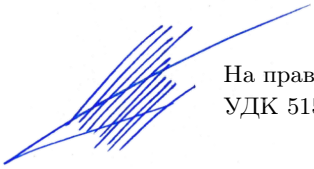
САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
МАТЕМАТИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА
ИМ. В. А. СТЕКЛОВА РАН



На правах рукописи
УДК 515.162.8

Миллер Алексей Юрьевич

ГЕОМЕТРИЯ ГОРДИЕВЫХ ГРАФОВ

1.1.3 — Геометрия и топология

А В Т О Р Е Ф Е Р А Т
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Санкт-Петербург — 2026

Работа выполнена в лаборатории геометрии и топологии Федерального государственного бюджетного учреждения науки Санкт-Петербургское отделение Математического института им. В. А. Стеклова Российской академии наук.

Научный руководитель:

Малютин Андрей Валерьевич, доктор физико-математических наук, заместитель директора по научной работе Федерального государственного бюджетного учреждения науки Санкт-Петербургское отделение Математического института им. В. А. Стеклова Российской академии наук (специальность 01.01.04)

Официальные оппоненты:

Веснин Андрей Юрьевич, доктор физико-математических наук, член-корреспондент РАН, директор Федерального государственного бюджетного учреждения науки Институт математики им. С. Л. Соболева Сибирского отделения Российской академии наук (специальность 01.01.04)

Талалаев Дмитрий Валерьевич, доктор физико-математических наук, доцент кафедры высшей геометрии и топологии механико-математического факультета Федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова (специальность 01.01.04)

Ведущая организация:

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»

Защита диссертации состоится 21 января 2027 г. в 14 час. на заседании диссертационного совета 24.1.167.03 по адресу: г. Москва, ул. Губкина, д. 8.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке МИАН и на сайте `https://mi-ras.ru/dis/ref26/miller/dis.pdf`.

Автореферат разослан «_____» октября 2026 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета 24.1.167.03,
доктор физ.-мат. наук  Д. В. Осипов

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Если есть «странные объекты», то должны быть и «странные факты».

— *Вадим Руднев*

Актуальность темы исследования и степень её разработанности

Настоящая диссертация относится к маломерной топологии, а конкретнее — к геометрической теории узлов и зацеплений. Основными объектами исследования настоящей диссертации выступают гордиевы графы различных преобразований узлов и зацеплений, исследуются локальные и глобальные геометрические свойства этих графов. Содержание настоящего параграфа составляет развёрнутый комментарий об истории и контексте исследований в данном направлении.

Классификации и структуры в теории узлов

Существенная доля исследований в рамках классической теории узлов опирается на базовые классификационные результаты. Одним из первых продвижений в вопросе классификации узлов можно считать теорему Шуберта[1] о разложении на простые от 1949 года, согласно которой каждый нетривиальный узел либо является простым, либо раскладывается в связную сумму конечного числа простых узлов, причём единственным образом. Данный результат позволяет провести предварительную грубую классификацию, разделить множество всех нетривиальных узлов на две крупные категории простых узлов и составных узлов. Другим замечательным результатом подобного сорта, уточняющим предыдущий, является классификационная теорема Тёрстона[2], согласно которой каждый простой узел является либо торическим, либо сателлитным, либо гиперболическим. Помимо апелляций к подобным глобальным

[1] *Schubert H.* Die Eindeutige Zerlegbarkeit Eines Knotens in Primknoten. Springer Berlin Heidelberg, 1949.

[2] *Thurston W. P.* Three Dimensional Manifolds, Kleinian Groups and Hyperbolic Geometry // Bulletin of the American Mathematical Society. 1982. Vol. 6, no. 3. P. 357–382.

классификациям, в процессе исследований нередко возникает потребность в более тонком разграничении, в распределении узлов на классы согласно некоторым выделенным, актуальным в заданном контексте общим признакам. Данную роль, к примеру, играет известный ещё с XIX века стратификационный подход к восприятию множества всех узлов, согласно которому узлы распределяются на классы в соответствии со значением выделенной меры сложности, такой как число перекрёстков, число развязывания, число мостов, число косы, число дуг, род узла, туннельное число и другие. К подобным подходам можно отнести и объединение узлов в кластеры в соответствии с наличием у них некоторого выделенного общего свойства. Примерами таких объединений служат упомянутые выше торические, сателлитные и гиперболические узлы, а также альтернированные, адекватные, итерированные торические, ленточные, срезанные, расслоенные, рациональные узлы, узлы Монтесиноса, узлы Берджа и другие.

Упомянутые выше классификационные подходы к восприятию множества всех узлов плодотворны, но несколько «редукционны», сконцентрированы на исследовании внутренней структуры каждого отдельного узла. Подобное выявление наборов общих свойств позволяет объединять узлы в группы по косвенным признакам, но оставляет за рамками вопрос о наличии их прямого геометрического взаимодействия.

Восполнить данный пробел призваны задачи оснащения множества всех узлов глобальной структурой, учитывающей подобные взаимодействия. Ранние результаты о глобальных структурах на множестве всех узлов носят алгебраический характер. В их числе тесно связанная с теоремой Шуберта структура моноида на множестве всех (ориентированных) узлов, а также структура группы на классах их конкордантности. Однако данные структуры, безусловно представляющие отдельный существенный интерес, ограничены в детекции взаимодействий между узлами всё той же операцией связного суммирования. При переходе от данной операции к более сложным геометрическим преобразованиям узлов, таким как переключение перекрёстка, ленточная хирургия, Δ-движение и другие, на множестве всех узлов естественным образом возникают новые богатые геометрические структуры, называемые гордиевыми графами. Гордиевы графы преобразований узлов и зацеплений явля-

ются центральным объектом исследования настоящей диссертации, а следующий подпараграф посвящён раскрытию данного понятия и изложению краткого исторического контекста соответствующих исследований.

Гордиев подход

Настоящий параграф служит кратким введением в теорию преобразований узлов и зацеплений и акцентирует внимание на восприятии преобразований сквозь призму соответствующих им гордиевых графов. Изложение носит обзорный характер, все формальные определения и детали, используемые в последующих рассуждениях, приведены в параграфе «Основные определения, обозначения и соглашения».

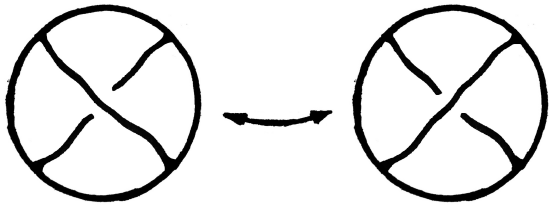


Рис. 1: Переключение перекрёстка.

Одним из ключевых преобразований узлов и зацеплений является преобразование переключения перекрёстка. Суть этого преобразования проиллюстрирована на Рис. 1. Проще всего определить данное преобразование диаграмматически: будем говорить, что зацепление L_1 получается из зацепления L_2 однократным применением преобразования переключения перекрёстка, если данная пара зацеплений может быть представлена парой диаграмм, отличающихся только типом одного из перекрёстков. Судя по всему, преобразование переключения перекрёстка является одним из самых ранних задокументированных преобразований: оно встречается в работе Питера Г. Тейта[3] от 1876 года в связи с описанием понятия

[3] *Tait P. G.* On knots I // Trans. Roy. Soc. Edinburgh. 1876. Vol. 28. P. 145–190.

