Российская Академия наук

Математический институт им. В. А. Стеклова

На правах рукописи
УДК 512.7



Логинов Константин Валерьевич

Геометрия и автоморфизмы многообразий Фано

1.1.5 – математическая логика, алгебра,
теория чисел и дискретная математика

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Москва — 2026

Работа выполнена в отделе алгебраической геометрии Математического института им. В. А. Стеклова Российской академии наук

Официальные оппоненты:
ЖЕГЛОВ Александр Борисович — доктор физико-математических наук, профессор кафедры дифференциальной геометрии и приложений механико-математического факультета ФГБОУ ВО "Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова" (специальность 01.01.06).
ПЕТРОВ Виктор Александрович — доктор физико-математических наук, профессор, декан факультета математики и компьютерных наук ФГБОУ ВО "Санкт-Петербургский государственный университет" (специальность 1.1.5).
ШАБАТ Георгий Борисович — доктор физико-математических наук, профессор кафедры математики, логики и интеллектуальных систем в гуманитарной сфере Института лингвистики ФГАОУ ВО "Российский государственный гуманитарный университет" (РГГУ) (специальность 01.01.06)

Ведущая организация:
Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского Уральского отделения Российской академии наук (ИММ УрО РАН).

Защита диссертации состоится "17" сентября 2026 г. в 14 часов 00 минут на заседании диссертационного совета 24.1.167.03 при Математическом институте им. В. А. Стеклова Российской академии наук по адресу: 119991, г. Москва, ул. Губкина, д. 8, 9-й этаж, конференц-зал.
С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Математического института им. В. А. Стеклова РАН и на сайте

`http://www.mi-ras.ru/dis/`

Автореферат разослан " " июня 2026 г.
Ученый секретарь
диссертационного совета
24.1.167.03 при МИАН,
доктор физико-математических наук Д. В. Осипов

Актуальность темы исследований

Одной из важнейших задач алгебраической геометрии является задача классификации алгебраических многообразий. При этом эту задачу можно понимать в разных смыслах: многообразия можно классифицировать с точностью до изоморфизма, а можно — с точностью до бирациональной эквивалентности. Напомним, что два многообразия называются бирационально эквивалентными, если их плотные в топологии Зариского открытые подмножества изоморфны. Бирациональная эквивалентность является более слабым отношением эквивалентности, чем изоморфизм. Однако задача классификации всех многообразий с точностью до изоморфизма представляется необозримой. Бирациональная геометрия занимается решением задачи классификации многообразий с точностью до бирациональной эквивалентности.

Программа минимальных моделей предлагает стратегию классификации (проективных) алгебраических многообразий, которую можно рассматривать в качестве аналога разложения целого числа на простые множители в арифметике. Ее цель — для любого многообразия найти в его классе бирациональной эквивалентности «наиболее простого» представителя.

Ключевым инвариантом с точки зрения программы минимальных моделей является канонический класс многообразия. Неформально можно сказать, что он измеряет «кривизну» многообразия. Свойства этого класса (его положительность или отрицательность) в большой степени определяет геометрию многообразия. Оптимистичная картина состоит в том, что после проведения конечного числа бирациональных преобразований — дивизориальных стягиваний и флипов, — любое многообразие должно приводиться к одному из трех типов:

1. Многообразие общего типа (чей канонический класс обилен). Это “большинство” многообразий. Их канонический класс положителен, что позволяет изучать их с помощью инвариантов плюриканонических форм.

2. Расслоение на многообразия Калаби-Яу (чей канонический класс тривиален). Многообразия Калаби-Яу представляют собой особый, важный в физике класс многообразий. В размерности 2 он вклю-

чает в себя абелевы многообразия и поверхности K3. Отметим, что определение многообразий Калаби-Яу, стандартное для бирациональной геометрии, отличается от определения, принятого в физике.

3. Расслоение на многообразия Фано (чей антиканонический класс обилен). Многообразия Фано — в каком-то смысле "противоположность" многообразий общего типа. В этой диссертации мы сконцентрируемся в основном на изучении многообразий Фано.

Говоря более точно, утверждение о том, что любое многообразие бирационально эквивалентно многообразию, принадлежащему одному из трех классов, перечисленных выше, следует из программы минимальных моделей и гипотезы избыточности. На сегодняшний день существование программы минимальных моделей установлено в размерности не выше 4, однако некоторые более специальные результаты имеют место и в более высоких размерностях. Так, для приложений, как правило, достаточно существования программы минимальных моделей со скейлингом[1]. Что касается гипотезы избыточности, она известна в размерности не выше трех[2] [3] [4] [5].

Остановимся более подробно на некоторых из свойств многообразий Фано.

1. Многообразия Фано допускают большое количество примеров, возникающих естественным образом в раличных областях математики и математической физики.

2. Многообразия Фано являются ограниченными. Это означает, что в любой фиксированной размерности и при условии ограничения на

[1] C. Birkar, P. Cascini, C. D. Hacon, J. McKernan. *Existence of minimal models for varieties of log general type.* Journal of the American Mathematical Society, 23 (2), 405–468, 2006.

[2] Y. Miyaoka. *The Chern classes and Kodaira dimension of a minimal variety.* Algebraic geometry, Sendai, 1985, Adv. Stud. Pure Math., vol. 10, North-Holland, Amsterdam, 449–476, 1987.

[3] Y. Miyaoka. *Deformations of a morphism along a foliation and applications.* Algebraic geometry, Bowdoin, 1985 (Brunswick, Maine, 1985), Proc. Sympos. Pure Math., vol. 46, Amer. Math. Soc., Providence, 245–268, 1987.

[4] Y. Miyaoka. *Abundance conjecture for 3-folds: case $\nu = 1$.* Compositio Math. 68 (2), 203–220, 1988.

[5] Y. Miyaoka. *On the Kodaira dimension of minimal threefolds.* Math. Ann. 281 (2), 325–332, 1988.

особенности (например, если рассматривать только неособые многообразия), существует лишь конечное число деформационных семейств многобразий Фано. Это делает возможной (по крайней мере, в теории) классификацию таких многообразий заданной размерности. Так, если мы ограничимся гладкими многообразиями Фано, то в размерности 1 существует только одно такое многообразие — проективная прямая. В размерности 2 существует 10 деформационных семейств многообразий Фано, они традиционно называются поверхностями дель Пеццо. В размерности 3 деформационных семейств уже 105. Это следует из результатов В.А. Исковских, Ш. Мори и Ш. Мукаи[6].

3. Многообразия Фано покрываются рациональными кривыми. Более точно, многообразия Фано с "достаточно хорошими" особенностями являются рационально связными[7]. Таким образом, можно сказать, что многообразия Фано являются достаточно близкими к рациональным многообразиям. Однако, вообще говоря, неверно, что многообразия Фано рациональны.

4. Как уже было отмечено выше, многообразия Фано играют важную роль в программе минимальных моделей. Более точно, из программы минимальных моделей следует, что любое многообразие, покрывающееся рациональными кривыми, бирационально эквивалентно расслоению Мори, то есть расслоению, чьи слои являются многообразиями Фано.

Естественный способ изучения многообразия Фано заключается в рассмотрении его (плюри-)антиканонической линейной системы $|-lK_X|$ для $l \geq 1$. В размерности не выше 3 существование гладкого элемента в линейной системе $|-K_X|$ было установлено В.В. Шокуровым[8]. Это позволило применить индуктивные аргументы, чтобы свести изучение проективных моделей трехмерных многообразий Фано к изучению его гладких антиканонических элементов. Этот подход использовался для

[6] V. A. Iskovskikh, Yu. G. Prokhorov. *Algebraic Geometry V: Fano Varieties.* Encyclopaedia of Mathematical Sciences, Book 47. Springer, 1999.

