Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Математический институт им. В. А. Стеклова
Российской академии наук

на правах рукописи

Константин Валерьевич Логинов

Геометрия и автоморфизмы многообразий Фано

Диссертация
на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Москва — 2026

Оглавление

Введение **6**

1 Предварительные сведения **27**

1.1 Обозначения и соглашения 27

1.1.1 Бирациональная эквивалентность 28

1.1.4 Стягивания 29

1.1.5 Рациональность 29

1.1.10 Канонический класс 30

1.1.13 (Суб)-пары и особенности 31

1.1.26 Присоединение и лог-центры 34

1.2 Программа минимальных моделей 36

1.2.1 Классическая ПММ для поверхностей 36

1.2.9 ПММ в высших размерностях 37

1.3 Многообразия Фано 41

1.3.8 Ограниченность 42

1.3.13 Поверхности дель Пеццо 44

1.3.15 Дополнения 46

1.3.17 Двойственный комплекс 46

1.3.23 Полустабильные вырождения 48

1.3.27 Регулярность и корегулярность 50

1.3.29 G-корегулярность 51

1.3.37 Крепантная эквивалентность 53

1.4 K-стабильность 56

1.4.1 Бета-инвариант и дельта-инвариант 56

1.4.10 Теория Аббана–Чжуана 59

1.4.13 K-стабильность пар Фано типа Маеды 60

2 Жордановость групп бимероморфных автоморфизмов 62
2.1 Предварительные сведения 64
2.1.2 Плюриканоническое представление 66
2.1.4 Теория групп 67
2.2 Разрешение особенностей 70
2.3 Доказательство основных результатов 75

3 Корегулярность гладких трехмерных многообразий Фано 83
3.1 Поверхности дель Пеццо 89
3.2 Теория особенностей 95
3.3 Подготовительные результаты 101
3.4 Трехмерные многообразия Фано индекса ≥ 2 104
3.5 Многообразия Фано основной серии 107
3.6 Двулистное накрытие $\mathbb{P}^3$ с ветвлением в секстике 114
3.7 Гиперповерхность степени 4 117
3.7.4 Случай: D особа в P 119
3.7.5 Случай: D гладка в P 119
3.8 Пересечение квадрики и кубики 121
3.9 Пересечение трех квадрик 123
3.9.3 Случай: $l_{f,2}(0, x_2, x_3, 0, 0, 0) = 0$ 126
3.9.4 Случай: $l_{f,2}(0, x_2, x_3, 0, 0, 0)$ и $l_{f,3}(0, x_2, x_3, 0, 0, 0)$ пропорциональны 126
3.9.5 Случай: $l_{f,2}(0, x_2, x_3, 0, 0, 0)$ и $l_{f,3}(0, x_2, x_3, 0, 0, 0)$ не пропорциональны 127
3.10 Многообразия Фано, не являющиеся раздутиями 127
3.11 Раздутия многообразий Фано с $\rho = 2$ 133
3.11.3 Случай $Y = \mathbb{P}^3$ 134
3.11.4 Случай $Y = Q$ 135
3.11.5 Случай $Y = V_5$ 136
3.11.6 Случай $Y = V_4$ 137
3.11.7 Случай $Y = V_3$ 138
3.11.8 Случай $Y = V_2$ 139
3.11.9 Случай $Y = V_1$ 139
3.12 Раздутия Фано с $\rho \geq 3$ 140
3.12.2 Случай $Y = \mathbb{P}^3$. 140

3.12.3 Случай $Y = Q$ . . . 141
3.12.4 Случай, когда Y — трехмерное многообразие Фано из семейства № 2.32 . . . 142
3.12.5 Случай $Y = \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^2$ . . . 143
3.12.6 Случай $Y = \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ . . . 144
3.12.7 Случай $Y = V_7$ . . . 145
3.12.8 Случай, когда Y — трехмерное многообразие Фано из семейства № 2.2 . . . 145
3.12.9 Случай $Y = \mathbb{P}_{\mathbb{P}^2}(\mathscr{O} \oplus \mathscr{O}(2))$ . . . 146
3.12.10 Случай $Y = \mathbb{P}_{\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1}(\mathscr{O} \oplus \mathscr{O}(1,1))$ . . . 146
3.12.11 Случай, когда Y — трехмерное многообразие Фано из семейства № 5.1 . . . 146
3.13 Таблица . . . 147

4 Конечные абелевы 3-подгруппы в группе Кремоны 156
4.1 Введение . . . 156
4.2 Предварительные сведения . . . 159
4.3 Действие групп на поверхностях К3 . . . 162
4.4 Антиканоническая линейная система . . . 163
4.4.1 Орбифолдная формула Римана-Роха . . . 163
4.5 Действие G на трехмерных многообразиях. Особый случай . . . 165
4.6 Действие G на трехмерных многообразиях. Общий случай . . . 167
4.7 Доказательство основных результатов . . . 171

5 Конечные абелевы подгруппы группы Кремоны 172
5.1 Введение . . . 172
5.2 Некоторые факты о действиях групп . . . 183
5.2.1 Действия групп на сферах . . . 183
5.2.4 Действия групп на алгебраических многообразиях . . . 184
5.3 Группы типа произведения . . . 186
5.4 Действие групп на кривых . . . 193
5.5 Действие групп на поверхностях . . . 196
5.5.5 Простые эллиптические и касповые особенности . . . 198
5.6 Разминка: конечные абелевы подгруппы в $\mathrm{Cr}_2(\mathbb{C})$ . . . 200
5.7 Терминальные особенности . . . 205

5.7.8 Горенштейновы особенности 208
5.7.11 Негоренштейновы особенности 210
5.8 Неприводимый антиканонический элемент 214
5.9 Приводимый антиканонический элемент: случай dlt 227
5.10 Приводимый антиканонический элемент: случай lc 232
5.11 Абелевы группы типа K3 242
5.12 Доказательство основных результатов 246

6 Ограниченность слоев в расслоениях на многообразия Фано 248
6.1 Введение 248
6.2 Примеры 254
6.3 Предварительные сведения 256
6.3.1 Дивизоры 256
6.3.2 Программа минимальных моделей (ПММ) 256
6.3.3 Расслоения Фано и расслоения Мори 256
6.3.4 Расслоения Калаби–Яу 257
6.3.5 Гональность кривых 257
6.4 Размерность два 257
6.5 Подготовительные результаты 265
6.5.1 Dlt модели 265
6.5.4 Дивизоры над dlt парами 267
6.5.6 ПММ над парой 269
6.6 Доказательство основных результатов 271

Публикации 278

Литература 280

Введение

Актуальность темы исследований. Одной из важнейших задач алгебраической геометрии является задача классификации алгебраических многообразий. При этом эту задачу можно понимать в разных смыслах: многообразия можно классифицировать с точностью до изоморфизма, а можно — с точностью до бирациональной эквивалентности. Напомним, что два многообразия называются бирационально эквивалентными, если их плотные в топологии Зарисского открытые подмножества изоморфны. Бирациональная эквивалентность является более слабым отношением эквивалентности, чем изоморфизм. Однако задача классификации всех многообразий с точностью до изоморфизма представляется необозримой. Бирациональная геометрия занимается решением задачи классификации многообразий с точностью до бирациональной эквивалентности.

Программа минимальных моделей предлагает стратегию классификации (проективных) алгебраических многообразий, которую можно рассматривать в качестве аналога разложения целого числа на простые множители в арифметике. Ее цель — для любого многообразия найти в его классе бирациональной эквивалентности «наиболее простого» представителя.

Ключевым инвариантом с точки зрения программы минимальных моделей является канонический класс многообразия. Неформально можно сказать, что он измеряет «кривизну» многообразия. Свойства этого класса (его положительность или отрицательность) в большой степени определяет геометрию многообразия. Оптимистичная картина состоит в том, что после проведения конечного числа бирациональных преобразований — дивизориальных стягиваний и флипов, — любое многообразие должно приводиться к одному из трех типов:

1. Многообразие общего типа (чей канонический класс обилен). Это “большинство” многообразий. Их канонический класс положителен, что поз-

воляет изучать их с помощью инвариантов плюриканонических форм.

2. Расслоение на многообразия Калаби-Яу[1] (чей канонический класс тривиален). Многообразия Калаби-Яу представляют собой особый, важный в физике класс многообразий. В размерности 2 он включает в себя абелевы многообразия и поверхности К3.

3. Расслоение на многообразия Фано (чей антиканонический класс обилен). Многообразия Фано — в каком-то смысле "противоположность" многообразий общего типа. В этой диссертации мы сконцентрируемся в основном на изучении многообразий Фано.

Говоря более точно, утверждение о том, что любое многообразие бирационально эквивалентно многообразию, принадлежащему одному из трех классов, перечисленных выше, следует из программы минимальных моделей и гипотезы избыточности. На сегодняшний день существование программы минимальных моделей установлено в размерности не выше 4, однако некоторые более специальные результаты имеют место и в более высоких размерностях, см. раздел 1.2.9. Так, для приложений, как правило, достаточно существования программы минимальных моделей со скейлингом [BCHM09]. Что касается гипотезы избыточности, она известна в размерности не выше трех, см. [Mi87a, Mi87b, Mi88a, Mi88b].

Остановимся более подробно на некоторых из свойств многообразий Фано.

1. Многообразия Фано допускают большое количество примеров, возникающих естественным образом в раличных областях математики и математической физики, см. пример 1.3.2.

2. Многообразия Фано являются ограниченными. Это означает, что в любой фиксированной размерности и при условии ограничения на особенности (например, если рассматривать только неособые многообразия), существует лишь конечное число деформационных семейств многобразий Фано, см. теорему 1.3.12. Это делает возможной (по крайней мере, в теории) классификацию таких многообразий заданной размерности. Так, если мы ограничимся гладкими многообразиями Фано, то в размерности 1 существует только одно такое многообразие — проективная

[1]Заметим, что определение многообразий Калаби-Яу, стандартное для бирациональной геометрии, отличается от определения, принятого в физике, см. определение 1.3.5.

прямая. В размерности 2 существует 10 деформационных семейств многообразий Фано, они традиционно называются поверхностями дель Пеццо, см. раздел 1.3.13. В размерности 3 деформационных семейств уже 105. Это следует из результатов В.А. Исковских, Ш. Мори и Ш. Мукаи, см. [IP99].

3. Многообразия Фано покрываются рациональными кривыми. Более точно, многообразия Фано с "достаточно хорошими" особенностями являются рационально связными [Zh06]. Таким образом, можно сказать, что многообразия Фано являются достаточно близкими к рациональным многообразиям. Однако, вообще говоря, неверно, что многообразия Фано рациональны, см. теорему 1.1.9.

4. Как уже было отмечено выше, многообразия Фано играют важную роль в программе минимальных моделей. Более точно, из программы минимальных моделей следует, что любое многообразие, покрывающееся рациональными кривыми, бирационально эквивалентно расслоению Мори, то есть расслоению, чьи слои являются многообразиями Фано, см. определение 1.3.7.

Естественный способ изучения многообразия Фано заключается в рассмотрении его (плюри-)антиканонической линейной системы $|-lK_X|$ для $l \geq 1$. В размерности не выше 3 существование гладкого элемента в линейной системе $|-K_X|$ было установлено В.В. Шокуровым [Sh80]. Это позволило применить индуктивные аргументы, чтобы свести изучение проективных моделей трехмерных многообразий Фано к изучению его гладких антиканонических элементов. Этот подход использовался для получения классификации гладких многообразий Фано в размерности не выше 3, см. [IP99].

Также плодотворно рассматривать особые элементы в $|-lK_X|$. Чтобы измерить, «насколько особыми» могут быть такие элементы, были введены следующие инварианты. Двойственный комплекс приведенного дивизора с нормальными пересечениями D на гладком многообразии — это топологическое пространство, которое отражает комбинаторную сложность этого дивизора, см. 1.3.17 для определения. Используя разрешение особенностей, это определение можно обобщить на случай лог канонических пар, см. определение 1.1.21. Двойственный комплекс не зависит от выбора представителя в классе крепантной эквивалентности пары, см. определение 1.3.38: он определен

однозначно с точностью до PL-гомеоморфизма [dFKX17].

Понятие регулярности лог-канонической пары было введено В.В. Шокуровым в работе [Sh00]. По определению, регулярностью пары называется размерность двойственного комплекса граничного дивизора этой пары, см. раздел 1.3.27. Полной регулярностью многообразия (или пары) называется максимум регулярностей по всем $\mathbb{Q}$-дополнениям, см. определение 1.3.28. Двойственное понятие (полной) корегулярности было определено в работе [Mo24]:

$$\operatorname{coreg}(X) = \dim X - 1 - \operatorname{reg}(X).$$

Здесь под (ко-)регулярностью $\operatorname{reg}(X)$ многообразия Фано понимается его полная (ко-)регулярность. Как правило, такое злоупотребление обозначениями не приводит к путанице.

Неформально говоря, регулярность измеряет, насколько данное многообразие Фано далеко от того, чтобы быть исключительным. Последнее означает, что любое лог-каноническое дополнение на самом деле является лог-терминальным по Кавамате (klt). Для удобства, мы также определяем l-ю регулярность многообразия Фано для любого $l \geq 1$, которая по определению есть максимум размерностей двойственных комплексов лог-канонических l-дополнений на данном многообразии Фано. Тогда l-я корегулярность определяется как $\operatorname{coreg}_l(X) = \dim X - 1 - \operatorname{reg}_l(X)$.

Изучение корегулярности многообразий Фано привлекло внимание многих исследователей, см. [Mo24], [FMMP25], [ABB+23], [Du24] и ссылки в этих работах. Ожидается, что многообразия Фано корегулярности 0 должны обладать хорошими свойствами. Существует гипотеза, утверждающая, что двойственный комплекс пары Калаби-Яу (которой является, к примеру пара из многообразия Фано и дивизора дополнения) является фактором сферы по действию конечной группы. Эта гипотеза доказана в размерности не выше 4, а также в размерности 5 при условии, что пара имеет простые нормальные пересечения [KX16].

Однако о корегулярности конкретных семейств многообразий Фано было известно не так много: для результатов в размерности 2 см. теорему 3.1.3 и 3.1.5. Другой пример — случай торических многообразий: легко проверить, что их корегулярность равна 0. В этой диссертации мы рассматриваем случай гладких трехмерных многообразий Фано, см. теорему 3.0.1. Определение

регулярности и корегулярности можно обобщить на случай многообразий (и пар) с действием группы G. В G-эквивариантной ситуации понятие регулярности изучалось в работе [LPT25].

Задача классификации алгебраических многообразий тесно связана с другой важной задачей — изучением (бирегулярных или бирациональных) автоморфизмов алгебраических многообразий. *Группой Кремоны* $\mathrm{Cr}_n(\mathbb{C})$ называется группа бирациональных автоморфизмов проективного пространства. Число n называется рангом группы Кремоны. Для $n = 1$ эта группа изоморфна $\mathrm{PGL}(2, \mathbb{C})$. При $n \geq 2$ группа Кремоны становится гораздо более сложным объектом. Один из способов понять ее структуру заключается в изучении ее конечных подгрупп. Так, изучение конечных подгрупп $\mathrm{Cr}_2(\mathbb{C})$ является классической проблемой и восходит к работам С. Кантора и А. Вимана [Kan95], [Wim96], написанным в конце XIX века. Однако полная классификация конечных подгрупп $\mathrm{Cr}_2(\mathbb{C})$ была получена гораздо позже В.В Долгачевым и В.А. Исковских, см. [DI09]. Для некоторых классов групп также описаны их классы сопряженности в группе Кремоны ранга 2, см. работу [Bl07] в случае абелевых групп.

Начиная с размерности 3 геометрия становится значительно сложнее, и полная классификация конечных подгрупп $\mathrm{Cr}_3(\mathbb{C})$ кажется недостижимой. Однако существуют классификационные результаты для некоторых классов конечных групп, см., например, [Pr09] в случае простых групп. Тем не менее, представляется интересным получить оценки на инварианты некоторых классов групп, например, на ранг (то есть минимальное количество порождающих) для p-групп (см. [Pr11], [Pr14], [PrSh17], [Kuz20], [Xu20], [Lo22], [KZh24]), или получить классификацию для других классов конечных подгрупп в группе Кремоны ранга 3. В дальнейшем мы более подробно остановимся на этих результатах.

Задача нахождения системы образующих для $\mathrm{Cr}_n(\mathbb{K})$ также восходит к XIX веку. В размерности 2 нвд алгебраически замкнутым полем ее решение известно как теорема Нетера-Кастельнуово [No70, Ca01]. Ситуация усложняется, когда $\mathbb{K}$ не является алгебраически замкнутым, см. [BH15]. Образующие группы $\mathrm{Cr}_2(\mathbb{K})$ над незамкнутым полем $\mathbb{K}$ описаны в [Is91]. Несмотря на значительные достижения современной бирациональной геометрии, проблема нахождения явных систем образующих для $\mathrm{Cr}_n(\mathbb{K})$ при $n \geq 3$ не является обозримой, см. [Hu27, Pa99].

Другим возможным направлением в изучении групп автоморфизмов является изучение их свойств ограниченности. В.Л. Попов в [Po09] предложил следующее определение. Группа Γ называется *жордановой* (или обладает свойством Жордана), если существует константа $J = J(\Gamma)$ такая, что каждая конечная подгруппа $G \subset \Gamma$ содержит нормальную абелеву подгруппу $A \subset G$ индекса не более J. Также будем говорить, что Γ имеет *ограниченные конечные подгруппы*, если существует константа $C = C(\Gamma)$ такая, что для любой конечной подгруппы $G \subset \Gamma$ выполнено $|G| \leq C$.

Классический результат К. Жордана утверждает, что для любого натурального n группа $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ является жордановой, см., например, [CR62, 36.13]. Как следствие, любая линейная алгебраическая группа над произвольным полем характеристики нуль является жордановой. Также известно, что $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ имеет ограниченные конечные подгруппы для любого поля $\mathbb{K}$, конечно порожденного над $\mathbb{Q}$. Эта теорема была доказана Г. Минковским, см., например, [Ser07, Theorem 5] и [Ser07, §4.3] для ее обобщений. Отсюда следует, что $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$ имеет ограниченные конечные подгруппы.

Важным обобщением этих результатов на случай группы Кремоны является следующая теорема о том, что для любого поля k характеристики 0 и любого $n \geq 1$ группа Кремоны $\mathrm{Cr}_n(k)$ (или, более общим образом, группа бирациональных автоморфизмов рационально связного многообразия) является жордановой [PrSh16]. Таким образом, можно сказать, что конечные подгруппы группы Кремоны "достаточно близки" к абелевым группам. Отметим, что эта теорема была доказана в предположении о том, что верна гипотеза Борисова-Алексеева-Борисова. Она стала безусловным результатом после доказательством этой гипотезы К. Биркаром, см. теорему 1.3.12.

Перечислим еще несколько известных результатов о свойстве Жордана. Если X — компактная комплексная поверхность, то $\mathrm{Aut}(X)$ является жордановой, в то время как $\mathrm{Bim}(X)$ является жордановой тогда и только тогда, когда X не бимероморфна произведению $\mathbb{P}^1$ и эллиптической кривой, см. [PrSh21, Za15]. Если X — проективное многообразие над полем характеристики ноль, то группа $\mathrm{Aut}(X)$ является жордановой [MZh18]. Это утверждение также верно для компактных комплексных многообразий *класса C*, то есть компактных комплексных многообразий, бимероморфных кэлеровым многообразиям.

Для кэлеровых многообразий имеются следующие результаты. Если X —

компактное кэлерово многообразие, то группа $\mathrm{Aut}(X)$ является жордановой [Kim18]. Если X — компактное трехмерное кэлерово многообразие с неотрицательной размерностью Кодаиры и положительной иррегулярностью, то группа $\mathrm{Bim}(X)$ является жордановой [PrSh21b]. В работе А.С. Голоты показано, что можно избавиться от предположения о нерегулярности X: если X — трехмерное компактное кэлерово многообразие с $\kappa(X) \geq 0$, то группа $\mathrm{Bim}(X)$ является жордановой [Go21].

В отличие от алгебраического случая, изучение групп бимероморфных автоморфизмов $\mathrm{Bim}(X)$ компактных комплексных многообразий сопряжено с дополнительными трудностями. Тем не менее, для многих классов многообразий удается установить алгебраические свойства этих групп, такие как жордановость или ограниченность конечных подгрупп. Классический результат К. Уэно (с использованием идеи П. Делиня) утверждает, что для мойшезонова многообразия X образ плюриканонического представления $\rho(\mathrm{Bim}(X))$ конечен, см. [Ue75, §14]. В неалгебраическом случае этот образ может быть бесконечным, как показывает пример неалгебраической поверхности К3 с несимплектическим автоморфизмом бесконечного порядка, действующим на голоморфную 2-форму умножением на число, не являющееся корнем из единицы [MS08].

Другим важным инвариантом многообразий Фано, привлекшим внимание исследователей в последние годы, является K-стабильность, см. [Xu21] для обзора этой теории. K-стабильность многообразия Фано эквивалентна существованию на нем метрики Кэлера-Эйнштейна. Изначально K-стабильность была определена в терминах тестовых конфигураций в работах [Tia97], [Don02]. Эквивалентное, но более удобное для вычислений определений K-стабильности было дано в работах [Li17], [Fu19], [Fu16], см. определение 1.4.3.

K-стабильность также нашла важное приложение – новый подход к построению пространств модулей многообразий Фано. Таким образом, задача нахождение всех K-стабильных элементов в семействах многообразий Фано является важной для приложений. Так, была решена задача определения K-стабильности для гладких поверхностей дель Пеццо [PW].

Гораздо более сложной является изучение K-стабильности гладких трехмерных многообразий Фано. Для большинства семейств таких многообразий эта задача была решена усилиями многих специалистов по бирациональной геометрии [ACC+21]. Ключевую роль в этих вычисления играет тео-

рия Аббана-Жуанга, позволяющая применить к изучению K-стабильности индуктивные соображения [AZ20]. Однако для некоторых семейств эта задача оставалась открытой. Заметим, что в монографии [ACC+21] K-(полу-)стабильность часто проверяется для общего элемента в данном семействе, из чего делается вывод о K-(полу)-стабильности для общего элемента семейства в силу открытости этого условия. Тем не менее, представляется полезным явно сформулировать условия общности для K-стабильных элементов семейства, или, если возможно, описать все K-(полу)-стабильные элементы в нем.

K-стабильность можно изучать и для пар Фано. Так, К. Фуджитой в работе [Fu20] была поставлена задача определения K-стабильности для пар типа Маеды, см. 1.4.13 для определения. Это определение мотивированы классификацией Х. Маеды [Ma83] трехмерных пар Фано с ненулевой приведенной границей. Такие пары не удовлетворяют условию ограниченности, однако обладают интересной и достаточно хорошо контролируемой геометрией. Особый интерес представляет случай, когда дивизор границы такой пары Фано типа Маеды является приводимым, то есть имеет несколько компонент. В этом случае область K-(полу-)стабильности представляет собой многомерное выпуклое тело. Напомним, что областью K-(полу-)стабильности называется область коэффициентов при компонентах дивизора границы с условием, что соответствующая пара является K-(полу-)стабильной.

Другой интересной задачей в бирациональной геометрии является вопрос о том, как ведет себя нерациональность при вырождении многообразий. Например, известно [KT17], что в гладком семействе из рациональности общего схемного слоя следует рациональность слоя над замкнутой точкой.

Если же семейство не является гладким, то это неверно. Так, гладкая поверхность дель Пеццо, определенная над алгебраически замкнутым полем, являющая рациональной, но может вырождаться в нерациональную особую поверхность дель Пеццо. В качестве примера можно рассмотреть гладкую гиперповерхность степени 3 в $\mathbb{P}^3$, являющуюся гладкой поверхностью дель Пеццо, которая вырождается в конус над эллиптической кривой, являющийся нерациональной особой поверхностью дель Пеццо. Это связано с тем, что вырождение имеет лог канонические (lc), но не лог терминальные (klt) особенности. Отметим, что эта ситуация гораздо хуже представлена в литературе (см. работы [Per77], [T16] в случае терминальных многообразий). В настоящей диссертации мы доказываем некоторые результаты в этом направлении.

Цель работы. Исследование групп бимероморфных автоморфизмов компактных комплексных многообразий с точки зрения свойства Жордана, в частности, доказательство жордановости для многообразий размерности n с размерностью Кодаиры не менее $n-2$. Изучение ограниченности конечных подгрупп в образе плюриканонического представления группы бимероморфных автоморфизмов для компактных комплексных многообразий. Изучение корегулярности гладких трехмерных многообразий Фано, включая вычисление этого инварианта для всех 105 деформационных семейств и доказательство того, что для 100 из них общий элемент имеет корегулярность 0. Развитие методов явного построения границ нулевой корегулярности на многообразиях Фано основной серии с использованием техники двойной проекции. Исследование конечных абелевых подгрупп в группе Кремоны ранга 3, в частности, получение оценки на число образующих для конечных абелевых 3-групп, действующих на рационально связных трехмерных многообразиях. Изучение свойств ограниченности для конечных абелевых групп, эффективно действующих на рационально связном многообразии размерности 3. Изучение ограниченности нерациональности слоев расслоений Мори, слоями которых являются многообразия Фано, включая доказательство ограниченности рода и гональности кривых, на которые расслаивается компонента дивизора границы, чей коэффициент превосходит заданное положительное число. Исследование K-стабильности для конкретных семейств трехмерных многообразий Фано, включая доказательство K-стабильности для всех элементов семейства 4.1 и общих элементов семейства 3.2 с явным указанием условия общности. Исследование K-стабильности для пар Фано типа Маеды, вычисление областей K-полустабильности для пар типа Маеды и доказательство конечности числа деформационных семейств таких пар с непустой областью K-полустабильности. Классификация максимальных полустабильных вырождений гладких многообразий Фано и доказательство их единственности в каждой фиксированной размерности. Обобщение понятия регулярности и корегулярности на случай многообразий с групповым действием (G-корегулярность) и изучение этого инварианта для проективной плоскости и поверхностей дель Пеццо.

Основные результаты. Все результаты, выносимые на защиту, являются новыми. Все относящиеся к диссертации результаты принадлежат автору. Основные из них состоят в следующем.

1. Доказано, что для 100 из 105 семейств гладких трехмерных многообразий Фано общий элемент в семействе имеет корегулярность 0. Более того, для 92 семейств из этих 100 любой элемент в семействе имеет корегулярность 0; для оставшихся 5 семейств получены некоторые частичные результаты. А именно, для двулистного накрытия проективного пространства, разветвленного в секстике, и для квартики доказано, что *общий* элемент в семействе имеет корегулярность не менее 1. Для пересечения квадрики и кубики и пересечения трех квадрик, получена оценка для первой корегулярности coreg_1. Для *общего* трехмерного многообразия Фано рода 6 доказано, что корегулярность не больше 1.

2. Доказано, что если X — n-мерное компактное комплексное многообразие с размерностью Кодаиры $\kappa(X) \geq n-2$, то его группа бимероморфных автоморфизмов $\mathrm{Bim}(X)$ является жордановой. Доказано, что если X — компактное комплексное многообразие, то образ его плюриканонического представления $\rho(\mathrm{Bim}(X))$ и образ проективного плюриканонического представления $\overline{\rho}(\mathrm{Bim}(X))$ имеют ограниченные конечные подгруппы.

3. Доказано, что конечная абелева 3-группа, эффективно действующая на рационально связном многообразии размерности 3, может быть порождена четырьмя элементами. Как следствие, используя явные методы программы минимальных моделей, получена точная оценка на ранг p-групп, действующих на рационально связных многообразиях размерности 3.

4. Доказано, что конечная абелева группа, эффективно действующая на рационально связном многообразии размерности 3, может принадлежать к одному и трех типов: либо иметь тип произведения (то есть быть изоморфной произведению конечных абелевых групп, эффективно действующих на рациональной поверхности и рациональной кривой, соответственно), либо иметь тип K3 (то есть быть циклическим расширение конечной абелевой группы, эффективно действуещей на поверхности K3), либо такая группа допускает эффективное действие на трехмерном $G\mathbb{Q}$-многообразии Фано с пустой антиканонической линейной системой.

5. Доказано, что для фиксированного положительного вещественного числа t, и для расслоения Калаби–Яу типа Фано $(X, B) \to Z$, где $\dim X = 3$ и $\dim Z \geq 1$ с условием, что для компоненты D дивизора B с коэффици-

ентом $\geq t$, стягиваемой в точку на Z, имеем следующее. Во-первых, D бирационально $\mathbb{P}^1 \times C$, где C — гладкая проективная кривая с гональностью $\mathrm{gon}(C)$, ограниченной в зависимости только от t. Во-вторых, если $t > \frac{1}{2}$, то род $g(C)$ ограничен в зависимости только от t. В-третьих, если $t = 1$, то $g(C) \leq 1$.

6. Доказано, что пара Фано с целой границей, имеющей простые нормальные пересечения и двойственный комплекс максимальной размерности, единственна в любой фиксированной размерности. Более того, она является торической и обладает структурой обобщенной башни Ботта. Доказано, что максимальное полустабильное вырождение гладкого многообразия Фано единственно в любой фиксированной размерности.

7. Доказано, что существует лишь конечное число K-полустибильных пар Фано размерности 3 типа Маеды с приводимой границей. Для таких пар вычислены области K-полустабильности. Доказано, что гладкие трехмерные многообразия Фано, принадлежащие семейству 4.1, являются дивизориально стабильными. Доказано, что общие трехмерные многообразия Фано, принадлежащие семейству 3.2, являются дивизориально стабильными, с явным указанием условий общности.

8. Доказано, что для поверхностей дель Пеццо с дювалевскими особенностями степени не менее двух корегулярность и первая корегулярность всегда равны нулю. В случае поверхностей степени единица корегулярность оказывается равной единице тогда и только тогда, когда ассоциированное эллиптическое расслоение является изотривиальным, за исключением двух специальных конфигураций особых точек, для которых корегулярность зануляется. Кроме того, показано, что первая корегулярность, отвечающая за существование торической модели, равна единице в точности для изотривиальных расслоений либо для двух явно выписанных поверхностей с не изотривиальным эллиптическим расслоением. Получена также классификация конфигураций особых точек и особых слоев, при которых реализуется положительная корегулярность, причем в большинстве случаев такие поверхности имеют число Пикара больше единицы.

Методы исследования. В работе используются методы бирациональной

геометрии, программы минимальных моделей, теории многообразий Фано, теории особенностей и комплексной геометрии.

Теоретическая и практическая ценность. Работа носит теоретический характер. Результаты диссертации могут найти приложения в алгебраической геометрии, дифференциальной геометрии и математической физике.

Апробация работы. Результаты диссертации докладывались автором на семинаре отдела алгебры и отдела алгебраической геометрии (семинар И.Р. Шафаревича) и семинаре В.А. Исковских Математического института им. В.А. Стеклова, семинаре лаборатории алгебраической геометрии НИУ ВШЭ, семинаре лаборатории алгебраической геометрии и гомологической алгебры МФТИ, семинаре по многомерному комплексному анализу МГУ, семинарах по геометрии университетов Бристоля, Лафборо, Эдинбурга, Имперского Колледжа Лондона (Великобритания), университета Мэрилэнда (США), а также на следующих конференциях:

1. Международная конференция по алгебраической геометрии, МИАН, Москва, 11 декабря 2025.
2. V Конференция математических центров России, Красноярск, 11–16 августа 2025 г.
3. Международная конференция по алгебраической геометрии, Поханг, Республика Корея, 25–30 марта 2025.
4. Международная конференция по алгебраической геометрии, Санья, КНР, 23–26 декабря 2024.
5. Международная конференция “Дни геометрии в Пекине”, Пекин, КНР, 23 ноября 2024.
6. Конференция “Алгебраические группы IV. Сезон белых ночей”, Международный математический институт им. Эйлера, Санкт-Петербург, Россия, 8–12 июля 2024.
7. Международная конференция “Higher-dimensional algebraic geometry”, 6–10 мая 2024, Стони Брук, США.
8. Международная конференция “Бирациональная геометрия и многообразия Фано”, посвященная 60-летию Ю.Г. Прохорова, Математический институт В.А. Стеклова, Москва, 14 марта 2024 г.

9. Международная конференция по бирациональной геометрии, НИУ ВШЭ, 20 апреля 2023, Москва.

10. III Конференция математических центров России, Майкоп, Россия, 10–15 октября 2023.

11. Конференция, посвященная 75-летию математического факультета Томского Государственного Университета, 2–5 октября 2023, Томск, Россия.

12. Конференция по комплексному анализу и его приложениям, 11–15 сентября 2023, Красноярск, Россия,

13. Международная конференция по алгебраической геометрии, Тайпей, Тайвань, 31 июля — 4 августа 2023.

14. Конференция "Алгебра, геометрия и алгебраическая геометрия", Математический институт им. Соболева, Новосибирск, декабрь 2022.

15. Конференция "Дни геометрии в Новосибирске, 2022". 29 августа–2 сентября 2022, Новосибирск, Россия.

16. Конференция "Геометрия и гомологическая зеркальная симметрия", Математический центр "Сириус", Сочи, Россия, 11–14 декабря 2021.

17. Конференция "Primorie Mathematical Fair", Владивосток, Россия, 21–26 июля 2021.

18. Конференция "Multidimensional Residues and Tropical Geometry", 14–18 июня 2021, Математический центр "Сириус", Сочи, Россия.

19. Конференция по алгебраической геометрии, Международный математический институт им. Эйлера, Санкт-Петербург, Россия, май 2021.

20. Международная конференция "Escola Transguanabara de Geometria Algébrica", Рио-де-Жанейро, Бразилия, 10–13 февраля 2020.

Публикации по теме диссертации. Основные результаты диссертации опубликованы в 12 работах, список которых приведен в диссертации отдельно. Все работы опубликованы в изданиях, индексируемых в ведущих международных базах научного цитирования.

В работе (6) К.В.Логиновым были доказаны следующие утверждения: Proposition 1.2 — о связи корегулярности гладких поверхностей Дель Пеццо

с изотривиальностью антиканонического эллиптического пучка, Theorem 1.3 — корегулярности поверхностей дель Пеццо с особенностями дю Валя в терминах изотривиальности антиканонического эллиптического пучка, Theorem 1.4— о корегулярности поверхностей дель Пеццо с особенностями дю Валя в терминах конфигураций особых точек, Theorem 1.5 о корегулярности поверхностей дель Пеццо с особенностями дю Валя в терминах особых слоев антиканонантиканонического эллиптического пучка, Theorem 1.6 — о существовании дорических моделей для поверхностей дель Пеццо с особенностями дю Валя, а также все утверждения главы 3, посвященные доказательству этих теорем.

В статье (7) К.В.Логиновым были доказаны следующие утверждения: теоремы Proposition 5 — о связи G-корегулярности и G-инвариантного лог-канонического порога, Proposition 7 — о связи G-корегулярности со (слабо) исключительными особенностями, Corollary 10 — о связи G-корегулярности и G-сверхжесткости для проективной плоскости.

В работе (8) К.В.Логиновым были доказаны следующие утверждения: Lemma 2.2 — о геометрии поверхностей Дель Пеццо степени 3 с особенностями Дю Валя, Proposition 5.1 и Proposition 5.2 — вычисления дивизориальной стабильности трехмерных многообразий Фано из семейства 3.2, и Lemma 6.1 — вычисления дельта-инварианта в специальном случае.

В работе (9) К.В.Логинову принадлежат все утверждения и теоремы, за исключением Proposition 2.3.

В работе (10) К.В.Логиновым были доказаны следующие утверждения: Proposition 2.1 — утверждения о геометрии многообразия Фано в семействе 4.1, Proposition 2.3 — о структуре расслоений на поверхности Дель Пеццо, и Proposition 4.2 — вычисления дивизориальной стабильности семействе 4.1.

В работе (11) К.В.Логиновым были доказаны основные результаты в разделе 4, включая Proposition 4.5 о теории присоединения для лог-пар Фано, результаты в разделе 5, включая Theorem 5.1 о структуре максимальных лог-пар Фано, и результаты в разделе 6, включая Proposition 6.3 о существовании свободных стратовых прямых линий. Эти результаты имеют решающее значение для доказательства теорем Theorem 1.1 и Theorem 1.2 о структуре максимальных лог-пар Фано и максимальных вырождениях многообразий Фано.

Результаты работы (12) получены в неразделимом соавторстве.

Остальные работы написаны К. В. Логиновым лично.

Структура диссертации. Диссертация состоит из введения, 5 глав, разбитых на разделы, и списка литературы.

План работы. Опишем структуру диссертации.

Во введении дается общая постановка проблемы классификации алгебраических многообразий в рамках бирациональной геометрии и программы минимальных моделей (ПММ). Определяется место многообразий Фано в этой программе как одного из трех фундаментальных строительных блоков. Дается краткий обзор ключевых свойств многообразий Фано: ограниченность, рациональная связность, того факта, что они являются слоями расслоений Мори. Приводится мотивация для изучения центральных для диссертации понятий: корегулярности (связь с двойственными комплексами), групп автоморфизмов и свойств ограниченности для них, а также K-стабильности. Дается краткий обзор ранее известных результатов и формулируются основные результаты диссертации.

В первой главе собраны предварительные сведения, которые затем используются в остальных частях диссертации. Наиболее существенные факты, приведенные в этой главе, стандартны и хорошо известны.

В разделе 1.1 мы фиксируем некоторые из основных обозначений, которые используются в этой диссертации. Мы также напоминаем определения бирациональной эквивалентности, рациональности, канонического класса, (суб)-пар и их особенностей. В частности, приводятся определения лог-канонических, ϵ–лог-канонических, лог-терминальных по Кавамате, чисто лог-терминальных, канонических и терминальных особенностей. В разделе 1.2 мы формулируем некоторые результаты из программы минимальных моделей: сначала в случае поверхностей, затем в высших размерностях. Мы приводим известные результаты о существовании и обрыве флипов, имеющие фундаментальное значение для программы минимальных моделей. В разделе 1.3 мы приводим определение и примеры многообразий Фано. Также даются более общие определения пар Фано, пар Калаби-Яу и расслоений Мори, в том числе в G-эквивариантной постановке. В разделе 1.3.8 формулируются фундаментальные результаты К. Биркара об ограниченности многообразий Фано. В разделе 1.3.13 мы напоминаем классификацию многообразий Фано малых размерностей, сосредотачиваясь на случай гладких поверхностей дель Пеццо. В разделе 1.3.15 даем определение дополнений, принад-

лежащее В.В. Шокурову, а также определение двойственного комплекса в разделе 1.3.17. Мы приводим некоторые примеры и формулируем известную гипотезу о структуре двойственного комплекса пар Калаби-Яу, доказанную в малых размерностях. В разделе 1.3.23 мы приводим результаты о полустабильных вырождениях многообразий Фано. Далее, в разделе 1.3.27 даются важные для дальнейшего определения регулярности и корегулярности многообразий Фано, включая G-эквивариантный случай, обсуждаемый в разделе 1.3.29. В разделе 1.3.37 мы приводим определение крепантной эквивалентности. Раздел 1.4.1 содержит введение в теорию K-стабильности: определяются псевдоэффективные пороги, бета-инвариант, дельта-инвариант, даются определения K-стабильности и K-полустабильности. В разделе 1.4.10 излагаются основные инструменты для вычислений — теория Аббана–Чжуана, формулы для вычисления инвариантов на поверхностях и кривых, позволяющие сводить задачу о K-стабильности трехмерного многообразия к задачам на его сечениях. Наконец, в разделе 1.4.13 приводятся результаты о K-стабильности пар типа Маеды.