«узловатости» («beknottedness»). В данной работе Тейт предвосхищает понятие числа развязывания узла — минимального количества последовательных применений преобразования переключения перекрёстка, требуемого для преобразования заданного узла в тривиальный. Аналог данного понятия, называемый «степенью узловатости» («amount of beknottedness»), был введён Тейтом в надежде сконструировать эффективный инвариант, позволяющий быстро устанавливать неизотопность заданной пары узлов. Однако простого пути к вычислению данного инварианта не представляется возможным обнаружить и до сих пор. Введённые Тейтом термины не прижились, а переключение перекрёстка до 1980-х носило имя «операции развязывания» («unknotting operation»). Примечателен относящийся к той эпохе результат Хильмара Вендта[4] от 1937 года, устанавливающий нижнюю оценку числа развязывания и предвосхищающий трюк Виро – Монтесиноса. В той же работе, по всей видимости, впервые было использовано слово «гордиев» («gordische»). С начала восьмидесятых годов XX века преобразование переключения перекрёстка привлекало существенное внимание исследователей. В частности, ряд фундаментальных результатов был получен такими классиками теории узлов, как Мартин Шарльманн[5], В. Б. Раймонд Ликориш[6], Стивен А. Блейлер[7], Ясутака Наканиши[8], Тайдзо Канэнобу и Хитоши Мураками[9]. Отдельного упоминания заслуживает результат Питера Б. Кронхаймера и Томаша С. Мровки[10], подтвердивших гипотезу Милнора о числе развязывания торического узла. Дополняя понятие числа развязывания, в работах того времени всё чаще возникает понятие гордиева

[4] *Wendt H.* Die gordische Auflösung von Knoten // Mathematische Zeitschrift. 1937. Vol. 42, no. 1. P. 680–696.

[5] *Scharlemann M. G.* Unknotting Number One Knots Are Prime // Inventiones Mathematicae. 1985. Vol. 82, no. 1. P. 37–55.

[6] *Lickorish W. B. R.* The Unknotting Number of a Classical Knot //. Vol. 44. 1985. P. 117–121.

[7] *Bleiler S. A.* A Note on Unknotting Number // Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society. 1984. Vol. 96, no. 3. P. 469–471.

[8] *Nakanishi Y.* A Note on Unknotting Number. 1981.

[9] *Kanenobu T.*, *Murakami H.* Two-Bridge Knots with Unknotting Number One // Proceedings of the American Mathematical Society. 1986. Vol. 98, no. 3. P. 499–502.

[10] *Kronheimer P.*, *Mrowka T.* Gauge Theory for Embedded Surfaces, I // Topology. 1993. Vol. 32, no. 4. P. 773–826.

расстояния. Гордиевым расстоянием $d_G(L_1, L_2)$ между двумя зацеплениями L_1 и L_2 называется минимальное количество последовательных применений преобразования переключения перекрёстка, требуемое для преобразования одного из данных зацеплений в другое.

В то же время вводится и начинает активно исследоваться ряд других значимых преобразований узлов и зацеплений, таких как H(2)-движение, Δ-движение, #-движение и n-движение. Оформляется и естественный способ восприятия преобразований, апеллирующий к понятию гордиева графа. Гордиевым графом фиксированного преобразования зацеплений на фиксированном множестве зацеплений называется такой граф, вершины которого находятся во взаимно однозначном соответствии с объемлемо-изотопическими классами всех зацеплений из данного множества, а ребро между двумя вершинами проводится тогда и только тогда, когда соответствующие зацепления могут быть преобразованы друг в друга однократным применением данного преобразования, смотри Рис. 2.

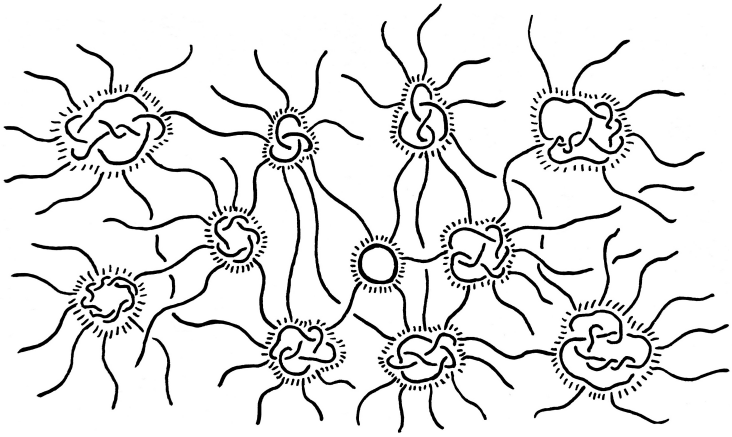


Рис. 2: Гордиев граф преобразования переключения перекрёстка.

Типичный гордиев граф имеет насыщенную структуру, в чём можно убедиться на примере гордиева графа преобразования переключения перекрёстка. Каждая из счётного числа его вершин

обладает счётной валентностью, а диаметр в метрике кратчайшего пути (согласно, к примеру, результату Вендта) бесконечен.

Порой принципиально различные на первый взгляд преобразования определяют один и тот же гордиев граф, что задаёт естественную эквивалентность преобразований, а также смещает исходный исторический акцент с исследования самих преобразований на исследование их гордиевых графов. К примеру, 2-движение в этом смысле оказывается эквивалентным переключению перекрёстка, а H(2)-движение — ленточной хирургии, смотри Рис. 3.

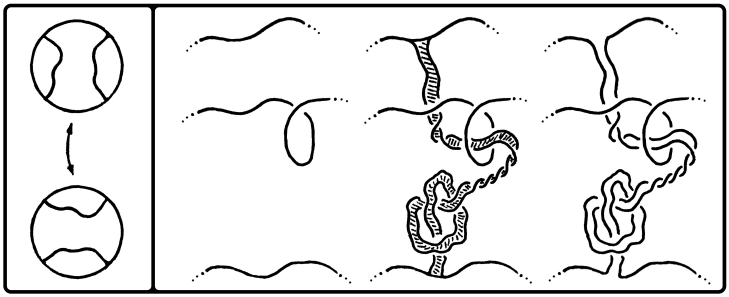


Рис. 3: Ленточная хирургия и H(2)-движение.

Завершая презентацию гордиева подхода, обозначим его влияние на современную маломерную топологию. Идея наделения совокупности маломерных объектов фиксированного типа глобальной структурой графа за последнее десятилетие была успешно воплощена в таких конструкциях, как большой граф Дена[11], большой граф Жиса[12], большой граф Ливингстона[13], а также большой граф тета-кривых[14].

[11] *Hoffman N.*, *Walsh G.* The Big Dehn Surgery Graph and the Link of S^3 // Proceedings of the American Mathematical Society, Series B. 2015. Vol. 2, no. 2. P. 17–34.

[12] *Shannon M.*, *Dehornoy P.* Almost Equivalence of Suspension Anosov Flows. arXiv: 1910.08457.

[13] *Livingston C.* Cobordism Distance on the Projective Space of the Knot Concordance Group // Canadian Journal of Mathematics. 2024. Vol. 76, no. 4. P. 1267–1288.

[14] *Joshi S.*, *Prabhakar M.* The Gordian Complex of Theta-Curves // Journal of

Целью следующего подпараграфа является изложение контекста исследований локальных геометрических свойств гордиевых графов преобразований узлов и зацеплений. Руководствуясь соображениями краткости и обзорным характером изложения, далее, исключительно в рамках введения, будем отождествлять вершины гордиевых графов и соответствующие им зацепления, используя такие естественные выражения, как «окрестность данного узла в данном гордиевом графе».

Внешне доминирующие и связные семейства зацеплений

Удивительный результат Мартина Шарльманна[15] от 1985 года, устанавливающий простоту узлов с числом развязывания, равным единице, допускает естественную интерпретацию в терминах структурных элементов гордиева графа переключения перекрёстков. В самом деле, согласно теореме Шарльманна, единичная окрестность тривиального узла в данном графе состоит исключительно из простых узлов. Давая первое представление о нетривиальной организации локальных структур гордиевых графов преобразований зацеплений, данный результат знаменует начало нового исследовательского направления. Действительно, полученная интерпретация немедленно наталкивает на серию естественных вопросов: какими ещё структурными свойствами обладает единичная окрестность тривиального узла в данном гордиевом графе? Насколько чувствительны эти свойства по отношению к выбору конкретного типа преобразования? Что вообще можно сказать об устройстве единичной окрестности произвольного узла в гордиевом графе фиксированного преобразования? Среди наиболее ярких ответов на поставленные вопросы отметим следующую тройку. Неожиданный, но далеко не единственный, ответ на первый вопрос даёт результат Хиродзуми Фудзии[16] о реализации произвольного многочлена Александера узлом с числом развязывания, равным единице, туннельным числом, равным единице, и числом мостов, равным трём (данный результат

Knot Theory and Its Ramifications. 2021. Vol. 30, no. 08. P. 2150050.