[7] Q. Zhang. *Rational connectedness of log Q-Fano varieties.* Journal für die reine und angewandte Mathematik (Crelles Journal) 590, 131–142, 2006.

[8] V. V. Shokurov. *Smoothness of the general anticanonical divisor on a Fano* 3*-fold.* Math. USSR Izvestija, 14 (2), 1980.

получения классификации гладких многообразий Фано в размерности не выше 3[9].

Также плодотворно рассматривать особые элементы в $|-lK_X|$. Чтобы измерить, «насколько особыми» могут быть такие элементы, были введены следующие инварианты. Двойственный комплекс приведенного дивизора с нормальными пересечениями D на гладком многообразии — это топологическое пространство, которое отражает комбинаторную сложность этого дивизора. Используя разрешение особенностей, это определение можно обобщить на случай лог канонических пар. Двойственный комплекс не зависит от выбора представителя в классе крепантной эквивалентности пары: он определен однозначно с точностью до PL-гомеоморфизма[10].

Понятие регулярности лог-канонической пары было введено В.В. Шокуровым в работе[11]. По определению, регулярностью пары называется размерность двойственного комплекса граничного дивизора этой пары. Полной регулярностью многообразия (или пары) называется максимум регулярностей по всем $\mathbb{Q}$-дополнениям. Двойственное понятие (полной) корегулярности было определено в работе[12]:

$$\operatorname{coreg}(X) = \dim X - 1 - \operatorname{reg}(X).$$

Здесь под (ко-)регулярностью $\operatorname{reg}(X)$ многообразия Фано понимается его полная (ко-)регулярность. Как правило, такое злоупотребление обозначениями не приводит к путанице.

Неформально говоря, регулярность измеряет, насколько данное многообразие Фано далеко от того, чтобы быть исключительным. Последнее означает, что любое лог-каноническое дополнение на самом деле является лог-терминальным по Кавамате (klt). Для удобства, мы также определяем l-ю регулярность многообразия Фано для любого

[9] V. A. Iskovskikh, Yu. G. Prokhorov. *Algebraic Geometry V: Fano Varieties.* Encyclopaedia of Mathematical Sciences, Book 47. Springer, 1999.

[10] T. de Fernex, Já. Kollár, C. Xu. *The dual complex of singularities.* Higher dimensional algebraic geometry, in honour of Professor Yujiro Kawamata's sixtieth birthday, Adv. Stud. Pure Math., vol. 74, Math. Soc. Japan, Tokyo, 103–129, 2017.

[11] V. V. Shokurov. *Complements on surfaces* Journal of Mathematical Sciences, 102, 3876–3932, 2000.

[12] J. Moraga. *Coregularity of Fano varieties.* Geometriae Dedicata, 218, article number 40, 2024.

$l \geq 1$, которая по определению есть максимум размерностей двойственных комплексов лог-канонических l-дополнений на данном многообразии Фано. Тогда l-я корегулярность определяется как $\mathrm{coreg}_l(X) = \dim X - 1 - \mathrm{reg}_l(X)$.

Изучение корегулярности многообразий Фано привлекло внимание многих исследователей[13] [14] [15] [16]. Ожидается, что многообразия Фано корегулярности 0 должны обладать хорошими свойствами. Существует гипотеза, утверждающая, что двойственный комплекс пары Калаби-Яу (которой является, к примеру пара из многообразия Фано и дивизора дополнения) является фактором сферы по действию конечной группы. Эта гипотеза доказана в размерности не выше 4, а также в размерности 5 при условии, что пара имеет простые нормальные пересечения[17].

Однако о корегулярности конкретных семейств многообразий Фано было известно не так много: для результатов в размерности 2. Другой пример — случай торических многообразий: легко проверить, что их корегулярность равна 0. В этой диссертации мы рассматриваем случай гладких трехмерных многообразий Фано, см. теорему. Определение регулярности и корегулярности можно обобщить на случай многообразий (и пар) с действием группы G. В G-эквивариантной ситуации понятие регулярности изучалось в работе[18].

Задача классификации алгебраических многообразий тесно связана с другой важной задачей — изучением (бирегулярных или бирациональных) автоморфизмов алгебраических многообразий. *Группой Кремоны* $\mathrm{Cr}_n(\mathbb{C})$ называется группа бирациональных автоморфизмов проективного пространства. Число n называется рангом группы Кремоны. Для $n = 1$ эта группа изоморфна $\mathrm{PGL}(2, \mathbb{C})$. При $n \geq 2$ группа Кремоны становится гораздо более сложным объектом. Один из способов понять ее

[13] J. Moraga. *Coregularity of Fano varieties.* Geometriae Dedicata, 218, article number 40, 2024.

[14] S. Filipazzi, M. Mauri, J. Moraga, J. Peng. *Complements and coregularity of Fano varieties.* Forum of Mathematics, Sigma, 13:e39, 2025.

[15] K. Ascher, D. Bejleri, H. Blum, K. DeVleming, G. Inchiostro, Y. Liu, X. Wang. *Moduli of boundary polarized Calabi-Yau pairs.* arXiv:2307.06522, 2023.

[16] T. Ducat. *Quartic surfaces up to volume preserving equivalence* Selecta Math. (N.S.), 30 (1), Paper No. 2, 27, 2024.

[17] J. Kollár, C. Xu. *The dual complex of Calabi–Yau pairs.* Invent. Math., 205 (3), 527–557, 2016.

[18] K. Loginov, V. Przyjalkowski, A. Trepalin. *Coregularity of smooth Fano threefolds.* Trudy Matematicheskogo Instituta imeni V.A. Steklova, 329, 132–164, 2025.

структуру заключается в изучении ее конечных подгрупп. Так, изучение конечных подгрупп $\mathrm{Cr}_2(\mathbb{C})$ является классической проблемой и восходит к работам С. Кантора[19] и А. Вимана[20], написанным в конце XIX века. Однако полная классификация конечных подгрупп $\mathrm{Cr}_2(\mathbb{C})$ была получена гораздо позже В.В Долгачевым и В.А. Исковских[21]. Для некоторых классов групп также описаны их классы сопряженности в группе Кремоны ранга 2. Так, это было сделано Дж. Бланком[22] в случае абелевых групп.

Начиная с размерности 3 геометрия становится значительно сложнее, и полная классификация конечных подгрупп $\mathrm{Cr}_3(\mathbb{C})$ кажется неразумной. Однако существуют классификационные результаты для некоторых классов конечных групп. Ю.Г. Прохоровым[23] были классифицированы простые подгруппы в группе Кремоны ранга 3. Тем не менее, представляется интересным получить оценки на инварианты некоторых классов групп, например, на ранг (то есть минимальное количество порождающих) для p-групп[24] [25] [26] [27] [28] [29] [30], или получить классификацию для других классов конечных подгрупп в группе Кремоны ранга 3. В дальнейшем мы более подробно остановимся на этих результатах.

Задача нахождения системы образующих для $\mathrm{Cr}_n(\mathbb{K})$ также восхо-

[19] S. Kantor. *Theorie der endlichen Gruppen von eindeutigen Transformationen in der Ebene*, Mayer and Müller, Berlin, 1895.

