями* $h_0h_1 = 0$, $h_0v = 0$, $h_1^3 = h_0^2w$, $v^2 = h_1^2w$.

(*b*) *Элементы* v *и* w *выражаются в виде произведений Масси следующим обра-*

зом:

$$v = \langle h_0, h_1, h_1^2 \rangle$$
$$w = \langle h_1, h_1^2, h_1, h_1^2 \rangle$$

(*c*) *В* $\mathrm{Ext}^{*,*}_{A(1)}(\mathbb{Z}/2, \mathbb{Z}/2)$ *имеются соотношения* $h_0^2 v = 0$, $h_0^3 w = 0$, $h_0^4 = 0$, $h_1^4 = 0$, $h_1^3 v = 0$, $h_1^2 v^2 = 0$, $v^3 = 0$, $w^2 = 0$.

Это представление элемента w в виде 4-местного произведения Масси $\langle h_1, h_1^2, h_1, h_1^2 \rangle$ часто встречается в литературе. В главе 8 будет показано, как такой элемент w представляется в виде дифференциала спектральной последоватальности Бухштабера, и как следствие, получено представление w в виде специального произведения Масси $w = \langle h_1, h_0, h_1, v \rangle$. Специальные произведения Масси определены в разделе 5.2.1.

Алгебра когомологий $\mathrm{Ext}^{*,*}_{A(2)}(\mathbb{Z}/2, \mathbb{Z}/2)$ описывается следующей теоремой.

Теорема A.8 (см. [150])**.**

(*a*) *Алгебра* $\mathrm{Ext}^{*,*}_{A(2)}(\mathbb{Z}/2, \mathbb{Z}/2)$ *изоморфна алгебре*

$$\mathbb{Z}/2[h_0, h_1, h_2, \omega_0, \omega_1, \alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_7]/\mathcal{I},$$

где

$$h_0 \in \mathrm{Ext}^{1,1}_{A(2)}(\mathbb{Z}/2, \mathbb{Z}/2), \quad h_1 \in \mathrm{Ext}^{1,2}_{A(2)}(\mathbb{Z}/2, \mathbb{Z}/2),$$
$$h_2 \in \mathrm{Ext}^{1,4}_{A(2)}(\mathbb{Z}/2, \mathbb{Z}/2), \quad \omega_0 \in \mathrm{Ext}^{4,12}_{A(2)}(\mathbb{Z}/2, \mathbb{Z}/2),$$
$$\omega_1 \in \mathrm{Ext}^{4,24}_{A(2)}(\mathbb{Z}/2, \mathbb{Z}/2), \quad \alpha_0 \in \mathrm{Ext}^{8,56}_{A(2)}(\mathbb{Z}/2, \mathbb{Z}/2),$$
$$\alpha_1 \in \mathrm{Ext}^{3,11}_{A(2)}(\mathbb{Z}/2, \mathbb{Z}/2), \quad \alpha_2 \in \mathrm{Ext}^{3,15}_{A(2)}(\mathbb{Z}/2, \mathbb{Z}/2),$$
$$\alpha_3 \in \mathrm{Ext}^{3,18}_{A(2)}(\mathbb{Z}/2, \mathbb{Z}/2), \quad \alpha_4 \in \mathrm{Ext}^{4,18}_{A(2)}(\mathbb{Z}/2, \mathbb{Z}/2),$$
$$\alpha_5 \in \mathrm{Ext}^{4,21}_{A(2)}(\mathbb{Z}/2, \mathbb{Z}/2), \quad \alpha_6 \in \mathrm{Ext}^{5,30}_{A(2)}(\mathbb{Z}/2, \mathbb{Z}/2),$$
$$\alpha_7 \in \mathrm{Ext}^{7,39}_{A(2)}(\mathbb{Z}/2, \mathbb{Z}/2),$$

а идеал соотношений $\mathcal{I}$ *порожден элементами, среди которых имеются* $h_0 h_1$, $h_1 h_2$, $h_0^2 h_2 = h_1^3$, $h_0 h_2^2$, h_2^3, $h_2 \omega_1$, $h_0 \alpha_1$, $h_1^2 \alpha_1$, $h_2 \alpha_1$, $\omega_1 \alpha_1$, *а полный список можно найти в [150].*

(*b*) *Элементы, отличные от* h_0, h_1, h_2, *выражаются в виде произведений Масси*

следующим образом:

$$\omega_1 = \langle h_2, h_2^2, h_2, h_2^2\rangle,$$
$$\alpha_0 = \langle h_2, \omega_1, h_2, \omega_1\rangle,$$
$$\alpha_1 = \langle h_1, h_0, h_2^2\rangle,$$
$$\alpha_2 = \langle h_0, h_1, h_2, h_2^2\rangle,$$
$$\alpha_3 = \langle h_1, h_2, h_2^2, h_2\rangle,$$
$$\alpha_4 = \langle h_0, h_1, \alpha_2\rangle = \langle h_0, h_2^2, h_2^2, h_1\rangle,$$
$$\alpha_5 = \langle h_2, h_1, \alpha_2\rangle = \langle h_0, h_1, \alpha_3\rangle = \langle h_0, h_2^2, h_2, h_2^2\rangle,$$
$$\alpha_6 = \langle h_1, h_2, \omega_1\rangle,$$
$$\alpha_7 = \langle \omega_1, h_2, \alpha_1\rangle.$$

□

Эта теорема дает представления элементов $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4, \alpha_5$ и α_6 в виде специальных произведений Масси, но оставшиеся произведения не являются специальными. Возникает следующая задача: найти представления элементов $\omega_1, \alpha_0, \alpha_3, \alpha_7$ в виде специальных произведений Масси.

О когомологиях подалгебр Стинрода $\mathcal{A}_p$, $p \geqslant 2$, см. также работу [99]. Упомянем также работы [69; 97]

A.2 Скалярные и матричные произведения Масси

В этом разделе приведены определения n-местных произведений Масси: как скалярных, так и матричных, их свойства, нужные нам, а также зафиксированы обозначений. Другие подробности можно найти в работах [88; 103]. В работе [183] была описана и применена важная связь с формальными связностями и уравнением Маурера—Картана. Знаки в формулах мы выбираем, следуя работе [183]: для произвольного элемента x градуировки k положим $\overline{x} = (-1)^k x$.

Пусть C^* — градуированная дифференциальная алгебра над кольцом R, при этом считается, что дифференциал d повышает градуировку на 1. Когомологии комплекса C^* относительно дифференциала d в этом разделе будем обозначать $H^*(C^*) = H^*(C^*, d)$, это не вызовет путаницы с $\operatorname{Ext}^{*,*}_{C^*}(R, R)$.

Скалярное трехместное произведение Масси

Пусть для однородных классов когомологий $a_1, a_2, a_3 \in H^*(C^*)$ выполнены равенства $\overline{a}_1 a_2 = 0$ и $\overline{a}_2 a_3 = 0$. Пусть $x_i \in C^*$ — представитель соответствующего класса когомологий $a_i \in H^*(C^*)$. Тогда $\overline{x}_1 x_2$ и $\overline{x}_2 x_3$ являются когранicами, т.е. существу-

ют элементы U и V такие, что $dU = \overline{x}_1 x_2$ и $dV = \overline{x}_2 x_3$. Легко проверить, что коцепь $\overline{U} x_3 + \overline{x}_1 V$ является коциклом, класс когомологий которого, вообще говоря, зависит от выбора представителей x_1, x_2, x_3 и элементов U и V. Тройным произведением Масси называется множество классов когомологий

$$\langle a_1, a_2, a_3 \rangle = \{[\overline{U} x_3 + \overline{x}_1 V] \in H^*(C^*) \ : \ [x_i] = a_i \in H^*(C^*), dU = \overline{x}_1 x_2, dV = \overline{x}_2 x_3\}.$$

Как видно из определения, эта операция является частично определенной и многозначной. В самом деле, класс когомологий $[a]$ зависит от выбора элементов U и V и нетрудно показать, что при другом выборе этих элементов определенный ими класс $[a']$ будет отличаться от $[a]$. Более точно, $[a] - [a'] \in H^{|a_1|+|a_2|-1}(C^*) a_3 + a_1 H^{|a_2|+|a_3|-1}(C^*)$, причем так может быть реализован любой элемент этого R-модуля.

