САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
МАТЕМАТИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА
ИМ. В. А. СТЕКЛОВА РАН

На правах рукописи

МИЛЛЕР АЛЕКСЕЙ ЮРЬЕВИЧ

ГЕОМЕТРИЯ ГОРДИЕВЫХ ГРАФОВ

Специальность 1.1.3 — Геометрия и топология

Диссертация на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
доктор физ.-мат. наук, профессор РАН
Малютин А. В.

Санкт-Петербург — 2026

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение **4**

1 Внешне доминирующие и связные семейства зацеплений **30**
1.1 Внешне доминирующие семейства 30
1.1.1 Универсальная диаграмма Маканина 31
1.1.2 Семейство двухкомпонентных брунновых зацеплений 32
1.1.3 Приложение к проблеме лернейских узлов 33
1.2 Связные семейства 35

2 Асимптотическое поведение гордиевых графов **41**
2.1 Асимптотика в смысле Жиса – Гамбаду 41
2.1.1 Трюк Виро – Монтесиноса 42
2.1.2 Гордиев граф имеет один конец 43
2.1.3 Общий случай свободных локальных преобразований 49
2.2 Асимптотика в смысле Марше 50

3 Геометрические паттерны в гордиевых графах **53**
3.1 Ответ на вопрос Хирасавы – Учиды 53
3.1.1 Компаньоны: нерасщепимость и несжимаемость . . . 54
3.1.2 Томская лемма о торе с дырой 56
3.1.3 Лемма о специальной диаграмме 58
3.1.4 Доказательство основной теоремы 62
3.2 Взгляд на конструкцию с точки зрения теории класперов Гусарова – Хабиро 74
3.3 Следствия основной теоремы 78
3.3.1 Асимптотическое следствие о локально-конечных подграфах 79
3.3.2 Гордиев комплекс является $\mathbb{R}^\infty$-многообразием 80
3.3.3 Связность единичных окрестностей 81

4 Заключение **82**
4.1 Основные результаты диссертации 82
4.2 Открытые вопросы 83
4.2.1 Внешне доминирующие и связные семейства зацеплений 83
4.2.2 Геометрические паттерны в больших графах 84
4.2.3 Гомотопический тип гордиевых комплексов 85

Список литературы **86**

A Итеративное построение гропа **92**

ВВЕДЕНИЕ

> Если есть «странные объекты», то должны быть и «странные факты».
>
> — *Вадим Руднев*

Настоящая диссертация относится к маломерной топологии, а конкретнее — к геометрической теории узлов и зацеплений. Основными объектами исследования настоящей диссертации выступают гордиевы графы различных преобразований узлов и зацеплений, исследуются локальные и глобальные геометрические свойства этих графов. В рамках диссертации дан ответ на вопрос Жиса – Гамбаду об асимптотическом поведении гордиева графа переключения перекрёстков, положительно разрешён вопрос Хирасавы – Учиды об одном регулярном геометрическом паттерне в гордиевом комплексе узлов, а также установлено, что геометрическая реализация гордиева комплекса узлов является $\mathbb{R}^\infty$-многообразием. Содержание следующего параграфа составляет развёрнутый комментарий об истории и контексте исследований в данном направлении.

Актуальность темы исследования и степень её разработанности

Настоящий параграф посвящён изложению достижений в области исследования геометрии гордиевых графов. Общий исторический контекст, приведённый в первых двух подпараграфах, сменяется подробным описанием предпосылок и результатов каждой из глав настоящей диссертации.

Классификации и структуры в теории узлов

Существенная доля исследований в рамках классической теории узлов опирается на базовые классификационные результаты. Одним из первых продвижений в вопросе классификации узлов можно считать теорему Шуберта о разложении на простые [57] от 1949 года, согласно которой каждый нетривиальный узел либо является простым, либо раскладыва-

ется в связную сумму конечного числа простых узлов, причём единственным образом. Данный результат позволяет провести предварительную грубую классификацию, разделить множество всех нетривиальных узлов на две крупные категории простых узлов и составных узлов. Другим замечательным результатом подобного сорта, уточняющим предыдущий, является классификационная теорема Тёрстона [61], согласно которой каждый простой узел является либо торическим, либо сателлитным, либо гиперболическим. Помимо апелляций к подобным глобальным классификациям, в процессе исследований нередко возникает потребность в более тонком разграничении, в распределении узлов на классы согласно некоторым выделенным, актуальным в заданном контексте общим признакам. Данную роль, к примеру, играет известный ещё с XIX века стратификационный подход к восприятию множества всех узлов, согласно которому узлы распределяются на классы в соответствии со значением выделенной меры сложности, такой как число перекрёстков, число развязывания, число мостов, число косы, число дуг, род узла, туннельное число и другие. К подобным подходам можно отнести и объединение узлов в кластеры в соответствии с наличием у них некоторого выделенного общего свойства. Примерами таких объединений служат упомянутые выше торические, сателлитные и гиперболические узлы, а также альтернированные, адекватные, итерированные торические, ленточные, срезанные, расслоенные, рациональные узлы, узлы Монтесиноса, узлы Берджа и другие.

Упомянутые выше классификационные подходы к восприятию множества всех узлов плодотворны, но несколько «редукционны», сконцентрированы на исследовании внутренней структуры каждого отдельного узла. Подобное выявление наборов общих свойств позволяет объединять узлы в группы по косвенным признакам, но оставляет за рамками вопрос о наличии их прямого геометрического взаимодействия.

Восполнить данный пробел призваны задачи оснащения множества всех узлов глобальной структурой, учитывающей подобные взаимодействия. Ранние результаты о глобальных структурах на множестве всех узлов носят алгебраический характер. В их числе тесно связанная с теоремой Шуберта структура моноида на множестве всех (ориентированных) узлов, а также структура группы на классах их конкордантности. Однако данные

структуры, безусловно представляющие отдельный существенный интерес, ограничены в детекции взаимодействий между узлами всё той же операцией связного суммирования. При переходе от данной операции к более сложным геометрическим преобразованиям узлов, таким как переключение перекрёстка, ленточная хирургия, Δ-движение и другие, на множестве всех узлов естественным образом возникают новые богатые геометрические структуры, называемые гордиевыми графами. Гордиевы графы преобразований узлов и зацеплений являются центральным объектом исследования настоящей диссертации, а следующий подпараграф посвящён раскрытию данного понятия и изложению краткого исторического контекста соответствующих исследований.

Гордиев подход

Настоящий параграф служит кратким введением в теорию преобразований узлов и зацеплений и акцентирует внимание на восприятии преобразований сквозь призму соответствующих им гордиевых графов. Изложение носит обзорный характер, все формальные определения и детали, используемые в последующих рассуждениях, приведены в параграфе «Основные определения, обозначения и соглашения».

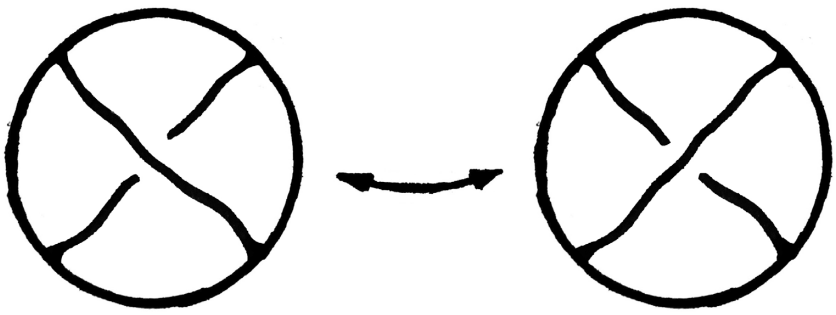


Рисунок 1 – Переключение перекрёстка.

Одним из ключевых преобразований узлов и зацеплений является преобразование переключения перекрёстка. Суть этого преобразования проиллюстрирована на Рис. 1. Проще всего определить данное преобразование диаграмматически: будем говорить, что зацепление L_1 получается из зацепления L_2 однократным применением преобразования переключения перекрёстка, если данная пара зацеплений может быть представлена

парой диаграмм, отличающихся только типом одного из перекрёстков. Судя по всему, преобразование переключения перекрёстка является одним из самых ранних задокументированных преобразований: оно встречается в работе [60] Питера Г. Тейта от 1876 года в связи с описанием понятия «узловатости» («beknottedness»). В данной работе Тейт предвосхищает понятие числа развязывания узла — минимального количества последовательных применений преобразования переключения перекрёстка, требуемого для преобразования заданного узла в тривиальный. Аналог данного понятия, называемый «степенью узловатости» («amount of beknottedness»), был введён Тейтом в надежде сконструировать эффективный инвариант, позволяющий быстро устанавливать неизотопность заданной пары узлов. Однако простого пути к вычислению данного инварианта не представляется возможным обнаружить и до сих пор. Введённые Тейтом термины не прижились, а переключение перекрёстка до 1980-х носило имя «операции развязывания» («unknotting operation»). Примечателен относящийся к той эпохе результат Хильмара Вендта [62] от 1937 года, устанавливающий нижнюю оценку числа развязывания и предвосхищающий трюк Виро – Монтесиноса (подробнее о трюке смотри подпараграф 2.1.1). В той же работе, по всей видимости, впервые было использовано слово «гордиев» («gordische»). С начала восьмидесятых годов XX века преобразование переключения перекрёстка привлекало существенное внимание исследователей. В частности, ряд фундаментальных результатов был получен такими классиками теории узлов, как Мартин Шарльманн [56], В. Б. Раймонд Ликориш [39], Стивен А. Блейлер [12], Ясутака Наканиши [50], Тайдзо Канэнобу и Хитоши Мураками [34]. Отдельного упоминания заслуживает результат Питера Б. Кронхаймера и Томаша С. Мровки, подтвердивших гипотезу Милнора о числе развязывания торического узла [38]. Дополняя понятие числа развязывания, в работах того времени всё чаще возникает понятие гордиева расстояния. Гордиевым расстоянием $d_G(L_1, L_2)$ между двумя зацеплениями L_1 и L_2 называется минимальное количество последовательных применений преобразования переключения перекрёстка, требуемое для преобразования одного из данных зацеплений в другое.

В то же время вводится и начинает активно исследоваться ряд других значимых преобразований узлов и зацеплений, таких как H(2)-дви-

жение, Δ-движение, #-движение и n-движение. Оформляется и естественный способ восприятия преобразований, апеллирующий к понятию гордиева графа. Гордиевым графом фиксированного преобразования зацеплений на фиксированном множестве зацеплений называется такой граф, вершины которого находятся во взаимно однозначном соответствии с объемлемоизотопическими классами всех зацеплений из данного множества, а ребро между двумя вершинами проводится тогда и только тогда, когда соответствующие зацепления могут быть преобразованы друг в друга однократным применением данного преобразования, смотри Рис. 2.

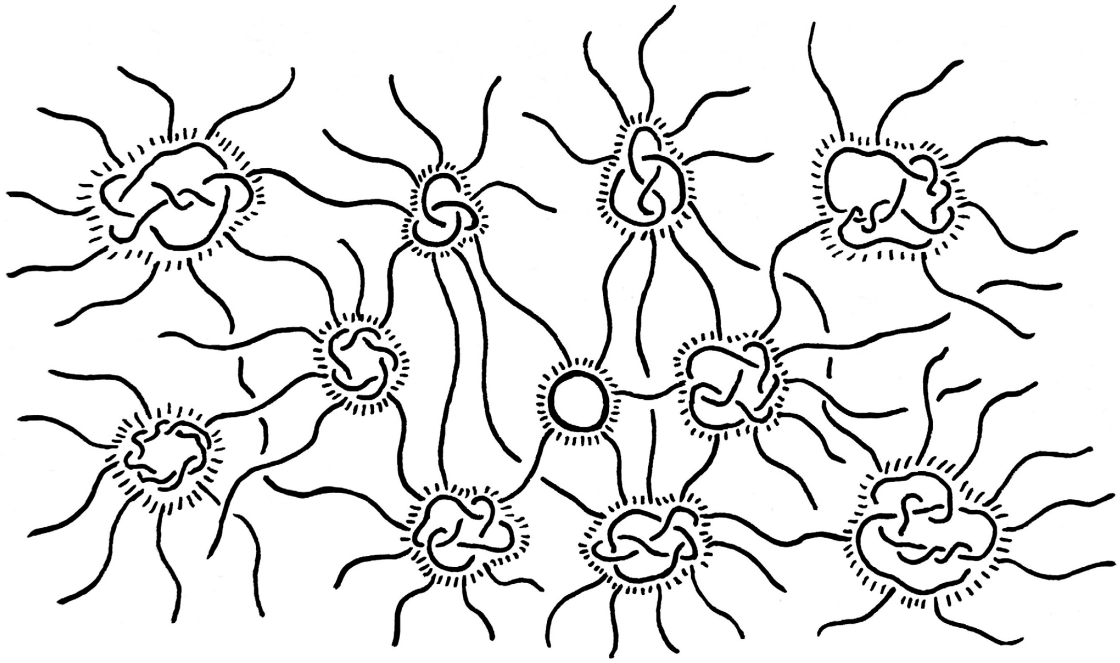


Рисунок 2 – Гордиев граф преобразования переключения перекрёстка.

Типичный гордиев граф имеет насыщенную структуру, в чём можно убедиться на примере гордиева графа преобразования переключения перекрёстка. Каждая из счётного числа его вершин обладает счётной валентностью, а диаметр в метрике кратчайшего пути (согласно, к примеру, результату Вендта) бесконечен.

Порой принципиально различные на первый взгляд преобразования определяют один и тот же гордиев граф, что задаёт естественную эквивалентность преобразований, а также смещает исходный исторический акцент с исследования самих преобразований на исследование их гордиевых графов. К примеру, 2-движение в этом смысле оказывается эквивалентным переключению перекрёстка, а H(2)-движение — ленточной хирургии,

смотри Рис. 3.

Завершая презентацию гордиева подхода, обозначим его влияние на современную маломерную топологию. Идея наделения совокупности маломерных объектов фиксированного типа глобальной структурой графа за последнее десятилетие была успешно воплощена в таких конструкциях, как большой граф Дена [22], большой граф Жиса [59], большой граф Ливингстона [40], а также большой граф тета-кривых [33].

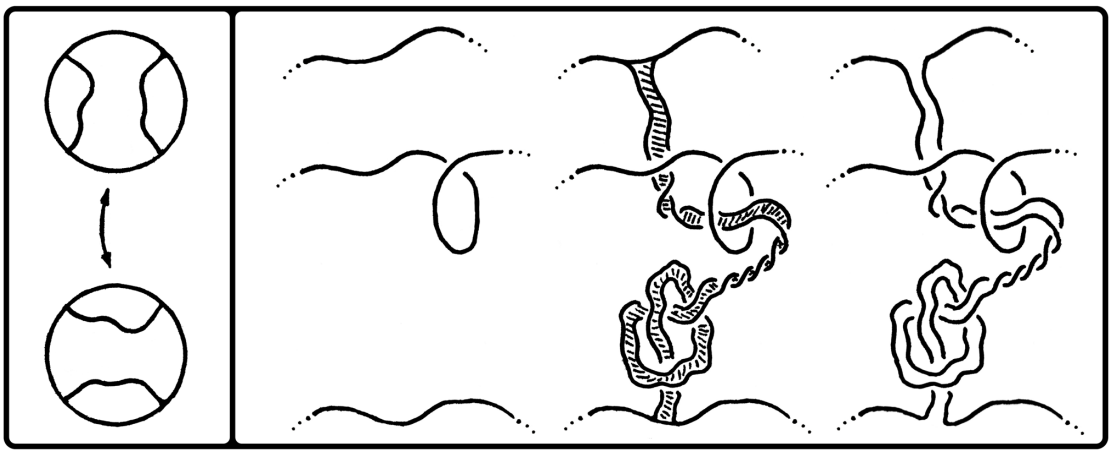


Рисунок 3 – Ленточная хирургия и H(2)-движение.

Целью следующего подпараграфа является изложение контекста исследований локальных геометрических свойств гордиевых графов преобразований узлов и зацеплений. Руководствуясь соображениями краткости и обзорным характером изложения, далее, исключительно в рамках введения, будем отождествлять вершины гордиевых графов и соответствующие им зацепления, используя такие естественные выражения, как «окрестность данного узла в данном гордиевом графе».

Внешне доминирующие и связные семейства зацеплений

Удивительный результат Мартина Шарльманна [56] от 1985 года, устанавливающий простоту узлов с числом развязывания, равным единице, допускает естественную интерпретацию в терминах структурных элементов гордиева графа переключения перекрёстков. В самом деле, согласно теореме Шарльманна, единичная окрестность тривиального узла в данном графе состоит исключительно из простых узлов. Давая первое представление о нетривиальной организации локальных структур гордиевых графов

преобразований зацеплений, данный результат знаменует начало нового исследовательского направления. Действительно, полученная интерпретация немедленно наталкивает на серию естественных вопросов: какими ещё структурными свойствами обладает единичная окрестность тривиального узла в данном гордиевом графе? Насколько чувствительны эти свойства по отношению к выбору конкретного типа преобразования? Что вообще можно сказать об устройстве единичной окрестности произвольного узла в гордиевом графе фиксированного преобразования? Среди наиболее ярких ответов на поставленные вопросы отметим следующую тройку. Неожиданный, но далеко не единственный, ответ на первый вопрос даёт результат Хиродзуми Фудзии о реализации произвольного многочлена Александера узлом с числом развязывания, равным единице, туннельным числом, равным единице, и числом мостов, равным трём, смотри работу [16] (данный результат уточняет более раннюю теорему Хисаки Кондо, приведённую в работе [37]). Границы второго вопроса частично очерчиваются результатом Такудзи Накамуры и Ясутаки Наканиши о существовании бесконечного числа составных узлов в единичной окрестности тривиального узла в гордиевом графе #-движения, смотри работу [49]. Одним из впечатляющих ответов на третий вопрос выступает результат Райана Блэра, Марион Кампизи, Джесси Джонсона, Скотта А. Тейлора и Мэгги Томовой о том, что в единичной окрестности произвольного узла в гордиевом графе переключения перекрёстков содержится узел со сколь угодно большим числом мостов и сколь угодно большим мостовым расстоянием, смотри работу [11] (подробнее о данном результате смотри также замечание 1.2).

Один из основных результатов настоящей диссертации даёт свой ответ на третий из предложенных вопросов и относится к описанию свойств единичной окрестности произвольного узла в гордиевом графе ленточных хирургий на множестве всех зацеплений. Развитый Геннадием Маканиным в работе [2] алгебраический аппарат унарных кос и результирующая теорема о представлении узла в виде замыкания унарной косы позволяют установить, что любой узел может быть превращён в двухкомпонентное брунново зацепление с помощью однократной ленточной хирургии (смотри теорему 1). Данный результат приобретает геометрическую окраску, будучи изложенным в терминах так называемой «внешней доминации». Классиче-

ская для теории графов концепция доминирующего множества (а точнее, красно-синего доминирующего множества, смотри работы [20] и [3]) может быть апроприирована в контексте исследования геометрии гордиевых графов следующим образом. Будем говорить, что одно семейство зацеплений внешне доминирует над другим семейством зацеплений в рамках заданного гордиева графа некоторого преобразования зацеплений, если для любой вершины этого графа, соответствующей зацеплению из второго семейства, найдётся смежная с ней вершина, соответствующая зацеплению из первого семейства. На предложенном языке полученный результат может быть сформулирован следующим образом: семейство двухкомпонентных брунновых зацеплений внешне доминирует над семейством всех узлов в рамках гордиева графа ленточных хирургий на множестве всех зацеплений.

Исходная формулировка данного результата возникла в ходе исследований, связанных с гипотезой о превалировании гиперболических узлов. Широко известная и косвенно подкреплённая вычислениями гипотеза превалирования гиперболических узлов утверждает, что доля гиперболических узлов среди простых узлов с n и менее перекрёстками стремится к единице при росте n (смотри работы [4] и [30]). В рамках программы по опровержению данной гипотезы, Андреем Малютиным в работе [41] было введено понятие вполне лернейского узла (существенно ограничительное и даже в некотором смысле контринтуитивное), а также установлено, что предположение о превалировании гиперболических узлов имплицирует непустоту множества вполне лернейских узлов. Опровержение гипотезы превалирования гиперболических узлов было в конечном итоге предложено Юрием Белоусовым и Андреем Малютиным в работе [10] с использованием иного подхода, а вопрос о пустоте множества вполне лернейских узлов, положивший начало отдельному исследовательскому направлению, до сих пор остаётся открытым. Подтверждение гипотезы Малютина о пустоте другого множества узлов лернейского типа, а именно множества ультралернейских узлов, было получено автором в работе [9] в качестве следствия результата о внешней доминации двухкомпонентных брунновых зацеплений. Подробнее о проблеме лернейских узлов смотри подпараграф 1.1.3.

В классической теории графов понятие доминирующего множества нередко оснащается дополнительными естественными требованиями — на-

пример, требованием связности. Развивая аналогию, будем говорить, что семейство зацеплений связно в рамках заданного гордиева графа некоторого преобразования зацеплений, если соответствующее этому семейству зацеплений множество вершин в данном графе индуцирует связный подграф. В рамках настоящей диссертации установлено, что семейство брунновых двухкомпонентных зацеплений не является связным в рамках гордиева графа ленточных хирургий на множестве всех зацеплений, однако является связным в рамках гордиева графа переключения перекрёстков на том же множестве. При этом данное семейство не может внешне доминировать над семейством всех узлов в рамках гордиева графа переключения перекрёстков на множестве всех зацеплений в силу того, что переключение перекрёстка не меняет число компонент зацепления. Кроме того, в качестве немедленного следствия одного из основных результатов диссертации (а именно теоремы 3) был получен результат о связности единичных окрестностей вершин гордиева графа переключения перекрёстков на множестве всех узлов (смотри теорему 1.1). Данный результат схож с результатом Хоффмана и Уолш о связности единичной окрестности трёхмерной сферы в большом графе Дена, смотри работу [22]. Подробнее о данной связи смотри также замечание 1.3.

Асимптотическое поведение гордиевых графов

Фундаментальная работа Этьена Жиса и Жана-Марка Гамбаду [17] от 2005 года положила начало новому направлению исследований геометрии гордиевых графов, ориентированному на анализ их глобального геометрического устройства. Ключевой результат работы Жиса и Гамбаду подчёркивает «внушительные масштабы» гордиева графа переключения перекрёстков: оказывается, что данный граф допускает квазиизометрическое вложение целочисленной решётки $\mathbb{Z}^d$ для любого $d \geq 1$. Этот результат послужил отправной точкой для целого ряда работ о глобальном устройстве гордиевых графов, среди которых отметим следующую четвёрку. Станислав Ябука, Бэйбэй Лю и Эллисон Х. Мур в работе [32] обобщают результат Жиса и Гамбаду, устанавливая отсутствие гиперболичности по Громову для гордиева графа $\mathrm{H}(m)$-движения при каждом $m \geq 1$ (кроме того, в данной работе содержится смежный результат об устройстве гордиева

графа переключения перекрёстков: для любого $n \geq 1$ найдётся узел, находящийся на расстоянии по меньшей мере n от каждого торического узла). Другое обобщение результата Жиса и Гамбаду, представленное Сумико Хориучи и Ёсиюки Оямой, устанавливает существование изометрического вложения двумерной целочисленной решётки $\mathbb{Z}^2$ в гордиев граф C_{2m}-движения при каждом $m \geq 1$, смотри работу [26]. Себастиан Баадер и Александра Кючукова в работе [8] вводят метрическую фильтрацию гордиева графа переключения перекрёстков, подтверждая гипотезу о меридиональном ранге для широкого класса узлов (задача 1.11 списка Кёрби [36]). Наконец, результат Кадзухиро Итихары и Ин Дэ Джонга посвящён «релятивизации» понятия гордиева графа и устанавливает гиперболичность по Громову относительного (∇, Δ)-гордиева графа, ассоциированного с многочленом Конвея, смотри работу [31].

Помимо упомянутого результата о решётках, работа Жиса и Гамбаду содержит серию вопросов о глобальном геометрическом и асимптотическом устройстве гордиева графа переключения перекрёстков. Один из основных результатов настоящей диссертации состоит в ответе на третий вопрос из данного списка [17, p. 547]. Прежде чем сформулировать этот вопрос, введём необходимые определения, а именно будем называть числом BU-концов графа (имеющего не более чем счётное число вершин и снабжённого метрикой кратчайшего пути) супремум (конечный или бесконечный) количества неограниченных компонент связности дополнения ограниченного подмножества вершин данного графа, где супремум берётся по всем ограниченным подмножествам вершин данного графа (смотри определение в параграфе 2.1 или в параграфе «Основные определения, обозначения и соглашения»). Данное определение представляет классическую идею «числа концов», предложенную в рамках самого вопроса Жисом и Гамбаду в оригинальной работе, а также широко встречающуюся в литературе, смотри, например, работу [43].

Вопрос Жиса – Гамбаду. Чему равно число BU-концов гордиева графа переключения перекрёстков на множестве всех узлов?

Гомологическая оценка гордиева расстояния, основанная на трюке Виро – Монтесиноса о двулистном разветвлённом накрытии трёхмерной

сферы с ветвлением в узле, а также ряд явных геометрических техник позволяют дать ответ на этот вопрос: данный граф имеет только один конец (смотри теорему 2). Доказательству данного результата посвящена вторая глава настоящей диссертации. Предложенный подход позволяет получать и более общие результаты в направлении подсчёта числа концов гордиевых графов преобразований узлов. Подробнее о результатах автора в соответствующем направлении смотри подпараграф 2.1.3.

Ответ на первый вопрос из списка Жиса – Гамбаду, вопрос о существовании квазиизометрического вложения бесконечного регулярного дерева в гордиев граф переключения перекрёстков, был получен Жульеном Марше в работе [42]. Развитые в рамках работы [42] техники позволили Марше вывести в качестве следствия некоторую слабую характеризацию асимптотического поведения гордиева графа переключения перекрёстков на бесконечности. Марше установил, что дополнение любого конечного множества вершин в данном графе является связным. В рамках настоящей диссертации представлено элементарное доказательство результата Марше, допускающее широкое обобщение. Подробнее об асимптотике в смысле Марше смотри параграф 2.2.

Асимптотическое следствие 2 теоремы 3 также можно отнести к разряду результатов настоящей диссертации, посвящённых описанию глобального геометрического устройства гордиева графа переключения перекрёстков. Согласно этому следствию, дополнение любого индуцированного локально-конечного подграфа в данном графе является связным. Именно формулировка следствия 2, исходно выдвинутая Малютиным в качестве гипотезы, послужила драйвером исследований, контекст которых изложен в следующем подпараграфе.

Геометрические паттерны в гордиевых графах

В 2002 году пионерами гордиева подхода Миками Хирасавой и Ёсиаки Учидой в работе [21] было введено понятие гордиева комплекса $\mathcal{G}$. Гордиевым комплексом $\mathcal{G}$ называется такой симплициальный комплекс, вершины которого находятся во взаимно однозначном соответствии с объемлемо-изотопическими классами всех узлов, а набор из $n+1$ вершины образует n-мерный симплекс тогда и только тогда, когда все попарные гор-

диевы расстояния между узлами, отвечающими вершинам данного набора, равны единице. Иными словами, данный комплекс является кликовым комплексом (комплексом Вьеториса – Рипса) гордиева графа переключения перекрёстков. В этой же работе Хирасавой и Учидой была обнаружена следующая закономерность: для каждого ребра, то есть 1-симплекса, в гордиевом комплексе $\mathcal{G}$ существует симплекс сколь угодно высокой размерности, содержащий данное ребро. В контексте полученных результатов, Хирасава и Учида сформулировали программу дальнейших исследований, содержащую следующий вопрос [21, Problem 2].

Вопрос Хирасавы – Учиды. Верно ли, что в гордиевом комплексе $\mathcal{G}$ при $n \geq 0$ для каждого n-симплекса μ найдётся такой симплекс σ сколь угодно высокой размерности, что симплекс μ является гранью симплекса σ?

За последующие два десятилетия этот вопрос получил широкое освещение. В первую очередь речь идёт о крупном корпусе работ, посвящённых частичному решению аналогичного вопроса для комплексов, связанных с другими классическими преобразованиями узлов. Так, аналог вопроса Хирасавы – Учиды в случае $n = 0$ был положительно разрешён в 2006 году для C_k-движений Ёсиюки Оямой в работе [52], в 2009 году для пасс-движения Ясутакой Наканиши и Ёсиюки Оямой в работе [51], в 2017 году для H(m)-движений Каем Чжаном, Чжицином Яном и Фэнчунем Лэем в работе [65], в 2018 году для $\overline{\#}$-движения Каем Чжаном и Чжицином Яном в работе [63], в 2019 году для k-движений с чётными k Каем Чжаном и Чжицином Яном в работе [64], в 2020 году для смены перекрёстков в области Амрендрой Гиллом, Мадети Прабхакаром и Андреем Весниным в работе [18] и в 2023 году для 4-движения Данишем Али и соавторами в работе [6] (независимо от более общего результата работы [64]).

Ряд результатов схожей природы был получен и в рамках исследования гордиевых комплексов виртуальных узлов. Так, аналог вопроса Хирасавы – Учиды для виртуальных узлов в случае $n = 0$ был положительно разрешён в 2012 году для v-движения Сумико Хориучи, Касуми Комурой, Ёсиюки Оямой и Масафуми Симодзавой в работе [24], в 2013 году для запрещенных движений Сумико Хориучи и Ёсиюки Оямой в работе [27] и

в 2020 году для сдвига дуги Амрендрой Гиллом, Мадети Прабхакаром и Андреем Весниным в работе [18].

С другой стороны, для Δ-движения и #-движения аналог вопроса Хирасавы – Учиды оказался вырожденным: как было показано Окадой [53] и Мураками [48], соответствующие гордиевы комплексы не содержат симплексов размерности выше единицы.

Помимо ключевой для данной области исследований работы Хирасавы и Учиды, влияние которой подчёркнуто приведённым выше корпусом результатов, не менее важную направляющую роль в рамках имплицитной программы по поиску так называемых регулярных геометрических паттернов в гордиевых графах преобразований узлов сыграла и работа Себастиана Баадера [7] от 2006 года. Согласно основному результату данной работы, для любого пути из двух рёбер в гордиевом графе переключения перекрёстков найдётся бесконечное множество вершин, каждая из которых смежна и с начальной, и с конечной вершинами этого пути. Иными словами, пересечение единичных окрестностей двух произвольных узлов, находящихся друг от друга на расстоянии два, состоит из бесконечного числа вершин. Среди наиболее ярких результатов в направлении поиска паттернов такого сорта можно отметить следующую пару. Сумико Хориучи и Ёсиюки Ояма в работе [25] приводят обобщение результата Баадера в двух направлениях: переключение перекрёстка заменяется C_k-движением при любом $k \geq 3$, а единичные окрестности заменяются окрестностями произвольных радиусов (данное наблюдение обобщает также и более ранний результат Хориучи для Δ-движения, смотри работу [23]). Теми же авторами в работе [28] предложен ещё один аналог результата Баадера, дополненный контролем за значениями инвариантов Васильева – Гусарова узлов из пересечения соответствующих окрестностей.

Один из основных результатов настоящей диссертации объединяет и обобщает результаты Хирасавы, Учиды и Баадера. Развитые геометрические техники, которые будут описаны и прокомментированы далее, позволяют установить, что для каждого конечного подграфа-звезды в гордиевом графе переключения перекрёстков существует бесконечная клика, каждая вершина которой смежна с каждой вершиной данного подграфа-звезды (смотри теорему 3). Доказательство приведённого утверждения разбива-

ется на два этапа: построение серии узлов-кандидатов в вершины требуемой клики и проверка бесконечности построенной серии. Первый этап содержит серию диаграммматических построений, подробная расшифровка которых на языке теории класперов Гусарова – Хабиро приведена в виде отдельного комментария, смотри параграф 3.2. Второй этап опирается на интерпретацию понятия компаньона узла в терминах нерасщепимости некоторого двухкомпонентного зацепления и итеративное применение томской леммы Малютина о нерасщепимости двухкомпонентных зацеплений.

Данный результат немедленно влечёт положительный ответ на вопрос Хирасавы – Учиды и упомянутое в предыдущем подпараграфе асимптотическое следствие (смотри следствие 2). Более того, теорема 3 раскрывает локальное топологическое устройство гордиева комплекса $\mathcal{G}$ в целом. Комбинация теоремы 3 и стандартных техник, развитых в работе [55], позволяет установить, что геометрическая реализация гордиева комплекса $\mathcal{G}$ является $\mathbb{R}^\infty$-многообразием. Подробнее о данном следствии смотри подпараграф 3.3.2.

Цель и задачи диссертации

Целью диссертации является ответ на вопрос Хирасавы – Учиды о гордиевом комплексе узлов $\mathcal{G}$ и выведение следствия о структуре $\mathbb{R}^\infty$-многообразия на геометрической реализации данного комплекса, доказательство внешней доминации семейства брунновых двухкомпонентных зацеплений над семейством всех узлов в рамках гордиева графа ленточных хирургий на множестве всех зацеплений и ответ на вопрос Жиса – Гамбаду об асимптотическом поведении гордиева графа переключения перекрёстков на множестве всех узлов.

Методы исследования

В диссертации используются методы геометрической и алгебраической топологии.

Научная новизна

Все выносимые на защиту результаты получены автором самостоятельно и являются новыми.

Теоретическая и практическая ценность

Диссертация носит теоретический характер. Полученные в диссертации результаты представляют интерес для специалистов в геометрической топологии, теории узлов и зацеплений.