[15] *Scharlemann M. G.* Op. cit.

[16] *Fujii H.* Geometric Indices and the Alexander Polynomial of a Knot // Proceedings of the American Mathematical Society. 1996. Vol. 124, no. 9. P. 2923–2933.

уточняет более раннюю теорему Хисаки Кондо[17]). Границы второго вопроса частично очерчиваются результатом Такудзи Накамуры и Ясутаки Наканиши[18] о существовании бесконечного числа составных узлов в единичной окрестности тривиального узла в гордиевом графе #-движения. Одним из впечатляющих ответов на третий вопрос выступает результат Райана Блэра, Марион Кампизи, Джесси Джонсона, Скотта А. Тейлора и Мэгги Томовой[19] о том, что в единичной окрестности произвольного узла в гордиевом графе переключения перекрёстков содержится узел со сколь угодно большим числом мостов и сколь угодно большим мостовым расстоянием.

Один из основных результатов настоящей диссертации даёт свой ответ на третий из предложенных вопросов и относится к описанию свойств единичной окрестности произвольного узла в гордиевом графе ленточных хирургий на множестве всех зацеплений. Развитый Геннадием Маканиным[20] алгебраический аппарат унарных кос и результирующая теорема о представлении узла в виде замыкания унарной косы позволяют установить, что любой узел может быть превращён в двухкомпонентное брунново зацепление с помощью однократной ленточной хирургии (смотри теорему 1). Данный результат приобретает геометрическую окраску, будучи изложенным в терминах так называемой «внешней доминации». Классическая для теории графов концепция доминирующего[21] множества (а точнее, красно-синего[22] доминирующего множества) может быть апроприирована в контексте исследования геометрии гордиевых графов следующим образом. Будем говорить, что одно семейство зацеплений внешне доминирует над другим семейством зацеплений в рам-

[17] *Kondo H.* Knots of Unknotting Number 1 and Their Alexander Polynomials. 1979.

[18] *Nakamura T.*, *Nakanishi Y.* Notes on Sharp Moves for Knots // Journal of Knot Theory and Its Ramifications. 2012. Vol. 21, no. 07. P. 1250068.

[19] Neighbors of Knots in the Gordian Graph / R. Blair [et al.] // The American Mathematical Monthly. 2017. Vol. 124, no. 1. P. 4–23.

[20] *Маканин Г. С.* Об одном аналоге теоремы Александера – Маркова // Известия Академии наук СССР. Серия математическая. 1989. Т. 53, № 1. С. 200—210.

[21] *Haynes T. W.*, *Hedetniemi S.*, *Slater P.* Fundamentals of Domination in Graphs. CRC Press, 2013.

[22] *Abu-Khzam F. N.*, *Mouawad A. E.*, *Liedloff M.* An Exact Algorithm for Connected Red–Blue Dominating Set // Journal of Discrete Algorithms. 2011. Vol. 9, no. 3. P. 252–262.

ках заданного гордиева графа некоторого преобразования зацеплений, если для любой вершины этого графа, соответствующей зацеплению из второго семейства, найдётся смежная с ней вершина, соответствующая зацеплению из первого семейства. На предложенном языке полученный результат может быть сформулирован следующим образом: семейство двухкомпонентных брунновых зацеплений внешне доминирует над семейством всех узлов в рамках гордиева графа ленточных хирургий на множестве всех зацеплений.

Исходная формулировка данного результата возникла в ходе исследований, связанных с гипотезой о превалировании гиперболических узлов. Широко известная[23] и косвенно подкреплённая вычислениями[24] гипотеза превалирования гиперболических узлов утверждает, что доля гиперболических узлов среди простых узлов с n и менее перекрёстками стремится к единице при росте n. В рамках программы по опровержению данной гипотезы, Андреем Малютиным[25] было введено понятие вполне лернейского узла (существенно ограничительное и даже в некотором смысле контринтуитивное), а также установлено, что предположение о превалировании гиперболических узлов имплицирует непустоту множества вполне лернейских узлов. Опровержение гипотезы превалирования гиперболических узлов было в конечном итоге предложено Юрием Белоусовым и Андреем Малютиным[26] с использованием иного подхода, а вопрос о пустоте множества вполне лернейских узлов, положивший начало отдельному исследовательскому направлению, до сих пор остаётся открытым. Подтверждение гипотезы Малютина о пустоте другого множества узлов лернейского типа, а именно множества ультралернейских узлов, было получено автором[27] в качестве следствия результата о внешней доминации двухкомпонентных брунновых зацеплений.

---

[23] *Adams C. C.* The Knot Book: An Elementary Introduction to Mathematical Theory of Knots. W. H. Freeman & Co Ltd, 2001.

[24] *Hoste J.*, *Thistlethwaite M.*, *Weeks J.* The First 1,701,936 Knots // The Mathematical Intelligencer. 1998. Vol. 20, no. 4. P. 33–48.

[25] *Malyutin A. V.* On the Question of Genericity of Hyperbolic Knots // International Mathematics Research Notices. 2020. Vol. 2020, no. 21. P. 7792–7828.

[26] *Belousov Y.*, *Malyutin A.* Hyperbolic Knots Are Not Generic. arXiv: 1908.06187.

[27] Lernaean Knots and Band Surgery / Y. Belousov [et al.] // St. Petersburg Mathematical Journal. 2021. Vol. 33, no. 1. P. 23–46.

В классической теории графов понятие доминирующего множества нередко оснащается дополнительными естественными требованиями — например, требованием связности. Развивая аналогию, будем говорить, что семейство зацеплений связно в рамках заданного гордиева графа некоторого преобразования зацеплений, если соответствующее этому семейству зацеплений множество вершин в данном графе индуцирует связный подграф. В рамках настоящей диссертации установлено, что семейство брунновых двухкомпонентных зацеплений не является связным в рамках гордиева графа ленточных хирургий на множестве всех зацеплений, однако является связным в рамках гордиева графа переключения перекрёстков на том же множестве. При этом данное семейство не может внешне доминировать над семейством всех узлов в рамках гордиева графа переключения перекрёстков на множестве всех зацеплений в силу того, что переключение перекрёстка не меняет число компонент зацепления. Кроме того, в качестве немедленного следствия одного из основных результатов диссертации (а именно теоремы 3) был получен результат о связности единичных окрестностей вершин гордиева графа переключения перекрёстков на множестве всех узлов. Данный результат схож с результатом Хоффмана и Уолш[28] о связности единичной окрестности трёхмерной сферы в большом графе Дена.

Асимптотическое поведение гордиевых графов

Фундаментальная работа Этьена Жиса и Жана-Марка Гамбаду[29] от 2005 года положила начало новому направлению исследований геометрии гордиевых графов, ориентированному на анализ их глобального геометрического устройства. Ключевой результат работы Жиса и Гамбаду подчёркивает «внушительные масштабы» гордиева графа переключения перекрёстков: оказывается, что данный граф допускает квазиизометрическое вложение целочисленной решётки $\mathbb{Z}^d$ для любого $d \geq 1$. Этот результат послужил отправной точкой для целого ряда работ о глобальном устройстве гордиевых графов, среди которых отметим следующую четвёрку. Станислав

[28] *Hoffman N.*, *Walsh G.* The Big Dehn Surgery Graph and the Link of S^3.

[29] *Gambaudo J.-M.*, *Ghys É.* Braids and Signatures // Bulletin de la Société Mathématique de France. 2005. Vol. 133, no. 4. P. 541–579.