Во второй главе мы изучаем свойства Жордана для групп бимероморфных автоморфизмов компактных комплексных многообразий. В разделе 2.1 мы собираем предварительные результаты, которые затем используются в доказательстве. В частности, мы даем определение и напоминаем основные свойства плюриканонического представления в разделе 2.1.2. В разделе 2.1.4 мы формулируем определение свойства Жордана и доказываем некоторые результаты из теории групп. В разделе 2.2 мы строим "послойное" разрешение особенностей в аналитической категории, необходимое для доказательства основной теоремы. Затем, в разделе 2.3 мы доказываем следующие теоремы:

Теорема 1. *Пусть X — компактное комплексное многообразие. Тогда образ плюриканонического представления $\rho(\mathrm{Bim}(X))$ и образ проективного плюриканонического представления $\overline{\rho}(\mathrm{Bim}(X))$ имеют ограниченные конечные подгруппы.*

Теорема 2. *Пусть X — n-мерное компактное комплексное многообразие с $\kappa(X) \geq n-2$. Тогда группа $\mathrm{Bim}(X)$ является жордановой.*

Теорема 3. *Пусть X — трехмерное компактное комплексное многообразие с $\kappa(X) > 0$, тогда группа $\mathrm{Bim}(X)$ является жордановой.*

В третьей главе мы изучаем корегулярность многообразий Фано. В раз-

деле 3.1 мы вычисляем корегулярность гладких поверхностей дель Пеццо, то есть многообразий Фано размерности 2. В разделе 3.2 мы напоминаем некоторые понятия и факты из теории особенностей. В разделе 3.3 мы доказываем некоторые подготовительные результаты о двойственных комплексах некоторых пар. В разделе 3.4 мы начинаем анализировать трехмерные многообразия Фано. Мы явно строим границы на таких многообразиях, которые реализуют корегулярность 0. Более точно, мы рассматриваем трехмерные многообразия Фано индекса не менее 2. В разделе 3.5 мы рассматриваем трехмерные многообразия Фано основной серии, то есть трехмерные многообразия Фано ранга Пикара 1 и индекса 1. В разделе 3.6 мы разбираем случай двулистного накрытия проективного пространства с ветвлением в секстике, то есть многообразия Фано в семействе 1.1. В разделе 3.7 мы рассматриваем случай квартики, то есть многообразия Фано в семействе 1.2. В разделе 3.8 анализируется пересечение квадрики и кубики, то есть многообразие Фано в семействе 1.3. В разделе 3.9 мы изучаем пересечение трех квадрик, то есть многообразие Фано в семействе 1.4. В разделе 3.10 мы работаем с трехмерными многообразиями Фано с числом Пикара не менее 2, которые не могут быть получены как раздутие какого-либо другого многообразия Фано. В разделах 3.11 и 3.12 мы работаем с трехмерными многообразиями Фано с числом Пикара 2 и не менее 3, соответственно, которые могут быть получены как раздутие какого-либо другого многообразия Фано. Таким образом, мы доказываем следующую теорему. В ней мы пользуемся общепринятыми обозначениями для семейств многообразий Фано, см. [IP99].

Теорема 4. *Пусть X — гладкое трехмерное многообразие Фано. Положим*

$$\aleph = \{1.1, 1.2\}, \qquad \beth = \{1.3, 1.4\}, \qquad \gimel = \{1.5\},$$

$$\daleth = \{1.6, 1.7, 1.8, 1.9, 1.10, 1.11, 2.1, 10.1\}.$$

Тогда верно следующее.

1. *Если X — любое гладкое трехмерное многообразие Фано, принадлежащее любому семейству, кроме семейств из $\aleph, \beth, \gimel, \daleth$, то* $\operatorname{coreg}(X) = 0$,
2. *Если X — общий элемент в одном из семейств $\aleph$, то* $\operatorname{coreg}(X) \geq 1$,
3. *Если X — общий элемент в одном из семейств $\beth$, то* $\operatorname{coreg}_1(X) = 2$,
4. *Если X — общий элемент в семействе $\gimel$, то* $\operatorname{coreg}(X) \leq 1$,

5. Если X — общий элемент в одном из семейств ⅂, *то* $\operatorname{coreg}(X) = 0$.

Наконец, в разделе 3.13 мы организуем все наши результаты в одну таблицу.

Четвертая глава посвящена классификационным задачам в теории групп бирациональных автоморфизмов. В разделе 4.1 дается введение и постановка задачи об описании конечных подгрупп в группах Кремоны $\mathrm{Cr}_n(\mathbb{C})$. Раздел 4.2 содержит предварительные сведения о действиях p-групп на алгебраических многообразиях. В разделах 4.3–4.6 изучается действие конечных абелевых p-групп на алгебраических многообразиях; анализируются специальный и общий случаи, оценивается ранг таких групп. Так, в разделе 4.3 изучается действие абелевых p-групп на поверхностях типа K3. В разделе 4.4 при помощи орбифолдной формулы Римана–Роха исследуется антиканоническая линейная система многообразий Фано. В разделе 4.5 изучается действие 3-групп на особых трехмерных многообразиях Фано, чья антиканоническая линейная система содержит единственный элемент. В разделе 4.6 изучается действие 3-групп на трехмерных многообразиях Фано, чья антиканоническая линейная система содержит хотя бы различных элемента. В разделе 4.7 доказывается основной результат: конечная абелева 3-группа, эффективно действующая на рационально связном трехмерном многообразии, может быть порождена не более чем четырьмя элементами; этот результат завершает серию теорем об оценке ранга p-групп в размерности 3. Таким образом, справедлива следующая теорема.

Теорема 5 ([Pr11], [Pr14], [PrSh17], [Kuz20], [Xu20], [Lo22])**.** *Пусть X — рационально связное многообразие размерности* 3*, и пусть $G \subset \mathrm{Bir}(X)$ — конечная p-группа. Тогда G может быть порождена не более чем r элементами, где*

- $r = 6$ *при* $p = 2$,
- $r = 4$ *при* $p = 3$,
- $r = 3$ *при* $p \geq 5$.

Более того, эти оценки достигаются в $\mathrm{Cr}_3(\mathbb{C})$.

Пятая глава посвящена обобщению результатов, полученных в четвертой главе, на случай произвольных конечных абелевых групп, действующих на

рационально связном трехмерном многообразии. Основным результатом этой главы является следующая теорема.

Теорема 6. *Пусть X — рационально связное многообразие размерности* 3, *и пусть $G \subset \mathrm{Bir}(X)$ — конечная абелева группа. Тогда*

1. *либо G имеет тип произведения,*
2. *либо G имеет тип К3,*
3. *либо G точно действует на $G\mathbb{Q}$-трехмерном многообразии Фано X' с $|-K_{X'}| = \emptyset$, и более того, любое $G\mathbb{Q}$-расслоение Мори с точным действием G является $G\mathbb{Q}$-трехмерным многообразием Фано с пустой антиканонической системой.*

Опишем структуру главы. В разделе 5.2 приводятся некоторые факты о действиях конечных абелевых групп на топологических пространствах (в частности, на сферах малых размерностей) и на алгебраических многообразиях. В разделе 5.3 изучаются свойства расширений конечных абелевых групп и вводится определение конечных абелевых групп типа произведение. В разделах 5.4 и 5.5 мы доказываем некоторые подготовительные утверждения, рассматривая действие конечных абелевых групп на некоторых классах кривых и поверхностей. Это позволяет применить наши методы к конечным абелевым подгруппам в группе Кремоны ранга и передоказать теорему классификации в этом случае. Это сделано в разделе 5.6. Затем мы рассматриваем действие конечных абелевых групп на ростке терминальной особенности размерности 3. В разделе 5.7 мы доказываем, что если на X существует (гладкая или особая) G-неподвижная точка, то G имеет тип произведения. Мы также доказываем некоторые более точные результаты, которые будут использоваться позже. Затем мы анализируем особенности пары (X, S). В разделе 5.8 мы показываем, что либо пара (X, S) является lc, либо G имеет тип произведения. С другой стороны, мы показываем, что если (X, S) является plt, то G имеет тип К3. Если S неприводима, мы применяем теорию эллиптических поверхностных особенностей, а также трехмерных терминальных особенностей, чтобы показать, что G имеет тип произведения. В разделе 5.9 мы рассматриваем случай, когда (X, S) является dlt и S приводима. Мы изучаем комбинаторику группового действия на двойственном комплексе и заключаем, что G имеет тип произведения в этом случае. В разделе 5.10 мы

рассматриваем случай, когда (X, S) является lc, но не dlt, и S приводима. В разделе 5.11 мы устанавливаем результат ограниченности для групп типа K3. После этого мы приводим некоторые примеры. Наконец, в разделе 5.12 мы доказываем основные результаты этой главы.

В шестой главе изучаются расслоения Мори $(X, B) \to Z$, слои которых — многообразия Фано. В разделе 6.1 дается введение и постановка задачи об ограниченности нерациональности слоев, стягиваемых в точку, и формулируются основные результаты. Раздел 6.2 содержит примеры, показывающие существенность предположений в основных результатах. В разделе 6.3 собраны предварительные сведения: дивизоры, ПММ, расслоения Фано/Мори/Калаби–Яу, гональность кривых. Раздел 6.4 содержит доказательство основного результата в размерности 2 (для поверхностей). Разделы 6.5–6.6 образуют технически насыщенную часть: вводятся определения dlt-моделей, описывается ПММ над парой и приводится анализ дивизоров над dlt-парами. Доказываются основные теоремы для трехмерного случая. Устанавливается, что для компоненты D границы B с коэффициентом $\geq t$, стягиваемой в точку, род и гональность кривой C (такой, что D бирационально $\mathbb{P}^1 \times C$) ограничены константой, зависящей только от t. Более точно, доказывается следующая теорема.

Теорема 7. *Зафиксируем положительное вещественное число t. Предположим, что $(X, B) \to Z$ — расслоение Калаби–Яу типа Фано, где $\dim X = 3$ и $\dim Z \geq 1$. Предположим, что D — компонента B с коэффициентом $\geq t$, стягиваемая в точку на Z. Тогда*

1. *D бирационально $\mathbb{P}^1 \times C$, где C — гладкая проективная кривая с гональностью $\operatorname{gon}(C)$, ограниченной в зависимости только от t;*
2. *если $t > \frac{1}{2}$, то род $g(C)$ ограничен в зависимости только от t;*
3. *если $t = 1$, то $g(C) \leq 1$.*

Следующий результат является аналогом этой теоремы в размерности 2. Здесь мы также разрешаем случай $\dim Z = 0$ и не предполагаем свойства типа Фано.

Теорема 8. *Пусть u — положительное вещественное число. Пусть $(S, \Delta) \to Z$ — расслоение Калаби–Яу, где S имеет размерность 2. Предположим, что*

коэффициент компоненты D в Δ не меньше u, и что D стягивается в точку на Z. Тогда

1. *гональность D ограничена в зависимости только от u,*
2. *если $u > \frac{1}{2}$, то род $g(D^\nu)$ нормализации D^ν кривой D ограничен в зависимости только от u,*
3. *если $u = 1$, то $g(D^\nu) \leq 1$,*
4. *если $\dim Z \geq 1$, то $g(D^\nu) \leq 1$.*

Затем мы приводим список публикаций по теме диссертации и список использованной литературы.

Глава 1

Предварительные сведения

1.1 Обозначения и соглашения

Мы будем работать над алгебраически замкнутым полем $\mathbb{K}$ характеристики 0, если не сказано иное. Алгебраическим многообразием будем называть приведенную неприводимую отделимую схему конечного типа над полем $\mathbb{K}$. Под многообразием мы будем понимать алгебраическое многообразие, если не оговорено противное. Также мы используем следующие общепринятые обозначения:

- f_*D (соотв., $f_*^{-1}D$) — прямой образ дивизора D при отображении f (соотв,. f^{-1}).
- $\mathrm{Exc}(f)$ — исключительное множество морфизма f,
- $\mathrm{Supp}(D)$ — носитель дивизора D,
- $\mathrm{codim}_Y X$ — коразмерность подмногообразия X в многообразии Y,
- $\mathrm{coeff}_D(E)$ — коэффициент при простом дивизоре Вейля E в $\mathbb{Q}$-дивизоре Вейля D,
- $D_1 \sim_{\mathbb{Q}} D_2$ — $\mathbb{Q}$-линейная эквивалентность $\mathbb{Q}$-дивизоров Вейля,
- $c_X(E)$ — центр дивизора E на многообразии X,
- $D^{=1}$ — сумма всех компонент $\mathbb{Q}$-дивизора D с коэффициентом 1,
- $\kappa(X)$ — размерность Кодаиры многообразия X.

В дальнейшем мы напоминаем некоторые понятия и результаты бирациональной геометрии и программы минимальных моделей, см. например [KM98].

1.1.1 Бирациональная эквивалентность

Определение 1.1.2. Многообразие X называется *бирационально эквивалентным* (или *бирационально изоморфным*) многообразию Y, если непустое открытое подмножество X изоморфно непустому открытому подмножеству Y:

$$X \supseteq U \simeq U' \subset Y.$$

Если многообразие X бирационально эквивалентно многообразию Y, будем говорить, что Y является *бирациональной моделью многообразия* X. В случае, есть существует проективный бирациональный морфизм $f\colon Y \to X$, будем говорить, что Y *доминирует* X, либо что Y является *бирациональной моделью* Y *над* X.

Замечание 1.1.3. Любые две модели X_1 и X_2 над X доминируются третьей моделью X_3 над X: достаточно взять нормализацию их расслоенного произведения. Таким образом, существует следующая коммутативная диаграмма:

$$\begin{array}{ccccc} & & X_3 & & \\ & \swarrow & \downarrow & \searrow & \\ X_1 & & & & X_2 \\ & \searrow & \downarrow & \swarrow & \\ & & X & & \end{array} \tag{1.1.1}$$

Если задана бирациональная модель Y над X и простой дивизор Вейля $E \subset Y$, будем говорить, что E является *дивизором над* X и использовать обозначение E/X. В этой ситуации, подмногообразие $f(E)$ будем называть *центром* дивизора E/X и обозначать $c_X(E)$. Заметим, что $c_X(E)$ не зависит от выбора модели Y над X с условием, что E является дивизором на Y. Если $\operatorname{codim}_X c_X(E) \geq 2$, будем говорить, что дивизор E является *исключительным над* X. В противном случае, E является дивизором на X.

1.1.4 Стягивания

Под *стягиванием* мы понимаем проективный морфизм $f\colon X \to Y$ нормальных многообразий, такой что $f_*\mathscr{O}_X = \mathscr{O}_Y$. В частности, f сюръективен и имеет связные слои. *Расслоение* определяется как стягивание $f\colon X \to Y$, такое что $\dim Y < \dim X$.

Пусть G — конечная группа. Под *G-многообразием* мы понимаем многообразие X вместе с (не обязательно эффевтивным) действием группы G. Если f является G-эквивариантным стягиванием (соответственно, G-эквивариантным расслоением) G-многообразий, мы называем его *G-стягиванием* (соответственно, *G-расслоением*).

1.1.5 Рациональность

Определение 1.1.6. Многообразие X размерности n называется *рациональным*, если оно бирационально эквивалентно проективному пространству $\mathbb{P}^n$.

Пример 1.1.7. Рассмотрим неособую конику $C \subset \mathbb{P}^2$. Тогда проекция из точки на C устанавливает изоморфизм с $\mathbb{P}^1$. Таким образом, неособая коника, определенная над алгебраически замкнутым полем, рациональна. Аналогично доказывается рациональность (но не изоморфизм с $\mathbb{P}^{n-1}$) неособой квадрики $Q \subset \mathbb{P}^n$.

Определение 1.1.8. Многообразие X называется *рационально связным*, если существует непустое открытое множество $U \subset X$ такое, что для любых двух точек $P_1, P_2 \in U$ существует морфизм $\phi\colon C \to X$ из (быть может, особой) неприводимой рациональной кривой C с условием $P_1, P_2 \in \phi(C)$.

Заметим, что рациональное многообразие является рационально связным. Однако, обратное неверно.

Теорема 1.1.9 ([IM71])**.** *Пусть $X_4 \subset \mathbb{P}^4$ — гладкая гиперповерхность степени 4. Тогда она является рационально связным, но нерациональным многообразием.*

Другими классически известными контрпримерами являются гладкая кубическая гиперповерхность в $\mathbb{P}^4$, см. [CG72], а также (особое) двулистное накрытие проективного пространства $\mathbb{P}^3$ с ветвлением в особой квартике [AM72]. Тем не менее, хорошо известно, что для гладких поверхностей рациональность и рациональная связность эквивалентны.

1.1.10 Канонический класс

Определение 1.1.11. Пусть X — нормальное многообразие размерности n. *Каноническим классом* K_X многообразия X будем называть класс линейной эквивалентности дивизоров Вейля, определяемый следующий образом. Пусть $i\colon X^{\mathrm{sm}} \hookrightarrow X$ — естественное вложение неособого локуса X^{sm} многообразия X. В силу того, что X нормально, имеем $\operatorname{codim}_X X^{\mathrm{sm}} \geq 2$. Пусть $D' = \operatorname{div}(\omega)$ — дивизор нулей и полюсов произвольной рациональной дифференциальной формы ω степени n на X^{sm}. В частности, если в окрестности любой точки $x \in X^{\mathrm{sm}}$ имеем

$$\omega = \phi\, dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n,$$

то в окрестности этой точки $D' = \operatorname{div}(\phi)$. Пусть D — замыкание $i(D')$ в X. Тогда D — дивизор Вейля, чей класс линейной эквивалентности K_X не зависит от выбора ω.

Эквивалентно, рассмотрим $\Lambda^n \Omega^1_{X^{\mathrm{sm}}}$ — линейное расслоение на X^{sm}. Тогда $\mathscr{O}_X(K_X) = i_* \Lambda^n \Omega^1_{X^{\mathrm{sm}}}$ является рефлексивным пучком на X, которому соответствует класс линейной эквивалентности дивизоров Вейля, определенный выше.

Пример 1.1.12. Приведем примеры вычисления канонического класса для некоторых многообразий.

1. $K_{\mathbb{P}^n} = -(n+1)H$, где H — гиперплоскость в $\mathbb{P}^n$.
2. $K_{\mathrm{Gr}(k,n)} = -nH$, где $\mathrm{Gr}(k,n)$ — грассманниан и $1 \leq k \leq n-1$, $n \geq 2$.
3. Рассмотрим гиперповерхность в $\mathbb{P}^n$

   $$X_d = \{x \in \mathbb{P}^n \mid F_d(x) = 0\},$$

   где F_d — однородный многочлен степени d такой, что $1 \leq d \leq n$, $n \geq 2$. По формуле присоединения получаем $K_{X_d} = (d-n-1)H|_{X_d}$.
4. Рассмотрим полное пересечение

   $$X_{d_1,\ldots,d_k} = \{x \in \mathbb{P}^n \mid F_{d_1}(x) = \ldots = F_{d_k}(x) = 0\},$$

   где $1 \leq \sum d_i \leq n$, $n \geq 2$, $k \geq 1$. По формуле присоединения получаем

   $$K_{X_{d_1,\ldots,d_k}} = \left(\sum d_i - n - 1\right) H|_{X_{d_1,\ldots,d_k}}.$$

5. Рассмотрим взвешенное проективное пространство $\mathbb{P}(a_0 : \ldots : a_s)$. Имеем

$$K_{\mathbb{P}(a_0:\ldots:a_s)} = -\sum a_i H,$$

где H — положительная образующая группы классов дивизоров Вейля $\mathrm{Cl}(\mathbb{P}(a_0 : \ldots : a_s)) = \mathbb{Z}[H]$. Аналогично можно рассмотреть гиперповерхности и полные пересечения во взвешенном проективном пространстве.

6. Пусть X — нормальное проективное торическое многообразие. Тогда $K_X = -\sum_{i=1}^{N} D_i$, где $D_1, \ldots, D_N$ — все торически инвариантные дивизоры Вейля на X.

1.1.13 (Суб)-пары и особенности

Определение 1.1.14. *Суб-парой* мы будем называть набор данных вида (X, D), где

- X — нормальное многообразие,
- D — $\mathbb{Q}$-дивизор Вейля на X такой, что $D = \sum a_i D_i$, где D_i — простые дивизоры Вейля, и a_i — рациональные числа с условием $a_i \leq 1$.

При этом мы требуем, чтобы дивизор $K_X + D$ был $\mathbb{Q}$-дивизором $\mathbb{Q}$-Картье, то есть чтобы $N(K_X + D)$ являлось дивизором Картье для некоторого N. В этой ситуации $\mathbb{Q}$-дивизор D называется $\mathbb{Q}$-*дивизором суб-границы*.

В случае, если для любого i имеем $a_i \geq 0$, то есть $\mathbb{Q}$-дивизор D является эффективным, мы называем (X, D) *парой*, а D — $\mathbb{Q}$-*дивизором границы*.

В литературе также рассматривают случай $\mathbb{R}$-дивизоров (суб)-границы $D = \sum a_i D_i$, то есть $a_i \in \mathbb{R}$. Во всех главах, кроме главы 6 мы рассматривать более ограниченный класс $\mathbb{Q}$-дивизоров.

Обобщим определение 1.1.14 на относительную ситуацию.

Определение 1.1.15. Пусть Z — нормальное многообразие. *(Суб-)парой* (X, D) *над* Z будем называть (суб-)пару (X, D) вместе с проективным морфизмом $X \to Z$.

Определение 1.1.16. Пусть (X, D) — суб-пара, а $f\colon Y \to X$ — бирациональный проективный морфизм. Тогда определим $\mathbb{Q}$-дивизор Вейля D_Y на Y следующей формулой:

$$K_Y + D_Y = f^*(K_X + D),$$

где мы выбираем дивизоры Вейля, представляющие K_Y и K_X, согласованно: $f_*K_Y = K_X$. Таким образом,

$$\operatorname{Supp}(D_Y) \subset \operatorname{Supp}(f_*^{-1}D_X) \cup \operatorname{Exc}(f).$$

Набор данных (Y, D_Y) будем называть *лог-прообразом* суб-пары (X, D). В этой ситуации мы будем использовать обозначение

$$f\colon (Y, D_Y) \to (X, D).$$

Заметим, что D_Y является корректно определенным $\mathbb{Q}$-дивизором Вейля. Отметим, что, вообще говоря, лог-прообраз суб-пары не является суб-парой.

Определение 1.1.17. Пусть (X, D) — суб-пара, и пусть E — дивизор над X. Это означает, что существует проективный морфизм $f\colon Y \to X$ из нормального многообразия Y такого, что E является дивизором на Y. *Дискрепантностью* E относительно суб-пары (X, D) будем называть число

$$a(E, X, D) = -\operatorname{coeff}_{D_Y} E,$$

где (Y, D_Y) — лог-прообраз суб-пары (X, D). *Лог-дискрепантностью* E относительно суб-пары (X, D) будем называть число

$$A(E, X, D) = a(E, X, D) + 1 = 1 - \operatorname{coeff}_{D_Y} E.$$

В случае, когда $D = 0$, положим $a(E, X) = a(E, X, 0)$ и $A(E, X) = A(E, X, 0)$.

Отметим, что (лог)-дискрепантность не зависит от выбора бирациональной модели Y над X, см. замечание 1.1.3.

Пример 1.1.18. Пусть X — конус в $\mathbb{P}^3$ над гладкой плоской кривой C степени d. Обозначим через $x \in X$ его вершину. Рассмотрим раздутие $f\colon Y = \operatorname{Bl}_x X \to X$. Тогда $E = \operatorname{Exc}(f) \subset Y$ — кривая, изоморфная C. Имеем $a(E, X) = 2 - d$.

Напомним следующее определение.

Определение 1.1.19. Дивизор $D = \sum a_i D_i$ на гладком многообразии X называется дивизором с простыми нормальными пересечениями (сокращенно snc-дивизором), если каждая компонента D_i является гладкой, и в окрестности каждой точки $x \in X$ имеем, что $\operatorname{supp} D \subset X$ локально аналитически изоморфно $(\mathbb{C}^n, \{x_1 \dots x_k = 0\})$ для некоторого $k \geq 0$.

Будем говорить, что суб-пара (X, D) имеет простые нормальные пересечения (или является snc суб-парой), если X гладкое и D является дивизором с простыми нормальными пересечениями.

Определение 1.1.20. Пусть (X, D) — суб-пара. Тогда ее *лог-разрешением* мы будем называть набор данных $f\colon (Y, D_Y) \to (X, D)$, где f — проективный бирациональный морфизм из гладкого многообразия X, а (Y, D_Y) — лог-прообраз (X, D) такой, что $\mathrm{Supp}(f_*^{-1}D_X) \cup \mathrm{Exc}(f)$ является дивизором с простыми нормальными пересечениями.

Существование лог-разрешения следуют из теоремы Хиронаки о разрешении особенностей.

Определение 1.1.21. Будем говорить, что (суб-)пара (X, D) является

- *лог-канонической (lc)*, если для любого лог-разрешения $f\colon (Y, D_Y) \to (X, D)$ выполнено, что D_Y является суб-границей, то есть если $D_Y = \sum a_i D_i$, где D_i — простые дивизоры Вейля, то $a_i \leq 1$.
- *ϵ-лог-канонической (ϵ-lc)*, если для любого лог-разрешения $f\colon (Y, D_Y) \to (X, D)$ выполнено, что имеем $D_Y \leq 1 - \epsilon$, то есть если $D_Y = \sum a_i D_i$, где D_i — простые дивизоры Вейля, то $a_i \leq 1 - \epsilon$.
- *лог-терминальной по Кавамате (klt)*, если для любого лог-разрешения $f\colon (Y, D_Y) \to (X, D)$ выполнено $D_Y < 1$, то есть если $D_Y = \sum a_i D_i$, где D_i — простые дивизоры Вейля, то $a_i < 1$.
- *чисто лог-терминальной (plt)*, если для любого лог-разрешения $f\colon (Y, D_Y) \to (X, D)$ и для любого простого f-исключительного дивизора $E \subset \mathrm{Exc}(f)$ выполнено
$$\mathrm{coeff}_{D_Y}(E) = -a(E, X, D) < 1.$$
- *дивизориально лог-терминальной (dlt)*, если для некоторого лог-разрешения $f\colon (Y, D_Y) \to (X, D)$ и для любого простого f-исключительного дивизора $E \subset \mathrm{Exc}(f)$ выполнено
$$\mathrm{coeff}_{D_Y}(E) = -a(E, X, D) < 1.$$
- *канонической (c)*, если для любого лог-разрешения $f\colon (Y, D_Y) \to (X, D)$ и для любого простого f-исключительного дивизора $E \subset \mathrm{Exc}(f)$ выполнено
$$\mathrm{coeff}_{D_Y}(E) = -a(E, X, D) \leq 0.$$

- *терминальной (t)*, если для любого лог-разрешения $f\colon (Y, D_Y) \to (X, D)$ и для любого простого f-исключительного дивизора $E \subset \mathrm{Exc}(f)$ выполнено

$$\mathrm{coeff}_{D_Y}(E) = -a(E, X, D) < 0.$$

Замечание 1.1.22. Будем говорить, что многообразие X имеет lc/klt/plt/c/t особенности, если соответствующие особенности имеет пара $(X, 0)$.

Замечание 1.1.23. По определению, имеются следующие импликации:

$$\begin{array}{ccccccccc} t & \Rightarrow & c & \Rightarrow & klt & \Rightarrow & plt & \Rightarrow & dlt & \Rightarrow & lc \\ & & & & & & & & \Uparrow & & \\ & & & & & & & & snc & & \end{array}$$

Пример 1.1.24. 1. Пара $(\mathbb{P}^2, C)$ является лог-канонической, где C — нодальная кубическая кривая, то есть кривая, заданная уравнением $y^2z = x^3 + x^2z$. При этом эта пара не является klt, plt, dlt, c и t.

2. Пара $(\mathbb{P}^2, 5/6C)$ является лог-канонической, где C — каспидальная кубическая кривая, то есть кривая, заданная уравнением $y^2z = x^3$. При этом пара $(\mathbb{P}^2, C)$ не является лог-канонической.

Замечание 1.1.25. Если $f\colon (Y, D_Y) \to (X, D)$, где f — проективный бирациональный морфизм из гладкого многообразия X, а (Y, D_Y) — лог-прообраз (X, D), то для любого дивизора E над X имеем $a(E, X, D) = a(E, Y, D_Y)$.

1.1.26 Присоединение и лог-центры

Следующий результат называют обращением присоединения.

Теорема 1.1.27 (см. напр. [KM98, Theorem 5.50])**.** *Пусть (X, D) — пара, и S — простой дивизор Вейля на X такой, что $S \not\subset \mathrm{Supp}(D)$. Тогда пара $(X, S + D)$ является lc (соотв. plt) в окрестности S тогда и только тогда, когда пара $(S, \mathrm{Diff}_S(D))$ является lc (соотв. klt), где $\mathrm{Diff}_S(D)$ это эффективный $\mathbb{Q}$-дивизор границы, называемой дифферентой и определяемые формулой:*

$$(K_X + S + D)|_S \sim_{\mathbb{Q}} K_S + \mathrm{Diff}_S(D).$$

Замечание 1.1.28. 1. При этом если коэффициенты a_i дивизора D лежат во множестве $\mathcal{C} \subset \mathbb{Q}$, то коэффициенты $\mathrm{Diff}_S(D)$ лежат во множестве

$$\mathrm{St}(\mathcal{C}) = \left\{ 1 - \frac{1}{m} + \frac{a_j r_j}{m} \mid m \in \mathbb{Z}_{>0}, r_j \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \right\} \cup \{1\}.$$

2. В случае, если S является дивизором Картье на X, то имеем $\mathrm{Diff}_S(D) = D|_S$.

Пример 1.1.29. Пусть $X = \mathbb{P}(1,1,n)$ — взвешенная проективная плоскость, где $n \geq 1$. Пусть L — эффективная образующая группы классов дивизоров $\mathrm{Cl}(X)$. Тогда

$$(K_X + L)|_L = K_L + (1 - 1/n)P,$$

где P — точка на $L \simeq \mathbb{P}^1$. Заметим, что L является дивизором Картье тогда и только тогда, когда $n = 1$. При этом пара $(L, (1-1/n)P)$ является klt, и пара (X, L) является plt.

Определение 1.1.30. *Лог-центром* (или *не-klt-центром*) пары (X, D) называется замкнутое подмножество $Z \subset X$, которое является центром некоторого простого дивизора E над X с дискрепантностью $a(E, X, D) \leq -1$. Таким образом, $Z = c_X(E)$, где $c_X(E)$ — образ дивизора E на X.

Минимальный лог-центр — это лог-центр, который минимален относительно включения.

Если пара (X, Δ) лог-каноническая, то все лог-центры соответствуют дивизорам с дискрепантностью $a(E, X, \Delta) = -1$. В этом случае они называются *lc-центрами.*

Пример 1.1.31. Если $(X, D = \sum a_i D_i)$ — snc пара (или более общим образом, dlt пара), то множество ее лог-центров совпадает с множеством страт дивизора $D^{=1}$.

Определение 1.1.32. *Не-klt локус* пары (X, Δ) определяется следующим образом:

$$\text{Non-klt}(X, \Delta) = \bigcup_{\substack{E \text{ — простой дивизор над } X \\ a(E,X,\Delta) \leq -1}} c_X(E),$$

где объединение берется по всем не-klt-центрам.

Эквивалентно, не-klt локус можно описать как множество точек $x \in X$, в которых пара (X, Δ) не является klt.

1.2 Программа минимальных моделей

1.2.1 Классическая ПММ для поверхностей

Вначале напомним некоторые факты из классической теории поверхностей, см. например [Beau83].

Определение 1.2.2. (-1)-*кривой* на гладкой поверхности X называется гладкая рациональная кривая $C \simeq \mathbb{P}^1$ такая, что $C \cdot K_X = -1$.

Также (-1)-кривую можно определить как гладкую рациональную кривая $C \simeq \mathbb{P}^1$ с условием $C^2 = -1$. Эквивалентность двух определений следует из формулы присоединения.

Теорема 1.2.3 (Критерий Кастельнуово)**.** *Если C — (-1)-кривая на гладкой проективной поверхности X, то существует бирациональный морфизм $f\colon X \to Y$ такой, что $\mathrm{Exc}(f) = C$, и поверхность Y является гладкой и проективной.*

Утверждение 1.2.4. *(Программа минимальных моделей в размерности 2) Пусть X — гладкая проективная поверхность. Тогда существует последовательность стягиваний (-1)-кривых*

$$X = X_0 \to X_1 \to \ldots \to X_m = Y,$$

такая, что Y — гладкая проективная поверхность, и для Y существует в точности две возможности:

1. *Либо K_Y является nef, то есть $K_Y \cdot C \geq 0$ для любой эффективной кривой C. В этом случае мы говорим, что Y является* минимальной моделью*;*
2. *Либо Y обладает структурой расслоения Мори $\pi\colon Y \to Z$. В частности, все слои изоморфны $\mathbb{P}^1$, и база расслоения Z является гладкой проективной кривой.*

Следствие 1.2.5. Если X — гладкая рациональная поверхность, то последовательно стягивая (-1)-кривые на X: мы получим либо проективную плоскость $\mathbb{P}^2$, либо поверхность Хирцебруха $\mathbb{F}_n$ при $n \neq 1$.

Минимальные модели обладают многими замечательными свойствами. Например, легко показать следующее.

Утверждение 1.2.6. *Пусть Y_1 и Y_2 — гладкие поверхности такие, что K_{Y_1} и K_{Y_2} — nef дивизоры. Предположим, что $\phi\colon Y_1 \dashrightarrow Y_2$ — бирациональное отображение. Тогда ϕ является изоморфизмом.*

Например, если Y — гладкая проективная поверхность и K_Y является nef дивизором, то группа ее бирациональных автоморфизмов $\mathrm{Bir}(X)$ совпадает с группой бирегулярных автоморфизмов $\mathrm{Aut}(X)$.

Следующая теорема представляет собой решение гипотезы избыточности для поверхностей.

Теорема 1.2.7 (см. напр. [Ma02, Theorem 1-5-6])**.** *Если Y — гладкая проективная поверхность и K_Y является nef дивизором, то K_Y является полуобильным, то есть линейная система $|nK_Y|$ является свободной от базисных точек для некоторого $n \geq 1$.*

В ситуации теоремы 1.2.7 образ отображения $\phi\colon Y \to Z$, заданного линейной системой $|nK_Y|$, называется *канонической моделью* для Y (и для X). Переходя к факторизации Штейна если необходимо, мы можем считать, что ϕ является стягиванием. Имеем

$$H^0(X, mK_X) \simeq H^0(Y, mK_Y) \simeq H^0(Z, mK_Z)$$

для любого $m \geq 0$. В частности, $\kappa(X) = \kappa(Y) = \kappa(Z)$.

Замечание 1.2.8.

1. Отметим, что если ϕ бирационально, то выполнено $K_Y \sim_{\mathbb{Q}} \phi^* K_Z$, многообразие Z имеет канонические особенности, и K_Z является обильным.

2. Если слои ϕ одномерны, то по формуле присоединения они являются эллиптическими кривыми либо их вырождениями. Таким образом, в этом случае ϕ является расслоением на эллиптические кривые.

3. Наконец, то ϕ — отображение в точку, то Y является поверхностью Калаби-Яу с $K_Y \sim_{\mathbb{Q}} 0$. Для гладких поверхностей известно, что в этом случае имеем $12K_Y \sim 0$.

1.2.9 ПММ в высших размерностях

Мы приводим некоторые результаты о программе минимальных моделей в высших размерностях, в основном следуя [KM98].

Теорема 1.2.10 (Теорема о стягивании для dlt пар, см. напр. [KM98, Theorem 3.7(3)]). *Пусть (X, D) является $\mathbb{Q}$-факториальной dlt парой. Рассмотрим $(K_X + D)$-отрицательный экстремальный луч $R \subset \overline{NE}(X)$. Тогда существует сюръективный морфизм $f\colon X \to Z$, называемый* экстремальным стягиванием, *обладающий следующими свойствами:*

1. *Для любой неприводимой кривой $C \subset X$ образ $f(C)$ является точкой тогда и только тогда, когда класс $[C]$ принадлежит R.*
2. *$f_*\mathcal{O}_X = \mathcal{O}_Z$ (стягивание имеет связные слои).*
3. *Относительное число Пикара равно 1: $\rho(X/Z) = 1$.*
4. *Если обозначить $D_Z = f_*D$, то пара (Z, D_Z) также является dlt.*
5. *Если (X, D) является klt, то (Z, D_Z) также является klt.*
6. *Если D — дивизор Картье на X и $D \cdot C$ для $C \in [R]$, то $D \sim_{\mathbb{Q}} f^*D_Z$ для некоторого дивизора Картье D_Z на Z.*

Замечание 1.2.11. В условиях теоремы 1.2.10 морфизм f может быть одного из трех типов:

- *Дивизориальное стягивание*: исключительное множество имеет коразмерность 1.
- *Малое стягивание* (или *флиповое стягивание*): исключительное множество имеет коразмерность ≥ 2.
- *Расслоенный тип*: исключительное множество f совпадает с X и $\dim Z < \dim X$.

Теорема 1.2.12 (Теорема о конусе, см. напр. [KM98, 3.3]). *Пусть (X, D) — dlt пара. Тогда:*

1. *Конус Мори $\overline{NE}(X)$ является выпуклым конусом в $N_1(X)_{\mathbb{R}}$.*
2. *Для любого обильного $\mathbb{Q}$-дивизора A и любого $\varepsilon > 0$, часть конуса*

$$\overline{NE}(X)_{(K_X+D+\varepsilon A)\geq 0}$$

является полиэдральной.

3. *Существует счетное множество* $\{R_i\}$ *экстремальных лучей в* $\overline{NE}(X)$, *лежащих в полупространстве* $(K_X + D) < 0$, *таких что*

$$\overline{NE}(X) = \overline{NE}(X)_{(K_X+D)\geq 0} + \sum_i R_i.$$

Каждый луч R_i *является замкнутым и порождается классом рациональной кривой* C_i *с условием*

$$0 < -(K_X + D) \cdot C_i \leq 2 \dim X.$$

4. *Для любого обильного* $\mathbb{Q}$*-дивизора* A *множество*

$$\{R \subset \overline{NE}(X) : R \text{ — экстремальный луч}, (K_X + D + A) \cdot R < 0\}$$

конечно.

Следующее определение является фундаментальным при работе с малыми экстремальными стягиваниями.

Определение 1.2.13 (Флип)**.** Пусть (X, D) и (X^+, D^+) — $\mathbb{Q}$-факториальные лог-канонические пары, и пусть

$$\begin{array}{ccc} X & \overset{\sigma}{\dashrightarrow} & X^+ \\ & {\scriptstyle\varphi}\searrow \quad \swarrow{\scriptstyle\varphi^+} & \\ & Y & \end{array}$$

– коммутативная диаграмма бирациональных отображений, где:

1. φ и φ^+ — стягивания;
2. $\sigma : X \dashrightarrow X^+$ — бирациональное отображение, являющееся изоморфизмом в коразмерности 1;
3. $D^+ = \sigma_* D$;
4. $-(K_X + D)$ является φ-обильным;
5. $K_{X^+} + D^+$ является φ^+-обильным;
6. $\rho(X/Y) = \rho(X^+/Y) = 1$, где ρ обозначает число Пикара.

Тогда σ называется *флипом* (относительно $K_X + D$).

Следующие две гипотезы имеют центральное значение для программы минимальных моделей в высших размерностях.

Гипотеза 1.2.14 (Существование флипов)**.** Пусть (X, D) есть $\mathbb{Q}$-факториальная dlt пара размерности n, и пусть $\varphi : X \to Y$ — малое $(K_X + D)$-отрицательное стягивание. Тогда существует флип $\sigma : X \dashrightarrow X^+$.

Гипотеза 1.2.15 (Обрыв флипов)**.** Не существует бесконечной последовательности $(K + D)$-флипов.

Напомним об основных результатах о существовании и обрыве флипов. В работе [Sh85] Шокуров определил функцию сложности и использовал ее, чтобы показать, что трехмерные терминальные флипы обрываются. Существование трехмерных терминальных флипов было доказано Мори [Mo88]. Коллар и Мори классифицировали трехмерные терминальные флипы в работе [KM92]. Существование и обрыв трехмерных лог-канонических флипов был доказаны Шокуровым [Sh92, Sh96]. В [KMM87], авторы доказали обрыв для 4-мерных терминальных флипов. В [Sh04], Шокуров доказал существование флипов для четырехмерных многообразий. В [Fu04], Фуджино использовал вариант функции сложности, чтобы установить обрыв 4-мерных канонических флипов. В работе [AHK07] авторы доказали обрыв (многих) klt флипов для 4-мерных многообразий, используя модифицированную сложность. В работе [Sh92] Шокуров определил специальную последовательность лог-флипов, называемую упорядоченными флипами, или флипами со скейлингом, и показал, что любая последовательность четырехмерных флипов со скейлингом обрывается. Существование флипов в произвольной размерности для klt пар было доказано в [BCHM09]. Там же авторы доказали обрыв флипов со скейлингом в произвольной размерности для klt пар (X, B) в случае, когда $\mathbb{Q}$-дивизор B является объемным (big). В работах [B12, HX13] было доказано существование лог-канонических флипов. В работе [B07] Биркар доказал обрыв любой последовательности флипов для klt пар с условием $K_X + B \sim_{\mathbb{R}} E \geq 0$ в предположении существования флипов в размерности $\dim X - 1$ и гипотезу об обрыве для лог-канонических порогов. Последняя гипотеза была доказана в работе [HMX14].