Степень достоверности и апробация диссертации

Результаты диссертации докладывались автором на семинаре отдела геометрии и топологии МИАН «Геометрия, топология и математическая физика» (семинар С. П. Новикова), Петербургском геометрическом семинаре им. А. Д. Александрова (ПОМИ РАН), Петербургском топологическом семинаре им. В. А. Рохлина (ПОМИ РАН), Студенческом семинаре по маломерной топологии (Институт им. Леонарда Эйлера), а также на международных и всероссийских конференциях, в число которых входят:

1. Конференция международных математических центров мирового уровня, секция «Теория узлов», Сочи, Сириус, 2021.

2. Сибирская летняя школа-конференция «Текущие достижения в геометрии», Новосибирск, НГУ, 2021.

3. 8-я международная российско-китайская конференция по теории узлов и смежным темам, 2021.

4. Международная конференция малых научных групп, Санкт-Петербург, СПбГУ, 2022.

5. Международная конференция «Knot Theory and Applications», 2022.

6. 9-я международная летняя школа-конференция в Красновидово, Москва, 2022.

7. Международная конференция «Геометрия и топология трёхмерных многообразий», Сочи, Сириус, 2022.

8. Вторая конференция математических центров России, секция «Геометрия и топология», Москва, МГУ, 2022.

9. Международная конференция «Геометрические и алгебраические методы в теории узлов», Сочи, Сириус, 2023.

10. Третья конференция математических центров России, секция «Геометрия и топология», Майкоп, АГУ, 2023.

11. Четвёртая конференция математических центров России, Санкт-Петербург, СПбГУ – ПОМИ, 2024.

12. Международная конференция «Дни геометрии в Новосибирске», Новосибирск, ИМ СО РАН, 2024.

13. 10-я международная российско-китайская конференция по теории узлов и смежным темам, Сочи, Сириус, 2024.

14. Международная конференция «Маломерная топология 2025», Санкт-Петербург, ПОМИ РАН, 2025.

15. 12-я международная российско-китайская конференция по теории узлов и смежным вопросам, Сочи, Сириус, 2026.

Публикации

Основные результаты диссертации опубликованы в следующих четырёх работах в рецензируемых научных изданиях: [9; 44; 45; 47].

Структура и объём

Диссертация состоит из введения, трёх глав, заключения, списка литературы и приложения. Каждая глава разделена на параграфы, параграфы разделены на подпараграфы. Текст диссертации изложен на 104 страницах и содержит 41 рисунок. Список литературы включает 65 наименований.

Основные определения, обозначения и соглашения

В настоящем параграфе изложены основные определения, обозначения и соглашения, используемые в диссертации. Изложенный корпус сведений относится к основам классической геометрической топологии, теории локальных преобразований узлов и классической теории графов.

Классическая геометрическая топология

Определения классических понятий геометрической топологии, таких как объемлемая изотопность, узел, зацепление, коса, тэнгл, диаграмма зацепления, замыкание Александера косы, тор и меридионально-параллельная пара тора, торические, альтернированные и брунновы зацепления, коэффициент зацепления, линзовые пространства, связная сумма трёхмерных многообразий, двулистное разветвлённое накрытие трёхмерной сферы с ветвлением в узле, хирургия Дена трёхмерного многообразия по оснащённому зацеплению, несжимаемые поверхности в трёхмерных многообразиях и первая группа гомологий топологического пространства, смотри в монографии Рольфсена [54]. Определение понятия гропа смотри в классической работе Конанта и Тайхнера [13]. Определения понятий симплициального комплекса и его геометрической реализации, а также определения смежных понятий, в частности, понятия $\mathbb{R}^\infty$-многообразия, смотри в работе Сакаи [55]. Всюду далее изложение проводится в рамках классической теории узлов и зацеплений: под *зацеплением* (в зависимости от контекста) понимается как вложение конечного дизъюнктного объединения окружностей в трёхмерную сферу S^3, так и объемлемо-изотопический класс соответствующего вложения. Все зацепления предполагаются ручными и неориентированными (если прямо не оговорено иное). Аналогичное замечание справедливо также для тэнглов и кос.

Преобразования зацеплений и гордиевы графы

Локальные преобразования. Пусть $n \in \mathbb{N}$ и пусть A — некоторый замкнутый трёхмерный шар. Набор из n дуг в шаре A будем называть *правильно вложенным*, если дуги данного набора попарно не пересекаются, а пересечение данного набора дуг с граничной сферой шара A совпадает с множеством граничных точек данного набора дуг. Тогда пару $(A, \mathfrak{R})$, где $\mathfrak{R} \subset A$ — правильно вложенный набор из n дуг в шаре A, будем называть *n-тэнглом* и обозначать через $\mathfrak{R}^A$. Пусть $\mathfrak{R}_1, \mathfrak{R}_2 \subset A$ — пара правильно вложенных наборов из n дуг в шаре A, причём множество граничных точек набора дуг $\mathfrak{R}_1$ совпадает с множеством граничных точек набора дуг $\mathfrak{R}_2$. Тогда пару n-тэнглов $\left(\mathfrak{R}_1^A, \mathfrak{R}_2^A\right)$ будем называть *шаблоном локального преобразования* и обозначать этот шаблон через $[\mathfrak{R}_1^A, \mathfrak{R}_2^A]$.

Будем говорить, что узел K_2 получается из узла K_1 *локальным преобразованием с шаблоном* $[\mathfrak{R}_1^A, \mathfrak{R}_2^A]$, если существуют такие простые замкнутые кривые $k_1, k_2 \subset S^3$, представляющие узлы K_1 и K_2 соответственно, что для некоторого вложения $f\colon A \to S^3$ выполнены следующие условия: множество $k_1 \cap \big(S^3 \setminus \mathrm{Int} f(A)\big)$ совпадает с множеством $k_2 \cap \big(S^3 \setminus \mathrm{Int} f(A)\big)$; множество $k_1 \cap f(A)$ совпадает с множеством $f(\mathfrak{R}_1)$; множество $k_2 \cap f(A)$ совпадает с множеством $f(\mathfrak{R}_2)$. Данное определение естественным образом переносится на случай зацеплений. Всюду далее под преобразованиями узлов и зацеплений подразумеваются локальные преобразования.

Гордиевы графы. Будем называть *гордиевым графом локального преобразования с шаблоном* $[\mathfrak{R}_1^A, \mathfrak{R}_2^A]$ *на некотором множестве зацеплений* M такой граф, вершины которого находятся во взаимно однозначном соответствии с объемлемо-изотопическими классами всех зацеплений из множества M, а ребро между двумя вершинами проводится тогда и только тогда, когда соответствующие зацепления могут быть преобразованы друг в друга однократным применением локального преобразования с шаблоном $[\mathfrak{R}_1^A, \mathfrak{R}_2^A]$. Чаще всего в литературе (и всюду далее) в качестве множества M выступает либо множество всех узлов, либо множество всех зацеплений. В первом случае соответствующий граф для краткости будем называть гордиевым графом (заданного) преобразования узлов, а во втором — гордиевым графом (заданного) преобразования зацеплений.

Переключение перекрёстка и ленточная хирургия. Локальное преобразование, заданное шаблоном, изображённым на Рис. 1, будем называть преобразованием *переключения перекрёстка*, а локальное преобразование, заданное шаблоном, изображённым на Рис. 3, будем называть преобразованием H(2)*-движения*. Отметим геометрическую специфику второго преобразования, заключённую в следующем наблюдении. Обозначим через I отрезок [0,1] и будем говорить, что зацепление $L_2 \subset S^3$ получается из зацепления $L_1 \subset S^3$ с помощью *ленточной хирургии*, если существует такое вложение квадрата $\mathrm{b}\colon I \times I \to S^3$ с условием $\mathrm{b}(I \times I) \cap L_1 = \mathrm{b}(I \times \partial I)$, что зацепление L_2 объемлемо изотопно зацеплению $\big(L_1 \setminus \mathrm{b}(I \times \partial I)\big) \cup \mathrm{b}(\partial I \times I)$, смотри Рис. 3. На объемлемо-изотопические классы соответствующее определение переносится естественным образом. Оказывается справедливой следующая характеризация: два зацепления получаются друг из друга одно-

кратным применением H(2)-движения тогда и только тогда, когда они получаются друг из друга однократным применением ленточной хирургии. Далее под ленточной хирургией будем понимать локальное преобразование H(2)-движения, пользуясь при этом геометрическим аппаратом лент. Кроме того, заметим, что зацепление L_2 получается из зацепления L_1 однократным применением преобразования переключения перекрёстка тогда и только тогда, когда данная пара зацеплений может быть представлена парой диаграмм, отличающихся только типом одного из перекрёстков. Данный диаграмматический взгляд будет играть существенную роль в настоящем изложении.

Графы, расстояние и комплекс. Будем называть *гордиевым графом* G гордиев граф локального преобразования переключения перекрёстка на множестве всех узлов, *гордиевым графом зацеплений* G^L гордиев граф локального преобразования переключения перекрёстка на множестве всех зацеплений, а *графом ленточных хирургий* G_B^L гордиев граф локального преобразования H(2)-движения на множестве всех зацеплений. Заметим, что графы G, G^L и G_B^L имеют счётное число вершин, а каждая их вершина имеет счётную валентность. Графы G и G_B^L связны. *Гордиевым расстоянием* $d_G(L_1, L_2)$ между двумя зацеплениями L_1 и L_2 будем называть минимальное количество последовательных применений преобразования переключения перекрёстка, требуемое для преобразования одного из данных зацеплений в другое. Гордиево расстояние задаёт метрику на множестве (объемлемо-изотопических классов) зацеплений. *Гордиевым комплексом* $\mathcal{G}$ будем называть такой симплициальный комплекс, вершины которого находятся во взаимно однозначном соответствии с объемлемо-изотопическими классами всех узлов, а набор из $n+1$ вершины образует n-мерный симплекс тогда и только тогда, когда все попарные гордиевы расстояния между узлами, отвечающими вершинам данного набора, равны единице. Иными словами, данный комплекс является кликовым комплексом гордиева графа G.

Классическая теория графов

Всюду далее под графом подразумевается простой граф с не более чем счётным числом вершин.

Клики и графы-звёзды. *Кликой* (или полным графом) называется такой граф, в котором каждая пара различных вершин соединена ребром. *Графом-звездой на n вершинах*, где $n \geq 3$, называется связный граф на соответствующем числе вершин, в котором все вершины, кроме одной, имеют валентность 1. *Графом-звездой на двух вершинах* будем называть связный граф на двух вершинах, а *графом-звездой на одной вершине* — граф на одной вершине.

Дополнения. Для заданного графа Γ будем обозначать через $\mathrm{Vert}(\Gamma)$ множество всех вершин этого графа. Для заданного подмножества вершин $M \subset \mathrm{Vert}(\Gamma)$ будем обозначать через $\Gamma \setminus M$ такой граф, который получается из графа Γ удалением каждой вершины, входящей в множество M, и каждого ребра, инцидентного хотя бы одной вершине из множества M. Будем называть *дополнением* к подграфу F в графе Γ граф $\Gamma \setminus \mathrm{Vert}(F)$.

Индуцированные подграфы. Для подмножества вершин $N \subset \mathrm{Vert}(\Gamma)$ будем обозначать через $I(N)$ такой подграф графа Γ, вершины которого составляют множество N, а рёбрами являются в точности те рёбра графа Γ, которые инцидентны только вершинам множества N. Подграф $I(N)$ называется *подграфом, индуцированным подмножеством* N. Подграф F заданного графа Γ называется *индуцированным*, если любое ребро графа Γ, оба конца которого принадлежат подграфу F, также является ребром подграфа F. Подграф называется *локально-конечным*, если каждая его вершина имеет конечную валентность (в этом подграфе).

Расстояния. Под *расстоянием* dist_Γ между парой вершин заданного графа Γ всюду далее будет иметься в виду расстояние в метрике кратчайшего пути. Естественно, расстояние dist_G между вершинами гордиева графа G совпадает с гордиевым расстоянием d_G между соответствующими этим вершинам узлами.

Концы графов. Обозначим через $\mathfrak{U}(\Gamma)$ мощность множества неограниченных компонент связности графа Γ, а через $\mathfrak{B}(\Gamma)$ будем обозначать множество

$$\big\{V \subset \mathrm{Vert}(\Gamma) \,|\, \exists n \in \mathbb{N},\, \forall x, y \in V \colon \mathrm{dist}_\Gamma(x, y) < n\big\},$$

то есть множество всех ограниченных подмножеств множества всех вершин графа Γ. Будем называть *числом BU-концов* графа Γ и обозначать через $\mathrm{BU}(\Gamma)$ элемент множества $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$, заданный формулой

$$\mathrm{BU}(\Gamma) = \sup_{V \in \mathfrak{B}(G)} \mathfrak{U}\big(\Gamma \setminus V\big).$$

Внешняя доминация и связность семейств зацеплений

Будем говорить, что одно семейство зацеплений *внешне доминирует* над другим семейством зацеплений в рамках заданного гордиева графа некоторого преобразования зацеплений, если для любой вершины этого графа, соответствующей зацеплению из второго семейства, найдётся смежная с ней вершина, соответствующая зацеплению из первого семейства. Будем говорить, что семейство зацеплений *связно* в рамках заданного гордиева графа некоторого преобразования зацеплений, если соответствующее этому семейству зацеплений множество вершин в данном графе индуцирует связный подграф.

Основные результаты, выносимые на защиту

Основные новые научные результаты диссертации, выносимые на защиту, заключаются в следующем:

1. установлена внешняя доминация семейства всех двухкомпонентных брунновых зацеплений над семейством всех узлов в рамках графа ленточных хирургий G_B^L;

2. получен ответ на вопрос Жиса – Гамбаду, а именно установлено, что число BU-концов гордиева графа G равно единице;

3. получен ответ на вопрос Хирасавы – Учиды, а именно установлено, что в гордиевом комплексе $\mathcal{G}$ при $n \geq 0$ для каждого n-симплекса μ найдётся такой симплекс σ сколь угодно высокой размерности, что симплекс μ является гранью симплекса σ;

4. установлено, что связность гордиева графа G не нарушается при удалении любого индуцированного локально-конечного подграфа;

5. установлено, что геометрическая реализация гордиева комплекса $\mathcal{G}$ является $\mathbb{R}^\infty$-многообразием.

Содержание работы

Глава 1 посвящена развитию концепций связности и внешней доминации семейств узлов и зацеплений в контексте геометрии гордиевых графов.

Первый параграф начинается с определения внешне доминирующих семейств зацеплений и краткого комментария о контексте исследования. Продолжается первый параграф определением унарной косы и формулировкой леммы Маканина об универсальном представлении узла в виде замыкания Александера унарной косы. Ключевым результатом первого параграфа и первой главы в целом является доказательство следующей теоремы.

Теорема 1. *Семейство брунновых двухкомпонентных зацеплений внешне доминирует над семейством всех узлов в рамках графа ленточных хирургий* G_B^L.

Завершается первый параграф развёрнутым комментарием о связи полученного результата с гипотезой Малютина о пустоте множества ультралернейских узлов и доказательством соответствующего следствия.

Второй параграф начинается с определения связных семейств зацеплений, формулировки теоремы о связности «единичных окрестностей» вершин гордиева графа G (данная теорема будет доказана в главе 3) и краткого замечания о контексте исследования. Продолжается второй параграф формулировкой теоремы о связности нескольких естественных семейств зацеплений и комментарием о взаимосвязи понятия связности и понятия внешней доминации. Ключевым результатом второго параграфа является доказательство теоремы о связности семейства двухкомпонентных брунновых зацеплений в рамках графа зацеплений G^L.

Глава 2 посвящена анализу структурного взаимодействия узлов в контексте исследования асимптотического поведения гордиевых графов на бесконечности.

Первый параграф начинается с определения BU-концов графа в смысле Жиса – Гамбаду и доказательства гомологической оценки гордиева расстояния с опорой на трюк Виро – Монтесиноса о двулистном разветвлённом накрытии трёхмерной сферы с ветвлением в узле. Ключевым результатом

первого параграфа и второй главы в целом, а также ответом на вопрос Жиса – Гамбаду является доказательство следующей теоремы.

Теорема 2. *Число* BU*-концов гордиева графа* G *равно единице.*

Завершается первый параграф замечанием о применении развитого подхода к вопросам асимптотического поведения гордиевых графов других преобразований узлов.

Второй параграф посвящён изложению наброска элементарного доказательства теоремы Марше о слабой характеризации асимптотического поведения гордиева графа G на бесконечности и комментарию о степени общности предложенного подхода.

Глава 3 посвящена анализу структурного взаимодействия узлов в контексте исследования регулярных геометрических паттернов в гордиевых графах.

Первый параграф начинается с серии вспомогательных утверждений. Сначала определяются понятия сателлитного узла и компаньона узла, после чего приводится интерпретация понятия компаньона в терминах нерасщепимости некоторого двухкомпонентного зацепления. Далее приводится доказательство томской леммы Малютина о детекции нерасщепимости двухкомпонентных зацеплений и обнаруживается естественная диаграммматическая закономерность, связанная с подграфами-звёздами гордиева графа G. Ключевым результатом первого параграфа и одним из ключевых результатов третьей главы в целом является доказательство следующей теоремы.

Теорема 3. *В гордиевом графе* G *для любого* $n \geq 2$ *и любого подграфа-звезды на* $n+1$ *вершине существует подграф-клика на бесконечном числе вершин, каждая вершина которого смежна с каждой вершиной данного подграфа-звезды.*

Завершается первый параграф ответом на вопрос Хирасавы – Учиды, а именно доказательством следующего ключевого для первого параграфа и третьей главы в целом утверждения.

Следствие 1. *В гордиевом комплексе* $\mathcal{G}$ *при* $n \geq 0$ *для каждого* n*-симплекса* μ *найдётся такой симплекс* σ *сколь угодно высокой размерности, что симплекс* μ *является гранью симплекса* σ*.*

Второй параграф посвящён изложению приведённой в доказательстве теоремы 3 конструкции на языке теории класперов Гусарова – Хабиро.

Третий параграф посвящён доказательству серии следствий теоремы 3. Начинается третий параграф с доказательства следующего ключевого для третьего параграфа и третьей главы в целом утверждения об асимптотическом поведении гордиева графа G в контексте удаления локально-конечных подграфов.

Следствие 2. *Связность гордиева графа G не нарушается при удалении любого индуцированного локально-конечного подграфа. Более того, расстояние между любыми двумя вершинами в соответствующем дополнении совпадает с исходным расстоянием между ними в гордиевом графе G.*

Ключевым результатом третьего параграфа и одним из ключевых результатов третьей главы в целом является доказательство следующего утверждения.

Следствие 3. *Геометрическая реализация гордиева комплекса $\mathcal{G}$ является $\mathbb{R}^\infty$-многообразием.*

Завершается третий параграф доказательством сформулированной в первой главе теоремы о связности «единичных окрестностей» вершин гордиева графа G.

Заключение содержит краткое резюме полученных результатов и обзор открытых вопросов настоящего направления исследований.

Благодарности

Автор выражает искреннюю благодарность своему научному руководителю Андрею Валерьевичу Малютину за экстраординарное спокойствие, доброту, эрудицию, математическую и жизненную интуицию, за геометрический взгляд на вещи, а также за готовность помочь и поддержать в любом начинании. Автор признателен своим учителям Олегу Яновичу Виро и Семёну Сергеевичу Подкорытову, а также своему другу Васе Ионину за ценное общение и уникальные консультации. Отдельно автор благодарит Васю Ионина за детальное прочтение данной диссертации целиком

и точные замечания. Автор приносит благодарность своим друзьям Илье Алексееву и Аршаку Айвазьяну за созданный контекст и перманентный стимул к исследованиям. Автор благодарит своих друзей Витю Лаврухина, Рому Михайлова, Севу и Соню Сударевых и Симону Курапову, а также весь коллектив Студенческого семинара по маломерной топологии за поддержание исследовательской атмосферы. Отдельно автор выражает благодарность Симоне Кураповой за обсуждение и инспекцию иллюстраций. Автор благодарен своей семье за чуткую заботу и опору.

ГЛАВА 1 ВНЕШНЕ ДОМИНИРУЮЩИЕ И СВЯЗНЫЕ СЕМЕЙСТВА ЗАЦЕПЛЕНИЙ

Настоящая глава посвящена развитию концепций связности и внешней доминации семейств узлов и зацеплений в контексте геометрии гордиевых графов. Основными объектами исследований выступают гордиев граф G, граф ленточных хирургий G_B^L и гордиев граф зацеплений G^L. В рамках первого параграфа настоящей главы устанавливается внешняя доминация одного естественного семейства зацеплений над семейством всех узлов (теорема 1). Целью второго параграфа служит подтверждение связности некоторых естественных семейств узлов и зацеплений (теорема 1.1, теорема 1.2 и теорема 1.3). Глава снабжена серией комментариев о взаимосвязи введённых понятий друг с другом (замечание 1.4), контексте исследований (замечание 1.1, замечание 1.2, следствие 1.2 и замечание 1.3) и интерпретации полученных результатов (следствие 1.1).

1.1 Внешне доминирующие семейства

В настоящем параграфе изложена концепция внешней доминации одного семейства зацеплений над другим семейством зацеплений в рамках заданного гордиева графа некоторого преобразования зацеплений. Содержание первого (подготовительного) и второго подпараграфов составляет доказательство теоремы о внешней доминации семейства двухкомпонентных брунновых зацеплений над семейством всех узлов в рамках графа ленточных хирургий G_B^L. Завершает параграф интерпретация данного результата в терминах расстояния Хаусдорфа и замечание о связи доказанной теоремы, гипотезы о превалировании гиперболических узлов и гипотезы о пустоте множества лернейских узлов.

Будем говорить, что одно семейство зацеплений *внешне доминирует* над другим семейством зацеплений в рамках заданного гордиева графа некоторого преобразования зацеплений, если для любой вершины этого графа, соответствующей зацеплению из второго семейства, найдётся смежная с ней вершина, соответствующая зацеплению из первого семейства.

Замечание 1.1. Понятие внешне доминирующего семейства близкородственно широко распространённому в литературе понятию «red-blue dominating set» (смотри, например, работу [3]). В свою очередь, понятие «red-blue dominating set» уточняет фундаментальное в теории графов понятие «доминирующего множества» (смотри обширный обзор [20]).

Замечание 1.2. Согласно работе Блейра, Кампизи, Джонсона, Тэйлора и Томовой [11], для любого натурального числа $n \in \mathbb{N}$ семейство всех узлов с мостовым расстоянием не менее n внешне доминирует над семейством всех узлов в рамках гордиева графа G.

1.1.1 Универсальная диаграмма Маканина

Уточняя классическую теорему Александера о замыкании (смотри работу [5]), Маканин в работе [2] вводит новое универсальное представление произвольного узла в виде замыкания косы специального вида. Настоящий подпараграф содержит точную формулировку леммы Маканина и краткий комментарий о деталях её доказательства.

Для каждого натурального числа $n \in \mathbb{N}$ обозначим через $\mathfrak{B}_n$ группу кос на n нитях, а через $\mathrm{Cl}(\beta)$ обозначим зацепление, полученное в результате замыкания Александера косы $\beta \in \mathfrak{B}_n$ (определение группы кос смотри, например, в той же работе [2]).

Определение 1.1. Коса $\beta \in \mathfrak{B}_n$ называется *унарной* косой, если она реализует подстановку

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n & n+1 \\ n+1 & 1 & 2 & \dots & n-1 & n \end{pmatrix},$$

а удаление первой нити в косе β превращает её в тривиальную косу (смотри пример унарной косы на Рис. 1.1).

Лемма 1.1 (Лемма Маканина)**.** *Для любого узла $K \subset S^3$ существует такое натуральное число $n \in \mathbb{N}$, что узел K объемлемо изотопен замыканию Александера $Cl(\beta)$ некоторой унарной косы $\beta \in \mathfrak{B}_n$.*

Алгебраическое доказательство леммы 1.1, основанное на серии прямых вычислений в группах кос, смотри в работе [2, Теорема 1]. Геометри-

ческое доказательство, использующее визуальные техники и выявляющее связь между унарными косами, меандрическими диаграммами и диаграммами-потхолдерами, смотри в работе [15, Corollary 1.5].

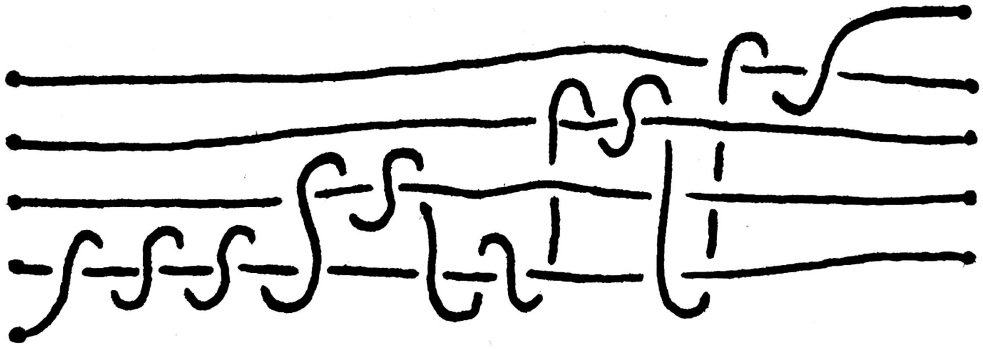


Рисунок 1.1 – Унарная коса на пяти нитях.

1.1.2 Семейство двухкомпонентных брунновых зацеплений

Настоящий подпараграф посвящён доказательству теоремы 1, согласно которой для любой вершины графа ленточных хирургий G_B^L, соответствующей узлу, найдётся смежная с ней вершина, соответствующая брунову двухкомпонентному зацеплению.

Доказательство теоремы 1. Достаточно показать, что произвольный узел допускает такую ленточную хирургию, результатом которой является двухкомпонентное брунново зацепление. Пусть K — произвольный узел в трёхмерной сфере S^3. Согласно лемме 1.1, существует такое натуральное число $n \in \mathbb{N}$, что узел K объемлемо изотопен замыканию Александера $\mathrm{Cl}(\beta)$ для некоторой унарной косы $\beta \in \mathfrak{B}_n$. Начнём со стандартной диаграммы замыкания $\mathrm{Cl}(\beta)$ и расположим на этой диаграмме ленту, как показано на Рис. 1.2. Число полных оборотов, совершаемых лентой на Рис. 1.2, равно $m + 1$, где m — число перекрёстков в косе β. Результатом ленточной хирургии замыкания $\mathrm{Cl}(\beta)$ вдоль данной ленты будет двухкомпонентное зацепление, обе компоненты которого являются тривиальными узлами. Добавленные на этапе построения ленты полные обороты обеспечивают полученному зацеплению (снабжённому произвольной ориентацией) ненулевой коэффициент зацепления, что влечёт его нетривиальность, а следовательно, брунновость. Это завершает доказательство.

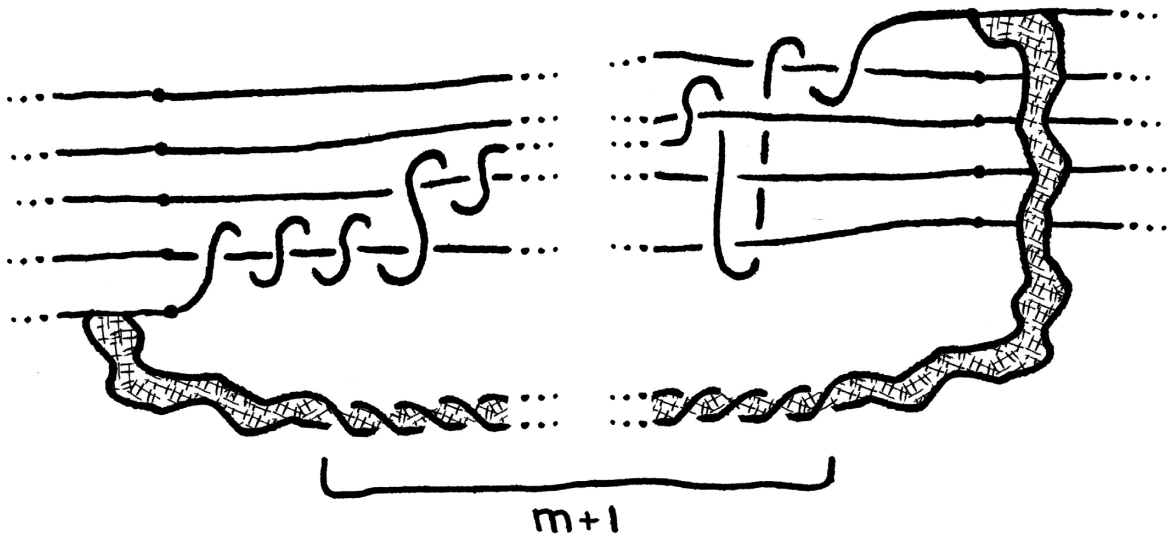


Рисунок 1.2 – Лента, хирургия по которой переводит данный узел в двухкомпонентное брунново зацепление.

□

Заметим, что если лента соединяет разные компоненты двухкомпонентного зацепления, то результат ленточной хирургии вдоль данной ленты всегда будет являться узлом. Данное замечание позволяет интерпретировать результат теоремы 1 в терминах расстояния Хаусдорфа.

Следствие 1.1. *В метрическом пространстве G_B^L расстояние Хаусдорфа между множеством вершин, соответствующих двухкомпонентным брунновым зацеплениям, и множеством вершин, соответствующих узлам, равно единице.*

1.1.3 Приложение к проблеме лернейских узлов

Формулировка теоремы 1 была предложена в ходе исследований, связанных с проблемой аддитивности числа перекрёстков узла при связном суммировании и гипотезой о превалировании гиперболических узлов. В частности, полученный результат подтверждает гипотезу Малютина о пустоте множества ультралернейских узлов. Настоящий подпараграф посвящён изложению корпуса сведений о лернейских узлах и доказательству соответствующей гипотезы с использованием двух независимых подходов.

Зацепление L будем называть *упрощением* узла K, если существует такая минимальная диаграмма узла K и такой перекрёсток в данной диаграмме, что разрешение этого перекрёстка приводит к диаграмме зацепле-

ния L. Под разрешением перекрёстка в данном контексте подразумевается удаление данного перекрёстка из диаграммы и (правильная) вклейка на его место диаграммы тривиального 2-тэнгла. Нетривиальный узел K будем называть *лернейским*, если хотя бы одно из его упрощений является связной суммой самого узла K и некоторого нетривиального зацепления (определение 2.1 связной суммы узлов обобщается на случай зацеплений естественным образом). Кроме того, будем называть нетривиальный узел K *вполне лернейским*, если каждое из его упрощений является связной суммой самого узла K и некоторого нетривиального зацепления. Выбор термина «лернейский» обусловлен тем, что лернейский узел в определённом смысле «усложняется» при попытке «упростить» его путём разрешения (разрубания) перекрёстка диаграммы; сравни со свойствами Лернейской гидры в древнегреческой мифологии (смотри, например, «Геракл» Эврипида).

Понятие лернейского узла было впервые введено в работе Малютина [41] в рамках программы по опровержению гипотезы превалирования гиперболических узлов. Данная гипотеза утверждает, что доля гиперболических узлов среди простых узлов с n и менее перекрёстками стремится к единице при росте n (узел называется простым, если он не является связной суммой никаких двух нетривиальных узлов). Согласно одному из основных результатов работы [41, Theorem 1.14], предположение о превалировании гиперболических узлов имплицирует непустоту множества вполне лернейских узлов.

Лёгкий гротеск, присущий понятию вполне лернейского узла, вывел разработку доказательства гипотезы о пустоте их множества на позицию основного плацдарма к опровержению гипотезы о превалировании гиперболических узлов. Гипотеза о превалировании гиперболических узлов позднее действительно была опровергнута Белоусовым и Малютиным в работе [10], однако вопрос существования вполне лернейских и лернейских узлов остаётся открытым.

В процессе поиска доказательства гипотезы о пустоте множества вполне лернейских узлов Малютиным и автором разрабатывались вариации понятия лернейского узла, постепенно накладывающие всё более и более ограничительные условия. Одной из таких вариаций было понятие ультра-

лернейского узла. Зацепление L будем называть *квазиупрощением* узла K, если существует такая (не обязательно минимальная) диаграмма узла K и такой перекрёсток в данной диаграмме, что разрешение этого перекрёстка приводит к диаграмме зацепления L. Нетривиальный узел K будем называть *ультралернейским*, если каждое его квазиупрощение является связной суммой самого узла K и некоторого нетривиального зацепления. Поскольку брунново зацепление не может являться связной суммой нетривиального узла и нетривиального зацепления, теорема 1 влечёт следующий результат.

Следствие 1.2. *Множество ультралернейских узлов пусто.*

Множество ультралернейских узлов на данный момент является единственным из предложенных в работе [9] множеств лернейского типа, пустота которого подтверждена. Подробнее о других множествах лернейского типа, а также о связи лернейских узлов и гипотезы об аддитивности числа перекрёстков смотри в работе [9]. Кроме того, в той же работе автором был предложен альтернативный способ доказательства пустоты множества ультралернейских узлов, основанный на следующем результате: для любой вершины графа ленточных хирургий G_B^L, соответствующей узлу, существует смежная с ней вершина, соответствующая некоторой трёхниточной обмотке данного узла (смотри работу [9, Теорема 8]). Аналогично теореме 1 данный результат относится к вопросу поиска внешне доминирующих семейств в рамках графа ленточных хирургий G_B^L.