Ябука, Бэйбэй Лю и Эллисон Х. Мур[30] обобщают результат Жиса и Гамбаду, устанавливая отсутствие гиперболичности по Громову для гордиева графа $\mathrm{H}(m)$-движения при каждом $m \geq 1$ (кроме того, в данной работе содержится смежный результат об устройстве гордиева графа переключения перекрёстков: для любого $n \geq 1$ найдётся узел, находящийся на расстоянии по меньшей мере n от каждого торического узла). Другое обобщение результата Жиса и Гамбаду, представленное Сумико Хориучи и Ёсиюки Оямой[31], устанавливает существование изометрического вложения двумерной целочисленной решётки $\mathbb{Z}^2$ в гордиев граф C_{2m}-движения при каждом $m \geq 1$. Себастиан Баадер и Александра Кючукова[32] вводят метрическую фильтрацию гордиева графа переключения перекрёстков, подтверждая гипотезу о меридиональном ранге для широкого класса узлов (задача 1.11 списка Кёрби[33]). Наконец, результат Кадзухиро Итихары и Ин Дэ Джонга[34] посвящён «релятивизации» понятия гордиева графа и устанавливает гиперболичность по Громову относительного (∇, Δ)-гордиева графа, ассоциированного с многочленом Конвея.

Помимо упомянутого результата о решётках, работа Жиса и Гамбаду содержит серию вопросов о глобальном геометрическом и асимптотическом устройстве гордиева графа переключения перекрёстков. Один из основных результатов настоящей диссертации состоит в ответе на третий вопрос из данного списка[35]. Прежде чем сформулировать этот вопрос, введём необходимые определения, а именно будем называть числом BU-концов графа (имеющего не более чем счётное число вершин и снабжённого метрикой кратчайшего пути) супремум (конечный или бесконечный) количе-

[30] *Jabuka S.*, *Liu B.*, *Moore A. H.* Knot Graphs and Gromov Hyperbolicity // Mathematische Zeitschrift. 2022. Vol. 301, no. 1. P. 811–834.

[31] *Horiuchi S.*, *Ohyama Y.* A Two Dimensional Lattice of Knots by C_{2m}-Moves // Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society. 2013. Vol. 155, no. 1. P. 39–46.

[32] *Baader S.*, *Kjuchukova A.* Symmetric Quotients of Knot Groups and a Filtration of the Gordian Graph // Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society. 2020. Vol. 169, no. 1. P. 141–148.

[33] *Kirby R.* Problems in Low-Dimensional Topology. Geometric Topology, 1997.

[34] *Ichihara K.*, *Jong I. D.* Gromov Hyperbolicity and a Variation of the Gordian Complex // Proceedings of the Japan Academy, Series A, Mathematical Sciences. 2011. Vol. 87, no. 2.

[35] *Gambaudo J.-M.*, *Ghys É.* Op. cit. p. 547.

ства неограниченных компонент связности дополнения ограниченного подмножества вершин данного графа, где супремум берётся по всем ограниченным подмножествам вершин данного графа. Данное определение представляет классическую идею «числа концов», предложенную в рамках самого вопроса Жисом и Гамбаду в оригинальной работе, а также широко встречающуюся[36] в литературе.

Вопрос Жиса – Гамбаду. Чему равно число BU-концов гордиева графа переключения перекрёстков на множестве всех узлов?

Гомологическая оценка гордиева расстояния, основанная на трюке Виро – Монтесиноса о двулистном разветвлённом накрытии трёхмерной сферы с ветвлением в узле, а также ряд явных геометрических техник позволяют дать ответ на этот вопрос: данный граф имеет только один конец (смотри теорему 2). Доказательству данного результата посвящена вторая глава настоящей диссертации. Предложенный подход позволяет получать и более общие результаты[37] в направлении подсчёта числа концов гордиевых графов преобразований узлов.

Ответ на первый вопрос из списка Жиса – Гамбаду, вопрос о существовании квазиизометрического вложения бесконечного регулярного дерева в гордиев граф переключения перекрёстков, был получен Жульеном Марше[38]. Развитые техники позволили Марше вывести в качестве следствия некоторую слабую характеризацию асимптотического поведения гордиева графа переключения перекрёстков на бесконечности. Марше установил, что дополнение любого конечного множества вершин в данном графе является связным. В рамках настоящей диссертации представлено элементарное доказательство результата Марше, допускающее широкое обобщение.

Асимптотическое следствие 2 теоремы 3 также можно отнести к разряду результатов настоящей диссертации, посвящённых описанию глобального геометрического устройства гордиева графа переключения перекрёстков. Согласно этому следствию, дополнение

[36] *Meier J.* Groups, Graphs and Trees: An Introduction to the Geometry of Infinite Groups. Cambridge University Press, 2008.

[37] *Miller A. Y.* Behavior of Gordian Graphs at Infinity. arXiv: 2211.17237.

[38] *Marché J.* Comportement à l'infini Du Graphe Gordien Des Nœuds // Comptes Rendus. Mathématique. 2005. Vol. 340, no. 5. P. 363–368.

любого индуцированного локально-конечного подграфа в данном графе является связным. Именно формулировка следствия 2, исходно выдвинутая Малютиным в качестве гипотезы, послужила драйвером исследований, контекст которых изложен в следующем подпараграфе.

Геометрические паттерны в гордиевых графах

В 2002 году пионерами гордиева подхода Миками Хирасавой и Ёсиаки Учидой[39] было введено понятие гордиева комплекса $\mathcal{G}$. Гордиевым комплексом $\mathcal{G}$ называется такой симплициальный комплекс, вершины которого находятся во взаимно однозначном соответствии с объемлемо-изотопическими классами всех узлов, а набор из $n+1$ вершины образует n-мерный симплекс тогда и только тогда, когда все попарные гордиевы расстояния между узлами, отвечающими вершинам данного набора, равны единице. Иными словами, данный комплекс является кликовым комплексом (комплексом Вьеториса – Рипса) гордиева графа переключения перекрёстков. В этой же работе Хирасавой и Учидой была обнаружена следующая закономерность: для каждого ребра, то есть 1-симплекса, в гордиевом комплексе $\mathcal{G}$ существует симплекс сколь угодно высокой размерности, содержащий данное ребро. В контексте полученных результатов, Хирасава и Учида сформулировали программу дальнейших исследований, содержащую следующий вопрос[40].

Вопрос Хирасавы – Учиды. Верно ли, что в гордиевом комплексе $\mathcal{G}$ при $n \geq 0$ для каждого n-симплекса μ найдётся такой симплекс σ сколь угодно высокой размерности, что симплекс μ является гранью симплекса σ?

За последующие два десятилетия этот вопрос получил широкое освещение. В первую очередь речь идёт о крупном корпусе работ, посвящённых частичному решению аналогичного вопроса для комплексов, связанных с другими классическими преобразованиями узлов. Так, аналог вопроса Хирасавы – Учиды в случае $n = 0$

[39] *Hirasawa M.*, *Uchida Y.* The Gordian Complex of Knots // Journal of Knot Theory and Its Ramifications. 2002. Vol. 11, no. 03. P. 363–368.
[40] Ibid. Problem 2.

был положительно разрешён в 2006 году для C_k-движений Ёсиюки Оямой[41], в 2009 году для пасс-движения Ясутакой Наканиши и Ёсиюки Оямой[42], в 2017 году для H(m)-движений Каем Чжаном, Чжицином Яном и Фэнчунем Лэем[43], в 2018 году для $\overline{\#}$-движения Каем Чжаном и Чжицином Яном[44], в 2019 году для k-движений с чётными k Каем Чжаном и Чжицином Яном[45], в 2020 году для смены перекрёстков в области Амрендрой Гиллом, Мадети Прабхакаром и Андреем Весниным[46] и в 2023 году для 4-движения Данишем Али и соавторами[47].

Ряд результатов схожей природы был получен и в рамках исследования гордиевых комплексов виртуальных узлов. Так, аналог вопроса Хирасавы – Учиды для виртуальных узлов в случае $n = 0$ был положительно разрешён в 2012 году для v-движения Сумико Хориучи, Касуми Комурой, Ёсиюки Оямой и Масафуми Симодзавой[48], в 2013 году для запрещенных движений Сумико Хориучи и Ёсиюки Оямой[49] и в 2020 году для сдвига дуги Амрендрой Гиллом, Мадети Прабхакаром и Андреем Весниным[50].