Для обзора результатов G-эквивариантной программы минимальных моделей см. [Pr21].

1.3 Многообразия Фано

Определение 1.3.1. Нормальное проективное многообразие X с lc особенностями называется многообразием Фано, если его канонический класс K_X является обильным дивизором $\mathbb{Q}$-Картье.

Пример 1.3.2. Приведем простейшие примеры многообразий Фано:

1. проективное пространство $\mathbb{P}^n$, где $n \geq 1$;
2. грассманниан $\mathrm{Gr}(k, n)$, где $1 \leq k \leq n-1$, $n \geq 2$;
3. гиперповерхность в $\mathbb{P}^n$

$$X_d = \{x \in \mathbb{P}^n \mid F_d(x) = 0\},$$

где F_d — однородный многочлен степени d такой, что $1 \leq d \leq n$, $n \geq 2$. Выбирая F_d общим, по теореме Бертини получаем, что X_d неособо;

4. полное пересечение

$$X_{d_1,\ldots,d_k} = \{x \in \mathbb{P}^n \mid F_{d_1}(x) = \ldots = F_{d_k}(x) = 0\},$$

где $1 \leq \sum d_i \leq n$, $n \geq 2$, $k \geq 1$. Выбирая F_{d_i} общими, по теореме Бертини получаем, что $X_{d_1,\ldots,d_k}$ неособо;

5. взвешенное проективное пространство $\mathbb{P}(a_0 : \ldots : a_s)$. Аналогично можно рассмотреть гиперповерхности и полные пересечения во взвешенном проективном пространстве.

Определение 1.3.3. *Индексом Фано* многообразия Фано X называется максимальное натуральное число m такое, что $-K_X \sim mH$, где H — дивизор Картье на X.

Обобщим определение 1.3.1 на случай пар.

Определение 1.3.4. Пусть (X, B) — lc пара над Z. Мы говорим, что (X, B) является *парой Фано над* Z, если $-(K_X + B)$ обилен над Z. Если Z — точка, то (X, B) называется *парой Фано*. В случае, если $B = 0$, то X называется *многообразием Фано*, что согласуется с предыдущем определением.

Определение 1.3.5. Пусть (X, B) — lc пара над Z. Мы говорим, что (X, B) — *пара Калаби-Яу над* Z, если $K_X + B \sim_{\mathbb{Q}} 0$ над Z. Если Z — точка, то (X, B) называется *парой Калаби-Яу*. Если при этом $B = 0$, то X называется *многообразием Калаби-Яу*.

Определение 1.3.6. Многообразие X над Z называется многообразием *типа Фано над* Z, если существует граница B такая, что (X, B) является klt парой Фано над Z. Это эквивалентно существованию границы B такой, что (X, B) является klt парой Калаби-Яу над Z, где B объемен (big) над Z.

Пусть X над Z является многообразием типа Фано над Z. Тогда согласно [BCHM09], для любого $\mathbb{Q}$-дивизора Картье M на X можно запустить ПММ со скейлингом над Z, и эта программа завершается минимальной моделью или расслоением Мори для M.

Согласно [Zh06], многообразия типа Фано (и значит, многообразия Фано с klt особенностями) являются рационально связными.

Определение 1.3.7. Пусть G — конечная группа. *$G\mathbb{Q}$-расслоение Мори* — это $G\mathbb{Q}$-факториальное многообразие X с не хуже чем терминальными $G\mathbb{Q}$-факториальными особенностями вместе с G-стягиванием $f\colon X \to Z$ на многообразие Z, такое что $\rho^G(X/Z) = 1$ и $-K_X$ обильно над Z.

Если в этой ситуации Z — точка, то X называется $G\mathbb{Q}$-многообразием Фано. Если группа G тривиальна, то мы говорим о $\mathbb{Q}$-расслоениях Мори и $\mathbb{Q}$-факториальных многообразиях Фано.

1.3.8 Ограниченность

В этом разделе мы приводим результаты ограниченности для многообразий и пар Фано.

Определение 1.3.9. Будем говорить, что некоторое множество многообразий $\{X_\alpha\}_{\alpha\in I}$ является *ограниченным*, если существует лишь конечное число деформационных семейств таких многообразий. Иначе говоря, $\{X_\alpha\}_{\alpha\in I}$ является *ограниченным*, если любое $X = X_\alpha$ встраивается в диаграмму

$$\begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & \mathcal{X} \\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \pi} \\ \{p\} & \longrightarrow & \mathcal{B} \end{array}$$

где $\mathcal{X}$ — тотальное пространство семейства, $\mathcal{B}$ — его база, являющая схемой конечного типа, а морфизм π является плоским.

Аналогичное определение ограниченности может быть сформулировано для пар, см [B21, 2.8].

Пример 1.3.10. Многообразия Фано с klt особенностями не являются ограниченными. Действительно, рассмотрим взвешенную проективную плоскость $X_n = \mathbb{P}(1,1,n)$ при $n \geq 1$. Заметим, что X_n является конусом над нормальной рациональной кривой C_n степени n, то есть C_n — это образ n-го вложение Веронезе $v_n \colon \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^n$. Тогда

$$-K_{X_n} \sim (n+2)H,$$

где H — образующая конуса. В частности, $-K_{X_n}$ является обильным дивизором, поэтому X_n — многообразие Фано. Раздутие вершины конуса индуцирует разрешение особенностей $f \colon \mathbb{F}_n \to X_n = \mathbb{P}(1,1,n)$, где $\mathbb{F}_n$ — n-я поверхностей Хирцебруха, то есть $\mathbb{F}_n = \mathbb{P}_{\mathbb{P}^1}(\mathscr{O} \oplus \mathscr{O}(n))$. Несложно вычислить, что

$$K_{\mathbb{F}_n} = f^* K_{X_n} + (-1 + 2/n)E,$$

где E — сечение структурного морфизма $\mathbb{F}_n \to \mathbb{P}^1$ такое, что $E^2 = -n$. Иными словами, пара $(\mathbb{F}_n, (1-2/n)E)$ является лог-прообразом пары $(X_n, 0)$ при морфизме f. Следовательно, X_n имеет klt особенности. Вычислим

$$(-K_{X_n})^2 = (n+2)^2 H^2 = (n+2)^2/n = n + 4 + 4/n.$$

В частности, при $n \neq m$ поверхности X_n и X_m не являются деформационно эквивалентными. Следовательно, многообразия X_n не являются ограниченными.

Следующая теорема доставляет положительный ответ на знаменитую гипотезу Борисова-Алексеева-Борисова.

Теорема 1.3.11 ([B21, Theorem 1.1])**.** *Пусть $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ и $\epsilon \in \mathbb{R}_{>0}$. Тогда множество пар $\{(X, D)\}$, где:*

1. $\dim X = n$,
2. *(X, D) — проективная ϵ-лог-каноничная пара,*
3. *$-(K_X + D)$ — обильный $\mathbb{Q}$-дивизор,*

образует ограниченное семейство.

Сформулируем этот результат в частном случае $D = 0$:

Теорема 1.3.12 ([B21])**.** *Зафиксируем $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ и $\epsilon \in \mathbb{R}_{>0}$. Тогда многообразия Фано размерности n с ϵ-лог-каноническими особенностями являются ограниченными.*

1.3.13 Поверхности дель Пеццо

В силу теорему 1.3.12, можно поставить задачу классификации всех многообразий Фано с ограниченными особенностями данной размерности.

Пример 1.3.14. Если X — многообразие Фано и $\dim X = 1$, имеем $X \simeq \mathbb{P}^1$.

Рассмотрим сначала случай гладких многообразий Фано размерности 2. Если X — многообразие Фано и $\dim X = 2$, то X называется *поверхностью дель Пеццо*. Предположим, что X неособо. Хорошо известна классификация таких поверхностей:

- либо $X \simeq \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$,
- либо X изоморфно раздутию проективной плоскости $\mathbb{P}^2$ в k точках общего положения $p_1, \dots, p_k$, где $0 \leq k \leq 8$:

  $$X \simeq \mathrm{Bl}_{p_1,\dots,p_k}(\mathbb{P}^2).$$

  Условие общности положения означает, что никакие 3 точки не лежат на одной прямой, никакие 6 точек не лежат на одной конике, и 8 точек не лежат на особой кубической кривой так, что одна из точек совпадает с особенностью этой кривой.

В частности, гладкие поверхности дель Пеццо рациональны. Известно, что поверхность дель Пеццо степени d при $d \geq 5$ и индекса $i(X) = 1$ при фиксированном d единственна с точностью до изоморфизма. При $d \leq 4$ пространство модулей поверхностей дель Пеццо имеет размерность $10 - 2d$. Важную роль в изучении поверхностей дель Пеццо играет антиканоническая алгебра

$$R(X, -K_X) = \oplus_{m \geq 0} \mathrm{H}^0(X, \mathscr{O}(-mK_X)).$$

Известно, что эта алгебра порождается элементами степени 1 при $d \geq 3$, степени 2 при $d = 2$ и степени 6 (или элементами степени не выше 3) при $d = 1$.

Опишем антиканонические модели поверхностей дель Пеццо. Известно, что при $d \geq 3$ антиканонический класс $-K_X$ является очень обильным и задает вложение $X \hookrightarrow \mathbb{P}^d$. При $4 \leq d \leq 6$ антиканонической образ поверхности дель Пеццо в $\mathbb{P}^d$ является пересечением квадрик.

1. Если $d = 9$, то линейная система $|-K_X|$ задает вложение Веронезе $\mathbb{P}^2 \hookrightarrow \mathbb{P}^9$.

2. $d = 8$. В случае, когда $X = \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$, линейная система $|-K_X|$ задает вложение Сегре $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \hookrightarrow \mathbb{P}^8$. В случае, когда $X = \mathbb{F}_1$, антиканоническая линейная система также задает вложение в $\mathbb{P}^8$.

3. $d = 7$. В этом случае антиканоническая линейная система задает вложение в $\mathbb{P}^7$.

4. $d = 6$. Поверхность дель Пеццо степени 6 вкладывается антиканонической линейной системой в $\mathbb{P}^6$. В то же время, она изоморфна поверхности 3-степени $(1, 1, 1)$ в $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$, а также пересечению двух гиперповерхностей бистепени $(1, 1)$ в $\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2$.

5. $d = 5$. В этом случае $X \subset \mathbb{P}^5$ изоморфна сечению грассманиана $\mathrm{Gr}(2, 5)$, вложенного по Плюккеру в $\mathbb{P}^9$ подпространством коразмерности 4. Также поверхность дель Пеццо степени 5 изоморфна компактификации Делиня-Мамфорда пространства модулей $\overline{\mathcal{M}}_{0,5}$ кривых рода 0 с 5 отмеченными точками, см. [HL12]. Группа автоморфизмов поверхности дель Пеццо степени 5 изоморфна симметрической группе S_5.

6. $d = 4$. В этом случае антиканонической образ поверхности дель Пеццо является пересечением двух квадрик в $\mathbb{P}^4$.

7. $d = 3$. В этом случае антиканонической образ поверхности дель Пеццо является кубической поверхностью в $\mathbb{P}^3$.

8. При $d = 2$ антиканонический класс $-K_X$ задает морфизм $X \to \mathbb{P}^2$ степени 2 с ветвлением в гладкой кривой степени 4 на плоскости. При этом дивизор $-2K_X$ является очень обильным. Таким образом, поверхность дель Пеццо степени 2 может быть реализована как гиперповерхность степени 4 во взвешенном проективном пространстве $\mathbb{P}(1, 1, 1, 2)$.

9. При $d = 1$ линейная система $|-K_X|$ имеет единственную базисную точку, линейная система $|-2K_X|$ задает морфизм $X \to \mathbb{P}(1, 1, 2) \subset \mathbb{P}^3$ степени 2 с ветвлением в кривой C степени 6 в $\mathbb{P}^3$, являющейся пересечением $\mathbb{P}(1, 1, 2)$ и кубической поверхности. Дивизор $-6K_X$ является очень обильным. Таким образом, поверхность дель Пеццо степени 2 может быть реализована как гиперповерхность степени 6 во взвешенном проективном пространстве $\mathbb{P}(1, 1, 2, 3)$.

1.3.15 Дополнения

Понятие дополнения было введено В.В. Шокуровым и является одним из центральных для современной бирациональной геометрии.

Определение 1.3.16. Пусть $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$, и пусть $(X/Z \ni z, D)$ и $(X/Z \ni z, D^+)$ — две субпары. Тогда $(X/Z \ni z, D^+)$ является $\mathbb{Q}$-*дополнением* пары $(X/Z \ni z, D)$, если:

- $(X/Z \ni z, D^+)$ является lc,
- $D^+ \geq D$, и
- $K_X + D^+ \sim_{\mathbb{Q}} 0$ над окрестностью точки z.

Также $(X/Z \ni z, D^+)$ является n-*дополнением* пары $(X/Z \ni z, D)$, если:

- $(X/Z \ni z, D^+)$ является lc,
- $nD^+ \geq \lfloor (n+1)\{D\} \rfloor + n\lfloor D \rfloor$, и
- $n(K_X + D^+) \sim 0$ над окрестностью точки z.

Суб-пара $(X/Z \ni z, D)$ называется $\mathbb{Q}$-дополняемой, если у нее существует $\mathbb{Q}$-дополнение.

Суб-пара $(X/Z \ni z, D^+)$ называется *монотонным* n-*дополнением* субпары $(X/Z \ni z, D)$, если $(X/Z \ni z, D^+)$ является n-дополнением пары $(X/Z \ni z, D)$ и $D^+ \geq D$.

1.3.17 Двойственный комплекс

Двойственный комплекс, обозначаемый $\mathcal{D}(D)$, дивизора с простым нормальным пересечением $D = \sum_{i=1}^{r} D_i$ на гладком многообразии X строится следующим образом. Симплексы v_Z комплекса $\mathcal{D}(D)$ находятся во взаимно однозначном соответствии с неприводимыми компонентами Z (называемыми *стратами* D) пересечения $\bigcap_{i \in I} D_i$ для любого непустого подмножества $I \subset \{1, \ldots, r\}$, причем вершины симплекса v_Z соответствуют компонентам D_i с $i \in I$. В частности, размерность v_Z равна $\#I - 1$.

Отображения склейки определяются следующим образом. Для любого непустого подмножества $I \subset \{1, \ldots, r\}$ пусть Z — неприводимая компонента пересечения $\bigcap_{i \in I} D_i$, и для любого $j \in I$ пусть W — единственная компонента

пересечения $\bigcap_{i\in I\setminus\{j\}} D_i$, содержащая Z. Тогда отображение склейки — это вложение v_W в v_Z как грани симплекса v_Z, не содержащей вершину v_i, соответствующую D_i. Заметим, что размерность $\mathcal{D}(D)$ не превосходит $\dim X - 1$. Если $\mathcal{D}(D)$ пуст, то есть $D = 0$, мы полагаем $\dim \mathcal{D}(D) = -1$.

Напомним, что для дивизора D мы обозначаем через $D^{=1}$ сумму компонент D с коэффициентом 1. Для лог-канонической пары Калаби–Яу (X, D) мы определяем $\mathcal{D}(X, D)$ как $\mathcal{D}(D_Y^{=1})$, где $f\colon (Y, D_Y) \to (X, D)$ — лог-разрешение пары (X, D), так что выполняется формула

$$K_Y + D_Y = f^*(K_X + D).$$

Известно, что класс PL-гомеоморфизма $\mathcal{D}(D_Y^{=1})$ не зависит от выбора лог-разрешения, см. [dFKX17, Предложение 11].

Для дополнительных результатов о топологии двойственных комплексов пар Калаби–Яу см. [KX16].

Замечание 1.3.18. Если конечная группа $G \subset \mathrm{Aut}(X)$ сохраняет дивизор D на проективном многообразии X и пара (X, D) лог-каноническая, то G действует на топологическом пространстве $\mathcal{D}(X, D)$ посредством PL-гомеоморфизмов. Действительно, выберем G-эквивариантное лог-разрешение (Y, D_Y) пары (X, D). Тогда $\mathcal{D}(Y, D_Y)$ — симплициальный комплекс, снабженный симплициальным действием G. Заметим, что действие G на топологическом пространстве $\mathcal{D}(X, D)$ не зависит от выбора логарифмического разрешения.

Пример 1.3.19. Пусть $(\mathbb{P}^n, D)$, где $D = \sum_{i=1}^{n+1} D_i$, где D_i — общие гиперплоскости. Тогда $(\mathbb{P}^n, D)$ — пара Калаби-Яу, и

$$\mathcal{D}(\mathbb{P}^n, D) \simeq S^{n-1}.$$

Пример 1.3.20. Пусть $(\mathbb{P}^1, \{0\} + \{\infty\})$, и пусть σ — инволюция на $\mathbb{P}^1$, меняющая местами $\{0\}$ и $\{\infty\}$. Положим

$$(X, D) = (\mathbb{P}^1, \{0\} + \{\infty\})^{\times n}.$$

Тогда $\sigma^{\times n}$ — инволюция, действующая на (X, D), и следовательно на $\mathcal{D}(X, D) \simeq S^{n-1}$. Пусть (Y, D_Y) — фактор по действию $\sigma^{\times n}$. Тогда

$$\mathcal{D}(Y, D_Y) \simeq \mathbb{R}P^{n-1}.$$

Приведем формулировку знаменитой гипотезы о структуре двойственных комплексов пар Калаби-Яу.

Гипотеза 1.3.21 ([KX16])**.** Пусть (X, D) — пара Калаби-Яу размерности n. Тогда

$$\mathcal{D}(X, D) \simeq S^k/G,$$

где $k \leq n-1$, и $G \subset \mathrm{O}(k+1)$ — конечная группа, действующая на сфере S^k гомеоморфизмами.

Гипотеза доказана в работе [KX16] для $n \leq 4$, а также для $n \leq 5$ в случае, когда пара (X, D) имеет простые нормальные пересечения. Предложенное авторами доказательство использует теорему Перельмана-Пуанкаре. Приведем также следующий полезный результат.

Утверждение 1.3.22 (см. [KX16, 16])**.** *Пусть (X, D) — пара Калаби–Яу, где X имеет размерность n. Предположим, что $\mathcal{D}(X, D)$ несвязен. Тогда*

$$(X, D) \sim_{\mathrm{cbir}} (Y, D_Y) \times (\mathbb{P}^1, \{0\} + \{\infty\})$$

где (Y, D_Y) — klt пара Калаби–Яу. В частности, $\mathcal{D}(X, D) \cong S^0$.

1.3.23 Полустабильные вырождения

Определение 1.3.24. Обобщенная башня Ботта это многообразие, получаемое последовательью расслоений

$$X = X_m \to X_{m-1} \to \ldots \to X_1 \to X_0 = \mathrm{pt}$$

на проективные пространства, где $n_i \geq 1$ и каждое расслоение $X_i = \mathbb{P}_{X_i}(\mathscr{E}_i) \to X_{i-1}$ является $\mathbb{P}^{n_i}$-расслоением и $\mathscr{E}_i$ — расщепимое векторное расслоение ранга $n_i + 1$. Если каждое число n_i равно 1, то X называется *башней Ботта*.

Лог-гладкой парой Фано (или *snc парой Фано*) мы называем пару Фано $(X, D = \sum D_i)$ с простыми нормальными пересечениями и приведенным дивизором границы. В частности, X — гладкое проективное многообразие и дивизор $-(K_X + D)$ обилен. *Максимальное лог гладкой парой Фано* назовем лог-гладкую пару Фано такую, что у ее граничного дивизора D в точности ровно $\dim X$ компонент. Это эквивалентно тому, что двойственный комплекс $\mathcal{D}(D)$ является симплексом максимальной размерности или что все компоненты D пересекаются в точке.

Полустабильным вырождением многообразия Фано называется плоское семейство многообразий Фано над кривой с гладким тотальным пространством, такое что его специальный слой является приведенным дивизором с простыми нормальными пересечениями.

Условие d-полустабильности Фридмана (см. [Fr83]) это условие на склейку нормальных расслоений компонент приводимого многообразия, которому удовлетворяет специальный слоя полустабильного семейства. Таким образом, это условие является необходимым для существования полустабильного семейства, в которое включается данное приводимое многообразие с простыми нормальными пересечениями. Более точно, если $X = \cup X_i$ — приводимое многообразие, то для $i \neq j$ положим $D = X_i \cap X_j$. Тогда условие d-полустабильности записывается как

$$\mathscr{N}_{D/X_j} \otimes \mathscr{N}_{D/X_i} \otimes \bigotimes_{k \neq i,j} \mathscr{O}_D(X_k|_D) \simeq \mathscr{O}_D. \tag{1.3.1}$$

Наш первый результат дает полное описание максимальных snc пар Фано: они оказываются обобщенными башнями Ботта и, следовательно, торическими. Этот результат носит классификационный характер. Он показывает, что достижение верхней границы на число компонент границы контролирует глобальную геометрию многообразия. Доказательство использует индукцию по размерности, теорию присоединения, изучение двойственного комплекса и существование "свободных" рациональных кривых на стратах.

Теорема 1.3.25 ([LM22]). *Пусть $(X, D = \sum D_i)$ — лог-гладкая пара Фано размерности n с приведенной границей. Тогда D имеет не более n компонент. Если число компонент равно n, то X является обобщенной башней Ботта и пара (X, D) торическая.*

Следующий результат устанавливает единственность с точностью до изоморфизма максимального полустабильного вырождения гладких многообразий Фано. Конструктивно такое вырождение получается склейкой $n+1$ экземпляров последовательного раздутия $\mathbb{P}^n$ вдоль вложенной торического флага линейных подпространств, см. [Hu06]. Этот результат существенно опирается теорему 1.3.25: каждая компонента специального слоя полустабильного вырождения является максимальной snc парой Фано, а значит, обобщенной башней Ботта специального вида (фактически, раздутием $\mathbb{P}^n$ вдоль описанного выше флага). Условие d-полустабильности определяет способ их склейки,

который оказывается единственно возможным.

Теорема 1.3.26 ([LM22]). *Максимальное snc Фано многообразие, удовлетворяющее условию d-полустабильности Фридмана, изоморфно X_n. Специальный слой максимального полустабильного вырождения многообразий Фано изоморфен X_n.*

1.3.27 Регулярность и корегулярность

Понятие регулярности было введено в [Sh00, 7.9], см. также [Mo24]. Мы сразу дадим определение в более общем G-эквивариантном случае.

Определение 1.3.28. Пусть X — нормальное проективное G-многообразие с klt особенностями. *регулярностью* $\operatorname{reg}(X, D)$ lc G-пары (X, D) называется размерность $\mathcal{D}(X, D)$, где $\mathcal{D}(X, D)$ — двойственный комплекс пары, определенный в разделе 1.3.17. Для целого числа $l \geqslant 1$ определим l-ю *полную регулярность* X формулой

$$\operatorname{reg}_l(X) = \max\{\operatorname{reg}(X, D) \mid D \in \frac{1}{l}|-lK_X|\}.$$

В этой ситуации $K_X + D$ является *l-дополнением* K_X. Тогда *полная регулярность* X определяется как

$$\operatorname{reg}(X) = \max_{l \geqslant 1}\{\operatorname{reg}_l(X)\}.$$

Заметим, что $\operatorname{reg}(X) \in \{-1, 0, \ldots, \dim X - 1\}$, где размерность пустого множества считается равной -1. *Полная корегулярность* X определяется как число

$$\operatorname{coreg}(X) = \dim X - 1 - \operatorname{reg}(X).$$

Для краткости мы будем писать регулярность и корегулярность X вместо полной регулярности и корегулярности X. Если группа G тривиальна, мы используем термины регулярность и корегулярность и пишем $\operatorname{reg}(X, D)$, $\operatorname{reg}(X)$ и $\operatorname{coreg}(X)$.

Очевидно, что $\operatorname{reg}_l(X) \leqslant \operatorname{reg}_{kl}(X)$ для любых $k, l \geqslant 1$.

Сделаем замечание о терминологии. Понятие регулярности lc пары (X, D) для нормального проективного многообразия X было введено В. В. Шокуровым в [Sh00, Proposition–Definition 7.11]. Там полная регулярность (X, D) определялась как максимум регулярностей всех пар, состоящих из лог-канонических

дополнений $K_X + D$. В случае пар с нулевой границей полная регулярность называется регулярностью многообразия в [Mo24], где также было определено понятие корегулярности.

1.3.29 G-корегулярность

Понятие G-корегулярности, где G — группа, изучалось в [LPT25]. Определение G-регулярности и G-корегулярности для произвольных групп получается рассмотрением G-инвариантных дивизоров в определении 1.3.28.

Замечание 1.3.30. Пусть X — G-многообразие, а $H \subset G$ — подгруппа. Тогда очевидно, что

$$\operatorname{coreg}_H(X) \leq \operatorname{coreg}_G(X).$$

Пример 1.3.31. Пусть G — конечная группа, $G \subset \operatorname{Aut}(\mathbb{P}^1) = \mathrm{PGL}_2(\mathbb{K})$. Хорошо известно, что группа G изоморфна одной из следующих групп: C_n, D_{2n}, A_4, S_4 или A_5. Заметим, что в случае $G = C_n$ существуют две G-инвариантные точки, а в случае $G = D_{2n}$ имеется орбита длины 2. Поскольку длина любой орбиты больше 2 для остальных конечных подгрупп $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{K})$, имеем $\operatorname{coreg}_G(\mathbb{P}^1) = 0$ тогда и только тогда, когда G циклическая или диэдральная, то есть $G = C_n$ или $G = D_{2n}$, а в остальных случаях $\operatorname{coreg}_G(\mathbb{P}^1) = 1$.

Для того, чтобы сформулировать результаты о G-корегулярности для проективной плоскости $\mathbb{P}^2$, напомним результат о классификации конечных подгрупп в $\mathrm{PGL}_3(\mathbb{K})$.

Теорема 1.3.32. *Любая конечная подгруппа в* $\mathrm{PGL}_3(\mathbb{K})$ *с точностью до сопряжения является одной из следующих.*

Интранзитивные группы:

(A) *диагональная абелева группа;*

(B) *группа, имеющая единственную неподвижную точку на* $\mathbb{P}^2_{\mathbb{K}}$.

Импримитивные группы:

(C) *группа* G, *имеющая нормальную диагональную абелеву подгруппу* N, *такую что* $G/N \cong C_3$;

(D) *группа* G, *имеющая нормальную диагональную абелеву подгруппу* N, *такую что* $G/N \cong S_3$.

Примитивные группы с нетривиальной нормальной подгруппой (группа Гессе и ее подгруппы):

(E) *группа* $C_3^2 \rtimes C_4$ *порядка* 36*;*

(F) *группа* $C_3^2 \rtimes Q_8$ *порядка* 72*;*

(G) *группа Гессе* $C_3^2 \rtimes \mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_3)$ *порядка* 216*.*

Простые группы:

(H) *икосаэдральная группа* A_5 *порядка* 60*;*

(I) *группа Клейна* $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_7)$ *порядка* 168*;*

(K) *группа Валентинера* A_6 *порядка* 360*.*

Замечание 1.3.33. Пусть G — группа типа (B). Тогда G является подгруппой $\mathrm{GL}_2(\mathbb{K})$. Поскольку G имеет единственную неподвижную точку на $\mathbb{P}^2$, она неабелева. Такие группы описаны в [DI09, Lemma 4.5]. Все эти группы имеют инвариантную прямую на $\mathbb{P}^2$, следовательно, существует гомоморфизм $f\colon G \to \mathrm{PGL}_2(\mathbb{K})$. Группа $f(G)$ не может быть циклической в силу предположения, что G имеет единственную неподвижную точку на $\mathbb{P}^2$, поэтому $f(G)$ изоморфна одной из следующих групп: D_{2n}, A_4, S_4 или A_5. Если $f(G) \cong D_{2n}$, то для удобства будем говорить, что G имеет тип (B1), в противном случае будем говорить, что G имеет тип (B2).

Утверждение 1.3.34 ([LPT25])**.** *Пусть* G *— конечная подгруппа в* $\mathrm{PGL}_3(\mathbb{K}) = \mathrm{Aut}(\mathbb{P}^2)$*.*

1. *Если* G *имеет тип* (A), (B1), (C) *или* (D)*, то* $\mathrm{coreg}_G(\mathbb{P}^2) = 0$*;*
2. *если* G *имеет тип* (B2), (E) *или* (H)*, то* $\mathrm{coreg}_G(\mathbb{P}^2) = 1$*;*
3. *если* G *имеет тип* (F), (G), (I) *или* (K)*, то* $\mathrm{coreg}_G(\mathbb{P}^2) = 2$*.*

Теорема 1.3.35 ([LPT25])**.** *Предположим, что* S *— гладкая поверхность дель Пеццо степени* $d \geq 6$*, а* G *— конечная подгруппа в* $\mathrm{Aut}(S)$*. Тогда:*

1. $\mathrm{coreg}_G(S) = 0$ *тогда и только тогда, когда* G *принадлежит нормализатору тора* $(\mathbb{K}^*)^2$ *в* $\mathrm{Aut}(S)$*;*
2. *если* $\mathrm{coreg}_G(S) > 0$*, то* $\mathrm{coreg}_G(S) = 1$ *тогда и только тогда, когда на* S *существует* G*-инвариантная кривая* C*, такая что дивизор* $-K_S - C$ *эффективен;*

3. $\mathrm{coreg}_G(S) = 2$ *в остальных случаях.*

Замечание 1.3.36. Можно сформулировать аналог определения 1.3.28 для случая, когда многообразие X определено над полем $\mathbb{K}$, не являющимся алгебраически замкнутым, а группа G — это группа Галуа расширения полей $\mathbb{K} \subset \mathbb{L}$. Однако в данной работе мы сосредоточимся на геометрическом случае.

1.3.37 Крепантная эквивалентность

Определение 1.3.38. Пусть (X, D) и (Y, D_Y) — суб-пары. Мы говорим, что они *крепантно бирационально эквивалентны*, если существует коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} & (V, D_V) & \\ {\scriptstyle\phi}\swarrow & & \searrow{\scriptstyle\psi} \\ (X, D) & \overset{\alpha}{\dashrightarrow} & (Y, D_Y) \end{array} \tag{1.3.2}$$

в которой

- ϕ и ψ являются бирациональными стягиваниями,
- $\phi_*(D_V) = D$, $\psi_*(D_V) = D_Y$, и
- $K_V + D_V = \phi^*(K_X + D) = \psi^*(K_Y + D_Y)$.

Заметим, что даже если D и D_Y являлись границами, то D_V не обязательно является границей, поскольку может иметь отрицательные коэффициенты. В предыдущих обозначениях мы пишем $(X, D) \simeq_{\mathrm{cbir}} (Y, D_Y)$.

Пример 1.3.39. Несложно показать, что

$$(\mathbb{P}^2, L_1 + L_2 + L_3) \simeq_{\mathrm{cbir}} (\mathbb{P}^2, Q + L) \simeq_{\mathrm{cbir}} (\mathbb{P}^2, C),$$

где L_i — общие кривые, Q — общая гладкая коника, C — нодальная кубическая кривая.

Утверждение 1.3.40 (см. [Du24])**.** *Если (X, D) — пара Калаби-Яу размерности 2 такая, что $D = \sum D_i$ — ненулевой дивизор с целыми коэффициентами, то (X, D) крепантно эквивалентна одной из следующих пар:*

1. $(\mathbb{P}^2, L_1 + L_2 + L_3)$ *как в примере 1.3.39,*

2. $(\mathbb{P}^2, C)$, *где* C — *гладкая кубическая кривая,*

3. $(\mathbb{P}^1 \times C, C_1 + C_2)$, *где* C — *гладкая кривая рода* 1, *и* C_1, C_2 — *сечения проекции* $\mathbb{P}^1 \times C \to C$.

Если суб-пары (X, D) и (X', D') крепантно эквиваленты, то для любого дивизора E над X имеем равенство дискрепантностей $a(E, X, D) = a(E, X', D')$. Это замечание объясняет термин крепантная эквивалентность.

Определение 1.3.41. Будем говорить, что пара (X, D) имеет торическую модель, если она крепантно эквивалента торической паре (Y, D_Y), где Y — собственное торическое многообразие, а $D_Y = \sum D_i$ — сумма всех торически-инвариантных дивизоров.

Замечание 1.3.42. Заметим, что если пара (X, D) размерности n имеет торическую модель, то

1. $K_X + D \sim 0$, в частности, пара (X, D) является парой Калаби-Яу и все коэффициенты D являются целыми числами,

2. многообразие X рационально,

3. все страты дивизора границы D рациональны,

4. $\mathcal{D}(X, D) \simeq S^{n-1}$.

Разумно предположить, что свойства в замечании 1.3.42 являются достаточными для существования торической модели.

Гипотеза 1.3.43 ([Du24])**.** Пусть (X, D) — пара Калаби-Яу размерности n. Предположим, что

1. $K_X + D \sim 0$, в частности, все коэффициенты D являются целыми числами,

2. многообразие X рационально,

3. все страты D рациональны,

4. $\mathcal{D}(X, D) \simeq S^{n-1}$.

Тогда (X, D) имеет торическую модель.

Гипотеза 1.3.43 доказана в размерности 2. Введем следующее определение.

Определение 1.3.44. Пара (X, D) называется парой Лойенги, если

1. (X, D) — пара Калаби-Яу,
2. X — поверхность,
3. $D = \sum D_i$ — ненулевой дивизор с целыми коэффициентами,
4. $\dim \mathcal{D}(X, D) > 0$.

Заметим, что в определении 1.3.44 из условия $\dim \mathcal{D}(X, D) > 0$ следует, что $\mathcal{D}(X, D) \simeq S^1$, и поверхность X рациональна.

Теорема 1.3.45 ([GPK15, Proposition 1.5])**.** *Пусть (X, D) — пара Лойенги. Тогда (X, D) имеет торическую модель.*

В размерности 3 условие рациональности является существенным, как показывает следующая теорема.

Теорема 1.3.46 ([Ka20])**.** *Существует пара Калаби-Яу (X, D), где $X \subset \mathbb{P}^4$ — гладкая трехмерная кубика, а D — дивизор границы такой, что $\mathcal{D}(X, D) \simeq S^2$.*

В силу того, что гладкая трехмерная кубика не является рациональной ([CG72]), пара (X, D) в теореме 1.3.46 не имеет торической модели.

Теорема 1.3.47 ([Zha25])**.** *Существует пара Калаби-Яу (X, D), где $X \subset \mathbb{P}^5$ — гладкое полное пересечение квадрики и кубики (соотв., $X \subset \mathbb{P}^6$ — гладкое полное пересечение трех квадрик), а D — дивизор границы такой, что $\mathcal{D}(X, D) \simeq S^2$.*

Из теорем 3.0.1, 1.3.46 и 1.3.47 вытекает следующий результат.

Следствие 1.3.48. В любом семействе гладких трехмерных многообразий Фано существует элемент с нулевой корегулярностью.

В работе [Du24] гипотеза 1.3.43 доказана в случае, когда $X = \mathbb{P}^3$. Следующая теорема представляет собой обобщение этого результат на случай гладких трехмерных многообразий Фано.

Теорема 1.3.49 ([LMV24])**.** *Пусть X — общее гладкое трехмерное рациональное многообразие Фано. Тогда существует такой дивизор D, что пара (X, D) имеет торическую модель.*

1.4 K-стабильность

Кратко напомним некоторые определения теории K-стабильности. Подробности можно найти в обзоре [Xu21] и указанной там литературе.

1.4.1 Бета-инвариант и дельта-инвариант

Пусть (X, D) — пара, и $f\colon Y \to X$ — собственный бирациональный морфизм с нормального многообразия Y.

Определение 1.4.2. *Псевдоэффективным порогом* E относительно пары Фано (X, D) называется число

$$\tau_{(X,D)}(E) = \sup\{x \in \mathbb{R}_{\geq 0}\colon f^*L - xE \text{ псевдоэффективен}\}.$$

Аналогично определим *nef-порог* E относительно пары Фано (X, D):

$$\epsilon_{(X,D)}(E) = \sup\{x \in \mathbb{R}_{\geq 0}\colon f^*D - xE \text{ является nef}\}.$$

Ожидаемым порядком зануления E относительно пары Фано (X, D) называется

$$S_{(X,D)}(E) = \frac{1}{\mathrm{vol}(L)} \int_0^\infty \mathrm{vol}(f^*L - xE)dx,$$

где vol — функция объема, см. [Laz04].

Бета-инвариант $\beta_{(X,D)}(E)$ дивизора E относительно пары Фано (X, D) определяется следующим образом:

$$\beta_{(X,D)}(E) = A_{(X,D)}(E) - S_{(X,D)}(E).$$

Дельта-инвариант пары (X, D) (соответственно, *дельта-инвариант пары* (X, D) *вдоль* Z) определяются как

$$\delta(X, D) = \inf_{E/X} \frac{A_{(X,D)}(E)}{S_{(X,D)}(E)}, \quad \delta_Z(X, D) = \inf_{E/X,\ Z\subset C(E)} \frac{A_{(X,D)}(E)}{S_{(X,D)}(E)},$$

где E пробегает все простые дивизоры над X (соотв., все простые дивизоры над X, центр которых содержит Z).

Определение 1.4.3 ([Li17], [Fu19], [Fu16])**.** klt пара Фано (X, D) называется

1. *дивизориально полустабильной* (соотв., *дивизориально стабильной*), если $\beta_{(X,D)}(E) \geq 0$ (соотв., $\beta_{(X,D)}(E) > 0$) для любого простого дивизора E на X. Говорят, что пара (X, D) *дивизориально нестабильна*, если (X, D) не является дивизориально полустабильной.

2. *K-полустабильной* (соотв., *K-стабильной*), если $\beta_{(X,D)}(E) \geq 0$ (соотв., $\beta_{(X,D)}(E) > 0$) для любого простого дивизора E над X. Говорят, что пара (X, D) *K-нестабильна*, если (X, D) не K-полустабильна.

Это определение эквивалентно первоначальному определению K-стабильности, данному в [Tia97], [Don02] в терминах тестовых конфигураций. Если дивизор границы тривиален, то есть $D = 0$, мы опускаем его для ясности обозначений.

Определение 1.4.4 ([BJ20])**.** Пусть $m \in \mathbb{N}$ и L — $\mathbb{Q}$-дивизор Картье на X. Положим $d_m = \dim H^0(X, mL)$. Будем говорить, что $D \sim_{\mathbb{Q}} L$ является *дивизором m-базисного типа* для L, если

$$D = \frac{1}{md_m} \sum_{i=1}^{k} \{s_i = 0\},$$

для некоторого базиса $s_1, s_2, \ldots, s_k$ пространства $H^0(X, mL)$.

Определение 1.4.5. Положим

$$S_m(X, L, E) = \sup_{D \sim_{\mathbb{Q}} L,\ m\text{-базисного типа}} \operatorname{ord}_E(D).$$

Следующий предел существует ([BJ20]):

$$\lim_{m\to\infty} S_m(X, L, E) = S_{(X,L)}(E).$$

Определение 1.4.6. Положим

$$\delta_m(X, L) = \sup\{\lambda \geq 0 \mid (X, \lambda D) \text{ lc для всех дивизоров } m\text{-базисного типа } D \sim_{\mathbb{Q}} L\}.$$

Следующий предел существует ([BJ20]):

$$\lim_{m\to\infty} \delta_m(X, L) = \delta(X, L).$$

Аналогично можно ввести локальную версию $\delta_Z(X, L)$, см. подробности в [AZ20, Section 2.2]. Теперь напомним две теоремы из теории Аббана–Чжуана, развитой в [AZ20].