Скалярное n-местное произведение Масси

Рассмотрим классы когомологий $a_i \in H^{p_i}(C^*)$. Множество элементов $x(i,j) \in C^*$, где $1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n$ и $(i,j) \neq (1,n)$, называется *определяющей системой* для рассматриваемых классов $a_i, i = 1, \ldots, n$, если выполнены следующие условия:

(M1) $x(i,i) \in C^{p_i}$ является коциклом, представляющим класс $a_i \in H^{p_i}(C^*)$;

(M2) $x(i,j) \in C^{p(i,j)}$, где $p(i,j) = p_i + \ldots + p_j - (j - i - 1)$.

(M3) для всех пар (i,i), отличных от $(1,n)$, $i < j$ выполнено равенство $dx(i,j) = \sum\limits_{k=i}^{j-1} \overline{x(i,k)} x(k+1,j)$.

Тогда элемент $x(1,n) = \sum\limits_{k=1}^{n-1} \overline{x(1,k)} x(k+1,n)$ является коциклом, а множество классов когомологий, представленных такими элементами $x(1,n)$, где $\{x(i,j)\}$ пробегает всевозможные определяющие системы для классов когомологий $a_1, \ldots, a_n$ называется n-местным произведением Масси. Оно тоже частично определено и многозначно. Для фиксированных $a_1, \ldots, a_n$ разности двух элементов вида $[x(1,n)]$, заданных всевозможными парами определяющих систем, как и для $n = 3$, образуют группу, но она описывается заметно более сложно, чем для $n = 3$. Более того, уже при описании неопределенности 4-местных скалярных произведений Масси естественным образом возникают матричные произведения, см. следующий пункт.

Тривиальным называется n-местное произведение, содержащее 0.

Замечание. Удобно рассматривать двуместное произведение Масси. Оно однозначно определено для всех классов $a, b \in H^*(C^*)$ и отличается от обычного произведения в когомологиях знаком: $\langle a, b \rangle = \overline{a} b$.

Матричное n-местное произведение Масси

Имеется следующее обобщение понятия многоместного произведения Масси на случай, когда $x(i,j)$ являются матрицами, составленными из однородных элементов

алгебры C^*, принадлежащих идеалу аугментации. Условие (M3) из предыдущего раздела накладывает на градуировки элементов матриц $x(i,j)$ условия согласованности двух типов. А именно, пусть $A = (a_{ij} \in C^* \ : \ 1 \leqslant i \leqslant m, 1 \leqslant j \leqslant l)$ и $B = (b_{jk} \in C^* \ : \ 1 \leqslant j \leqslant l', 1 \leqslant k \leqslant n)$. Будем говорить, что A и B *умножимы*, если

1) $l = l'$;

2) для любых $1 \leqslant i \leqslant m$ и $1 \leqslant k \leqslant n$ величина $|a_{ij}| + |b_{jk}|$ не зависит от j.

Для умножимых матриц A и B произведение AB определено и его элементы являются однородными элементами C^*.

С каждой матрицей $A = (a_{ij} \in C^* \ : \ 1 \leqslant i \leqslant m, 1 \leqslant j \leqslant l)$ связана целочисленная матрица $D(A) = (|a_{ij}| \ : \ 1 \leqslant i \leqslant m, 1 \leqslant j \leqslant l)$. Для умножимых матриц A и B выполнено $D(AB) = D(A) * D(B) = (|a_{ij}| + |b_{jk}| : 1 \leqslant i \leqslant m, 1 \leqslant k \leqslant n)$.

Перейдем непосредственно к определению. Пусть $A_1, \ldots, A_n$ — набор матриц, составленных из однородных элементов когомологий $H^*(C^*)$, причем A_i и A_{i+1} умножимы для всех $i = 1, \ldots, n$. Будем говорить, что набор матриц $X(i,j)$, $1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n$, $(i,j) \neq (1,n)$, состоящих из однородных элементов алгебры C^*, образует *определяющую систему*, если

(M1) для всех i матрица $X(i,i)$ состоит из коциклов, представляющих соответствующие элементы матрицы A_i;

(M2) градуировки элементов матрицы $X(i,j)$ связаны с градуировками элементов матриц $A_i, A_{i+1}, \ldots, A_j$ следующим образом: элементы матрицы $D(X(i,j))$ меньше соответствующих элементов матрицы $D(A_i) * D(A_{i+1}) * \ldots * D(A_j)$ в точности на $j-i+1$;

(M3) $dX(i,j) = \sum\limits_{k=i}^{j-1} \overline{X(i,k)} X(k+1,j)$.

Если матрицы $X(i,j)$ образуют определяющую систему, то матрица

$$C(\{A_i\}, \{X(i,j)\}) = \sum_{k=1}^{n-1} \overline{X(i,k)} X(k+1,j)$$

состоит из коциклов. Множество матриц, составленных из классов когомологий, представленных всевозможными $C(\{A_i\}, \{X(i,j)\})$ для фиксированных $A_1, \ldots, A_n$ называется n-местным матричным произведением Масси $\langle A_1, A_2, \ldots, A_n \rangle$. Полезно бывает ограничиться случаем, когда A_1 — строка, A_n — столбец; тогда $\langle A_1, A_2, \ldots, A_n \rangle$ состоит из матриц размера 1×1, т.е. из классов когомологий.

Замечание. Условия (M3) из предыдущих двух пунктов можно записать в виде уравнения Маурера—Картана — эта концепция была развита и нашла важные прило-

жения в [183]. В обозначениях пункта A.2 рассмотрим матрицу

$$\mathbb{X} = \begin{pmatrix} 0 & X(1,1) & X(1,2) & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & X(2,2) & \cdots & X(2,n) \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & & \cdots & & X(n,n) \\ 0 & 0 & \cdots & & 0 \end{pmatrix}$$

Тогда условия (M3) записываются в виде уравнения Маурера—Картана

$$d\mathbb{X} - \overline{\mathbb{X}} \cdot \mathbb{X} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & -a \\ 0 & \dots & 0 & 0 \\ & \dots & & \\ 0 & \dots & & 0 \end{pmatrix},$$

при этом матрица a совпадает с $C(\{A_i\}, \{X(i,j)\})$.

Замечание. Двуместное матричное произведение Масси определено для любых умножимых строки $(a_1, \dots, a_n)$ и столбца $(b_1, \dots, b_n)^T$:

$$\langle (a_1, \dots, a_n), (b_1, \dots, b_n)^T \rangle = \sum_{k=1}^{n} \overline{a}_k b_k.$$

Неопределенностью матричного произведения Масси $\langle A_1, A_2, \dots, A_n \rangle$ называется группа

$$\mathrm{In}\langle A_1, A_2, \dots, A_n \rangle = \{x - y \mid x, y \in \langle A_1, A_2, \dots, A_n \rangle\}.$$

Имеется результат Крейнеса, который описывает неопределенность n-местного матричного произведения Масси, как подмножество в объединении некоторых $(n-1)$-местных матричных произведений Масси, см. предложение 2.3 в работе Мэя [103]. Более точная формулировка нам не понадобится, поэтому мы ее не приводим. Однако заметим, что даже для скалярных n-местных произведений, где $n \geqslant 4$, их неопределенность с необходимостью выражается через $(n-1)$-местные матричные произведения Масси.

Заключение

Перечислим коротко результаты, полученные в диссертации.

Для градуированных алгебр Хопфа над кольцами развита теория спектральной последовательности Бухштабера (Bss). Показано, что для алгебр Хопфа над полем верны более глубокие результаты. Получено описание дифференциалов Bss в терминах нетривиальных специальных матричных скобок Масси.

Применение Bss упирается в вычисление фильтрации Бухштабера в модуле над рассматриваемой алгеброй Хопфа, который используется в качестве коэффициентов. Особый интерес представляет случай, когда в качестве такого модуля используется двойственная алгебра Хопфа. В диссертации вычислены фильтрации для следующих известных алгебр Хопфа: для алгебры Ландвебера—Новикова над рациональными числами, для универсальной обертывающей UL_1 алгебры формальных векторных полей на прямой, обращающихся в 0 вместе с первой производной, для универсальных обертывающих некоторых конечномерных факторов алгебры Ли L_1, а также для алгебр Гейзенберга—Ли. Полностью вычислены Bss для нильпотентных алгебр $\mathcal{G}L^3$, $\mathcal{G}L^4$, $\mathcal{GH}^5$,$\mathcal{GH}^7$.

