# ОТЗЫВ

официального оппонента
о диссертации К. В. Логинова
«Геометрия и автоморфизмы многообразий Фано»,
представленной на соискание ученой степени доктора физико-математических наук
по специальности 1.1.5 —
математическая логика, алгебра, теория чисел и дискретная математика

Одной из основных задач в современной алгебраической геометрии, уже с давних пор, является бирациональная классификация алгебраических многообразий. Центральное место в этой теории занимает программа минимальных моделей, которая предлагает стратегию классификации (проективных) алгебраических многообразий. В рамках этой программы многообразия Фано выступают как один из базовых классов объектов. Их исследование тесно связано как с вопросами классификации, так и с изучением бирациональных и бирегулярных автоморфизмов, различных инвариантов особенностей, проблемами ограниченности, а в последние годы также с вопросами $K$-стабильности и вырождений. Именно этому кругу вопросов посвящена диссертационная работа К. В. Логинова.

Актуальность темы диссертации не вызывает сомнений. Многообразия Фано играют фундаментальную роль в программе минимальных моделей, в теории рационально связных многообразий, являются предметом изучения в других областях математики и математической физики. С одной стороны, в фиксированной размерности они образуют ограниченные семейства, что делает осмысленной задачу их классификации. С другой стороны, их бирациональная геометрия, группы автоморфизмов и бимероморфизмов, а также поведение в вырождениях оказываются существенно более тонкими и богатыми, чем это может показаться на первый взгляд. В последние годы особенно интенсивно развиваются исследования, связанные с корегулярностью многообразий Фано, свойством Жордана для групп автоморфизмов и бимероморфизмов, $K$-стабильностью и модульными аспектами теории Фано. На этом фоне диссертация К. В. Логинова представляет собой крупное и своевременное исследование, затрагивающее сразу несколько центральных направлений современной бирациональной геометрии.

Более конкретно, в диссертации изучаются группы бимероморфных автоморфизмов компактных комплексных многообразий с точки зрения свойства Жордана, ограниченность конечных подгрупп в образах плюрикаонических представлений, корегулярность гладких трехмерных многообразий Фано, конечные абелевы группы, действующие на рационально связных трехмерных многообразиях, ограниченность нерациональности в расслоениях Мори, $K$-стабильность конкретных семейств трехмерных многообразий Фано и пар Фано типа Маеды, а также максимальные полустабильные вырождения гладких многообразий Фано. Такой охват сам по себе производит сильное впечатление и свидетельствует о широте научных интересов автора и высоком уровне владения современными методами алгебраической геометрии.

Поскольку основные результаты работы относятся к нескольким активно развивающимся направлениям, уместно кратко пояснить используемые в них понятия.

Свойство Жордана для группы преобразований означает существование универсальной константы, такой что любая конечная подгруппа содержит абелеву подгруппу индекса, ограниченного этой константой; тем самым сложность конечных подгрупп в рассматриваемой группе оказывается равномерно контролируемой. Утверждения об ограниченности конечных подгрупп еще сильнее: они означают существование общего верхнего ограничения на порядок любой конечной подгруппы в данном классе групп. Лог-пара — это пара $(X, \Delta)$, состоящая из многообразия $X$ и дивизора $\Delta$, которая естественно возникает в программе минимальных моделей и позволяет единообразно изучать особенности, вырождения и вопросы стабильности. Регулярность и корегулярность — это численные инварианты многообразий Фано, отражающие сложность лог-канонических дополнений и связанных с ними двойственных комплексов. Неформально, регулярность измеряет сложность возможных граничных моделей, а корегулярность — степень близости многообразия к специальным или исключительным случаям. Эти инварианты важны тем, что дают удобный инструмент для классификации многообразий Фано и для исследования их вырождений и бирациональной геометрии. Наконец, $K$-стабильность и $K$-полустабильность — это тонкие инварианты многообразий и лог-пар, связанные с существованием канонических кэлеровых метрик и с теорией модулей многообразий Фано.

Опишу вкратце основные результаты, полученные в диссертации К.В. Логинова. Во-первых, автор получил существенные результаты о группах бимероморфных автоморфизмов: доказал жордановость таких групп для широкого класса компактных комплексных многообразий и установил ограниченность конечных подгрупп в образах плюрикановических представлений. Во-вторых, в диссертации подробно исследуется корегулярность многообразий Фано: показано, что для 100 из 105 деформационных семейств гладких трёхмерных многообразий Фано общий элемент имеет корегулярность нуль, причём для 92 семейств этим свойством обладает любой элемент. Кроме того, автор детально изучает поверхности дель Пеццо с особенностями дю Валя, вычисляя для них корегулярность и первую корегулярность и связывая эти инварианты с геометрией антиканонических эллиптических расслоений.