Утверждение 1.4.7 ([ACC+21, Corollary 1.7.26])**.** *Пусть X — гладкое трехмерное многообразие Фано, $Y \subset X$ — неприводимая нормальная поверхность, имеющая не хуже чем дювалевские особенности, $Z \subset Y$ — неприводимая гладкая кривая. Тогда для любого простого дивизора E над X такого, что $c(E) = Z$, выполняется*

$$\frac{A(E)}{S(E)} \geq \min\left\{\frac{1}{S_X(Y)}, \frac{1}{S(W^{Y,Z}_{\bullet,\bullet}; Z)}\right\}, \tag{1.4.1}$$

где

$$S(W^{Y,Z}_{\bullet,\bullet};Z)=\frac{3}{(-K_X)^3}\int\limits_0^\infty (P(u)^2\cdot Y)\cdot \mathrm{ord}_Z(N(u)|_Y)du$$
$$+\frac{3}{(-K_X)^3}\int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty \mathrm{vol}(P(u)|_Y-vZ)dvdu.$$

Более того, если в (1.4.1) *достигается равенство, то* $\frac{A(E)}{S(E)}=\frac{1}{S_X(Y)}$.

Пусть $P(u,v)$ — положительная часть разложения Зарисского дивизора $P(u)|_Y-vZ$, а $N(u,v)$ — отрицательная часть этого разложения. Запишем $N(u)|_Y=dZ+N'_Y(u)$, где $Z\not\subset \mathrm{Supp}(N'_Y(u))$ и $d=d(u)=\mathrm{ord}_Z(N(u)|_Y)$.

Утверждение 1.4.8 ([ACC+21, Theorem 1.7.30])**.** *Пусть X — гладкое трехмерное многообразие Фано, $Y\subset X$ — неприводимая нормальная поверхность, имеющая не хуже чем дювалевские особенности, $Z\subset Y$ — неприводимая гладкая кривая такая, что пара (Y,Z) имеет чисто логтерминальные особенности. Пусть P — точка на кривой Z. Тогда*

$$\delta_P(X)\geq \min\left\{\frac{1-\mathrm{ord}_P(\Delta_Z)}{S(W^{Y,Z}_{\bullet,\bullet,\bullet};P)},\frac{1}{S(V^Y_{\bullet,\bullet};Z)},\frac{1}{S_X(Y)}\right\},\tag{1.4.2}$$

где Δ_Z — дифферента пары (Y,Z), и

$$S(W^{Y,Z}_{\bullet,\bullet,\bullet};P)=\frac{3}{(-K_X)^3}\int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty (P(u,v)\cdot Z)^2dvdu+$$
$$+\frac{6}{(-K_X)^3}\int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty (P(u,v)\cdot Z)\cdot \mathrm{ord}_P(N'_Y(u)|_Z+N(u,v)|_Z)dvdu.$$

Более того, если неравенство обращается в равенство и существует простой дивизор E над X такой, что $c_X(E)=P$ и $\delta_P(X)=\frac{A(E)}{S(E)}$, то $\delta_P(X)=\frac{1}{S_X(Y)}$.

Утверждение 1.4.9 ([ACC+21, Theorem 1.7.30],[ACC+21, Remark 1.7.32])**.** *Пусть X — гладкое трехмерное многообразие Фано, $Y\subset X$ — неприводимая нормальная поверхность, имеющая не более чем дювалевские особенности, $Q\in Y$ — точка на Y. Пусть $\epsilon\colon \tilde{Y}\to Y$ — plt раздутие точки Q, и $\tilde{Z}$ — ϵ-исключительная кривая. Тогда*

$$\delta_Q(X)\geq \min\left\{\min_{P\in\tilde{Z}}\frac{1-\mathrm{ord}_P(\Delta_{\tilde{Z}})}{S(W^{Y,\tilde{Z}}_{\bullet,\bullet,\bullet};P)},\frac{A_Y(\tilde{Z})}{S(V^Y_{\bullet,\bullet};\tilde{Z})},\frac{1}{S_X(Y)}\right\},\tag{1.4.3}$$

где $\Delta_{\tilde{Z}}$ *— дифферента пары* $(\widetilde{Y}, \tilde{Z})$.

1.4.10 Теория Аббана–Чжуана

Пусть P — точка на X. Чтобы доказать K-стабильность X, достаточно показать, что $\delta_P(X) > 1$. Мы можем оценить $\delta(P)$, как в [AZ20, Theorem 3.3] и предложении 1.4.9. Пусть Y — нормальная неприводимая поверхность в X. Тогда из [AZ20] и [ACC+21] следует, что

$$\delta_P(X) \geq \min\left\{\frac{1}{S_X(Y)}, \delta_P(Y, W^Y_{\bullet,\bullet})\right\} \tag{1.4.4}$$

для

$$\delta_P(Y, W^Y_{\bullet,\bullet}) = \inf_{E/Y,\ P\in C_Y(E)} \frac{A_Y(E)}{S(W^Y_{\bullet,\bullet}, E)},$$

где согласно утверждению 1.4.8 имеем

$$S(W^{Y,E}_{\bullet,\bullet}; E) = \frac{3}{(-K_X)^3}\int_0^\infty (P(u)^2 \cdot S)\cdot \mathrm{ord}_E(N(u)|_Y)du + \frac{3}{(-K_X)^3}\int_0^\infty\int_0^\infty \mathrm{vol}(P(u)|_Y - vE)dvdu,$$

и инфимум берется по всем простым дивизорам E над Y, центры на Y которых содержат точку P. Используя эти оценки, а также индуктивные соображения, были доказаны следующие теоремы.

Теорема 1.4.11. *[BL23] Пусть* X *— гладкое трехмерное многообразие Фано из семейства 4.1, то есть гладкая гиперповерхность* 4*-степени* $(1,1,1,1)$ *в пространстве* $\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1$*. Тогда* X *является K-стабильной.*

Напомним, что гладкое трехмерное многообразие X антиканонической степени 14 с числом Пикара, равном 3, может быть реализовано как дивизор в линейной системе $|L^{\otimes 2}\otimes p^*\mathscr{O}(2,3)|$ в $\mathbb{P}^2$-расслоении

$$Q = \mathbb{P}_{\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1}(\mathscr{O}\oplus\mathscr{O}(-1,-1)^{\oplus 2})$$

над $\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1$, где L — тавтологическое расслоение, и $p\colon Q\to\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1$ — — естественная проекция. Обозначим естественную проекцию на X через $\pi = p|_X\colon X\to\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1$. Также, существуют две проекции $\pi_1\colon X\to\mathbb{P}^1$ и $\pi_2\colon X\to\mathbb{P}^1$, слоями которых являются поверхности дель Пеццо. Пусть F_1 и F_2 — общие

слои π_1 и π_2, соответственно. Тогда F_1 является поверхностью дель Пеццо степени 6, а F_2 — поверхностью дель Пеццо степени 3.

Теорема 1.4.12. *Пусть X — гладкое трехмерное многообразие Фано из семейства 3.2, такое что для него выполнено следующее условие общности. Для любого кратного слоя $C' = 2C$ естественного расслоения на коники $\pi\colon X \to \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$, слой F_2 морфизма $\pi_2\colon X \to \mathbb{P}^1$, содержащий C, имеет не хуже, чем особенности типа A_1. Тогда X является K-стабильным.*

1.4.13 K-стабильность пар Фано типа Маеды

K-стабильность также можно изучать для пар Фано. Простейший нетривиальный пример таких пар доставляет следующее определение.

Определение 1.4.14 ([Fu20])**.** *Логарифмическая пара Фано типа Маеды* — это klt логарифмическая пара Фано (X, D) с $D \neq 0$, для которой существует лог-гладкая логарифмическая пара Фано (X, Δ) с приведенной границей Δ, такая что $\mathrm{Supp}(D) \subseteq \mathrm{Supp}(\Delta)$.

Имеет место следующий результат, обобщающий двумерный случай, рассмотренный в [Fu20].

Теорема 1.4.15 ([Lo23])**.** *Пусть (X, D) — пара Фано типа Маеды с условием $\dim X = 3$. Предположим, что D неприводимо. Тогда пара (X, D) K-полустабильна тогда и только тогда, когда она принадлежит одной из следующих:*

1. *$(\mathbb{P}^3, aD_1 + bD_2)$, где D_1 — гладкая квадрика, D_2 — плоскость, $3b \leq 2a$ и $6a - b \leq 4$.*

2. *$(Q, aD_1 + bD_2)$, где $Q \subset \mathbb{P}^4$ — гладкая квадрика, D_i — гиперплоские сечения, $3a - b \leq 1$ и $3b - a \leq 1$.*

3. *$(\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^2, aD_1 + bD_2)$, где $D_1 \sim H + F$, $D_2 \sim F$, H — прообраз прямой на $\mathbb{P}^2$, F — прообраз точки на $\mathbb{P}^1$, и выполнено одно из двух следующих условий:*

   $0 \leq a \leq \alpha \approx 0.507$, и $b \leq a/2$, где α является корнем уравнения $-40 + 106\alpha - 58\alpha^2 + 9\alpha^3 = 0$,

   или $\alpha \approx 0.507 \leq a \leq 20/37$, и

$(-4+13a-4a^2)/(3a) - \sqrt{(32-88a+84a^2-34a^3+5a^4)/a^2}/(3\sqrt{2}) \leq b \leq a/2$.

4. $(X, aD_1 + bD_2)$, *где* X — *раздутие квадрики* $Q \subset \mathbb{P}^4$ *в плоской конике* $C \subset Q$, $D_1 = E$ — *исключительный дивизор раздутия* $X \to Q$, D_2 — *прообраз гиперплоского сечения* Q, *содержащего конику* C, *и выполнены следующие условия:*

   $0 \leq a \leq (\sqrt{10}-2)/3$ *и* $0 \leq b \leq 1 - \sqrt{4+4a+3a^2}/\sqrt{6}$.

5. (X, aD_1+bD_2), *где* X — *дивизор бистепени* $(1,1)$ *в* $\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2$, D_1 — *дивизор бистепени* $(1,0)$, D_2 — *дивизор бистепени* $(0,1)$, *и*

   $0 \leq a \leq 2-\sqrt{3}$ *и* $0 \leq b \leq 1/8(16-3a) - 1/8\sqrt{3}\sqrt{64-32a+3a^2})$

   или $2-\sqrt{3} \leq a \leq 2/7$ *и* $(-4+16a-4a^2)/(3a) \leq b \leq 1/8(16-3a) - 1/8\sqrt{3}\sqrt{64-32a+3a^2})$.

Более того, если приведенные выше неравенства являются строгими, то соответствующие пары являются K*-полистабильными.*

Глава 2

Жордановость групп бимероморфных автоморфизмов

В этой главе мы изучаем группы бимероморфных автоморфизмов комплексных многообразий. Более точно, мы сосредоточимся на конечных подгруппах таких групп. Один из способов изучения их структуры — установить так называемое *свойство Жордана*, то есть показать, что любая конечная подгруппа данной группы допускает нормальную абелеву подгруппу ограниченного индекса.

В дальнейшем мы обозначаем через $\mathrm{Aut}(X)$ группу автоморфизмов комплексного многообразия X, через $\mathrm{Bim}(X)$ группу бимероморфных автоморфизмов X, и через $\kappa(X)$ размерность Кодаиры X.

Мы перечисляем несколько результатов о свойстве Жордана, см. определение 2.1.5.

1. Если X — компактная комплексная поверхность, то $\mathrm{Aut}(X)$ является жордановой, в то время как $\mathrm{Bim}(X)$ является жордановой тогда и только тогда, когда X не бимероморфна произведению $\mathbb{P}^1$ и эллиптической кривой, см. [PrSh21, Theorems 1.6, 1.7].

2. Если X — проективное многообразие над полем характеристики ноль, то группа $\mathrm{Aut}(X)$ является жордановой [MZh18].

Для кэлеровых многообразий имеются следующие результаты.

1. Если X — компактное кэлерово многообразие, то группа $\mathrm{Aut}(X)$ является жордановой [Kim18].

2. Если X — компактное трехмерное кэлерово многообразие с $\kappa(X) \geq 0$ и $q(X) = \mathrm{H}^1(X, \mathscr{O}_X) > 0$, то группа $\mathrm{Bim}(X)$ является жордановой [PrSh21b].

3. А.С. Голота показал, что можно избавиться от предположения о нерегулярности X:

Теорема 2.0.1 ([Go21])**.** *Пусть X — трехмерное компактное кэлерово многообразие с $\kappa(X) \geq 0$. Тогда группа $\mathrm{Bim}(X)$ является жордановой.*

Наша цель — получить аналогичный результат для компактных комплексных многообразий без предположения, что X является кэлеровым. Мы доказываем следующую теорему.

Теорема 2.0.2. *Пусть X — n-мерное компактное комплексное многообразие с $\kappa(X) \geq n - 2$. Тогда группа $\mathrm{Bim}(X)$ является жордановой.*

Следствие 2.0.3. Пусть X — трехмерное компактное комплексное многообразие с $\kappa(X) > 0$, тогда группа $\mathrm{Bim}(X)$ является жордановой.

Наше доказательство основано на изучении свойства ограниченности конечных подгрупп для плюриканонического представления группы бимероморфных автоморфизмов. Более точно, обозначим через *ρ плюриканоническое представление* группы $\mathrm{Bim}(X)$, то есть действие $\mathrm{Bim}(X)$ на пространстве голоморфных m-плюриформ. Также через $\overline{\rho}(\mathrm{Bim}(X))$ мы обозначаем проективизацию плюриканонического представления, которое действует на образе плюриканонического отображения, см. раздел 2.1.2. Для удобства мы называем его *проективным плюриканоническим представлением*. Мы говорим, что группа имеет *ограниченные конечные подгруппы*, если мощность любой конечной подгруппы такой группы ограничена константой, не зависящей от подгруппы. Мы доказываем следующую теорему.

Теорема 2.0.4. *Пусть X — компактное комплексное многообразие. Тогда образ плюриканонического представления $\rho(\mathrm{Bim}(X))$ и образ проективного плюриканонического представления $\overline{\rho}(\mathrm{Bim}(X))$ имеют ограниченные конечные подгруппы.*

Комбинируя теорему 2.0.1 и теорему 2.0.4, мы выводим следующее:

Следствие 2.0.5. Пусть X — n-мерное компактное кэлерово многообразие с $\kappa(X) \geq n-3 \geq 0$. Тогда группа $\mathrm{Bim}(X)$ является жордановой.

В доказательстве теоремы 2.0.4 мы следуем идеям, использованным Уэно в [Ue75, §14], где был установлен следующий результат, доказательство которого принадлежит Делиню:

Теорема 2.0.6 ([Ue75, Theorem 14.10])**.** *Пусть X — компактное комплексное многообразие. Предположим, что X является мойшезоновым многообразием. Тогда группа $\rho(\mathrm{Bim}(X))$ конечна.*

Подчеркнем, что в теореме 2.0.4 нам не нужно предположение, что X является мойшезоновым многообразием, но вместо конечности мы устанавливаем более слабое свойство для $\rho(\mathrm{Bim}(X))$. Однако это лучшее, что мы можем получить, так как существуют компактные комплексные многообразия с бесконечным $\rho(\mathrm{Bim}(X))$, см. пример 2.3.8. Также можно задаться вопросом о конечности группы $\overline{\rho}(\mathrm{Bim}(X))$. Если X — компактная комплексная поверхность, то $\overline{\rho}(\mathrm{Bim}(X))$ конечна. Действительно, конечность $\overline{\rho}(\mathrm{Bim}(X))$ тривиальна для $\kappa(X)=0$, для $\kappa(X)=1$ ее конечность доказана в [PrSh21, Lemma 8.2], и для $\kappa(X)=2$ группа $\mathrm{Bim}(X)$ сама конечна по [Ue75, Corollary 14.3]. В больших размерностях мы не знаем о результатах конечности для $\overline{\rho}(\mathrm{Bim}(X))$, когда размерность Кодаиры не является максимально возможной. Поэтому мы формулируем следующий

Вопрос 2.0.7. Существует ли компактное комплексное многообразие X такое, что образ проективного плюриканонического представления $\overline{\rho}(\mathrm{Bim}(X))$ бесконечен?

Мы отсылаем к [HX16] и ссылкам там для результатов о конечности в случае проективных пар.

2.1 Предварительные сведения

Мы работаем над полем комплексных чисел. Мы отсылаем читателя к [Ue75] для основных фактов и определений. Напомним некоторые из них. Под *комплексным многообразием* мы понимаем неприводимое приведенное комплексное пространство. *Комплексная поверхность* - это комплексное многообразие размерности 2. Под открытым (по Зарискому) подмножеством комплексного

многообразия X мы понимаем подмножество вида $X \setminus Z$, где Z — замкнутое аналитическое подмножество в X. Под *типичной точкой* X мы понимаем точку из некоторого непустого открытого по Зарискому подмножества X.

Собственное сюръективное голоморфное отображение $f\colon X \to Y$ приведенных комплексных пространств называется *модификацией*, если существуют нигде не плотные замкнутые аналитические подмножества $V \subset X$ и $W \subset Y$ такие, что f ограничивается до биголоморфного отображения $X \setminus V \to Y \setminus W$. *Мероморфное отображение* $f\colon X \dashrightarrow Y$ приведенных комплексных аналитических пространств X и Y — это голоморфное отображение, определенное вне нигде не плотного подмножества, такое, что замыкание его графика $\overline{\Gamma_f} \subset X \times Y$ является замкнутым аналитическим подмножеством в $X \times Y$, и естественная проекция $\overline{\Gamma_f} \to X$ является модификацией. Мероморфное отображение f называется *бимероморфным*, если естественная проекция $\overline{\Gamma_f} \to Y$ также является модификацией.

Для приведенного комплексного пространства X мы обозначаем через $\mathrm{Bim}(X)$ его группу бимероморфных автоморфизмов, а через $\mathrm{Aut}(X)$ — его группу биголоморфных автоморфизмов.

Пример 2.1.1. Бимероморфный автоморфизм открытого подмножества U в комплексном многообразии X может не индуцировать бимероморфный автоморфизм X. Действительно, согласно [VT87, Section 2] существуют две небимероморфных компактификации X_1 и X_2 многообразия $(\mathbb{C}^\times)^2$. Положим $(\mathbb{C}^\times)^2 = U_1 \subset X_1$, $(\mathbb{C}^\times)^2 = U_2 \subset X_2$, и

$$X = X_1 \times X_2 \supset U = U_1 \times U_2.$$

Определим биголоморфное отображение f на $U = U_1 \times U_2$ формулой $f(x_1, x_2) = (x_2, x_1)$, где $x_i \in U_i$ для $i = 1, 2$, и U_1 отождествлено с U_2. Предположим, что f индуцирует бимероморфное отображение на X. Рассмотрим замыкание его графика

$$\overline{\Gamma_f} \subset X \times X = X_1 \times X_2 \times X_1 \times X_2.$$

Тогда обе проекции

$$p_i = \mathrm{pr}_i|_{\overline{\Gamma_f}}\colon \overline{\Gamma_f} \to X = X_1 \times X_2$$

являются модификациями. Рассмотрим подмножество $U_1 \times \{q\} \subset X_1 \times \{q\}$, где $q \in U_2$. Имеем $f(U_1 \times \{q\}) = \{q\} \times U_2$. Следовательно,

$$p_1^{-1}(U_1 \times \{q\}) = U_1 \times \{q\} \times \{q\} \times U_2 \subset \overline{\Gamma_f},$$

Положим

$$\Gamma_g = X_1 \times \{q\} \times \{q\} \times X_2 \cap \overline{\Gamma_f}.$$

Рассмотрим Γ_g как замкнутое аналитическое подмножество, которое определяет график бимероморфного отображения $g\colon X_1 \dashrightarrow X_2$. Действительно, это следует из того, что собственные отображения $\Gamma_g \to X_i$ являются модификациями для $i = 1, 2$. Это противоречие показывает, что f не индуцирует бимероморфное отображение на X.

2.1.2 Плюрикаконическое представление

Пусть X — компактное комплексное многообразие. Предположим, что размерность Кодаиры X удовлетворяет условию $\kappa(X) \geq 0$. Для любого $m \geq 1$ рассмотрим отображение

$$\sigma_m\colon X \dashrightarrow \mathbb{P}(\mathrm{H}^0(X, \mathcal{O}_X(mK_X))^\vee).$$

Для достаточно большого и делящегося m имеем $\dim \sigma_m(X) = \kappa(X)$ и слои σ_m связны. Для такого m мы полагаем $\sigma = \sigma_m$. Переходя к модификации X, мы можем считать, что σ — морфизм. Очевидно, это не меняет группу $\mathrm{Bim}(X)$. Тогда типичный слой σ гладкий и, следовательно, неприводимый (см. [Ue75, Theorem 5.10]). Мы имеем следующее

Утверждение 2.1.3 (см., например, [Ue75, Lemma 6.3])**.** *Группа* $\mathrm{Bim}(X)$ *действует на* $\sigma(X)$ *биголоморфно.*

Положим $V = \mathrm{H}^0(X, \mathcal{O}_X(mK_X))$ и рассмотрим индуцированный гомоморфизм

$$\rho = \rho_m\colon \mathrm{Bim}(X) \to \mathrm{GL}(V), \tag{2.1.1}$$

который называется *плюрикаконическим представлением* группы $\mathrm{Bim}(X)$. Рассмотрим естественную точную последовательность групп

$$1 \to \mathbb{C}^\times \to \mathrm{GL}(V) \xrightarrow{p} \mathrm{PGL}(V) \to 1.$$

Положим $\overline{\rho} = p \circ \rho$. Тогда под *проективным плюрикаконическим представлением* группы $\mathrm{Bim}(X)$ мы понимаем образ $\overline{\rho}(\mathrm{Bim}(X))$. Заметим, что действие $\overline{\rho}(\mathrm{Bim}(X))$ на $\sigma(X)$ является точным.

2.1.4 Теория групп

В этом разделе мы доказываем некоторые теоретико-групповые результаты. Начнем со следующего определения.

Определение 2.1.5. Мы говорим, что группа Γ имеет *ограниченные конечные подгруппы*, если существует константа $C = C(\Gamma)$ такая, что для любой конечной подгруппы $G \subset \Gamma$ выполнено $|G| \leq C$.

Следуя [Po09, Definition 2.1], мы говорим, что группа Γ является *жордановой* (или обладает *свойством Жордана*), если существует константа $J = J(\Gamma)$ такая, что каждая конечная подгруппа $G \subset \Gamma$ содержит нормальную абелеву подгруппу $A \subset G$ индекса не более J.

Заметим, что свойство Жордана (а также свойство иметь ограниченные конечные подгруппы) плохо ведет себя при переходе к факторгруппе. Действительно, любая группа G, которая не обязательно обладает этим свойством, может быть реализована как факторгруппа свободной группы с некоторым числом образующих, а свободная группа, очевидно, удовлетворяет свойству Жордана (и имеет ограниченные конечные подгруппы), поскольку единственная конечная подгруппа в ней — тривиальная группа. Существует аналогичный пример и в случае, когда G является подгруппой общей линейной группы, см. пример 2.1.12. Теперь сделаем следующее простое наблюдение.

Замечание 2.1.6. Предположим, что следующая последовательность групп точна:

$$1 \to G_1 \to G \to G_2 \to 1.$$

Предположим, что G_2 имеет ограниченные конечные подгруппы. Тогда G является жордановой тогда и только тогда, когда G_1 является жордановой.

Пример 2.1.7. Классический результат К. Жордана утверждает, что для любого натурального n группа $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ является жордановой, см., например, [CR62, Theorem 36.13]. Как следствие, любая линейная алгебраическая группа над произвольным полем характеристики нуль является жордановой.

Группа $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ имеет ограниченные конечные подгруппы для любого поля $\mathbb{K}$, конечно порожденного над $\mathbb{Q}$. Эта теорема была доказана Г. Минковским, см., например, [Ser07, Theorem 5] и [Ser07, §4.3]. Отсюда следует, что $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$ имеет ограниченные конечные подгруппы.

Следующий результат можно рассматривать как эффективную версию теоремы Бернсайда для подгрупп общей линейной группы.

Теорема 2.1.8 ([HP76, Theorem 1])**.** *Пусть n и d - натуральные числа. Пусть $\Gamma \subset \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ — подгруппа. Предположим, что для каждого $g \in \Gamma$ выполнено $g^d = 1$. Тогда Γ конечна и $|\Gamma|$ делит d^n.*

Следствие 2.1.9. Пусть $\Gamma \subset \mathrm{PGL}_n(\mathbb{C})$ - подгруппа и пусть d — натуральное число. Предположим, что для каждого $g \in \Gamma$ выполнено $g^d = 1$. Тогда Γ конечна и $|\Gamma|$ делит $(nd)^n$.

Доказательство. Запишем следующую точную последовательность

$$0 \to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to \mathrm{SL}(V) \xrightarrow{p'} \mathrm{PGL}(V) \to 1.$$

Рассмотрим группу $\widetilde{\Gamma} = p'^{-1}(\Gamma)$. Выберем любой элемент $\widetilde{g} \in \widetilde{\Gamma}$ и положим $g = p'(\widetilde{g})$. Заметим, что $\mathrm{ord}(\widetilde{g})$ делит $n\,\mathrm{ord}(g)$, которое, по нашему предположению, делит nd. По теореме 2.1.8 мы получаем, что $\widetilde{\Gamma}$ конечна и $|\widetilde{\Gamma}|$ делит $(nd)^n$. Следовательно, Γ конечна и $|\Gamma|$ также делит $(nd)^n$. □

Теперь установим некоторые свойства ограниченности подгрупп общей линейной группы, которые мы будем использовать позже.

Лемма 2.1.10. *Пусть V — n-мерное векторное пространство над $\mathbb{C}$. Пусть $g \in \mathrm{GL}(V)$ — элемент конечного порядка d. Предположим, что существует константа C такая, что для любого собственного значения α элемента g степень расширения поля $[\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}]$ ограничена сверху C. Тогда*

$$d \leq 2^n C^{2n}.$$

Доказательство. Пусть $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ — собственные значения g. Тогда каждое α_i является корнем из единицы, степень которого мы обозначим через d_i, так что $\alpha_i^{d_i} = 1$. Тогда $d = \mathrm{lcm}(d_i)_{1 \leq i \leq n}$. Хорошо известно, что

$$[\mathbb{Q}(\alpha_i) : \mathbb{Q}] = \varphi(d_i)$$

где $\varphi(d_i)$ - функция Эйлера. Легко проверить, что $d_i \leq 2\varphi(d_i)^2$, поэтому мы оцениваем

$$\sqrt{d_i/2} \leq \varphi(d_i) = [\mathbb{Q}(\alpha_i) : \mathbb{Q}] \leq C.$$

Следовательно,

$$d = \mathrm{lcm}(d_i)_{1 \leq i \leq n} \leq d_1 \cdot \ldots \cdot d_n \leq 2^n C^{2n},$$

что завершает доказательство. □

Лемма 2.1.11. *Пусть V — n-мерное векторное пространство над $\mathbb{C}$, и пусть $\Gamma \subset \mathrm{GL}(V)$ — подгруппа. Рассмотрим точную последовательность групп*

$$1 \to \mathbb{C}^\times \to \mathrm{GL}(V) \xrightarrow{p} \mathrm{PGL}(V) \to 1.$$

Предположим, что существует константа C такая, что для любого собственного значения α элемента g степень расширения поля $[\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}]$ ограничена сверху C. Тогда как Γ, так и $p(\Gamma)$ имеют ограниченные конечные подгруппы.

Доказательство. Сначала покажем, что Γ имеет ограниченные конечные подгруппы. Рассмотрим конечную подгруппу $H \subset \Gamma$. По лемме 2.1.10 для любого элемента $g \in H$ его порядок $d = \mathrm{ord}(g)$ удовлетворяет оценке

$$d \leq 2^n C^{2n}.$$

Используя теорему 2.1.8, заключаем, что $|H|$ ограничено сверху $2^{n^2} C^{2n^2}$. Следовательно, Γ имеет ограниченные конечные подгруппы.

Теперь докажем, что $p(\Gamma)$ имеет ограниченные конечные подгруппы. Рассмотрим конечную подгруппу $G \subset p(\Gamma)$. По следствию 2.1.9 достаточно ограничить сверху порядок d произвольного элемента $g \in G$ константой, не зависящей от g. Выберем любой элемент $\widetilde{g} \in \mathrm{GL}(V)$ из $p^{-1}(g) \cap \Gamma$. Заметим, что $\widetilde{g}$ может иметь бесконечный порядок. Обозначим через $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ собственные значения $\widetilde{g}$. Поскольку $g^d = \mathrm{id}$, имеем $\widetilde{g}^d = \lambda \cdot \mathrm{id}$ для некоторого $\lambda \in \mathbb{C}^\times$. В частности, $\alpha_i^d = \lambda$ для любого $1 \leq i \leq n$. Таким образом, элемент $\alpha_1^{-1}\widetilde{g}$ удовлетворяет

$$\mathrm{ord}(\alpha_1^{-1}\widetilde{g}) = d.$$

Заметим, что его собственные значения — это 1 и α_i/α_1 для $2 \leq i \leq n$. Каждое α_i/α_1 принадлежит полю $\mathbb{Q}(\alpha_1, \alpha_i)$, и степень расширения поля $[\mathbb{Q}(\alpha_1, \alpha_i) : \mathbb{Q}]$ ограничена сверху C^2. Применяя лемму 2.1.10 к элементу $\alpha_1^{-1}\widetilde{g}$, видим, что

$$d \leq 2^n C^{4n}.$$

Используя следствие 2.1.9, заключаем, что $|G|$ ограничено сверху $2^{n^2} C^{4n^2} n^n$. Следовательно, $p(\Gamma)$ имеет ограниченные конечные подгруппы. □

Следующий пример, принадлежащий К. Шрамову, показывает, что вообще говоря, если $\Gamma \subset \mathrm{GL}(V)$ имеет ограниченные конечные подгруппы, то может быть неверно, что $\Gamma' = p(\Gamma) \subset \mathrm{PGL}(V)$ обладает тем же свойством.

Пример 2.1.12. Пусть V — 2-мерное векторное пространство над $\mathbb{C}$. Через U обозначим множество всех комплексных корней из единицы. Определим группу

$$\Gamma' = \left\{ \begin{pmatrix} \xi & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; \xi \in U \right\} \subset \mathrm{PGL}(V).$$

Заметим, что $\Gamma' \simeq \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$. Теперь определим подгруппу $\Gamma \subset \mathrm{GL}(V)$ такую, что $p(\Gamma) = \Gamma'$. Выберем счетное подмножество в $\mathbb{C}$, состоящее из элементов $\{\zeta(\xi)\}_{\xi \in U}$, индексированных всеми корнями из единицы $\xi \in U$, которые алгебраически независимы над $\mathbb{Q}$. Определим

$$\Gamma = \left\{ \zeta(\xi) \cdot \begin{pmatrix} \xi & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; \xi \in U \right\} \subset \mathrm{GL}(V).$$

Ясно, что Γ — свободная абелева группа, и, следовательно, Γ имеет ограниченные конечные подгруппы, в то время как Γ' имеет конечные подгруппы сколь угодно большого порядка.

2.2 Разрешение особенностей

В этом разделе мы построим специальное «послойное» разрешение особенностей, которое мы будем использовать при доказательстве теоремы 2.0.4. Аналогичное построение для мойшезонова многообразий было предложено Уэно в доказательстве [Ue75, Theorem 14.10]. Однако, поскольку мы работаем в аналитической категории, вместо его аргумента, использующего схемно-теоретическую общую точку, мы предлагаем другое, чисто аналитическое построение.

Определение 2.2.1. Под *вложенной гладкой моделью* возможно приводимого и неприведенного комплексного подпространства Y' комплексного многообразия M' мы понимаем возможно приводимое гладкое комплексное подпространство Y комплексного многообразия M вместе с коммутативной диаграммой

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{h} & M' \\ \uparrow & & \uparrow \\ Y & \xrightarrow{g} & Y' \end{array}$$

где h и g — собственные сюръективные голоморфные отображения, отображение h бимероморфно, и Y является собственным прообразом Y' при отображении g.

Последнее условие в определении 2.2.1 означает, что для каждой неприводимой компоненты F многообразия Y существует неприводимая компонента F' многообразия Y', рассматриваемая с приведенной структурой, такая, что отображение $g|_F\colon F \to F'$ бимероморфно, и отображение g индуцирует биекцию между неприводимыми компонентами Y и неприводимыми компонентами Y'. В частности, каждая компонента Y, рассматриваемая с приведенной структурой, является собственным прообразом соответствующей неприводимой компоненты Y при отображении g.

Заметим, что вложенная гладкая модель всегда существует по теореме о вложенном разрешении особенностей [Wl08, Theorem 2.0.2].

В дальнейшем мы называем отображение $\pi\colon Y \to W$ *равноразмерным над* $U \subset W$, если все компоненты всех его слоев над точками из U имеют одинаковую размерность. Мы говорим, что π *равноразмерно*, если оно равноразмерно над W.

Лемма 2.2.2. *Рассмотрим следующую коммутативную диаграмму*

$$\begin{array}{ccc} W \times M' & & \\ \uparrow & \searrow^{\mathrm{pr}_1} & \\ Y' & \xrightarrow{\pi} & W \end{array} \tag{2.2.1}$$

где

- Y' *— приведенное, возможно приводимое компактное аналитическое подпространство в* $W \times M'$,
- M' *— гладкое (возможно некомпактное) комплексное многообразие,*
- W *— неприводимое приведенное (возможно некомпактное) комплексное пространство,*
- π *— собственное сюръективное равноразмерное отображение.*

Тогда существует открытое подмножество $U \subset W$ *и коммутативная*

диаграмма

$$\begin{array}{ccccc} \widetilde{M_U} & \xrightarrow{h_U} & U \times M' & & \\ \uparrow & & \uparrow & \searrow^{\mathrm{pr}_1} & \\ \widetilde{\pi^{-1}(U)} & \xrightarrow{g_U} & \pi^{-1}(U) & \xrightarrow{\pi} & U \subset W \end{array} \tag{2.2.2}$$

такая, что

- $\widetilde{\pi^{-1}(U)} \subset \widetilde{M_U}$ *является вложенной гладкой моделью для* $\pi^{-1}(U) \subset U \times M'$,
- *отображение* $\pi \circ g_U$ *гладко,*
- *для любой точки* $\phi \in U$ *имеем, что* $Y_\phi \subset M_\phi$ *является вложенной гладкой моделью для* $Y'_\phi \subset M'$*:*

$$\begin{array}{ccccc} M_\phi & \xrightarrow{h_\phi} & M' & & \\ \uparrow & & \uparrow & \searrow & \\ Y_\phi & \xrightarrow{g_\phi} & Y'_\phi & \xrightarrow{\pi} & \phi \in U \end{array} \tag{2.2.3}$$

где $Y_\phi = (\pi \circ g_U)^{-1}(\phi)$, $Y'_\phi = \pi^{-1}(\phi)$ *и* $M_\phi = (\mathrm{pr}_1 \circ h_U)^{-1}(\phi)$.

Доказательство. Переходя, если нужно, к открытому подмножеству в W, мы можем считать, что W гладко. По [Wl08, Theorem 2.0.2], существует разрешение особенностей $Y_0 = Y'$, реализуемое как последовательность раздутий $g_1, \ldots, g_t$ в гладких центрах $Z_i \subset M_i$, начиная с $M_0 = W \times M'$, как показано на следующей диаграмме:

$$\begin{array}{ccccccccccc} & & Z_{t-1} & & \ldots & & Z_1 & & Z_0 & & \\ & & \downarrow & & & & \downarrow & & \downarrow & & \\ M = M_t & \xrightarrow{h_t} & M_{t-1} & \xrightarrow{h_{t-1}} & \ldots & \xrightarrow{h_2} & M_1 & \xrightarrow{h_1} & M_0 = W \times M' & & \\ \uparrow & & \uparrow & & & & \uparrow & & \uparrow & \searrow & \\ Y = Y_t & \xrightarrow{g_t} & Y_{t-1} & \xrightarrow{g_{t-1}} & \ldots & \xrightarrow{g_2} & Y_1 & \xrightarrow{g_1} & Y_0 = Y' & \xrightarrow{\pi} & W \end{array} \tag{2.2.4}$$

Здесь h_i для $1 \leq i \leq t$ является раздутием M_i в гладком центре $Z_{i-1} \subset Y_{i-1}$, каждое Y_i является собственным прообразом Y_0, и $g_i = h_i|_{Y_i}$. Под собственным прообразом мы понимаем объединение собственных прообразов всех неприводимых компонент Y_0. Более того, по [Wl08, Theorem 2.0.2] мы можем считать,

что каждый центр Z_i не пересекается с множеством $\mathrm{Reg}(Y_i)$ гладких точек Y_i. Положим

$$h = h_1 \circ \ldots \circ h_t, \qquad g = g_1 \circ \ldots \circ g_t, \qquad \pi_i = \pi \circ g_1 \circ \ldots \circ g_i \quad \text{для } 0 \le i \le t.$$

Для начала определим открытое подмножество $U \subset W$ условием, что отображение $\pi_t = \pi \circ g$ гладко над U. Тогда $W \setminus U$ является собственным замкнутым аналитическим подмножеством в W, см. [Ue75, Corollary 1.7].

Для произвольной точки $\phi \in U$ рассмотрим диаграмму

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & Z_{t-1} \cap Y_{t-1,\phi} & & \ldots & & Z_1 \cap Y_{1,\phi} & & Z_0 \cap Y_\phi & & \\
 & & \downarrow & & & & \downarrow & & \downarrow & & \\
M_\phi = M_{t,\phi} & \xrightarrow{h_{t,\phi}} & M_{t-1,\phi} & \xrightarrow{h_{t-1,\phi}} & \ldots & \xrightarrow{h_{2,\phi}} & M_{1,\phi} & \xrightarrow{h_{1,\phi}} & M_{0,\phi} = M' & & \\
\uparrow & & \uparrow & & & & \uparrow & & \uparrow & \searrow & \\
Y_\phi = Y_{t,\phi} & \xrightarrow{g_{t,\phi}} & Y_{t-1,\phi} & \xrightarrow{g_{t-1,\phi}} & \ldots & \xrightarrow{g_{2,\phi}} & Y_{1,\phi} & \xrightarrow{g_{1,\phi}} & Y_{0,\phi} = Y'_\phi & \xrightarrow{\pi} & \phi \in U
\end{array} \tag{2.2.5}$$

где $Y_{i,\phi} = \pi_i^{-1}(\phi)$ и $g_{i,\phi} = g_i|_{Y_{i,\phi}}$ для $1 \le i \le t$. Положим $g_\phi = g|_{Y_\phi}$.

Мы утверждаем, что, возможно после сужения U на каждом из t шагов в диаграмме (2.2.4), каждое отображение π_i является равноразмерным над U. Действительно, $\pi_0 = \pi$ равноразмерно по предположению. По индукции, для фиксированного i с $1 \le i \le t$ мы можем считать, что π_j равноразмерно для всех $j \le i-1$. Мы покажем, что, возможно после сужения U, отображение π_i равноразмерно. Рассмотрим исключительное множество $E_i = \mathrm{Exc}(g_i)$, которое отображается в Z_{i-1}. По [BS76, Theorem V.4.10], множество точек в U, над которыми отображения π_i и $\pi_i|_{E_i}$ не являются плоскими, является собственным замкнутым аналитическим подмножеством в U. Следовательно, возможно после сужения U, мы видим, что эти отображения плоски над U. По [BS76, Proposition V.2.4] отображения π_i и $\pi_i|_{E_i}$ являются равноразмерным над U. В частности, Z_i либо сюръективно отображается на U, либо $\pi_i(Z_i) \cap U = \emptyset$. (В последнем случае h_i индуцирует изоморфизм $\pi_i^{-1}(U)$ с $\pi_{i-1}^{-1}(U)$, поэтому мы можем пропустить этот шаг в нашем построении).

Следовательно, для любого i с $1 \le i \le t$ и любой $\phi \in U$, мы можем записать

$$\dim Y' - 1 \ge \dim E_i = \dim U + \dim(E_i \cap Y_{i,\phi}).$$

В частности, если E_i является дивизором на Y_i, то вышеприведенное неравенство становится равенством. С другой стороны,

$$\dim Y' = \dim U + \dim Y'_\phi = \dim U + \dim Y_{i,\phi}.$$

Мы заключаем, что

$$\dim(E_i \cap Y_{i,\phi}) \leq \dim Y_{i,\phi} - 1. \tag{2.2.6}$$

Следовательно, для любого $1 \leq i \leq t$ пересечение $E_i \cap Y_{i,\phi}$ является собственным замкнутым подмножеством в $Y_{i,\phi}$, которое имеет коразмерность по крайней мере 1 в любой неприводимой компоненте $Y_{i,\phi}$. Как следствие, для каждого $1 \leq i \leq t$ мы имеем, что $Y_{i,\phi}$ является собственным прообразом $Y_{i-1,\phi}$ при отображении $g_{i,\phi}$. Следовательно, Y_ϕ является собственным прообразом Y'_ϕ при отображении g_ϕ. Заметим, что Y_ϕ гладко (возможно, приводимо), так как по построению отображение $\pi_t|_U$ гладко. Следовательно, $Y_\phi \subset M_\phi$ является вложенной гладкой моделью для $Y'_\phi \subset M'$ для любой $\phi \in U$.