С другой стороны, для Δ-движения и #-движения аналог вопроса Хирасавы – Учиды оказался вырожденным: как было показано

[41] *Ohyama Y.* The C_k-Gordian Complex of Knots // Journal of Knot Theory and Its Ramifications. 2006. Vol. 15, no. 01. P. 73–80.

[42] *Nakanishi Y.*, *Ohyama Y.* The Gordian Complex with Pass Moves Is Not Homogeneous with Respect to Conway Polynomials // Hiroshima Mathematical Journal. 2009. Vol. 39, no. 3. P. 443–450.

[43] *Zhang K.*, *Yang Z.*, *Lei F.* The H(n)-Gordian Complex of Knots // Journal of Knot Theory and Its Ramifications. 2017. Vol. 26, no. 13. P. 1750088.

[44] *Zhang K.*, *Yang Z.* A Note on the Gordian Complexes of Some Local Moves on Knots // Journal of Knot Theory and Its Ramifications. 2018. Vol. 27, no. 09. P. 1842002.

[45] *Zhang K.*, *Yang Z.* The N-Gordian Complex of Knots // Chinese Ann. Math. Ser. A. 2019. Vol. 40, no. 4. P. 443–448.

[46] *Gill A.*, *Prabhakar M.*, *Vesnin A.* Gordian Complexes of Knots and Virtual Knots given by Region Crossing Changes and Arc Shift Moves // Journal of Knot Theory and Its Ramifications. 2020. Vol. 29, no. 10. P. 2042008.

[47] The Gordian Complexes of Knots given by 4-Move / D. Ali [et al.] // Journal of Knot Theory and Its Ramifications. 2023. Vol. 32, no. 05. P. 2350034.

[48] The Gordian Complex of Virtual Knots / S. Horiuchi [et al.] // Journal of Knot Theory and Its Ramifications. 2012. Vol. 21, no. 14. P. 1250122.

[49] *Horiuchi S.*, *Ohyama Y.* The Gordian Complex of Virtual Knots by Forbidden Moves // Journal of Knot Theory and Its Ramifications. 2013. Vol. 22, no. 09. P. 1350051.

[50] *Gill A.*, *Prabhakar M.*, *Vesnin A.* Op. cit.

Окадой[51] и Мураками[52], соответствующие гордиевы комплексы не содержат симплексов размерности выше единицы.

Помимо ключевой для данной области исследований работы Хирасавы и Учиды, влияние которой подчёркнуто приведённым выше корпусом результатов, не менее важную направляющую роль в рамках имплицитной программы по поиску так называемых регулярных геометрических паттернов в гордиевых графах преобразований узлов сыграла и работа Себастиана Баадера[53] от 2006 года. Согласно основному результату данной работы, для любого пути из двух рёбер в гордиевом графе переключения перекрёстков найдётся бесконечное множество вершин, каждая из которых смежна и с начальной, и с конечной вершинами этого пути. Иными словами, пересечение единичных окрестностей двух произвольных узлов, находящихся друг от друга на расстоянии два, состоит из бесконечного числа вершин. Среди наиболее ярких результатов в направлении поиска паттернов такого сорта можно отметить следующую пару. Сумико Хориучи и Ёсиюки Ояма[54] приводят обобщение результата Баадера в двух направлениях: переключение перекрёстка заменяется C_k-движением при любом $k \geq 3$, а единичные окрестности заменяются окрестностями произвольных радиусов (данное наблюдение обобщает также и более ранний результат Хориучи[55] для Δ-движения). Теми же авторами предложен[56] ещё один аналог результата Баадера, дополненный контролем за значениями инвариантов Васильева – Гусарова узлов из пересечения соответствующих окрестностей.

Один из основных результатов настоящей диссертации объеди-

[51] *Okada M.* Delta-Unknotting Operation and the Second Coefficient of the Conway Polynomial // Journal of the Mathematical Society of Japan. 1990. Vol. 42, no. 4. P. 713–717.

[52] *Murakami H.* Some Metrics on Classical Knots // Mathematische Annalen. 1985. Vol. 270, no. 1. P. 35–45.

[53] *Baader S.* Note on Crossing Changes // The Quarterly Journal of Mathematics. 2006. Vol. 57, no. 2. P. 139–142.

[54] *Horiuchi S.*, *Ohyama Y.* On The C_n-Distance and Vassiliev Invariants // Journal of Knot Theory and Its Ramifications. 2012. Vol. 21, no. 10. P. 1250097.

[55] *Horiuchi S.* On a Ball in a Metric Space of Knots by Delta Moves // Journal of Knot Theory and Its Ramifications. 2008. Vol. 17, no. 06. P. 689–696.

[56] *Horiuchi S.*, *Ohyama Y.* Intersection of Two Spheres in the Metric Space of Knots by C_n-Moves // Journal of Knot Theory and Its Ramifications. 2014. Vol. 23, no. 04. P. 1450019.

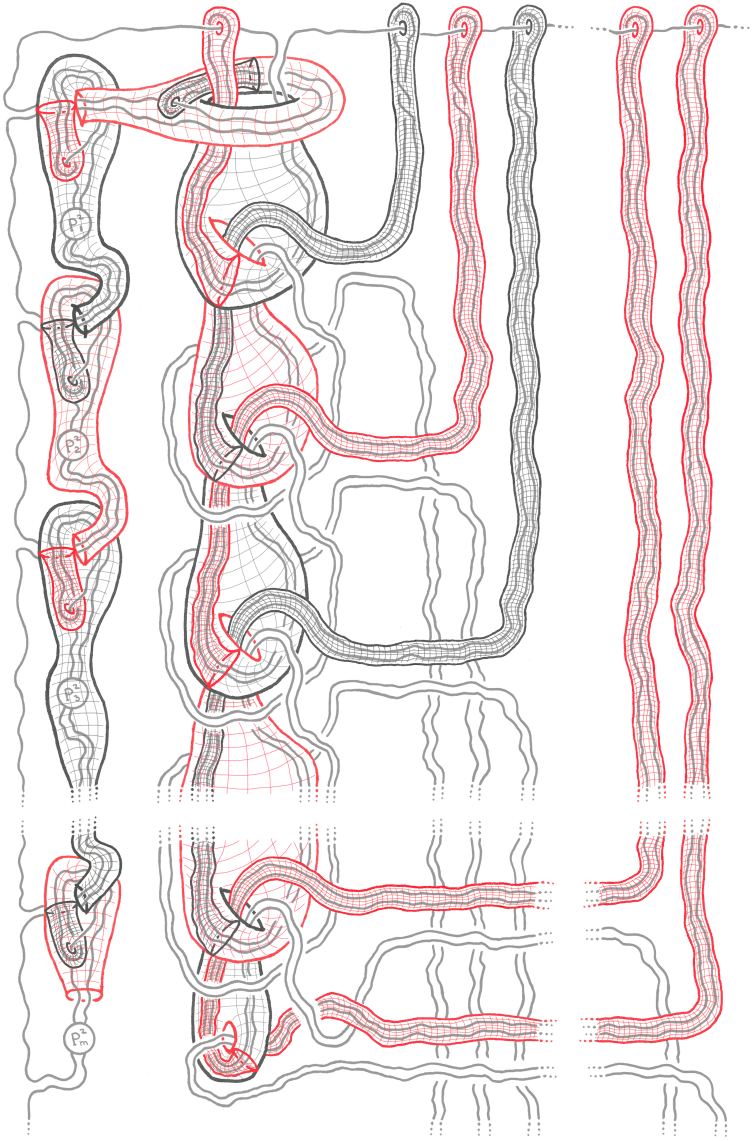


Рис. 4: Иллюстрация к доказательству теоремы 3.