[20] A. Wiman. *Zur Theorie der endlichen Gruppen von birationalen Transformationen in der Ebene*. Math. Ann., 48, 195–241, 1896.

[21] I. V. Dolgachev, V. A. Iskovskikh. *Finite subgroups of the plane Cremona group.* Algebra, arithmetic, and geometry: in honor of Yu. I. Manin. Vol. I, vol. 269 of Progr. Math., 443–548. Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 2009.

[22] J. Blanc. *Finite Abelian subgroups of the Cremona group of the plane.* C.R. Acad. Sci. Paris Ser. I ,344 (1), 21–26, 2007.

[23] Yu. Prokhorov. *Simple finite subgroups of the Cremona group of rank* 3. J. Algebraic Geom. 21, 563–600, 2009.

[24] Yu. Prokhorov. p-elementary subgroups of the Cremona group of rank 3. In *Classification of algebraic varieties*, EMS Ser. Congr. Rep., 327–338. Eur. Math. Soc., Zürich, 2011.

[25] Yu. Prokhorov. 2-elementary subgroups of the space Cremona group. In *Automorphisms in birational and affine geometry*, volume 79 of *Springer Proc. Math. Stat.*, 215–229. Springer, Cham, 2014.

[26] Yu. Prokhorov, C. Shramov. *p-subgroups in the space Cremona group.* Math. Nachr., 291 (8–9), 1374–1389, 2017.

[27] A. A. Kuznetsova. *Finite* 3*-Subgroups in the Cremona Group of Rank* 3. Math. Notes, 108 (5), 697–715, 2020.

[28] J. Xu. *A remark on the rank of finite p-groups of birational automorphisms.* Comptes Rendus Mathématique, 358 (7), 827–829, 2020.

[29] K. Loginov. *A note on 3-subgroups in the space Cremona group.* Communications in Algebra, 50 (9), 3704–3714, 2022.

[30] J. Kollár, Z. Zhuang. *Essential dimension of isogenies*, arXiv:2402.15362, 2024.

дит к XIX веку. В размерности 2 нвд алгебраически замкнутым полем ее решение известно как теорема Нетера-Кастельнуово[31] [32]. Ситуация усложняется, когда $\mathbb{K}$ не является алгебраически замкнутым[33]. Образующие группы $\mathrm{Cr}_2(\mathbb{K})$ над незамкнутым полем $\mathbb{K}$ описаны В.А. Исковских[34]. Несмотря на значительные достижения современной бирациональной геометрии, проблема нахождения явных систем образующих для $\mathrm{Cr}_n(\mathbb{K})$ при $n \geq 3$ не является обозримой[35] [36].

Другим возможным направлением в изучении групп автоморфизмов является изучение их свойств ограниченности. В.Л. Попов[37] предложил следующее определение. Группа Γ называется *жордановой* (или обладает свойством Жордана), если существует константа $J = J(\Gamma)$ такая, что каждая конечная подгруппа $G \subset \Gamma$ содержит нормальную абелеву подгруппу $A \subset G$ индекса не более J. Также будем говорить, что Γ имеет *ограниченные конечные подгруппы*, если существует константа $C = C(\Gamma)$ такая, что для любой конечной подгруппы $G \subset \Gamma$ выполнено $|G| \leq C$.

Классический результат К. Жордана утверждает, что для любого натурального n группа $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ является жордановой[38]. Как следствие, любая линейная алгебраическая группа над произвольным полем характеристики нуль является жордановой. Также известно, что $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ имеет ограниченные конечные подгруппы для любого поля $\mathbb{K}$, конеч-

[31] M. Noether. *Ueber Flächen, welche Schaaren rationaler Curven besitzen.* Math. Ann., 3, 161–227, 1871.

[32] G. Castelnuovo. Le trasformazioni generatrici del gruppo Cremoniano nel piano. *Atti della R. Accad. delle Scienze di Torino*, 36, 861–874, 1901.

[33] J. Blanc, I. Hedén. *The group of Cremona transformations generated by linear maps and the standard involution.* Ann. Inst. Fourier (Grenoble), 65(6), 2641–2680, 2015.

[34] V. A. Iskovskikh. Generators in the two-dimensional Cremona group over a nonclosed field. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 200, 173–188, 1993.

[35] H. P. Hudson. *Cremona transformations in plane and space.* Cambridge University Press, 1927.

[36] I. Pan. *Une remarque sur la génération du groupe de Cremona.* Bol. Soc. Brasil. Mat. (N.S.), 30, 95–98, 1999.

[37] V. L. Popov. *On the Makar-Limanov, Derksen invariants, and finite automorphism groups of algebraic varieties.* In Peter Russell's Festschrift, Proceedings of the conference on Affine Algebraic Geometry held in Professor Russell's honour, 1–5 June 2009, McGill Univ., Montreal., vol. 54 of Centre de Recherches Mathématiques CRM Proc. and Lect. Notes, pages 289–311, 2011.

[38] C. W. Curtis, I. Reiner. *Representation theory of finite groups and associative algebras.* Pure and Applied Mathematics, Vol. XI. Interscience Publishers, a division of John Wiley & Sons, New York-London, 1962.

но порожденного над $\mathbb{Q}$. Эта теорема была доказана Г. Минковским[39]. Отсюда следует, что $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$ имеет ограниченные конечные подгруппы.

Важным обобщением этих результатов на случай группы Кремоны является следующая теорема о том, что для любого поля k характеристики 0 и любого $n \geq 1$ группа Кремоны $\mathrm{Cr}_n(k)$ (или, более общим образом, группа бирациональных автоморфизмов рационально связного многообразия) является жордановой[40]. Таким образом, можно сказать, что конечные подгруппы группы Кремоны "достаточно близки" к абелевым группам. Отметим, что эта теорема была доказана в предположении о том, что верна гипотеза Борисова-Алексеева-Борисова. Она стала безусловным результатом после доказательством этой гипотезы К. Биркаром.

Перечислим еще несколько известных результатов о свойстве Жордана. Если X — компактная комплексная поверхность, то $\mathrm{Aut}(X)$ является жордановой, в то время как $\mathrm{Bim}(X)$ является жордановой тогда и только тогда, когда X не бимероморфна произведению $\mathbb{P}^1$ и эллиптической кривой[41] [42]. Если X — проективное многообразие над полем характеристики ноль, то группа $\mathrm{Aut}(X)$ является жордановой[43]. Это утверждение также верно для компактных комплексных многообразий *класса C*, то есть компактных комплексных многообразий, бимероморфных кэлеровым многообразиям.

Для кэлеровых многообразий имеются следующие результаты. Если X — компактное кэлерово многообразие, то группа $\mathrm{Aut}(X)$ является жордановой[44]. Если X — компактное трехмерное кэлерово многообразие с неотрицательной размерностью Кодаиры и положительной иррегулярностью, то группа $\mathrm{Bim}(X)$ является жордановой[45]. В работе А.С.

[39] J.-P. Serre. *Bounds for the orders of the finite subgroups of G(k).* In Group representation theory, 405–450. EPFL Press, Lausanne, 2007.

[40] Yu. Prokhorov, C. Shramov. *Jordan property for Cremona groups.* Amer. J. Math., 138 (2), 403–418, 2016.

[41] Yu. Prokhorov, C. Shramov. *Automorphism groups of compact complex surfaces.* Int. Math. Res. Notices, 2021 (14), 10490–10520, 2021.