1.2 Связные семейства

Настоящий параграф посвящён изложению концепции связности фиксированного семейства зацеплений в рамках заданного гордиева графа некоторого преобразования зацеплений. В частности, в параграфе сформулированы три теоремы о связности некоторых естественно возникающих в теории узлов семейств зацеплений, причём в теореме 1.1 речь идёт о связности в рамках гордиева графа G, в теореме 1.2 — о связности в рамках графа ленточных хирургий G_B^L, а в теореме 1.3 — о связности в рамках гордиева графа зацеплений G^L. Кроме того, параграф снабжён кратким комментарием о развитии Хоффманом и Уолш параллельной теории в рамках

исследования топологии трёхмерных многообразий.

Пусть N — это подмножество вершин некоторого графа Γ. Обозначим через $I(N)$ такой подграф графа Γ, вершины которого составляют множество N, а рёбрами являются в точности те рёбра графа Γ, которые инцидентны только вершинам множества N. Подграф $I(N)$ называется *подграфом, индуцированным подмножеством* N.

Будем говорить, что семейство зацеплений *связно* в рамках заданного гордиева графа некоторого преобразования зацеплений, если соответствующее этому семейству зацеплений множество вершин в данном графе индуцирует связный подграф.

Теорема 1.1. *Для любого узла K семейство $S_1(K)$ всех таких узлов X, что $d_G(K, X) = 1$, является связным семейством в рамках гордиева графа G.*

Доказательство теоремы 1.1 приводится в заключении главы 3 и опирается на следствие 3 теоремы 3, согласно которому геометрическая реализация гордиева комплекса $\mathcal{G}$ допускает структуру $\mathbb{R}^\infty$-многообразия.

Замечание 1.3. Понятие связного семейства естественным образом переносится в контекст большого графа хирургий Дена трёхмерных многообразий. Согласно Хоффману и Уолш, аналог теоремы 1.1 в данном контексте справедлив для семейства $S_1(S^3)$ всех замкнутых связных ориентируемых трёхмерных многообразий, получающихся хирургией Дена по узлу из трёхмерной сферы S^3, смотри работу [22, Proposition 2.1]. Вопрос связности других «единичных сфер» в большом графе хирургий Дена трёхмерных многообразий остаётся открытым.

Следующий результат о связности трёх классических семейств узлов в рамках графа ленточных хирургий G_B^L получен автором в работе [9].

Теорема 1.2. *Семейство составных узлов, семейство альтернированных узлов и семейство итерированных торических узлов являются связными в рамках графа ленточных хирургий G_B^L.*

Доказательство теоремы 1.2 подробно изложено в работе [9] и имеет конструктивный характер.

Замечание 1.4. Отдельный интерес в теории графов представляет задача поиска связных доминирующих множеств, смотри «connected dominating set» в обзоре [20, Section 6.4]. Естественно возникающий в связи с этим вопрос о связности (в соответствующем смысле) предложенного в теореме 1 внешне доминирующего семейства разрешается следующим образом. Как было замечено ранее, если лента соединяет разные компоненты двухкомпонентного зацепления, то результат ленточной хирургии вдоль данной ленты всегда будет являться узлом (то есть однокомпонентным зацеплением). Если же оба конца ленты лежат на одной компоненте (произвольно ориентированного) двухкомпонентного зацепления, причём лента находится в некогерентном расположении (так как иначе в результате ленточной хирургии вдоль неё получится трёхкомпонентное зацепление), то результат ленточной хирургии вдоль данной ленты будет иметь тот же модуль коэффициента зацепления, что имеет исходное зацепление (исходная компонента и компонента, полученная в результате ленточной хирургии, представляют один и тот же гомологический класс в дополнении оставшейся компоненты; лента реализует гомологию). Установленное влечёт несвязность семейства двухкомпонентных брунновых зацеплений в рамках графа ленточных хирургий G_B^L.

С другой стороны, теорема 1.3 устанавливает связность семейства двухкомпонентных брунновых зацеплений в рамках гордиева графа зацеплений G^L. Однако данное семейство не может внешне доминировать над семейством всех узлов в рамках гордиева графа зацеплений G^L в силу того, что переключение перекрёстка не меняет число компонент зацепления.

Теорема 1.3. *Семейство двухкомпонентных брунновых зацеплений является связным в рамках гордиева графа зацеплений G^L.*

Доказательство теоремы 1.3. Начнём с произвольной диаграммы Ω произвольного двухкомпонентного бруннова зацепления $L = K_1 \cup K_2 \subset S^3$ на плоскости $\mathbb{R}^2$, предварительно снабдив данное зацепление ориентацией произвольным образом. Выберем на плоскости $\mathbb{R}^2$ некоторый замкнутый диск D, пересекающий дуги диаграммы Ω в точности по паре простых дуг, образующих вместе с диском D диаграмму тривиального 2-тэнгла, причём одна из этих двух дуг относится к компоненте K_1, а другая — к компоненте K_2, смотри Рис. 1.3 слева. Не умаляя общности будем считать,

что дуги диаграммы данного тривиального 2-тэнгла ориентированы так, как показано на Рис. 1.3. Изменим диаграмму Ω, последовательно применив к паре дуг внутри диска D второе движение Райдемастера $m+1$ раз, где m — это число таких перекрёстков диаграммы Ω, которые образованы разными компонентами зацепления L, смотри Рис. 1.3 справа. Полученную в результате диаграмму будем обозначать через Ω_0.

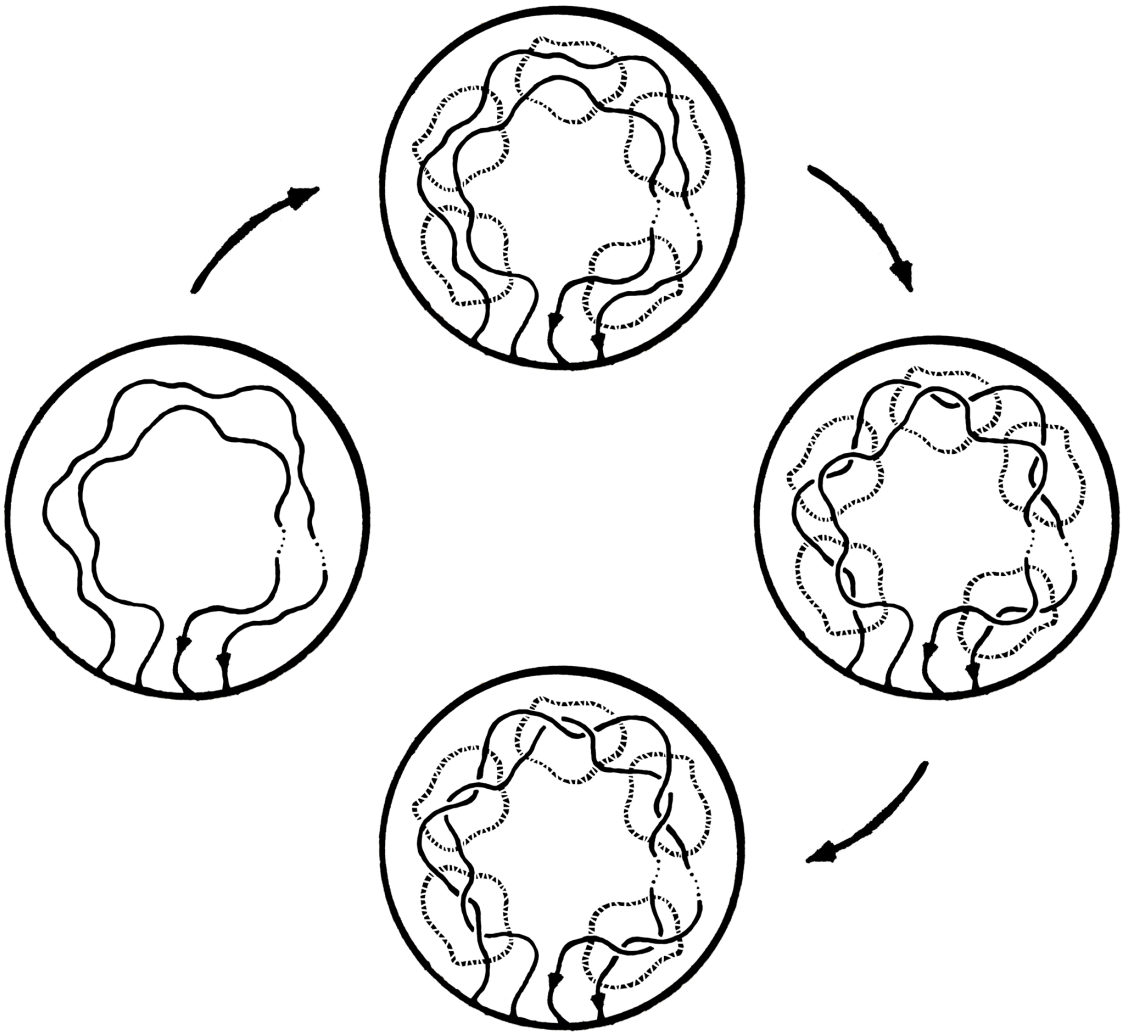


Рисунок 1.3 – Процесс перехода от диаграммы Ω к диаграмме Ω_{m+1}.

Не умаляя общности будем считать, что $\mathrm{lk}(K_1, K_2) \geq 0$. Случай отрицательного коэффициента зацепления обрабатывается аналогично. Переключим на диаграмме Ω_0 один перекрёсток внутри диска D таким образом, чтобы получившаяся в результате диаграмма Ω_1 представляла зацепление с коэффициентом зацепления, равным $\mathrm{lk}(K_1, K_2) + 1$, смотри Рис. 1.3 снизу. Переключим на диаграмме Ω_1 один перекрёсток внутри диска D таким образом, чтобы получившаяся в результате диаграмма Ω_2 представляла зацепление с коэффициентом зацепления, равным $\mathrm{lk}(K_1, K_2) + 2$, смотри

Рис. 1.3 снизу. Продолжим процесс до тех пор, пока не будет сформирована диаграмма Ω_{m+1}, представляющая зацепление с коэффициентом зацепления, равным $\mathrm{lk}(K_1, K_2) + m + 1$.

Начнём движение по диаграмме Ω_{m+1} вдоль одной из двух компонент зацепления, представленного этой диаграммой. Рано или поздно на пути обхода впервые возникнет лежащий вне диска D, образованный разными компонентами данного зацепления перекрёсток, в котором компонента нашего следования проходит «под» оставшейся компонентой. Переключим на диаграмме Ω_{m+1} данный перекрёсток, обозначив получившуюся в результате диаграмму через Ω_1°. Продолжим движение по новой диаграмме Ω_1° в соответствующем направлении вдоль соответствующей компоненты зацепления, представленного данной диаграммой. Рано или поздно на пути обхода снова возникнет лежащий вне диска D, образованный разными компонентами данного (представленного диаграммой Ω_1°) зацепления перекрёсток, в котором компонента нашего следования проходит «под» оставшейся компонентой. Переключим на диаграмме Ω_1° данный перекрёсток, обозначив получившуюся в результате диаграмму через Ω_2°. Продолжим движение по новой диаграмме Ω_2° в соответствующем направлении вдоль соответствующей компоненты зацепления, представленного данной диаграммой. Продолжим процесс до тех пор, пока не вернёмся в точку начала обхода, двигаясь по некоторой диаграмме Ω_k°. Заметим, что $k \leq m$, а коэффициент зацепления представленного диаграммой Ω_i° зацепления не может быть меньше, чем $m+1-i$, где $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$ (переключение соответствующего перекрёстка «меняет» коэффициент зацепления на единицу). Кроме того, исходя из конструкции и в силу брунновости исходного зацепления L, диаграмма Ω_k° представляет замыкание Александера некоторой косы на двух нитях с $2m + 2$ перекрёстками.

Вершины гордиева графа зацеплений G^L, соответствующие зацеплениям, представленным последовательностью диаграмм

$$\Omega_0, \quad \Omega_1, \quad \Omega_2, \quad \ldots, \quad \Omega_{m+1}, \quad \Omega_1^\circ, \quad \Omega_2^\circ, \quad \ldots, \quad \Omega_k^\circ,$$

задают путь в данном графе, соединяющий исходное зацепление L с замыканием Александера некоторой косы на двух нитях с $2m+2$ перекрёстками. Более того, каждая диаграмма последовательности представляет нетриви-

альное зацепление (в силу ненулевого коэффициента зацепления), обе компоненты которого являются тривиальными узлами (переключение перекрёстка, образованного разными компонентами зацепления, не может изменить объемлемо-изотопический класс этих компонент). Переключение произвольного перекрёстка в стандартной диаграмме замыкания Александера некоторой косы на двух нитях с $2m+2$ перекрёстками преобразует данную диаграмму в диаграмму замыкания Александера некоторой косы на двух нитях с $2m$ перекрёстками. Таким образом, в результате m последовательных переключений перекрёстков диаграмма Ω_k° может быть преобразована в диаграмму зацепления Хопфа, причём каждая промежуточная диаграмма будет представлять нетривиальное двухкомпонентное зацепление, обе компоненты которого являются тривиальными узлами. Это завершает доказательство. □

ГЛАВА 2 АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ ГОРДИЕВЫХ ГРАФОВ

Настоящая глава посвящена анализу структурного взаимодействия узлов в контексте исследования асимптотического поведения гордиевых графов на бесконечности. Основным объектом исследования выступает гордиев граф G. В рамках первого параграфа настоящей главы даётся ответ на вопрос Жиса – Гамбаду о числе концов гордиева графа G (теорема 2). Целью второго параграфа служит изложение элементарного доказательства теоремы Марше о слабой характеризации асимптотического поведения гордиева графа G на бесконечности (замечание 2.3). Глава снабжена развёрнутым комментарием о смежных результатах автора в данном направлении (подпараграф 2.1.3).

2.1 Асимптотика в смысле Жиса – Гамбаду

В настоящем параграфе изложена концепция оценки асимптотического поведения графа на бесконечности путём установления числа BU-концов этого графа. Содержание первого (подготовительного) и второго подпараграфов составляет доказательство теоремы о наличии у гордиева графа G только одного BU-конца. Завершает параграф краткое замечание о развитии и дальнейшем применении подхода, предложенного в доказательстве данной теоремы.

Начнём с формализации понятия концов графа в смысле Жиса – Гамбаду. Для графа Γ будем обозначать через $\mathrm{Vert}(\Gamma)$ множество всех вершин этого графа. Кроме того, для заданного подмножества вершин $M \subset \mathrm{Vert}(\Gamma)$ будем обозначать через $\Gamma \setminus M$ граф, получающийся из графа Γ удалением каждой вершины, входящей в множество M, и каждого ребра, смежного хотя бы с одной вершиной из множества M. Далее, будем обозначать через $\mathfrak{U}(\Gamma)$ мощность множества неограниченных компонент связности графа Γ. И, наконец, будем обозначать через $\mathfrak{B}(\Gamma)$ множество

$$\bigl\{V \subset \mathrm{Vert}(\Gamma) \,|\, \exists n \in \mathbb{N},\, \forall x, y \in V \colon \mathrm{dist}_\Gamma(x, y) < n\bigr\},$$

то есть множество всех ограниченных подмножеств множества всех вершин

графа Γ (напомним, что под расстоянием dist_Γ между вершинами графа Γ всюду имеется в виду расстояние в метрике кратчайшего пути).

Будем называть *числом BU-концов* графа Γ и обозначать через $\mathrm{BU}(\Gamma)$ элемент множества $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$, заданный формулой

$$\mathrm{BU}(\Gamma) = \sup_{V \in \mathfrak{B}(G)} \mathfrak{U}\big(\Gamma \setminus V\big).$$

Выбранные обозначения отсылают к соответствующим английским терминам «bounded» и «unbounded».

2.1.1 Трюк Виро – Монтесиноса

Настоящий подпараграф посвящён изложению классического сюжета маломерной топологии — трюка Виро – Монтесиноса. Данный сюжет связывает теорию преобразований узлов с топологией трёхмерных многообразий посредством перехода от узла к двулистному разветвлённому накрывающему трёхмерной сферы с ветвлением в данном узле. В рамках подпараграфа приводится основанное на данном трюке краткое доказательство нижней оценки гордиева расстояния между двумя узлами.

Будем обозначать через $\Sigma_2(K)$ *двулистное разветвлённое накрывающее* трёхмерной сферы S^3 с ветвлением в узле $K \subset S^3$, а через $e_2(K)$ — минимальное число образующих первой группы целочисленных гомологий $\mathrm{H}_1(\Sigma_2(K))$.

Лемма 2.1 (Трюк Виро – Монтесиноса)**.** *Для произвольной пары узлов K_1 и K_2 справедлива следующая нижняя оценка:*

$$\mathrm{d}_G(K_1, K_2) \geq |e_2(K_1) - e_2(K_2)|.$$

Доказательство леммы 2.1. Поскольку двулистное разветвлённое накрывающее шара с ветвлением в нитях рационального тэнгла гомеоморфно полноторию (смотри пример на Рис. 2.1), согласованная замена одного рационального тэнгла, входящего в состав узла $K \subset S^3$, на другой рациональный тэнгл соответствует хирургии Дена по некоторому узлу в двулистном разветвлённом накрывающем трёхмерной сферы S^3 с ветвлением в узле K. Частным случаем подобной замены является преобразование пе-

реключения перекрёстка. Поскольку (однократная) хирургия Дена по узлу в двулистном разветвлённом накрывающем $\Sigma_2(K)$ изменяет минимальное число образующих группы $\mathrm{H}_1\big(\Sigma_2(K)\big)$ не более чем на единицу (смотри работу [29, Lemma 3]), искомая нижняя оценка гордиева расстояния справедлива. □

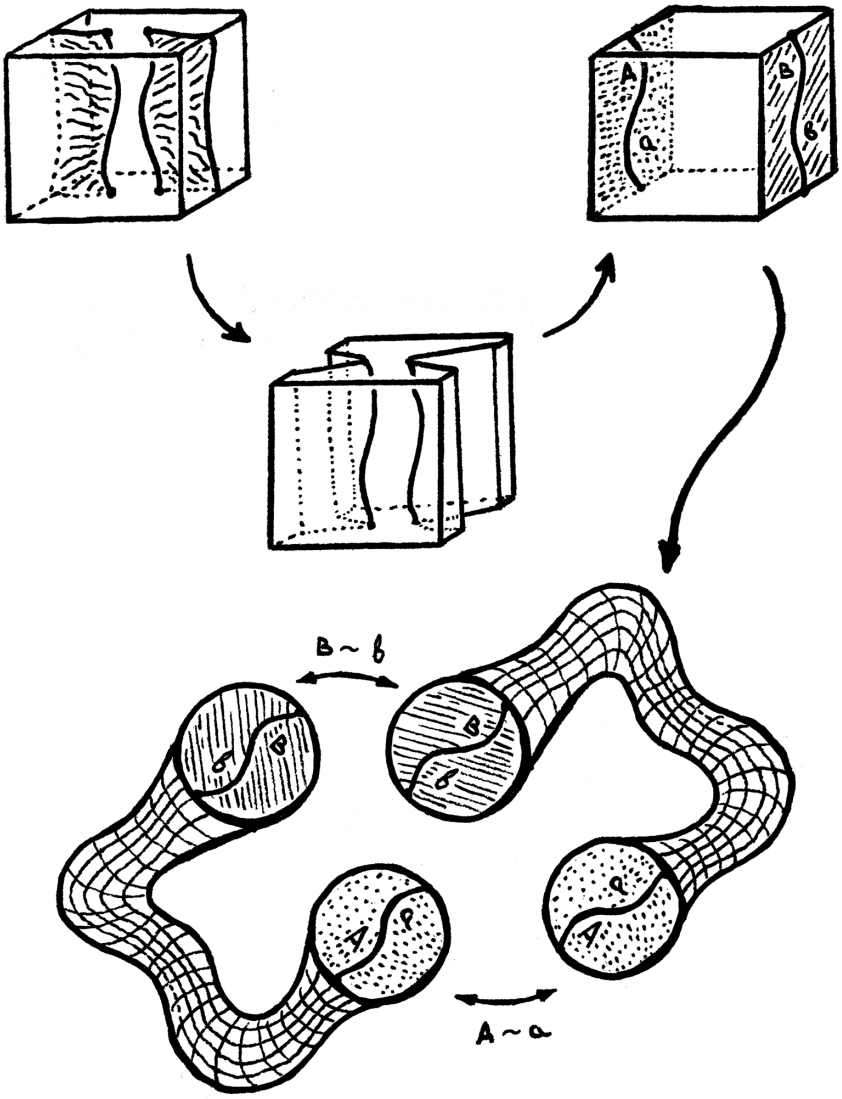


Рисунок 2.1 – Двулистное разветвлённое накрывающее шара с ветвлением в нитях рационального тэнгла гомеоморфно полноторию.

2.1.2 Гордиев граф имеет один конец

Содержание настоящего подпараграфа составляет ответ на вопрос Жиса – Гамбаду, а именно доказательство теоремы 2, согласно которой число BU-концов гордиева графа G равно единице. Предваряет доказательство серия определений и подготовительных замечаний.

Определение 2.1. Пусть K_1 и K_2 — это узлы в трёхмерной сфере S^3. Будем говорить, что узел $L \subset S^3$ является *связной суммой* узлов K_1 и K_2, если существует такая вложенная двумерная сфера $S \subset S^3$, дополнение которой $S^3 \setminus S$ состоит из двух открытых шаров A и B, что выполнены следующие условия:

1. сфера S пересекает узел L трансверсально в двух точках a и b;

2. для произвольной дуги γ на сфере S, соединяющей точки a и b, узел $\gamma \cup (A \cap L)$ объемлемо изотопен узлу K_1, а узел $\gamma \cup (B \cap L)$ объемлемо изотопен узлу K_2.

Замечание 2.1. Если узел L является связной суммой узлов K_1 и K_2, то многообразие $\Sigma_2(L)$ гомеоморфно связной сумме многообразий $\Sigma_2(K_1)$ и $\Sigma_2(K_2)$, а следовательно имеет место изоморфизм

$$\mathrm{H}_1\big(\Sigma_2(L)\big) \cong \mathrm{H}_1\big(\Sigma_2(K_1)\big) \oplus \mathrm{H}_1\big(\Sigma_2(K_2)\big).$$

Замечание 2.2. Отметим, что в рамках данного выше определения допустимо существование пары неизотопных узлов, каждый из которых является связной суммой узлов K_1 и K_2. Обычно подобная неоднозначность устраняется путём перехода к ориентированному случаю, однако контекст дальнейших рассуждений не требует подобного усложнения, а данного выше определения оказывается достаточно.

Обозначим через U тривиальный узел, а через Q — узел «левый трилистник». Кроме того, для каждого фиксированного натурального числа r будем обозначать через Q^r узел, представленный диаграммой на Рис. 2.2. Заметим, что узел Q^r является (последовательной) связной суммой r копий левых трилистников.

Для каждого натурального числа $n \in \mathbb{N}$ обозначим через $B_n(U)$ множество вершин гордиева графа G, находящихся на расстоянии не более n от вершины, соответствующей тривиальному узлу U (напомним, что под расстоянием между парой вершин графа всюду имеется в виду расстояние в метрике кратчайшего пути). Будем называть данные множества шарами. Кроме того, вершину гордиева графа G, соответствующую узлу K, будем обозначать через $[K]$.

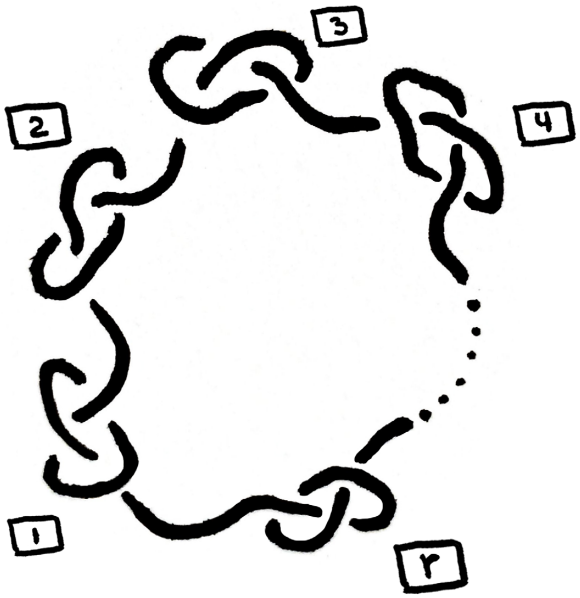


Рисунок 2.2 – Выделенный узел Q^r, являющийся связной суммой r копий левых трилистников.

Доказательство теоремы 2. Доказательство проводится согласно следующей схеме:

1. для произвольного числа $r \in \mathbb{N}$ и произвольного узла $K \subset S^3$, удовлетворяющего неравенству $d_G(K, U) \geq 2r$, конструируется путь $\zeta(K, r)$ в гордиевом графе G, соединяющий вершины $[K]$ и $[Q^r]$;

2. устанавливается принадлежность построенного пути $\zeta(K, r)$ дополнению $G \setminus B_{r-1}(U)$;

3. в качестве следствия из предыдущих пунктов выводится исходное утверждение о том, что гордиев граф G имеет ровно один BU-конец.

Итак, пусть $r \in \mathbb{N}$ — это произвольное натуральное число, а K — это узел в трёхмерной сфере S^3, удовлетворяющий неравенству $d_G(K, U) \geq 2r$. Начнём с произвольной диаграммы узла K на плоскости $\mathbb{R}^2$. Выберем на плоскости $\mathbb{R}^2$ некоторый замкнутый диск D, пересекающий дуги диаграммы узла K в точности по простой дуге α, причём $\alpha \cap \partial D = \partial\alpha$. Удалим из диаграммы узла K дугу α, после чего (согласованно) расположим в диске D диаграмму 1-тэнгла, нить которого заузлена в узел Q^r, смотри Рис. 2.3. Полученная в результате данной операции диаграмма представляет узел, являющийся связной суммой узла K и узла Q^r. Обозначим данный узел через $Q^r \# K$, а построенную диаграмму — через Ω.

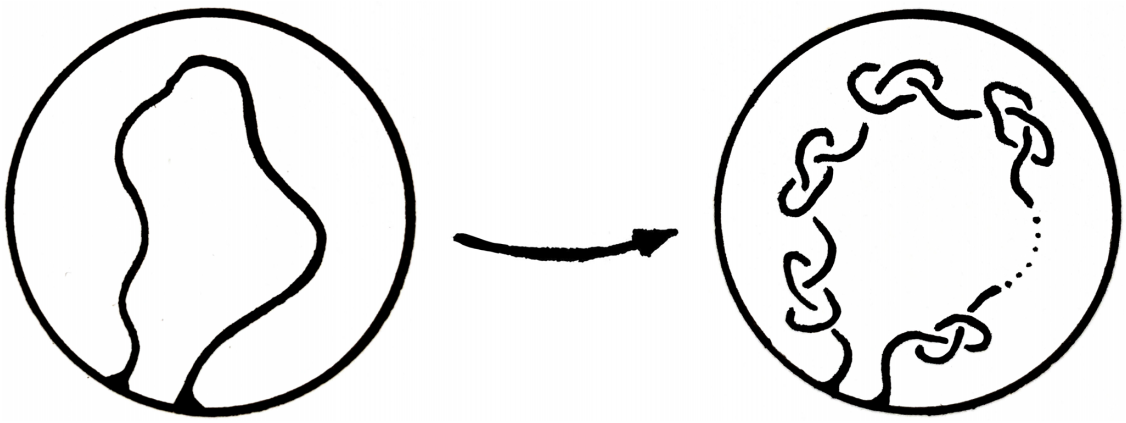


Рисунок 2.3 – Замена простой дуги α в диаграмме узла K на специальную дугу, заузленную в узел Q^r.

Построим в гордиевом графе G путь $\zeta_1(K, r)$ длины r, соединяющий вершины $[Q^r \# K]$ и $[K]$. Начнём с диаграммы Ω узла $Q^r \# K$ и выделим внутри диска $D \subset \mathbb{R}^2$ поддиски $D_1, D_2, \ldots, D_r$, как показано на Рис. 2.4. Переключим на диаграмме Ω произвольный перекрёсток, находящийся в диске D_1, формируя новую диаграмму Ω_1. Затем переключим на диаграмме Ω_1 произвольный перекрёсток, находящийся в диске D_2, формируя новую диаграмму Ω_2. Продолжим процесс до тех пор, пока не будет сформирована диаграмма Ω_r.

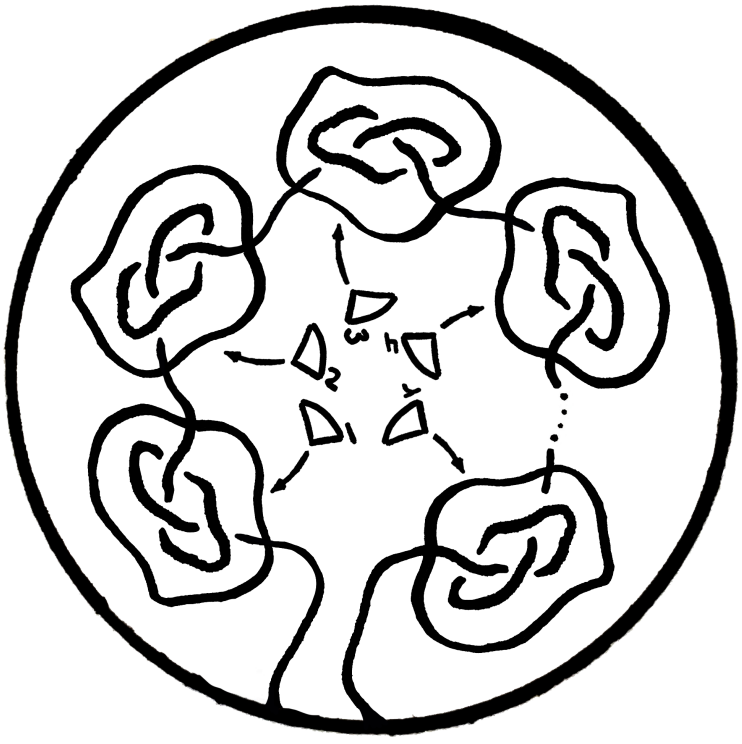


Рисунок 2.4 – Поддиски $D_1, D_2, \ldots, D_r$ диска D.

Заметим, что диаграмма Ω_i, где $i \in \{1, 2, \ldots, r-1\}$, представляет узел, являющийся связной суммой узла Q^{r-i} и узла K. Будем обозначать данный узел через $Q^{r-i}\#K$. При этом диаграмма Ω_r представляет узел K. Согласно построению, для любого $i \in \{0, 1, 2, \ldots, r-2\}$ вершины $[Q^{r-i}\#K]$ и $[Q^{r-i-1}\#K]$ являются смежными в гордиевом графе G, а также вершина $[Q^1\#K]$ смежна с вершиной $[K]$. Таким образом, последовательность вершин

$$[Q^r\#K], \quad [Q^{r-1}\#K], \quad \ldots, \quad [Q^1\#K], \quad [K]$$

задаёт путь в гордиевом графе G, соединяющий вершины $[Q^r\#K]$ и $[K]$, смотри Рис. 2.5. Данный путь будем обозначать через $\zeta_1(K, r)$.

Теперь построим в гордиевом графе G путь $\zeta_2(K, r)$, соединяющий вершины $[Q^r\#K]$ и $[Q^r]$. Хорошо известно, что для произвольной диаграммы Σ_1 произвольного узла X существует такое число $k \in \mathbb{N}$ и такая последовательность диаграмм $\Sigma_1, \Sigma_2, \ldots, \Sigma_k$, что для любого $j \in \{1, 2, \ldots, k-1\}$ диаграммы Σ_j и Σ_{j+1} отличаются друг от друга только типом одного из перекрёстков, а диаграмма Σ_k представляет тривиальный узел. Это означает, что такая последовательность диаграмм найдётся и для исходной диаграммы узла K, с которой было начато рассуждение. Отсюда следует, что для диаграммы Ω, представляющей узел $Q^r\#K$, существует такое число $k \in \mathbb{N}$ и такая последовательность диаграмм $\Omega_1^\circ, \Omega_2^\circ, \ldots, \Omega_k^\circ$, что для любого $j \in \{1, 2, \ldots, k-1\}$ диаграммы Ω_j° и Ω_{j+1}° отличаются друг от друга только типом одного из перекрёстков, расположенных вне диска D, диаграмма Ω_1° совпадает с диаграммой Ω, а диаграмма Ω_k° представляет узел Q^r. Узел, представленный диаграммой Ω_j°, где $j \in \{2, 3, \ldots, k-1\}$, будем обозначать через $Q^r\#K_j$. Тогда, согласно построению, для любого $j \in \{2, 3, \ldots, k-2\}$ вершины $[Q^r\#K_j]$ и $[Q^r\#K_{j+1}]$ являются смежными в гордиевом графе G, вершина $[Q^r\#K]$ смежна с вершиной $[Q^r\#K_2]$, а вершина $[Q^r\#K_{k-1}]$ смежна с вершиной $[Q^r]$. Таким образом, последовательность вершин

$$[Q^r\#K], \quad [Q^r\#K_2], \quad \ldots, \quad [Q^r\#K_{k-1}], \quad [Q^r]$$

задаёт путь в гордиевом графе G, соединяющий вершины $[Q^r\#K]$ и $[Q^r]$, смотри Рис. 2.5. Данный путь будем обозначать через $\zeta_2(K, r)$.

Искомый путь $\zeta(K, r)$, соединяющий вершины $[K]$ и $[Q^r]$, зададим конкатенацией путей $\zeta_1(K, r)$ и $\zeta_2(K, r)$.