няет и обобщает результаты Хирасавы, Учиды и Баадера. Развитые геометрические техники, которые будут описаны и прокомментированы далее, позволяют установить, что для каждого конечного подграфа-звезды в гордиевом графе переключения перекрёстков существует бесконечная клика, каждая вершина которой смежна с каждой вершиной данного подграфа-звезды (смотри теорему 3). Доказательство приведённого утверждения разбивается на два этапа: построение серии узлов-кандидатов в вершины требуемой клики и проверка бесконечности построенной серии. Первый этап содержит серию диаграммматических построений, подробная расшифровка которых на языке теории класперов Гусарова – Хабиро приведена в виде отдельного комментария. Второй этап опирается на интерпретацию понятия компаньона узла в терминах нерасщепимости некоторого двухкомпонентного зацепления и итеративное применение томской леммы Малютина о нерасщепимости двухкомпонентных зацеплений, смотри Рис. 4.

Данный результат немедленно влечёт положительный ответ на вопрос Хирасавы – Учиды и упомянутое в предыдущем подпараграфе асимптотическое следствие (смотри следствие 2). Более того, теорема 3 раскрывает локальное топологическое устройство гордиева комплекса $\mathcal{G}$ в целом. Комбинация теоремы 3 и стандартных техник[57] позволяет установить, что геометрическая реализация гордиева комплекса $\mathcal{G}$ является $\mathbb{R}^\infty$-многообразием.

Цель и задачи диссертации

Целью диссертации является ответ на вопрос Хирасавы – Учиды о гордиевом комплексе узлов $\mathcal{G}$ и выведение следствия о структуре $\mathbb{R}^\infty$-многообразия на геометрической реализации данного комплекса, доказательство внешней доминации семейства брунновых двухкомпонентных зацеплений над семейством всех узлов в рамках гордиева графа ленточных хирургий на множестве всех зацеплений и ответ на вопрос Жиса – Гамбаду об асимптотическом поведении гордиева графа переключения перекрёстков на множестве всех узлов.

[57] *Sakai K.* Topology of Infinite-Dimensional Manifolds. Springer Singapore, 2020.

Методы исследования

В диссертации используются методы геометрической и алгебраической топологии.

Научная новизна и положения, выносимые на защиту

Все выносимые на защиту результаты получены автором самостоятельно и являются новыми. Основные результаты диссертации, выносимые на защиту, заключаются в следующем:

1. установлена внешняя доминация семейства всех двухкомпонентных брунновых зацеплений над семейством всех узлов в рамках гордиева графа ленточных хирургий на множестве всех зацеплений;

2. получен ответ на вопрос Жиса – Гамбаду, а именно установлено, что число BU-концов гордиева графа переключения перекрёстков на множестве всех узлов равно единице;

3. получен ответ на вопрос Хирасавы – Учиды, а именно установлено, что в гордиевом комплексе $\mathcal{G}$ при $n \geq 0$ для каждого n-симплекса μ найдётся такой симплекс σ сколь угодно высокой размерности, что симплекс μ является гранью симплекса σ;

4. установлено, что связность гордиева графа переключения перекрёстков не нарушается при удалении любого индуцированного локально-конечного подграфа;

5. установлено, что геометрическая реализация гордиева комплекса $\mathcal{G}$ является $\mathbb{R}^\infty$-многообразием.

Теоретическая и практическая ценность

Диссертация носит теоретический характер. Полученные в диссертации результаты представляют интерес для специалистов в геометрической топологии, теории узлов и зацеплений.

Степень достоверности и апробация диссертации

Результаты диссертации докладывались автором на семинаре отдела геометрии и топологии МИАН «Геометрия, топология и математическая физика» (семинар С. П. Новикова), Петербургском геометрическом семинаре им. А. Д. Александрова (ПОМИ РАН), Петербургском топологическом семинаре им. В. А. Рохлина (ПОМИ РАН), Студенческом семинаре по маломерной топологии (Институт им. Леонарда Эйлера), а также на международных и всероссийских конференциях, в число которых входят:

1. Конференция международных математических центров мирового уровня, секция «Теория узлов», Сочи, Сириус, 2021.
2. Сибирская летняя школа-конференция «Текущие достижения в геометрии», Новосибирск, НГУ, 2021.
3. 8-я международная российско-китайская конференция по теории узлов и смежным темам, 2021.
4. Международная конференция малых научных групп, Санкт-Петербург, СПбГУ, 2022.
5. Международная конференция «Knot Theory and Applications», 2022.
6. 9-я международная летняя школа-конференция в Красновидово, Москва, 2022.
7. Международная конференция «Геометрия и топология трёхмерных многообразий», Сочи, Сириус, 2022.
8. Вторая конференция математических центров России, секция «Геометрия и топология», Москва, МГУ, 2022.
9. Международная конференция «Геометрические и алгебраические методы в теории узлов», Сочи, Сириус, 2023.
10. Третья конференция математических центров России, секция «Геометрия и топология», Майкоп, АГУ, 2023.
11. Четвёртая конференция математических центров России, Санкт-Петербург, СПбГУ – ПОМИ, 2024.

12. Международная конференция «Дни геометрии в Новосибирске», Новосибирск, ИМ СО РАН, 2024.

13. 10-я международная российско-китайская конференция по теории узлов и смежным темам, Сочи, Сириус, 2024.

14. Международная конференция «Маломерная топология 2025», Санкт-Петербург, ПОМИ РАН, 2025.

15. 12-я международная российско-китайская конференция по теории узлов и смежным вопросам, Сочи, Сириус, 2026.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Диссертация состоит из введения, трёх глав, заключения, списка литературы и приложения. Каждая глава разделена на параграфы, параграфы разделены на подпараграфы. Текст диссертации изложен на 104 страницах и содержит 41 рисунок. Список литературы включает 65 наименований.

Основные определения, обозначения и соглашения

В настоящем параграфе изложены основные определения, обозначения и соглашения, используемые в диссертации. Изложенный корпус сведений относится к основам классической геометрической топологии, теории локальных преобразований узлов и классической теории графов.

Классическая геометрическая топология

Определения классических понятий геометрической топологии, таких как объемлемая изотопность, узел, зацепление, коса, тэнгл, диаграмма зацепления, замыкание Александера косы, тор и меридионально-параллельная пара тора, торические, альтернированные и брунновы зацепления, коэффициент зацепления, линзовые пространства, связная сумма трёхмерных многообразий, двулистное разветвлённое накрытие трёхмерной сферы с ветвлением в узле, хирургия Дена трёхмерного многообразия по оснащённому зацеплению, несжимаемые поверхности в трёхмерных многообразиях и первая группа гомологий топологического пространства, смотри в монографии Рольфсена[58]. Определение понятия гропа смотри в классической работе Конанта и Тайхнера[59]. Определения понятий симплициального комплекса и его геометрической реализации, а также определения смежных понятий, в частности, понятия $\mathbb{R}^\infty$-многообразия, смотри в работе Сакаи[60]. Всюду далее изложение проводится в рамках классической теории узлов и зацеплений: под *зацеплением* (в зависимости от контекста) понимается

[58] *Rolfsen D.* Knots and Links. American Mathematical Society, 2003.

[59] *Conant J.*, *Teichner P.* Grope Cobordism of Classical Knots // Topology. 2004. Vol. 43, no. 1. P. 119–156.

[60] *Sakai K.* Op. cit.

как вложение конечного дизъюнктного объединения окружностей в трёхмерную сферу S^3, так и объемлемо-изотопический класс соответствующего вложения. Все зацепления предполагаются ручными и неориентированными (если прямо не оговорено иное). Аналогичное замечание справедливо также для тэнглов и кос.