[42] Yu. G. Zarhin. *Jordan groups and elliptic ruled surfaces.* Transform. Groups, 20 (2), 557–572, 2015.

[43] S. Meng, D.-Q. Zhang. *Jordan property for non-linear algebraic groups and projective varieties.* Amer. J. Math. 140 (4), 1133–1145, 2018.

[44] J. H. Kim. *Jordan property and automorphism groups of normal compact Kähler varieties.* Commun. Contemp. Math. 20, 3, 1750024, 2018.

[45] Yu. Prokhorov, C. Shramov. *Finite groups of bimeromorphic selfmaps of non-uniruled*

Голоты показано, что можно избавиться от предположения о нерегулярности X: если X — трехмерное компактное кэлерово многообразие с $\kappa(X) \geq 0$, то группа $\mathrm{Bim}(X)$ является жордановой[46].

В отличие от алгебраического случая, изучение групп бимероморфных автоморфизмов $\mathrm{Bim}(X)$ компактных комплексных многообразий сопряжено с дополнительными трудностями. Тем не менее, для многих классов многообразий удается установить алгебраические свойства этих групп, такие как жордановость или ограниченность конечных подгрупп. Классический результат К. Уэно (с использованием идеи П. Делиня) утверждает, что для мойшезонова многообразия X образ плюрианонического представления $\rho(\mathrm{Bim}(X))$ конечен[47]. В неалгебраическом случае этот образ может быть бесконечным, как показывает пример неалгебраической поверхности K3 с несимплектическим автоморфизмом бесконечного порядка, действующим на голоморфную 2-форму умножением на число, не являющееся корнем из единицы[48].

Другим важным инвариантом многообразий Фано, привлекшим внимание исследователей в последние годы, является K-стабильность[49]. K-стабильность многообразия Фано эквивалентна существованию на нем метрики Кэлера-Эйнштейна. Изначально K-стабильность была определена в терминах тестовых конфигураций в работах[50] [51]. Эквивалентное, но более удобное для вычислений определений K-стабильности было дано в работах[52] [53] [54].

Kähler threefolds. arXiv:2110.05825, 2021. To appear in Sb. Math.

[46]A. Golota. *Jordan property for groups of bimeromorphic automorphisms of compact Kähler threefolds.* arXiv:2112.02673, 2021.

[47]K. Ueno. *Classification theory of algebraic varieties and compact complex spaces.* Lecture Notes in Mathematics, Vol. 439. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1975. Notes written in collaboration with P. Cherenack.

[48]E. Macri, P. Stellari. *Automorphisms and autoequivalences of generic analytic surfaces.* Journal of Geometry and Physics, 58 (1), 133–164, 2008.

[49]C. Xu. *K-stability of Fano varieties: an algebro-geometric approach.* EMS Surveys in Mathematical Sciences, 8 1/2, 265–354, 2021.

[50]G. Tian. *Kähler-Einstein metrics with positive scalar curvature.* Invent. Math. 130 (1), 1–37, 1997.

[51]S. Donaldson. *Scalar curvature and stability of toric varieties.* J. Differential Geom., 62 (2), 289–349, 2002.

[52]C. Li. *K-semistability is equivariant volume minimization.* Duke Math. J. 166, no. 16, 3147–3218, 2017.

[53]K. Fujita. *A valuative criterion for uniform K-stability of Q-Fano varieties.* J. Reine Angew. Math. 751, 309–338, 2019.

[54]K. Fujita. *On K-stability and the volume functions of Q-Fano varieties.* Proc. Lond. Math.

K-стабильность также нашла важное приложение – новый подход к построению пространств модулей многообразий Фано. Таким образом, задача нахождение всех K-стабильных элементов в семействах многообразий Фано является важной для приложений. Так, была решена задача определения K-стабильности для гладких поверхностей дель Пеццо[55].

Гораздо более сложной является изучение K-стабильности гладких трехмерных многообразий Фано. Для большинства семейств таких многообразий эта задача была решена усилиями многих специалистов по бирациональной геометрии[56]. Ключевую роль в этих вычисления играет теория Аббана-Жуанга, позволяющая применить к изучению K-стабильности индуктивные соображения[57]. Однако для некоторых семейств эта задача оставалась открытой. K-(полу-)стабильность часто проверяется для общего элемента в данном семействе, из чего делается вывод о K-(полу)-стабильности для общего элемента семейства в силу открытости этого условия. Тем не менее, представляется полезным явно сформулировать условия общности для K-стабильных элементов семейства, или, если возможно, описать все K-(полу)-стабильные элементы в нем.

K-стабильность можно изучать и для пар Фано. Так, К. Фуджитой в работе[58] была поставлена задача определения K-стабильности для пар типа Маеды. Это определение мотивированы классификацией Х. Маеды[59] трехмерных пар Фано с ненулевой приведенной границей. Такие пары не удовлетворяют условию ограниченности, однако обладают интересной и достаточно хорошо контролируемой геометрией. Особый интерес представляет случай, когда дивизор границы такой пары Фано типа Маеды является приводимым, то есть имеет несколько компонент. В этом случае область K-(полу-)стабильности представляет собой много-

Soc. 113, 541–582, 2016.

[55]J. Park, J. Won. *K-stability of smooth del Pezzo surfaces.* Math. Annalen 372 (3–4), 1239–1276, 2017.

[56]C. Araujo, A.-M. Castravet, I. Cheltsov, K. Fujita, A.-S. Kaloghiros, J. Martinez-Garcia, C. Shramov, H. Süss, N. Viswanathan. *The Calabi problem for Fano threefolds.* MPIM preprint, 2021.

[57]H. Abban, Z. Zhuang. *Stability of Fano varieties via admissible flags.* preprint, arXiv:2003.13788, 2020.

[58]K. Fujita. *On K-Polystability for Log Del Pezzo Pairs of Maeda Type.* Acta Mathematica Vietnamica, 45, 943–965, 2020.

[59]H. Maeda. *Classification of logarithmic Fano* 3*-folds.* Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci. 59 (6), 245–247, 1983.

мерное выпуклое тело. Напомним, что областью K-(полу-)стабильности называется область коэффициентов при компонентах дивизора границы с условием, что соответствующая пара является K-(полу-)стабильной.

Другой интересной задачей в бирациональной геометрии является вопрос о том, как ведет себя нерациональность при вырождении многообразий. Например, известно[60], что в гладком семействе из рациональности общего схемного слоя следует рациональность слоя над замкнутой точкой.

Если же семейство не является гладким, то это неверно. Так, гладкая поверхность дель Пеццо, определенная над алгебраически замкнутым полем, являющая рациональной, но может вырождаться в нерациональную особую поверхность дель Пеццо. В качестве примера можно рассмотреть гладкую гиперповерхность степени 3 в $\mathbb{P}^3$, являющуюся гладкой поверхностью дель Пеццо, которая вырождается в конус над эллиптической кривой, являющийся нерациональной особой поверхностью дель Пеццо. Это связано с тем, что вырождение имеет лог канонические (lc), но не лог терминальные (klt) особенности. Отметим, что эта ситуация гораздо хуже представлена в литературе: известны лишь некоторые результаты для терминальных многообразий[61] [62]. В настоящей диссертации мы доказываем некоторые результаты в этом направлении.

Цель работы

Исследование групп бимероморфных автоморфизмов компактных комплексных многообразий с точки зрения свойства Жордана, в частности, доказательство жордановости для многообразий размерности n с размерностью Кодаиры не менее $n-2$. Изучение ограниченности конечных подгрупп в образе плюриканонического представления группы бимероморфных автоморфизмов для компактных комплексных многообразий. Изучение корегулярности гладких трехмерных многообразий Фано,

[60] M. Kontsevich, Yu. Tschinkel. *Specialization of birational types.* arXiv 1708.05699, 2017.