Дифференциалы Bss не только позволяют задать фильтрацию в когомологиях алгебры Хопфа и указать представление элементов в когомологиях в виде нетривиального матричного произведения Масси. Они участвуют в механизме возникновения соотношений между произведениями и скобками Масси в когомологиях алгебр Хопфа. Показана эффективность соответствующего методов на примере классических результатов Адамса и Новикова в случае групп $\operatorname{Ext}^{s,t}_{\mathcal{A}_2}(\mathbb{Z}/2,\mathbb{Z}/2)$, $s \leqslant 3$. Методами Bss получены эффективное описание фильтрации групп $\operatorname{Ext}^{s,t}_{A(1)}(\mathbb{Z}/2,\mathbb{Z}/2)$ в терминах дифференциалов Bss, явное представление элементов этих групп образами дифференциалов Bss и как следствие — представление элементов специальными скобками Масси.

Решена известная задача явного описания так называемых экстремальных базисов алгебр $\mathcal{A}_p$, $p > 2$: βX, βZ, ZA, XC. Этот вопрос до сих пор оставался открытым, были получены лишь единичные результаты. Доказано, что βC-мономы образуют базис алгебры $\mathcal{A}_p$. Для $\mathbb{C}$-мотивной алгебры Стинрода mod 2 построены экстремальные базисы Z, X; построены аналоги базисов Вуда, семейство P^t_s-базисов и семейство базисов, составленных из итерированных коммутаторов.

Решена известная задача описания пар базисов алгебры $\mathcal{A}_p$, $p > 2$, для которых матрицы перехода треугольны; установлена треугольность матриц перехода для следующих пар базисов: $(B_{Mil}, \beta X)$, $(B_{Mil}, \beta C)$, (B_{Mil}, PQ), (B_{Mil}, XC), $(B_{Mil}, \beta P_t^s)$.Для аддитивных базисов $\mathbb{C}$-мотивной алгебры $\mathcal{A}_2^m$ доказана треугольность матриц перехода для пар (базис Милнора, X-базис), (базис Милнора, любой P_t^s-базис).

В качестве приложения построенной теории базисов в алгебрах $\mathcal{A}_p$, $p > 2$: (1) Получен ответ по гипотезе Тоды о точности известной короткой последовательности $\mathcal{A}_p$-модулей. А именно, получена явная формула для так называемой критической градуировки, такой что до этой градуировки точность имеет место, а в критической — нарушается; более того, вычислен фактор ядра по образу в среднем члене в критической градуировке. (2) Построено новое семейство мультипликативных образующих кольца $H^*(K(\mathbb{Z}/p, n); \mathbb{Z}/p)$. (3) Показано, что аннигиляторный идеал действия $\mathcal{A}_p$ на когомологиях пространства Эйленберга–Маклейна $K(\mathbb{Z}/p, 2)$ тривиален.

Развита теория пространств с кватернионным сопряжением, т. е. пространств, на которых действуют две коммутирующие инволюции, кольца когомологий пространства неподвижных точек и исходного пространства связаны алгебраическим изоморфизмом, изменяющим градуировки в 4 раза, причем в эквивариантых когомологиях соответствующие друг другу элементы при таком изоморфизме связаны уравнением специального вида. Показано, что категория таких пространств достаточно велика, в частности, замкнута относительно операции приклейки эквивариантных клеток. Введено понятие кватернионного уравнения сопряженности и вычислены его коэффициенты в терминах действия алгебры Стинрода $\mathcal{A}_2$.

В рамках известной проблемы о структуре канонического представления алгебры $\mathcal{A}_p$ в когомологиях произведений линзовых пространств получены результаты, часть из которых является общей для всех простых p, а другая — верна только для $p > 2$. Для действия $\mathcal{A}_p$ в алгебре, построенной по гомологиям групп $\mathbb{Z}/p \times \mathbb{Z}/p \times \ldots \times \mathbb{Z}/p$, показано, что для каждого $k \geqslant 1$ подалгебра, состоящая из элементов, аннулируемых подалгеброй $P(k) \subset \mathcal{A}_p$, являются свободной. Вычислены размерности градуировочных компонент подалгебры элементов, аннулируемых P^1.

По ходу изложения в тексте диссертации были сформулированы интересные открытые вопросы. Напомним некоторые из них и сформулируем другие.

В оригинальной работе В. М. Бухштабера фильтрация строилась в кольце $\Omega_U^*(\mathbb{Z})$, она начиналась с $N_0 = \Omega_U^* \subset \Omega_U^*(\mathbb{Z})$. Вычисление следующих двух шагов фильтрации $N_1 \subset N_2$ оказалось непростым, но полученные в этом направлении результаты позволили ему поставить проблему описания последовательных факторов фильтрации N_p/N_{p-1} в терминах кобордизмов многообразий с углами.

Другая проблема связана с топологическими приложениями функториальных свойств Bss. Хорошо известно, что гомоморфизмы алгебр операций крайне полезны. Вычисление Новиковым групп $\mathrm{Ext}_S^{1,*}(\mathbb{Z}, \Omega_U^*)$ использовало тонкую связь операций в

K-теории и в комплексных кобордизмах. Бухштабер и Шокуров использовали гомоморфизм алгебры $\mathcal{A}_p$ в алгебру Ландвебера–Новикова (над $\mathbb{Z}/p$) и получили топологические приложения.

Рассмотрение когомологий алгебр, определенных над $\mathbb{Z}$, (пример — второй член спектральной последовательности Адамса–Новикова для стабильных гомотопических групп сфер), требует учета довольно сложных делимостей. Поэтому следующим важным шагом является разработка теории дифференциалов Bss над локальными кольцами.

В рамках направления исследования аддитивных базисов алгебр $\mathcal{A}_p$ выделим три: (1) нахождение порядка, относительно которого экстремален базис βC; (2) нахождение трех оставшихся экстремальных базисов относительно порядков εR и εL; (3) топологические приложения базисов Вуда и коммутаторных базисов Палмьери–Жанга.

В рамках исследования пространств с кватернионым сопряжением интересен вопрос, существуют ли N-оснащенные пространства, но не Q-оснащенные. Важная проблема состоит в том, чтобы получить теоретико-гомотопическое доказательство формулы для коэффициентов уравнения сопряжения. Для комплексного случая такое доказательство есть, в нем используется $\mathbb{Z}/2$-эквивариантная алгебра Стинрода mod 2. Это позволило бы продвинуться в направлении доказательства гипотезы, мотивированной теоремой Адамса об инварианте Хопфа, что теория Q-оснащенных пространств не обобщается на случай пространств с действием трех и более независимых инволюций.