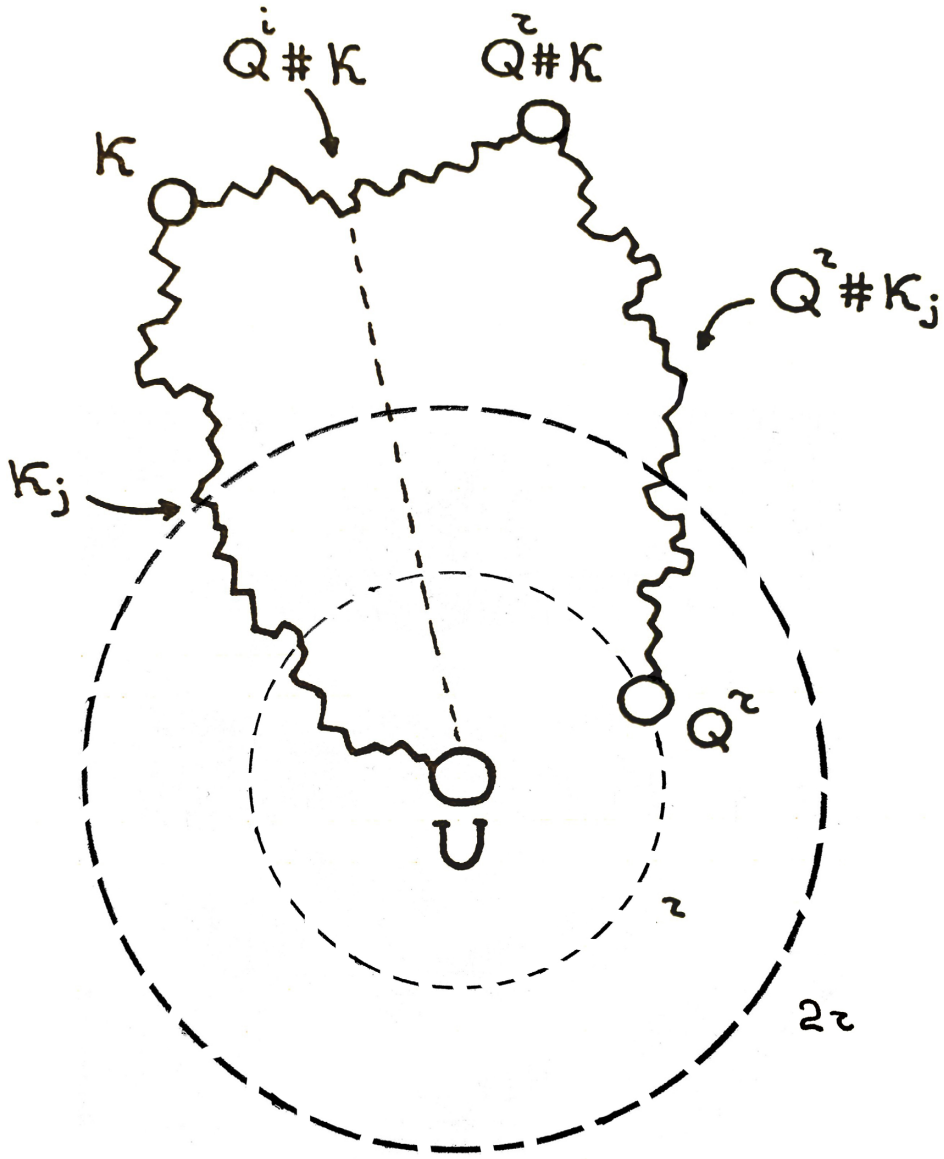


Рисунок 2.5 – Процесс построения пути $\zeta(K, r)$.

Покажем, что путь $\zeta(K, r)$ целиком лежит в дополнении $G \setminus B_{r-1}(U)$. Для этого воспользуемся полученной ранее гомологической нижней оценкой гордиева расстояния, основанной на трюке Виро – Монтесиноса. Согласно замечанию 2.1, для любого $j \in \{2, 3, \ldots, k-1\}$ имеет место изоморфизм

$$\mathrm{H}_1\big(\Sigma_2(Q^r \# K_j)\big) \cong \underbrace{\mathrm{H}_1\big(\Sigma_2(Q)\big) \oplus \cdots \oplus \mathrm{H}_1\big(\Sigma_2(Q)\big)}_{r \text{ слагаемых}} \oplus \mathrm{H}_1\big(\Sigma_2(K_j)\big).$$

Двулистное разветвлённое накрывающее трёхмерной сферы с ветвлением в узле трилистнике (как в левом, так и в правом) гомеоморфно линзовому пространству $L(3,1)$ (смотри, к примеру, работу [54, p. 304]). Отсюда $\mathrm{H}_1(\Sigma_2(Q)) \cong \mathbb{Z}_3$, а значит имеет место оценка $e_2(Q^r \# K_j) \geq r$. Тогда, по лемме 2.1, справедливо неравенство

$$\mathrm{d}_G(Q^r \# K_j, U) \geq |e_2(Q^r \# K_j) - e_2(U)| \geq r.$$

Это означает, что для любого $j \in \{2, 3, \ldots, k-1\}$ вершина $[Q^r \# K_j]$ пути $\zeta(K, r)$ содержится в дополнении $G \setminus B_{r-1}(U)$. Принадлежность вершин $[Q^r]$ и $[Q^r \# K]$ дополнению $G \setminus B_{r-1}(U)$ устанавливается аналогично. Вершина $[K]$ принадлежит дополнению $G \setminus B_{r-1}(U)$ по предположению.

Исходя из устройства пути $\zeta(K, r)$, заметим, что для каждого числа $i \in \{1, 2, \ldots, r-1\}$ справедливо неравенство $\mathrm{d}_G(K, Q^i \# K) \leq i$. Тогда, применив неравенство треугольника, получим:

$$\mathrm{d}_G(Q^i \# K, U) \geq \mathrm{d}_G(K, U) - \mathrm{d}_G(K, Q^i \# K) \geq 2r - i \geq 2r - r = r.$$

Следовательно, имеет место оценка $\mathrm{d}_G(Q^i \# K, U) \geq r$. Это означает, что для любого $i \in \{1, 2, \ldots, r-1\}$ вершина $[Q^i \# K]$ пути $\zeta(K, r)$ содержится в дополнении $G \setminus B_{r-1}(U)$. Таким образом, для произвольного числа $r \in \mathbb{N}$ и произвольного узла $K \subset S^3$, удовлетворяющего неравенству $d_G(K, U) \geq 2r$, путь $\zeta(K, r)$ целиком содержится в дополнении $G \setminus B_{r-1}(U)$.

Это означает, что для любого числа $r \in \mathbb{N}$ дополнение $G \setminus B_{r-1}(U)$ имеет единственную неограниченную компоненту связности, содержащую дополнение $G \setminus B_{2r}(U)$. Следовательно, число BU-концов гордиева графа G равно единице, что и требовалось. □

2.1.3 Общий случай свободных локальных преобразований

Подход, развитый в доказательстве теоремы 2, позволяет получать и более общие результаты в направлении подсчёта числа концов гордиевых графов преобразований узлов. Настоящий подпараграф содержит краткий комментарий о полученных автором продвижениях в данном направлении.

Будем называть n-ниточный тэнгл *свободным*, если его можно преобразовать в тривиальный тэнгл с помощью объемлемой изотопии шара

(в данном случае не подразумевается, что изотопия фиксирована на крае). Свободные 2-тэнглы также известны как *рациональные* тэнглы (смотри работу [35]). Будем называть локальное преобразование узлов *свободным*, если шаблон этого преобразования состоит из пары свободных n-тэнглов (большое внимание в литературе уделяется частному случаю *рациональных* преобразований, смотри работу [14]). В частности, преобразование переключения перекрёстка является свободным локальным преобразованием. Автор придерживается гипотезы о том, что каждая компонента связности гордиева графа каждого свободного локального преобразования имеет ровно один BU-конец. Поскольку трюк Виро – Монтесиноса справедлив (с учётом поправки на число нитей и число листов разветвлённого накрытия) для любого свободного локального преобразования (смотри работу [29, Theorem 4]), доказательство данной гипотезы сводится к обобщению процедуры построения вспомогательного пути $\gamma(K, r)$ на случай произвольных свободных локальных преобразований. Это отдельная достаточно трудоёмкая задача технического характера. Доказательство данной гипотезы для всех рациональных преобразований, для всех H(m)-преобразований (в том числе для преобразования ленточной хирургии) и для всех C_k-преобразований подробно изложено автором в работе [46].

2.2 Асимптотика в смысле Марше

Техники, развитые Марше в рамках решения другого известного вопроса Жиса и Гамбаду о квазиизометричном вложении бесконечного регулярного дерева в гордиев граф G (смотри работу [17, p. 547]), позволили ему получить в качестве следствия некоторую слабую характеризацию асимптотического поведения гордиева графа G на бесконечности. Конкретнее, Марше было установлено, что удаление любого конечного множества вершин гордиева графа G не нарушает его связности [42, Proposition 3.1]. Целью настоящего параграфа является изложение наброска элементарного доказательства данного утверждения, не требующее ни апелляции к понятию сигнатуры узла, ни анализа корней многочлена Александера. Отметим, что данный результат также немедленно следует из асимптотического следствия 2 теоремы 3. Кроме того, представленное в настоящем параграфе доказательство обобщается на широкий класс преобразований узлов.

Замечание 2.3. Покажем, что связность гордиева графа G не нарушается при удалении любого конечного множества его вершин.

Пусть $M \subset \mathrm{Vert}(G)$ — это конечное множество вершин гордиева графа G. Выберем такую пару узлов $K_\circ$ и $K_\times$, что вершины $[K_\circ]$ и $[K_\times]$ содержатся в дополнении $G \setminus M$. Кроме того, произвольным образом выберем такую последовательность узлов $K_1, K_2, \ldots, K_{n-1}$ в трёхмерной сфере, что последовательность вершин

$$[K_\circ], \quad [K_1], \quad \ldots, \quad [K_{n-1}], \quad [K_\times]$$

задаёт путь в гордиевом графе G, соединяющий вершины $[K_\circ]$ и $[K_\times]$. Обозначим данный путь через γ.

Произвольному нетривиальному узлу $L \subset S^3$ сопоставим путь γ_L в гордиевом графе G, заданный последовательностью вершин

$$[K_\circ \# L], \quad [K_1 \# L], \quad \ldots, \quad [K_{n-1} \# L], \quad [K_\times \# L],$$

где узел $K_\circ \# L$ является связной суммой узлов $K_\circ$ и L, узел $K_\times \# L$ является связной суммой узлов $K_\times$ и L и для каждого $i \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$ узел $K_i \# L$ является связной суммой узлов K_i и L (под связной суммой узла L с тривиальным узлом будем понимать сам узел L). Иными словами, путь γ_L получается из пути γ с помощью «сдвига» на узел L. Как было отмечено в замечании 2.2, узел, являющийся связной суммой двух других (неориентированных) узлов, не всегда единственен, однако в данном случае существует естественный способ согласованным образом выбрать требуемые узлы вдоль всего пути.

Напомним, что через $S_1(U)$ обозначается множество всех таких узлов X в трёхмерной сфере, что $d_G(U, X) = 1$. Поскольку множество $S_1(U)$ бесконечно (например, оно включает в себя все скрученные узлы, смотри, к примеру, работу [54]), найдётся такой узел $X \in S_1(U)$, что путь γ_X целиком лежит в дополнении $G \setminus M$. Действительно, предположим, что для любого узла $X \in S_1(U)$ существует вершина V_X пути γ_X, принадлежащая множеству вершин M. Обозначим через $M^* \subset M$ множество вершин $\{V_X \,|\, X \in S_1(U)\}$. В таком случае для любого узла $X \in S_1(U)$ существует такая вершина $[Y] \in M^*$, что узел Y либо объемлемо изотопен

узлу X, либо является связной суммой узла X и некоторого нетривиального узла. Согласно теореме Шуберта о разложении на простые (смотри работу [57]), для каждого узла Z существует только конечное число $m \in \mathbb{N}$ таких узлов $Z_1, Z_2, \ldots, Z_m$, что узел Z является связной суммой узла Z_i для $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$ и некоторого нетривиального узла. При этом само множество M^* является конечным, что приводит к противоречию.

Зафиксируем такой узел $X \in S_1(U)$, что путь γ_X целиком лежит в дополнении $G \setminus M$. Поскольку $d_G(U, X) = 1$, справедливы равенства

$$d_G(K_\circ, K_\circ \# X) = 1 \quad \text{и} \quad d_G(K_\times, K_\times \# X) = 1.$$

Обозначим через γ_X^* путь в гордиевом графе G, полученный в результате объединения пути γ_X и рёбер $\big[[K_\circ], [K_\circ \# X]\big]$ и $\big[[K_\times], [K_\times \# X]\big]$. Заметим, что путь γ_X^* соединяет вершины $[K_\circ]$ и $[K_\times]$ и целиком лежит в дополнении $G \setminus M$, откуда следует связность дополнения $G \setminus M$.

Замечание 2.4. Аналог доказанного выше утверждения справедлив для широкого класса преобразований узлов. Если в гордиевом графе некоторого локального преобразования узлов вершина, соответствующая тривиальному узлу, имеет бесконечную валентность, то можно дословно воспроизвести приведённые выше рассуждения для каждой компоненты связности данного графа.

ГЛАВА 3 ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ПАТТЕРНЫ В ГОРДИЕВЫХ ГРАФАХ

Настоящая глава посвящена анализу структурного взаимодействия узлов в контексте исследования регулярных геометрических паттернов в гордиевых графах. Основными объектами исследования выступают гордиев граф G и гордиев комплекс $\mathcal{G}$. В рамках первого параграфа настоящей главы установлено существование одного крупного регулярного геометрического паттерна в гордиевом графе G (теорема 3) и дан ответ на вопрос Хирасавы – Учиды о регулярном паттерне в гордиевом комплексе $\mathcal{G}$ (следствие 1). Целью второго параграфа служит интерпретация приведённых в процессе доказательства рассуждений на языке теории класперов Гусарова – Хабиро. Третий параграф посвящён изложению серии следствий, среди которых асимптотическое следствие о поведении гордиева графа G на бесконечности (следствие 2), следствие о структуре $\mathbb{R}^\infty$-многообразия на геометрической реализации гордиева комплекса $\mathcal{G}$ (следствие 3), а также теорема о связности «единичных окрестностей» вершин гордиева графа G (теорема 1.1).

3.1 Ответ на вопрос Хирасавы – Учиды

В настоящем параграфе изложен подход к поиску регулярных геометрических паттернов в гордиевых графах преобразований узлов. Содержание (подготовительных) первого, второго и третьего, а также (основного) четвёртого подпараграфов составляет доказательство теоремы о наличии для каждого подграфа-звезды в гордиевом графе G бесконечной клики, каждая вершина которой смежна с каждой вершиной данного подграфа-звезды. В качестве следствия из данного результата выводится ответ на вопрос Хирасавы – Учиды о достраивании произвольного симплекса в гордиевом комплексе $\mathcal{G}$ до симплекса сколь угодно высокой размерности. Доказательство сопряжено с серией геометрических построений и выполнено с опорой на новые топологические техники, развитые Малютиным, Алексеевым и автором в работе [47].

3.1.1 Компаньоны: нерасщепимость и несжимаемость

В настоящем подпараграфе классическое понятие компаньона узла, традиционно излагаемое на языке несжимаемых торов, находит интерпретацию в терминах нерасщепимых зацеплений.

Определение 3.1. Узел K^* называется *сателлитом* нетривиального узла K, если найдутся такая простая замкнутая кривая q, лежащая в некотором полнотории V, не содержащаяся ни в каком трёхмерном шаре внутри этого полнотория и не изотопная его центральной кривой c, и такое вложение $\varphi\colon V \to S^3$ полнотория V в трёхмерную сферу S^3, что простая замкнутая кривая $\varphi(c) \subset S^3$ представляет объемлемо-изотопический класс узла K, а простая замкнутая кривая $\varphi(q) \subset S^3$ представляет объемлемо-изотопический класс узла K^*. Если узел K^* является сателлитом узла K, то узел K называют *компаньоном* узла K^*.

Замечание 3.1. Пусть k — это простая замкнутая кривая в трёхмерной сфере S^3, представляющая объемлемо-изотопический класс узла K, пусть $N(k)$ — замкнутая трубчатая окрестность кривой k, а T — несжимаемый не параллельный краю тор в дополнении $S^3 \setminus \mathrm{Int}(N(k))$. Предположим, что существует такое вложение $\varphi\colon V \to S^3$ некоторого полнотория V в трёхмерную сферу S^3, что $\varphi(\partial V) = T$, а простая замкнутая кривая $\varphi(c) \subset S^3$, где c — центральная кривая полнотория V, представляет объемлемо-изотопический класс некоторого нетривиального узла Q. В таком случае узел Q является компаньоном узла K.

Будем говорить, что двухкомпонентное зацепление $K \cup L \subset S^3$ *расщепимо*, если существует *разделяющая* эти компоненты двумерная сфера, то есть такая вложенная двумерная сфера $S \subset S^3 \setminus (K \cup L)$, что компоненты зацепления $K \cup L$ лежат в разных компонентах связности дополнения $S^3 \setminus S$. В противном случае будем называть двухкомпонентное зацепление $K \cup L$ *нерасщепимым*. Если компонента K является тривиальным узлом, то справедлив следующий критерий: зацепление $K \cup L$ расщепимо тогда и только тогда, когда компонента K ограничивает диск в дополнении $S^3 \setminus L$.

Напомним, что любая существенная простая замкнутая кривая на торе $\partial(D^2 \times S^1)$, которая ограничивает диск в полнотории $D^2 \times S^1$, называется *меридиональной* кривой.

Следующая лемма позволяет получить эквивалентную, но более элементарную характеризацию понятия «компаньон» (смотри замечание 3.1), ключевую для дальнейшего изложения.

Лемма 3.1. *Пусть W — нетривиально заузленный полноторий в трёхмерной сфере S^3, а K — узел во внутренности* $\mathrm{Int}(W)$*. Тогда следующие условия эквивалентны:*

(1) каждая меридиональная кривая полнотория W образует с узлом K нерасщепимое зацепление;

(2) граничный тор ∂W несжимаем в многообразии $S^3 \setminus K$.

Доказательство леммы 3.1. Если тор ∂W является сжимаемым в многообразии $S^3 \setminus K$, то на нём найдётся некоторая существенная простая замкнутая кривая $\gamma \subset \partial W$, ограничивающая диск $D \subset S^3 \setminus K$ с условием $D \cap \partial W = \gamma$. Поскольку тор ∂W является несжимаемым в многообразии $S^3 \setminus \mathrm{Int}(W)$, диск D обязан содержаться в полнотории W. В силу того, что существует лишь один изотопический класс существенных простых замкнутых кривых на торе ∂W, ограничивающих диск в полнотории W, кривая γ обязана являться меридиональной.

С другой стороны, если меридиональная кривая λ полнотория W образует с узлом K расщепимое зацепление, то найдётся двумерная сфера $S \subset S^3$, разделяющая кривую λ и узел K и пересекающая граничный тор ∂W трансверсально. Поскольку и кривая λ, и узел K содержатся в (связном) полнотории W, сфера S обязана пересекать полноторий W. Если $\partial W \cap S = \varnothing$, то сфера S ограничивает в полнотории W шар E, содержащий узел K, откуда сразу следует сжимаемость тора ∂W в многообразии $S^3 \setminus K$.

Если же $\partial W \cap S \neq \varnothing$, то по крайней мере две компоненты связности дополнения $S \setminus \partial W$ являются открытыми дисками; обозначим замыкание одной из таких компонент через B. Если граничная окружность ∂B является существенной (простой замкнутой) кривой на граничном торе ∂W, то диск B является сжимающим диском для тора ∂W в многообразии $S^3 \setminus K$. Если граничная окружность ∂B ограничивает диск $B' \subset \partial W$, то объединение $B \cup B'$ образует двумерную сферу, разбивающую трёхмерную сферу S^3 на два открытых шара. Если сфера $B \cup B'$ разделяет кривую λ и узел K, то

в полнотории W найдётся шар, содержащий узел K, что сводит доказательство к рассмотренному выше случаю. Если же сфера $B \cup B'$ не разделяет кривую λ и узел K, то обозначим через E замкнутый шар, ограниченный сферой $B \cup B'$ и не пересекающийся с зацеплением $K \cup \lambda$. Очевидная изотопия сферы S в малой окрестности шара E позволяет получить сферу S', разделяющую кривую λ и узел K и пересекающую тор ∂W по меньшему числу окружностей, чем исходная сфера S. Воспользуемся индукцией по числу окружностей пересечения и завершим доказательство. □

3.1.2 Томская лемма о торе с дырой

Настоящий подпараграф нацелен на презентацию нового геометрического метода детекции нерасщепимости двухкомпонентных зацеплений, впервые представленного Малютиным в 2023 году на конференции «Современные проблемы математики и её приложений» в городе Томске. Изложение следует более поздней и детальной работе Малютина, Алексеева и автора [47].

Определение 3.2. Поверхность $H \subset S^3$ называется *незаузленным тором с дырой*, если существует такой незаузленный полнотворий $V \subset S^3$, что $H \subset \partial V$ и дополнение $\partial V \setminus H$ гомеоморфно открытому диску.

Будем говорить, что пара простых замкнутых кривых на незаузленном торе с дырой H является *меридионально-параллельной парой* для H, если эта пара является меридионально-параллельной парой для некоторого (и, следовательно, любого) незаузленного тора, содержащего тор с дырой H.

Замечание 3.2. Отметим, что элементы любой меридионально-параллельной пары для незаузленного тора с дырой $H \subset S^3$ представляют единственную пару изотопических классов не параллельных краю существенных простых замкнутых кривых на торе с дырой H, ограничивающих диски в многообразии $S^3 \setminus H$. Действительно, предположим, что простая замкнутая кривая на торе с дырой H ограничивает диск $B \subset S^3 \setminus H$. Обозначим через T некоторый незаузленный тор, содержащий тор с дырой H. Применение стандартных техник «разрезания и склейки» (серии перестроек вдоль поддисков в диске $T \setminus H$) позволяет добиться того, чтобы диск B

не пересекался с диском $T \setminus H$. В таком случае внутренность $\mathrm{Int}(B)$ будет лежать в одном из полноториев $S^3 \setminus T$, откуда вытекает требуемое утверждение.

Лемма 3.2 (Томская лемма)**.** *Пусть K — узел в S^3. Пусть H — незаузленный тор с дырой в дополнении $S^3 \setminus K$, а $\{m_H, l_H\}$ — меридионально-параллельная пара для тора с дырой H. Если зацепления $m_H \cup K$ и $l_H \cup K$ являются нерасщепимыми, то и зацепление $\partial H \cup K$ нерасщепимо.*

Доказательство леммы 3.2. Предположим противное. Пусть предложенные зацепления $m_H \cup K$ и $l_H \cup K$ являются нерасщепимыми, в то время как зацепление $\partial H \cup K$ расщепимо. В таком случае найдётся двумерная сфера $S \subset S^3$, разделяющая кривую ∂H и узел K и пересекающая тор с дырой H трансверсально. Если $H \cap S = \varnothing$, то сфера S разделяет тор с дырой $H \supset \partial H$ и узел K, а следовательно, ни зацепление $m_H \cup K$, ни зацепление $l_H \cup K$ не является нерасщепимым.

Если $H \cap S \neq \varnothing$, то по крайней мере две компоненты связности дополнения $S \setminus H$ являются открытыми дисками; обозначим замыкание одной из таких компонент через B. В силу замечания 3.2 возможен один из следующих четырёх случаев: кривая ∂B изотопна (в H) кривой m_H, кривая ∂B изотопна (в H) кривой l_H, кривая ∂B изотопна (в H) кривой ∂H, или кривая ∂B ограничивает диск $B' \subset H$.

Те случаи, в которых кривая ∂B изотопна кривой m_H или кривой l_H, противоречат предположению о том, что зацепления $m_H \cup K$ и $l_H \cup K$ нерасщепимы.

Если кривая ∂B изотопна кривой ∂H, то получаем незаузленный тор $T \subset H \cup B$. Этот тор задаёт разложение трёхмерной сферы $S^3 = V \cup W$ на два полнотория, причём $V \cap W = T$. В силу связности узла $K \subset S^3 \setminus T$ выполнено либо $K \subset \mathrm{Int}\, V$, либо $K \subset \mathrm{Int}\, W$. В любом из этих двух случаев край меридионального диска того полнотория, который не содержит узла K, образует с узлом K расщепимое зацепление. Это влечёт расщепимость либо для зацепления $m_H \cup K$, либо для зацепления $l_H \cup K$.

Наконец, если кривая ∂B ограничивает диск $B' \subset H$, то проведём перестройку тора с дырой H вдоль диска B (заменяя окрестность кривой ∂B в торе с дырой H двумя параллельными копиями диска B) и получим новый незаузленный тор с дырой $H' \subset S^3 \setminus K$, причём $\partial H' = \partial H$.

Не умаляя общности можно считать, что ни кривая m_H, ни кривая l_H не пересекают диска B', а значит новый тор с дырой H' будет содержать кривые m_H и l_H (причём пара $\{m_H, l_H\}$ также будет являться меридионально-параллельной парой для тора с дырой H'). Заметим, что число окружностей в пересечении $H' \cap S$ будет меньше, чем число окружностей в пересечении $H \cap S$. Воспользуемся индукцией по числу окружностей пересечения и завершим доказательство. □

Замечание 3.3. Предложенные Малютиным идеи детекции нерасщепимости двухкомпонентных зацеплений посредством итеративного построения поверхностей специального вида были существенно развиты в работе Алексеева и Маловой [1].

3.1.3 Лемма о специальной диаграмме

Настоящий подпараграф посвящён выявлению одной диаграммати-ческой закономерности. В рамках настоящего подпараграфа будет установлено, что узлы, соответствующие вершинам некоторого подграфа-звезды в гордиевом графе, обладают следующей диаграмматической связью.

Лемма 3.3. *Пусть $n \geq 2$, пусть узлы $K_0, K_1, \ldots, K_n$ попарно не изотопны и пусть каждый из узлов $K_1, K_2, \ldots, K_n$ может быть преобразован в узел K_0 однократным применением преобразования переключения перекрёстка. Тогда узел K_0 допускает* специальную диаграмму*, на некотором участке устроенную так, как показано на Рис. 3.1, и обладающую тем свойством, что для $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ переключение перекрёстка с меткой $\boxed{c_i}$ на данной диаграмме узла K_0 преобразует эту диаграмму в диаграмму узла K_i.*

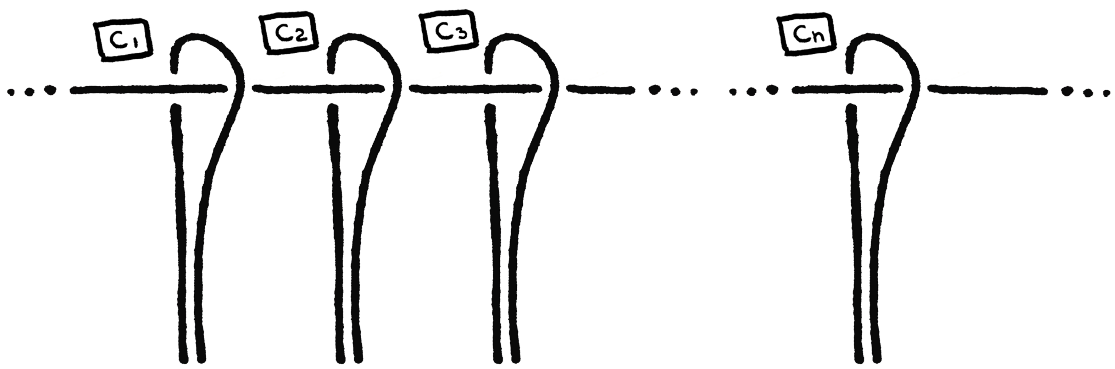


Рисунок 3.1 – Локальное устройство специальной диаграммы узла K_0.

Доказательство леммы 3.3. Начнём доказательство с определения некоторого вспомогательного преобразования узлов под названием «ленточное скольжение».

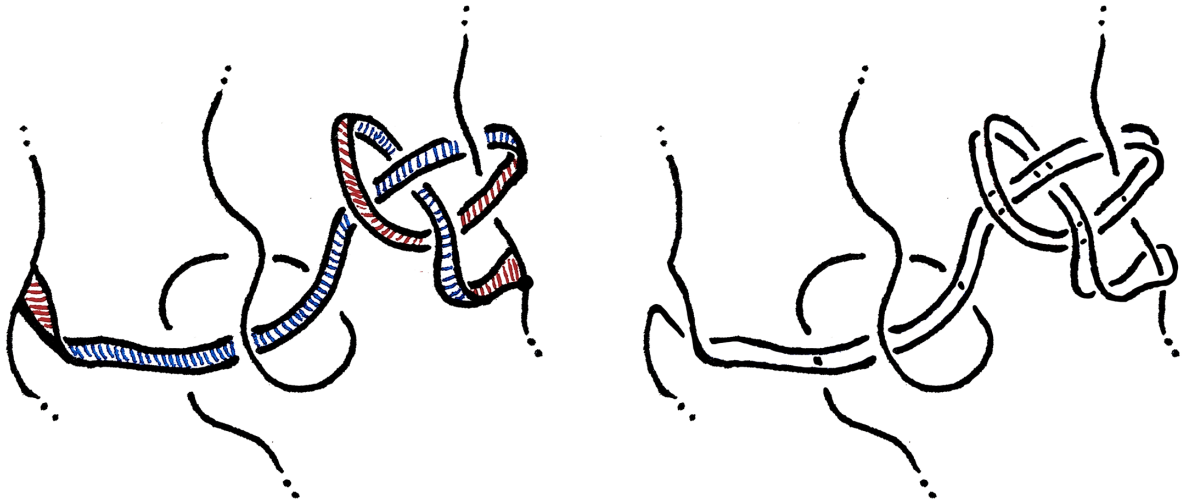


Рисунок 3.2 – Преобразование ленточного скольжения.

Пусть K — это узел в трёхмерной сфере S^3, а I — единичный отрезок $[0,1]$. Пусть $b\colon I \times I \to S^3$ — это вложение квадрата в трёхмерную сферу, причём $b(I \times I) \cap K = b(I \times \partial I)$. Выделим одну из сторон получившейся ленты $b(I \times I)$ (обозначим эту сторону красным цветом), а также поместим метку на один из углов этой ленты (обозначим этот угол чёрной точкой), смотри Рис. 3.2. Узел, полученный из узла K операцией, показанной на Рис. 3.2, называется результатом *ленточного скольжения* вдоль крашеной ленты $b(I \times I)$ с выделенным углом.

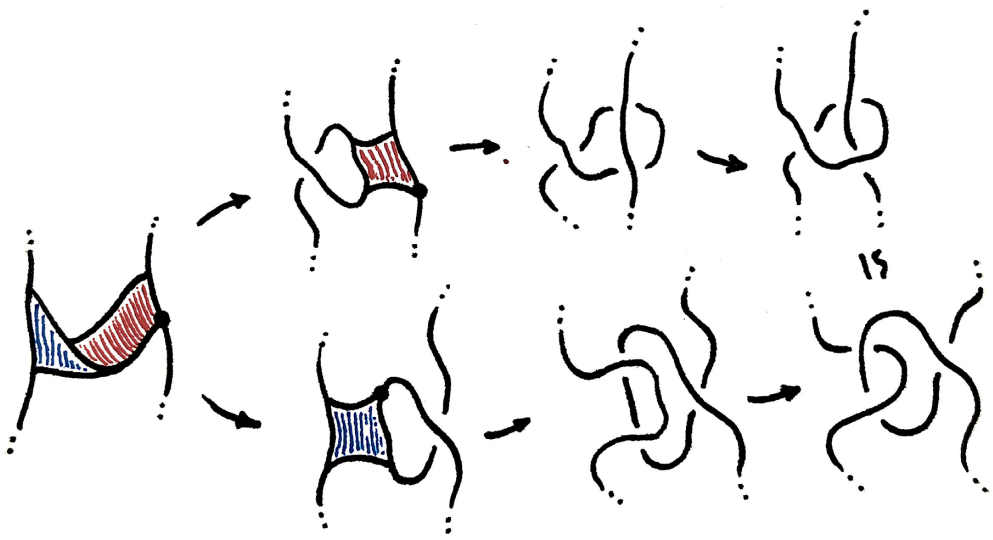


Рисунок 3.3 – Примеры применения преобразования ленточного скольжения.

Операция заключается в «выталкивании» одного края ленты $b(I \times I)$ в сторону, противоположную выделенной стороне, и переключении перекрёстка, сформированного в районе выделенного угла ленты (смотри примеры на Рис. 3.3).