Положим

$$\widetilde{M_U} = (h \circ \mathrm{pr}_1)^{-1}(U), \qquad \widetilde{\pi^{-1}(U)} = \pi_t^{-1}(U), \qquad h_U = h|_{\widetilde{M_U}}, \qquad g_U = g|_{\pi_t^{-1}(U)}.$$

Это завершает доказательство. □

Лемма 2.2.3. *В предположениях и обозначениях леммы 2.2.2, если комплексное пространство W компактно, то для любой точки $\phi \in W$ мы можем найти вложенную гладкую модель $Y_\phi \subset M_\phi$ для $Y'_\phi = \pi^{-1}(\phi) \subset M'_\phi$, как в следующей диаграмме*

$$\begin{array}{ccccc} M_\phi & \xrightarrow{h_\phi} & M' & & \\ \uparrow & & \uparrow & \searrow & \\ Y_\phi & \xrightarrow{g_\phi} & Y'_\phi & \xrightarrow{\pi} & \phi \in U \end{array} \tag{2.2.7}$$

такую, что числа Бетти Y_ϕ ограничены равномерно по $\phi \in W$.

Доказательство. По лемме 2.2.2, существует открытое подмножество $U \subset W$ и разрешение особенностей

$$g_U \colon \widetilde{\pi^{-1}(U)} \to \pi^{-1}(U)$$

такое, что оно дает вложенную гладкую модель $g_\phi \colon Y_\phi \to Y'_\phi$ для любой $\phi \in U$, где Y_ϕ вложено в M_ϕ, как в диаграмме 2.2.7 (см. также диаграмму 2.2.5). Положим $U_0 = U$. Рассмотрим следующее разложение дополнения к U_0 в W в объединение неприводимых компонент:

$$W \setminus U_0 = \bigcup_{j=1}^{k_1} W_j, \qquad Y' \setminus \pi^{-1}(U_0) = \bigcup_{j=1}^{k_1} Y'_j, \qquad \pi_j = \pi|_{Y'_j} \colon Y'_j \to W_j.$$

Применяя лемму 2.2.2 к каждому Y'_j и $\pi_j\colon Y'_j \to W_j$ и повторяя этот процесс, мы получаем разложение W на конечное число локально замкнутых аналитических подмножеств U_j таких, что выполнено:

$$W = \bigcup_{j=0}^{k} U_j, \qquad Y' = \bigcup_{j=0}^{k} Y'_j, \qquad Y'_j = \pi^{-1}(U_j).$$

При этом существуют разрешения особенностей $g_j\colon Y_j \to Y'_j$ такие, что каждый слой Y_ϕ индуцированного отображения

$$\pi \circ g_j\colon Y_j \to U_j$$

над $\phi \in U_j$ является гладкой моделью Y'_ϕ, и Y_ϕ вложено в M_ϕ, как в диаграмме 2.2.7. По построению, каждое отображение $\pi \circ g_j$ гладко, поэтому по теореме Эресмана оно дифференциально локально тривиально. Следовательно, мы видим, что для каждого n числа Бетти $b_n(Y_\phi)$ постоянны для любой $\phi \in U_j$. Поскольку имеется лишь конечное число U_j, мы заключаем, что числа Бетти Y_ϕ ограничены равномерно для каждого $\phi \in W$. Это завершает доказательство. □

2.3 Доказательство основных результатов

Мы используем обозначения раздела 2.1.2. Сначала докажем теорему 2.0.4 в простом случае, когда линейная система $|K_X|$ определяет плюриканоническое отображение.

Напомним, что для компактного гладкого (возможно, приводимого) равноразмерного комплексного пространства X можно обычным образом определить канонический класс K_X и векторные пространства голоморфных форм $\mathrm{H}^0(X, \mathcal{O}_X(K_X))$. Кроме того, в этой ситуации корректно определена группа бимероморфных самопреобразований $\mathrm{Bim}(X)$.

Утверждение 2.3.1. *Пусть X — компактное гладкое (возможно, приводимое) равноразмерного комплексное пространство. Пусть $g \in \mathrm{Bim}(X)$, и пусть β — собственное значение оператора g, действующего на*

$$\mathrm{H}^0(X, \mathcal{O}_X(K_X)).$$

Тогда степень расширения поля $[\mathbb{Q}(\beta) : \mathbb{Q}]$ ограничена числом Бетти

$$b_n(X) = \mathrm{rk}(\mathrm{H}^n(X, \mathbb{Z})/\mathrm{tors}),$$

где n — размерность X.

Доказательство. Рассмотрим отображение

$$\mathrm{H}^0(X, \mathcal{O}_X(K_X)) \hookrightarrow \mathrm{H}^n(X, \mathbb{C}) = (\mathrm{H}^n(X, \mathbb{Z})/\mathrm{tors}) \otimes \mathbb{C}, \tag{2.3.1}$$

являющееся инъективным по теореме де Рама. Известно, что любой элемент $g \in \mathrm{Bim}(X)$ действует как линейный оператор на $\mathrm{H}^n(X, \mathbb{Z})/\mathrm{tors}$, см., например, [Ue75, 14.3]. Поскольку естественное действие $g \in \mathrm{Bim}(X)$ на пространстве голоморфных форм согласовано с его действием на $\mathrm{H}^n(X, \mathbb{Z})/\mathrm{tors}$, мы заключаем, что β является алгебраическим целым числом, и $[\mathbb{Q}(\beta) : \mathbb{Q}]$ ограничена числом Бетти $b_n(X)$. □

Следствие 2.3.2. Пусть X — компактное комплексное многообразие размерности n. Если линейная система $|K_X|$ определяет плюриканоническое отображение, то как $\rho(\mathrm{Bim}(X))$, так и $\overline{\rho}(\mathrm{Bim}(X))$ имеют ограниченные конечные подгруппы.

Доказательство. Пусть $g \in \mathrm{Bim}(X)$, и пусть β — собственное значение оператора g, действующего на $\mathrm{H}^0(X, \mathcal{O}_Y(K_X))$. По утверждению 2.3.1 степень расширения поля $[\mathbb{Q}(\beta) : \mathbb{Q}]$ ограничена числом Бетти $b_n(X)$. Тогда из леммы 2.1.11 следует, что как $\rho(\mathrm{Bim}(X))$, так и $\overline{\rho}(\mathrm{Bim}(X))$ имеют ограниченные конечные подгруппы. □

Теперь мы переходим к доказательству теоремы 2.0.4 в общем случае.

Конструкция 2.3.3. Мы следуем [Ue75, 14.4]. Пусть X — комплексное многообразие, и пусть M' — тотальное пространство расслоения $\mathcal{O}_X(K_X)$, рассматриваемое как некомпактное комплексное многообразие. Пусть $\tau\colon M' \to X$ — естественная проекция. Тогда *m-плюриканоническое накрытие* многообразия X, ассоциированное с голоморфной m-формой

$$\phi \in \mathrm{H}^0(X, \mathcal{O}_X(mK_X)),$$

определяется как компактное комплексное подпространство Y'_ϕ в M', построенное следующим образом.

Пусть $\{U_i\}_{i\in I}$ — открытое покрытие X с локальными координатами $z_i^1, \dots, z_i^n$ на U_i. Локально на U_i мы можем записать

$$\phi = \phi_i(z_i^1, \dots, z_i^n)(dz_i^1 \wedge \dots \wedge dz_i^n)^{\otimes m},$$

где $\phi_i \in \mathcal{O}_X(U_i)$. Заметим, что M' допускает открытое покрытие $\{V_i\}_{i\in I}$, где $V_i = U_i \times \mathbb{C}$ с локальными координатами $z_i^1, \ldots, z_i^n, w_i$. Для каждого $i \in I$ определим замкнутое аналитическое подмножество $Y'_\phi \subset M'$ локально на V_i уравнениями

$$w_i^m = \phi_i(z_i^1, \ldots, z_i^n). \tag{2.3.2}$$

Замечание 2.3.4. Отметим, что комплексное пространство Y'_ϕ, построенное выше, может быть несвязным, приводимым и даже неприведенным. Однако по построению оно равноразмерно.

Для удобства читателя мы воспроизводим доказательство следующей леммы.

Лемма 2.3.5 ([Ue75, 14.4])**.** *Пусть X — компактное комплексное многообразие размерности n, и пусть m — такое число, что линейная система $|mK_X|$ определяет плюриканоническое отображение. Пусть*

$$\phi \in \mathrm{H}^0(X, \mathcal{O}_X(mK_X))$$

— собственный вектор элемента $g \in \mathrm{Bim}(X)$, действующего на пространстве $\mathrm{H}^0(X, \mathcal{O}_X(mK_X))$, с собственным значением α. Тогда степень расширения поля $[\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}]$ ограничена константой $C = C(X, \phi)$, зависящей только от X и ϕ, но не от g.

Более точно, можно взять $C = b_n(Y_\phi, \mathbb{Z})$, где $Y_\phi \subset M_\phi$ — произвольная вложенная гладкая модель m-канонического накрытия $Y'_\phi \subset M'$.

Доказательство. Пусть $f\colon Y'_\phi \to X$ — m-плюриканоническое накрытие многообразия X, ассоциированное с m-плюриформой ϕ, как в построении 2.3.3. Заметим, что Y'_ϕ вложено в тотальное пространство M' расслоения $\mathcal{O}_X(K_X)$. Определим голоморфную n-форму ψ на M' следующим образом. Пусть $\{U_i\}_{i\in I}$ — достаточно мелкое открытое покрытие X с локальными координатами $z_i^1, \ldots, z_i^n$ на U_i. Тогда M' допускает открытое покрытие $\{V_i\}_{i\in I}$, где $V_i = U_i \times \mathbb{C}$ с локальными координатами $z_i^1, \ldots, z_i^n, w_i$. Для каждого $i \in I$ в карте V_i положим

$$\psi = w_i dz_i^1 \wedge \ldots \wedge dz_i^n.$$

Правые части согласованы на пересечениях $V_i \cap V_j$, следовательно, они определяют глобальную голоморфную n-форму ψ на M'.

Заметим, что любое бимероморфное отображение $g \in \mathrm{Bim}(X)$ индуцирует бимероморфное отображение $g_{M'} \in \mathrm{Bim}(M')$. Точнее, если $g(U_i) \cap U_j \neq \emptyset$, то отображение

$$g_{M'}|_{V'_j} \colon V'_j = g^{-1}(g(U_i) \cap U_j) \times \mathbb{C} \to U_j \times \mathbb{C}$$

задается формулой

$$(z_i^1, \dots, z_i^n, w_i) \mapsto \left(g^1(z_i), \dots, g^n(z_i), \det \left(\frac{\partial (g^1(z_i), \dots, g^n(z_i))}{\partial (z_i^1, \dots, z_i^n)} \right)^{-1} w_i \right).$$

Определим биголоморфный автоморфизм $\mu_\beta \in \mathrm{Aut}(M')$, локально задаваемый формулой

$$\mu_\beta \colon (z_i^1, \dots, z_i^n, w_i) \mapsto (z_i^1, \dots, z_i^n, \beta w_i),$$

где $\beta \in \mathbb{C}$ удовлетворяет $\beta^m = \alpha$. Поскольку по предположению $g^*\phi = \alpha\phi$, получаем

$$\phi_i(g^1(z_i), \dots, g^n(z_i)) = \alpha \phi_i(z_i^1, \dots, z_i^n) \det \left(\frac{\partial (g^1(z_i), \dots, g^n(z_i))}{\partial (z_i^1, \dots, z_i^n)} \right)^{-m}.$$

Таким образом, из (2.3.2) в построении 2.3.3 следует, что отображение $h' = \mu_\beta \circ g_{M'}$ сохраняет Y'_ϕ, и, следовательно, h' индуцирует бимероморфный автоморфизм Y'_ϕ.

Рассмотрим произвольную вложенную гладкую модель Y_ϕ многообразия Y'_ϕ (она существует по [Wl08, Theorem 2.0.2]), где Y'_ϕ вложено в M', а Y_ϕ вложено в гладкое многообразие M. Обозначим соответствующее отображение как $f_2 \colon Y_\phi \to Y'_\phi$. Пусть $f_1 \colon Y'_\phi \to X$ — ограничение естественной проекции $\tau \colon M' \to X$ на $Y'_\phi \subset M'$. Наконец, положим

$$f = f_1 \circ f_2 \colon Y_\phi \to X.$$

Обозначим через ω голоморфную форму на Y_ϕ, полученную поднятием ψ на M и ограничением на Y_ϕ. Имеем

$$\omega^m = f^*\phi.$$

Напомним, что $g^*\phi = \alpha\phi$. Заметим, что бимероморфное отображение $h' = \mu_\beta \circ g_{M'}$ индуцирует бимероморфное отображение h на M. Поскольку, как указано выше, h' ограничивается до бимероморфного автоморфизма на Y'_ϕ, получаем, что h ограничивается до бимероморфного автоморфизма на Y_ϕ. Тогда

$$(\mu_\beta \circ g_{M'})^*\psi = \beta\psi, \qquad h^*(\omega) = \beta\omega.$$

Следовательно, β является собственным значением оператора h, действующего на $\mathrm{H}^0(Y_\phi, \mathcal{O}_{Y_\phi}(K_{Y_\phi}))$. Тогда по утверждению 2.3.1 степень расширения поля $[\mathbb{Q}(\beta) : \mathbb{Q}]$ ограничена числом Бетти $b_n(Y_\phi)$, и по построению Y_ϕ зависит только от X и ϕ. Поскольку $\beta^m = \alpha$, степень расширения поля $[\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}]$ также ограничена числом $b_n(Y_\phi)$. □

Конструкция 2.3.6. Пусть X — компактное комплексное многообразие. Следуя [Ue75, 14.10], построим его *глобальное m-плюриканоническое накрытие* Y' вместе с отображением $f\colon Y' \to X$. Его можно рассматривать как глобальную версию m-плюриканонического накрытия 2.3.3.

Пусть $\phi_0, \dots, \phi_N$ — базис векторного пространства $\mathrm{H}^0(X, \mathcal{O}_X(mK_X))$, и пусть

$$\mathbb{P}^N = \mathbb{P}(\mathrm{H}^0(X, \mathcal{O}_X(mK_X))).$$

Рассмотрим произведение $\mathbb{P}^N \times M'$, где M' — тотальное пространство расслоения $\mathcal{O}_X(K_X)$, рассматриваемое как некомпактное комплексное многообразие. Пусть $\{U_i\}_{i\in I}$ — достаточно мелкое открытое покрытие X с локальными координатами $z_i^1, \dots, z_i^n$ на U_i. Пусть

$$u_0, \dots, u_{k-1}, u_{k+1}, \dots, u_N$$

— локальные координаты на некоторой аффинной карте V_k в $\mathbb{P}^N$ для $0 \le k \le N$. Локально на U_i для любого $0 \le j \le N$ мы можем записать

$$\phi_j = \phi_{j,i}(z_1^i, \dots, z_n^i) dz_1^i \wedge \dots \wedge dz_n^i.$$

Мы определим Y' как (возможно, особое) аналитическое подпространство в $\mathbb{P}^N \times M'$, локально в $V_k \times U_i \times \mathbb{C}$ задаваемое уравнениями

$$w_i^m = u_1\phi_{0,i} + \dots + u_{k-1}\phi_{k-1,i} + \phi_{k,i} + u_{k+1}\phi_{k+1,i} + \dots + u_n\phi_{N,i},$$

где w_i — координата вдоль множителя $\mathbb{C}$. Эти уравнения согласованы на пересечениях карт и, следовательно, определяют аналитическое подпространство Y' в M'.

Замечание 2.3.7. Рассмотрим естественную проекцию

$$\pi\colon Y' \to \mathbb{P}^N,$$

индуцированную проекцией $\mathrm{pr}_1\colon \mathbb{P}^N \times M' \to \mathbb{P}^N$. Заметим, что для любого $\phi \in \mathrm{H}^0(X, \mathcal{O}_X(mK_X))$, если рассмотреть соответствующую точку $\phi \in \mathbb{P}^N$, то

$\pi^{-1}(\phi) \simeq Y'_\phi$, где Y'_ϕ — m-плюриканоническое накрытие, ассоциированное с m-формой ϕ, как в построении 2.3.3. Обратно, любое m-плюриканоническое накрытие Y'_ϕ, ассоциированное с m-формой ϕ, изоморфно $\pi^{-1}(\phi)$ для некоторой $\phi \in \mathbb{P}^N$. Отметим, что отображение π собственное и по построению его слои равноразмерны.

Теперь мы готовы доказать теорему 2.0.4. В отличие от теоремы 2.0.6, нам не требуется предположение, что X является мойшезоново многообразием.

Доказательство теоремы 2.0.4. Пусть X — компактное комплексное многообразие размерности n. Пусть m — такое число, что линейная система $|mK_X|$ определяет плюриканоническое отображение. Положим $V = \mathrm{H}^0(X, \mathcal{O}_X(mK_X))$. Мы собираемся доказать, что группы $\Gamma = \rho(\mathrm{Bim}(X)) \subset \mathrm{GL}(V)$ и $\Gamma' = \overline{\rho}(\mathrm{Bim}(X)) \subset \mathrm{PGL}(V)$ имеют ограниченные конечные подгруппы. По лемме 2.1.11 достаточно показать, что для любого $g \in \Gamma$ и для любого собственного значения α оператора g степень расширения поля $[\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}]$ ограничена некоторой константой, не зависящей от g и α.

По лемме 2.3.5 мы знаем, что $[\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}]$ ограничена числом Бетти $b_n(Y_\phi)$, где Y_ϕ — произвольная вложенная гладкая модель m-плюриканонического накрытия Y'_ϕ, ассоциированного с ϕ, как в построении 2.3.3. Следовательно, достаточно найти вложенные гладкие модели Y'_ϕ такие, что числа Бетти $b_n(Y_\phi)$ равномерно ограничены для любого

$$\phi \in \mathrm{H}^0(X, \mathcal{O}_X(mK_X)).$$

Для этого применим лемму 2.2.3 к глобальному m-плюриканоническому накрытию $f\colon Y' \to X$, как в построении 2.3.6. Точнее, в обозначениях леммы 2.2.3 положим $\mathbb{P}^N = W$ и $\pi\colon Y' \to W$, чтобы заключить, что числа Бетти вложенных гладких моделей $Y_\phi \subset M_\phi$ для $Y'_\phi \subset M'$ ограничены для любого ϕ. Это завершает доказательство. □

Следующий пример показывает, что группа $\rho(\mathrm{Bim}(X))$ компактного комплексного многообразия X может быть бесконечной.

Пример 2.3.8. Согласно [MS08], существует неалгебраическая K3 поверхность X, допускающая несимплектический автоморфизм бесконечного порядка, действующий на голоморфную 2-форму умножением на комплексное

число бесконечного порядка. Следовательно, $\rho(\mathrm{Bim}(X))$ не является конечной группой. Заметим также, что согласно [Ue75, Remark 14.6], существует трехмерный комплексный тор, для которого группа $\rho(\mathrm{Bim}(X))$ бесконечна.

Для доказательства теоремы 2.0.2 мы используем следующие технические результаты.

Лемма 2.3.9 ([PrSh21b, Lemma 2.9]). *Пусть X и Y — компактные комплексные многообразия, и пусть $\sigma\colon X \dashrightarrow Y$ — доминантное мероморфное отображение. Предположим, что $\kappa(X) \geq 0$. Пусть F — типичный слой отображения σ, и пусть F' — неприводимая компонента F. Тогда $\kappa(F') \geq 0$.*

Лемма 2.3.10 ([PrSh21b, Lemma 3.2]). *Пусть X и Y — компактные комплексные многообразия, и пусть $\sigma\colon X \dashrightarrow Y$ — доминантное мероморфное отображение. Пусть F — типичный слой отображения σ. Предположим, что для любой неприводимой компоненты F' слоя F группа $\mathrm{Bim}(F')$ является жордановой. Предположим также, что отображение σ эквивариантно относительно действия группы $\mathrm{Bim}(X)$, и что образ $\mathrm{Bim}(X)$ в $\mathrm{Bim}(Y)$ имеет ограниченные конечные подгруппы. Тогда группа $\mathrm{Bim}(X)$ является жордановой.*

Теперь мы готовы доказать теорему 2.0.2.

Доказательство теоремы 2.0.2. Пусть X — компактное комплексное многообразие размерности n с $\kappa(X) \geq n-2$. Пусть F — типичный слой плюриканонического отображения. Тогда, согласно разделу 2.1.2, мы можем считать, что F неприводимо и гладко. По лемме 2.3.9 имеем $\kappa(F) \geq 0$. По предположению $\dim F \leq 2$. Рассмотрим два случая. Первая возможность: $\dim F \leq 1$, и тогда $\mathrm{Bim}(F) = \mathrm{Aut}(F)$, очевидно, является жордановой. Вторая возможность: $\dim F = 2$, и поскольку $\kappa(F) \geq 0$, то F не бимероморфно произведению $\mathbb{P}^1$ и некоторой кривой. Следовательно, по [PrSh21, Theorem 1.7] группа $\mathrm{Bim}(F)$ является жордановой. Поскольку по теореме 2.0.4 группа $\rho(\mathrm{Bim}(X))$ имеет ограниченные конечные подгруппы, применяя лемму 2.3.10, заключаем, что $\mathrm{Bim}(X)$ является жордановой. □

Таким образом, мы сразу получаем следствие 2.0.3.

Доказательство следствия 2.0.5. Пусть X — компактное комплексное многообразие размерности n с $\kappa(X) \geq n-3$. По теореме 2.0.2 достаточно рассмотреть случай $\kappa(X) = n-3$. По лемме 2.3.9 типичный слой F является трехмерным кэлеровым многообразием, и по теореме 2.0.1 группа $\mathrm{Bim}(F)$ является жордановой. По теореме 2.0.4 образ проективного плюриканонического представления $\overline{\rho}(\mathrm{Bim}(X))$ имеет ограниченные конечные подгруппы. Применяя лемму 2.3.10 к плюриканоническому отображению, заключаем, что $\mathrm{Bim}(X)$ является жордановой. □

Глава 3

Корегулярность гладких трехмерных многообразий Фано

В этой главе мы работаем над полем комплексных чисел. Мы вычисляем корегулярность гладких многообразий Фано размерности 3. Мы используем обозначения для классификации гладких трехмерных многообразий Фано, как в [IP99], см. также таблицу 3.13. Наш основной результат таков:

Теорема 3.0.1. *Пусть X — гладкое трехмерное многообразие Фано. Положим*

$$\aleph = \{1.1, 1.2\}, \qquad \beth = \{1.3, 1.4\}, \qquad \gimel = \{1.5\},$$

$$\daleth = \{1.6, 1.7, 1.8, 1.9, 1.10, 1.11, 2.1, 10.1\}.$$

Тогда верно следующее.

1. *Если X — любое гладкое трехмерное многообразие Фано, принадлежащее любому семейству, кроме семейств из $\aleph, \beth, \gimel, \daleth$, то* $\operatorname{coreg}(X) = 0$,
2. *Если X — общий элемент в одном из семейств $\aleph$, то* $\operatorname{coreg}(X) \geq 1$,
3. *Если X — общий элемент в одном из семейств $\beth$, то* $\operatorname{coreg}_1(X) = 2$,
4. *Если X — общий элемент в семействе $\gimel$, то* $\operatorname{coreg}(X) \leq 1$,
5. *Если X — общий элемент в одном из семейств $\daleth$, то* $\operatorname{coreg}(X) = 0$.

Следовательно, для 100 из 105 семейств гладких трехмерных многообразий Фано общий элемент в семействе имеет корегулярность 0; более того, для 92 семейств из этих 100 любой элемент в семействе имеет корегулярность 0; для оставшихся 5 семейств мы получаем некоторые частичные результаты. А именно, для семейств из ℵ, то есть для двулистного накрытия проективного пространства, разветвленного в секстике, и для квартики мы показываем, что общий элемент в семействе имеет корегулярность не менее 1. Для семейств из ⊐, то есть для пересечения квадрики и кубики и пересечения трех квадрик, наши методы позволили вычислить только первую регулярность reg_1. Наконец, для общего многообразия Фано в семействе ℶ, то есть для общего многообразия Фано рода 6, мы доказываем, что корегулярность не более 1.

В [Ka20, Пример 3.1] показано, что для специальной квартики X существует граница D такая, что $\mathrm{coreg}(X, D) = 0$. Вместе с утверждением 3.1.5 это показывает, что корегулярность не является ни полунепрерывной сверху, ни полунепрерывной снизу в семействах многообразий Фано.

Из теоремы 3.0.1 вытекает следующий результат.

Следствие 3.0.2. Пусть X — гладкое трехмерное многообразие Фано. Если $(-K_X)^3 \geq 12$, то для общего X имеем $\mathrm{coreg}(X) = 0$. Если $(-K_X)^3 \geq 24$, то для любого X имеем $\mathrm{coreg}(X) = 0$.

Мы не знаем, точны ли оценки в следствии 3.0.2. Наши вычисления показывают, что во многих случаях вторая регулярность $\mathrm{reg}_2(X)$ (см. определение 1.3.28) равна 0 для общих элементов в семействах ⊐. По теореме 3.1.1 это означает, что корегулярность положительна для общих элементов этих семейств. Однако мы не знаем, как вычислить корегулярность для общего элемента в семействе ℶ. Следующая задача была предложена В.В. Шокуровым:

Задача 3.0.3. Для любого $i \geq 0$ найти (разумную) функцию $f_i \colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ со следующим свойством. Предположим, что X — klt многообразие Фано размерности n и выполнено неравенство $(-K_X)^n > f_i(n)$. Тогда $\mathrm{coreg}(X) \leq i$.

Для доказательства теоремы 3.0.1 мы используем следующую стратегию. В случаях, когда корегулярность равна 0, мы явно строим антиканонический граничный дивизор, который ее реализует. Оказывается, это нетрудно сделать в случае, когда либо индекс, либо число Пикара данного трехмерного многообразия Фано не меньше двух. Поэтому наиболее интересными многообразиями являются трехмерные многообразия Фано основной серии, то есть

многообразия Фано индекса 1 и ранга Пикара 1. В этом случае мы применяем метод двойной проекции, восходящий к Исковских, который дает естественное бирациональное преобразование в другое, более простое, трехмерное многообразие Фано. Это позволяет построить границу корегулярности 0 на этом более простом многообразии Фано и затем перенести ее обратно на наше исходное многообразие. Некоторая неожиданность состоит в том, что, в отличие от случая поверхностей дель Пеццо, корегулярность не всегда равна 0 для общего элемента во всех семействах трехмерных многообразий Фано. Чтобы показать это, мы используем следующий ключевой результат

Теорема 3.0.4 ([FMMP25, Теорема 4]). *Если X — гладкое многообразие Фано с* $\operatorname{coreg}(X) = 0$*, то либо* $\operatorname{coreg}_1(X) = 0$*, либо* $\operatorname{coreg}_2(X) = 0$.

Другими словами, если корегулярность равна 0, то она реализуется либо на элементах антиканонической, либо би-антиканонической линейной системы. Таким образом, чтобы показать, что корегулярность больше или равна 1, достаточно проанализировать особенности элементов, принадлежащих из этим двум линейным системам. Доказательство теоремы 3.0.1 суммировано в таблице 3.13. Мы предлагаем следующий

Вопрос 3.0.5. Пусть X — гладкое многообразие Фано. Верно ли, что $\operatorname{reg}(X) = \operatorname{reg}_1(X)$?

Из теоремы 3.0.1 следует, что ответ на этот вопрос положителен для всех гладких трехмерных многообразий Фано, не принадлежащих семействам №, №, №, №, а также для общих трехмерных многообразий Фано в семействах №.

Зеркальная симметрия. Одной из основных мотиваций для изучения корегулярности, в частности, 1-корегулярности, является ее недавнее появление как важного ингредиента в теории зеркальной симметрии и связанных с ней гипотезах. Упомянем основные конструкции и гипотезы, связанные с корегулярностью.

Изначально данные, необходимые для построения зеркального партнера для гладкого многообразия Фано, — это комплексная структура и класс симплектической формы, или, что эквивалентно, класс дивизора. Обычно подразумевается, что выбирается антиканонический дивизор. Двойственным объектом для многообразия Фано X является модель Ландау–Гинзбурга (Y, w) — некоторое семейство гладких многообразий Калаби–Яу, параметризован-

ное аффинной прямой. Напомним, что гипотеза гомологической зеркальной симметрии предсказывает, что ограниченная производная категория когерентных пучков $\mathcal{D}^b_{coh}(X)$ эквивалентна категории Фукая–Зайделя $FS(Y,w)$ двойственной модели Ландау–Гинзбурга. Это, в частности, означает, что гомологии Хохшильда $HH_\bullet(\mathcal{D}^b_{coh}(X))$ и $HH_\bullet(FS(Y,w))$ изоморфны. Более того, этот изоморфизм отождествляет функторы Серра, действующие на этих пространствах. Логарифм функтора Серра, действующего на гомологии Хохшильда производной категории когерентных пучков (которые изоморфны когомологиям), действует, с точностью до знака, умножением на канонический класс. Поскольку X — многообразие Фано, это умножение является оператором Лефшеца. С другой стороны, функтор Серра, действующий на $FS(Y,w)$, индуцирует оператор на относительных когомологиях $H^\bullet(Y,V)$, где V — гладкий слой w. Этот оператор является обратным к монодромии. Таким образом, монодромия должна быть максимально унипотентной. Это оправдывает ожидание, что семейство Y над $\mathbb{A}^1$ можно компактифицировать до семейства многообразий Калаби–Яу (Z,u) над $\mathbb{P}^1$, слой которого над бесконечностью D является антиканоническим классом Z и дивизором, на котором достигается нулевая корегулярность Z, ср. также [KX16, Вопрос 7]. Подробнее см. в [KKP17] и в [LP18]. В случае поверхностей дель Пеццо этот факт доказан в [AKO06], см. также [Prz17]. В трехмерном случае это доказано в [Prz17]: здесь мы имеем вырождение поверхностей K3 типа III по Куликову. Отметим, что есть два слегка различных условия на слой над бесконечностью. В [KKP17] авторы требуют, чтобы он был snc, так что корегулярность достигается на нем, и такая компактификация называется *ручной*. Для *лог Калаби–Яу компактификации* (см. [Prz17]) такого требования нет, и корегулярность может достигаться на лог разрешении, как в случае [ChP22, Пример 1.9]. Заметим, что согласно [Prz22] лог многообразие Калаби–Яу компактификация Z может быть особым над бесконечностью, так что нужно рассматривать (Z,D) как особую пару Калаби–Яу. Отметим также, что в [ChP22] высказана гипотеза, что число компонент дивизора D на Z равно $\dim|-K_X|$. Таким образом, представляет интерес следующая задача: связать число компонент дивизора, на котором достигается корегулярность, с геометрией зеркального партнера многообразия в общем случае.

Вернемся к основам зеркальной симметрии. Для гладкого компактного n-мерного многообразия Калаби–Яу X она предсказывает существование дру-

гого гладкого компактного n-мерного многообразия Калаби–Яу Y такого, что для любых p, q выполнено $h^{p,q}(X) = h^{n-p,q}(Y)$. Чтобы сделать аналогичное утверждение для соответствия Фано–Ландау–Гинзбурга, нужно определить аналоги чисел Ходжа для моделей Ландау–Гинзбурга. Это сделано в [KKP17], см. также [LP18]. Для конструкции зеркальной симметрии снова нужен только антиканонический класс. Однако недавнее уточнение зеркальной симметрии имеет дело не только с антиканоническим классом, но с конкретным антиканоническим дивизором. Это позволяет связать не просто числа Ходжа двойственных многообразий и моделей Ландау–Гинзбурга, но их смешанные структуры Ходжа, включая весовые фильтрации. Вот где понятие корегулярности появляется в зеркальной симметрии на стороне Фано. Опишем эту связь более точно.

Рассмотрим гладкое многообразие Фано X вместе с антиканоническим snc дивизором $D = D_1 + \ldots + D_r$ и открытое многообразие Калаби–Яу $U = X \setminus D$. Тогда гомотопический тип двойственного комплекса D является инвариантом U. Также группы гомологий двойственного комплекса D определяют часть канонической смешанной структуры Ходжа-Делиня веса 0 на группах когомологий U с компактным носителем. Заметим, что размерность k максимальной клетки двойственного комплекса есть глубина весовой фильтрации на смешанной структуре Ходжа.

С другой стороны, гипотеза зеркальной симметрии предсказывает существование зеркально двойственного открытого многообразия Калаби–Яу $U^\vee$. Можно также определить смешанную структуру Ходжа-Делиня для $U^\vee$. Более того, можно рассмотреть отображения аффинизации $U \to \mathrm{Spec}\,(\mathbb{C}[U])$ и $U^\vee \to \mathrm{Spec}\,(\mathbb{C}[U^\vee])$ и *превратные фильтрации Лере*, определенные этими отображениями, см. [CM10, HKP20]. При некоторых естественных предположениях глубина этой фильтрации для $U^\vee$ равна k, см. [HKP20, Замечание 1.4]. Более того, *зеркальная гипотеза* $P{=}W$ утверждает, что размерности ассоциированных градуированных факторов для весовой фильтрации для U соответствуют размерностям ассоциированных градуированных факторов для перверсной фильтрации Лере для $U^\vee$, и наоборот. Более подробные формулировки см. в [HKP20]. Таким образом, наиболее интересен (скажем, с точки зрения подсчета исчезающих лагранжевых циклов) случай, когда размерность базы $U^\vee \to \mathrm{Spec}\,(\mathbb{C}[U^\vee])$ максимально возможна, что по зеркальной симметрии соответствует случаю, когда двойственный комплекс D

для многообразия Фано X имеет максимально возможную размерность, и, следовательно, корегулярность X равна 0. Теорема 3.0.1 показывает, что это выполняется для почти всех трехмерных многообразий Фано.

Вопрос 3.0.6. Возможно ли обобщить конструкцию превратной фильтрации Лере и зеркальной гипотезы P=W на лог канонические пары?

Ответы на вопрос 3.0.5 и вопрос 3.0.6 могут быть интересны для программы Гросса–Зиберта построения зеркальных двойников многообразий Фано (см. [GS19]). Напомним, что эта программа предлагает строить зеркало многообразия Фано X как спектр определенного кольца, размерность Крулля которого равна числу компонент разложения антиканонического дивизора с простыми нормальными пересечениями. Однако, в частном сообщении М. Гросс предположил, что этот подход можно обобщить и это кольцо можно построить по лог разрешению антиканонического дивизора на деформации X, так что размерность кольца равна первой регулярности деформации.

Наконец, напомним, что идея, стоящая за зеркальным соответствием между многообразиями Фано и моделями Ландау–Гинзбурга, — это зеркальная двойственность между антиканоническими сечениями многообразия Фано и слоями его модели Ландау–Гинзбурга; другими словами, между определенными семействами многообразий Калаби–Яу. Наиболее распространенные способы построения моделей Ландау–Гинзбурга — это либо вырождение многообразий Фано в многообразия корегулярности 0, обычно торические (см. [Prz18]), либо вырождение антиканонических многообразий Калаби–Яу в нормальные пересечения приводимых многообразий (*пределы больших комплексных структур* или *максимальные вырождения*). Последний подход является основой гипотезы SYZ (рассматривающей зеркальные партнеры как расслоения на двойственные специальные лагранжевы торы) и программы Гросса–Зиберта, упомянутой выше. (Конечно, эти подходы близки друг к другу, потому что мы можем рассматривать тотальное пространство вырождения Калаби–Яу как деформацию многообразия Фано, чья корегулярность равна 0.) Другие связи корегулярности и зеркальной симметрии можно найти в [Mo24, Раздел 4.9] и [FMM22].

3.1 Поверхности дель Пеццо

Мы вычислим корегулярность гладких поверхностей дель Пеццо, то есть гладких многообразий Фано размерности 2. Под степенью гладкой поверхности дель Пеццо X мы понимаем число $d = (-K_X)^2$. Хорошо известно, что $1 \leq d \leq 9$. Начнем с некоторых результатов, которые будут важны для нас в дальнейшем.

Теорема 3.1.1 ([FMMP25, Theorem 4]). *Пусть X — гладкое многообразие Фано. Тогда* $\operatorname{coreg}(X) = 0$ *эквивалентно тому, что* $\operatorname{coreg}_1(X) = 0$ *или* $\operatorname{coreg}_2(X) = 0$.

Утверждение 3.1.2 ([Mo24, Предложение 3.28]). *Пусть $\phi\colon X \to Y$ — расслоение. Предположим, что X является многообразием типа Фано (это выполнено, например, если X — многообразие Фано). Тогда* $\operatorname{coreg}(X) \geq \operatorname{coreg}(Y)$. *В частности, если* $\operatorname{coreg}(X) = 0$, *то* $\operatorname{coreg}(Y) = 0$.

Теорема 3.1.3 ([Mo24, Теорема 3.2]). *Пусть X — гладкая поверхность дель Пеццо степени $d \geq 2$. Тогда* $\operatorname{coreg}(X) = 0$.

Доказательство. Сначала покажем, что для $d \geq 2$ в линейной системе $|-K_X|$ всегда существует нодальная кривая. Действительно, раздуем $d-2$ общих точек на X, получим морфизм $f\colon X' \to X$, где X' — поверхность дель Пеццо степени 2. Антиканоническая линейная система $|-K_{X'}|$ определяет двулистное накрытие $g\colon X' \to \mathbb{P}^2$, разветвленное вдоль гладкой квартики $C' \subset \mathbb{P}^2$. Прообраз $g^{-1}(L')$ общей касательной прямой L' к C' является нодальной кривой в $|-K_{X'}|$. Тогда $C = f(C')$ — искомая нодальная кривая на X. Раздувая нод кривой C на X, мы получаем границу, которая вычисляет корегулярность 0 на X. □

Замечание 3.1.4. Покажем, что на общей поверхности дель Пеццо X степени 1 существует элемент C в $|-K_X|$, являющийся нодальной кривой. Действительно, поскольку это условие открыто в пространстве всех поверхностей дель Пеццо степени 1, достаточно показать, что существует поверхность дель Пеццо X степени 1, такая что все 12 особых элементов в $|-K_X|$ являются нодальными кривыми. Такая поверхность задается уравнением

$$X = \{w^2 + z^3 + zf_4(x, y) + f_6(x, y) = 0\} \subset \mathbb{P}(1, 1, 2, 3), \tag{3.1.1}$$

где (x, y, z, w) — координаты с весами $(1, 1, 2, 3)$, многочлены f_4 и f_6 общие и однородные степени 4 и 6 соответственно.

С другой стороны, существуют поверхности дель Пеццо степени 1, такие что $|-K_X|$ содержит либо гладкие, либо каспидальные кривые. Действительно, рассмотрим семейство поверхностей

$$X = \{w^2 + z^3 + f_6(x, y) = 0\} \subset \mathbb{P}(1, 1, 2, 3),$$

где $f_6(x, y)$ — общий однородный многочлен степени 6. Тогда $|-K_X|$ имеет ровно 6 особых элементов, каждый из которых является каспидальной кривой.

Утверждение 3.1.5. *Общая поверхность дель Пеццо степени* 1 *имеет корегулярность* 0. *Для специальной поверхности дель Пеццо* X *степени* 1 *имеет место* $\mathrm{reg}_1(X) = 0$ *и* $\mathrm{reg}_2(X) = 0$. *Как следствие,* $\mathrm{coreg}(X) = 1$.

Доказательство. Пусть X — общая поверхность дель Пеццо степени 1. По замечанию 3.1.4, существует нодальная кривая $C \in |-K_X|$. Тогда ясно, что пара (X, C) является логканонической. Раздувая нод, получаем пару $(Y, C' + E)$, для которой $\mathrm{coreg}(Y) = 0$.