Публикации по теме диссертации

1. *Buchstaber V.*, *Popelensky F. Y.* Cohomology of the Heisenberg Manifold Sequence // Journal of Mathematical Sciences. — 2024. — Т. 284. — С. 17—58.
2. *Emelyanov D. Y.*, *Popelensky T. Y.* On monomial bases in the mod p Steenrod algebra // Journal of Fixed Point Theory and Applications. — 2015. — Т. 17, № 2. — С. 341—353.
3. *Emelyanov D.*, *Popelensky T.* Bases in the mod p Steenrod algebra, β included // Journal of Pure and Applied Algebra. — 2019. — Т. 223, № 8. — С. 3386—3401.
4. *Emelyanov D.*, *Popelensky T.* On some sequences of modules over the mod p Steenrod algebra // Homology, Homotopy and Applications. — 2020. — Т. 22, № 1. — С. 185—202.
5. *Kryazhev A.*, *Kuznetsov D.*, *Popelensky T.* Conjugation Equation for Quaternionic Conjugation Spaces // Russian Journal of Mathematical Physics. — 2025. — Т. 32, № 1. — С. 105—122.
6. *Ovchinnikova T.*, *Popelensky T. Y.* On triangular changes of bases in the mod p Steenrod algebra // Journal of Mathematical Sciences. — 2021. — Т. 259, № 5. — С. 699—711.
7. *Popelensky T. Y.* Action of Reduced Powers on the Homology of Products of Complex Projective Spaces and Products of Lens Spaces // Russian Journal of Mathematical Physics. — 2025. — Т. 32, № 1. — С. 150—159.
8. *Popelensky T.* Annihilator ideal for the action of the Steenrod algebra mod p on $K(\mathbb{Z}_p, 2)$ // Topology and its Applications. — 2020. — Т. 275. — С. 107034.
9. *Popelensky T.* Relations between kernels and images of reduced powers for some right A_p-modules // Publications de l'Institut Mathematique. — 2018. — Т. 103, № 117. — С. 191—198.
10. *Бухштабер В. М.*, *Попеленский Ф. Ю.* Когомологии алгебр Хопфа и произведения Масси // Успехи математических наук. — 2024. — Т. 79, 4 (478). — С. 5—94.
11. *Емельянов Д. Ю.*, *Попеленский Ф. Ю.* О заменах базисов в алгебре Стинрода mod p // Математический сборник. — 2017. — Т. 208, № 4. — С. 3—16.
12. *Попеленский Ф. Ю.* Об аддитивных базисах и их заменах в $\mathbb{C}$-мотивной алгебре Стинрода mod 2 // Труды Математического института им. В. А. Стеклова РАН. — 2025. — Т. 330. — С. 322—335.
13. *Попеленский Ф. Ю.* Произведения Масси и соотношения в когомологиях алгебр Стинрода // Математический сборник. — 2026. — Т. 217, № 2. — С. 108—153.

Список литературы

14. *Abe E.* Hopf Algebras. — Cambridge University Press, 1980.

15. *Adams J.*, *Margolis H.* Modules over the Steenrod algebra // Topology. — 1971. — Т. 10, № 4. — С. 271—282.

16. *Adams J. F.*, *Margolis H. R.* Sub-Hopf-algebras of the Steenrod algebra // Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society. — 1974. — Т. 76, № 1. — С. 45—52.

17. *Adams J. F.* On the non-existence of elements of Hopf invariant one // Annals of Mathematics. — 1960. — Т. 72, № 1. — С. 20—104.

18. *Adams J. F.* On the structure and applications of the Steenrod algebra // Comment. Math. Helv. — 1958. — Т. 32, № 1. — С. 180—214.

19. *Adem J.* Relations on iterated reduced powers // Proceedings of the National Academy of Sciences. — 1953. — Т. 39, № 7. — С. 636—638.

20. *Adem J.* The iteration of the Steenrod squares in algebraic topology // Proceedings of the National Academy of Sciences. — 1952. — Т. 38, № 8. — С. 720—726.

21. *Aguiar M.*, *Mahajan S.* Monoidal functors, species and Hopf algebras. — American Mathematical Society, 2010. — (CRM Monograph Series).

22. *Aikawa T.* 3-dimensional cohomology of the $\bmod p$ Steenrod algebra // Mathematica Scandinavica. — 1980. — Т. 47, № 1. — С. 91—115.

23. *Alvarez M. A.* The Betti numbers for Heisenberg Lie algebras // Journal of Algebraic Combinatorics. — 2020. — Т. 52, № 4. — С. 461—467.

24. *Anick D. J.*, *Peterson F. P.* A_2-annihilated elements in $H_*(\Omega\Sigma\mathbb{R}P^2)$ // Proceedings of the American Mathematical Society. — 1993. — Т. 117, № 1. — С. 243—250.

25. *Anick D. J.* On the homogeneous invariants of a tensor algebra, in "Algebraic Topology: Proceedings of the International Conference held March 21–24, 1988," Mark Mahowald and Stewart Priddy eds. // Contemporary Mathematics. — 1989. — Т. 96. — С. 15—17.

26. *Arnon D.* Monomial bases in the Steenrod algebra // Journal of Pure and Applied Algebra. — 1994. — Т. 96, № 3. — С. 215—223.

27. *Ault S. V.* Relations among the kernels and images of Steenrod squares acting on right $\mathcal{A}$-modules // Journal of Pure and Applied Algebra. — 2012. — Т. 216, № 6. — С. 1428—1437.

28. *Ault S. V.*, *Singer W.* On the homology of elementary Abelian groups as modules over the Steenrod algebra // Journal of Pure and Applied Algebra. — 2011. — Т. 215, № 12. — С. 2847—2852.

29. *Babenko I.*, *Taimanov I.* On nonformal simply connected symplectic manifolds // Preprint N358. SFB 228. — 1998.

30. *Baker A.*, *Richter B.* Quasisymmetric functions from a topological point of view // Mathematica Scandinavica. — 2008. — С. 208—242.

31. *Berrick A.*, *Davydov A.* Splitting of Gysin extensions // Algebraic & Geometric Topology. — 2001. — Т. 1, № 2. — С. 743—762.

32. *Boardman J. M.* Modular representations on the homology of powers of real projective space // Contemporary Mathematics. — 1993. — Т. 146. — С. 49—49.

33. *Borel A.* Sur la cohomologie des espaces fibrés principaux et des espaces homogenes de groupes de Lie compacts // Annals of Mathematics. — 1953. — Т. 57, № 1. — С. 115—207.

34. *Borel A.*, *Haefliger A.* La classe d'homologie fondamentale d'un espace analytique // Bulletin de la Société mathématique de France. — 1961. — Т. 89. — С. 461—513.

35. *Borinsky M.* Graphs in perturbation theory: Algebraic structure and asymptotics. — Springer, 2018.

36. *Brauer R.* Sur les invariants intégraux des variétés des groupes de Lie simples clos // C.R. Acad. Sci. Paris. — 1935. — Т. 201. — С. 419—421.

37. *Brouder C.*, *Frabetti A.*, *Menous F.* Combinatorial Hopf algebras from renormalization // Journal of Algebraic Combinatorics. — 2010. — Т. 32, № 4. — С. 557—578.

38. *Bruner R.*, *Hà L.*, *Hung N.* On the behavior of the algebraic transfer // Transactions of the American Mathematical Society. — 2005. — Т. 357, № 2. — С. 473—487.

39. *Bruner R. R.*, *Rognes J.* The cohomology of the mod 2 Steenrod algebra // arXiv preprint arXiv:2109.13117. — 2021.

40. *Buchstaber V. M.* Semigroups of maps into groups, operator doubles, and complex cobordisms // Translations of the American Mathematical Society-Series 2. — 1995. — Т. 170. — С. 9—32.

41. *Buchstaber V. M.*, *Ray N.* Operations and quantum doubles in complex oriented cohomology theory. // Homology, Homotopy and Applications. — 1999. — Т. 1. — С. 169—185.

42. *Buchstaber V. M.*, *Veselov A. P.* Chern-Dold character in complex cobordisms and theta divisors // arxiv:2007.05782v3. — 2020.

43. *Burklund R.*, *Isaksen D. C.*, *Xu Z.* Classical stable homotopy groups of spheres via $\mathbb{F}_2$-synthetic methods // arXiv preprint arXiv:2408.00987. — 2024.

44. *Cartan H.* Algebres D'Eilenberg–Maclane et Homotopie. — Seminaire Henri Cartan, 1954/1955.

45. *Cartan H.* Sur les groupes d'Eilenberg-MacLane. II // Proceedings of the National Academy of Sciences. — 1954. — Т. 40, № 8. — С. 704—707.

46. *Cartier P.* Dualité de Tannaka des groupes et des algebres de Lie // C. R. Acad. Sci. Paris. — 1956. — Т. 242, № 3. — С. 322—325.

47. *Chari V.*, *Pressley A. N.* A guide to quantum groups. — Cambridge University Press, 1995.

48. *Connes A.*, *Kreimer D.* Hopf Algebras, Renormalization and Noncommutative Geometry // Commun. Math. Phys. — 1998. — Т. 199. — С. 203—242.

49. *Crossley M.* $\mathcal{A}(p)$ generators for H^*V and Singer's homological transfer // Mathematische Zeitschrift. — 1999. — Т. 230, № 3. — С. 401—411.