Другая важная группа результатов касается симметрий, стабильности и вырождений. В диссертации получены оценки и структурные результаты для конечных абелевых групп, действующих на рационально связных трёхмерных многообразиях, исследована ограниченность нерациональности в расслоениях Мори, а также доказаны результаты о K-стабильности для конкретных семейств трёхмерных многообразий Фано и для пар Фано типа Маеды. Наконец, автор классифицирует максимальные полустабильные вырождения гладких многообразий Фано и доказывает их единственность в фиксированной размерности. Тем самым диссертация даёт одновременно новые классификационные результаты, новые инвариантные методы и новые применения современной техники программы минимальных моделей, теории особенностей и K-стабильности.

Перейдем к содержанию диссертации. Диссертация общим объемом 292 страницы состоит из введения, пяти глав, разбитых на разделы, и списка литературы.

Во введении дан обстоятельный обзор тематики исследования. Автор подробно объясняет место многообразий Фано в бирациональной геометрии, обсуждает про-

грамму минимальных моделей, рациональную связность, ограниченность, роль антиканонических линейных систем, а также мотивирует введение и изучение таких инвариантов, как регулярность и корегулярность. Там же изложен обзор результатов о группах Кремоны, свойстве Жордана, плюрикановических представлениях, $K$-стабильности и вырождениях. Введение написано содержательно и позволяет увидеть общую концепцию работы.

Первая глава носит подготовительный характер. В ней собраны необходимые сведения из бирациональной геометрии, теории особенностей, программы минимальных моделей, теории многообразий Фано, дополнений, а также фиксируются обозначения и базовые факты, на которые затем опирается автор. Судя по представленному плану работы, эта глава хорошо организована и создает надежную основу для последующих результатов.

Вторая глава посвящена жордановости групп бимероморфных автоморфизмов. Напомню, что жордановость означает существование такой универсальной константы, что любая конечная подгруппа рассматриваемой группы содержит абелеву подгруппу индекса, ограниченного этой константой; тем самым конечные подгруппы не могут быть сколь угодно сложными. Здесь автор доказывает, что если $X$ — $n$-мерное компактное комплексное многообразие с $\kappa(X) \geq n-2$, то группа $\mathrm{Bim}(X)$ является жордановой. Кроме того, установлено, что образы плюрикановического и проективного плюрикановического представлений имеют ограниченные конечные подгруппы, то есть существует общий верхний предел на порядок всех конечных подгрупп в этих образах. Эти результаты представляются весьма значительными, поскольку переносят идеи, хорошо работающие в алгебраической ситуации, на более общий комплексно-геометрический контекст, где возникают дополнительные трудности.

Третья глава посвящена корегулярности гладких трехмерных многообразий Фано. Здесь получен один из центральных результатов диссертации: доказано, что для 100 из 105 деформационных семейств гладких трехмерных многообразий Фано общий элемент имеет корегулярность 0, причем для 92 семейств этим свойством обладает любой элемент семейства. Для оставшихся случаев получены содержательные частичные результаты, в частности для двулистного накрытия $\mathbb{P}^3$, разветвленного в секстике, для квартики, пересечения квадрики и кубики, пересечения трех квадрик и многообразий Фано рода 6. Кроме того, изучаются поверхности дель Пеццо с особенностями дю Валя, для которых корегулярность и первая корегулярность вычисляются весьма детально. Этот круг результатов является крупным вкладом в изучение нового и активно развивающегося инварианта.

Среди дальнейших результатов диссертации особенно следует отметить исследование конечных абелевых групп, действующих на рационально связных трехмерных многообразиях. Речь здесь идет о тонком вопросе: какие именно конечные симметрии могут реализовываться на геометрически богатых, но достаточно жестких трехмерных объектах. Автор доказывает, что конечная абелева 3-группа, эффективно действующая на таком многообразии, порождается четырьмя элементами. Более того, получено описание возможных типов конечных абелевых групп, действующих на рационально связных трехмерных многообразиях: либо это произведение групп, либо группы типа $K3$, либо группы, действующие на специальном трехмерном $G\mathbb{Q}$-

многообразии Фано. Эти результаты органично продолжают исследования по конечным подгруппам группы Кремоны ранга 3 и имеют самостоятельную ценность.