Теперь пусть X — любая поверхность дель Пеццо степени 1. Предположим, что в $|-K_X|$ нет нодальной кривой. Докажем, что в этом случае $\mathrm{coreg}(X) = 1$. Заметим, что X является раздутием проективной плоскости в 8 точках в общем положении[1]. Собственный прообраз кубической кривой, проходящей через все эти точки, является 1-дополнением, поэтому регулярность поверхности дель Пеццо степени 1 не меньше 0.

В силу теоремы 3.1.1 нам нужно изучить только 1- и 2-дополнения на X. Пусть B — граница, такая что (X, B) — пара Калаби-Яу и $2(K_X + B) \sim 0$. Пусть $\pi\colon X \to \mathbb{P}^2$ — раздутие 8 точек, и пусть B_2 — образ B. Тогда $2(K_{\mathbb{P}^2} + B_2) \sim 0$ и $K_X + B = \pi^*(K_{\mathbb{P}^2} + B_2)$. Таким образом, B_2 имеет кратность не меньше 1 в каждой точке, раздуваемой π.

Сначала рассмотрим случай, когда B является 1-дополнением. Если B_2 — сумма трех прямых, то каждая прямая содержит не более двух раздуваемых точек, так что всего их 6. Поскольку B — эффективный дивизор, этот случай

[1]то есть никакие три из них не лежат на одной прямой, никакие шесть не лежат на конике и не существует кубической кривой, проходящей через все точки и имеющей особенность в одной из них

невозможен. Если B_2 — сумма прямой и коники, то коника содержит не более 5 раздутых точек, а всего их 7. Таким образом, этот случай также невозможен. Наконец, если B_2 — кубическая кривая, то кратность B_2 в раздуваемых точках равна 1, и B является собственным прообразом B_2. Поскольку пара (X, B) логканонична, это показывает, что B гладкая. Имеем $\mathrm{reg}_1(X) = 0$.

Теперь рассмотрим случай, когда B — 2-дополнение (не являющееся 1-дополнением). Это означает, что все коэффициенты B_2 — положительные числа вида $\frac{a}{2}, a \in \mathbb{N}$. Предположим, что один из этих коэффициентов больше $\frac{1}{2}$. Тогда мы имеем $B_2 = C + B_3$, где C — кривая степени 2 или 1, а B_3 не является $\mathbb{Z}$-дивизором. Если $\deg C = 2$, то $B_3 = \frac{1}{2}C_2$, где C_2 — коника (возможно, приводимая). Кривая C содержит не более 5 раздутых точек, и в любом случае дивизор B_3 не может иметь кратность 1 в трех оставшихся точках. Поскольку B — эффективный дивизор, этот случай невозможен.

Если $\deg C = 1$, то C содержит не более двух раздуваемых точек, и B_3 должен иметь кратность не меньше 1 в шести оставшихся точках. Пусть C_2 — коника, проходящая через пять из них. Если C_2 не является компонентой B_3, то $4 = B_3 \cdot C_2 \geq 5$, противоречие. Таким образом, $B_3 = \frac{1}{2}C_2 + B_4$. Но тогда $2 = B_4 \cdot C_2 \geq \frac{5}{2}$, противоречие.

Итак, мы знаем, что $B_2 = \frac{1}{2}B_3$, где B_3 — приведенный дивизор степени 6. Мы знаем, что B_3 особа в каждой раздуваемой точке (и, возможно, где-то еще). Если все особенности B_2 являются двойными точками, то B — собственный прообраз B_2, пара (X, B) dlt и $\mathcal{D}(X, B)$ пусто.

Предположим, что B_3 содержит две раздуваемые точки кратности 3 или раздуваемую точку кратности 4. Тогда мы можем рассмотреть кубическую кривую C, проходящую через все раздуваемые точки и общую точку B_3. Если C не является компонентой B_3, то имеем $18 = C \cdot B_3 \geq 19$, что невозможно. Значит, в этом случае B_3 является объединением двух кубических кривых B' и B'', проходящих через раздуваемые точки. Тот же аргумент легко исключает случай по крайней мере 9 особых точек, таких что одна из них по крайней мере тройная.

Итак, у нас остается последний случай: B_3 имеет одну тройную точку и 7 двойных точек. Тогда $B = \frac{1}{2}(\widetilde{B} + E)$, где $\widetilde{B}$ — собственный прообраз B_3, а E — исключительный дивизор над тройной точкой. Существует кривая $C \in |-K_X|$, проходящая через точку пересечения $\widetilde{B}$ и E. Тогда можно вычислить, что $1 = C \cdot \widetilde{B}$, так что любая такая точка B является двойной точкой. Таким

образом, снова пара (X, B) dlt и $\mathcal{D}(X, B)$ пусто.

Теперь теорема 3.1.1 влечет, что $\operatorname{coreg}(X) = 1$. □

Теорема 3.1.3 и утверждение 3.1.5 влекут, что общая гладкая поверхность дель Пеццо имеет корегулярность 0.

Следствие 3.1.6. Пусть $X = \mathbb{P}^1 \times S$, где S — гладкая поверхность дель Пеццо степени не менее 2. Тогда $\operatorname{coreg}(X) = 0$.

Доказательство. Пусть p_1, p_2 — две различные точки на $\mathbb{P}^1$, и пусть C — нодальная антиканоническая кривая на S, существующая по доказательству теоремы 3.1.3. Пусть $p \in C$ — нод. Положим $D = D_1 + D_2 + D_3$, где $D_1 = p_1 \times S$, $D_2 = p_2 \times S$, $D_3 = \mathbb{P}^1 \times C$. Тогда $K_X + D \sim 0$, пара (X, D) логканонична, и раздувая $\mathbb{P}^1 \times p$ на X, мы видим, что $\dim \mathcal{D}(X, D) = 2$, и поэтому $\operatorname{coreg}(X) = 0$. □

Аналогично получаем

Следствие 3.1.7. Пусть $X = \mathbb{P}^1 \times S$, где S — гладкая поверхность дель Пеццо степени 1. Тогда для общей S, и следовательно для общего X, мы имеем $\operatorname{coreg}(X) = 0$.

Пусть $X = \mathbb{P}^1 \times S$, где S — гладкая поверхность дель Пеццо степени 1. Тогда утверждение 3.1.2, примененное к расслоению $X = \mathbb{P}^1 \times S \to S$, и утверждение 3.1.5 влекут, что для специального X имеет место $\operatorname{coreg}(X) = 1$.

Рассмотрим теперь случай особых поверхностей дель Пеццо. В этом случае нами получены следующие результаты. Начнем с переформулировки утверждения 3.1.5.

Утверждение 3.1.8. *Пусть X — гладкая поверхность дель Пеццо X. Тогда либо* $\operatorname{coreg}(X) = 0$*, либо выполнены следующие эквивалентные условия:*

- $(-K_X)^2 = 1$ *и эллиптическое расслоение ϕ_Y изотривиально,*
- *все гладкие элементы в линейной системе $|-K_X|$ изоморфны,*
- $\operatorname{coreg}(X) = 1$.

Утверждение 3.1.8 показывает, что корегулярность многообразия Фано X связана с вариацией гладких элементов в $|-K_X|$. Напомним, что для поверхности дель Пеццо X с $(-K_X)^2 \geqslant 3$ верно, что $-K_X$ очень обилен и задает вложение $X \subset \mathbb{P}^d$, где $d = (-K_X)^2$. Следовательно, из утверждения 3.1.8 вытекает, что задача вычисления корегулярности связана с классической задачей

изучения проективных многообразий, у которых все гладкие гиперплоские сечения изоморфны. Сформулируем следующий результат (мы обозначаем через $\mathrm{Sing}(X)$ множество всех особых точек X).

Теорема 3.1.9. *Пусть X — поверхность дель Пеццо с дювалевскими особенностями степени $d = (-K_X)^2$. Если $d \geqslant 2$, то*

$$\mathrm{coreg}(X) = \mathrm{coreg}_1(X) = 0.$$

Если $d = 1$, обозначим ассоциированное эллиптическое расслоение через $\phi_Y \colon Y \to \mathbb{P}^1$. Тогда имеем $\mathrm{coreg}(X) = 0$ тогда и только тогда, когда выполнено одно из следующих условий:

- *ϕ_Y не изотривиально,*
- *ϕ_Y изотривиально и*

$$\mathrm{Sing}(X) \in \{2D_4, D_4 + 2A_1\}.$$

Иначе $\mathrm{coreg}(X) = 1$.

Теорема 3.1.9 подтверждает ожидание, что «большинство» многообразий Фано имеют корегулярность 0. Определение первой корегулярности $\mathrm{coreg}_1(X)$ приведено в определении 1.3.28. Также существует версия теоремы 3.1.9, сформулированная в терминах конфигурации особенностей $\mathrm{Sing}(X)$.

Теорема 3.1.10. *Пусть X — поверхность дель Пеццо с дювалевскими особенностями степени* 1. *Тогда*

- *либо* $\mathrm{coreg}(X) = 1$, *и X имеет одну из следующих конфигураций особых точек:*
  - $\mathrm{Sing}(X) \in \{E_8, E_7 + A_1, E_6 + A_2\}$, *и* $\rho(X) = 1$, *или*
  - $\mathrm{Sing}(X) \in \{E_6, D_4 + A_2, D_4, 3A_2, 2A_2, A_2, 4A_1, \varnothing\}$, *и* $\rho(X) > 1$,
- *либо* $\mathrm{coreg}(X) = 0$.

При этом поверхности с конфигурациями особых слоев, описанными в теореме 3.1.10, также могут иметь корегулярность 0. Мы приведем примеры таких поверхностей с числом Пикара 1. С другой стороны, мы ожидаем, что такие поверхности с корегулярностью 0 существуют и в случае, когда число Пикара больше 1. Также отметим, что «большинство» поверхностей дель

Пеццо с дювалевскими особенностями имеют корегулярность 0. Например, в случае числа Пикара 1 существует 27 возможных конфигураций особых точек на поверхности дель Пеццо с дювалевскими особенностями произвольной степени, однако только для 4 таких конфигураций существует поверхность X с $\operatorname{coreg}(X) = 1$.

Отметим, что на поверхности дель Пеццо X с дювалевскими особенностями степени 1 элемент из $|-K_X|$ приведен, неприводим и может содержать только одну особую точку X. Соответствие между особыми точками X и особыми слоями ϕ_Y в этом случае описано в таблице 1. Отметим, что это соответствие не биективно. Однако, используя это соответствие, можно переформулировать теорему 3.1.10 в терминах особых слоев эллиптического расслоения ϕ_Y. Мы используем обозначения классификации Кодаиры особых слоев эллиптических расслоений. Через j мы обозначаем j-инвариант слоев ϕ_Y, который является функцией на базе $\mathbb{P}^1$.

Теорема 3.1.11. *Пусть X — поверхность дель Пеццо с дювалевскими особенностями степени 1. Тогда $\operatorname{coreg}(X) = 1$ тогда и только тогда, когда эллиптическое расслоение ϕ_Y изотривиально и имеет одну из следующих конфигураций особых слоев:*

$$j = 0: \quad II + II^*, \;\; IV + IV^*, \;\; 2II + IV^*, \;\; II + IV + I_0^*,$$

$$3II + I_0^*, \;\; 3IV, \;\; 2II + 2IV, \;\; 4II + IV, \;\; 6II;$$

$$j = 1728: \quad III + III^*, \quad 4III.$$

В частности, $\operatorname{coreg}(X) = 1$ и $\rho(X) = 1$ тогда и только тогда, когда особые слои ϕ_Y имеют одну из следующих конфигураций:

$$II + II^*, \qquad III + III^*, \qquad IV + IV^*. \tag{3.1.2}$$

Теорема 3.1.12. *Пусть X — поверхность дель Пеццо с дювалевскими особенностями. Тогда $\operatorname{coreg}_1(X) = 1$ (что равносильно отсутствию торической модели у X) тогда и только тогда, когда $(-K_X)^2 = 1$ и выполнено одно из следующих условий:*

1. *либо ϕ_Y изотривиально,*
2. *либо X изоморфна одной из поверхностей*

$$X_1'(D_5 + A_1), \quad \text{или} \quad X_1'(D_6), \tag{3.1.3}$$

для которых существует явное описание. Для поверхностей (3.1.3) *соответствующее эллиптическое расслоение ϕ_Y не является изотривиальным,* $\operatorname{coreg}_1(X) = 1$ *и* $\operatorname{coreg}(X) = \operatorname{coreg}_2(X) = 0$.

3.2 Теория особенностей

Сначала мы вспомним некоторые факты из теории особенностей поверхностей. Согласно классификации (см., например, [KM98]), строго логканонические горенштейновы особенности поверхностей являются либо простыми эллиптическими особенностями, либо каспидальными особенностями. Напомним, что нормальная поверхность D имеет *простую эллиптическую особенность* в точке $0 \in D$, если D строго логканонична в 0 и на минимальном разрешении $f\colon \widetilde{D} \to D$ прообраз 0 является гладкой эллиптической кривой. Классификация показывает, что для простой эллиптической особенности либо $\operatorname{mult}_0 D \geq 3$, либо после аналитической замены координат локальное уравнение $0 \in D$ имеет вид

$$x_1^2 + q(x_2, x_3) = 0 \qquad \text{или} \qquad x_1^2 + x_2^3 + a x_2 x_3^4 + b x_3^6 = 0, \tag{3.2.1}$$

где q однородна степени 4, и $a, b \in \mathbb{C}$.

Нормальная поверхность D имеет *каспидальную особенность* в точке $0 \in D$, если D строго логканонична в D и на минимальном разрешении $f\colon \widetilde{D} \to D$ прообраз 0 является либо циклом гладких рациональных кривых, либо неприводимой рациональной кривой с одним нодом. Согласно классификации, любая двумерная гиперповерхностная каспидальная особенность с точностью до аналитической замены координат имеет следующий вид:

$$T_{p,q,r}: \quad x_1^p + x_2^q + x_3^r + a x_1 x_2 x_3 = 0, \tag{3.2.2}$$

где $1/p + 1/q + 1/r < 1$, $p \leq q \leq r$, и $a \in \mathbb{C}$.

Следующая лемма хорошо известна.

Лемма 3.2.1 (ср. [AGV85, 11.1])**.** *Пусть $f(x_1, \ldots, x_n)$ — росток голоморфной функции такой, что $0 \in \mathbb{C}^n$ является ее критической точкой. Предположим, что квадратичный член в разложении Тейлора вблизи 0 имеет ранг k. Тогда с точностью до голоморфной замены координат мы имеем*

$$f(x_1, \ldots, x_n) = x_1^2 + \ldots + x_k^2 + g(x_{k+1}, \ldots, x_n)$$

где $g(x_{k+1}, \dots, x_n)$ — росток голоморфной функции, квадратичный член которой равен нулю.

Наша главная цель в этом разделе — получить характеристику строго логканонических 1- и 2-дополнений в терминах их локальных уравнений.

Обозначения 3.2.2. В дальнейшем, если $f = 0$ — аналитическое уравнение в окрестности точки $0 \in \mathbb{C}^n$, мы обозначаем через f_k его k-й член в разложении Тейлора $f = \sum_{i \geq 0} f_i$ вблизи точки 0.

Следующая лемма является обобщением [CPW14, Предложение 2.1.1].

Лемма 3.2.3. *Пусть $0 \in D = \{f = 0\}$ — росток приведенной неприводимой нормальной поверхности в $\mathbb{C}^3$. Предположим, что пара $(\mathbb{C}^3, D)$ строго логканонична в $0 \in \mathbb{C}^3$. Тогда*

- *либо $f_2 = 0$,*
- *либо с точностью до замены координат $f_2 = x_1^2$ и $(f|_{x_1=0})_3 = 0$,*
- *либо с точностью до замены координат $f_2 = x_1^2$, $(f|_{x_1=0})_3 = x_2^3$ и $(f|_{x_1=x_2=0})_4 = 0$.*

Доказательство. Предположим, что пара $(\mathbb{C}^3, D)$ строго логканонична в $0 \in \mathbb{C}^3$. Конечно, это влечет $f_0 = f_1 = 0$. Также, если ранг f_2 не менее двух, то по лемме 5.7.7 мы видим, что D имеет дювалевская особенность в 0, поэтому $(\mathbb{C}^3, D)$ не может быть строго логканонической. Следовательно, либо f_2 равен нулю, либо f_2 имеет ранг 1, так что с точностью до замены координат мы имеем $f_2 = x_1^2$. Согласно классификации строго логканонических особенностей, мы видим, что D имеет либо простую эллиптическую особенность, либо каспидальную особенность. В случае каспидальной особенности, глядя на уравнение (3.2.2), мы замечаем, что либо в тройке (p, q, r) мы имеем $p, q, r \geq 3$, так что $\mathrm{mult}_0 D \geq 3$, и следовательно $f_2 = 0$, либо $\mathrm{mult}_0 D = 2$, так что мы можем предположить $p = 2$, $q \geq 3$ и $r \geq 5$. Таким образом, с точностью до замены координат мы имеем два случая: либо $f_2 = x_1^2$, $(f|_{x_1=0})_3 = x_2^3$, либо $f_2 = x_1^2$, $(f|_{x_1=0})_3 = 0$, и $(f|_{x_1=x_2=0})_4 = 0$.

Теперь рассмотрим случай простых эллиптических особенностей. Снова, $\mathrm{mult}_0 D \geq 3$ влечет $f_2 = 0$. Если $\mathrm{mult}_0 D = 2$, то в первом случае из (5.5.4) мы имеем $f_2 = x_1^2$ и $(f|_{x_1=0})_3 = 0$, в то время как во втором случае $f_2 = x_1^2$, $(f|_{x_1=0})_3 = x_2^3$ и $(f|_{x_1=x_2=0})_4 = 0$. Утверждение доказано. □

Мы докажем аналогичное утверждение для границ с полуцелыми коэффициентами.

Утверждение 3.2.4. *Пусть* $0 \in D = \{f = 0\}$ *— росток приведенной поверхности в* $\mathbb{C}^3$*. Предположим, что пара* $(\mathbb{C}^3, 1/2D)$ *строго логканонична в* $0 \in \mathbb{C}^3$*. Тогда* $f_2 = 0$ *и*

- *либо* $f_3 = 0$,
- *либо с точностью до замены координат* $f_3 = x_1^2 x_2$ *и* f_4 *не делится на* x_1,
- *либо с точностью до замены координат* $f_3 = x_1^3$ *и* f_4 *не делится на* x_1^2.

Напомним, что наибольшее вещественное число λ такое, что пара $(X, \lambda D)$ является логканонической, называется *логканоническим порогом* пары (X, D). Мы обозначаем его через $\mathrm{lct}(X, D)$. Мы будем использовать следующую оценку.

Лемма 3.2.5 ([Ko97, Предложение 8.13])**.** *Пусть* f *— голоморфная функция в окрестности* $0 \in \mathbb{C}^n$*. Припишем рациональные веса* $w(x_i)$ *координатам* $x_1, \dots, x_n$ *в* $\mathbb{C}^n$*, и пусть* $w(f)$ *— взвешенная кратность* f*. Обозначим через* f_w *взвешенный однородный старший член* f*. Тогда*

$$\mathrm{lct}(\mathbb{C}^n, \{f = 0\}) \leq \frac{\sum w(x_i)}{w(f)},$$

где $w(f)$ *— вес* f_w *относительно* $w(x_i)$*. Если* $\{f_w = 0\} \subset \mathbb{C}^n$ *логканонична вне* 0*, то имеет место равенство.*

Лемма 3.2.6. *Пусть* $0 \in D$ *— росток приведенной гиперповерхности в* $\mathbb{C}^n$ *такой, что* $\mathrm{mult}_0 D = 2$*. Тогда пара* $(\mathbb{C}^n, 1/2D)$ *является klt вблизи* 0*.*

Доказательство. По лемме 5.7.7 мы можем предположить, что

$$D = \{x_1^2 + \ldots + x_k^2 + g(x_{k+1}, \dots, x_n) = 0\} \subset \mathbb{C}^n,$$

где $k \geq 1$ и $\mathrm{mult}_0 g \geq 3$. Положим

$$D_1 = \{x_1^2 + \ldots + x_k^2 = 0\} \subset \mathbb{C}^k, \qquad D_2 = \{g(x_{k+1}, \dots, x_n) = 0\} \subset \mathbb{C}^n.$$

Сначала предположим, что g — нулевой многочлен. Тогда поскольку D приведена, мы видим, что $k \geq 2$, так что D_1 имеет обыкновенную двойную точку

в начале координат, и $\mathrm{lct}(\mathbb{C}^n, D) = 1$. Поэтому мы можем считать, что g — ненулевой многочлен. По [Ko97, Предложение 8.21] мы имеем

$$\mathrm{lct}(\mathbb{C}^n, D)) = \min\{1, \mathrm{lct}(\mathbb{C}^k, D_1) + \mathrm{lct}(\mathbb{C}^{n-k}, D_2)\}.$$

Мы можем считать, что $\mathrm{lct}(\mathbb{C}^k, D_1) + \mathrm{lct}(\mathbb{C}^{n-k}, D_2) \leq 1$, иначе $\mathrm{lct}(\mathbb{C}^n, D)) = 1$ и пара $(X, 1/2)$ является klt. Следовательно,

$$\mathrm{lct}(\mathbb{C}^n, D)) \geq 1/2 + \mathrm{lct}(\mathbb{C}^{n-k}, D_2) > 1/2,$$

где мы использовали тот факт, что $\mathrm{lct}(\mathbb{C}^k, D_1) \geq 1/2$, что очевидно. Это показывает, что пара $(X, 1/2D)$ является klt, как и утверждалось. □

Лемма 3.2.7. *Пусть $0 \in D = \{f = 0\}$ — росток приведенной поверхности в $\mathbb{C}^3$ такой, что $\mathrm{mult}_0 D = 3$. Пусть f_3 — член степени 3 в f, и пусть C_3 — кривая в $\mathbb{P}^2$, заданная уравнением $f_3 = 0$. Тогда если C_3 не содержит двойной прямой, то пара $(\mathbb{C}^3, 1/2D)$ является klt вблизи 0.*

Доказательство. Предположим, что кубический член f_3 не делится на квадрат линейной формы. Рассмотрим подмножество $C_3 = \{f_3 = 0\} \subset \mathbb{P}^2$. Предположим, что C_3 логканонична. Это происходит, если C_3 является либо гладкой кубической кривой, либо нодальной кривой, либо объединением прямой и коники, пересекающихся трансверсально, либо объединением трех прямых, образующих треугольник. Тогда подмножество $\{f_3 = 0\} \subset \mathbb{C}^3$ логканонично вне начала координат, поэтому, приписывая веса $(1, 1, 1)$ координатам x_1, x_2, x_3, по лемме 3.2.5 мы заключаем, что пара $(\mathbb{C}^3, D)$ логканонична, так что пара $(\mathbb{C}^3, 1/2D)$ является klt, как и утверждалось.

Теперь предположим, что кривая C_3 не логканонична, тогда C_3 является одной из следующих: каспидальная кубика, прямая, касающаяся коники, или три прямые, проходящие через одну точку. В этих случаях логканонические пороги пары $(\mathbb{C}^3, D)$ были оценены в доказательстве основной теоремы в [Ku99], и во всех этих случаях они больше $1/2$, так что пара $(\mathbb{C}^3, 1/2D)$ является klt. Это завершает доказательство. □

Следствие 3.2.8. Пусть $0 \in C = \{f = 0\} \subset \mathbb{C}^2$ — росток кривой, где

$$f = x_1^2 x_2 + f_4(x_1, x_2) + f_{\geq 5}(x_1, x_2)$$

с $\deg f_4 = 4$ и $\mathrm{mult}_0(f_{\geq 5}) \geq 5$. Предположим, что $f_4|_{x_1=0} \neq 0$. Тогда пара $(\mathbb{C}^2, 1/2C)$ является klt.

Доказательство. Сначала покажем, что условие $f_4|_{x_1=0} \neq 0$ инвариантно относительно аналитических замен координат, сохраняющих натянутое на x_1 направление. Поскольку f_3 делится на квадрат линейной формы, после любой аналитической замены координат эта линейная форма определяется однозначно с точностью до пропорциональности, так что с точностью до перенумерации координат мы можем считать, что она равна x_1. Рассмотрим ограничение $f|_{x_1=0}$. Заметим, что $f_4|_{x_1=0} = (f|_{x_1=0})_4$, где последнее означает член степени 4 в $f|_{x_1=0}$. Таким образом, условие $f_4|_{x_1=0} \neq 0$ инвариантно относительно аналитических замен координат, сохраняющих натянутое на x_1 направление.

Мы можем записать уравнение C в виде

$$f = x_1^2 x_2 + a x_2^4 + b x_1 x_2^3 + x_1^2 r(x_1, x_2) + s(x_1, x_2) = 0, \tag{3.2.3}$$

где $r(x_1, x_2)$ однородный степени 2 (или является нулевым многочленом), и для кратности имеем $\mathrm{mult}_0 s(x_1, x_2) \geq 5$, $a, b \in \mathbb{C}$ и $a \neq 0$. После аналитической замены координат мы получаем уравнение

$$x_1^2 x_2 + a x_2^4 + s(x_1, x_2) = 0$$

с $\mathrm{mult}_0 s(x_1, x_2) \geq 5$ и $a \neq 0$. Припишем веса $w = (3, 2)$ координатам x_1, x_2. Тогда мы имеем $f_w = x_1^2 x_2 + a x_2^4$, и по лемме 3.2.5 мы имеем $\mathrm{lct}(\mathbb{C}^2, C) = 5/8 > 1/2$. Следовательно, пара $(\mathbb{C}^2, 1/2C)$ является klt. □

Следствие 3.2.9. Пусть $0 \in C = \{f = 0\} \subset \mathbb{C}^2$ — росток кривой, где

$$f = x_1^3 + f_4(x_1, x_2) + f_{\geq 5}(x_1, x_2)$$

с $\deg f_4 = 4$ и $\mathrm{mult}_0(f_{\geq 5}) \geq 5$. Предположим, что f_4 не делится на x_1^2 (в частности, $f_4 \neq 0$). Тогда пара $(\mathbb{C}^2, 1/2C)$ является klt.

Доказательство. Условие, что f_4 не делится на x_1^2, инвариантно относительно аналитических замен координат, сохраняющих кубический член уравнения. Действительно, после аналитической замены координат мы можем считать, что наше уравнение имеет вид

$$x_1^3 + a x_2^4 + b x_1 x_2^3 + s(x_1, x_2) = 0,$$

где $\mathrm{mult}_0 s(x_1, x_2) \geq 5$, $a, b \in \mathbb{C}$ и либо $a \neq 0$, либо $b \neq 0$. Если $a \neq 0$, припишем веса $w = (4, 3)$ координатам x_1, x_2. Тогда имеем $f_w = x_1^3 + a x_2^4$, и по лемме

3.2.5 получаем $\mathrm{lct}(\mathbb{C}^2, C) = 7/12 > 1/2$. Если $a = 0$ и $b \neq 0$, припишем веса $w = (3, 2)$ координатам x_1, x_2. Тогда мы имеем $f_w = x_1^3 + bx_1x_2^3$, и по лемме 3.2.5 получаем $\mathrm{lct}(\mathbb{C}^2, C) = 5/9 > 1/2$. Следовательно, в обоих случаях пара $(\mathbb{C}^2, 1/2C)$ является klt. □

Следствие 3.2.10. Пусть $0 \in D \subset \mathbb{C}^3$ — росток приведенной поверхности $D = \{f = 0\}$, где

$$f = x_1^2x_2 + f_4(x_1, x_2, x_3) + f_{\geq 5}(x_1, x_2, x_3)$$

с $\deg f_4 = 4$ и $\mathrm{mult}_0 f_{\geq 5} \geq 5$. Предположим, что f_4 не делится на x_1 (в частности, $f_4 \neq 0$). Тогда пара $(\mathbb{C}^3, 1/2S)$ является klt.

Доказательство. Мы можем записать уравнение f в виде

$$f = x_1^2x_2 + p_4(x_2, x_3) + x_1q_3(x_2, x_3) + x_1^2r_2(x_2, x_3) + s(x_1, x_2, x_3) = 0,$$

где $\deg r_2(x_2, x_3) = 2$ (или $r_2(x_2, x_3) = 0$), $\mathrm{mult}_0 s(x_1, x_2, x_3) \geq 5$ и либо $p_4(x_2, x_3) \neq 0$ и $\deg p_4(x_2, x_3) = 4$, либо $q_3(x_2, x_3) \neq 0$ и $\deg q_3(x_2, x_3) = 3$. Пусть $H = \{\lambda x_2 = \mu x_3\}$ — плоскость, где $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$. Без ограничения общности мы можем считать, что $\mu = 1$. Заметим, что пара $(\mathbb{C}^3, H + 1/2D)$ является plt тогда и только тогда, когда пара $(H, 1/2D|_H)$ является klt. Тогда уравнение становится

$$f = x_1^2x_2 + x_2^4p_4(1, \lambda) + x_1x_2^3q_3(1, \lambda) + x_1^2x_2^2r_2(1, \lambda) + s(x_1, x_2, \lambda x_2) = 0.$$

Это уравнение имеет вид (3.2.3) для некоторых λ и μ, и по следствию 3.2.8 мы завершаем доказательство. □

Аналогично получаем следующий результат.

Следствие 3.2.11. Пусть $\in D \subset \mathbb{C}^3$ — росток приведенной поверхности $D = \{f = 0\}$, где

$$f = x_1^3 + f_4(x_1, x_2, x_3) + f_{\geq 5}(x_1, x_2, x_3)$$

с $\deg f_4 = 4$ и $\mathrm{mult}_0 f_{\geq 5} \geq 5$. Предположим, что f_4 не делится на x_1^2 (в частности, $f_4 \neq 0$). Тогда пара $(\mathbb{C}^3, 1/2S)$ является klt.

Теперь утверждение 3.2.4 следует из леммы 3.2.11 и леммы 3.2.7.

3.3 Подготовительные результаты

В этом разделе мы докажем некоторые технические результаты, которые будут использованы далее.

Лемма 3.3.1. *Пусть C — приведенная кривая на гладком трехмерном многообразии $X \subset \mathbb{P}^N$, такая что для любой особой точки Q кривой C выполнено $\dim T_Q C = 2$. Предположим также, что C является теоретико-схемным пересечением всех элементов (не обязательно полной) линейной системы $\mathcal{H}$. Тогда существует гладкий элемент $D \in \mathcal{H}$.*

Доказательство. По теореме Бертини общий элемент $D \in \mathcal{H}$ гладкий вне C. Следовательно, достаточно доказать, что D гладок во всех точках C. Зафиксируем гладкую точку $P \in C$. Существуют два элемента $D_1, D_2 \in \mathcal{H}$ такие, что пересечение $D_1 \cap D_2$ гладко в точке P. Пусть локально D_1 и D_2 задаются уравнениями $f_1 = 0$ и $f_2 = 0$ соответственно. Тогда дифференциалы $d_P f_1$ и $d_P f_2$ линейно независимы в точке P. Следовательно, условие быть особым в точке P имеет коразмерность 2 в линейной системе $\mathcal{H}$. Поскольку кривая C одномерна, общий элемент D системы $\mathcal{H}$ гладок во всех гладких точках C.

Теперь зафиксируем особую точку $Q \in C$. По предположению, $\dim T_Q C = 2$. Следовательно, не все элементы системы $\mathcal{H}$ могут быть особыми в точке Q, поэтому существует элемент $D' \in \mathcal{H}$ такой, что $T_Q D' = T_Q C$. Это означает, что для общего элемента $D \in \mathcal{H}$ выполнено $T_Q D = T_Q C$. В частности, общий элемент системы $\mathcal{H}$ гладок в точке Q. Аналогичное рассуждение показывает, что общий элемент системы $\mathcal{H}$ гладок во всех особых точках C, что и завершает доказательство. □

В качестве непосредственного следствия получаем, что через прямую L на гладком проективном трехмерном многообразии X проходит гладкое гиперплоское сечение.

Лемма 3.3.2. *Пусть D_1 и D_2 — две нормальные поверхности с не хуже чем дювалевскими особенностями в гладком трехмерном многообразии X. Предположим, что теоретико-схемное пересечение $D_1 \cap D_2$ является приведенной и приводимой кривой $C + L$, где обе кривые C и L — гладкие рациональные кривые, лежащие в гладком локусе поверхностей D_1 и D_2, причем C и L пересекаются трансверсально. Предположим также, что выполнено одно из следующих условий:*

1. $L \cdot D_1 = 1$, $N_{L/X} = \mathscr{O} \oplus \mathscr{O}$ *или* $N_{L/X} = \mathscr{O}(-1) \oplus \mathscr{O}(1)$,

2. $L \cdot D_1 = 2$, $N_{L/X} = \mathscr{O} \oplus \mathscr{O}(1)$,

3. $L \cdot D_1 = 3$, $N_{L/X} = \mathscr{O}(1) \oplus \mathscr{O}(1)$.

Тогда $\dim \mathcal{D}(X, D) = 2$, *где* $D = D_1 + D_2$.

Доказательство. Заметим, что D не является snc. Однако пара (X, D), где $D = D_1 + D_2$, является lc по теореме об обращении присоединения. Раздуем кривую L и получим морфизм $g\colon X' \to X$. Обозначим через D_i' собственный прообраз поверхности D_i, а через E — g-исключительный дивизор. Рассмотрим три случая.

1. Предположим, что $N_{L/X} = \mathscr{O}(-a) \oplus \mathscr{O}(a)$, где $a \in \{0, 1\}$, так что $E \simeq \mathbb{F}_{2a}$. Пусть s — $(-2a)$-кривая, а f — слой на E. Имеем $E|_E = -s - cf$ для некоторого c. Из уравнения

$$0 = -\deg N_{L/X} = E^3 = (E|_E)^2 = (-s - cf)^2 = -2a + 2c$$

получаем $c = a$. Используя $g^*D_1 = D_1' + E$, вычисляем

$$f = (L \cdot D_1)f = Eg^*D_1 = E^2 + ED_1' = -s - af + ED_1',$$

откуда

$$D_1'|_E \sim s + (a+1)f.$$

2. Предположим, что $N_{L/\mathbb{P}} = \mathscr{O} \oplus \mathscr{O}(1)$, так что $E \simeq \mathbb{F}_1$. Пусть s — (-1)-кривая, а f — слой на E. Аналогично рассмотренному выше случаю получаем

$$D_1'|_E \sim s + 2f.$$

3. Предположим, что $N_{L/\mathbb{P}} = \mathscr{O}(1) \oplus \mathscr{O}(1)$, так что $E \simeq \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$. Пусть s и f — два различных слоя на E. Аналогично получаем

$$D_1'|_E \sim s + 4f.$$

Заметим, что во всех трех случаях ограничение $D_1'|_E$ обильно. Следовательно, D_1' и D_2' пересекаются на E. Пара

$$(X', D_1' + D_2' + E)$$

является snc и содержит страту размерности ноль, что и завершает доказательство. □

Лемма 3.3.3. *Пусть D_1 и D_2 — две нормальные поверхности с не хуже чем дювалевскими особенностями в гладком трехмерном многообразии X. Предположим, что теоретико-схемное пересечение $D_1 \cap D_2$ является неприводимой приведенной рациональной кривой C арифметического рода 1 с одной нодальной точкой $P \in C$. Предположим также, что C лежит в гладком локусе поверхностей D_1 и D_2. Тогда $\dim \mathcal{D}(X, D) = 2$, где $D = D_1 + D_2$.*

Доказательство. Пара (X, D), где $D = D_1 + D_2$, является lc по теореме об обращении присоединения. Раздуем точку P и получим морфизм $f\colon X' \to X$ с исключительным дивизором $E \simeq \mathbb{P}^2$. Заметим, что собственные прообразы D_1' и D_2' пересекаются по приводимой кривой $C' + L$, где $L \subset E$ — прямая, C' — собственный прообраз кривой C, причем компоненты C' и L пересекаются трансверсально в двух различных точках. Заметим, что L является (-1)-кривой на каждой из поверхностей D_i'. Тогда пара (X', D'), где $D' = D_1' + D_2'$, является лог-прообразом пары (X, D).

Заметим, что L является полным пересечением E и D_1' (или E и D_2'), следовательно,

$$N_{L/X'} = \mathscr{O}(-1) \oplus \mathscr{O}(1).$$

Раздуем кривую L на X' и получим морфизм $g\colon X'' \to X'$ с исключительным дивизором $E_1 \simeq \mathbb{F}_2$. Имеем $E_1|_{E_1} = -s - cf$ для некоторого c, где s — (-2)-сечение, а f — слой на E. Вычисляем

$$0 = -\deg N_{L/X'} = E_1^3 = E_1|_{E_1}^2 = (-s - cf)^2.$$

Отсюда $c = 1$. Кроме того,

$$L \cdot D_1' = L(f^* D_1 - E) = 1.$$

Тогда

$$f = (L \cdot D_1')f = E_1 \cdot g^* D_1' = E_1^2 + E_1 \cdot D_1'' = -s - f + E_1 \cdot D_1'',$$

откуда

$$D_1''|_{E_1} \sim s + 2f.$$

Следовательно, ограничение $D_1''|_{E_1}$ является сечением расслоения $E \simeq \mathbb{F}_2$ с самопересечением 2. Таким образом, пара

$$(X'', D_1'' + D_2'' + E_1)$$

является snc и содержит страт размерности ноль, что и завершает доказательство. □

3.4 Трехмерные многообразия Фано индекса ≥ 2

Напомним, что индекс $i(X)$ многообразия Фано X — это максимальное натуральное число m такое, что $-K_X \sim mH$, где H — элемент группы Пикара. Мы начинаем вычисление корегулярности гладких трехмерных многообразий Фано.

Замечание 3.4.1. Для торического многообразия Фано, взяв торически инвариантную границу, мы видим, что корегулярность равна 0. Вот список торических трехмерных многообразий Фано:

$$1.17,\ 2.33,\ 2.34,\ 2.35,\ 2.36,\ 3.25,\ 3.26,\ 3.27,\ 3.28,\ 3.29,$$

$$3.30,\ 3.31,\ 4.9,\ 4.10,\ 4.11,\ 4.12,\ 5.2,\ 5.3.$$

В качестве следствия замечания 3.4.1 получаем

Лемма 3.4.2. *Пусть* $X = \mathbb{P}^n$. *Тогда* $\operatorname{coreg}(X) = 0$.

Лемма 3.4.3. *Пусть* X — *гладкая квадрика в* $\mathbb{P}^{n+1}$. *Тогда* $\operatorname{coreg}(X) = 0$.

Доказательство. Заметим, что $-K_X \sim nH$, где H — гиперплоское сечение X. Рассмотрим пару $(X, D = \sum_{i=1}^{n} H_i)$, где $H_i \in |H|$ — общие гиперплоские сечения. Заметим, что D имеет простые нормальные пересечения и содержит нульмерную страту. Это показывает, что $\operatorname{coreg}(X) = 0$. □

Пусть X — трехмерное многообразие дель Пеццо, то есть гладкое трехмерное многообразие Фано с $i(X) = 2$. Под степенью X мы понимаем число $d = H^3$, где $-K_X \sim 2H$. Будем предполагать, что $\rho(X) = 1$. Тогда известно, что $1 \leq d \leq 5$. Под прямой на X мы понимаем гладкую рациональную кривую, пересечение которой с H равно 1. Известно, что для любой прямой $L \subset X$ на трехмерном многообразии дель Пеццо имеем $N_{L/X} = \mathscr{O}(a) \oplus \mathscr{O}(-a)$ для $a \in \{0, 1\}$, см., например, [KPS18, Предложение 2.2.8.].

Лемма 3.4.4. *Пусть* X — *трехмерное многообразие дель Пеццо со степенью* $3 \leq d \leq 5$. *Тогда* $\operatorname{coreg}(X) = 0$.