50. *Dickson L. E.* A fundamental system of invariants of the general modular linear group with a solution of the form problem // Transactions of the American Mathematical Society. — 1911. — Т. 12, № 1. — С. 75—98.

51. *Dieck T. tom.* Transformation groups. — Walter de Gruyter, 1987.

52. *Dieck T. T.* Steenrod-Operationen in Kobordismen-Theorien // Mathematische Zeitschrift. — 1968. — Т. 107, № 5. — С. 380—401.

53. *Dieudonné J.* Groupes de Lie et hyperalgèbres de Lie sur un corps de caractéristique $p > 0$ // Commentarii Mathematici Helvetici. — 1954. — Т. 28, № 1. — С. 87—118.

54. *Dieudonné J.* Le calcul différentiel dans les corps de caractéristique $p > 0$ // Proc. International Congress of Math. — 1954. — С. 240—252.

55. *Dieudonné J.*, *Dieudonne J. A.* A history of algebraic and differential topology, 1900–1960. — Springer, 1989.

56. *Dugger D.*, *Isaksen D. C.* The motivic Adams spectral sequence // Geometry & Topology. — 2010. — Т. 14, № 2. — С. 967—1014.

57. *Ehresmann C.* Sur la topologie des groupes simples clos // C. R. Acad. Sci. Paris. — 1939. — Т. 208. — С. 1263—1265.

58. *Ehresmann C.* Sur la variété des génératrices planes d'une quadrique réelle et sur la topologie du groupe orthogonal à n variables // C. R. Acad. Sci. Paris. — 1939. — Т. 208. — С. 321—323.

59. *Eilenberg S.*, *MacLane S.* On the groups $H(\Pi, n)$, III: Operations and obstructions // Annals of Mathematics. — 1954. — Т. 60, № 3. — С. 513—557.

60. *Feigin B.*, *Fuchs D.* Verma modules over the Virasoro algebra // Lecture Notes in Math., vol. 1060: Topology. — Springer. 1984. — С. 230—245.

61. *Feigin B.*, *Fuchs D.*, *Retakh V.* Massey operations in the cohomology of the infinite dimensional Lie algebra L_1 // Lecture Notes in Math., vol. 1346: Topology and Geometry–Rohlin Seminar. — Springer. 1988. — С. 13—31.

62. *Figueroa H.*, *Gracia-Bondia J. M.* Combinatorial Hopf algebras in quantum field theory I // Reviews in Mathematical Physics. — 2005. — Т. 17, № 08. — С. 881—976.

63. *Franz M.*, *Puppe V.* Steenrod squares on conjugation spaces // Comptes Rendus. Mathématique. — 2006. — Т. 342, № 3. — С. 187—190.

64. *Giambalvo V.*, *Peterson F.* The annihilator ideal of the action of the Steenrod algebra on $H^*(\mathbb{R}P^\infty)$ // Topology and its Applications. — 1995. — Т. 65, № 2. — С. 105—122.

65. *Grinberg D.*, *Reiner V.* Hopf algebras in combinatorics // arXiv preprint arXiv:1409.8356. — 2014.

66. *Gugenheim V. K.*, *May J. P.* On the theory and applications of differential torsion products. Т. 142. — American Mathematical Soc., 1974.

67. *Guillou B.*, *Weibel C.* Operations in étale and motivic cohomology // Transactions of the American Mathematical Society. — 2019. — Т. 372, № 2. — С. 1057—1090.

68. *Halpern E.* Twisted polynomial hyperalgebras. — 1958. — (Memoirs of A.M.S., N. 29).

69. *Harker H.* Cohomology of the sub-Hopf algebra D of the Steenrod algebra // Journal of Pure and Applied Algebra. — 2007. — Т. 210, № 1. — С. 93—112.

70. *Hausmann J.-C.* Mod two homology and cohomology. Т. 10. — Springer, 2014.

71. *Hausmann J.-C.*, *Holm T. S.*, *Puppe V.* Conjugation spaces // Algebraic & Geometric Topology. — 2005. — Т. 5, № 3. — С. 923—964.

72. *Hazewinkel M.* Symmetric functions, noncommutative symmetric functions, and quasisymmetric functions // Acta Applicandae Mathematica. — 2003. — Т. 75, № 1—3. — С. 55—83.

73. *Hazewinkel M.*, *Gubareni N. M.*, *Kirichenko V. V.* Algebras, rings and modules: Lie algebras and Hopf algebras. — American Mathematical Soc., 2010. — (Mathematical Surveys and Monographs, Т. 168).

74. *Heckenberger I.*, *Schneider H.-J.* Hopf algebras and root systems. Т. 247. — American Mathematical Soc., 2020. — (Mathematical surveys and monographs).

75. *Hopf H.* Über die Topologie der Gruppen-Mannigfaltigkeiten und Ihre Verallgemeinerungen // Annals of Mathematics. — 1941. — Т. 42, № 1. — С. 22—52.

76. *Howe R.* Perspectives on invariant theory: Schur duality, multiplicity-free actions and beyond // The Schur lectures (1992)(Tel Aviv). — 1995. — С. 1—182.

77. *Hu P.*, *Kriz I.*, *Ormsby K.* Remarks on motivic homotopy theory over algebraically closed fields // Journal of K-Theory. — 2011. — Т. 7, № 1. — С. 55—89.

78. *Hung N. H.*, *Truong L. X.* The algebraic transfer for the real projective space // Comptes Rendus Mathematique. — 2019. — T. 357, № 2. — C. 111—114.

79. *Isaev A.* Lectures on quantum groups and Yang–Baxter equations // arXiv preprint arXiv:2206.08902. — 2022.

80. *Isaksen D. C.*, *Xu Z.* Motivic stable homotopy and the stable 51 and 52 stems // Topology and its Applications. — 2015. — T. 190. — C. 31—34.

81. *Jimbo M.* A q-difference analogue of $U(\mathfrak{g})$ and the Yang-Baxter equation // Letters in Mathematical Physics. — 1985. — T. 10, № 1. — C. 63—69.

82. *Joni S. A.*, *Rota G.-C.* Coalgebras and bialgebras in combinatorics // Studies in Applied Mathematics. — 1979. — T. 61, № 2. — C. 93—139.

83. *Kameko M.* Generators of the cohomology of BV_3 // Journal of Mathematics of Kyoto University. — 1998. — T. 38, № 3. — C. 587—593.

84. *Kameko M.* Generators of the cohomology of BV_4 // Toyama University (preprint). — 2003.

85. *Kameko M.* Products of projective spaces as Steenrod modules. — PhD thesis, The Johns Hopkins University, 1990.

86. *Karaca I.* Monomial bases in the $\bmod p$ Steenrod algebra // Czechoslovak Mathematical Journal. — 2005. — T. 55, № 3. — C. 699—707.

87. *Karaca I.*, *Tanai B.* The change of bases in the $\bmod p$ Steenrod algebra. — preprint.

88. *Kraines D.* Massey higher products // Transactions of the American Mathematical Society. — 1966. — T. 124, № 3. — C. 431—449.

89. *Krause H.*, *Witherspoon S.*, *Zhang J.* Mini-workshop: Cohohomology of Hopf algebras and tensor categories (16). — Oberwolfach reports, 2019.

90. *Kreimer D.* On the Hopf algebra structure of perturbative quantum field theories // Advances in Theoretical and Mathematical Physics. — 1998. — T. 2, № 2. — C. 303—334.

91. *Kushner A.*, *Lychagin V.*, *Rubtsov V.* Contact geometry and nonlinear differential equations. — Cambridge University Press, 2007. — (Enciclopedia of mathematics and its applications ; 101).

92. *Landweber P. S.* Cobordism operations and Hopf algebras // Transactions of the American Mathematical Society. — 1967. — T. 129, № 1. — C. 94—110.

93. *Lee S. T.*, *Packer J. A.* The cohomology of the integer Heisenberg groups // Journal of Algebra. — 1996. — T. 184, № 1. — C. 230—250.

94. *Lenart C.* Symmetric functions, formal group laws, and Lazard's theorem // Advances in Mathematics. — 1998. — T. 134, № 2. — C. 219—239.