[61] U. Persson. *On degenerations of algebraic surfaces.* Proc. Amer. Math. Soc. 11, no. 189, 1977.

[62] B. Totaro. *Rationality does not specialise among terminal varieties.* Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, 161 (1), 13–15, 2016.

включая вычисление этого инварианта для всех 105 деформационных семейств и доказательство того, что для 100 из них общий элемент имеет корегулярность 0. Развитие методов явного построения границ нулевой корегулярности на многообразиях Фано основной серии с использованием техники двойной проекции. Исследование конечных абелевых подгрупп в группе Кремоны ранга 3, в частности, получение оценки на число образующих для конечных абелевых 3-групп, действующих на рационально связных трехмерных многообразиях. Изучение свойств ограниченности для конечных абелевых групп, эффективно действующих на рационально связном многообразии размерности 3. Изучение ограниченности нерациональности слоев расслоений Мори, слоями которых являются многообразия Фано, включая доказательство ограниченности рода и гональности кривых, на которые расслаивается компонента дивизора границы, чей коэффициент превосходит заданное положительное число. Исследование K-стабильности для конкретных семейств трехмерных многообразий Фано, включая доказательство K-стабильности для всех элементов семейства 4.1 и общих элементов семейства 3.2 с явным указанием условия общности. Исследование K-стабильности для пар Фано типа Маеды, вычисление областей K-полустабильности для пар типа Маеды и доказательство конечности числа деформационных семейств таких пар с непустой областью K-полустабильности. Классификация максимальных полустабильных вырождений гладких многообразий Фано и доказательство их единственности в каждой фиксированной размерности. Обобщение понятия регулярности и корегулярности на случай многообразий с групповым действием (G-корегулярность) и изучение этого инварианта для проективной плоскости и поверхностей дель Пеццо.

Научная новизна

Все результаты, выносимые на защиту, являются новыми. Все относящиеся к диссертации результаты принадлежат автору. Основные из них состоят в следующем.

1. Доказано, что для 100 из 105 семейств гладких трехмерных многообразий Фано общий элемент в семействе имеет корегулярность

0. Более того, для 92 семейств из этих 100 любой элемент в семействе имеет корегулярность 0; для оставшихся 5 семейств получены некоторые частичные результаты. А именно, для двулистного накрытия проективного пространства, разветвленного в секстике, и для квартики доказано, что *общий* элемент в семействе имеет корегулярность не менее 1. Для пересечения квадрики и кубики и пересечения трех квадрик, получена оценка для первой корегулярности coreg_1. Для *общего* трехмерного многообразия Фано рода 6 доказано, что корегулярность не больше 1.

2. Доказано, что если X — n-мерное компактное комплексное многообразие с размерностью Кодаиры $\kappa(X) \geq n-2$, то его группа бимероморфных автоморфизмов $\mathrm{Bim}(X)$ является жордановой. Доказано, что если X — компактное комплексное многообразие, то образ его плюриканонического представления $\rho(\mathrm{Bim}(X))$ и образ проективного плюриканонического представления $\overline{\rho}(\mathrm{Bim}(X))$ имеют ограниченные конечные подгруппы.

3. Доказано, что конечная абелева 3-группа, эффективно действующая на рационально связном многообразии размерности 3, может быть порождена четырьмя элементами. Как следствие, используя явные методы программы минимальных моделей, получена точная оценка на ранг p-групп, действующих на рационально связных многообразиях размерности 3.

4. Доказано, что конечная абелева группа, эффективно действующая на рационально связном многообразии размерности 3, может принадлежать к одному и трех типов: либо иметь тип произведения (то есть быть изоморфной произведению конечных абелевых групп, эффективно дейстсующих на рациональной поверхности и рациональной кривой, соответственно), либо иметь тип К3 (то есть быть циклическим расширение конечной абелевой группы, эффективно действуещей на поверхности К3), либо такая группа допускает эффективное действие на трехмерном $G\mathbb{Q}$-многообразии Фано с пустой антиканонической линейной системой.

5. Доказано, что для фиксированного положительного вещественного числа t, и для расслоения Калаби–Яу типа Фано $(X, B) \to Z$, где

$\dim X = 3$ и $\dim Z \geqslant 1$ с условием, что для компоненты D дивизора B с коэффициентом $\geqslant t$, стягиваемой в точку на Z, имеем следующее. Во-первых, D бирационально $\mathbb{P}^1 \times C$, где C — гладкая проективная кривая с гональностью $\mathrm{gon}(C)$, ограниченной в зависимости только от t. Во-вторых, если $t > \frac{1}{2}$, то род $g(C)$ ограничен в зависимости только от t. В-третьих, если $t = 1$, то $g(C) \leqslant 1$.

6. Доказано, что пара Фано с целой границей, имеющей простые нормальные пересечения и двойственный комплекс максимальной размерности, единственна в любой фиксированной размерности. Более того, она является торической и обладает структурой обобщенной башни Ботта. Доказано, что максимальное полустабильное вырождение гладкого многообразия Фано единственно в любой фиксированной размерности.

7. Доказано, что существует лишь конечное число K-полустибильных пар Фано размерности 3 типа Маеды с приводимой границей. Для таких пар вычислены области K-полустабильности. Доказано, что гладкие трехмерные многообразия Фано, принадлежащие семейству 4.1, являются дивизориально стабильными. Доказано, что общие трехмерные многообразия Фано, принадлежащие семейству 3.2, являются дивизориально стабильными, с явным указанием условий общности.

8. Доказано, что для поверхностей дель Пеццо с дювалевскими особенностями степени не менее двух корегулярность и первая корегулярность всегда равны нулю. В случае поверхностей степени единица корегулярность оказывается равной единице тогда и только тогда, когда ассоциированное эллиптическое расслоение является изотривиальным, за исключением двух специальных конфигураций особых точек, для которых корегулярность зануляется. Кроме того, показано, что первая корегулярность, отвечающая за существование торической модели, равна единице в точности для изотривиальных расслоений либо для двух явно выписанных поверхностей с не изотривиальным эллиптическим расслоением. Получена также классификация конфигураций особых точек и особых слоев, при которых реализуется положительная корегулярность, причем в большинстве случаев такие поверхности имеют число Пикара

больше единицы.

Методы исследования

В работе используются методы бирациональной геометрии, программы минимальных моделей, теории многообразий Фано, теории особенностей и комплексной геометрии.

Теоретическая и практическая ценность

Работа носит теоретический характер. Результаты диссертации могут найти приложения в алгебраической геометрии, дифференциальной геометрии и математической физике.

Апробация работы

Результаты диссертации докладывались автором на семинаре отдела алгебры и отдела алгебраической геометрии (семинар И.Р. Шафаревича) и семинаре В.А. Исковских Математического института им. В.А. Стеклова, семинаре лаборатории алгебраической геометрии НИУ ВШЭ, семинаре лаборатории алгебраической геометрии и гомологической алгебры МФТИ, семинаре по многомерному комплексному анализу МГУ, семинарах по геометрии университетов Бристоля, Лафборо, Эдинбурга, Имперского Колледжа Лондона (Великобритания), университета Мэрилэнда (США), а также на следующих конференциях:

1. Международная конференция по алгебраической геометрии, МИАН, Москва, 11 декабря 2025.
2. V Конференция математических центров России, Красноярск, 11–16 августа 2025 г.
3. Международная конференция по алгебраической геометрии, Поханг, Республика Корея, 25–30 марта 2025.