Доказательство. Пусть X — трехмерное многообразие дель Пеццо с $-K_X \sim 2H$ и $3 \leq d = H^3 \leq 5$. Заметим, что в этом случае H очень обилен, поэтому он определяет вложение X в проективное пространство $\mathbb{P}^{d+1}$. Пусть L — прямая в X, лежащая на некотором гладком простом дивизоре H_1 таком, что $H_1 \in$

$|H|$. Такая прямая существует, поскольку H_1 — гладкая поверхность дель Пеццо степени d. Построим границу $D = H_1 + H_2$, где H_2 — общий дивизор, содержащий L, причем $H_2 \in |H|$. По лемме 3.3.1 можно выбрать поверхность H_2 гладкой. Заметим, что L является (-1)-кривой на обеих поверхностях H_1 и H_2. Мы покажем, что для общего дивизора H_2 ограничение $H_2|_{H_1}$ является объединением прямой L и гладкой рациональной кривой C, пересекающей L трансверсально. Действительно, рассмотрим точную последовательность

$$0 \to H^0(X, \mathscr{O}_X) \to H^0(X, \mathscr{O}_X(H)) \to H^0(H_1, \mathscr{O}_{H_1}(-K_{H_1})) \to 0, \qquad (3.4.1)$$

где по формуле присоединения имеем $H|_{H_1} \sim -K_{H_1}$, а последний член равен 0 по теореме Кодаиры о зануленении. Отсюда следует, что существует элемент $H_2 \in |H|$ такой, что $H_1 \cap H_2$ — заданная антиканоническая кривая на H_1. Поскольку H_1 — поверхность дель Пеццо степени $d \geq 2$, общая приводимая антиканоническая кривая является объединением прямой и гладкой рациональной кривой, пересекающихся трансверсально в двух точках. Следовательно, для общего H_2 кривая C пересекает L трансверсально в двух точках. Отсюда следует, что пара (X, D) является lc по теореме об обращении присоединения на H_1. Тогда мы можем применить лемму 3.3.2, которая показывает, что $\operatorname{coreg}(X) = 0$. □

Лемма 3.4.5. *Пусть X — трехмерное многообразие дель Пеццо степени $d = 2$. Тогда* $\operatorname{coreg}(X) = 0$.

Доказательство. Линейная система $|H|$ определяет двулистное накрытие $g\colon X \to \mathbb{P}^3$, разветвленное над гладкой квадратичной поверхностью $Q \subset \mathbb{P}^3$. Пусть H_1 — общее гиперплоское сечение X, и пусть $L \subset H_1$. Заметим, что L — (-1)-кривая на H_1. Положим $H_1' = g(H_1)$. Заметим, что ограничение $g|_{H_1}\colon H_1 \to H_1' \simeq \mathbb{P}^2$ является двулистным накрытием, разветвленным над гладкой квартикой $Q \cap H_1'$. Тогда $L' = g(L)$ — прямая в $\mathbb{P}^3$, которая является бикасательной к Q. В частности, $L' \not\subset Q$. Рассмотрим пучок плоскостей, проходящих через L'. Поскольку H_1' — плоскость, проходящая через L', которая соответствует гладкому гиперплоскому сечению H_1 на X, то прообраз H_2 общей плоскости H_2', проходящей через L', также будет гладким. Таким образом, $H_1 \cap H_2$ является объединением двух гладких рациональных кривых, пересекающихся трансверсально в двух точках, поэтому мы можем применить лемму 3.3.2 и заключить, что $\operatorname{coreg}(X) = 0$. □

Лемма 3.4.6. *Пусть X — общее трехмерное многообразие дель Пеццо степени* 1. *Положим $-K_X \sim 2H$. Пусть $H_1 \in |H|$ — общий элемент, являющийся гладкой поверхностью дель Пеццо степени* 1. *Тогда существует неприводимая кривая $C \in |-K_{H_1}|$, имеющая арифметический род* 1 *и одну нодальную особую точку.*

Доказательство. Заметим, что для трехмерного многообразия дель Пеццо X степени 1 свойство иметь элемент в $|H|$ с не хуже чем нодальными особенностями является открытым в семействе всех трехмерных многообразий дель Пеццо степени 1. Следовательно, достаточно показать, что существует одно такое трехмерное многообразие дель Пеццо X с элементом $H_1 \in |H|$, где $-K_X \sim 2H$, таким что $|-K_{H_1}|$ содержит нодальную кривую. Пусть $X \subset \mathbb{P}(1,1,1,2,3)$ задано уравнением

$$w^2 + z^3 + f_4(x_1, x_2, x_3)z + f_6(x_1, x_2, x_3) = 0,$$

где (x_1, x_2, x_3, z, w) имеют веса $(1,1,1,2,3)$, а f_4 и f_6 — общие однородные многочлены степени 4 и 6 соответственно. Пусть H_1 задано условием $x_3 = 0$, тогда уравнение для H_1 в $\mathbb{P}(1,1,2,3)$ имеет вид

$$w^2 + z^3 + f_4(x_1, x_2, 0)z + f_6(x_1, x_2, 0) = 0,$$

и $f_4(x_1, x_2, 0)$, $f_6(x_1, x_2, 0)$ также являются общими однородными многочленами степени 4 и 6 соответственно. Тогда по замечанию 3.1.4 мы видим, что существует нодальная кривая $C \in |-K_{H_1}|$. □

Лемма 3.4.7. *Пусть X — общее трехмерное многообразие дель Пеццо степени* 1. *Тогда* $\operatorname{coreg}(X) = 0$.

Доказательство. Пусть H_1 — общий элемент в $|H|$. По лемме 3.4.6 существует элемент C в $|-K_{H_1}|$, являющийся неприводимой нодальной кривой. Рассмотрим точную последовательность

$$0 \to H^0(X, \mathscr{O}_X) \to H^0(X, \mathscr{O}_X(H)) \to H^0(H_1, \mathscr{O}_{H_1}(-K_{H_1})) \to 0,$$

где по формуле присоединения имеем $H|_{H_1} \sim -K_{H_1}$. Отсюда следует, что существует элемент $H_2 \in |H|$ такой, что $H_1 \cap H_2 = C$. Заметим, что в линейной системе $|H - C|$ гиперплоских сечений, проходящих через C, существует гладкий элемент H_1. Отсюда следует, что общий элемент H_2 в этой линейной системе также гладок. Положим $D = H_1 + H_2$. Пара (X, D) является lc по теореме об обращении присоединения на H_1. Применяя лемму 3.3.3, заключаем, что $\operatorname{coreg}(X) = 0$. □

3.5 Многообразия Фано основной серии

В этом разделе мы работаем в следующем сеттинге. Пусть X — гладкое трехмерное многообразие Фано с $\rho(X) = 1$ и $i(X) = 1$. Они называются трехмерными многообразиями Фано основной серии. В дальнейшем под *родом* гладкого трехмерного многообразия Фано X основной серии мы понимаем число

$$g(X) = h^0(X, \mathscr{O}(-K_X)) - 2.$$

Известно, что $2 \leq g \leq 12$, $g \neq 11$. Согласно [Isk89, Предложение 1 и следствие 1], для любой прямой на X, то есть для любой гладкой рациональной кривой L такой, что $L \cdot (-K_X) = 1$, выполнено либо

$$N_{L/X} = \mathscr{O} \oplus \mathscr{O}(-1), \qquad \text{либо} \qquad N_{L/X} = \mathscr{O}(-1) \oplus \mathscr{O}(2).$$

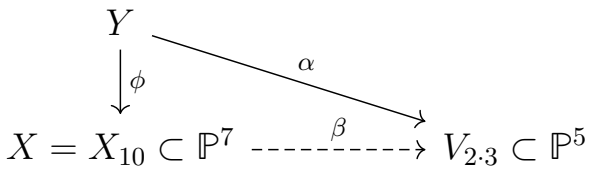
Если для всех прямых на X реализуется вторая возможность, то X называется *экзотическим*. Известно, что для $g(X) \geq 9$ существует единственное экзотическое трехмерное многообразие Фано X, а именно, пример Мукая-Умемуры [MU82]. Более того, общее гладкое трехмерное многообразие Фано основное серии не является экзотическим, см., например, [IP99, Теорема 4.2.7]. Отсюда следует, что для общего гладкого трехмерного многообразия Фано основной серии мы всегда можем найти прямую с нормальным расслоением вида $\mathscr{O} \oplus \mathscr{O}(-1)$.

В оставшейся части этого раздела мы рассматриваем трехмерные многообразия Фано основной серии с $g(X) \geq 6$. Через $|H|$ мы будем обозначать линейную систему гиперплоских сечений в антиканоническом вложении X, то есть $H \sim -K_X$.

Лемма 3.5.1. *Пусть X — общее трехмерное многообразие Фано из семейства №1.5. Тогда* $\operatorname{coreg}(X) \leq 1$.

Доказательство. Пусть X — общее трехмерное многообразие Фано из семейства 1.5. Известно, что X можно реализовать как сечение грассманиана $\mathrm{Gr}(2,5) \subset \mathbb{P}^9$ подпространством коразмерности 2 и квадрикой. Мы имеем $g(X) = 6$ и $X \subset \mathbb{P}^7$. Пусть $L \subset X$ — общая прямая на X, так что $N_{L/X} = \mathscr{O} \oplus \mathscr{O}(-1)$. Согласно [Isk78, Теорема 5.3] многообразие X бирационально особому трехмерному многообразию, являющемуся пересечением

квадрики и кубики в $\mathbb{P}^5$. Более точно, существует следующая диаграмма



где

- ϕ — раздутие прямой $L \subset X$,
- бирациональное отображение β задается линейной системой $|H - L|$,
- бирациональный морфизм α задается линейной системой $|H - E|$, где $E \simeq \mathbb{F}_1$ — ϕ-исключительный дивизор. Более того, α является малым стягиванием и стягивает в точности собственные прообразы 11 прямых на X, пересекающих L, см. [Mar83, 6.5].

Образ $V = V_{2\cdot 3}$ отображения α является пересечением квадрики и кубики и имеет 11 обыкновенных двойных точек $p_1, \ldots, p_{11}$ в качестве особенностей. Более того, V содержит изоморфный образ $F = F_3$ дивизора E, причем F — поверхность степени 3 в $\mathbb{P}^4 \subset \mathbb{P}^5$, проходящая через $p_1, \ldots, p_{11}$.

Пусть $(x_0 : \ldots : x_5)$ — координаты на $\mathbb{P}^5$. Мы можем считать, что поверхность $F \subset \mathbb{P}^4 = \{x_5 = 0\}$ задана уравнениями

$$Q_1 = x_0x_3 - x_1x_2 = 0, \qquad Q_2 = x_0x_4 - x_2^2 = 0, \qquad Q_3 = x_1x_4 - x_2x_3 = 0,$$

а V задано уравнениями

$$Q_1L_1 + Q_2L_2 + x_5Q = 0, \qquad Q_3 + x_5L = 0, \tag{3.5.1}$$

где L_i и L — линейные формы от координат $(x_0 : \ldots : x_5)$, а Q — квадратичная форма от $(x_0 : \ldots : x_5)$.

Обратно, общее гладкое трехмерное многообразие Фано $X_{10} \subset \mathbb{P}^7$ можно получить следующим образом. Начнем с пересечения квадрики и кубики $V \subset \mathbb{P}^5$, заданного уравнениями (3.5.1). Затем рассмотрим его малое разрешение $\alpha\colon Y \to V$ такое, что для собственного прообраза E поверхности F выполнено $\alpha(E) \simeq F$. Затем можно стянуть E, чтобы получить морфизм $\phi\colon Y \to X$, который и является искомым трехмерным многообразием Фано.

Рассмотрим гиперплоское сечение D_V многообразия V, заданное условием $x_5 = 0$. Заметим, что D_V приводимо. Фактически, $D_V = F + R$, где R — гладкая поверхность степени 3 в $\mathbb{P}^4$. Рассмотрим бирациональное отображение

$\phi\colon \mathbb{P}^2 \dashrightarrow F \subset \mathbb{P}^4$, заданное формулой

$$(y_0 : y_1 : y_2) \mapsto (y_0^2 : y_0y_2 : y_0y_1 : y_1y_2 : y_1^2).$$

Пусть $q_0 = (0 : 0 : 1)$ — точка в $\mathbb{P}^2$, в которой ϕ не определено. Заметим, что ограничение R на F является элементом линейной системы $|-K_F - e|$, где e — (-1)-кривая на $F \simeq \mathbb{F}_1$. Можно проверить, что $C = \phi_*^{-1}(R|_F)$ — кубическая кривая в $\mathbb{P}^2$, заданная уравнением

$$y_2L_1 + y_1L_2 = 0.$$

В частности, для общих L_i кривая C гладкая. Рассмотрим пару (V, D_V), где $D_V = F + R$. Тогда пара (V, D_V) является lc. Пусть (Y, D_Y) — ее собственный прообраз на Y. Отсюда следует, что $\dim \mathcal{D}(Y, D_Y) = 1$, и мы заключаем, что $\operatorname{coreg}(Y) = \operatorname{coreg}(X) \leq 1$. □

Заметим, что в приведенном выше доказательстве, выбирая формы L_i специальным образом, а именно так, чтобы кривая C была рациональной кривой с одним нодом, и используя лемму 3.3.3, мы можем получить трехмерное многообразие Фано из семейства 1.5 с $\operatorname{coreg}(X) = 0$.

Лемма 3.5.2. *Пусть X — общее трехмерное многообразие Фано из семейства №1.6. Тогда* $\operatorname{coreg}(X) = 0$.

Доказательство. Пусть X — общее трехмерное многообразие Фано из семейства 1.6. Тогда $g(X) = 7$ и $X \subset \mathbb{P}^8$. Согласно [Isk78, Теорема 6.1(vii)] многообразие X бирационально особому трехмерному многообразию, являющемуся пересечением 3 квадрик в $\mathbb{P}^6$. Более точно, существует следующая диаграмма

$$\begin{array}{ccc} Y & & \\ \downarrow{\scriptstyle \phi} & \searrow^{\alpha} & \\ X = X_{12} \subset \mathbb{P}^8 & \overset{\beta}{\dashrightarrow} & V_{2\cdot 2\cdot 2} \subset \mathbb{P}^6 \end{array}$$

где

- ϕ — раздутие прямой $L \subset X$,
- α — малое стягивание, и оно стягивает в точности собственные прообразы 8 прямых на X, проходящих через L,
- отображение β задается линейной системой $|H - L|$,

- морфизм α задается линейной системой $|H - E|$, где $E \simeq \mathbb{F}_1$ является ϕ-исключительным дивизором.

Образ отображения α — это пересечение 3 квадрик $V = V_{2\cdot2\cdot2}$, которое имеет 8 обыкновенных двойных точек $p_1, \ldots, p_8$ в качестве особенностей. Более того, V содержит изоморфный образ $F = F_3$ дивизора E, причем F — поверхность степени 3 в $\mathbb{P}^4 \subset \mathbb{P}^6$, проходящая через $p_1, \ldots, p_8$.

Пусть $(x_0 : \ldots : x_6)$ — координаты на $\mathbb{P}^6$. Мы можем считать, что поверхность F задана уравнениями

$$Q_1 = x_0x_3 - x_1x_2 = 0, \qquad Q_2 = x_0x_4 - x_2^2 = 0, \qquad Q_3 = x_1x_4 - x_2x_3 = 0.$$

Тогда V задано уравнениями

$$Q_1 + x_5L_{11} + x_6L_{12} = 0, \qquad Q_2 + x_5L_{21} + x_6L_{22} = 0, \qquad Q_3 + x_5L_{31} + x_6L_{32} = 0 \tag{3.5.2}$$

где L_{ij} — линейные формы от координат $(x_0 : \ldots : x_6)$. Обратно, общее гладкое трехмерное многообразие Фано $X_{12} \subset \mathbb{P}^8$ можно получить следующим образом. Начнем с пересечения трех квадрик $V \subset \mathbb{P}^6$, заданного уравнениями (3.5.2). Затем рассмотрим его малое разрешение $\alpha\colon Y \to V$ такое, что для собственного прообраза E поверхности F выполнено $\alpha(E) \simeq F$. Затем можно стянуть E, чтобы получить морфизм $\phi\colon Y \to X$, который и является искомым трехмерным многообразием Фано.

Рассмотрим пучок гиперплоских сечений $\mathcal{H}$ на V, порожденный x_5 и x_6. Элементы пучка $\mathcal{H}$ на V приводимы. Фактически, каждый такой элемент является объединением F и поверхности R степени 5. Пусть $\mathcal{R}$ — пучок таких остаточных поверхностей. Можно проверить, что ограничение $R \in \mathcal{R}$ на F является элементом линейной системы $|-K_F - \sum p_i|$ на $F \simeq \mathbb{F}_1$. Рассмотрим бирациональное отображение $\phi\colon \mathbb{P}^2 \dashrightarrow F \subset \mathbb{P}^4$, заданное формулой

$$(y_0 : y_1 : y_2) \mapsto (y_0^2 : y_0y_2 : y_0y_1 : y_1y_2 : y_1^2).$$

Можно проверить, что $\mathcal{C} = \phi_*^{-1}(\mathcal{R}|_F)$ — это пучок кубических кривых в $\mathbb{P}^2$, порожденный кривыми C_1 и C_2, заданными уравнениями

$$y_0L_{31} + y_1L_{11} - y_2L_{21} = 0 \qquad \text{и} \qquad y_0L_{32} + y_1L_{12} - y_2L_{22} = 0.$$

Более того, базисные точки пучка $\mathcal{C}$ — это в точности точки $q_0, q_1, \ldots q_8$ в $\mathbb{P}^2$, где $q_0 = (0 : 0 : 1)$ — точка, в которой ϕ не определено, и $\phi(q_i) = p_i$ для

$1 \leq i \leq 8$. Для общих $L_{i,j}$ вырожденные кривые в этой линейной системе являются неприводимыми рациональными кривыми с одним нодом.

Рассмотрим пару (V, D_V), где $D_V = F + R$ и $R \in \mathcal{R}$ — такой элемент, что $R|_F$ является неприводимой кривой с одним узлом, причем этот узел не совпадает ни с одной из точек $p_1, \dots p_8$. Тогда пара (V, D_V) является lc по теореме об обращении присоединения на F. Пусть (Y, D_Y) — ее собственный прообраз на Y. По лемме 3.3.3 мы видим, что $\dim \mathcal{D}(Y, D_Y) = 2$. Мы заключаем, что $\operatorname{coreg}(Y) = \operatorname{coreg}(X) = 0$. □

Лемма 3.5.3. *Пусть X — общее трехмерное многообразие Фано из семейства №1.7. Тогда* $\operatorname{coreg}(X) = 0$.

Доказательство. Пусть X — общее трехмерное многообразие Фано из семейства 1.7. Тогда $g(X) = 8$ и $X \subset \mathbb{P}^9$. Поскольку X общее, мы можем считать, что оно не экзотическое. Рассмотрим общую прямую L на X. Имеем $N_{L/X} = \mathscr{O} \oplus \mathscr{O}(-1)$. Также ровно 6 других прямых L_i пересекают L. Более того, $N_{L_i/X} = \mathscr{O} \oplus \mathscr{O}(-1)$. Согласно [IP99, Теорема 4.3.3], многообразие X может быть включено в следующую диаграмму

$$\begin{array}{ccc} Y & \overset{\alpha}{\dashrightarrow} & Y' \\ \downarrow{\scriptstyle \phi} & & \downarrow{\scriptstyle \psi} \\ X = X_{14} & \overset{\beta}{\dashrightarrow} & \mathbb{P}^2 \end{array}$$

где

- ϕ — раздутие прямой $L \subset X$ с ϕ-исключительным дивизором E,
- отображение β задается линейной системой $|H - 2L|$, где H — гиперплоское сечение,
- ψ — стандартное расслоение на коники с дискриминантной кривой $\Delta \subset \mathbb{P}^2$ степени 5,
- отображение α — композиция 6 флопов Атьи с центрами в L'_i, где L'_i — собственные прообразы прямых L_i на Y.

Имеем $E \simeq \mathbb{F}_1$. Положим $E' = \alpha(E)$. Также,

$$(H_Y - 2E)|_E \sim 2s + 3f \sim -K_E,$$

где H_Y — собственный прообраз H на Y, f — слой, а s — единственная (-1)-кривая на поверхности Хирцебруха E. Заметим, что ограничение $\psi|_{E'} \colon E' \to \mathbb{P}^2$ является двойным накрытием.

По формуле Гурвица, кривая ветвления $\Gamma_4 \subset \mathbb{P}^2$ отображения $\psi|_{E'}$ имеет степень 4. Поскольку E' гладко, Γ_4 также гладкая. Рассмотрим общую прямую $l \subset \mathbb{P}^2$, касающуюся Γ_4. Тогда прообраз $l_{E'} = \psi|_{E'}^{-1}(l)$ является рациональной кривой с одним нодом. Положим $H'_l = \psi^{-1}(l)$. Заметим, что для общей l поверхность H'_l гладкая, поскольку l пересекает дискриминантную кривую Δ стандартного конического расслоения ψ трансверсально. Заметим, что $H'_l + E' \sim -K_{Y'}$. Поскольку обе поверхности H'_l и E' гладкие и $l_{E'} = H'_l \cap E'$ является нодальной кривой, по теореме об обращении присоединения пара $(Y', H'_l + E)$ является lc. Применим лемму 3.3.2 к паре $(Y, F' + H'_1)$, чтобы заключить, что $\dim \mathcal{D}(Y, H'_l + E') = 2$, и, следовательно, $\dim \mathcal{D}(Y, H_l + E) = 2$, где H_l — собственный прообраз H'_l на Y. Следовательно, $\operatorname{coreg}(X) = 0$. □

Лемма 3.5.4. *Пусть X — общее трехмерное многообразие Фано из семейства №1.8. Тогда* $\operatorname{coreg}(X) = 0$.

Доказательство. Пусть X — общее трехмерное многообразие Фано из семейства 1.8. Тогда $g(X) = 9$ и $X \subset \mathbb{P}^{10}$. Поскольку X общее, мы можем считать, что оно не экзотическое. Согласно [IP99, Теорема 4.3.7(iii)] многообразие X может быть включено в следующую диаграмму

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{\quad\alpha\quad} & Y' = \mathrm{Bl}_\Gamma \mathbb{P}^3 \\ \downarrow{\scriptstyle \phi} & & \downarrow{\scriptstyle \psi} \\ X = X_{16} \subset \mathbb{P}^{10} & \xrightarrow{\quad\beta\quad} & \mathbb{P}^3 \end{array}$$

где

- ϕ — раздутие прямой на X,
- α — композиция флопов,
- отображение β задается линейной системой $|H - 2L|$, где H — гиперплоское сечение,
- ψ — раздутие гладкой негиперэллиптической кривой $\Gamma \subset \mathbb{P}^3$ степени 7 и рода 3.

Согласно [IP99, Теорема 4.3.7(iii)], мы знаем, что Γ лежит на единственной неприводимой кубической поверхности $F = F(\Gamma)$ с не хуже чем дувалевскими особенностями при условии, что прямая на X общая. Рассмотрим следующую границу на $\mathbb{P}^3$: $D = F + H_1$, где H_1 — плоскость, пересекающая F по объединению прямой L и коники C, пересекающихся трансверсально. По теореме об

обращении присоединения пара $(\mathbb{P}^3, D)$ является логканонической (lc). Мы имеем

$$\psi^*(K_{\mathbb{P}^3} + F + H_1) = K_{Y'} + F' + H_1' \sim 0, \qquad K_Y + F'' + H_1'' \sim 0,$$

$$\phi_*(K_Y + F'' + H_1'') = K_X + H \sim 0,$$

где F' и H_1' — собственные прообразы F и H_1 на Y', а F'' и H_1'' — их собственные прообразы на Y. Отсюда следует, что пара (X, H) является lc. Применим лемму 3.3.2 к паре $(Y, F' + H_1')$, чтобы заключить, что $\dim \mathcal{D}(Y, F' + H_1') = 2$. Следовательно, $\operatorname{coreg}(X) = 0$. □

Лемма 3.5.5. *Пусть X — общее трехмерное многообразие Фано из семейства №1.9. Тогда* $\operatorname{coreg}(X) = 0$.

Доказательство. Пусть X — общее трехмерное многообразие Фано из семейства 1.9. Тогда $g(X) = 10$ и $X \subset \mathbb{P}^{11}$. Согласно [IP99, Теорема 4.3.7(ii)] многообразие X может быть включено в следующую диаграмму

$$\begin{array}{ccc} Y & \overset{\alpha}{\dashrightarrow} & Y' = \mathrm{Bl}_\Gamma Q \\ \downarrow{\scriptstyle \phi} & & \downarrow{\scriptstyle \psi} \\ X = X_{18} \subset \mathbb{P}^{11} & \overset{\beta}{\dashrightarrow} & Q \end{array}$$

где

- ϕ — раздутие прямой на X,
- α — композиция флопов,
- отображение β задается линейной системой $|H - 2L|$, где H — гиперплоское сечение,
- ψ — раздутие гладкой кривой $\Gamma \subset Q$ степени 7 и рода 2 на гладкой квадрике $Q \subset \mathbb{P}^4$.

Согласно [IP99, Теорема 4.3.7(ii)], мы знаем, что Γ лежит на единственной неприводимой поверхности F такой, что $F \sim 2H_Q$, где $H_Q = \mathscr{O}_Q(1)$. Рассмотрим следующую границу на Q: $D = F + H_1$, где H_1 — гиперплоское сечение, пересекающее F по объединению прямой L и скрученной кубики C. Пусть F' и H_1' — собственные прообразы F и H_1 на Y', а Y'' и H_1'' — их собственные прообразы на Y. Применим лемму 3.3.2 к паре $(Y, F'' + H_1'')$, чтобы заключить, что $\dim \mathcal{D}(Y, F' + H_1') = 2$. Следовательно, $\operatorname{coreg}(X) = 0$. □

Лемма 3.5.6. *Пусть X — общее трехмерное многообразие Фано из семейства №1.10. Тогда* $\operatorname{coreg}(X) = 0$.

Доказательство. Пусть X — трехмерное многообразие Фано из семейства 1.10, отличное от примера Мукая-Умемуры, то есть не экзотическое. Тогда $g(X) = 12$ и $X \subset \mathbb{P}^{13}$. Согласно [IP99, Теорема 4.3.7(i)] многообразие X может быть включено в следующую диаграмму

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{\quad\alpha\quad} & Y' = \mathrm{Bl}_\Gamma V_5 \\ \downarrow{\scriptstyle\phi} & & \downarrow{\scriptstyle\psi} \\ X = X_{22} \subset \mathbb{P}^{13} & \xrightarrow{\quad\beta\quad} & V_5 \end{array}$$

где

- ϕ — раздутие прямой на X,
- α — композиция флопов,
- отображение β задается линейной системой $|H-2L|$, где H — гиперплоское сечение,
- ψ — раздутие гладкой рациональной кривой $\Gamma \subset V_5$ степени 5, где V_5 — трехмерное многообразие дель Пеццо степени 5.

Согласно [IP99, Теорема 4.3.7(i)], мы знаем, что Γ лежит на единственной неприводимой поверхности F такой, что $F \sim H_{V_5}$, где $H_{V_5} = \mathscr{O}_{V_5}(1)$. Рассмотрим границу D на V_5, где $D = F + H_1$ и H_1 — гиперплоское сечение, пересекающее F по объединению прямой L и гладкой рациональной кривой C степени 4. Пусть F' и H_1' — собственные прообразы F и H_1 на Y', а Y'' и H_1'' — их собственные прообразы на Y. Применим лемму 3.3.2 к паре $(Y, F' + H_1')$, чтобы заключить, что $\dim \mathcal{D}(Y, F' + H_1') = 2$. Следовательно, $\operatorname{coreg}(X) = 0$. □

3.6 Двулистное накрытие $\mathbb{P}^3$ с ветвлением в секстике

В этом разделе мы рассматриваем гладкие трехмерные многообразия Фано из семейства №1.1. Наша цель — доказать следующее утверждение.

Утверждение 3.6.1. *Пусть X — общее двулистное накрытие трехмерного проективного пространства с ветвлением в секстике, то есть гладкое трехмерное многообразие Фано из семейства №1.1. Тогда* $\operatorname{coreg}(X) \geq 1$.

Рассмотрим произведение $\mathcal{S} = \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}\mathrm{H}^0(\mathbb{P}^n, \mathscr{O}_{\mathbb{P}^n}(d))$ вместе с естественными проекциями $p\colon \mathcal{S} \to \mathbb{P}^n$ и $q\colon \mathcal{S} \to \mathbb{P}\mathrm{H}^0(\mathbb{P}^n, \mathscr{O}_{\mathbb{P}^n}(d))$. Имеем

$$\dim \mathbb{P}\mathrm{H}^0(\mathbb{P}^n, \mathscr{O}_{\mathbb{P}^n}(d)) = \binom{n+d}{n} - 1.$$

Для элемента $F \in \mathrm{H}^0(\mathbb{P}^n, \mathscr{O}_{\mathbb{P}^n}(d))$ положим $X_F = \{F = 0\} \subset \mathbb{P}^n$. Определим многообразие инцидентности

$$\mathcal{I} = \{(P, F) \in \mathcal{S} \mid F(P) = 0 \text{ и } X_F \text{ гладко}\}.$$

Заметим, что слой $p|_{\mathcal{I}}^{-1}(P)$ имеет размерность $\binom{n+d}{n} - 2$.

Лемма 3.6.2. *В обозначениях как выше, пусть $S \subset \mathcal{I}$ — непустое алгебраическое подмножество. Предположим, что для любой точки $P \in \mathbb{P}^n$ подмножество $p|_S^{-1}(P)$ имеет коразмерность не меньше n в $p|_{\mathcal{I}}^{-1}(P)$. Тогда $q(S)$ является собственным подмножеством в $\mathbb{P}\mathrm{H}^0(\mathbb{P}^n, \mathscr{O}_{\mathbb{P}^n}(d))$.*

Доказательство. Имеем $\dim p|_S^{-1}(P) \leq \binom{n+d}{n} - 2 - n$. Отсюда следует, что $\dim S \leq \binom{n+d}{n} - 2$. Таким образом, $\dim q(S) \leq \binom{n+d}{n} - 2$, и $q(S)$ — собственное подмножество в $\mathbb{P}\mathrm{H}^0(\mathbb{P}^n, \mathscr{O}_{\mathbb{P}^n}(d))$. Утверждение доказано. □

Следующая простая лемма хорошо известна.

Лемма 3.6.3. *Для общей гиперповерхности S степени d в $\mathbb{P}^n$ при $n \geq 2$, любое гиперплоское сечение H многообразия S имеет не хуже чем изолированные особые точки кратности 2.*

Доказательство. Можно считать, что S гладко. Для $d = 1$ или $n = 2$ утверждение очевидно. Поэтому считаем, что $d \geq 2$ и $n \geq 3$. Можно считать, что в некоторой аффинной карте $\mathbb{C}^n$ в окрестности точки $P \in S$ уравнение X имеет вид

$$f(x_1, \ldots, x_n) = x_n + f_2(x_1, \ldots, x_n) + \ldots + f_d(x_1, \ldots, x_n) = 0,$$

где f_i — однородные многочлены степени i. Тогда гиперплоское сечение $H \cap S$ особо в S тогда и только тогда, когда H задается уравнением $x_n = 0$. Заметим, что обращение в нуль $f_2(x_1, \ldots, x_{n-1}, 0)$ является условием коразмерности $n(n-1)/2$ на коэффициенты f. Отметим, что для $n \geq 3$ имеем $n(n-1)/2 \geq n$, поэтому можно применить лемму 3.6.2, чтобы заключить, что для общего S и для любой плоскости H в $\mathbb{P}^n$, пересечение $H \cap S$ имеет не хуже чем изолированные особые точки кратности 2. □

Лемма 3.6.4. *Пусть X — общее двулистное накрытие трехмерного проективного пространства с ветвлением в секстике. Тогда* $\mathrm{reg}_1(X) = 0$.

Доказательство. Антиканоническая линейная система $|-K_X|$ задает двулистное накрытие $\pi\colon X \to \mathbb{P}^3$, разветвленное вдоль гладкой поверхности $S \subset \mathbb{P}^3$ степени 6. Поскольку мы предполагаем X общим, то S также является общей. Для дивизора $D \in |-K_X|$ имеем $H = \pi(D)$ — плоскость в $\mathbb{P}^3$. По лемме 3.6.3, для общего S пересечение $R_H = H \cap S$ имеет не хуже чем изолированные особые точки кратности 2. Рассмотрим двулистное накрытие $\pi|_D\colon D \to H$, разветвленное вдоль R_H. Формула Гурвица дает

$$K_X + D = \pi^*(K_{\mathbb{P}^3} + 1/2S + H) \sim 0.$$

По формуле присоединения,

$$K_D = \pi^*(K_H + 1/2S|_H).$$

Поскольку $S|_H$ — кривая с не хуже чем двойными точками, по лемме 3.2.6 пара $(H, 1/2S|_H)$ является klt, следовательно, $(D, 0)$ является klt. По обращению присоединения, (X, D) является plt. Это показывает, что двойственный комплекс является точкой, и $\mathrm{reg}_1(X) = 0$ для общего X. □

Лемма 3.6.5. *Пусть X — общее двулистное накрытие трехмерного проективного пространства с ветвлением в секстике. Тогда* $\mathrm{reg}_2(X) = 0$.

Доказательство. Поскольку $\mathrm{reg}_1(X) = 0$, имеем $\mathrm{reg}_2(X) \geq 0$. Пусть Q — квадрика в $\mathbb{P}^3$. В обозначениях, как в доказательстве леммы 3.6.4, запишем

$$K_X + 1/2D = \pi^*(K_{\mathbb{P}^3} + 1/2S + 1/2Q) \sim 0$$

где $D = \pi^{-1}(Q)$. Сначала предположим, что Q приводима, то есть $Q = H_1 + H_2$, где $H_1 \neq H_2$. Тогда $D = D_1 + D_2$, где $\pi(D_i) = H_i$. По лемме 3.6.4, мы знаем, что (X, D_i) является plt для $i = 1, 2$. Следовательно, $(X, 1/2D)$ также является plt. Это показывает, что двойственный комплекс этой пары пуст.

Теперь предположим, что Q — неприводимая квадрика. Достаточно показать, что пара $(\mathbb{P}^3, 1/2S + 1/2Q)$ является klt. Поскольку S гладко, пара $(\mathbb{P}^3, S)$ является plt. Легко проверить, что пара $(\mathbb{P}^3, Q)$ также является plt. Тогда пара $(\mathbb{P}^3, 1/2S + 1/2Q)$ является plt, а значит, klt. Это показывает, что двойственный комплекс этой пары пуст. Следовательно, $\mathrm{reg}_2(X) = 0$. □

Доказательство утверждения 3.6.1 следует из лемм 3.6.4, 3.6.5 и теоремы 3.1.1.

3.7 Гиперповерхность степени 4

В этом разделе мы анализируем гладкие трехмерные многообразия Фано из семейства № 1.2. Общий элемент этого семейства — гиперповерхность степени 4 в $\mathbb{P}^4$. Наша цель — доказать следующее утверждение.

Утверждение 3.7.1. *Для общей гиперповерхности X степени 4 в $\mathbb{P}^4$ мы имеем* $\operatorname{coreg}(X) \geq 1$.

В [Ka20, Пример 3.1] показано, что для специальной гладкой трехмерной гиперповерхности X степени 4 существует граница D такая, что $\operatorname{coreg}(X, D) = 0$.

Лемма 3.7.2. *Для общей гиперповерхности X степени 4 в $\mathbb{P}^4$ имеем* $\operatorname{reg}_1(X) = 0$.

Доказательство. Пусть H — гиперплоское сечение X. По [Ish82, Основная теорема], H нормально. Мы покажем, что для общего X поверхность H не может быть строго lc, и, следовательно, $\operatorname{reg}_1(X) = 0$. Зафиксируем точку $P \in X$. Прежде всего, заметим, что H может быть особо в точке $P \in X$ только если касательное пространство $T_P X$ совпадает с гиперплоскостью, соответствующей H. Мы можем предположить, что точка P принадлежит карте $x_0 \neq 0$ и что $T_P X$ задано уравнением $x_4 = 0$. Тогда X локально в окрестности P задано уравнением

$$0 = f(x_1, \dots, x_4) = x_4 + f_2(x_1, \dots, x_4) + f_3(x_1, \dots, x_4) + f_4(x_1, \dots, x_4), \quad (3.7.1)$$

где $\deg f_i = i$. По лемме 3.2.3 точки на X с условием, что $H = T_P X \cap X$ строго lc, таковы, что выполнено одно из следующих двух условий:

1. $f_2(x_1, x_2, x_3, 0) = 0$,
2. $f_2 = l(x_1, x_2, x_3)^2$, где $l(x_1, x_2, x_3)$ — линейная форма, и если мы предположим, что $l = x_3$, то либо $f_3(x_1, x_2, 0, 0) = 0$, либо $f_3(x_1, x_2, 0, 0) = m(x_1, x_2)^3$.

Заметим, что первое из приведенных условий — условие коразмерности 6 в пространстве гиперповерхностей степени 4, содержащих P, тогда как второе условие имеет коразмерность не менее 4. По лемме 3.6.2 мы заключаем, что на общей трехмерной гиперповерхности степени 4 нет таких точек. Таким

образом, H является plt, следовательно, пара (X, H) является plt, и $\mathrm{reg}_1(X) = 0$, что завершает доказательство. □

Лемма 3.7.3. *Для общей гиперповерхности X степени 4 в $\mathbb{P}^4$ имеем $\mathrm{reg}_2(X) = 0$.*

Доказательство. Поскольку $\mathrm{reg}_1(X) = 0$, мы имеем $\mathrm{reg}_2(X) \geq 0$. Рассмотрим пару $(X, 1/2D)$, где $D \in |-2K_X|$. Предположим сначала, что $D = D_1 + D_2$ приводима, где оба D_i — гиперплоские сечения с $D_1 \neq D_2$. По лемме 3.7.2 пары (X, D_i) являются plt для $i = 1, 2$. Следовательно, пара $(X, 1/2D)$ также является plt, поэтому двойственный комплекс пары $(X, 1/2D)$ пуст.

Таким образом, мы можем предположить, что D неприводима и приведена, и пара $(X, 1/2D)$ является lc. Другими словами, D — ограничение квадрики Q в $\mathbb{P}^4$, чей ранг не менее 3. Заметим, что пересечение $X \cap Q$ приведено. Действительно, если нет, мы имеем $D = aD'$, где D' — приведенный дивизор на X. Поскольку $\mathrm{Pic}(X) \simeq \mathbb{Z}$, мы имеем $a = 2$ и D' — гиперплоское сечение X. Ограничим квадрику на гиперплоскость H такую, что $H \cap X = D$, чтобы увидеть, что это приводит к противоречию.

Пусть X локально вблизи P задано уравнением

$$\begin{aligned}
0 = f(x_1, \dots, x_4) &= x_4 + f_2(x_1, \dots, x_4) + f_3(x_1, \dots, x_4) + f_4(x_1, \dots, x_4) \\
&= x_4 + f_{2,0}x_4^2 + x_4 f_{2,1}(x_1, x_2, x_3) + f_2(x_1, x_2, x_3, 0) \\
&\quad + f_{3,0}x_4^3 + x_4^2 f_{3,1}(x_1, x_2, x_3) + x_4 f_{3,2}(x_1, x_2, x_3) + f_3(x_1, x_2, x_3, 0) \\
&\quad + f_{4,0}x_4^4 + x_4^3 f_{4,1}(x_1, x_2, x_3) + x_4^2 f_{4,2}(x_1, x_2, x_3) \\
&\quad + x_4 f_{4,3}(x_1, x_2, x_3) + f_4(x_1, x_2, x_3, 0),
\end{aligned}$$

где f_j и $f_{i,j}$ — однородные многочлены степени j. Из этого уравнения мы можем выразить x_4 следующим образом:

$$\begin{aligned}
-x_4 =& f_2(x_1, x_2, x_3, 0) + f_3(x_1, x_2, x_3, 0) - f_{2,1}(x_1, x_2, x_3) f_2(x_1, x_2, x_3, 0) \\
&+ f_{2,1}(x_1, x_2, x_3) f_3(x_1, x_2, x_3, 0) + f_{2,1}(x_1, x_2, x_3)^2 f_2(x_1, x_2, x_3, 0) \\
&- c_2 f_2(x_1, x_2, x_3, 0)^2 \qquad (3.7.2) \\
&- f_2(x_1, x_2, x_3, 0) f_{3,2}(x_1, x_2, x_3) + f_4(x_1, x_2, x_3, 0) \\
&+ (\text{члены степени} \geq 5).
\end{aligned}$$

3.7.4 Случай: D особа в P

Пусть D локально вблизи P задано уравнением

$$0 = g_2(x_1, \dots, x_4) = g_{2,0}x_4^2 + x_4 g_{2,1}(x_1, x_2, x_3) + g_2(x_1, x_2, x_3, 0), \qquad (3.7.3)$$

где g_j и $g_{2,j}$ — однородные многочлены степени j. Заметим, что $g_2(x_1, x_2, x_3, 0) \neq 0$. Действительно, иначе D приводима, что противоречит нашему предположению. Подставим выражение для x_4 из (3.7.2) в (3.7.3), чтобы получить уравнение D на X вблизи P:

$$\begin{aligned} 0 = \widetilde{g}(x_1, x_2, x_3) = {} & g_2(x_1, x_2, x_3, 0) - f_2(x_1, x_2, x_3, 0) g_{2,1}(x_1, x_2, x_3) \\ & + g_{2,0} f_2(x_1, x_2, x_3, 0)^2 + f_{2,1}(x_1, x_2, x_3) f_2(x_1, x_2, x_3, 0) g_{2,1}(x_1, x_2, x_3) \\ & - f_3(x_1, x_2, x_3, 0) g_{2,1}(x_1, x_2, x_3) + (\text{члены степени} \geq 4). \end{aligned}$$

В частности, квадратичный член в $\widetilde{g}(x_1, x_2, x_3)$ ненулевой. Тогда по лемме 3.2.6 пара $(X, 1/2D)$ является klt, и, следовательно, двойственный комплекс пуст.