95. *Lin W.* Noncommutative Gröbner Bases and Ext Groups // Peking Mathematical Journal. — 2025. — T. 8, № 3. — C. 481—501.

96. *Lin W.*, *Wang G.*, *Xu Z.* On the last Kervaire invariant problem // arXiv preprint arXiv:2412.10879. — 2024.

97. *Lin W.-H.* Cohomology of sub-Hopf-algebras of the Steenrod algebra // Journal of Pure and Applied Algebra. — 1977. — T. 11, № 1—3. — C. 105—110.

98. *Liulevicius A.* The factorization of cyclic reduced powers by secondary cohomology operations // Proceedings of the National Academy of Sciences. — 1960. — T. 46, № 7. — C. 978—981.

99. *Liulevicius A. L.* The cohomology of a subalgebra of the Steenrod algebra // Transactions of the American Mathematical Society. — 1962. — T. 104, № 3. — C. 443—449.

100. *Majid S.* Foundations of quantum group theory. — Cambridge university press, 2000.

101. *Margolis H. R.* Spectra and the Steenrod algebra. — Elsevier, 1987.

102. *Massey W.* Some higher order cohonmology operations // Symposium internacional de topologia algebraica. Mexico city: UNAM and UNESCO. — 1958. — C. 145—154.

103. *May J. P.* Matric Massey products // Journal of Algebra. — 1969. — T. 12, № 4. — C. 533—568.

104. *May J. P.* The cohomology of principal bundles, homogeneous spaces, and two-stage Postnikov systems // Bull. AMS. — 1968. — T. 74. — C. 334—339.

105. *May J. P.* The cohomology of restricted Lie algebras and of Hopf algebras // Journal of Algebra. — 1966. — T. 3, № 2. — C. 123—146.

106. *May J. P.* The cohomology of restricted Lie algebras and of Hopf algebras: application to the Steenrod algebra. — Princeton University, Thesis, 1964.

107. *Miller H. R.*, *Ravenel D. C.*, *Wilson W. S.* Periodic phenomena in the Adams-Novikov spectral sequence // Annals of Mathematics. — 1977. — T. 106, № 3. — C. 469—516.

108. *Milnor J.* On the cobordism ring Ω^* and a complex analogue, Part I // American Journal of Mathematics. — 1960. — T. 82, № 3. — C. 505—521.

109. *Milnor J.* The Steenrod algebra and its dual // Annals of Mathematics. — 1958. — T. 67, № 1. — C. 150—171.

110. *Milnor J. W.*, *Moore J. C.* On the structure of Hopf algebras // Annals of Mathematics. — 1965. — T. 81, № 2. — C. 211—264.

111. *Mitchell S. A.* Splitting $B(\mathbb{Z}/p)^n$ and BT^n via modular representation theory // Mathematische Zeitschrift. — 1985. — T. 189, № 1. — C. 1—9.

112. Modular representations of $GL(n,p)$, splitting $\Sigma(\mathbb{C}P^\infty \times \ldots \times \mathbb{C}P^\infty)$, and the β-family as framed hypersurfaces / D. Carlisle [и др.] // Mathematische Zeitschrift. — 1985. — № 2.

113. *Monks K. G.* Change of basis, monomial relations, and P_t^s bases for the Steenrod algebra // Journal of Pure and Applied Algebra. — 1998. — Т. 125, № 1—3. — С. 235—260.

114. *Montgomery S.* Hopf algebras and their actions on rings. — American Mathematical Soc., 1993. — (Regional Conference Series in Mathematics ; 82).

115. *Moore J. C.*, *Peterson F. P.* Modules over the Steenrod algebra // Topology. — 1972. — Т. 11, № 4. — С. 387—395.

116. *Morel F.* Suite spectrale d'Adams et invariants cohomologiques des formes quadratiques // Comptes Rendus de l'Académie des Sciences-Series I-Mathematics. — 1999. — Т. 328, № 11. — С. 963—968.

117. *Morel F.*, *Voevodsky V. A.* $\mathbb{A}^1$-homotopy theory of schemes // Publications Mathématiques de l'IHÉS. — 1999. — Т. 90. — С. 45—143.

118. *Moss R. M. F.* Secondary compositions and the Adams spectral sequence // Mathematische Zeitschrift. — 1970. — Т. 115, № 4. — С. 283—310.

119. *Mukohda S.* On a theorem of Toda in the Steenrod algebra // Memoirs of the Faculty of Science, Kyushu University. Series A, Mathematics. — 1960. — Т. 14, № 2. — С. 85—97.

120. *Nakamura O.* On the squaring operations in the May spectral sequence // Memoirs of the Faculty of Science, Kyushu University. Series A, Mathematics. — 1972. — Т. 26, № 2. — С. 293—308.

121. *Negishi A.* Exact sequences in the Steenrod algebra // Journal of the Mathematical Society of Japan. — 1958. — Т. 10, № 1. — С. 71—78.

122. *Nomizu K.* On the cohomology of compact homogeneous spaces of nilpotent Lie groups // Annals of Mathematics. — 1954. — Т. 59, № 3. — С. 531—538.

123. Noncommutative Symmetrical Functions / I. Gelfand [и др.] // Advances in Mathematics. — 1995. — Т. 112, № 2. — С. 218—348.

124. *O'Neill E.* On Massey products // Pacific Journal of Mathematics. — 1978. — Т. 76, № 1. — С. 123—127.

125. *Olbermann M.* Conjugations on 6-Manifolds (PhD Thesis). — Univ. Heidelberg, 2007.

126. On the iterated complex transfer / A. Baker [и др.] // Mathematische Zeitschrift. — 1988. — Т. 199, № 2. — С. 191—207.

127. *Orlov D.*, *Vishik A.*, *Voevodsky V.* An exact sequence for $K_*^M/2$ with applications to quadratic forms // Annals of mathematics. — 2007. — С. 1—13.

128. *Palmieri J. H.*, *Zhang J. J.* Commutators in the Steenrod algebra // New York J. Math. — 2013. — T. 19. — C. 23—37.

129. *Panin I.*, *Walter C.* On the algebraic cobordism spectra **MSL** and **MSp** // Алгебра и анализ. — 2022. — Т. 34, № 1. — С. 144—187.

130. *Panin I.*, *Walter C.* On the motivic commutative ring spectrum **BO** // Алгебра и анализ. — 2018. — Т. 30, № 6. — С. 43—96.

131. *Panin I.*, *Walter C.* Quaternionic Grassmannians and Borel classes in algebraic geometry // Алгебра и анализ. — 2021. — Т. 33, № 1. — С. 136—193.

132. *Papastavridis S.* Relations in the mod p Steenrod algebra // Stud. Algebraic Topology, Adv. Math., Suppl. 5. — 1978. — С. 169—188.

133. *Pareigis B.* A Non-commutative Non-Cocommutative Hopf Algebra in ' Nature' // Journal of Algebra. — 1981. — № 2. — С. 356—374.

134. *Peterson F. P.* A-generators for certain polynomial algebras // Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society. — 1989. — Т. 105, № 2. — С. 311—312.

135. *Peterson F. P.* Generators of $H^*(\mathbb{R}P^\infty \wedge \mathbb{R}P^\infty)$ as a module over the Stennrod algebra // Abstracts of Amer. Math. Soc. — 1987. — Т. 83. — С. 55—89.

136. *Pitsch W.*, *Ricka N.*, *Scherer J.* Conjugation spaces are cohomologically pure // Proceedings of the London Mathematical Society. — 2021. — Т. 123, № 3. — С. 313—344.

137. *Priddy S. B.* On characterizing summands in the classifying space of a group, I // American Journal of Mathematics. — 1990. — Т. 112, № 5. — С. 737—748.

138. *Pstrągowski P.* Synthetic spectra and the cellular motivic category // Inventiones mathematicae. — 2023. — Т. 232, № 2. — С. 553—681.

139. *Quillen D.* Elementary proofs of some results of cobordism theory using Steenrod operations // Advances in Mathematics. — 1971. — Т. 7, № 1. — С. 29—56.

140. *Quillen D.* On the formal group laws of unoriented and complex cobordism theory // Bull. Amer. Math. Soc. — 1969. — Т. 75, № 5. — С. 1293—1298.