Важное место в диссертации занимают результаты о расслоениях Калаби–Яу типа Фано и ограниченности нерациональности. Содержательно речь идет о том, что степень нерациональности соответствующих объектов нельзя сделать сколь угодно большой: определенные бирациональные инварианты, такие как гональность и в некоторых случаях род возникающих кривых, оказываются равномерно ограниченными. Автор доказывает ограниченность гональности, а в ряде случаев и рода кривых, возникающих как база в соответствующих бирациональных описаниях компонент границы. Это направление существенно менее разработано, чем близкие задачи о сохранении рациональности в гладких семействах, и потому полученные результаты представляются особенно интересными.

Не менее важен цикл результатов, связанных с $K$-стабильностью. Напомню, что $K$-стабильность и $K$-полустабильность представляют собой условия устойчивости многообразий и лог-пар, тесно связанные, с одной стороны, с существованием канонических кэлеровых метрик, а с другой — с новым подходом к построению пространств модулей многообразий Фано. В диссертации доказана дивизориальная стабильность гладких трехмерных многообразий Фано из некоторых семейств, в том числе общих элементов семейств с явным указанием условий общности. Кроме того, исследуются пары Фано типа Маеды; здесь лог-пара — это пара $(X, \Delta)$ из многообразия и выделенной границы, естественно возникающая в программе минимальных моделей и в теории вырождений. Для $K$-полустабильных пар такого типа с приводимой границей устанавливается конечность числа деформационных семейств, а также вычисляются области $K$-полустабильности. Эти результаты лежат на переднем крае современной алгебраической геометрии, где взаимодействуют бирациональные методы, теория особенностей и модульные задачи.

В целом диссертация К. В. Логинова производит впечатление крупного, внутренне цельного и математически зрелого исследования. Автор свободно владеет современной техникой бирациональной геометрии, программой минимальных моделей, теорией особенностей и методами теории $K$-стабильности. Полученные им результаты в ряде случаев носят завершающий или классификационный характер.

Конструкции и доказательства свидетельствуют о высоком уровне технической подготовки автора и о его глубоком понимании предмета. Диссертация написана профессиональным математическим языком, а изложение основных результатов хорошо мотивировано и вписано в широкий научный контекст.

Из замечаний отмечу следующее.

1. Тематика диссертации чрезвычайно широка и охватывает несколько самостоятельных направлений современной бирациональной геометрии. По этой причине в заключительной части работы было бы полезно иметь более развернутое заключение, в котором отдельно были бы подведены итоги по каждому из этих направлений и обозначены перспективы дальнейших исследований.

2. Некоторые формулировки основных результатов во введении весьма насыщены специальной терминологией и техническими условиями. Для читателя, не яв-

ляющегося узким специалистом в соответствующей области, было бы полезно в ряде мест дополнить их краткими пояснениями геометрического смысла.

Впрочем, эти замечания носят редакционный характер и никоим образом не снижают общей высокой оценки диссертации.

Работа носит теоретический характер. Ее результаты могут быть использованы в алгебраической геометрии, комплексной геометрии, теории бирациональных преобразований, теории групп Кремоны, теории $K$-стабильности и в смежных разделах математики, связанных с классификацией алгебраических многообразий.

Основные результаты диссертации являются новыми, принадлежат автору и обоснованы современными методами. Они опубликованы в работах по теме диссертации; список публикаций насчитывает 12 наименований, одна из которых написана в соавторстве с лауреатом премии Филдса, признанным специалистом в бирациональной геометрии К. Биркаром. Результаты диссертации прошли серьезную апробацию на многочисленных семинарах и конференциях в России и за рубежом и, безусловно, представляют значительный интерес для специалистов.

Таким образом, диссертация К. В. Логинова «Геометрия и автоморфизмы многообразий Фано» представляет собой завершенное научно-квалификационное исследование высокого уровня и соответствует специальности 1.1.5 — «математическая логика, алгебра, теория чисел и дискретная математика», по которой она представлена к защите, а ее автор заслуживает присуждения ученой степени доктора физико-математических наук. Автореферат подробно и полно отражает содержание диссертации.

Официальный оппонент,
профессор кафедры Дифференциальной геометрии и приложений
механико-математического факультета
Федерального государственного бюджетного
образовательного учреждения высшего образования
"Московский государственный университет
имени М. В. Ломоносова"
доктор физико-математических наук (А. Б. Жеглов)
(специальность – 01.01.06)
1 сентября 2026 г.

Москва, Воробьевы горы, МГУ
главное здание, ауд. 16-19
тел. (495) 939-39-40
email: azheglov@math.msu.su , alexander.zheglov@math.msu.ru

Подпись Жеглова А.Б. заверяю
Специалист по кадрам 1 кат. Логинова О.А.