Преобразования зацеплений и гордиевы графы

Локальные преобразования. Пусть $n \in \mathbb{N}$ и пусть A — некоторый замкнутый трёхмерный шар. Набор из n дуг в шаре A будем называть *правильно вложенным*, если дуги данного набора попарно не пересекаются, а пересечение данного набора дуг с граничной сферой шара A совпадает с множеством граничных точек данного набора дуг. Тогда пару $(A, \mathfrak{R})$, где $\mathfrak{R} \subset A$ — правильно вложенный набор из n дуг в шаре A, будем называть *n-тэнглом* и обозначать через $\mathfrak{R}^A$. Пусть $\mathfrak{R}_1, \mathfrak{R}_2 \subset A$ — пара правильно вложенных наборов из n дуг в шаре A, причём множество граничных точек набора дуг $\mathfrak{R}_1$ совпадает с множеством граничных точек набора дуг $\mathfrak{R}_2$. Тогда пару n-тэнглов $\big(\mathfrak{R}_1^A, \mathfrak{R}_2^A\big)$ будем называть *шаблоном локального преобразования* и обозначать этот шаблон через $[\mathfrak{R}_1^A, \mathfrak{R}_2^A]$. Будем говорить, что узел K_2 получается из узла K_1 *локальным преобразованием с шаблоном* $[\mathfrak{R}_1^A, \mathfrak{R}_2^A]$, если существуют такие простые замкнутые кривые $k_1, k_2 \subset S^3$, представляющие узлы K_1 и K_2 соответственно, что для некоторого вложения $f\colon A \to S^3$ выполнены следующие условия: множество $k_1 \cap \big(S^3 \setminus \operatorname{Int} f(A)\big)$ совпадает с множеством $k_2 \cap \big(S^3 \setminus \operatorname{Int} f(A)\big)$; множество $k_1 \cap f(A)$ совпадает с множеством $f(\mathfrak{R}_1)$; множество $k_2 \cap f(A)$ совпадает с множеством $f(\mathfrak{R}_2)$. Данное определение естественным образом переносится на случай зацеплений. Всюду далее под преобразованиями узлов и зацеплений подразумеваются локальные преобразования.

Гордиевы графы. Будем называть *гордиевым графом локального преобразования с шаблоном* $[\mathfrak{R}_1^A, \mathfrak{R}_2^A]$ *на некотором множестве зацеплений* M такой граф, вершины которого находятся во взаимно однозначном соответствии с объемлемо-изотопическими классами всех зацеплений из множества M, а ребро между двумя вершинами проводится тогда и только тогда, когда соответствующие зацепления могут быть преобразованы друг в друга однократным применением локального преобразования с шаблоном $[\mathfrak{R}_1^A, \mathfrak{R}_2^A]$. Чаще всего

в литературе (и всюду далее) в качестве множества M выступает либо множество всех узлов, либо множество всех зацеплений. В первом случае соответствующий граф для краткости будем называть гордиевым графом (заданного) преобразования узлов, а во втором — гордиевым графом (заданного) преобразования зацеплений.

Переключение перекрёстка и ленточная хирургия. Локальное преобразование, заданное шаблоном, изображённым на Рис. 1, будем называть преобразованием *переключения перекрёстка*, а локальное преобразование, заданное шаблоном на Рис. 3, будем называть преобразованием H(2)-*движения*. Отметим геометрическую специфику второго преобразования, заключённую в следующем наблюдении. Обозначим через I отрезок $[0,1]$ и будем говорить, что зацепление $L_2 \subset S^3$ получается из зацепления $L_1 \subset S^3$ с помощью *ленточной хирургии*, если существует такое вложение квадрата $\mathrm{b}\colon I \times I \to S^3$ с условием $\mathrm{b}(I \times I) \cap L_1 = \mathrm{b}(I \times \partial I)$, что зацепление L_2 объемлемо изотопно зацеплению $\big(L_1 \setminus \mathrm{b}(I \times \partial I)\big) \cup \mathrm{b}(\partial I \times I)$, смотри Рис. 3. На объемлемо-изотопические классы соответствующее определение переносится естественным образом. Оказывается справедливой следующая характеризация: два зацепления получаются друг из друга однократным применением H(2)-движения тогда и только тогда, когда они получаются друг из друга однократным применением ленточной хирургии. Далее под ленточной хирургией будем понимать локальное преобразование H(2)-движения, пользуясь при этом геометрическим аппаратом лент. Кроме того, заметим, что зацепление L_2 получается из зацепления L_1 однократным применением преобразования переключения перекрёстка тогда и только тогда, когда данная пара зацеплений может быть представлена парой диаграмм, отличающихся только типом одного из перекрёстков. Данный диаграмматический взгляд будет играть существенную роль в настоящем изложении.

Графы, расстояние и комплекс. Будем называть *гордиевым графом* G гордиев граф локального преобразования переключения перекрёстка на множестве всех узлов, *гордиевым графом зацеплений* G^L гордиев граф локального преобразования переключения перекрёстка на множестве всех зацеплений, а *графом ленточных*

хирургий G_B^L гордиев граф локального преобразования H(2)-движения на множестве всех зацеплений. Заметим, что графы G, G^L и G_B^L имеют счётное число вершин, а каждая их вершина имеет счётную валентность. Графы G и G_B^L связны. *Гордиевым расстоянием* $d_G(L_1, L_2)$ между двумя зацеплениями L_1 и L_2 будем называть минимальное количество последовательных применений преобразования переключения перекрёстка, требуемое для преобразования одного из данных зацеплений в другое. Гордиево расстояние задаёт метрику на множестве (объемлемо-изотопических классов) зацеплений. *Гордиевым комплексом* $\mathcal{G}$ будем называть такой симплициальный комплекс, вершины которого находятся во взаимно однозначном соответствии с объемлемо-изотопическими классами всех узлов, а набор из $n+1$ вершины образует n-мерный симплекс тогда и только тогда, когда все попарные гордиевы расстояния между узлами, отвечающими вершинам данного набора, равны единице. Иными словами, данный комплекс является кликовым комплексом гордиева графа G.

Классическая теория графов

Всюду далее под графом подразумевается простой граф с не более чем счётным числом вершин.

Клики и графы-звёзды. *Кликой* (или полным графом) называется такой граф, в котором каждая пара различных вершин соединена ребром. *Графом-звездой на n вершинах*, где $n \geq 3$, называется связный граф на соответствующем числе вершин, в котором все вершины, кроме одной, имеют валентность 1. *Графом-звездой на двух вершинах* будем называть связный граф на двух вершинах, а *графом-звездой на одной вершине* — граф на одной вершине.

Дополнения. Для заданного графа Γ будем обозначать через $\mathrm{Vert}(\Gamma)$ множество всех вершин этого графа. Для заданного подмножества вершин $M \subset \mathrm{Vert}(\Gamma)$ будем обозначать через $\Gamma \setminus M$ такой граф, который получается из графа Γ удалением каждой вершины, входящей в множество M, и каждого ребра, инцидентного хотя бы одной вершине из множества M. Будем называть *дополнением* к подграфу F в графе Γ граф $\Gamma \setminus \mathrm{Vert}(F)$.

Индуцированные подграфы. Для заданного подмножества вершин $N \subset \mathrm{Vert}(\Gamma)$ будем обозначать через $I(N)$ такой подграф графа Γ, вершины которого составляют множество N, а рёбрами являются в точности те рёбра графа Γ, которые инцидентны только вершинам множества N. Подграф $I(N)$ называется *подграфом, индуцированным подмножеством* N. Подграф F заданного графа Γ называется *индуцированным*, если любое ребро графа Γ, оба конца которого принадлежат подграфу F, также является ребром подграфа F. Подграф называется *локально-конечным*, если каждая его вершина имеет конечную валентность (в этом подграфе).

Расстояния. Под *расстоянием* dist_Γ между парой вершин заданного графа Γ всюду далее будет иметься в виду расстояние в метрике кратчайшего пути. Естественно, расстояние dist_G между вершинами гордиева графа G совпадает с гордиевым расстоянием d_G между соответствующими этим вершинам узлами.