141. *Radford D. E.* Hopf algebras. — World Scientific, 2011. — (Series on Knots and Everything, 49).

142. *Ravenel D. C.* Complex cobordism and stable homotopy groups of spheres. — American Mathematical Soc., 2003.

143. *Repka J.*, *Selick P.* On the subalgebra of $H^*((\mathbb{R}P^\infty)^n; \mathbb{F}_2)$ annihilated by Steenrod operations // Journal of Pure and Applied Algebra. — 1998. — Т. 127, № 3. — С. 273—288.

144. *Riley D.*, *Usefi H.* The isomorphism problem for universal enveloping algebras of Lie algebras // Algebras and Representation Theory. — 2007. — Т. 10. — С. 517—532.

145. *Rocha-Caridi A.*, *Wallach N. R.* Characters of irreducible representations of the Lie algebra of vector fields on the circle // Inventiones mathematicae. — 1983. — Т. 72, № 1. — С. 57—75.

146. *Rota G.-C.* Hopf algebra methods in combinatorics // Problèmes combinatoires et théorie des graphes (Colloq. Internat. CNRS, Univ. Orsay. — 1978. — С. 363—365.

147. *Santharoubane L. J.* Cohomology of Heisenberg Lie algebras // Proceedings of the American Mathematical Society. — 1983. — Т. 87, № 1. — С. 23—28.

148. Séminaire Henri Cartan de l'Ecole Normale Supérieure, 1954/1955 / H. Cartan [и др.] // Algebres d'Eilenberg-MacLane et homotopie. Secrétariat mathématique. — 1955. — Т. 11. — С. 9.

149. *Serre J.-P.* Cohomologie modulo 2 des complexes d'Eilenberg–MacLane // Commentarii Mathematici Helvetici. — 1953. — Т. 27, № 1. — С. 198—232.

150. *Shimada N.*, *Iwai A.* On the cohomology of some Hopf algebras // Nagoya Mathematical Journal. — 1967. — Т. 30. — С. 103—111.

151. *Singer W. M.* The transfer in homological algebra // Mathematische Zeitschrift. — 1989. — Т. 202, № 4. — С. 493—523.

152. *Smith L.* Homological algebra and the Eilenberg-Moore spectral sequence // Transactions of the American Mathematical Society. — 1967. — Т. 129, № 1. — С. 58—93.

153. *Smith L.* Lectures on the Eilenberg-Moore spectral sequence. Lecture Notes in Mathematics. Т. 134. — Springer, 1970.

154. *Stasheff J.* Homotopy associativity of H-spaces, II // Trans. Amer. Math. Soc. — 1963. — Т. 108. — С. 313—327.

155. *Steenrod N. E.* Cyclic reduced powers of cohomology classes // Proceedings of the National Academy of Sciences. — 1953. — Т. 39, № 3. — С. 217—223.

156. *Steenrod N. E.* Homology groups of symmetric groups and reduced power operations // Proceedings of the National Academy of Sciences. — 1953. — Т. 39, № 3. — С. 213—217.

157. *Steenrod N. E.* Products of cocycles and extensions of mappings // Annals of Mathematics. — 1947. — Т. 48, № 2. — С. 290—320.

158. *Sum N.* The hit problem for the polynomial algebra of four variables // arXiv preprint arXiv:1412.1709. — 2014.

159. *Sweedler M. E.* Hopf algebras. — Benjamin, New York, 1969. — (Mathematics Lecture Notes Series).

160. *Tangora M. C.* On the Cohomology of the Steenrod Algebra. // Mathematische Zeitschrift. — 1970. — T. 114. — C. 18—61.

161. *Toda H.* On exact sequences in Steenrod algebra mod 2 // Memoirs of the College of Science, University of Kyoto. Series A: Mathematics. — 1958. — T. 31, № 1. — C. 33—64.

162. *Tsün W. W.* Sur les puissances de Steenrod, Colloque de Topologie de Strasbourg // Publication of the Math. Inst. University of Strasbourg. — 1952.

163. *Uehara H., Massey W.* The Jacobi identity for Whitehead products. Algebraic geometry and topology. A symposium in honor of S. Lefschetz. — 1957.

164. *Voevodsky V. A.* $\mathbb{A}^1$-homotopy theory // Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Berlin. — 1998. — C. 579—604.

165. *Voevodsky V. A.* Motivic cohomology with $\mathbb{Z}/2$-coefficients // Publications Mathématiques de l'IHÉS. — 2003. — T. 98. — C. 59—104.

166. *Voevodsky V. A.* Reduced power operations in motivic cohomology // Publications Mathématiques de l'IHÉS. — 2003. — T. 98. — C. 1—57.

167. *Walker G.* The elements $\chi(P^a)P^b$ and $P^a\chi(P^b)$. — 1997. — Preprint, University of Manchester.

168. *Walker G., Wood R. M. W.* Polynomials and the mod 2 Steenrod algebra: vol. 1, the Peterson hit problem. 441, London Mathematical Society Lecture Note Series. — Cambridge University Press, 2017.

169. *Walker G., Wood R. M. W.* Polynomials and the mod 2 Steenrod Algebra: vol. 2, Representations of $GL(n, \mathbb{F}_2)$. 442, London Mathematical Society Lecture Note Series. — Cambridge University Press, 2017.

170. *Wall C. T. C.* Generators and relations for the Steenrod algebra // Annals of Mathematics. — 1960. — T. 72, № 3. — C. 429—444.

171. *Wang J. S.* On the cohomology of the mod-2 Steenrod algebra and the non-existence of elements of Hopf invariant one // Illinois Journal of Mathematics. — 1967. — T. 11, № 3. — C. 480—490.

172. *Wood R. M. W.* Modular representations of $GL(n, \mathbb{F}_p)$ and homotopy theory // Algebraic Topology Göttingen 1984: Proceedings of a Conference held in Göttingen, Nov. 9–15, 1984. — Springer. 1985. — C. 188—203.

173. *Wood R. M. W.* Splitting $\Sigma(\mathbb{C}P^\infty \times \ldots \times \mathbb{C}P^\infty)$ and the action of Steenrod squares Sq^i on the polynomial ring $\mathbb{F}_2[x_1, \ldots, x_n]$ // Algebraic Topology Barcelona 1986: Proceedings of a Symposium held in Barcelona, April 2–8, LNM1298. — Springer. 1986. — C. 237—255.

174. *Wood R.* A note on bases and relations in the Steenrod algebra // Bulletin of the London Mathematical Society. — 1995. — Т. 27, № 4. — С. 380—386.

175. *Wood R.* Problems in the Steenrod algebra // Bulletin of the London Mathematical Society. — 1998. — Т. 30, № 5. — С. 449—517.

176. *Wood R.* Steenrod squares of polynomials and the Peterson conjecture // Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society. — 1989. — Т. 105, № 2. — С. 307—309.

177. *Yagunov S.* Motivic cohomology spectral sequence and Steenrod operations // Compositio Mathematica. — 2016. — Т. 152, № 10. — С. 2113—2133.

178. *Zelevinsky A. V.* Representations of finite classical groups: a Hopf algebra approach. Т. 869. — Springer, 2006. — (Lecture notes in mathematics).

179. *Артельных И. В.* Произведения Масси и спектральная последовательность Бухштабера // Успехи математических наук. — 2000. — Т. 55, 3 (333). — С. 165—166.

180. *Бабенко И. К.* Алгебра, геометрия и топология группы подстановок формальных степенных рядов // Успехи математических наук. — 2013. — Т. 68, 1 (409). — С. 3—76.

181. *Бабенко И. К.*, *Тайманов И. А.* О неформальных односвязных симплектических многообразиях // Сибирский математический журнал. — 2000. — Т. 41, № 2. — С. 253—269.

182. *Бабенко И. К.*, *Тайманов И. А.* О существовании неформальных односвязных симплектических многообразий // Успехи математических наук. — 1998. — Т. 53, № 5. — С. 225—226.

183. *Бабенко И. К.*, *Тайманов И. А.* Произведения Масси в симплектических многообразиях // Математический сборник. — 2000. — Т. 191, № 8. — С. 3—44.