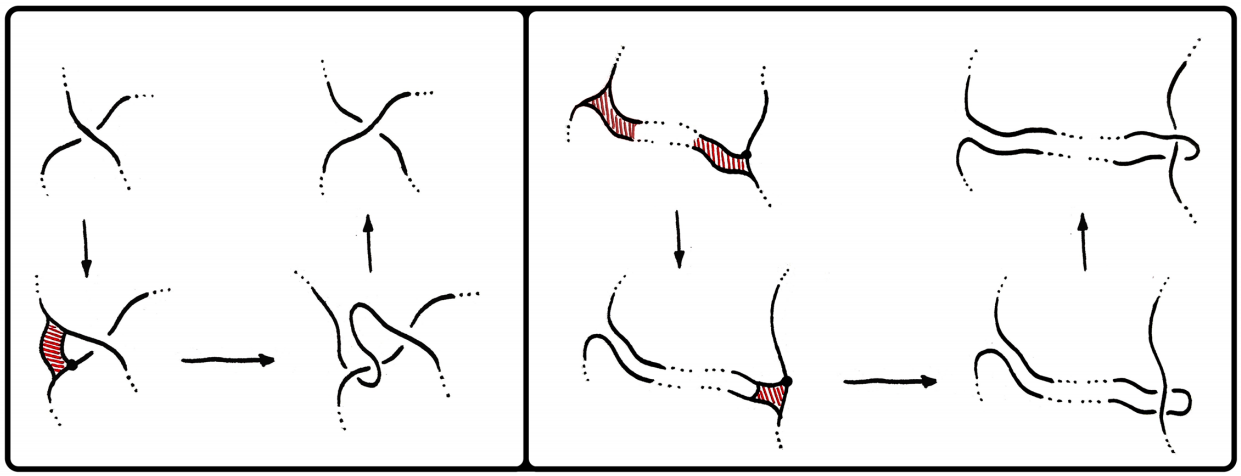


Рисунок 3.4 – Преобразование ленточного скольжения эквивалентно преобразованию переключения перекрёстка.

Как показано на Рис. 3.4, справедлив следующий критерий: два узла могут быть получены друг из друга с помощью ровно одного переключения перекрёстка тогда и только тогда, когда они могут быть получены друг из друга с помощью ровно одного ленточного скольжения. Воспользуемся этой эквивалентной характеризацией для описания взаимосвязи узлов $K_0, K_1, \ldots, K_n$.

Пусть k_0 — это простая замкнутая кривая в трёхмерной сфере S^3, представляющая объемлемо-изотопический класс узла K_0. Так как каждый из узлов $K_1, K_2, \ldots, K_n$ может быть преобразован в узел K_0 с помощью ровно одного переключения перекрёстка, то в трёхмерной сфере S^3 найдутся такие вложенные крашеные ленты с выделенным углом $B_1, B_2, \ldots, B_n$, что ленточное скольжение вдоль ленты B_i переводит кривую k_0 в кривую k_i, представляющую объемлемо-изотопический класс узла K_i. Для каждой ленты B_i, где $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, пересечение $B_i \cap k_0$ состоит из двух дуг, одна из которых содержит выделенный угол ленты. Дугу с выделенным углом будем называть *началом* ленты B_i, а оставшуюся дугу, соответственно, её *концом*.

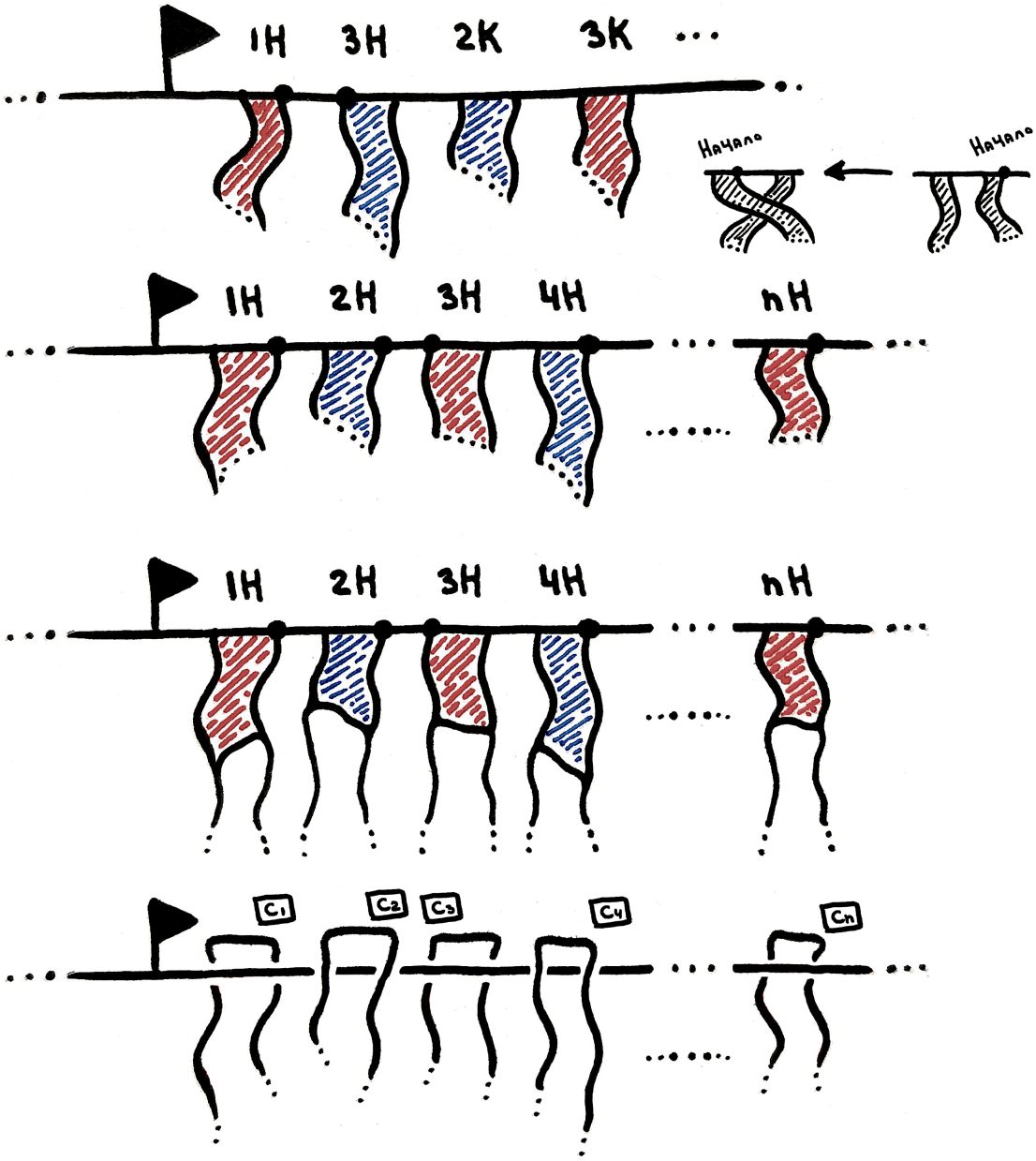


Рисунок 3.5 – Скольжение лент вдоль кривой и дальнейшие элементарные изотопии.

Оставляя конец ленты неподвижным и скользя её началом вдоль кривой k_0 (двигаясь внутри малой трубчатой окрестности и не пересекая началом ленты её конца), можно привести набор лент $B_1, B_2, \ldots, B_n$ к такому положению, в котором их начала расположены в порядке нумерации на малой дуге кривой k_0, смотри Рис. 3.5 (изотопное изменение положения каждой из лент гарантирует неизменность объемлемо-изотопического класса результата ленточного скольжения вдоль этой ленты). Если в результате изотопии ленты оказались пересекающимися, то можно устранить пересечения, сделав ленты достаточно «узкими» и воспользовавшись аргумен-

том общего положения. Оставшиеся элементарные изотопии, приводящие к формированию требуемой специальной диаграммы узла K_0, проиллюстрированы на Рис. 3.5 и Рис. 3.6.

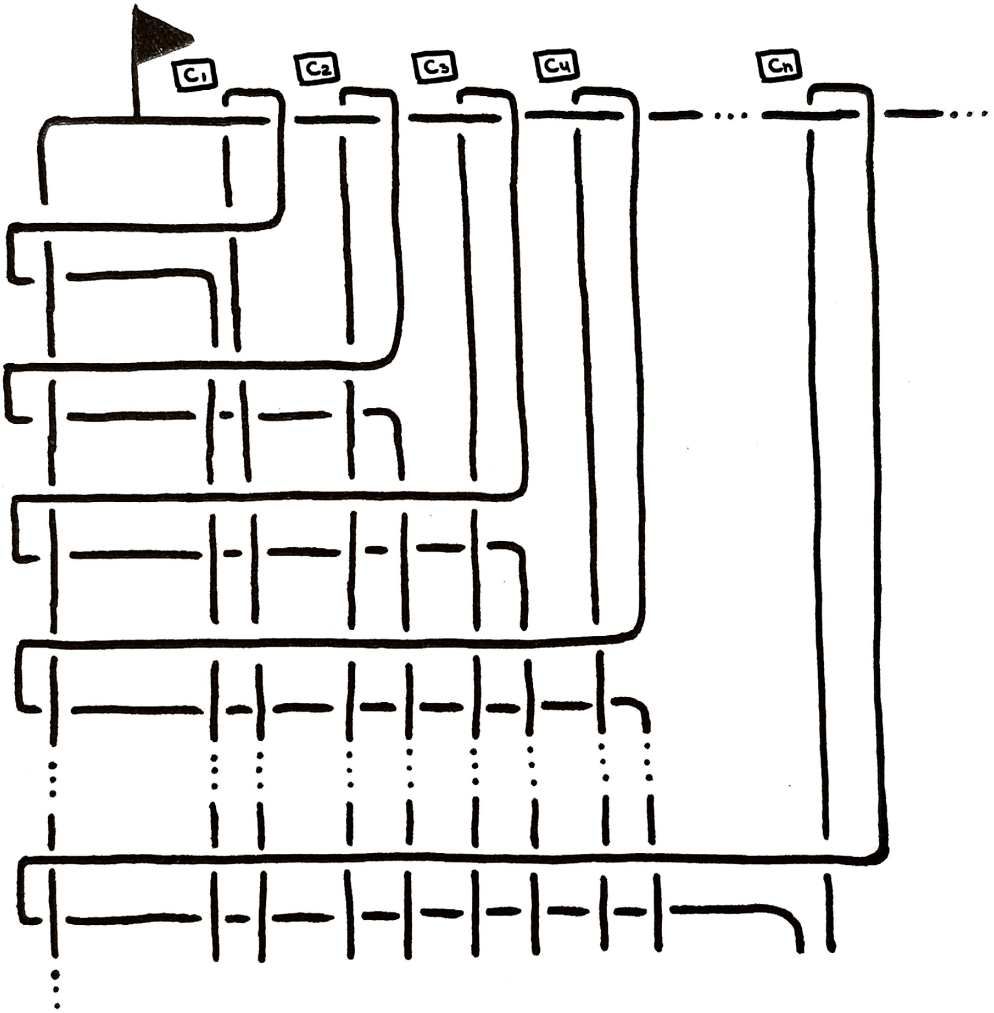


Рисунок 3.6 – Результат заключительной изотопии и набор выделенных перекрёстков.

□

3.1.4 Доказательство основной теоремы

Содержание настоящего подпараграфа составляет ответ на вопрос Хирасавы – Учиды, а именно доказательство теоремы 3, согласно которой в гордиевом графе G для любого $n \geq 2$ и любого подграфа-звезды на $n+1$ вершине существует подграф-клика на бесконечном числе вершин, каждая вершина которого смежна с каждой вершиной данного подграфа-звезды (напомним, что данное утверждение в случаях $n = 0, 1$ непосредственно вытекает из результата Хирасавы и Учиды, смотри работу [21, Theorem 1.3]).

Замечание 3.4 (Ответ на вопрос Хирасавы – Учиды)**.** Следствие 1, согласно которому в гордиевом комплексе $\mathcal{G}$ при $n \geq 0$ для каждого n-симплекса μ найдётся такой симплекс σ сколь угодно высокой размерности, что симплекс μ является гранью симплекса σ, немедленно вытекает из комбинации теоремы 3 и результата Хирасавы – Учиды (смотри работу [21, Theorem 1.3]).

Интерпретируя на языке переключения перекрёстков такие структурные элементы гордиева графа, как «подграф-звезда», «бесконечная клика» и «смежные вершины», приведём эквивалентную развёрнутую формулировку теоремы 3. Доказательство будет опираться на данную переформулировку и использовать соответствующую нотацию.

Переформулировка теоремы 3. *Пусть узлы $K_0, K_1, \ldots, K_n$, где $n \geq 2$, попарно не изотопны и пусть каждый из узлов $K_1, K_2, \ldots, K_n$ может быть преобразован в узел K_0 однократным применением преобразования переключения перекрёстка. Тогда найдётся бесконечное семейство попарно не изотопных узлов $\{J_m\}_{m=1}^{\infty}$, не содержащее узлов, объемлемо-изотопных узлам $K_0, K_1, \ldots, K_n$, и обладающее следующими свойствами*:

(1) для любых $k, m \geq 1$, где $k \neq m$, узел J_k получается из узла J_m однократным применением преобразования переключения перекрёстка;

(2) для любого $i \in \{0, 1, \ldots, n\}$ и любого $m \geq 1$ узел K_i получается из узла J_m однократным применением преобразования переключения перекрёстка.

Доказательство теоремы 3 проводится согласно следующей схеме:

∘ с опорой на лемму 3.3 и теорему Шуберта о конечности числа компаньонов предъявляется явное диаграмматическое описание семейства узлов $\{J_m\}_{m=1}^{\infty}$;

∘ исходя из геометрии предъявленных диаграмм устанавливается, что описанное семейство узлов удовлетворяет условиям (1) и (2) из переформулировки теоремы 3;

∘ вопрос бесконечности описанного семейства узлов при помощи леммы 3.1 сводится к проверке нерасщепимости для серии двухкомпонентных зацеплений, а нерасщепимость каждого из них устанавливается итеративным применением леммы 3.2.

Замечание 3.5. Доказательство теоремы 3 содержит серию геометрических построений, механизм формирования которых может быть не вполне прозрачен. Развёрнутый комментарий о внутренних закономерностях соответствующих конструкций составляет содержание следующего параграфа 3.2.

Доказательство теоремы 3. Пользуясь леммой 3.3, изобразим интересующую нас часть специальной диаграммы узла K_0, оснастив выделенные перекрёстки метками $\boxed{c_1}, \boxed{c_2}, \ldots, \boxed{c_n}$, смотри Рис. 3.7. Переключение перекрёстка с меткой $\boxed{c_i}$ преобразует данную диаграмму в диаграмму узла K_i.

Опираясь на предложенное локальное геометрическое устройство специальной диаграммы узла K_0, дадим явное диаграмматическое описание семейства узлов $\{J_m\}_{m=1}^{\infty}$. Узлы этого семейства строятся последовательно: при $m \geq 2$ построение диаграммы узла J_m опирается на устройство диаграммы узла J_{m-1}, а построение диаграммы узла J_1 опирается на устройство диаграммы некоторого вспомогательного узла J_0. Отметим, что узел J_0 имеет лишь промежуточную техническую роль и не включается в семейство $\{J_m\}_{m=1}^{\infty}$.

Начнём построение с явного диаграмматического описания узла J_0. Интересующая нас часть конструируемой диаграммы узла J_0 изображена на Рис. 3.8. Вне демонстрируемой области диаграмма узла J_0 совпадает с исходной специальной диаграммой узла K_0.

Опираясь на устройство предложенной диаграммы узла J_0, приведём явное диаграмматическое описание узла J_1. Для этого потребуется зафиксировать некоторый вспомогательный 2-тэнгл P_1^2, связанный с геометрией дополнений узлов $K_0, K_1, \ldots, K_n$. Требуемый 2-тэнгл P_1^2 строится следующим образом.

Согласно теореме Шуберта [58, Satz 6], множество $C(Q)$ всех компаньонов произвольного узла Q является конечным. Обозначим через P_1 произвольный простой узел, не принадлежащий конечному множеству узлов $\bigcup_{i=0}^{n} \mathrm{C}(K_i)$ (узел называется *простым*, если он не является связной суммой никаких двух нетривиальных узлов). Возьмём 1-тэнгл, заузленный в узел P_1 (имеется в виду, что факторизация по краю шара данного 1-тэнгла даёт трёхмерную сферу с узлом P_1), смотри Рис. 3.9. Удвоим нить данного 1-тэнгла, сдвинув её вдоль заданного на ней произвольным образом

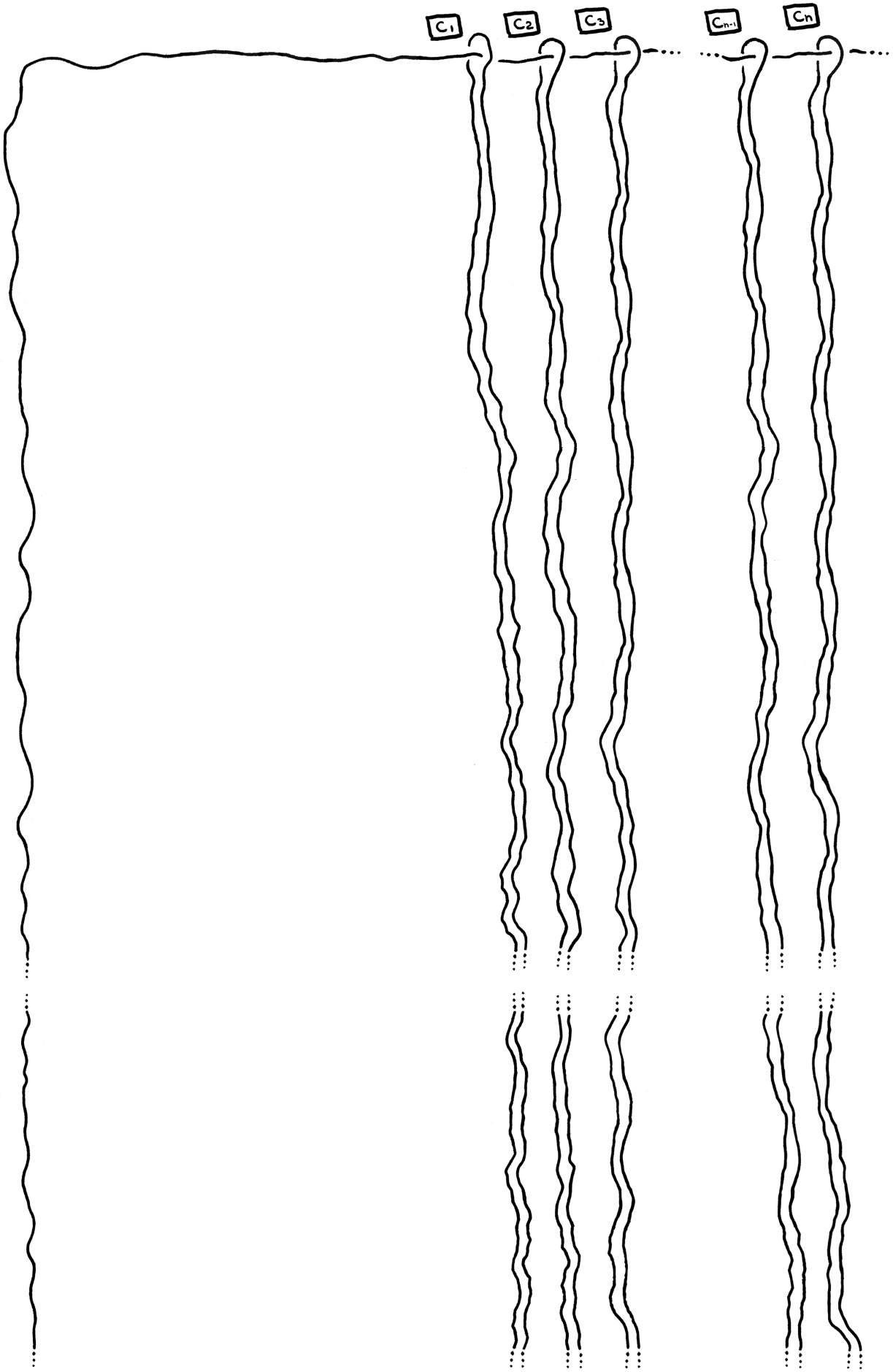


Рисунок 3.7 – Часть специальной диаграммы узла K_0.

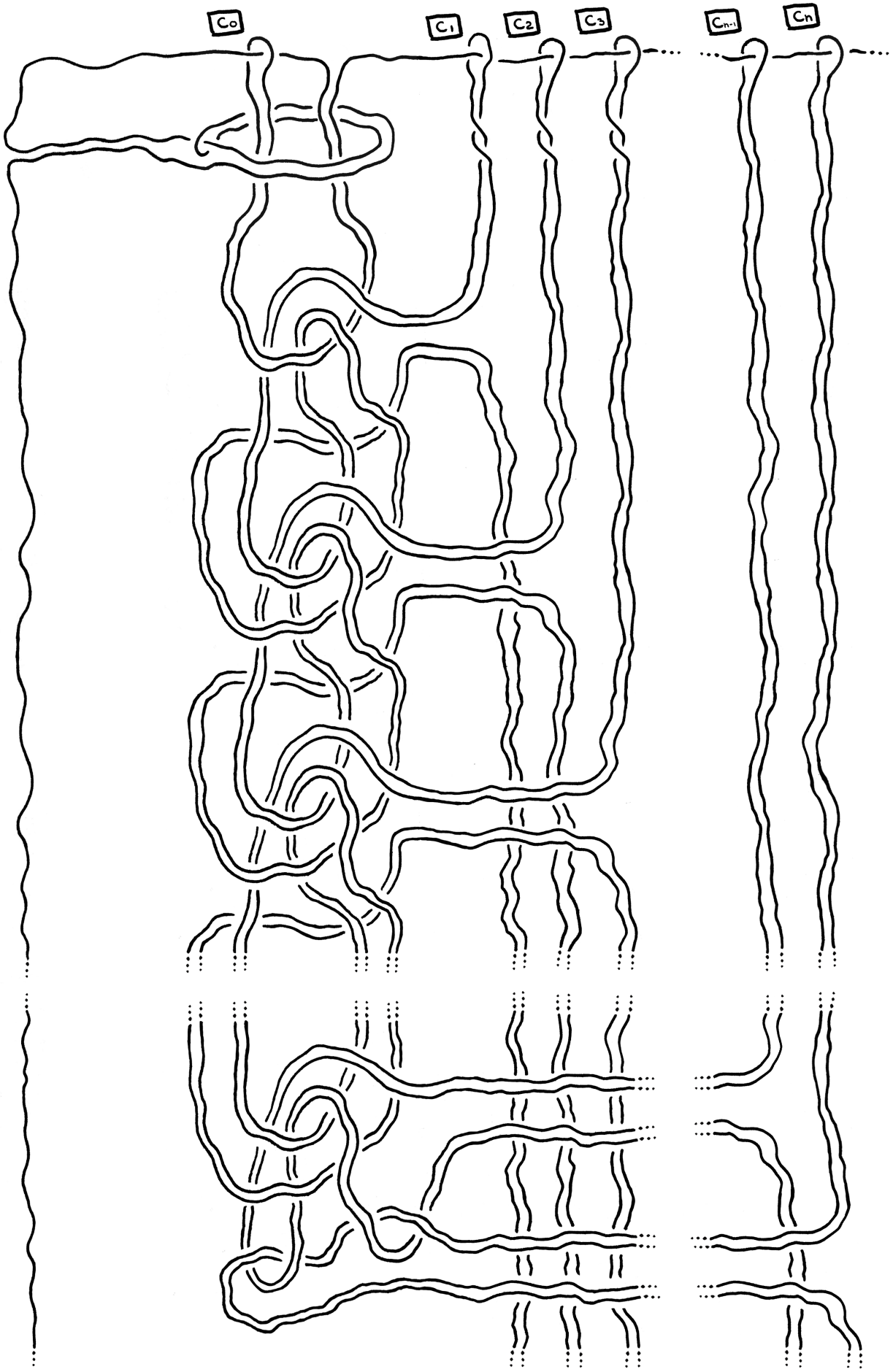


Рисунок 3.8 – Часть диаграммы, определяющей вспомогательный узел J_0.

непрерывного нормального векторного поля (смотри Рис. 3.9). Полученный таким образом 2-тэнгл обозначим через P_1^2.

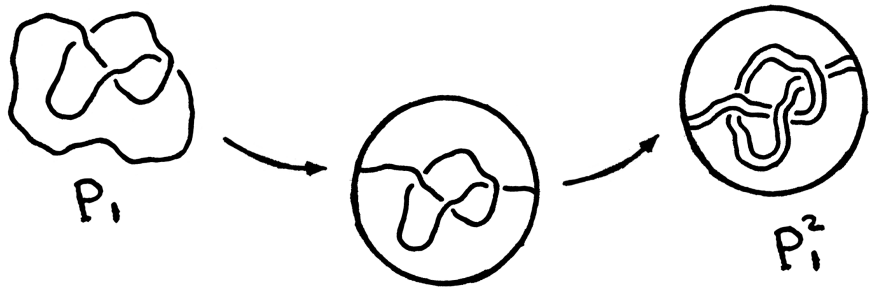


Рисунок 3.9 – Формирование вспомогательного тэнгла P_1^2 из узла P_1.

Изложенное выше позволяет дать явное диаграмматическое описание узла J_1. Интересующая нас часть конструируемой диаграммы узла J_1 изображена на Рис. 3.11. Данная диаграмма согласованно включает в себя диаграмму построенного ранее 2-тэнгла P_1^2 (см. Рис. 3.10, справа) и содержит выделенный перекрёсток с меткой $\boxed{1}$. Вне демонстрируемой области диаграмма узла J_1 совпадает с исходной специальной диаграммой узла K_0.

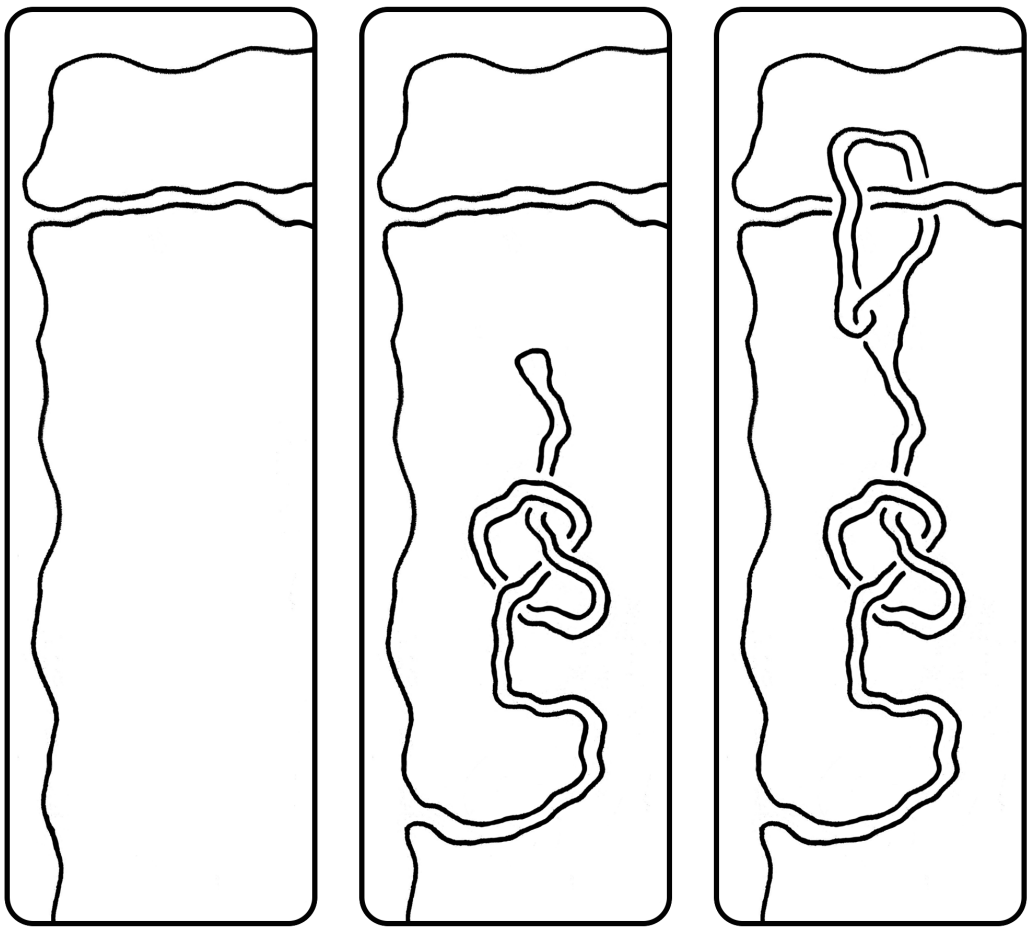


Рисунок 3.10 – Завязывание петли и «застёгивание застёжки».

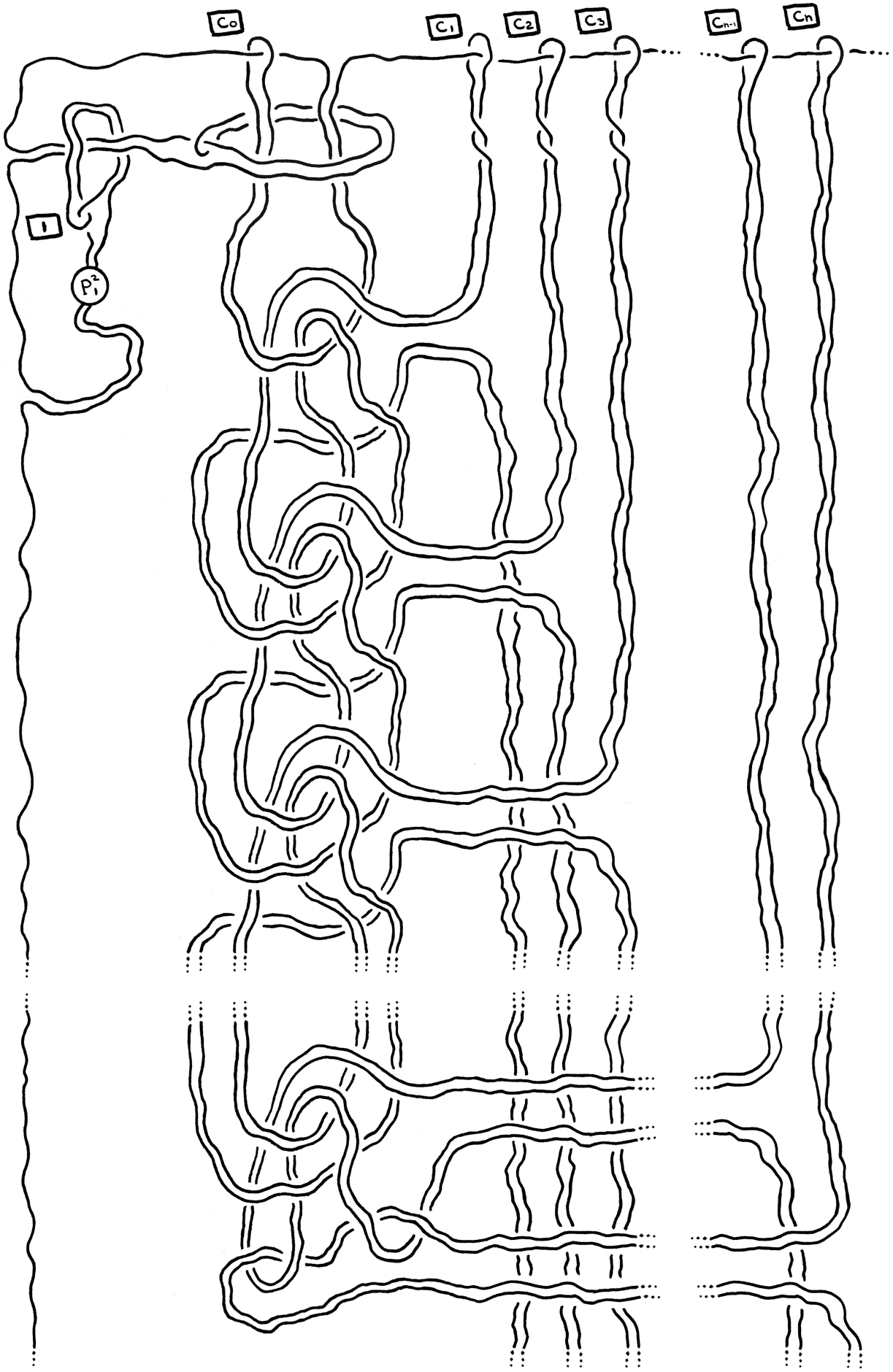


Рисунок 3.11 – Часть диаграммы, определяющей узел J_1.

Говоря более геометрически, узел J_1 получается из узла J_0 следующей операцией, проиллюстрированной на Рис. 3.10. Захватив нить узла J_0 в левой нижней части диаграммы на Рис. 3.10, сформируем из неё небольшую вытянутую петлю и завяжем эту петлю в узел P_1. Затем обернём нашу петлю вокруг пары нитей верхней части диаграммы узла J_0 и переключим перекрёсток с меткой $\boxed{1}$, будто бы «застёгивая застёжку».

Теперь приведём явное диаграмматическое описание узла J_m при условии, что $m \geq 2$. Считая, что узлы $J_1, J_2, \ldots, J_{m-1}$ были построены на предыдущих шагах, зафиксируем произвольный простой узел P_m, не принадлежащий конечному множеству узлов $\bigcup_{i=0}^{n} \mathrm{C}(K_i) \cup \bigcup_{k=1}^{m-1} \mathrm{C}(J_k)$. Аналогично тому, как из узла P_1 был сформирован 2-тэнгл P_1^2, сформируем из узла P_m некоторый 2-тэнгл P_m^2.

Интересующая нас часть конструируемой диаграммы узла J_m изображена на Рис. 3.12. Данная диаграмма согласованно включает в себя диаграммы построенных ранее 2-тэнглов $P_1^2, P_2^2, \ldots, P_m^2$ и содержит набор выделенных перекрёстков с метками $\boxed{1}$, $\boxed{2}$, …, $\boxed{m}$. Вне демонстрируемой области диаграмма узла J_m совпадает с исходной специальной диаграммой узла K_0.