4. Международная конференция по алгебраической геометрии, Санья, КНР, 23–26 декабря 2024.

5. Международная конференция “Дни геометрии в Пекине”, Пекин, КНР, 23 ноября 2024.

6. Конференция “Алгебраические группы IV. Сезон белых ночей”, Международный математический институт им. Эйлера, Санкт-Петербург, Россия, 8–12 июля 2024.

7. Международная конференция “Higher-dimensional algebraic geometry”, 6–10 мая 2024, Стони Брук, США.

8. Международная конференция “Бирациональная геометрия и многообразия Фано”, посвященная 60-летию Ю.Г. Прохорова, Математический институт В.А. Стеклова, Москва, 14 марта 2024 г.

9. Международная конференция по бирациональной геометрии, НИУ ВШЭ, 20 апреля 2023, Москва.

10. III Конференция математических центров России, Майкоп, Россия, 10–15 октября 2023.

11. Конференция, посвященная 75-летию математического факультета Томского Государственного Университета, 2–5 октября 2023, Томск, Россия.

12. Конференция по комплексному анализу и его приложениям, 11–15 сентября 2023, Красноярск, Россия,

13. Международная конференция по алгебраической геометрии, Тайпей, Тайвань, 31 июля — 4 августа 2023.

14. Конференция “Алгебра, геометрия и алгебраическая геометрия”, Математический институт им. Соболева, Новосибирск, декабрь 2022.

15. Конференция “Дни геометрии в Новосибирске, 2022”. 29 августа–2 сентября 2022, Новосибирск, Россия.

16. Конференция “Геометрия и гомологическая зеркальная симметрия”, Математический центр “Сириус”, Сочи, Россия, 11–14 декабря 2021.

17. Конференция “Primorie Mathematical Fair”, Владивосток, Россия, 21–26 июля 2021.

18. Конференция “Multidimensional Residues and Tropical Geometry”, 14–18 июня 2021, Математический центр “Сириус”, Сочи, Россия.

19. Конференция по алгебраической геометрии, Международный математический институт им. Эйлера, Санкт-Петербург, Россия, май 2021.

20. Международная конференция “Escola Transguanabara de Geometria Algébrica”, Рио-де-Жанейро, Бразилия, 10–13 февраля 2020.

Публикации по теме диссертации

Основные результаты диссертации опубликованы в 12 работах, список которых приведен отдельно. Все работы опубликованы в изданиях, индексируемых в ведущих международных базах научного цитирования.

В работе (6) К.В.Логиновым были доказаны следующие утверждения: Proposition 1.2 — о связи корегулярности гладких поверхностей Дель Пеццо с изотривиальностью антиканонического эллиптического пучка, Theorem 1.3 — корегулярности поверхностей дель Пеццо с особенностями дю Валя в терминах изотривиальности антиканонического эллиптического пучка, Theorem 1.4— о корегулярности поверхностей дель Пеццо с особенностями дю Валя в терминах конфигураций особых точек, Theorem 1.5 о корегулярности поверхностей дель Пеццо с особенностями дю Валя в терминах особых слоев антиканонического эллиптического пучка, Theorem 1.6 — о существовании дорических моделей для поверхностей дель Пеццо с особенностями дю Валя, а также все утверждения главы 3, посвященные доказательству этих теорем.

В статье (7) К.В.Логиновым были доказаны следующие утверждения: теоремы Proposition 5 — о связи G-корегулярности и G-

инвариантного лог-канони-ческого порога, Proposition 7 — о связи G-корегулярности со (слабо) исключительными особенностями, Corollary 10 — о связи G-корегулярности и G-сверхжесткости для проективной плоскости.

В работе (8) К.В.Логиновым были доказаны следующие утверждения: Lemma 2.2 — о геометрии поверхностей Дель Пеццо степени 3 с особенностями Дю Валя, Proposition 5.1 и Proposition 5.2 — вычисления дивизориальной стабильности трехмерных многообразий Фано из семейства 3.2, и Lemma 6.1 — вычисления дельта-инварианта в специальном случае.

В работе (9) К.В.Логинову принадлежат все утверждения и теоремы, за исключением Proposition 2.3.

В работе (10) К.В.Логиновым были доказаны следующие утверждения: Proposition 2.1 — утверждения о геометрии многообразия Фано в семействе 4.1, Proposition 2.3 — о структуре расслоений на поверхности Дель Пеццо, и Proposition 4.2 — вычисления дивизориальной стабильности семействе 4.1.

В работе (11) К.В.Логиновым были доказаны основные результаты в разделе 4, включая Proposition 4.5 о теории присоединения для лог-пар Фано, результаты в разделе 5, включая Theorem 5.1 о структуре максимальных лог-пар Фано, и результаты в разделе 6, включая Proposition 6.3 о существовании свободных стратовых прямых линий. Эти результаты имеют решающее значение для доказательства теорем Theorem 1.1 и Theorem 1.2 о структуре максимальных лог-пар Фано и максимальных вырождениях многообразий Фано.

Результаты работы (12) получены в неразделимом соавторстве.

Остальные работы написаны К. В. Логиновым лично.

Структура диссертации

Диссертация состоит из введения, 5 глав, разбитых на разделы, и списка литературы.

План работы

Опишем структуру диссертации.

Во введении дается общая постановка проблемы классификации алгебраических многообразий в рамках бирациональной геометрии и программы минимальных моделей (ПММ). Определяется место многообразий Фано в этой программе как одного из трех фундаментальных строительных блоков. Дается краткий обзор ключевых свойств многообразий Фано: ограниченность, рациональная связность, того факта, что они являются слоями расслоений Мори. Приводится мотивация для изучения центральных для диссертации понятий: корегулярности (связь с двойственными комплексами), групп автоморфизмов и свойств ограниченности для них, а также K-стабильности. Дается краткий обзор ранее известных результатов и формулируются основные результаты диссертации.

В первой главе собраны предварительные сведения, которые затем используются в остальных частях диссертации. Наиболее существенные факты, приведенные в этой главе, стандартны и хорошо известны.

В разделе 1.1 мы фиксируем некоторые из основных обозначений, которые используются в этой диссертации. Мы также напоминаем определения бирациональной эквивалентности, рациональности, канонического класса, (суб)-пар и их особенностей. В частности, приводятся определения лог-канонических, ϵ–лог-канонических, лог-терминальных по Кавамате, чисто лог-терминальных, канонических и терминальных особенностей. В разделе 1.2 мы формулируем некоторые результаты из программы минимальных моделей: сначала в случае поверхностей, затем в высших размерностях. Мы приводим известные результаты о существовании и обрыве флипов, имеющие фундаментальное значение для программы минимальных моделей. В разделе 1.3 мы приводим определение и примеры многообразий Фано. Также даются более общие определения пар Фано, пар Калаби-Яу и расслоений Мори, в том числе в G-эквивариантной постановке. В разделе 1.3.8 формулируются фундаментальные результаты К. Биркара об ограниченности многообразий Фано. В разделе 1.3.13 мы напоминаем классификацию многообразий Фано малых размерностей, сосредотачиваясь на случай гладких поверхностей дель Пеццо. В разделе 1.3.15 даем определение дополнений, принадлежащее В.В. Шокурову, а также определение двойствен-