184. *Бухштабер В.* Алгебра Стинрода — обертывающая алгебра супергруппы p-адических диффеоморфизмов прямой // Добавление к кн.: Н. Стинрод, Д. Эпстейн, Когомологические операции, Наука, М. — 1983.

185. *Бухштабер В. М.* Группы полиномиальных преобразований прямой, неформальные симплектические многообразия и алгебра Ландвебера—Новикова // Успехи математических наук. — 1999. — Т. 54, 4 (328). — С. 161—162.

186. *Бухштабер В. М.* Модули дифференциалов спектральной последовательности Атья–Хирцебруха. II // Математический сборник. — 1970. — Т. 83, 1 (9). — С. 61—76.

187. *Бухштабер В. М.* Операторные дубли и полугруппы отображений в группы // Доклады Академии наук. — 1995. — Т. 341, № 6. — С. 731—733.

188. *Бухштабер В. М.* Полиномиальная эйлерова характеристика нильмногообразий // Функциональный анализ и его приложения. — 2024. — Т. 58, № 1. — С. 22—41.

189. *Бухштабер В. М.* Спектральные последовательности, связанные с характером Чженя–Дольда в кобордизмах // Успехи математических наук, Заседания Московского Математического общества. — 1971. — Т. 26, № 1. — С. 214—215.

190. *Бухштабер В. М.* Характер Чженя–Дольда в кобордизмах. I // Математический сборник. — 1970. — Т. 83, 4 (12). — С. 575—595.

191. *Бухштабер В. М.*, *Веселов А. П.* Многочлены Тодда и числа Хирцебруха // Труды Математического института имени В. А. Стеклова. — 2024. — Т. 325. — С. 81—92.

192. *Бухштабер В. М.*, *Ероховец Н. Ю.* Многогранники, числа Фибоначчи, алгебры Хопфа и квазисимметрические функции // Успехи математических наук. — 2011. — Т. 66, 2 (398). — С. 67—162.

193. *Бухштабер В. М.*, *Шокуров А. В.* Алгебра Ландвебера–Новикова и формальные векторные поля на прямой // Функциональный анализ и его приложения. — 1978. — Т. 12, № 3. — С. 1—11.

194. *Вайнштейн Ф. В.* Фильтрующие базисы и когомологии нильпотентных подалгебр алгебры Витта и алгебры петель на sl_2 // Функциональный анализ и его приложения. — 2010. — Т. 44, № 1. — С. 4—26.

195. *Гельфанд И. М.*, *Фейгин Б. Л.*, *Фукс Д. Б.* Когомологии бесконечномерных алгебр Ли и операторы Лапласа // Функциональный анализ и его приложения. — 1978. — Т. 12, № 4. — С. 1—5.

196. *Гончарова Л. В.* Когомологии алгебр Ли формальных векторных полей на прямой // Функциональный анализ и его приложения. — 1973. — Т. 7, № 2. — С. 6—14.

197. *Гончарова Л. В.* Когомологии алгебр Ли формальных векторных полей на прямой // Функциональный анализ и его приложения. — 1973. — Т. 7, № 3. — С. 33—44.

198. *Дринфельд В.* Квантовые группы // Зап. научн. сем. ЛОМИ, Дифференциальная геометрия, группы Ли и механика. VIII. — 1988. — Т. 155, 42:2. — С. 898—915.

199. *Дринфельд В. Г.* Алгебры Хопфа и квантовое уравнение Янга–Бакстера // Доклады Академии наук. — 1985. — Т. 283, № 5. — С. 1060—1064.

200. *Емельянов Д. Ю.* О базисах Вуда алгебры Стинрода $\mod p$ // Фундаментальная и прикладная математика. — 2015. — Т. 20, № 3. — С. 83—90.

201. *Жаринов В. В.* О когомологиях алгебры Гейзенберга // Труды МИАН им. В.А. Стеклова. — 2000. — Т. 228. — С. 61—75.

202. *Кассель К.* Квантовые группы. — М.: Фазис, 1999.

203. *Кац Г. И.*, *Палюткин В. Г.* Пример кольцевой группы, порожденной группами Ли // Укр. Матем. Ж. — 1964. — Т. 16. — С. 99—105.

204. *Коннер П.*, *Флойд Э.* Гладкие периодические отображения. — М.: Мир, 1969.

205. *Лычагин В. В.* Контактная геометрия и нелинейные дифференциальные уравнения второго порядка // Успехи математических наук. — 1979. — Т. 34, 1 (205). — С. 137—165.

206. *Макдональд И. Г.* Симметрические функции и многочлены Холла. — Мир, 1985.

207. *Маклейн С.* Гомология. — Мир, 1966.

208. *Мальцев А. И.* Об одном классе однородных пространств // Известия АН СССР. Серия математическая. — 1949. — Т. 13, № 1. — С. 9—32.

209. *Миллионщиков Д. В.* Алгебра формальных векторных полей на прямой и гипотеза Бухштабера // Функциональный анализ и его приложения. — 2009. — Т. 43, № 4. — С. 26—44.

210. *Миллионщиков Д. В.* Когомологии нильмногообразий и теорема Гончаровой // Успехи математических наук. — 2001. — Т. 56, 4 (340). — С. 153—154.

211. *Миллионщиков Д. В.* Когомологии положительно градуированных алгебр Ли и их приложения, дисс. на соискание уч. ст. д.ф.-м.н. — 2019.

212. *Мэй Д. П.* Общий алгебраический подход к операциям Стинрода // в кн. Н. Стинрод, Д. Эпстейн. Когомологические операции. М.: Мир. — 1983. — С. 151—223.

213. *Новиков С. П.* О когомологиях алгебры Стинрода // Докл. АН СССР. — 1959. — Т. 128, № 5. — С. 893—895.

214. *Новиков С. П.* Гомотопические свойства комплексов Тома // Математический сборник. — 1962. — Т. 57, № 4. — С. 407—442.

215. *Новиков С. П.* Методы алгебраической топологии с точки зрения теории кобордизмов // Известия Российской академии наук. Серия математическая. — 1967. — Т. 31, № 4. — С. 855—951.

216. *Новиков С. П.* О некоторых задачах топологии многообразий, связанных с теорией пространств Тома // Доклады Академии наук. 132 (5). — 1960. — С. 1031—1034.

217. *Новиков С. П.* Различные удвоения алгебр Хопфа. Алгебры операторов на квантовых группах, комплексные кобордизмы // Успехи математических наук. — 1992. — Т. 47, 5 (287). — С. 189—190.

218. *Панин И. А.*, *Вальтер Ч.* О связи симплектических алгебраических кобордизмов и эрмитовой K-теории // Труды Математического института имени В. А. Стеклова. — 2019. — Т. 307. — С. 180—192.

219. *Панов Н. В.* Характеристические числа в U-теории // Известия Российской академии наук. Серия математическая. — 1971. — Т. 35, № 6. — С. 1356—1376.

220. *Понтрягин Л. С.* О числах Бетти компактных групп Ли // Доклады Академии Наук СССР. — 1935. — Т. 1. — С. 433—437.

221. *Постников М. М.* К теореме Картана // Успехи математических наук. — 1966. — Т. 21, 4 (130). — С. 35—46.

222. *Ретах В. С.*, *Фейгин Б. Л.* О когомологиях некоторых алгебр и супералгебр Ли векторных полей // Успехи математических наук. — 1982. — Т. 37, 2 (224). — С. 233—234.

223. *Серр Ж. П.* Сингулярные гомологии расслоенных пространств // Расслоенные пространства. М.: Изд-во иностр. лит. — 1958.

224. *Стенли Р.* Перечислительная комбинаторика, т. 1, 2. — 1990, 2011.

225. *Стинрод Н Э. Д.* Когомологические операции. — Наука, 1983.

226. *Хамфрис Д.* Введение в теорию алгебр Ли и их представлений // М.: МЦНМО. — 2003. — Т. 216.

227. *Чжэнь Ш.-Ш.* Комплексные многообразия. — ИЛ, 1961.

228. *Шокуров А. В.* Когомологии кольца операций в теории унитарных кобордизмов и гомотопические инварианты непрерывных отображений // Успехи математических наук. — 1978. — Т. 33, 3 (201). — С. 195—196.