Аналогично можно сказать, что узел J_m получается из узла J_{m-1} операцией, проиллюстрированной на Рис. 3.10, только соответствующую петлю следует обернуть не вокруг пары нитей в верхней части диаграммы, а вокруг аналогичной петли, сформированной на предыдущем шаге в процессе построения узла J_{m-1} (смотри Рис. 3.12 и Рис. 3.10).

Заметим, что любые два узла J_i и J_k при $i \neq k$ и $i, k \geq 1$ получаются друг из друга с помощью одного переключения перекрёстка. Действительно, не умаляя общности предположим, что $i > k$. Тогда переключение перекрёстка с меткой $\boxed{k+1}$ преобразует диаграмму узла J_i в диаграмму узла J_k. Кроме того, как видно из Рис. 3.12, переключение перекрёстка с меткой $\boxed{c_j}$ преобразует диаграмму узла J_m в диаграмму узла K_j для любого $j \in \{0, 1, \ldots, n\}$ и любого $m \geq 1$.

Теперь покажем, что при $m, k \geq 1$, $k \neq m$ и $i \in \{0, 1, \ldots, n\}$ узлы J_m, J_k и K_i попарно не изотопны. Не умаляя общности будем считать, что $k < m$. По построению для каждого $m \geq 1$ можно выделить в трёхмерной сфере полноторий $W \subset S^3$, заузленный в узел P_m и содер-

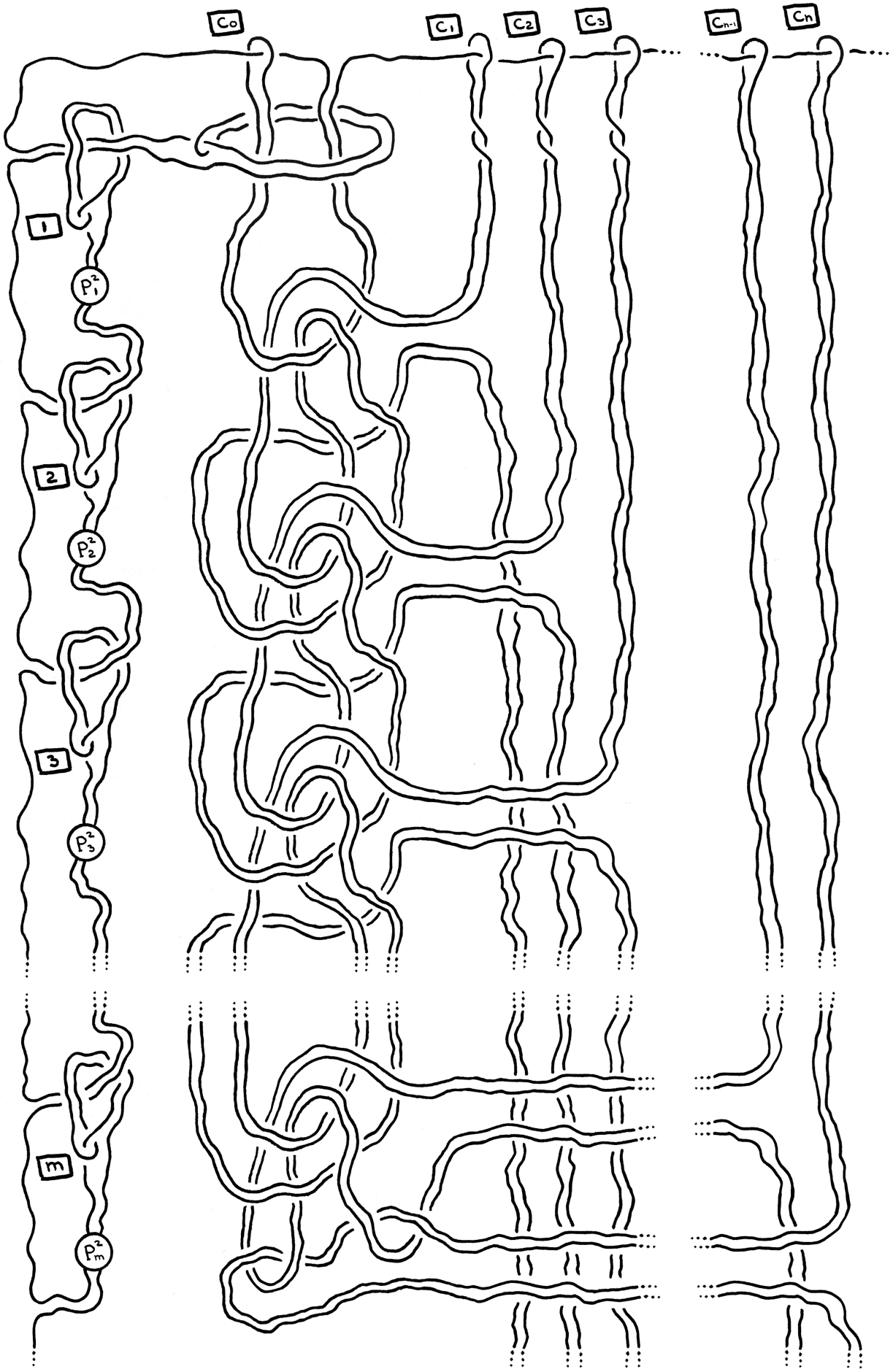


Рисунок 3.12 – Часть диаграммы, определяющей узел J_m.

жащий узел J_m (смотри Рис. 3.13). Несложно заметить, что граничный тор ∂W этого полнотория не является параллельным краю в многообразии $S^3 \setminus \mathrm{Int}\big(N(J_m)\big)$, где через $N(J_m)$ обозначена замкнутая трубчатая окрестность узла J_m. Действительно, если тор параллелен краю в данном многообразии, то любая его меридиональная кривая имеет с узлом J_m коэффициент зацепления, равный ± 1 (после снабжения соответствующих кривых произвольными ориентациями).

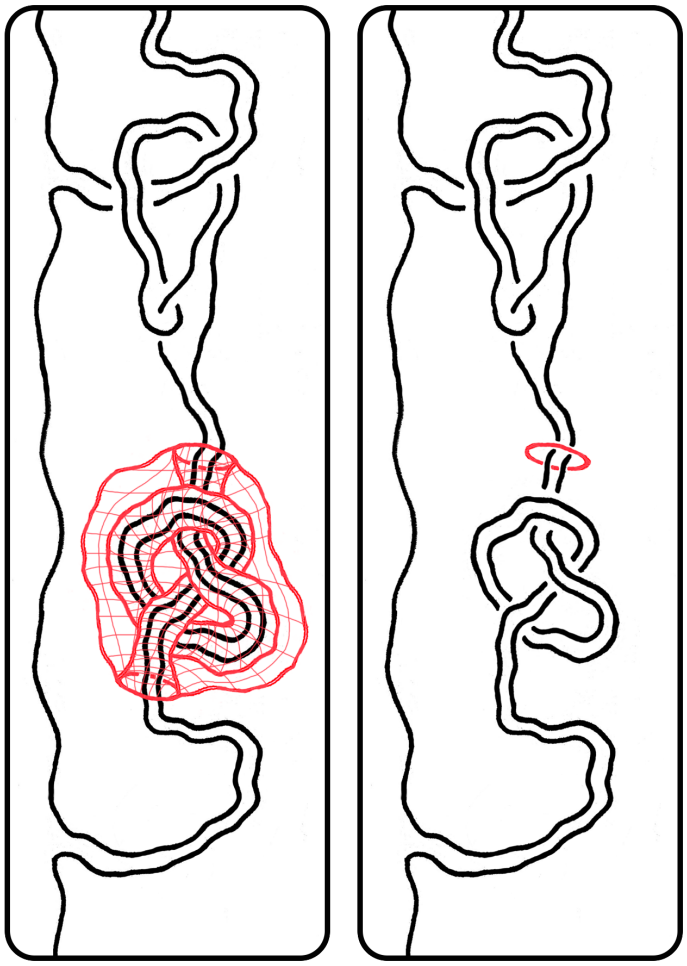


Рисунок 3.13 – Красный заузленный тор несжимаем в многообразии $S^3 \setminus \mathrm{Int}\big(N(J_m)\big)$ тогда и только тогда, когда красная меридиональная кривая образует с узлом J_m нерасщепимое зацепление.

Однако, как видно из Рис. 3.13, каждая меридиональная кривая тора ∂W имеет с узлом J_m нулевой коэффициент зацепления. Таким образом, если тор ∂W несжимаем в многообразии $S^3 \setminus \mathrm{Int}\big(N(J_m)\big)$, то, согласно замечанию 3.1, узел P_m является компаньоном узла J_m. Так как узел P_m по построению не является компаньоном ни для узла J_k при $k < m$, ни для узла K_i при $i \in \{0, 1, \ldots, n\}$, для завершения доказательства достаточно

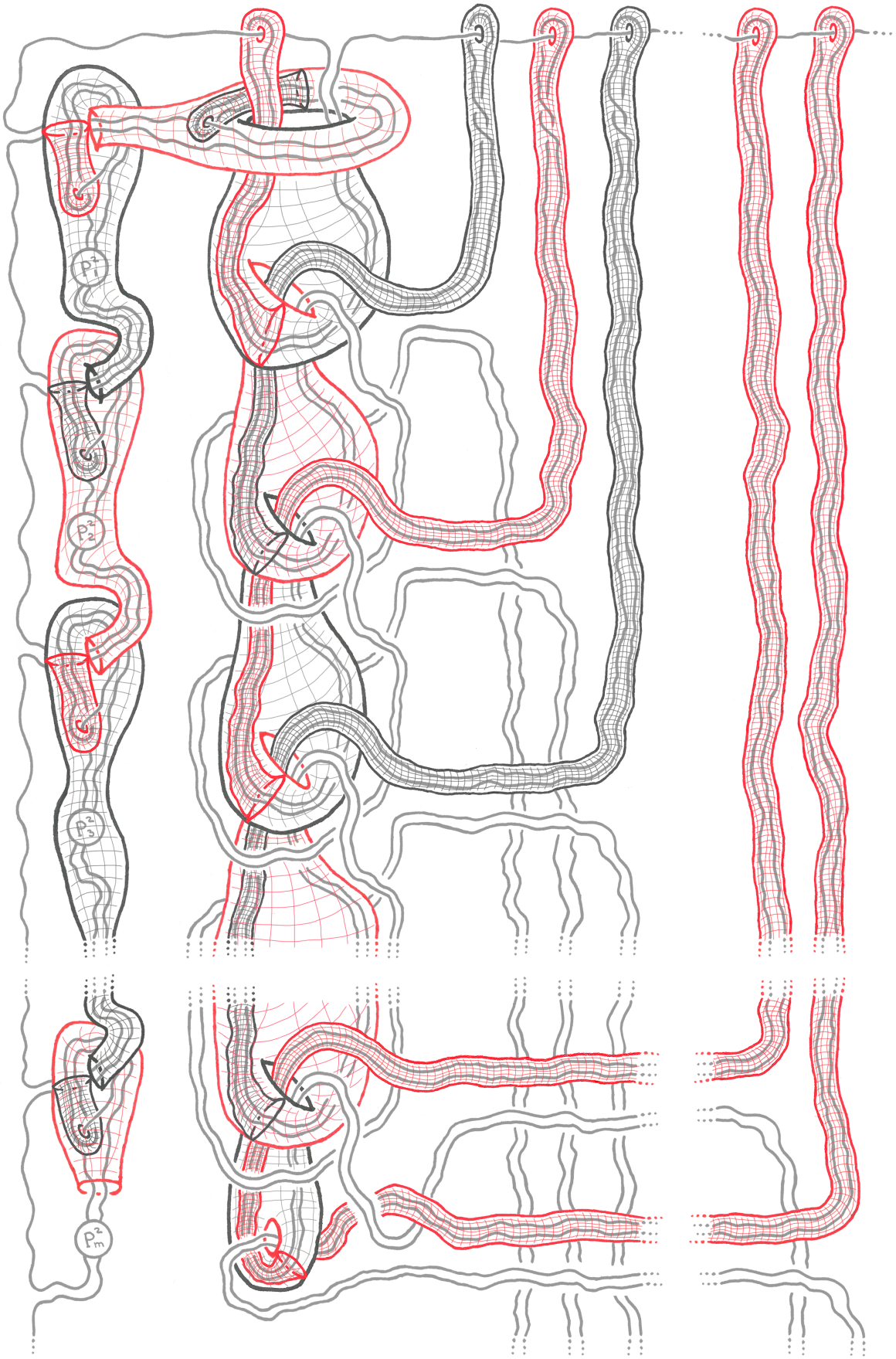


Рисунок 3.14 – Изображённый гроп подтверждает нерасщепимость зацепления, образованного красной меридиональной кривой полнотория W и узлом J_m.

проверить несжимаемость тора ∂W в многообразии $S^3 \setminus \mathrm{Int}\big(N(J_m)\big)$.

Несжимаемость тора ∂W в многообразии $S^3 \setminus \mathrm{Int}\big(N(J_m)\big)$ следует из несжимаемости тора ∂W в многообразии $S^3 \setminus J_m$, а по лемме 3.1 тор ∂W несжимаем в многообразии $S^3 \setminus J_m$ тогда и только тогда, когда меридиональная кривая полнотория W образует с узлом J_m нерасщепимое зацепление. Покажем, что меридиональная кривая полнотория W образует с узлом J_m нерасщепимое зацепление с помощью итеративного применения леммы 3.2. Сначала построим такой незаузленный тор с дырой H в многообразии $S^3 \setminus J_m$, что меридиональная кривая полнотория W является его граничной окружностью ∂H. По лемме 3.2 это сводит исходную задачу к проверке того, что каждая из двух кривых меридионально-параллельной пары тора с дырой H образует с узлом J_m нерасщепимое зацепление. Для каждой из этих кривых построим собственный незаузленный тор с дырой в многообразии $S^3 \setminus J_m$ и будем продолжать процесс рекурсивно. Итерации будут продолжаться до тех пор, пока на каком-то шаге нерасщепимость требуемых зацеплений не будет проверяться с помощью подсчёта коэффициента зацепления (с предварительным введением на зацеплениях ориентации произвольным образом). Как показано на рисунке 3.14, описанный процесс обязательно завершится — потребуется построить $2m + 2n + 3$ торов с дырой. Для более детальной иллюстрации пошагового построения получающегося гропа смотри Приложение А. Построенный гроп подтверждает нерасщепимость зацепления, образованного меридиональной кривой полнотория W и узлом J_m, что и требовалось. Это завершает доказательство. □

3.2 Взгляд на конструкцию с точки зрения теории класперов Гусарова – Хабиро

В настоящем параграфе изложена своего рода экспликация к предложенному в доказательстве теоремы 3 диаграмматическому заданию семейства узлов $\{J_m\}_{m=1}^{\infty}$. Действительно, существенную роль в доказательстве теоремы 3 играет диаграмматический паттерн, представленный на Рис. 3.8 и на последующих иллюстрациях. Геометрия этого паттерна имеет «бруннову» природу и позволяет связать узел J_m с узлами из набора $K_0, K_1, \ldots, K_n$. Идея конструкции и процесс построения соответствующего паттерна будут последовательно реконструированы с опорой на аппарат теории класперов Гусарова – Хабиро.

Устройство специальной диаграммы узла K_0, часть которой изображена на Рис. 3.7, предписывает идею построения диаграммы конструируемого далее узла J_0. Часть этой шаблонной диаграммы изображена на Рис. 3.15. Сектор, обозначенный на Рис. 3.15 через «Brunn^2», должен содержать некоторую «удвоенную» бруннову косу на $n+1$ нити. Заметим, что в таком случае переключение перекрёстка с меткой $\boxed{c_i}$ на диаграмме, сформированной по предложенному шаблону, преобразует её в диаграмму узла K_i.

Однако методы, предложенные в доказательстве теоремы 3, накладывают некоторые ограничения на расположение этого «бруннового» паттерна в пространстве. Располагая в секторе «Brunn^2» некоторую «удвоенную» бруннову косу в стандартном визуальном представлении, можно столкнуться с проблемой следующего характера: строящийся в заключительной части доказательства теоремы 3 гроп (если и существует) принимает слишком сложную форму.

Воспользуемся техниками теории класперов Гусарова – Хабиро, чтобы продемонстрировать процесс построения предложенного в доказательстве теоремы 3 «бруннова» паттерна визуально удобной формы. Будем использовать общепринятые графические обозначения для класперов и хирургий Дена по оснащённым зацеплениям (смотри, например, работу [13]). Оснащения на класперах будем предполагать тривиальными.

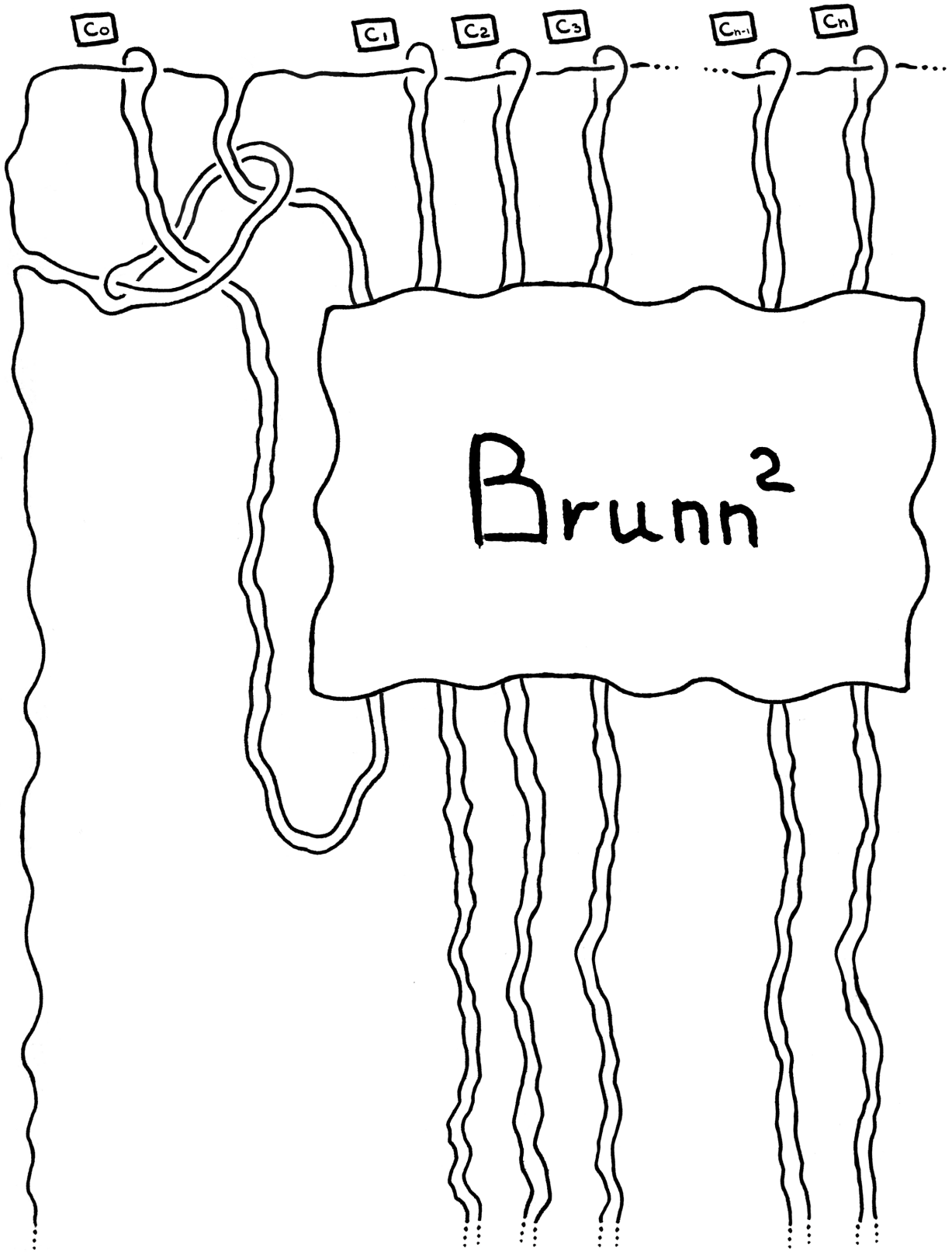


Рисунок 3.15 – Шаблон, служащий основанием для построения узла J_0. Пары нитей формируют «удвоенную» бруннову косу на $n+1$ нити.

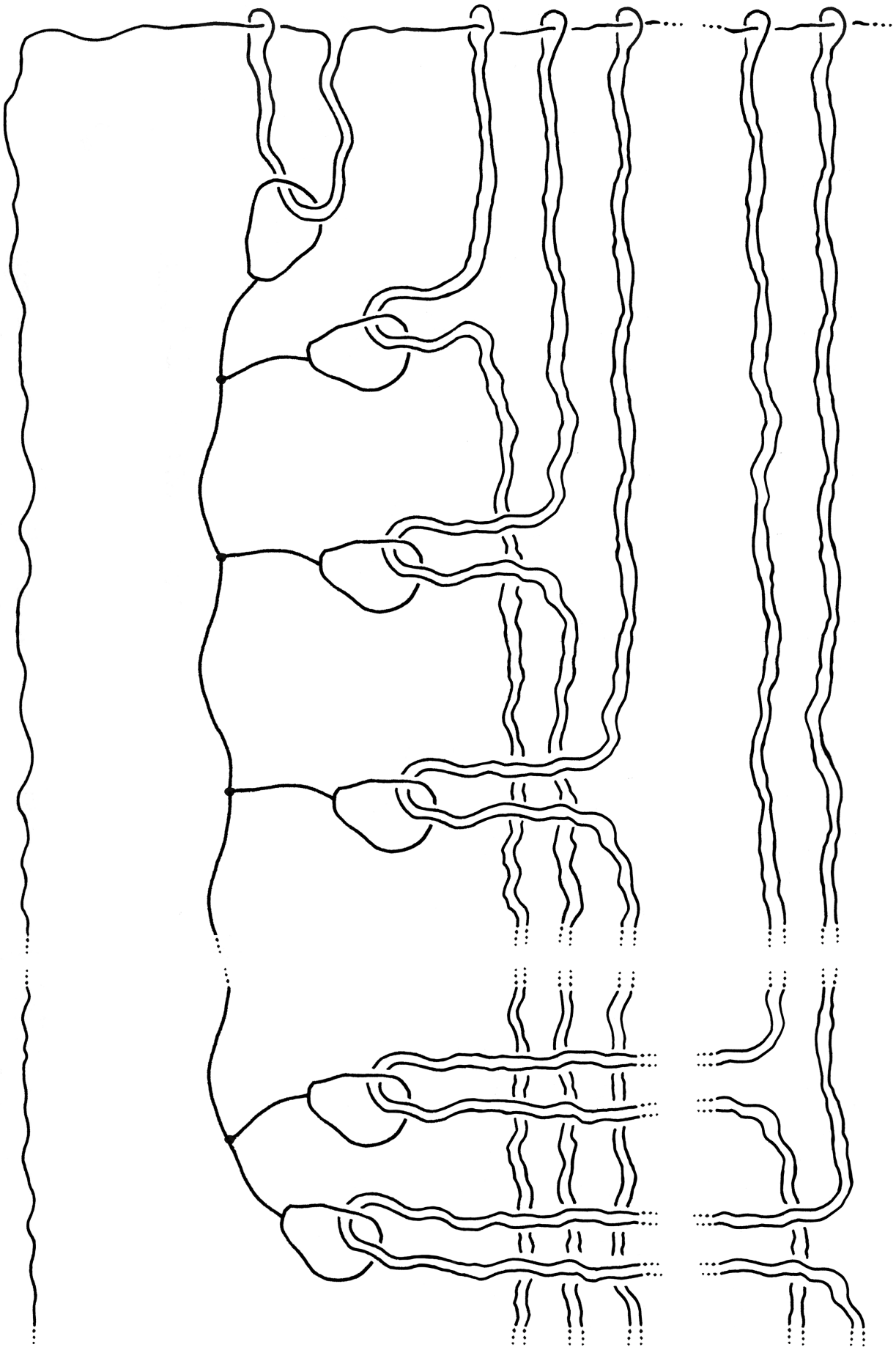


Рисунок 3.16 – Класпер в дополнении узла K_0.

Начнём с изотопии специальной диаграммы узла K_0 (данная диаграмма представлена на Рис. 3.7) и построения в дополнении узла K_0 некоторого класпера (смотри Рис. 3.16).

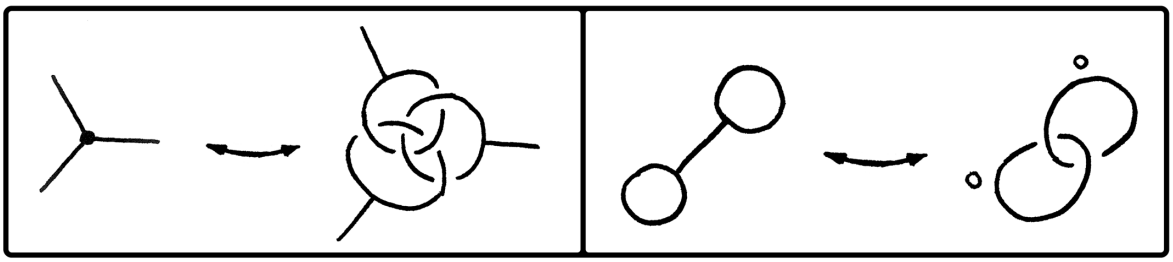


Рисунок 3.17 – Разложение класпера на элементарные класперы и переход к хирургической диаграмме.

Разложим построенный класпер на элементарные класперы (смотри Рис. 3.17) и изобразим соответствующую данному класперу хирургическую диаграмму в виде оснащённого зацепления в дополнении узла K_0 (смотри Рис. 3.17 и Рис. 3.18). Заметим, что хирургия по соответствующему оснащённому зацеплению не меняет объемлющее многообразие.

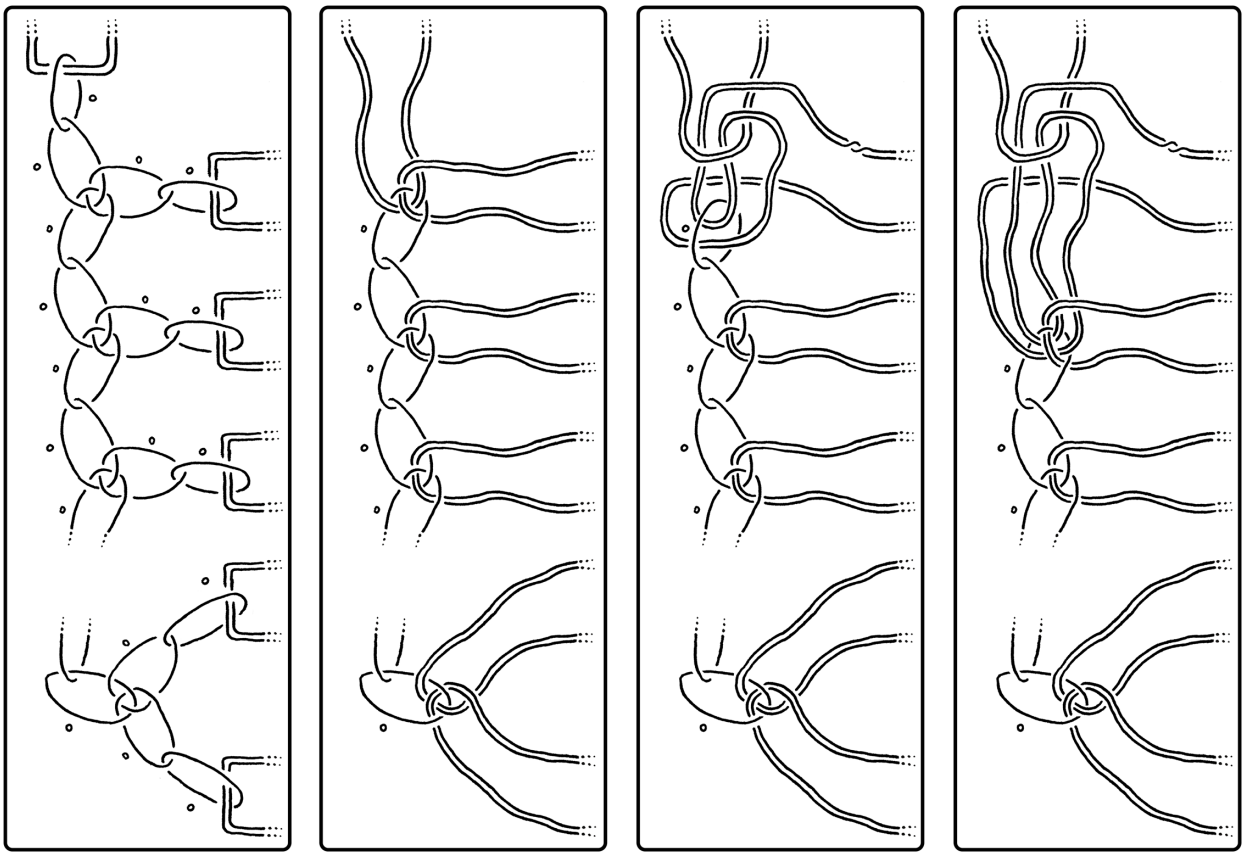


Рисунок 3.18 – Хирургическая диаграмма, соответствующая построенному класперу.

Представленная хирургическая диаграмма позволяет как явно изобразить требуемый для доказательства теоремы 3 гроп (смотри работу [13, Fig. 23, Theorem 26′]), так и убедиться в «брунновости» паттерна (смотри работу [19, Proposition 5.10 и Theorem 3.17]). Отметим, что образующие гроп незаузленные торы с дырой, изображённые на соответствующем рисунке в работе [13, Fig. 23], частично расположены внутри хирургических полноториев (в отличие от Рис. 3.14, где все торы с дырой видны явно).

Однако и от хирургической диаграммы можно избавиться с помощью следующего замечания. Как показывает Рис. 3.18, устройство хирургической диаграммы позволяет провести протаскивание нитей узла сквозь хирургические компоненты, не изменяя при этом изотопический тип узла. В результате протаскивания очередная тривиальная компонента хирургической диаграммы (в силу нулевого оснащения и «незацепленности» за узел) отменяет вклад «зацепленной» за неё компоненты хирургической диаграммы, и обе они устраняются с изображения. Последовательное устранение каждой из компонент хирургической диаграммы описанным способом приводит к «брунновому» паттерну из доказательства теоремы 3, изображённому на Рис. 3.8.

3.3 Следствия основной теоремы

Теорема 3 допускает серию несколько неожиданных геометрических следствий, связанных с глобальным устройством гордиева графа G и гордиева комплекса $\mathcal{G}$. Изложению данных следствий и посвящён настоящий параграф. Содержание первого подпараграфа составляет доказательство асимптотического следствия, смежного с результатом теоремы 2. В рамках второго подпараграфа излагается следствие о структуре $\mathbb{R}^\infty$-многообразия на геометрической реализации гордиева комплекса $\mathcal{G}$. Завершает параграф доказательство теоремы о связности «единичных окрестностей» вершин гордиева графа G.

3.3.1 Асимптотическое следствие о локально-конечных подграфах

Содержание настоящего подпараграфа составляет доказательство следствия 2, согласно которому связность гордиева графа G не нарушается при удалении любого индуцированного локально-конечного подграфа. Более того, расстояние между любыми двумя вершинами в соответствующем дополнении совпадает с исходным расстоянием между ними в гордиевом графе G.

Напомним, что подграф F заданного графа Γ называется *индуцированным*, если любое ребро графа Γ, оба конца которого принадлежат подграфу F, также является ребром подграфа F. Подграф называется *локально-конечным*, если каждая его вершина имеет конечную валентность (в этом подграфе). Кроме того, будем называть *дополнением* к подграфу F в графе Γ граф $\Gamma \setminus \mathrm{Vert}(F)$.

Доказательство следствия 2. Пусть вершины a и b лежат в дополнении к индуцированному локально-конечному подграфу F гордиева графа G. Обозначим через γ кратчайший путь между вершинами a и b в гордиевом графе G и покажем, что путь γ можно заменить путём той же длины, но целиком лежащим в дополнении подграфа F.

Предположим, что некоторая вершина x на пути γ не принадлежит указанному дополнению, и обозначим через v и w пару вершин-соседей вершины x на пути γ. По теореме 3 существует такое бесконечное семейство вершин $\{k_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, в котором каждая вершина k_n смежна как с вершиной v, так и с вершиной w, а любые две различные вершины семейства $\{k_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ смежны между собой. Семейство вершин $\{k_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ не может целиком содержаться в подграфе F в силу локальной-конечности этого подграфа, откуда следует, что в дополнении подграфа F найдётся некоторая вершина $x' \in \{k_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Заменим рёбра $[v, x]$ и $[x, w]$ пути γ на рёбра $[v, x']$ и $[x', w]$ соответственно и будем итерировать описанный процесс до тех пор, пока все вершины пути γ не окажутся в дополнении подграфа F. Длина пути γ в ходе этого процесса останется неизменной. □

Замечание 3.6. Заметим, что следствие 2 вытекает из более раннего результата, полученного автором в работе [47, Theorem 1].

3.3.2 Гордиев комплекс является $\mathbb{R}^\infty$-многообразием

В настоящем подпараграфе приводится доказательство следствия 3, согласно которому геометрическая реализация гордиева комплекса $\mathcal{G}$ является $\mathbb{R}^\infty$-многообразием. В доказательстве следствия 3 используются обозначения и терминология, принятые в работе [55].