ного комплекса в разделе 1.3.17. Мы приводим некоторые примеры и формулируем известную гипотезу о структуре двойственного комплекса пар Калаби-Яу, доказанную в малых размерностях. В разделе 1.3.23 мы приводим результаты о полустабильных вырождениях многообразий Фано. Далее, в разделе 1.3.27 даются важные для дальнейшего определения регулярности и корегулярности многообразий Фано, включая G-эквивариантный случай, обсуждаемый в разделе 1.3.29. В разделе 1.3.37 мы приводим определение крепантной эквивалентности. Раздел 1.4.1 содержит введение в теорию K-стабильности: определяются псевдоэффективные пороги, бета-инвариант, дельта-инвариант, даются определения K-стабильности и K-полустабильности. В разделе 1.4.10 излагаются основные инструменты для вычислений — теория Аббана–Чжуана, формулы для вычисления инвариантов на поверхностях и кривых, позволяющие сводить задачу о K-стабильности трехмерного многообразия к задачам на его сечениях. Наконец, в разделе 1.4.13 приводятся результаты о K-стабильности пар типа Маеды.

Во второй главе мы изучаем свойства Жордана для групп бимероморфных автоморфизмов компактных комплексных многообразий. В разделе 2.1 мы собираем предварительные результаты, которые затем используются в доказательстве. В частности, мы даем определение и напоминаем основные свойства плюриканонического представления в разделе 2.1.2. В разделе 2.1.4 мы формулируем определение свойства Жордана и доказываем некоторые результаты из теории групп. В разделе 2.2 мы строим "послойное" разрешение особенностей в аналитической категории, необходимое для доказательства основной теоремы. Затем, в разделе 2.3 мы доказываем следующие теоремы:

Теорема 1 *Пусть X — компактное комплексное многообразие. Тогда образ плюриканонического представления $\rho(\mathrm{Bim}(X))$ и образ проективного плюриканонического представления $\overline{\rho}(\mathrm{Bim}(X))$ имеют ограниченные конечные подгруппы.*

Теорема 2 *Пусть X — n-мерное компактное комплексное многообразие с $\kappa(X) \geq n-2$. Тогда группа $\mathrm{Bim}(X)$ является жордановой.*

Теорема 3 *Пусть X — трехмерное компактное комплексное многообразие с $\kappa(X) > 0$, тогда группа $\mathrm{Bim}(X)$ является жордановой.*

В третьей главе мы изучаем корегулярность многообразий Фано. В разделе 3.1 мы вычисляем корегулярность гладких поверхностей дель Пеццо, то есть многообразий Фано размерности 2. В разделе 3.2 мы напоминаем некоторые понятия и факты из теории особенностей. В разделе 3.3 мы доказываем некоторые подготовительные результаты о двойственных комплексах некоторых пар. В разделе 3.4 мы начинаем анализировать трехмерные многообразия Фано. Мы явно строим границы на таких многообразиях, которые реализуют корегулярность 0. Более точно, мы рассматриваем трехмерные многообразия Фано индекса не менее 2. В разделе 3.5 мы рассматриваем трехмерные многообразия Фано основной серии, то есть трехмерные многообразия Фано ранга Пикара 1 и индекса 1. В разделе 3.6 мы разбираем случай двулистного накрытия проективного пространства с ветвлением в секстике, то есть многообразия Фано в семействе 1.1. В разделе 3.7 мы рассматриваем случай квартики, то есть многообразия Фано в семействе 1.2. В разделе 3.8 анализируется пересечение квадрики и кубики, то есть многообразие Фано в семействе 1.3. В разделе 3.9 мы изучаем пересечение трех квадрик, то есть многообразие Фано в семействе 1.4. В разделе 3.10 мы работаем с трехмерными многообразиями Фано с числом Пикара не менее 2, которые не могут быть получены как раздутие какого-либо другого многообразия Фано. В разделах 3.11 и 3.12 мы работаем с трехмерными многообразиями Фано с числом Пикара 2 и не менее 3, соответственно, которые могут быть получены как раздутие какого-либо другого многообразия Фано. Таким образом, мы доказываем следующую теорему. В ней мы пользуемся общепринятыми обозначениями для семейств многообразий Фано[63].

Теорема 4 *Пусть X — гладкое трехмерное многообразие Фано. Положим*

$$\aleph = \{1.1, 1.2\}, \qquad \beth = \{1.3, 1.4\}, \qquad \gimel = \{1.5\},$$

$$\daleth = \{1.6, 1.7, 1.8, 1.9, 1.10, 1.11, 2.1, 10.1\}.$$

Тогда верно следующее.

[63] V. A. Iskovskikh, Yu. G. Prokhorov. *Algebraic Geometry V: Fano Varieties.* Encyclopaedia of Mathematical Sciences, Book 47. Springer, 1999.

1. *Если* X *— любое гладкое трехмерное многообразие Фано, принадлежащее любому семейству, кроме семейств из* №1, №2, №3, №5, *то* $\operatorname{coreg}(X) = 0$,

2. *Если* X *— общий элемент в одном из семейств* №1, *то* $\operatorname{coreg}(X) \geq 1$,

3. *Если* X *— общий элемент в одном из семейств* №2, *то* $\operatorname{coreg}_1(X) = 2$,

4. *Если* X *— общий элемент в семействе* №3, *то* $\operatorname{coreg}(X) \leq 1$,

5. *Если* X *— общий элемент в одном из семейств* №5, *то* $\operatorname{coreg}(X) = 0$.

Наконец, в разделе 3.13 мы организуем все наши результаты в одну таблицу.

Четвертая глава посвящена классификационным задачам в теории групп бирациональных автоморфизмов. В разделе 4.1 дается введение и постановка задачи об описании конечных подгрупп в группах Кремоны $\mathrm{Cr}_n(\mathbb{C})$. Раздел 4.2 содержит предварительные сведения о действиях p-групп на алгебраических многообразиях. В разделах 4.3–4.6 изучается действие конечных абелевых p-групп на алгебраических многообразиях; анализируются специальный и общий случаи, оценивается ранг таких групп. Так, в разделе 4.3 изучается действие абелевых p-групп на поверхностях типа K3. В разделе 4.4 при помощи орбифолдной формулы Римана–Роха исследуется антиканоническая линейная система многообразий Фано. В разделе 4.5 изучается действие 3-групп на особых трехмерных многообразиях Фано, чья антиканоническая линейная система содержит единственный элемент. В разделе 4.6 изучается действие 3-групп на трехмерных многообразиях Фано, чья антиканоническая линейная система содержит хотя бы различных элемента. В разделе 4.7 доказывается основной результат: конечная абелева 3-группа, эффективно действующая на рационально связном трехмерном многообразии, может быть порождена не более чем четырьмя элементами; этот результат завершает серию теорем об оценке ранга p-групп в размерности 3. Таким образом, справедлива следующая теорема.

Теорема 5 *Пусть X — рационально связное многообразие размерности 3, и пусть $G \subset \mathrm{Bir}(X)$ — конечная p-группа. Тогда G может быть порождена не более чем r элементами, где*

- $r = 6$ *при* $p = 2$,
- $r = 4$ *при* $p = 3$,
- $r = 3$ *при* $p \geq 5$.

Более того, эти оценки достигаются в $\mathrm{Cr}_3(\mathbb{C})$.

Пятая глава посвящена обобщению результатов, полученных в четвертой главе, на случай произвольных конечных абелевых групп, действующих на рационально связном трехмерном многообразии. Основным результатом этой главы является следующая теорема.