Концы графов. Обозначим через $\mathfrak{U}(\Gamma)$ мощность множества неограниченных компонент связности графа Γ, а через $\mathfrak{B}(\Gamma)$ будем обозначать множество

$$\big\{V \subset \mathrm{Vert}(\Gamma) \,|\, \exists n \in \mathbb{N},\, \forall x, y \in V \colon \mathrm{dist}_\Gamma(x, y) < n\big\},$$

то есть множество всех ограниченных подмножеств множества всех вершин графа Γ. Будем называть *числом BU-концов* графа Γ и обозначать через $\mathrm{BU}(\Gamma)$ элемент множества $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$, заданный формулой

$$\mathrm{BU}(\Gamma) = \sup_{V \in \mathfrak{B}(\Gamma)} \mathfrak{U}\big(\Gamma \setminus V\big).$$

Внешняя доминация и связность семейств зацеплений

Будем говорить, что одно семейство зацеплений *внешне доминирует* над другим семейством зацеплений в рамках заданного гордиева графа некоторого преобразования зацеплений, если для любой вершины этого графа, соответствующей зацеплению из второго семейства, найдётся смежная с ней вершина, соответствующая зацеплению из первого семейства. Будем говорить, что семейство зацеплений *связно* в рамках заданного гордиева графа некоторого преобразования зацеплений, если соответствующее этому семейству

зацеплений множество вершин в данном графе индуцирует связный подграф.

Содержание работы

Глава 1 посвящена развитию концепций связности и внешней доминации семейств узлов и зацеплений в контексте геометрии гордиевых графов.

Первый параграф начинается с определения внешне доминирующих семейств зацеплений и краткого комментария о контексте исследования. Продолжается первый параграф определением унарной косы и формулировкой леммы Маканина об универсальном представлении узла в виде замыкания Александера унарной косы. Ключевым результатом первого параграфа и первой главы в целом является доказательство следующей теоремы.

Теорема 1. *Семейство брунновых двухкомпонентных зацеплений внешне доминирует над семейством всех узлов в рамках графа ленточных хирургий* G_B^L.

Завершается первый параграф развёрнутым комментарием о связи полученного результата с гипотезой Малютина о пустоте множества ультралернейских узлов и доказательством соответствующего следствия.

Второй параграф начинается с определения связных семейств зацеплений, формулировки теоремы о связности «единичных окрестностей» вершин гордиева графа G (данная теорема будет доказана в главе 3) и краткого замечания о контексте исследования. Продолжается второй параграф формулировкой теоремы о связности нескольких естественных семейств зацеплений и комментарием о взаимосвязи понятия связности и понятия внешней доминации. Ключевым результатом второго параграфа является доказательство теоремы о связности семейства двухкомпонентных брунновых зацеплений в рамках графа зацеплений G^L.

Глава 2 посвящена анализу структурного взаимодействия узлов в контексте исследования асимптотического поведения гордиевых графов на бесконечности.

Первый параграф начинается с определения BU-концов графа в смысле Жиса – Гамбаду и доказательства гомологической оценки

гордиева расстояния с опорой на трюк Виро – Монтесиноса о двулистном разветвлённом накрытии трёхмерной сферы с ветвлением в узле. Ключевым результатом первого параграфа и второй главы в целом, а также ответом на вопрос Жиса – Гамбаду, является доказательство следующей теоремы.

Теорема 2. *Число* BU*-концов гордиева графа G равно единице.*

Завершается первый параграф замечанием о применении развитого подхода к вопросам асимптотического поведения гордиевых графов других преобразований узлов.

Второй параграф посвящён изложению наброска элементарного доказательства теоремы Марше о слабой характеризации асимптотического поведения гордиева графа G на бесконечности и комментарию о степени общности предложенного подхода.

Глава 3 посвящена анализу структурного взаимодействия узлов в контексте исследования регулярных геометрических паттернов в гордиевых графах.

Первый параграф начинается с серии вспомогательных утверждений. Сначала определяются понятия сателлитного узла и компаньона узла, после чего приводится интерпретация понятия компаньона в терминах нерасщепимости некоторого двухкомпонентного зацепления. Далее приводится доказательство томской леммы Малютина о детекции нерасщепимости двухкомпонентных зацеплений и обнаруживается естественная диаграмматическая закономерность, связанная с подграфами-звёздами гордиева графа G. Ключевым результатом первого параграфа и одним из ключевых результатов третьей главы в целом является доказательство следующей теоремы.

Теорема 3. *В гордиевом графе G для любого $n \geq 2$ и любого подграфа-звезды на $n+1$ вершине существует подграф-клика на бесконечном числе вершин, каждая вершина которого смежна с каждой вершиной данного подграфа-звезды.*

Завершается первый параграф ответом на вопрос Хирасавы – Учиды, а именно доказательством следующего ключевого для первого параграфа и третьей главы в целом утверждения.

Следствие 1. *В гордиевом комплексе $\mathcal{G}$ при $n \geq 0$ для каждого n-симплекса μ найдётся такой симплекс σ сколь угодно высокой размерности, что симплекс μ является гранью симплекса σ.*

Второй параграф посвящён изложению приведённой в доказательстве теоремы 3 конструкции на языке теории класперов Гусарова – Хабиро.

Третий параграф посвящён доказательству серии следствий теоремы 3. Начинается третий параграф с доказательства следующего ключевого для третьего параграфа и третьей главы в целом утверждения об асимптотическом поведении гордиева графа G в контексте удаления локально-конечных подграфов.

Следствие 2. *Связность гордиева графа G не нарушается при удалении любого индуцированного локально-конечного подграфа. Более того, расстояние между любыми двумя вершинами в соответствующем дополнении совпадает с исходным расстоянием между ними в гордиевом графе G.*

Ключевым результатом третьего параграфа и одним из ключевых результатов третьей главы в целом является доказательство следующего утверждения.

Следствие 3. *Геометрическая реализация гордиева комплекса $\mathcal{G}$ является $\mathbb{R}^\infty$-многообразием.*

Завершается третий параграф доказательством сформулированной в первой главе теоремы о связности «единичных окрестностей» вершин гордиева графа G.

Заключение содержит краткое резюме полученных результатов и обзор открытых вопросов настоящего направления исследований.

Благодарности

Автор выражает искреннюю благодарность своему научному руководителю Андрею Валерьевичу Малютину за экстраординарное спокойствие, доброту, эрудицию, математическую и жизненную интуицию, за геометрический взгляд на вещи, а также за готовность

помочь и поддержать в любом начинании. Автор признателен своим учителям Олегу Яновичу Виро и Семёну Сергеевичу Подкорытову, а также своему другу Васе Ионину за ценное общение и уникальные консультации. Отдельно автор благодарит Васю Ионина за детальное прочтение данной диссертации целиком и точные замечания. Автор приносит благодарность своим друзьям Илье Алексееву и Аршаку Айвазьяну за созданный контекст и перманентный стимул к исследованиям. Автор благодарит своих друзей Витю Лаврухина, Рому Михайлова, Севу и Соню Сударевых и Симону Курапову, а также весь коллектив Студенческого семинара по маломерной топологии за поддержание исследовательской атмосферы. Отдельно автор выражает благодарность Симоне Кураповой за обсуждение и инспекцию иллюстраций. Автор благодарен своей семье за чуткую заботу и опору.

СПИСОК ПУБЛИКАЦИЙ АВТОРА ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

Основные результаты диссертации опубликованы в следующих 4 работах автора в рецензируемых научных изданиях. В диссертацию включены только результаты, принадлежащие автору.

1. Ю. С. Белоусов, М. В. Карев, А. В. Малютин, А. Ю. Миллер, Е. А. Фоминых. Лернейские узлы и вложенные перестройки // Алгебра и анализ. – 2021. – Т. 33. – № 1. – С. 30–66.

2. A. Yu. Miller. The Gordian graph is one-ended // Записки научных семинаров ПОМИ. – 2025. – Т. 549. – С. 138–145.

3. A. Yu. Miller, A. V. Malyutin, I. S. Alekseev. Infinite midway cliques in the Gordian graph // Записки научных семинаров ПОМИ. – 2025. – Т. 549. – С. 146–160.

4. А. Ю. Миллер. Об одном примечательном паттерне в гордиевом графе // Записки научных семинаров ПОМИ. – 2026. – Т. 551. – С. 84–89.

Подписано в печать 01.10.2026 г.

Тираж 80 экз.

Отпечатано в типографии