Доказательство следствия 3. Комбинация теорем 6.11.1 и 6.12.2 из работы [55] позволяет сформулировать следующую характеризацию: геометрическая реализация $|\mathcal{K}|$ счётного симплициального комплекса $\mathcal{K}$ является $\mathbb{R}^\infty$-многообразием тогда и только тогда, когда линк $Lk(\sigma, \mathcal{K})$ каждого его симплекса σ непуст и стягиваем. Заметим, что гордиев комплекс $\mathcal{G}$ является счётным, а теорема 3 гарантирует непустоту линка для каждого симплекса в гордиевом комплексе. Покажем стягиваемость линка $Lk(\sigma, \mathcal{G})$ для каждого симплекса σ в гордиевом комплексе $\mathcal{G}$. Для этого достаточно показать, что линк вместе с каждым своим конечным подкомплексом содержит некоторый конус над ним.

Обозначим через $s_1, s_2, \ldots, s_m$ вершины произвольного симплекса σ в гордиевом комплексе $\mathcal{G}$ (заметим, что тогда индуцированный подграф гордиева графа на данном наборе вершин является полным). По определению в линке симплекса σ содержатся все такие симплексы ξ, что $\sigma \cap \xi = \varnothing$ и множество вершин из объединения $\sigma \cup \xi$ образует симплекс в комплексе. В случае гордиева комплекса $\mathcal{G}$ это означает, что индуцированный подграф гордиева графа на множестве вершин $z_1, z_2, \ldots, z_k$ симплекса ξ является полным, а также, что каждая вершина z_i соединена ребром с каждой вершиной s_j для $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$ и $j \in \{1, 2, \ldots, m\}$.

Обозначим через $t_1, t_2, \ldots, t_l$ вершины произвольного конечного подкомплекса τ в линке $Lk(\sigma, \mathcal{G})$. Каждая из этих вершин соединена ребром с вершиной s_1 симплекса σ, так как каждая из этих вершин является вершиной некоторого симплекса из линка симплекса σ. Таким образом, в гордиевом графе существует подграф-звезда на множестве вершин $s_1, s_2, \ldots, s_m, t_1, t_2, \ldots, t_l$ с центральной вершиной s_1. По теореме 3

в гордиевом графе существует вершина v, соединённая ребром с каждой вершиной этого подграфа-звезды и не совпадающая ни с одной из них. В частности, вершина v соединена ребром с каждой вершиной симплекса σ, а значит лежит в линке $Lk(\sigma, \mathcal{G})$. Построенный джойн конечного подкомплекса τ и вершины v является искомым конусом. □

3.3.3 Связность единичных окрестностей

Содержание настоящего подпараграфа составляет доказательство теоремы 1.1, согласно которой для любого узла K семейство $S_1(K)$ всех таких узлов X, что $d_G(K, X) = 1$, является связным семейством в рамках гордиева графа G.

Доказательство теоремы 1.1. В процессе доказательства следствия 3 была установлена стягиваемость линка каждого из симплексов гордиева комплекса $\mathcal{G}$, а следовательно и стягиваемость линков всех вершин, откуда следует требуемое. □

ГЛАВА 4 ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Настоящая глава завершает диссертацию и содержит краткое резюме полученных результатов, а также серию открытых вопросов, сформированную в процессе исследований.

4.1 Основные результаты диссертации

Основные результаты диссертации относятся к классической теории узлов и зацеплений и описывают ряд геометрических свойств гордиевых графов преобразований узлов и зацеплений. Одним из ключевых результатов диссертации является выявление в структуре гордиева графа G богатого регулярного паттерна: для каждого подграфа-звезды в данном графе существует бесконечная клика, каждая вершина которой смежна с каждой вершиной данного подграфа-звезды. Этот результат влечёт ряд других результатов, часть которых включена в серию основных результатов диссертации: с его помощью был получен ответ на вопрос Хирасавы – Учиды о достраивании произвольного симплекса в гордиевом комплексе $\mathcal{G}$ до симплекса сколь угодно высокой размерности, а также было обнаружено, что геометрическая реализация гордиева комплекса $\mathcal{G}$ обладает структурой $\mathbb{R}^\infty$-многообразия. Кроме того, в качестве одного из основных результатов диссертации выступает ещё одно проявление упомянутого регулярного паттерна: сильное асимптотическое следствие, связанное с удалением локально-конечных подграфов из гордиева графа G. К числу основных результатов диссертации также относятся ответ на вопрос Жиса – Гамбаду о числе концов гордиева графа G и установление внешней доминации семейства всех двухкомпонентных брунновых зацеплений над семейством всех узлов в рамках графа ленточных хирургий G_B^L.

Кроме перечисленных основных результатов, в диссертацию также включены несколько периферийных наблюдений о связности семейства двухкомпонентных брунновых зацеплений, о пустоте класса ультралернейских узлов, о связности «единичных окрестностей» вершин гордиева графа G, а также элементарное доказательство теоремы Марше о слабой характеризации асимптотического поведения гордиева графа G.

4.2 Открытые вопросы

Настоящий параграф посвящён изложению серии открытых вопросов о геометрическом устройстве гордиевых графов преобразований зацеплений, а также других так называемых «больших графов» преобразований маломерных объектов. Представленные вопросы разбиты на тематические группы и снабжены краткими мотивирующими комментариями. По мнению автора, ключевым вопросом в рамках современного состояния теории является вопрос 7.

4.2.1 Внешне доминирующие и связные семейства зацеплений

Согласно работе [9, Теорема 8], семейство сателлитных узлов внешне доминирует над семейством всех узлов в рамках графа ленточных хирургий G_B^L, что, в контексте классификации Тёрстона, наталкивает на следующий вопрос.

Вопрос 1. Верно ли, что семейство гиперболических узлов внешне доминирует над семейством всех узлов в рамках графа ленточных хирургий G_B^L?

Согласно работе [9, Теорема 11], семейство составных узлов связно в рамках графа ленточных хирургий G_B^L, что наталкивает на следующий вопрос (данный вопрос интересен также по отношению к семейству гиперболических узлов и семейству сателлитных узлов).

Вопрос 2. Верно ли, что семейство простых узлов связно в рамках графа ленточных хирургий G_B^L?

Согласно теореме 1.1, «единичные окрестности» вершин гордиева графа G являются связными, что наталкивает на следующий вопрос.

Вопрос 3. Верно ли, что для любого узла K и любого числа $n \in \mathbb{N}$ семейство $S_n(K)$ всех таких узлов X, что $d_G(K, X) = n$, является связным семейством в рамках гордиева графа G?

Согласно теореме 1, семейство двухкомпонентных брунновых зацеплений внешне доминирует над семейством всех узлов в рамках графа ленточных хирургий G_B^L, а согласно замечанию 1.4, данное семейство несвязно в рамках данного графа, что наталкивает на следующий вопрос.

Вопрос 4. Существует ли связное семейство зацеплений, внешне доминирующее над семейством всех узлов в рамках графа ленточных хирургий G_B^L? А в рамках гордиева графа зацеплений G^L?

4.2.2 Геометрические паттерны в больших графах

Будем говорить, что граф обладает *регулярным* [$\star$]-*паттерном*, если для любого $n \geq 0$ и любого подграфа-звезды на $n+1$ вершине в данном графе существует бесконечная клика, каждая вершина которой смежна с каждой вершиной данного подграфа-звезды. Согласно теореме 3, гордиев граф G обладает регулярным [$\star$]-паттерном, что наталкивает на следующий вопрос.

Вопрос 5. Гордиевы графы каких преобразований узлов и зацеплений обладают регулярным [$\star$]-паттерном?

Аналогичный вопрос интересен по отношению к ряду так называемых «больших графов» — графов преобразований различных маломерных объектов. В их числе большой граф Дена [22], большой граф Жиса [59] и большой граф Ливингстона [40]. Отдельный интерес также представляет обнаружение в структурах подобных графов и других регулярных паттернов, например, паттерна Баадера [7] или его вариаций.

Согласно построениям, приведённым в доказательстве теоремы 3, многочлены Александера узлов, соответствующих вершинам формируемой бесконечной клики, совпадают. Предвосхищая подобную особенность потенциальных конструкций, Хирасава и Учида в работе [21] приводят частный случай следующего вопроса.

Вопрос 6. Верно ли, что для любого $n \geq 0$ и любого подграфа-звезды на $n+1$ вершине в гордиевом графе G существует бесконечная клика, каждая вершина которой смежна с каждой вершиной данного подграфа-звезды, и ни у каких двух вершин данной клики многочлены Александера соответствующих им узлов не совпадают?

Аналогичный вопрос интересен по отношению к любому числовому или полиномиальному инварианту узлов, вычислимому комбинаторно, поскольку в рамках предложенного доказательства теоремы 3 задача дифференциации узлов решается привлечением серии геометрических техник.

4.2.3 Гомотопический тип гордиевых комплексов

Наряду с вопросом, ответ на который составляет следствие 1, в работе Хирасавы и Учиды [21] приводится следующий вопрос.

Вопрос 7. Верно ли, что геометрическая реализация гордиева комплекса $\mathcal{G}$ стягиваема?

Согласно работам [53] и [48], гордиевы комплексы $\mathcal{G}_\Delta$ и $\mathcal{G}_\#$, соответствующие преобразованиям Δ-движения и $\#$-движения, не содержат симплексов размерности выше единицы, что наталкивает на следующий вопрос.

Вопрос 8. Каковы фундаментальные группы геометрических реализаций гордиевых комплексов $\mathcal{G}_\Delta$ и $\mathcal{G}_\#$?

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. И. С. Алексеев, А. А. Малова. Сертификация зацепленности кривыми на ручках // Записки научных семинаров ПОМИ. — 2025. — Т. 549. — С. 26—40.
2. Г. С. Маканин. Об одном аналоге теоремы Александера – Маркова // Известия Академии наук СССР. Серия математическая. — 1989. — Т. 53, № 1. — С. 200—210.
3. F. N. Abu-Khzam, A. E. Mouawad, M. Liedloff. An Exact Algorithm for Connected Red–Blue Dominating Set // Journal of Discrete Algorithms. — 2011. — Vol. 9, no. 3. — P. 252–262.
4. C. C. Adams. The Knot Book: An Elementary Introduction to Mathematical Theory of Knots. — W. H. Freeman & Co Ltd, 2001.
5. J. W. Alexander. A Lemma on Systems of Knotted Curves // Proceedings of the National Academy of Sciences. — 1923. — Vol. 9, no. 3. — P. 93–95.
6. D. Ali, Z. Yang, A. Hussain, M. Ali. The Gordian Complexes of Knots given by 4-Move // Journal of Knot Theory and Its Ramifications. — 2023. — Vol. 32, no. 05. — P. 2350034.
7. S. Baader. Note on Crossing Changes // The Quarterly Journal of Mathematics. — 2006. — Vol. 57, no. 2. — P. 139–142.
8. S. Baader, A. Kjuchukova. Symmetric Quotients of Knot Groups and a Filtration of the Gordian Graph // Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society. — 2020. — Vol. 169, no. 1. — P. 141–148.
9. Y. Belousov, M. Karev, A. Malyutin, A. Miller, E. Fominykh. Lernaean Knots and Band Surgery // St. Petersburg Mathematical Journal. — 2021. — Vol. 33, no. 1. — P. 23–46.
10. Y. Belousov, A. Malyutin. Hyperbolic Knots Are Not Generic. — arXiv : 1908.06187.

11. R. Blair, M. Campisi, J. Johnson, S. A. Taylor, M. Tomova. Neighbors of Knots in the Gordian Graph // The American Mathematical Monthly. — 2017. — Vol. 124, no. 1. — P. 4–23.

12. S. A. Bleiler. A Note on Unknotting Number // Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society. — 1984. — Vol. 96, no. 3. — P. 469–471.

13. J. Conant, P. Teichner. Grope Cobordism of Classical Knots // Topology. — 2004. — Vol. 43, no. 1. — P. 119–156.

14. I. K. Darcy, D. W. Sumners. Rational Tangle Distances on Knots and Links // Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society. — 2000. — Vol. 128, no. 3. — P. 497–510.

15. C. Even-Zohar, J. Hass, N. Linial, T. Nowik. Universal Knot Diagrams // Journal of Knot Theory and Its Ramifications. — 2019. — Vol. 28, no. 07. — P. 1950031.

16. H. Fujii. Geometric Indices and the Alexander Polynomial of a Knot // Proceedings of the American Mathematical Society. — 1996. — Vol. 124, no. 9. — P. 2923–2933.

17. J.-M. Gambaudo, É. Ghys. Braids and Signatures // Bulletin de la Société Mathématique de France. — 2005. — Vol. 133, no. 4. — P. 541–579.

18. A. Gill, M. Prabhakar, A. Vesnin. Gordian Complexes of Knots and Virtual Knots given by Region Crossing Changes and Arc Shift Moves // Journal of Knot Theory and Its Ramifications. — 2020. — Vol. 29, no. 10. — P. 2042008.

19. K. Habiro. Claspers and Finite Type Invariants of Links // Geometry & Topology. — 2000. — Vol. 4, no. 1. — P. 1–83.

20. T. W. Haynes, S. Hedetniemi, P. Slater. Fundamentals of Domination in Graphs. — CRC Press, 2013.

21. M. Hirasawa, Y. Uchida. The Gordian Complex of Knots // Journal of Knot Theory and Its Ramifications. — 2002. — Vol. 11, no. 03. — P. 363–368.

22. N. Hoffman, G. Walsh. The Big Dehn Surgery Graph and the Link of S^3 // Proceedings of the American Mathematical Society, Series B. — 2015. — Vol. 2, no. 2. — P. 17–34.

23. S. Horiuchi. On a Ball in a Metric Space of Knots by Delta Moves // Journal of Knot Theory and Its Ramifications. — 2008. — Vol. 17, no. 06. — P. 689–696.

24. S. Horiuchi, K. Komura, Y. Ohyama, M. Shimozawa. The Gordian Complex of Virtual Knots // Journal of Knot Theory and Its Ramifications. — 2012. — Vol. 21, no. 14. — P. 1250122.

25. S. Horiuchi, Y. Ohyama. On The C_n-Distance and Vassiliev Invariants // Journal of Knot Theory and Its Ramifications. — 2012. — Vol. 21, no. 10. — P. 1250097.

26. S. Horiuchi, Y. Ohyama. A Two Dimensional Lattice of Knots by C_{2m}-Moves // Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society. — 2013. — Vol. 155, no. 1. — P. 39–46.

27. S. Horiuchi, Y. Ohyama. The Gordian Complex of Virtual Knots by Forbidden Moves // Journal of Knot Theory and Its Ramifications. — 2013. — Vol. 22, no. 09. — P. 1350051.

28. S. Horiuchi, Y. Ohyama. Intersection of Two Spheres in the Metric Space of Knots by C_n-Moves // Journal of Knot Theory and Its Ramifications. — 2014. — Vol. 23, no. 04. — P. 1450019.

29. J. Hoste, Y. Nakanishi, K. Taniyama. Unknotting Operations Involving Trivial Tangles // Osaka J. Math. — 1990. — Vol. 27. — P. 555–566.

30. J. Hoste, M. Thistlethwaite, J. Weeks. The First 1,701,936 Knots // The Mathematical Intelligencer. — 1998. — Vol. 20, no. 4. — P. 33–48.

31. K. Ichihara, I. D. Jong. Gromov Hyperbolicity and a Variation of the Gordian Complex // Proceedings of the Japan Academy, Series A, Mathematical Sciences. — 2011. — Vol. 87, no. 2.

32. S. Jabuka, B. Liu, A. H. Moore. Knot Graphs and Gromov Hyperbolicity // Mathematische Zeitschrift. — 2022. — Vol. 301, no. 1. — P. 811–834.

33. S. Joshi, M. Prabhakar. The Gordian Complex of Theta-Curves // Journal of Knot Theory and Its Ramifications. — 2021. — Vol. 30, no. 08. — P. 2150050.

34. T. Kanenobu, H. Murakami. Two-Bridge Knots with Unknotting Number One // Proceedings of the American Mathematical Society. — 1986. — Vol. 98, no. 3. — P. 499–502.

35. L. H. Kauffman, S. Lambropoulou. On the Classification of Rational Tangles // Advances in Applied Mathematics. — 2004. — Vol. 33, no. 2. — P. 199–237.

36. R. Kirby. Problems in Low-Dimensional Topology. — Geometric Topology, 1997.

37. H. Kondo. Knots of Unknotting Number 1 and Their Alexander Polynomials // Osaka J. Math. — 1979. — Vol. 16. — P. 551–559.

38. P. Kronheimer, T. Mrowka. Gauge Theory for Embedded Surfaces, I // Topology. — 1993. — Vol. 32, no. 4. — P. 773–826.

39. W. B. R. Lickorish. The Unknotting Number of a Classical Knot //. Vol. 44. — 1985. — P. 117–121.

40. C. Livingston. Cobordism Distance on the Projective Space of the Knot Concordance Group // Canadian Journal of Mathematics. — 2024. — Vol. 76, no. 4. — P. 1267–1288.

41. A. V. Malyutin. On the Question of Genericity of Hyperbolic Knots // International Mathematics Research Notices. — 2020. — Vol. 2020, no. 21. — P. 7792–7828.

42. J. Marché. Comportement à l'infini Du Graphe Gordien Des Nœuds // Comptes Rendus. Mathématique. — 2005. — Vol. 340, no. 5. — P. 363–368.

43. J. Meier. Groups, Graphs and Trees: An Introduction to the Geometry of Infinite Groups. — Cambridge University Press, 2008.

44. A. Y. Miller. The Gordian graph is one-ended // Zapiski Nauchnykh Seminarov POMI. — 2025. — Vol. 549. — P. 138–145.

45. A. Y. Miller. A note on a remarkable pattern in the Gordian graph // Zapiski Nauchnykh Seminarov POMI. — 2026. — Vol. 551. — P. 84–89.

46. A. Y. Miller. Behavior of Gordian Graphs at Infinity. — arXiv: 2211.17237.

47. A. Y. Miller, A. V. Malyutin, I. S. Alekseev. Infinite midway cliques in the Gordian graph // Zapiski Nauchnykh Seminarov POMI. — 2025. — Vol. 549. — P. 146–160.

48. H. Murakami. Some Metrics on Classical Knots // Mathematische Annalen. — 1985. — Vol. 270, no. 1. — P. 35–45.

49. T. Nakamura, Y. Nakanishi. Notes on Sharp Moves for Knots // Journal of Knot Theory and Its Ramifications. — 2012. — Vol. 21, no. 07. — P. 1250068.

50. Y. Nakanishi. A Note on Unknotting Number // Mathematics Seminar Notes. — 1981. — Vol. 9, no. 1. — P. 99–108.

51. Y. Nakanishi, Y. Ohyama. The Gordian Complex with Pass Moves Is Not Homogeneous with Respect to Conway Polynomials // Hiroshima Mathematical Journal. — 2009. — Vol. 39, no. 3. — P. 443–450.

52. Y. Ohyama. The C_k-Gordian Complex of Knots // Journal of Knot Theory and Its Ramifications. — 2006. — Vol. 15, no. 01. — P. 73–80.

53. M. Okada. Delta-Unknotting Operation and the Second Coefficient of the Conway Polynomial // Journal of the Mathematical Society of Japan. — 1990. — Vol. 42, no. 4. — P. 713–717.

54. D. Rolfsen. Knots and Links. — American Mathematical Society, 2003.

55. K. Sakai. Topology of Infinite-Dimensional Manifolds. — Springer Singapore, 2020.

56. M. G. Scharlemann. Unknotting Number One Knots Are Prime // Inventiones Mathematicae. — 1985. — Vol. 82, no. 1. — P. 37–55.

57. H. Schubert. Die Eindeutige Zerlegbarkeit Eines Knotens in Primknoten. — Springer Berlin Heidelberg, 1949.

58. H. Schubert. Über eine numerische Knoteninvariante // Mathematische Zeitschrift. — 1954. — Vol. 61, no. 1. — P. 245–288.

59. M. Shannon, P. Dehornoy. Almost Equivalence of Suspension Anosov Flows. — arXiv: 1910.08457.

60. P. G. Tait. On knots I // Trans. Roy. Soc. Edinburgh. — 1876. — Vol. 28. — P. 145–190.

61. W. P. Thurston. Three Dimensional Manifolds, Kleinian Groups and Hyperbolic Geometry // Bulletin of the American Mathematical Society. — 1982. — Vol. 6, no. 3. — P. 357–382.

62. H. Wendt. Die gordische Auflösung von Knoten // Mathematische Zeitschrift. — 1937. — Vol. 42, no. 1. — P. 680–696.

63. K. Zhang, Z. Yang. A Note on the Gordian Complexes of Some Local Moves on Knots // Journal of Knot Theory and Its Ramifications. — 2018. — Vol. 27, no. 09. — P. 1842002.

64. K. Zhang, Z. Yang. The N-Gordian Complex of Knots // Chinese Ann. Math. Ser. A. — 2019. — Vol. 40, no. 4. — P. 443–448.

65. K. Zhang, Z. Yang, F. Lei. The H(n)-Gordian Complex of Knots // Journal of Knot Theory and Its Ramifications. — 2017. — Vol. 26, no. 13. — P. 1750088.

ПРИЛОЖЕНИЕ А
ИТЕРАТИВНОЕ ПОСТРОЕНИЕ ГРОПА

В настоящем приложении приводится серия детальных иллюстраций, демонстрирующих пошаговое построение гропа из заключительной части доказательства теоремы 3.