Теорема 6 *Пусть X — рационально связное многообразие размерности 3, и пусть $G \subset \mathrm{Bir}(X)$ — конечная абелева группа. Тогда*

1. *либо G имеет тип произведения,*
2. *либо G имеет тип K3,*
3. *либо G точно действует на $G\mathbb{Q}$-трехмерном многообразии Фано X' с $|-K_{X'}| = \emptyset$, и более того, любое $G\mathbb{Q}$-расслоение Мори с точным действием G является $G\mathbb{Q}$-трехмерным многообразием Фано с пустой антиканонической системой.*

Опишем структуру главы. В разделе 5.2 приводятся некоторые факты о действиях конечных абелевых групп на топологических пространствах (в частности, на сферах малых размерностей) и на алгебраических многообразиях. В разделе 5.3 изучаются свойства расширений конечных абелевых групп и вводится определение конечных абелевых групп типа произведение. В разделах 5.4 и 5.5 мы доказываем некоторые подготовительные утверждения, рассматривая действие конечных абелевых групп на некоторых классах кривых и поверхностей. Это позволяет применить наши методы к конечным абелевым подгруппам в группе Кремоны ранга и передоказать теорему классификации в этом случае. Это сделано в разделе 5.6. Затем мы рассматриваем действие конечных абелевых

групп на ростке терминальной особенности размерности 3. В разделе 5.7 мы доказываем, что если на X существует (гладкая или особая) G-неподвижная точка, то G имеет тип произведения. Мы также доказываем некоторые более точные результаты, которые будут использоваться позже. Затем мы анализируем особенности пары (X, S). В разделе 5.8 мы показываем, что либо пара (X, S) является lc, либо G имеет тип произведения. С другой стороны, мы показываем, что если (X, S) является plt, то G имеет тип К3. Если S неприводима, мы применяем теорию эллиптических поверхностных особенностей, а также трехмерных терминальных особенностей, чтобы показать, что G имеет тип произведения. В разделе 5.9 мы рассматриваем случай, когда (X, S) является dlt и S приводима. Мы изучаем комбинаторику группового действия на двойственном комплексе и заключаем, что G имеет тип произведения в этом случае. В разделе 5.10 мы рассматриваем случай, когда (X, S) является lc, но не dlt, и S приводима. В разделе 5.11 мы устанавливаем результат ограниченности для групп типа К3. После этого мы приводим некоторые примеры. Наконец, в разделе 5.12 мы доказываем основные результаты этой главы.

В шестой главе изучаются расслоения Мори $(X, B) \to Z$, слои которых — многообразия Фано. В разделе 6.1 дается введение и постановка задачи об ограниченности нерациональности слоев, стягиваемых в точку, и формулируются основные результаты. Раздел 6.2 содержит примеры, показывающие существенность предположений в основных результатах. В разделе 6.3 собраны предварительные сведения: дивизоры, ПММ, расслоения Фано/Мори/Калаби–Яу, гональность кривых. Раздел 6.4 содержит доказательство основного результата в размерности 2 (для поверхностей). Разделы 6.5–6.6 образуют технически насыщенную часть: вводятся определения dlt-моделей, описывается ПММ над парой и приводится анализ дивизоров над dlt-парами. Доказываются основные теоремы для трехмерного случая. Устанавливается, что для компоненты D границы B с коэффициентом $\geq t$, стягиваемой в точку, род и гональность кривой C (такой, что D бирационально $\mathbb{P}^1 \times C$) ограничены константой, зависящей только от t. Более точно, доказывается следующая теорема.

Теорема 7 *Зафиксируем положительное вещественное число t. Предположим, что $(X, B) \to Z$ — расслоение Калаби–Яу типа Фано, где*

$\dim X = 3$ *и* $\dim Z \geqslant 1$. *Предположим, что* D *— компонента* B *с коэффициентом* $\geqslant t$, *стягиваемая в точку на* Z. *Тогда*

1. D *бирационально* $\mathbb{P}^1 \times C$, *где* C *— гладкая проективная кривая с гональностью* $\mathrm{gon}(C)$, *ограниченной в зависимости только от* t;
2. *если* $t > \frac{1}{2}$, *то род* $g(C)$ *ограничен в зависимости только от* t;
3. *если* $t = 1$, *то* $g(C) \leqslant 1$.

Следующий результат является аналогом этой теоремы в размерности 2. Здесь мы также разрешаем случай $\dim Z = 0$ и не предполагаем свойства типа Фано.

Теорема 8 *Пусть* u *— положительное вещественное число. Пусть* $(S, \Delta) \to Z$ *— расслоение Калаби–Яу, где* S *имеет размерность* 2. *Предположим, что коэффициент компоненты* D *в* Δ *не меньше* u, *и что* D *стягивается в точку на* Z. *Тогда*

1. *гональность* D *ограничена в зависимости только от* u,
2. *если* $u > \frac{1}{2}$, *то род* $g(D^\nu)$ *нормализации* D^ν *кривой* D *ограничен в зависимости только от* u,
3. *если* $u = 1$, *то* $g(D^\nu) \leq 1$,
4. *если* $\dim Z \geqslant 1$, *то* $g(D^\nu) \leq 1$.

Работы автора по теме диссертации

1. Конечные абелевы группы, действующие на рационально связных трехмерных многообразиях,

   К. В. Логинов.

   Успехи математических наук, 81:2 (488), 185–186, 2026.

2. Jordan property for groups of bimeromorphic self-maps of complex manifolds with large Kodaira dimension.

   K. Loginov.

   Mathematische Zeitschrift, 309, article number 21, 2025.

3. K-polystability of 3-dimensional log Fano pairs of Maeda type.

   K. Loginov.

   International Journal of Mathematics, 34 (1), 2250095, 2023.

4. A note on 3-subgroups in the space Cremona group.

   K. Loginov.

   Communications in Algebra, 50 (9), 3704–3714, 2022.

5. On semistable degenerations of Fano varieties.

   K. Loginov.

   European Journal of Mathematics, 8, 991–1005, 2022.

6. О корегулярности поверхностей дель Пеццо с дювалевскими особенностями.

   К. В. Логинов, А. С. Трепалин.

   Успехи математических наук, 81:2 (488), 145–176 , 2026.

7. G-coregularity of del Pezzo surfaces.

   K. Loginov, V. Przyjalkowski and A. Trepalin.

   Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics, 329, 117–147, 2025.

8. K-stability of Fano threefolds of rank 3 and degree 14.

   K. Loginov and G. Belousov.

   Annali dell'Universita di Ferrara, 70, 1093–1114, 2024.

9. Coregularity of smooth Fano threefolds.

   K. Loginov, A. Avilov and V. Przyjalkowski.

   Communications in Number theory and Physics, 18 (3), 2024.

10. K-stability of Fano threefolds of rank 4 and degree 24.

    K. Loginov and G. Belousov.

    European Journal of Mathematics, 9 (80), 2023.

11. Maximal log Fano manifolds are generalized Bott towers

    K. Loginov and J. Moraga.

    Journal of Algebra, 612, 110–146, 2022.

12. Bounding non-rationality of divisors on 3-fold Fano fibrations

    K. Loginov and C. Birkar.

    Journal für die reine und angewandte Mathematik (Crelles Journal), 779, 167–188, 2021.

Подписано в печать 05.06.2026 г.
Тираж 70 экз.

Отпечатано в типографии