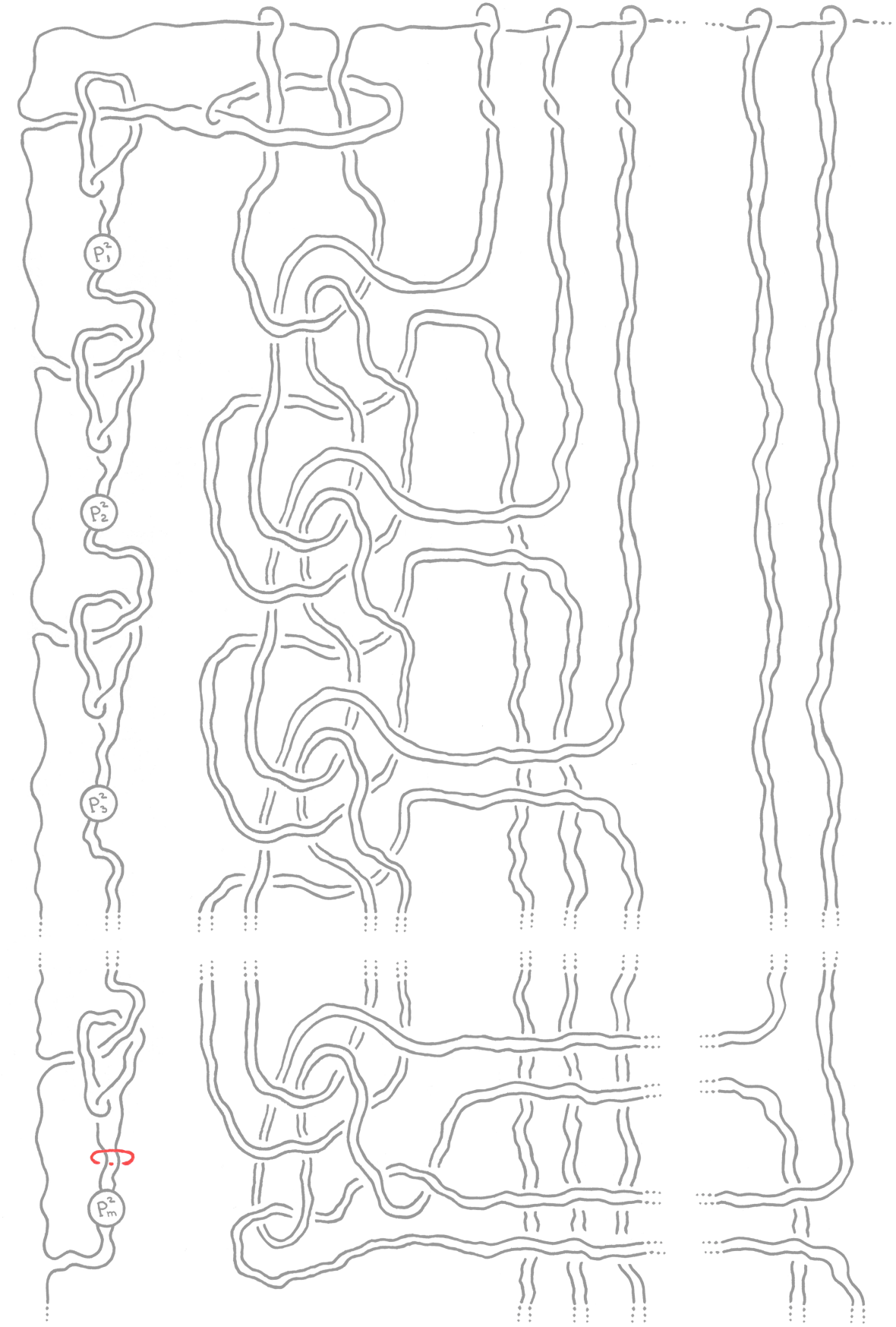


Рисунок А.1

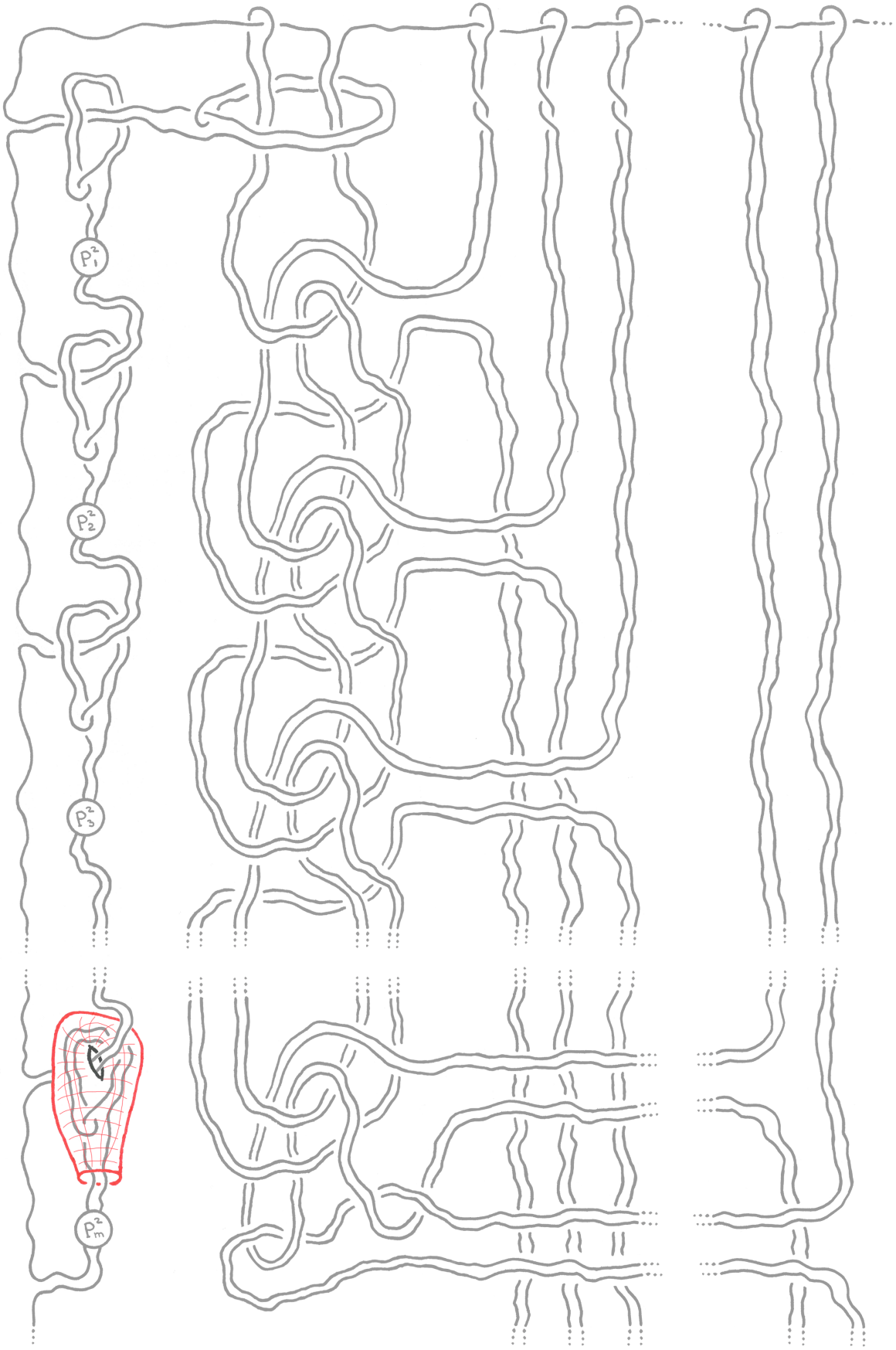


Рисунок А.2

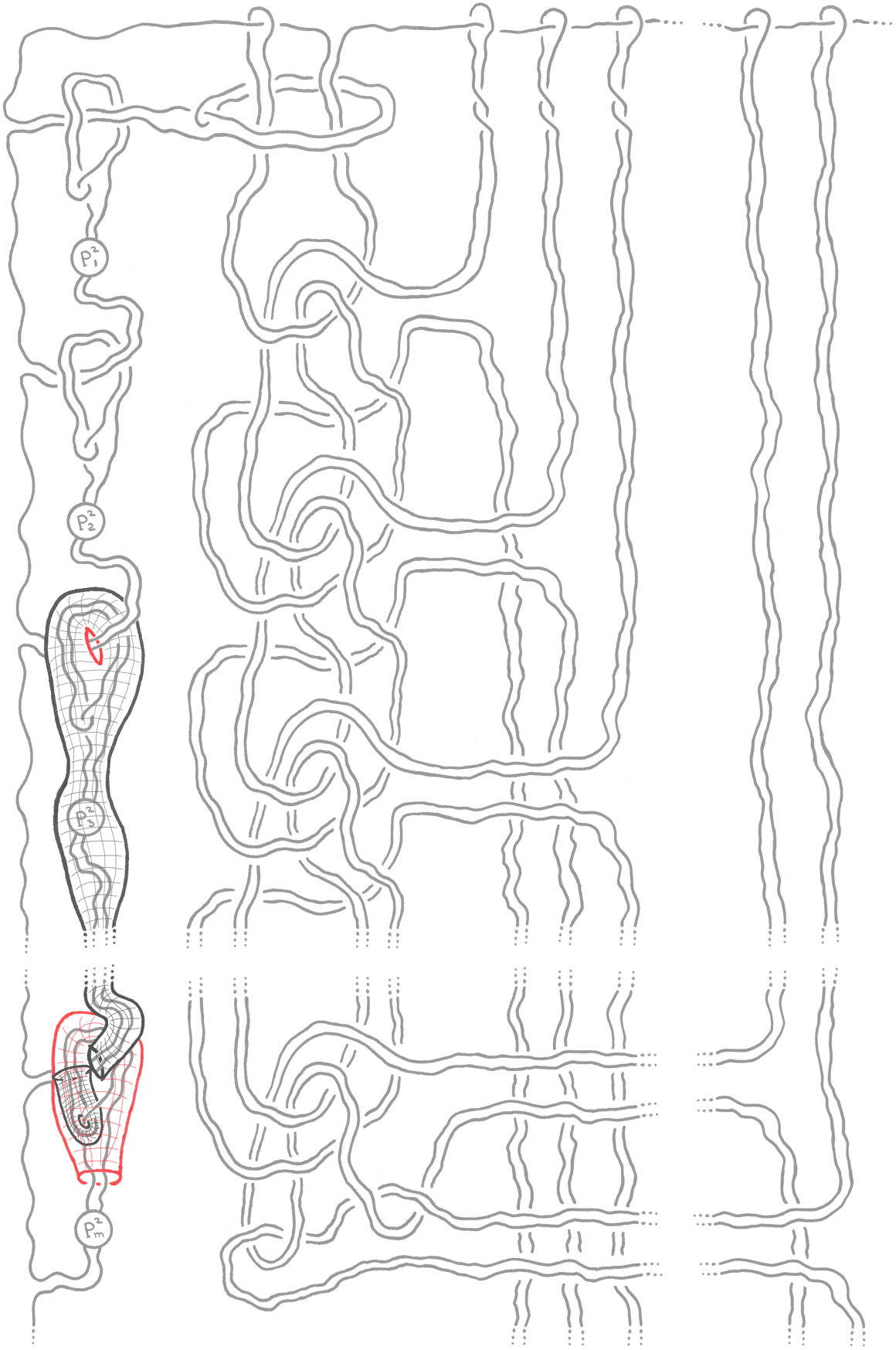


Рисунок А.3

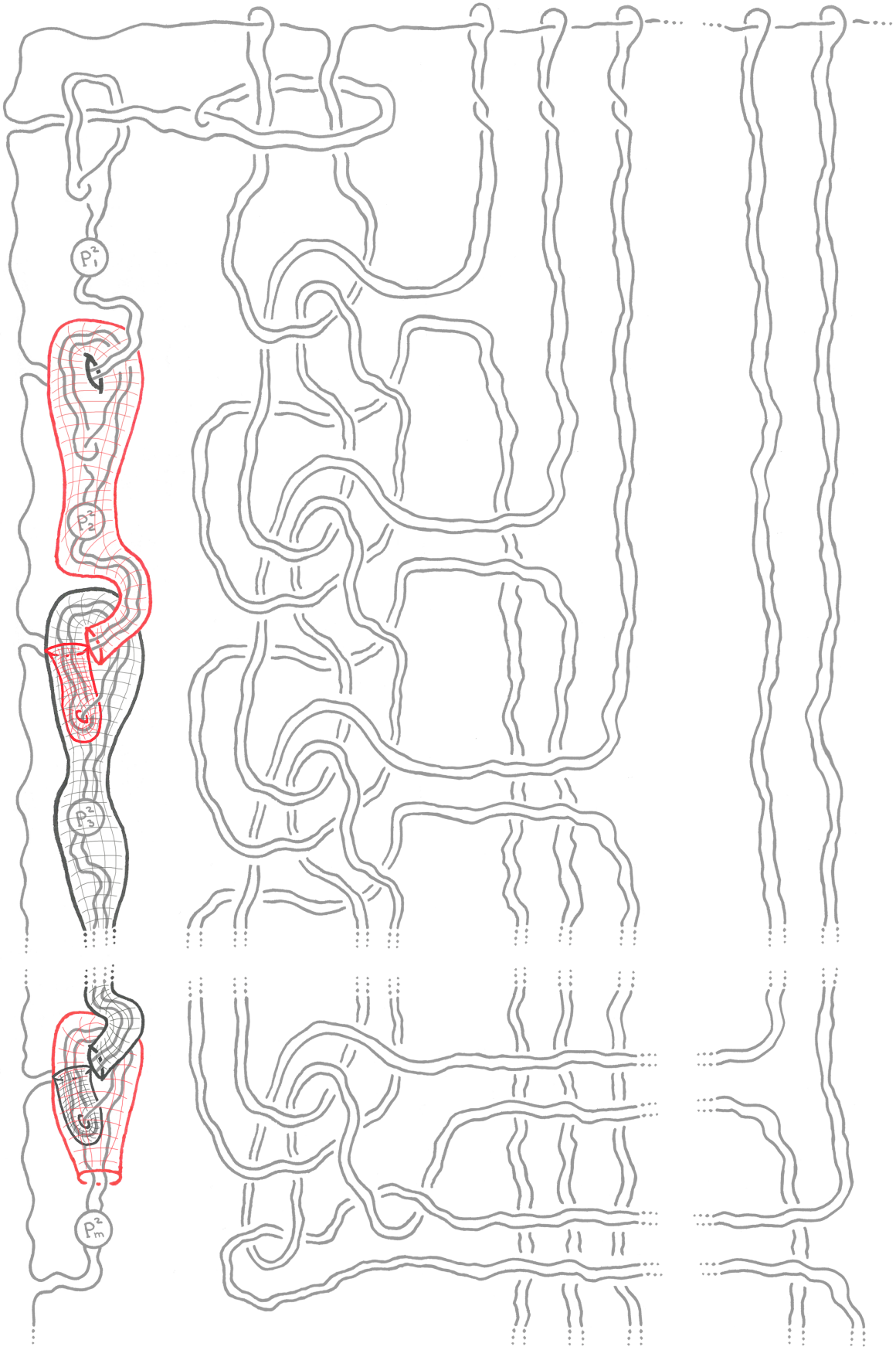


Рисунок А.4

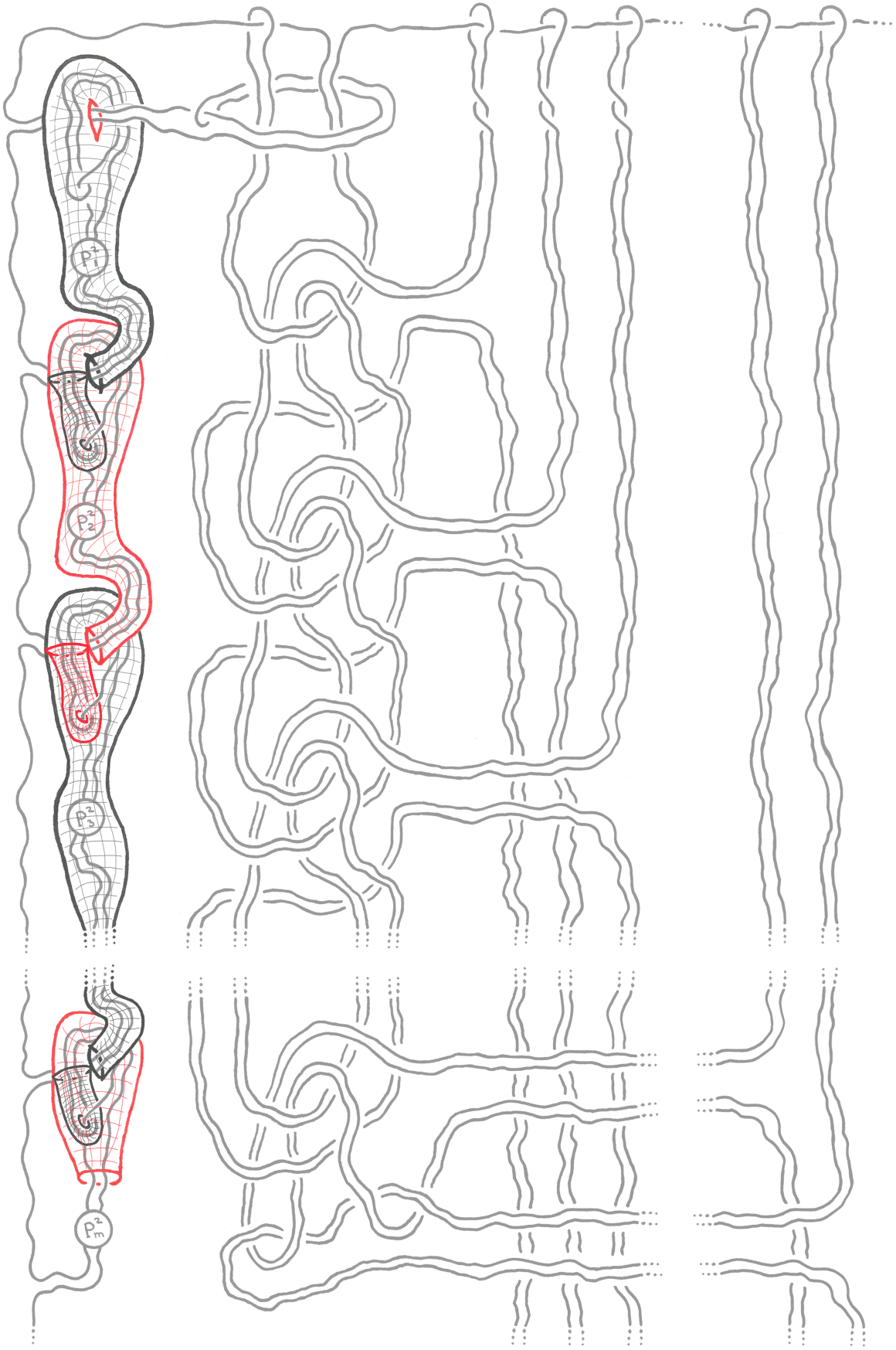


Рисунок А.5

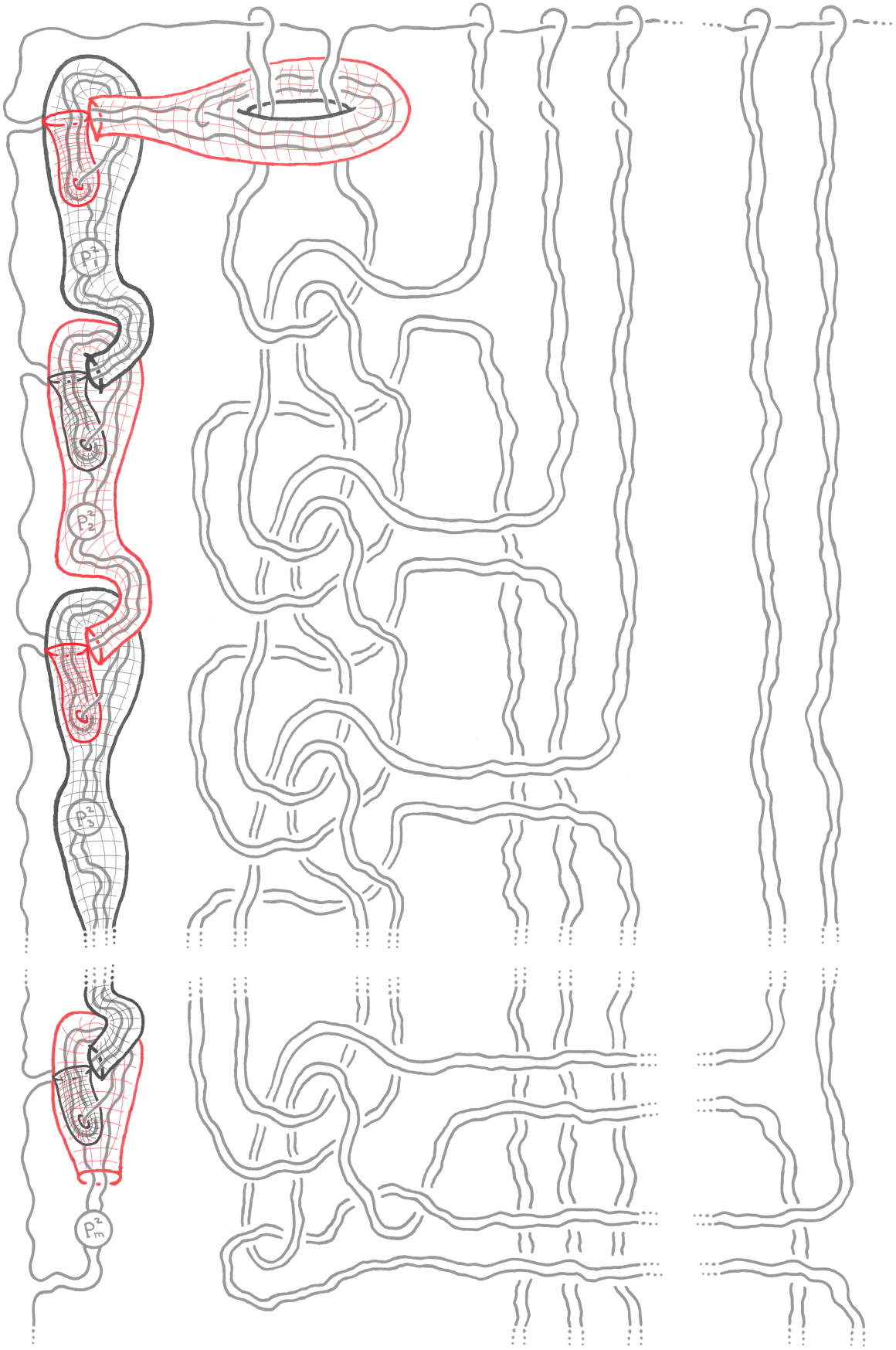


Рисунок А.6

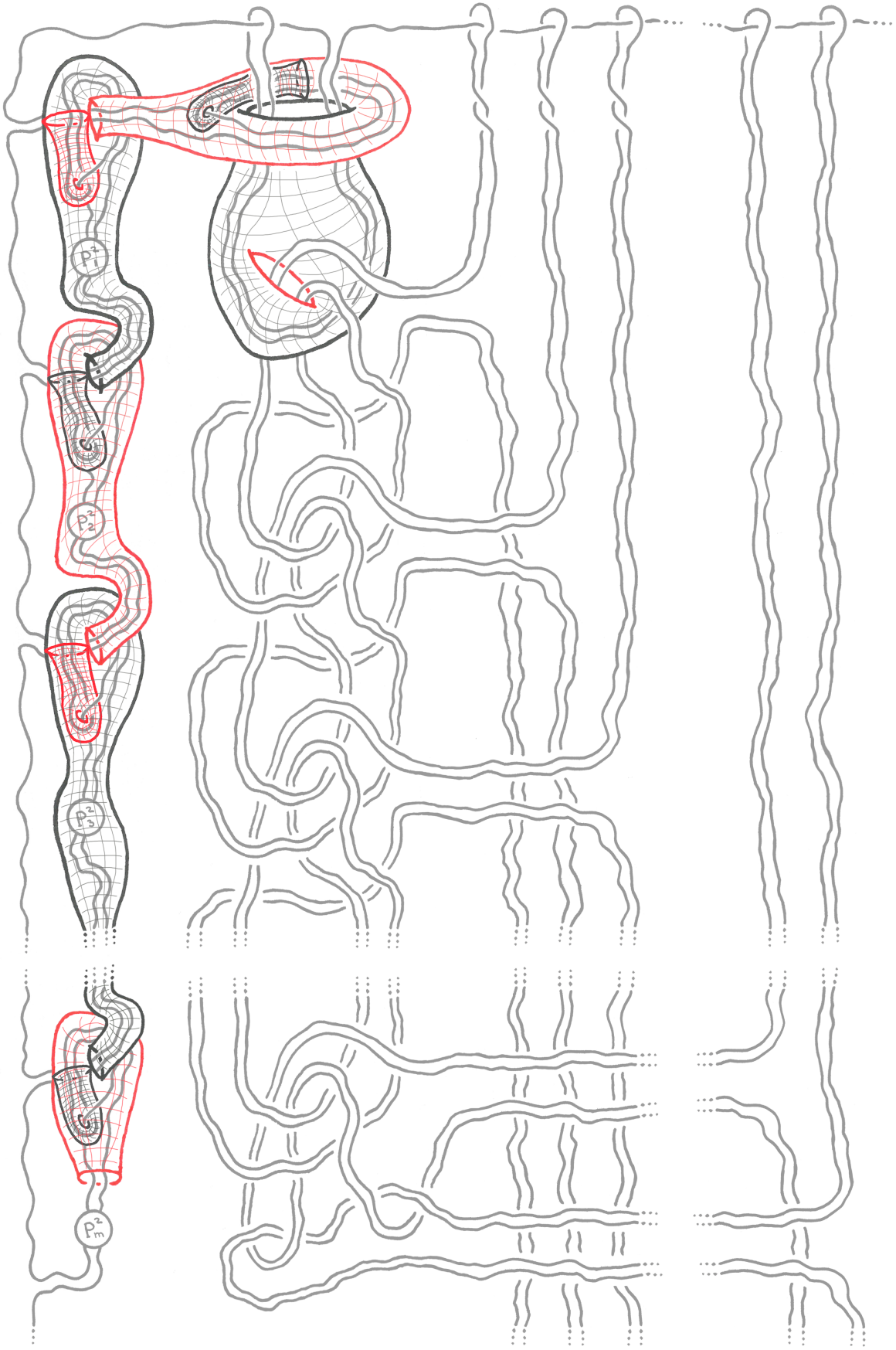


Рисунок А.7

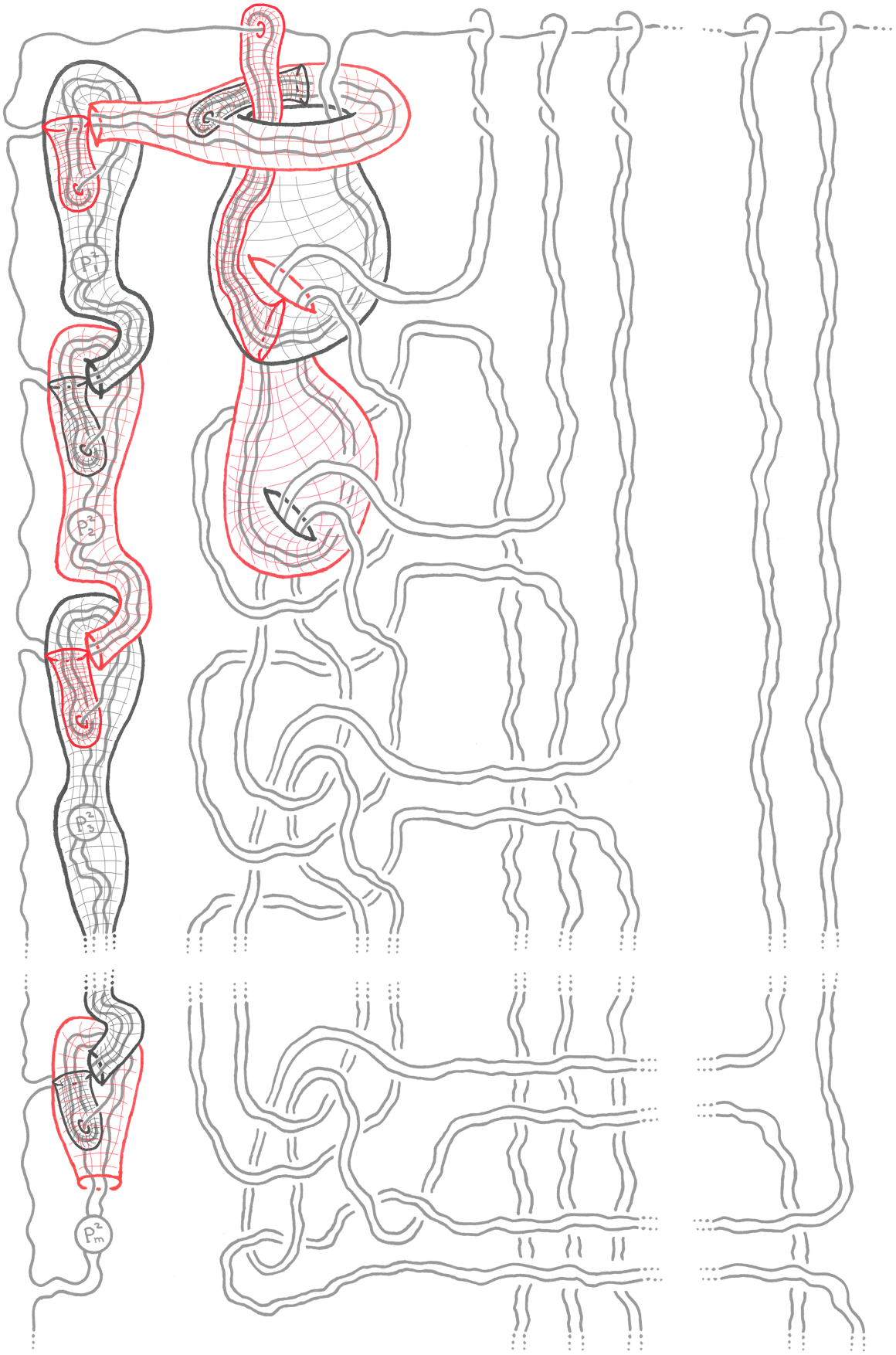


Рисунок А.8

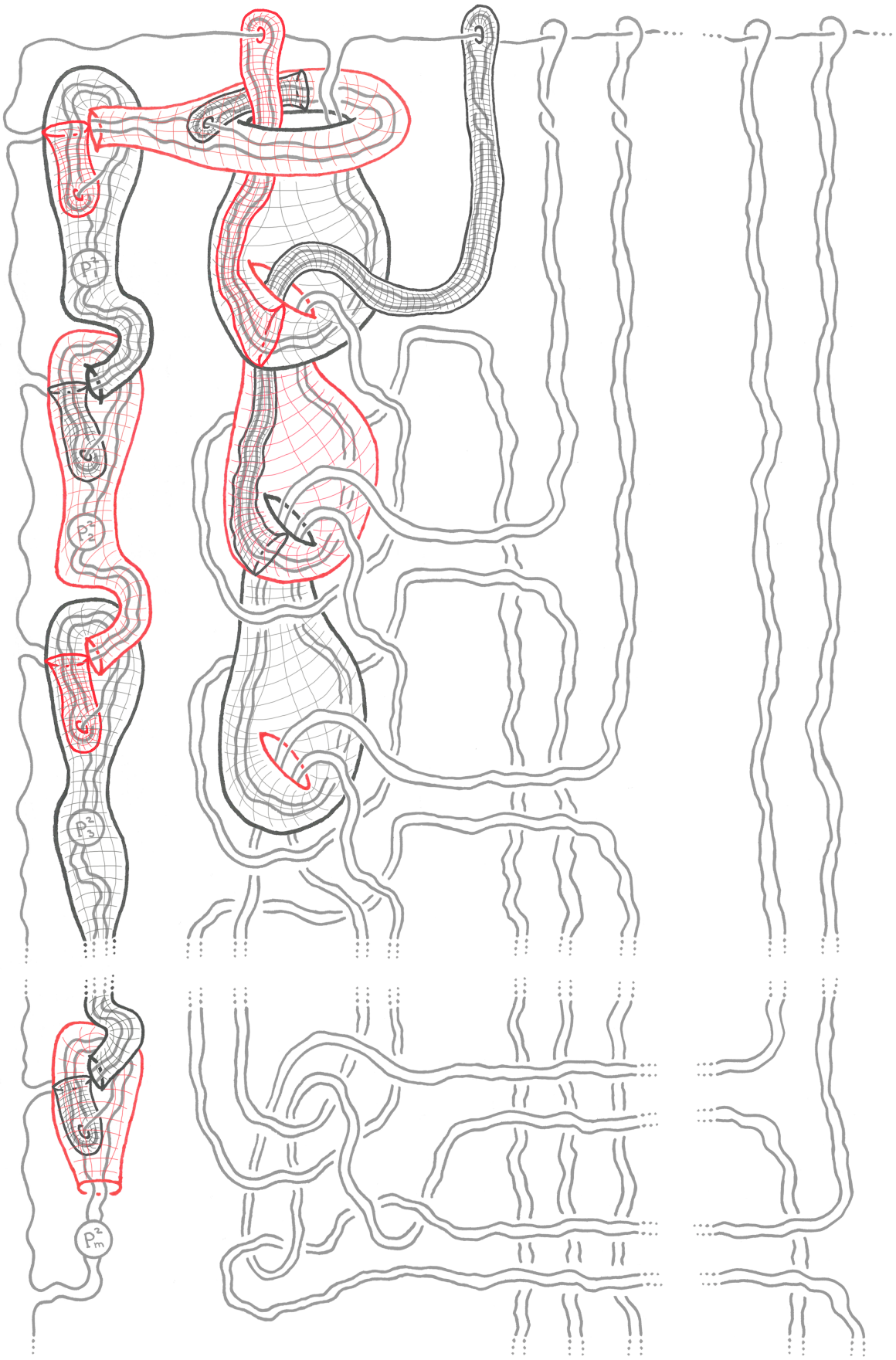


Рисунок А.9

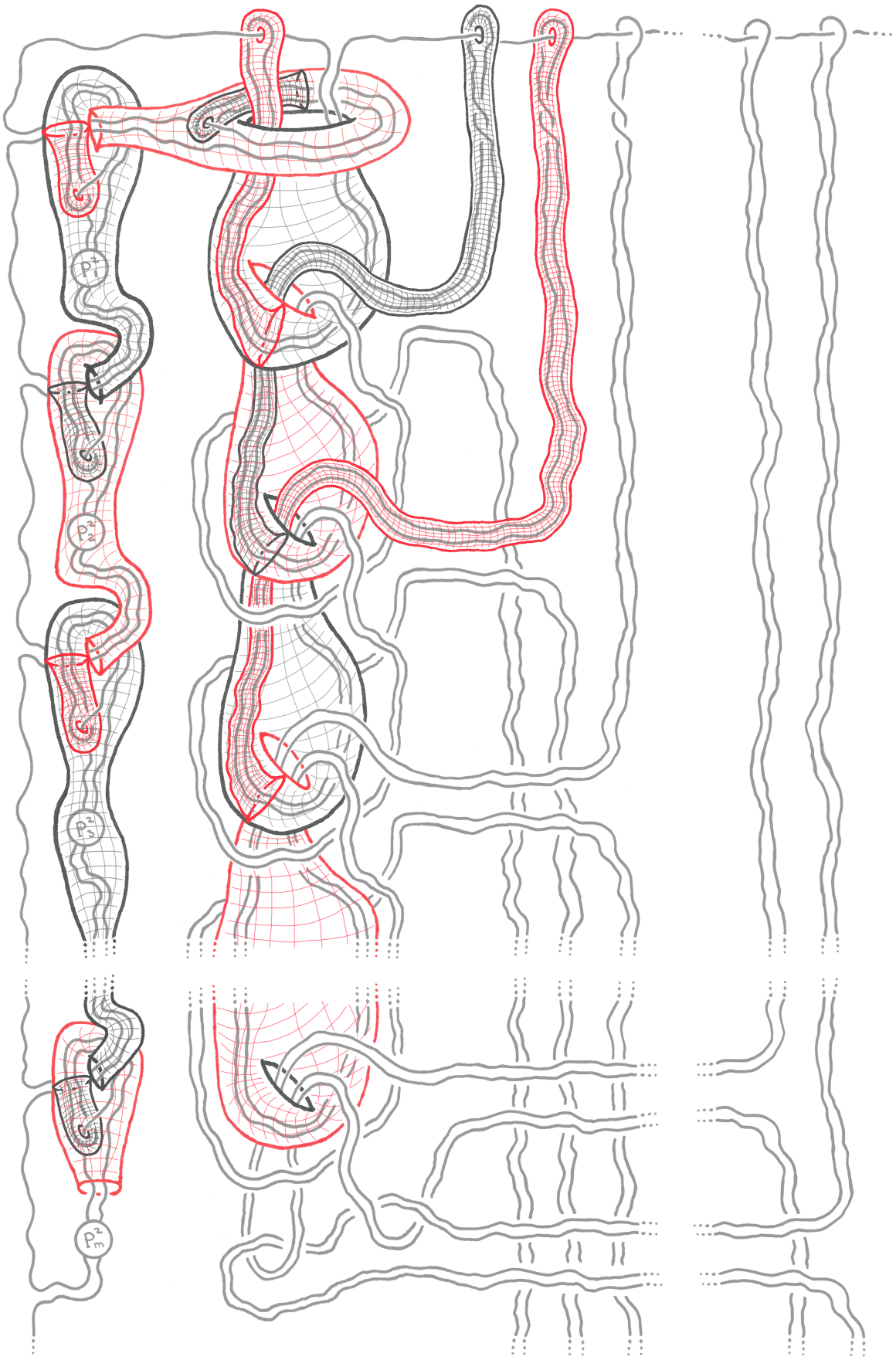


Рисунок А.10

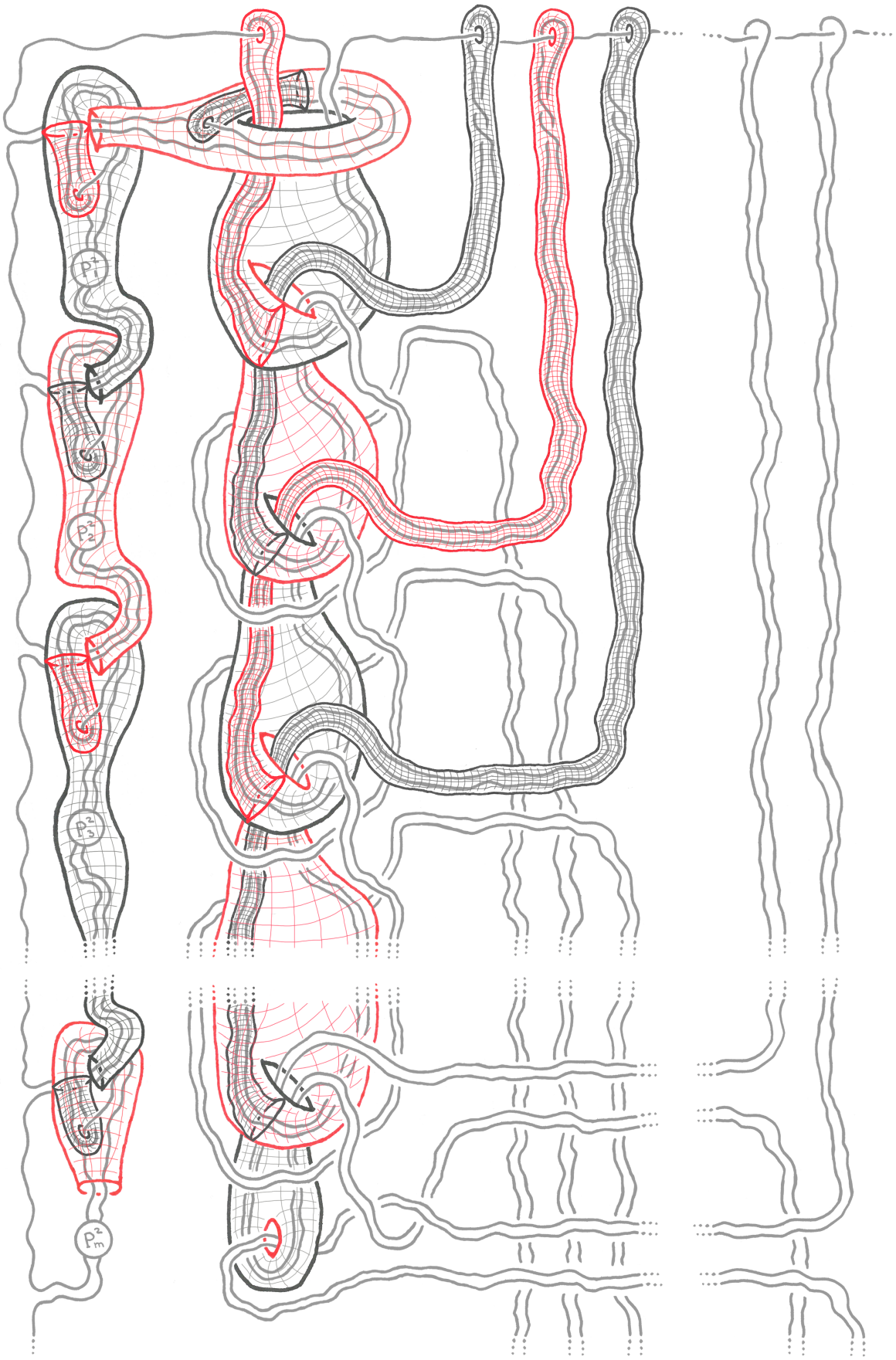


Рисунок А.11

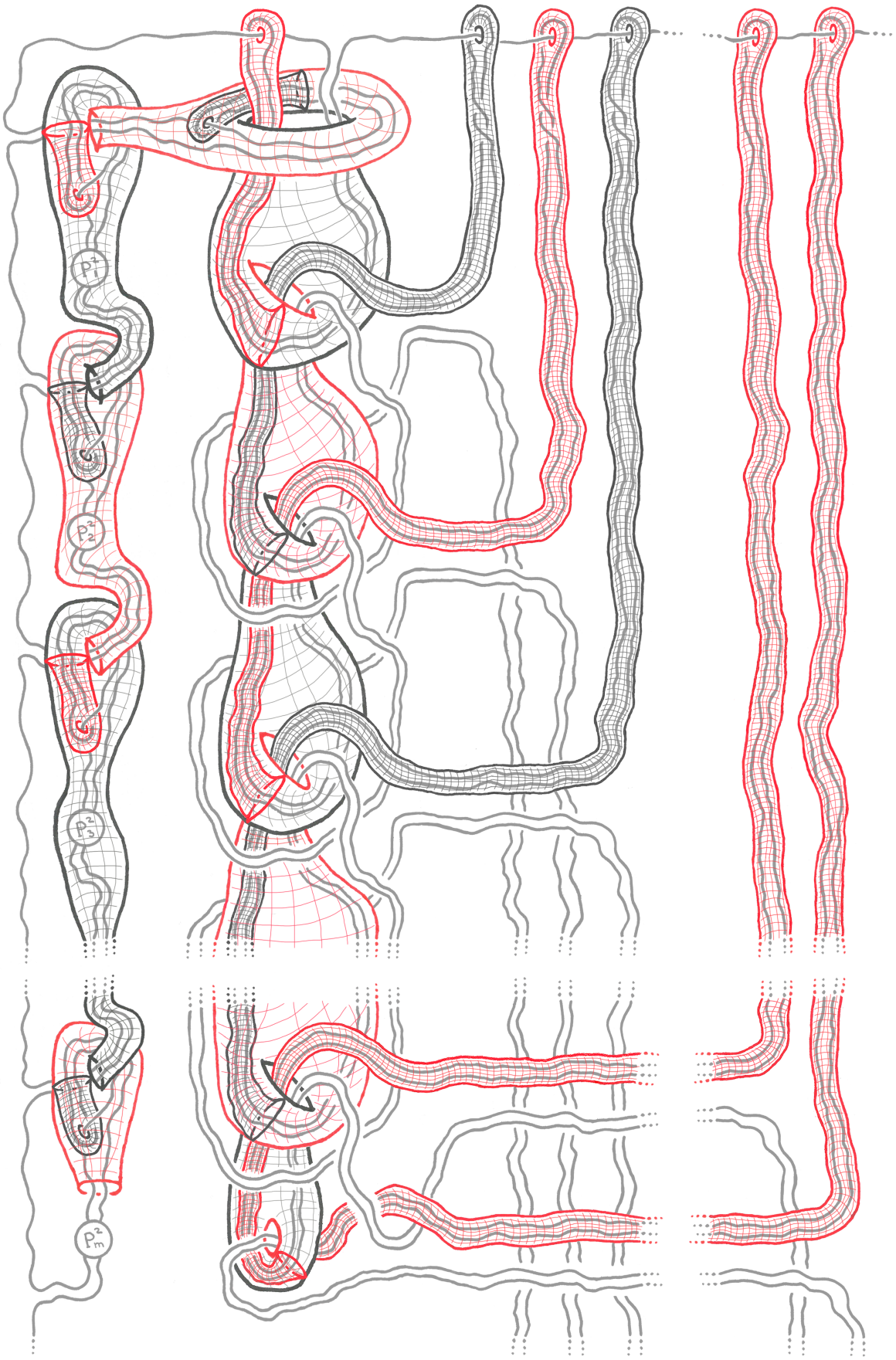


Рисунок А.12