3.7.5 Случай: D гладка в P

Пусть D локально вблизи P задано

$$0 = g_2(x_1, \dots, x_4) = x_4 + g_{2,0}x_4^2 + x_4 g_{2,1}(x_1, x_2, x_3) + g_2(x_1, x_2, x_3, 0), \qquad (3.7.4)$$

где g_j и $g_{2,j}$ — однородные многочлены степени j. Подставим выражение для x_4 из (3.7.4) в (3.7.2), чтобы получить уравнение D на X вблизи P:

$$\begin{aligned} 0 = \widetilde{g}(x_1, x_2, x_3) = {} & f_2(x_1, x_2, x_3, 0) - g_2(x_1, x_2, x_3, 0) \\ & + f_3(x_1, x_2, x_3, 0) - f_{2,1}(x_1, x_2, x_3) g_2(x_1, x_2, x_3, 0) + g_2(x_1, x_2, x_3, 0) g_{2,1}(x_1, x_2, x_3) \\ & + f_4(x_1, x_2, x_3, 0) + f_{2,0} g_2(x_1, x_2, x_3, 0)^2 - g_2(x_1, x_2, x_3, 0) f_{3,2}(x_1, x_2, x_3) \\ & - g_{2,0} g_2(x_1, x_2, x_3, 0)^2 - g_2(x_1, x_2, x_3, 0) g_{2,1}^2(x_1, x_2, x_3) \\ & + f_{2,1}(x_1, x_2, x_3) g_2(x_1, x_2, x_3, 0) g_{2,1}(x_1, x_2, x_3) \\ = {} & \widetilde{g}_2(x_1, x_2, x_3) + \widetilde{g}_3(x_1, x_2, x_3) + \widetilde{g}_4(x_1, x_2, x_3) + (\text{члены степени} \geq 5) \end{aligned}$$

где $\widetilde{g}_j$ — однородные многочлены степени j. Мы можем предположить, что $\widetilde{g}_2$ равно нулю, так что $g_2(x_1, x_2, x_3, 0) = -f_2(x_1, x_2, x_3, 0)$. Действительно, иначе, рассуждая как выше, мы видим, что двойственный комплекс пуст. Теперь мы рассматриваем член $\widetilde{g}_3$. Пусть C_3 — подмножество $\mathbb{P}^2$, определенное

уравнением $\widetilde{g}_3 = 0$. Согласно лемме 3.2.7 мы можем предположить, что C_3 принадлежит следующему списку:

1. объединение двойной прямой и прямой,
2. тройная прямая,
3. вся проективная плоскость.

Начнем с последнего случая. Тогда

$$f_3(x_1, x_2, x_3, 0) = f_2(x_1, x_2, x_3, 0)(f_{2,1}(x_1, x_2, x_3) - g_{2,1}(x_1, x_2, x_3)),$$

что дает условием коразмерности 7 на коэффициенты f. Следовательно, для общего X этот случай не реализуется. Во втором случае мы имеем условие коразмерности 4 на коэффициенты f, следовательно, для общего X этот случай также не реализуется.

Итак, остается рассмотреть первый случай. В этом случае мы имеем условие коразмерности 2 на коэффициенты f. После замены координат мы можем предположить, что $\widetilde{g}_3 = x_1^2 x_2$. Мы имеем

$$\begin{aligned} 0 = \widetilde{g}(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 x_2 &+ f_4(x_1, x_2, x_3, 0) + f_{2,0} f_2(x_1, x_2, x_3, 0)^2 \\ &- f_2(x_1, x_2, x_3, 0) f_{3,2}(x_1, x_2, x_3) \\ &- g_{2,0} f_2(x_1, x_2, x_3, 0)^2 - f_2(x_1, x_2, x_3, 0) g_{2,1}^2(x_1, x_2, x_3) \\ &+ f_{2,1}(x_1, x_2, x_3) f_2(x_1, x_2, x_3, 0) g_{2,1}(x_1, x_2, x_3). \end{aligned}$$

Более того, как только мы фиксировали $\widetilde{g}_3$, мы можем предположить, что $g_{2,1}$ также фиксирована. Перепишем это уравнение в виде

$$\widetilde{g} = x_1^2 x_2 + a_0 x_2^4 + a_1 x_2^3 x_3 + a_2 x_2^2 x_3^2 + a_3 x_2 x_3^3 + a_4 x_3^4 + G, \qquad a_i \in \mathbb{C}$$

где G — сумма членов более высокого порядка относительно весов $w = (3, 2, 2)$. Заметим, что если хотя бы один из a_i не равен нулю, то по следствию 3.2.11 мы закончили. С другой стороны, условие, что все a_i равны 0, имеет коразмерность 5 на коэффициенты f. Так что этот случай не реализуется для общего f. Это завершает доказательство. □

Доказательство утверждения 3.7.1 следует из лемм 3.7.2, 3.7.3 и теоремы 3.1.1.

3.8 Пересечение квадрики и кубики

В этом разделе мы рассматриваем гладкие многообразия Фано размерности три из семейства №1.3. Положим

$$\mathcal{P} = \mathbb{P}\mathrm{H}^0(\mathbb{P}^5, \mathscr{O}(2)) \times \mathbb{P}\mathrm{H}^0(\mathbb{P}^5, \mathscr{O}(3)).$$

Рассмотрим произведение $\mathcal{S} = \mathbb{P}^5 \times \mathcal{P}$ вместе с естественными проекциями

$$p\colon \mathcal{S} \to \mathbb{P}^5 \quad \text{и} \quad q\colon \mathcal{S} \to \mathcal{P}.$$

Положим $m = \dim \mathcal{P}$. Для элемента $F = (F_1, F_2) \in \mathrm{H}^0(\mathbb{P}^5, \mathscr{O}(2)) \times \mathrm{H}^0(\mathbb{P}^5, \mathscr{O}(3))$ положим $X_F = \{F_1 = F_2 = 0\} \subset \mathbb{P}^5$. Определим подмногообразие инцидентности

$$\mathcal{I} = \{(P, F) \in \mathcal{S} \mid F_1(P) = F_2(P) = 0 \text{ и } X_F \text{ гладко}\}.$$

Заметим, что $\dim p|_{\mathcal{I}}^{-1}(P) = m - 2$. В этом разделе нам понадобится следующая лемма.

Лемма 3.8.1. *В обозначениях выше, пусть $S \subset \mathcal{I}$ — непустое алгебраическое подмножество. Предположим, что для любой точки $P \in \mathbb{P}^5$ подмножество $p|_S^{-1}(P)$ имеет коразмерность не меньше 4 в $p|_{\mathcal{I}}^{-1}(P)$. Тогда $q(S)$ является собственным подмножеством в $\mathcal{P}$.*

Доказательство. Имеем $\dim p|_S^{-1}(P) \leq m - 2 - 4 = m - 6$ где m определено выше. Отсюда следует, что

$$\dim q(S) \leq \dim S \leq m - 1.$$

Таким образом, $q(S)$ является собственным подмножеством в $\mathbb{P}\mathrm{H}^0(\mathbb{P}^5, \mathscr{O}(2)) \times \mathbb{P}\mathrm{H}^0(\mathbb{P}^5, \mathscr{O}(3))$. Утверждение доказано. □

Пусть $f = 0$ — уравнение квадрики Q, а $g = 0$ — уравнение кубики Y в $\mathbb{P}^5$. Поскольку $X = Q \cap Y$ общее, мы можем считать, что Q гладкая. Заметим, что уравнение кубики не определено однозначно по X, так как мы можем заменить g на $g + lf$ для произвольной линейной формы l. Пусть $P \in X$ — точка. В окрестности P мы можем записать

$$0 = f(x_1, \ldots, x_5) = x_4 + f_2(x_1, \ldots, x_5), \tag{3.8.1}$$

$$0 = g(x_1, \ldots, x_5) = x_5 + g_2(x_1, \ldots, x_5) + g_3(x_1, \ldots, x_5). \tag{3.8.2}$$

Утверждение 3.8.2. *Для общего X выполнено* $\mathrm{reg}_1(X) = 0$.

Доказательство. Мы используем обозначения выше. Зафиксируем точку $P \in X$. Пусть H — гиперплоскость в $\mathbb{P}^5$. Если H пересекает $T_P X$ трансверсально, то пара $(X, H|_X)$ лог-гладка в точке P. Поэтому мы можем считать, что H содержит $T_P X$. Тогда H задается уравнением $ax_4 + bx_5 = 0$ для $a, b \in \mathbb{C}$, см. уравнения (3.8.1) и (3.8.2). Сначала предположим, что H задана уравнением $x_4 = 0$. Тогда пересечение $X \cap H$ задается уравнениями

$$\begin{aligned} 0 =& f(x_1, x_2, x_3, 0, x_5) = f_2(x_1, x_2, x_3, 0, x_5), \\ 0 =& g(x_1, x_2, x_3, 0, x_5) = x_5 + g_2(x_1, x_2, x_3, 0, x_5) + g_3(x_1, x_2, x_3, 0, x_5). \end{aligned} \tag{3.8.3}$$

Поскольку X общее, мы можем считать, что Q гладкая. Следовательно, уравнение $f_2(x_1, x_2, x_3, 0, x_5)$ определяет квадрику ранга 4. Выразим x_5 из второго уравнения и подставим в первое, чтобы получить уравнение $X \cap H$ в окрестности P:

$$0 = f_2(x_1, x_2, x_3, 0, 0) + (\text{члены степени} \geq 3). \tag{3.8.4}$$

Тогда $f_2(x_1, x_2, x_3, 0, 0) = 0$ определяет конику ранга не менее 2. Таким образом, по лемме 5.7.7 уравнение (3.8.4) является уравнением дювалевской особенности. В частности, пара $(H|_X, 0)$ klt, следовательно, пара $(X, H|_X)$ plt, и ее двойственный комплекс состоит из одной точки. В этом случае утверждение доказано.

Если H задана уравнением $ax_4 + x_5 = 0$ для $a \in \mathbb{C}$, то уравнения $X \cap H$ в окрестности P имеют вид:

$$0 = f(x_1, \dots, x_4, 0) = x_4 + f_2(x_1, \dots, x_4, -ax_4), \tag{3.8.5}$$

$$\begin{aligned} 0 =& g(x_1, \dots, x_4, 0) = -ax_4 + g_2(x_1, \dots, x_4, -ax_4) + g_3(x_1, \dots, x_4, -ax_4) \\ =& g_2(x_1, x_2, x_3, 0, 0) + (\widetilde{g_{2,1}}(x_1, x_2, x_3) - a)x_4 + \widetilde{g_{2,0}}x_4^2 + g_3(x_1, \dots, x_4, 0) + \dots \end{aligned} \tag{3.8.6}$$

где $\widetilde{g_{i,j}}$ — однородные многочлены степени j, коэффициенты которых зависят от коэффициентов многочленов g_k. Выразим x_4 из (3.8.5) и подставим в (3.8.6) чтобы получить уравнение $X \cap H$ в окрестности P:

$$\begin{aligned} 0 = g_2(x_1, x_2, x_3, 0, 0) + a f_2(x_1, x_2, x_3, 0, 0) - \widetilde{g_{2,1}}(x_1, x_2, x_3) f_2(x_1, x_2, x_3, 0, 0) \\ + g_3(x_1, x_2, x_3, 0, 0) + (\text{члены степени} \geq 4). \end{aligned} \tag{3.8.7}$$

Если ранг g_2 не меньше 2, то по лемме 5.7.7 мы имеем уравнение дювалевской особенности, и, рассуждая как выше, мы закончили. Поэтому мы можем считать, что g_2 является квадратом линейной формы, например, $g_2(x_1, x_2, x_3, 0, 0) =$

x_1^2. Это условие коразмерности 3 на коэффициенты g. Рассмотрим член третьего порядка из (3.8.7) ограниченный на $x_1 = 0$:

$$-g_{2,1}(0, x_2, x_3) f_2(0, x_2, x_3, 0, 0) + g_3(0, x_2, x_3, 0, 0).$$

Условие, что этот член либо обращается в ноль, либо является кубом линейной формы, представляет собой условие коразмерности не менее 1. В сумме мы получаем условие коразмерности не менее 4, поэтому для общего X это не может произойти согласно лемме 3.9.1. Тогда по лемме 3.2.3 мы заключаем, что для общего X пара $(X, H|_X)$ является plt, и ее двойственный комплекс состоит из одной точки, так что $\mathrm{reg}_1(X) = 0$. Это завершает доказательство. □

3.9 Пересечение трех квадрик

В этом разделе мы рассматриваем гладкие трехмерные многообразия Фано из семейства №1.4. Положим

$$\mathcal{P} = \mathbb{P}\mathrm{H}^0(\mathbb{P}^6, \mathscr{O}(2)) \times \mathbb{P}\mathrm{H}^0(\mathbb{P}^6, \mathscr{O}(2)) \times \mathbb{P}\mathrm{H}^0(\mathbb{P}^6, \mathscr{O}(2)).$$

Рассмотрим произведение $\mathcal{S} = \mathbb{P}^6 \times \mathcal{P}$ вместе с естественными проекциями

$$p\colon \mathcal{S} \to \mathbb{P}^6 \quad \text{и} \quad q\colon \mathcal{S} \to \mathcal{P}.$$

Положим $m = \dim \mathcal{P}$. Для элемента $F = (F_1, F_2, F_3) \in \mathrm{H}^0(\mathbb{P}^6, \mathscr{O}(2)) \times \mathrm{H}^0(\mathbb{P}^6, \mathscr{O}(2)) \times \mathrm{H}^0(\mathbb{P}^6, \mathscr{O}(2))$ положим $X_F = \{F_1 = F_2 = F_3 = 0\} \subset \mathbb{P}^6$. Определим многообразие инцидентности

$$\mathcal{I} = \{(P, F) \in \mathcal{S} \mid F_1(P) = F_2(P) = F_3(P) = 0 \text{ и } X_F \text{ гладко}\}.$$

Заметим, что $\dim p|_{\mathcal{I}}^{-1}(P) = m - 3$. Нам понадобится следующая лемма.

Лемма 3.9.1. *В обозначениях выше пусть $S \subset \mathcal{I}$ — непустое алгебраическое подмножество. Предположим, что для любой точки $P \in \mathbb{P}^6$ подмножество $p|_S^{-1}(P)$ имеет коразмерность по крайней мере 4 в $p|_{\mathcal{I}}^{-1}(P)$. Тогда $q(S)$ является собственным подмножеством в $\mathcal{S}$.*

Доказательство. Мы имеем $\dim p|_S^{-1}(P) \leq m-3-4 = m-7$, где m определено выше. Отсюда следует, что

$$\dim q(S) \leq \dim S \leq m - 1.$$

Таким образом, $q(S)$ является собственным подмножеством в $\mathcal{S}$. Утверждение доказано. □

Пусть X — гладкое трехмерное многообразие Фано из семейства №1.4. Тогда X является полным пересечением трех квадрик Q_1, Q_2 и Q_3 в $\mathbb{P}^6$. Зафиксируем точку $P \in X$. С точностью до замены координат, в окрестности P мы можем записать локальные уравнения $X = Q_1 \cap Q_2 \cap Q_3$ следующим образом:

$$\begin{aligned}
0 =& f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = x_4 + f_2(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) \\
&= x_4 + f_2(x_1, x_2, x_3, 0, 0, 0) \\
&+ x_4 l_{f,1}(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) + x_5 l_{f,2}(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) \\
&+ x_6 l_{f,3}(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) \\
&= x_4 + f_2(x_1, x_2, x_3, 0, 0, 0) + \sum_{i=1}^{6} l_{f,4i} x_4 x_i x_5 + l_{f,46} x_6) \\
&+ \sum_{i=1}^{6} l_{f,5i} x_5 x_i + \sum_{i=1}^{6} l_{f,6i} x_6 x_i,
\end{aligned} \tag{3.9.1}$$

$$\begin{aligned}
0 =& g(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = x_5 + g_2(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) \\
&= x_5 + g_2(x_1, x_2, x_3, 0, 0, 0) \\
&+ x_4 l_{g,1}(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) + x_5 l_{g,2}(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) \\
&+ x_6 l_{g,3}(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) \\
&= x_5 + g_2(x_1, x_2, x_3, 0, 0, 0) + \sum_{i=1}^{6} l_{g,4i} x_4 x_i + \sum_{i=1}^{6} l_{g,5i} x_5 x_i + \sum_{i=1}^{6} l_{g,6i} x_6 x_i,
\end{aligned} \tag{3.9.2}$$

$$\begin{aligned}
0 =& h(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = x_6 + h_2(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) \\
&= x_6 + h_2(x_1, x_2, x_3, 0, 0, 0) \\
&+ x_4 l_{h,1}(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) + x_5 l_{h,2}(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) \\
&+ x_6 l_{h,3}(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) \\
&= x_6 + h_2(x_1, x_2, x_3, 0, 0, 0) + \sum_{i=1}^{6} l_{h,4i} x_4 x_i + \sum_{i=1}^{6} l_{h,5i} x_5 x_i + \sum_{i=1}^{6} l_{h,6i} x_6 x_i
\end{aligned} \tag{3.9.3}$$

где f_2, g_2 и h_2 — однородные многочлены степени 2, $l_{f,i}$, $l_{g,i}$, $l_{h,i}$ — линейные формы, и $l_{f,ij}$, $l_{g,ij}$, $l_{h,ij} \in \mathbb{C}$ таковы, что $l_{f,ij} = l_{f,ji}$, $l_{g,ij} = l_{g,ji}$, $l_{h,ij} = l_{h,ji}$ для $4 \leq i, j \leq 6$. С точностью до степени 5 мы имеем

$$\begin{aligned}
x_4 = &- f_2(x_1, x_2, x_3, 0, 0, 0) + f_2(x_1, x_2, x_3, 0, 0, 0)(l_{f,41}x_1 + l_{f,42}x_2 + l_{f,43}x_3) \\
&+ g_2(x_1, x_2, x_3, 0, 0, 0)(l_{f,51}x_1 + l_{f,52}x_2 + l_{f,53}x_3) + h_2(x_1, x_2, x_3, 0, 0, 0)(l_{f,61}x_1 + l_{f,62}x_2 + l_{f,63}x_3) \\
&- f_2(x_1, x_2, x_3, 0, 0, 0)(l_{f,44}f_2(x_1, x_2, x_3, 0, 0, 0) + l_{f,45}g_2(x_1, x_2, x_3, 0, 0, 0) + l_{f,46}h_2(x_1, x_2, x_3, 0, 0, 0)) \\
&- g_2(x_1, x_2, x_3, 0, 0, 0)(l_{f,54}f_2(x_1, x_2, x_3, 0, 0, 0) + l_{f,55}g_2(x_1, x_2, x_3, 0, 0, 0) + l_{f,56}h_2(x_1, x_2, x_3, 0, 0, 0)) \\
&- h_2(x_1, x_2, x_3, 0, 0, 0)(l_{f,64}f_2(x_1, x_2, x_3, 0, 0, 0) + l_{f,65}g_2(x_1, x_2, x_3, 0, 0, 0) + l_{f,66}h_2(x_1, x_2, x_3, 0, 0, 0)) \\
&+ (f_2(x_1, x_2, x_3, 0, 0, 0)(l_{f,41}x_1 + l_{f,42}x_2 + l_{f,43}x_3) + g_2(x_1, x_2, x_3, 0, 0, 0)(l_{f,51}x_1 + l_{f,52}x_2 + l_{f,53}x_3) \\
&+ h_2(x_1, x_2, x_3, 0, 0, 0)(l_{f,61}x_1 + l_{f,62}x_2 + l_{f,63}x_3))(l_{f,41}x_1 + l_{f,42}x_2 + l_{f,43}x_3) \\
&+ (f_2(x_1, x_2, x_3, 0, 0, 0)(l_{g,41}x_1 + l_{g,42}x_2 + l_{g,43}x_3) + g_2(x_1, x_2, x_3, 0, 0, 0)(l_{g,51}x_1 + l_{g,52}x_2 + l_{g,53}x_3) \\
&+ h_2(x_1, x_2, x_3, 0, 0, 0)(l_{g,61}x_1 + l_{g,62}x_2 + l_{g,63}x_3))(l_{f,51}x_1 + l_{f,52}x_2 + l_{f,53}x_3) \\
&+ (f_2(x_1, x_2, x_3, 0, 0, 0)(l_{h,41}x_1 + l_{h,42}x_2 + l_{h,43}x_3) + g_2(x_1, x_2, x_3, 0, 0, 0)(l_{h,51}x_1 + l_{h,52}x_2 + l_{h,53}x_3) \\
&+ h_2(x_1, x_2, x_3, 0, 0, 0)(l_{h,61}x_1 + l_{h,62}x_2 + l_{h,63}x_3))(l_{f,61}x_1 + l_{f,62}x_2 + l_{f,63}x_3). \qquad (3.9.4)
\end{aligned}$$

Мы также можем записать аналогичные выражения для x_5 и x_6. Рассмотрим сеть квадрик, натянутую на Q_1, Q_2, Q_3. Для общего X мы можем предположить, что его дискриминантная кривая Δ степени 7 гладкая.

Утверждение 3.9.2. *Для общего X мы имеем* $\mathrm{reg}_1(X) = 0$.

Доказательство. Пусть H — гиперплоскость в $\mathbb{P}^6$. Если H пересекает $T_P X$ трансверсально, то пара $(X, H|_X)$ является лог-гладкой в точке P. Поэтому мы можем предположить, что H содержит $T_P X$. Тогда H задается уравнением $ax_4 + bx_5 + cx_6 = 0$. Выразим x_4, x_5 и x_6 из приведенных выше уравнений и подставим их в уравнение H, чтобы получить следующее уравнение для $X \cap Q'$ (записанное с точностью до членов степени 4):

$$\begin{aligned}
0 = ax_4 + bx_5 + cx_6 = &-af_2(x_1, x_2, x_3, 0, 0, 0) - bg_2(x_1, x_2, x_3, 0, 0, 0) - ch_2(x_1, x_2, x_3, 0, 0, 0) \\
&+ f_2(x_1, x_2, x_3, 0, 0, 0)(al_{f,1}(x_1, x_2, x_3, 0, 0, 0) + bl_{g,1}(x_1, x_2, x_3, 0, 0, 0) + cl_{h,1}(x_1, x_2, x_3, 0, 0, 0)) \\
&+ g_2(x_1, x_2, x_3, 0, 0, 0)(al_{f,2}(x_1, x_2, x_3, 0, 0, 0) + bl_{g,2}(x_1, x_2, x_3, 0, 0, 0) + cl_{h,2}(x_1, x_2, x_3, 0, 0, 0)) \\
&+ h_2(x_1, x_2, x_3, 0, 0, 0)(al_{f,3}(x_1, x_2, x_3, 0, 0, 0) + bl_{g,3}(x_1, x_2, x_3, 0, 0, 0) + cl_{h,3}(x_1, x_2, x_3, 0, 0, 0)).
\end{aligned}$$

Заметим, что обращение в нуль квадратичного члена этого уравнения является условием коразмерности 4, поэтому оно не может выполняться для общего X. Также условие того, что квадратичный член является квадратом линейной формы, есть условие коразмерности 1. Мы можем предположить, что $a = 1$ и $b = c = 0$, и квадратичный член равен

$$f_2(x_1, x_2, x_3, 0, 0, 0) = x_1^2,$$

а кубический член равен

$$x_1^2 l_{f,1}(x_1, x_2, x_3, 0, 0, 0) + g_2(x_1, x_2, x_3, 0, 0, 0) l_{f,2}(x_1, x_2, x_3, 0, 0, 0) + h_2(x_1, x_2, x_3, 0, 0, 0) l_{f,3}(x_1, x_2, x_3, 0, 0, 0).$$

Будем использовать утверждение 3.2.4. Положим $x_1 = 0$, чтобы получить

$$g_2(0, x_2, x_3, 0, 0, 0) l_{f,2}(0, x_2, x_3, 0, 0, 0) + h_2(0, x_2, x_3, 0, 0, 0) l_{f,3}(0, x_2, x_3, 0, 0, 0).$$

Мы можем предположить, что оба $l_{f,2}(0, x_2, x_3, 0, 0, 0)$ и $l_{f,3}(0, x_2, x_3, 0, 0, 0)$ не обращаются в нуль одновременно (иначе мы получим условие коразмерности 4).

3.9.3 Случай: $l_{f,2}(0, x_2, x_3, 0, 0, 0) = 0$

Тогда условие того, что кубический член является кубом линейной формы, влечет, что $g_2(0, x_2, x_3, 0, 0, 0)$ пропорционально $l_{f,2}(0, x_2, x_3, 0, 0, 0)^2$, что является условием коразмерности 2. В сумме мы получаем условие коразмерности 5, которое не может выполняться для общего X. Следовательно, мы можем предположить, что $l_{f,2}(0, x_2, x_3, 0, 0, 0) \neq 0$.

3.9.4 Случай: $l_{f,2}(0, x_2, x_3, 0, 0, 0)$ и $l_{f,3}(0, x_2, x_3, 0, 0, 0)$ пропорциональны

Тогда мы получаем $l_{f,2}(0, x_2, x_3, 0, 0, 0) = x_2$ и $l_{f,3}(0, x_2, x_3, 0, 0, 0) = ax_2$ для $0 \neq a \in \mathbb{C}$. Это условие коразмерности 1. Если кубический член равен нулю, мы получаем

$$g_2(0, x_2, x_3, 0, 0, 0) l_{f,2}(0, x_2, x_3, 0, 0, 0) + a h_2(0, x_2, x_3, 0, 0, 0),$$

что является условием коразмерности 3, поэтому в сумме мы получаем условие коразмерности 4, так что этот случай не реализуется для общего X. Предположим, что кубический член является кубом линейной формы, тогда $g_2(0, x_2, x_3, 0, 0, 0)$ и $h_2(0, x_2, x_3, 0, 0, 0)$ пропорциональны x_2^2. Это условие коразмерности 4, которое не может выполняться для общего X.

3.9.5 Случай: $l_{f,2}(0, x_2, x_3, 0, 0, 0)$ и $l_{f,3}(0, x_2, x_3, 0, 0, 0)$ не пропорциональны

Тогда мы можем предположить, что $l_{f,2}(0, x_2, x_3, 0, 0, 0) = x_2$ и $l_{f,3}(0, x_2, x_3, 0, 0, 0) = x_3$. Кубический член равен

$$\begin{aligned} & x_2 g_2(0, x_2, x_3, 0, 0, 0) + x_3 h_2(0, x_2, x_3, 0, 0, 0) \\ =& (a_1 x_2^2 + a_2 x_2 x_3 + a_3 x_3^2) x_2 + (b_1 x_2^2 + b_2 x_2 x_3 + b_3 x_3^2) x_3 \\ =& a_1 x_2^3 + (a_2 + b_1) x_2^2 x_3 + (a_3 + b_2) x_2 x_3^2 + b_3 x_2^3. \end{aligned}$$

Если кубический член обращается в нуль, мы получаем условие коразмерности 4, которое не может выполняться для общего X. Предположим, что в этом случае кубический член является кубом линейной формы, то есть равен

$$l(x_2, x_3)^3 = (\alpha x_2 + \beta x_3)^3 = \alpha^3 x_2^3 + 3\alpha^2 \beta x_2^2 x_3 + 3\alpha \beta^2 x_2 x_3^2 + \beta^3 x_3^3$$

для некоторых $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, что дает условие коразмерности 2, поэтому в сумме мы получаем условие коразмерности 3. Мы можем предположить, что $l(x_2, x_3) = x_2 - x_3$. Мы должны проанализировать член четвертой степени при условиях $f_2(x_1, x_2, x_3, 0, 0, 0) = x_1^2$, $x_1 = 0$ и $x_2 = x_3$:

$$\begin{aligned} & - l_{f,55} g_2(x_1, x_2, x_3, 0, 0, 0)^2 - (l_{f,56} + l_{f,65}) h_2(x_1, x_2, x_3, 0, 0, 0) g_2(x_1, x_2, x_3, 0, 0, 0) \\ & - l_{f,66} h_2(x_1, x_2, x_3, 0, 0, 0))^2 + (g_2(x_1, x_2, x_3, 0, 0, 0)(l_{f,52} + l_{f,53}) \\ & + h_2(x_1, x_2, x_3, 0, 0, 0)(l_{f,62} + l_{f,63}))(l_{f,42} + l_{f,43}) x_2^2 \\ & + (g_2(x_1, x_2, x_3, 0, 0, 0)(l_{g,52} + l_{g,53}) \\ & + h_2(x_1, x_2, x_3, 0, 0, 0)(l_{g,62} + l_{g,63}))(l_{f,52} + l_{f,53}) x_2^2 \\ & + (g_2(x_1, x_2, x_3, 0, 0, 0)(l_{h,52} + l_{h,53}) \\ & + h_2(x_1, x_2, x_3, 0, 0, 0)(l_{h,62} + l_{h,63}))(l_{f,62} + l_{f,63}) x_2^2. \end{aligned}$$

Если он равен 0, то мы имеем дополнительное условие коразмерности 1, следовательно, в сумме мы имеем условие коразмерности 4, что это не может выполняться для общего X. Это завершает доказательство. □

3.10 Многообразия Фано, не являющиеся раздутиями

Мы рассматриваем случай гладких трехмерных многообразий Фано с рангом Пикара не менее двух. Сначала разберем случай многообразий Фано, кото-

рые не могут быть реализованы как раздутие какого-либо другого гладкого многообразия. Известно, что такие трехмерные многообразия принадлежат одному из следующих семейств:

$$2.2,\ 2.6,\ 2.8,\ 2.18,\ 2.24,\ 2.32,\ 2.34,\ 2.35,\ 2.36,\ 3.1,\ 3.2,\ 3.31. \qquad (3.10.1)$$

Заметим, что многообразия $2.34, 2.35, 2.36, 3.31$ являются торическими, поэтому, согласно замечанию 3.4.1, достаточно разобрать оставшиеся случаи. Мы будем неоднократно использовать следующую лемму.

Лемма 3.10.1. *Пусть Y — гладкое трехмерное многообразие, и пусть (Y, D') является dlt (соответственно, lc) парой Калаби–Яу. Пусть $Z = \sum Z_i$ — несвязное объединение (эффективных целых неприводимых) кривых Z_i, и $P = \sum P_i$ — точки такие, что*

- *Z и P не пересекаются,*
- *каждая Z_i принадлежит гладкому локусу некоторой компоненты D'_j границы D' с коэффициентом 1,*
- *каждая P_i принадлежит гладкому локусу пересечения $D'_j \cap D'_k$ для некоторых $j \neq k$, где D'_j и D'_k — компоненты D' с коэффициентом 1.*

Пусть $X = \mathrm{Bl}_{Z \cup P}(Y)$ — раздутие объединения Z и P на Y. Рассмотрим логарифмический обратный образ (X, D) пары (Y, D'), который является dlt (соответственно, lc) парой Калаби–Яу. Тогда $\mathcal{D}(Y, D')$ гомеоморфно $\mathcal{D}(X, D)$. В частности, если $\mathcal{D}(Y, D') = 2$, то $\mathrm{coreg}(Y) = \mathrm{coreg}(X) = 0$.

Доказательство. Равенство $\dim \mathcal{D}(Y, D') = \dim \mathcal{D}(X, D)$ следует из [dFKX17, Proposition 11], поскольку пары (X, D) и (Y, D') крепантно бирациональны. Последнее утверждение следует немедленно. □

Лемма 3.10.2. *Пусть Y — гладкое трехмерное многообразие. Пусть $f\colon X \to Y$ — конечный морфизм степени 2 с гладким дивизором ветвления $R \subset Y$, так что в частности X также гладко. Предположим, что существует граница D' на Y такая, что никакая компонента R не содержится в D', и что пара $(Y, D' + R/2)$ является lc логарифмической парой Калаби–Яу. Тогда пара (X, D) является lc парой Калаби–Яу, где D определяется формулой*

$$K_X + D = f^*(K_Y + D' + R/2) \sim_{\mathbb{Q}} 0.$$

Кроме того, если пара $(Y, D' + R/2)$ является snc, то (X, D) также является snc. Следовательно, если $\mathrm{coreg}(Y, D' + R/2) = 0$, то $\mathrm{coreg}(X, D) = 0$.

Доказательство. Следует из формулы Гурвица. □

Мы разбираем трехмерные многообразия Фано, перечисленные в (3.10.1), начиная со случая ранга Пикара 2. Оказывается, что с многообразиями с большей антиканонической степенью $(-K_X)^3$ проще работать, поэтому мы анализируем их первыми.

Лемма 3.10.3. *Пусть X — трехмерное многообразие Фано из семейства №2.32. Тогда* $\operatorname{coreg}(X) = 0$.

Доказательство. Многообразие X является гладким дивизором бистепени $(1,1)$ в $\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2$. Пусть $D = D_1 + D_2 + D_3 + D_4$ — граничный дивизор на X, где D_1 и D_2 имеют бистепень $(1,0)$, D_3 и D_4 имеют бистепень $(0,1)$, и все дивизоры D_i общие. Имеем $-K_X \sim D$. Заметим, что $D_1 \cap D_2 \cap D_3 \neq \emptyset$ и пара (X, D) имеет простые нормальные пересечения, что показывает $\operatorname{coreg}(X) = 0$. □

Лемма 3.10.4. *Пусть X — трехмерное многообразие Фано из семейства №2.24. Тогда* $\operatorname{coreg}(X) = 0$.

Доказательство. Многообразие X является гладким дивизором бистепени $(1,2)$ на $\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2$. Пусть $D = D_1 + D_2 + D_3$ — граничный дивизор на X, где D_1 и D_2 имеют бистепень $(1,0)$, D_3 имеет бистепень $(0,1)$, и все дивизоры D_i общие. По формуле присоединения имеем $-K_X \sim D$. Заметим, что $D_1 \cap D_2 \cap D_3 \neq \emptyset$, пара (X, D) имеет простые нормальные пересечения, что показывает $\operatorname{coreg}(X) = 0$. □

Лемма 3.10.5. *Пусть X — трехмерное многообразие Фано из семейства №2.18. Тогда* $\operatorname{coreg}(X) = 0$.

Доказательство. Многообразие X реализуется как двулистное накрытие $f\colon X \to Y = \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^2$, разветвленное вдоль гладкого дивизора R бистепени $(2,2)$ на Y. Формула Гурвица дает

$$K_X = f^*(K_Y + R/2).$$

Выберем дополнение для $K_Y + R/2 \sim (-1,-2)$ вида $D' = D'_1 + D'_2 + D'_3$, где D'_i — общие дивизоры на Y бистепеней $(1,0)$, $(0,1)$ и $(0,1)$ соответственно. По построению пара $(Y, D' + R/2)$ имеет простые нормальные пересечения, и D' имеет нульмерный страт. Применяя лемму 3.10.2, заключаем, что $\operatorname{coreg}(X) = 0$. □

Лемма 3.10.6. *Пусть X — трехмерное многообразие Фано из семейства №2.8. Тогда* $\operatorname{coreg}(X) = 0$.

Доказательство. Многообразие X реализуется как двулистное накрытие $f\colon X \to V_7$, разветвленное вдоль гладкого дивизора R на V_7, где $R \sim -K_{V_7}$. Обозначим через $g\colon V_7 \to \mathbb{P}^3$ раздутие в точке $P \in \mathbb{P}^3$, а через E — исключительный дивизор g. Формула Гурвица дает

$$K_X = f^*(K_{V_7} + R/2) \sim f^*(-2H + E),$$

где H — собственный прообраз общей плоскости при отображении g. Рассмотрим дополнение $D' = D'_1 + D'_2 + D'_3$ на V_7, где D'_1 и D'_2 — собственные прообразы общих плоскостей, проходящих через P, так что $D'_1 \sim D'_2 \sim H - E$, а $D'_3 = E$. По построению пара $(Y, D' + R/2)$ имеет простые нормальные пересечения, и D' имеет нульмерный страт. Применяя лемму 3.10.2, заключаем, что $\operatorname{coreg}(X) = 0$. □

Лемма 3.10.7. *Пусть X — трехмерное многообразие Фано из семейства №2.6. Тогда* $\operatorname{coreg}(X) = 0$.

Доказательство. Сначала рассмотрим случай, когда X — гладкий дивизор бистепени $(2, 2)$ в $\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2$. Пусть $\pi_i\colon X \to \mathbb{P}^2$ — естественные проекции. Построим дополнение для K_X вида $D = D_1 + D_2$, где D_1 и D_2 — гладкие поверхности на X бистепеней $(1, 0)$ и $(0, 1)$ соответственно. Заметим, что каждая D_i является поверхностью дель Пеццо степени 2. Начнем с общей D_1. Заметим, что $\pi_2|_{D_1}\colon D_1 \to \mathbb{P}^2$ — двулистное накрытие, разветвленное вдоль гладкой квартики $C \subset \mathbb{P}^2$. Рассмотрим проекцию $\pi_2\colon X \to \mathbb{P}^2$, которая является расслоением на коники с дискриминантной кривой $\Delta \subset \mathbb{P}^2$ степени 6. Мы можем выбрать прямую $L \subset \mathbb{P}^2$ такую, что L касается C и L пересекает Δ трансверсально. Действительно, это следует из того, что двойственные кривые $C^\vee$ и $\Delta^\vee$ в двойственной плоскости $(\mathbb{P}^2)^\vee$ различны. Тогда $D_2 = \pi_2^{-1}(L)$ — дивизор бистепени $(0, 1)$, и $D_1 \cap D_2$ — нодальная кривая арифметического рода 1. Также заметим, что D_2 гладкая. Применяя лемму 3.3.3, видим, что $\operatorname{coreg}(X) = 0$.

Теперь рассмотрим случай, когда X является двойным накрытием $f\colon X \to Y$, где Y — многообразие Фано 2.32, то есть Y — гладкий дивизор бистепени $(1, 1)$ в $\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2$, и f разветвлено вдоль гладкого дивизора $R \sim -K_Y$. Формула Гурвица дает

$$K_X = f^*(K_Y + R/2).$$

Построим дополнение $D' = D'_1 + D'_2$ для $K_Y + R/2 \sim (-1,-1)$, где D'_i гладкие, D'_1 имеет бистепень $(1,0)$, а D'_2 — бистепень $(0,1)$. Заметим, что обе D'_i изоморфны поверхности Хирцебруха $\mathbb{F}_1$. Выберем их так, чтобы их пересечение было объединением двух гладких рациональных кривых L_1 и L_2, пересекающихся трансверсально.

Для этого начнем с общей D'_1 бистепени $(1,0)$. Тогда $\pi_2|_{D'_1}\colon D'_1 \to \mathbb{P}^2$ — раздутие точки $P \in \mathbb{P}^2$. Рассмотрим прямую $L \subset \mathbb{P}^2$ такую, что $P \in L$. Тогда прообраз $\pi_2|^{-1}_{D'_1}(L)$ является приводимой кривой C на D'_1, такой что $C = L_1 + L_2$, где L_1 — (-1)-кривая на D'_1, а L_2 — слой проекции $D'_1 = \mathbb{F}_1 \to \mathbb{P}^1$. Положим $D'_2 = \pi_2^{-1}(L)$. Тогда ясно, что D'_2 имеет бистепень $(0,1)$. Заметим, что

$$N_{L_1/D'_1} = \mathscr{O}(-1), \qquad L_1 \cdot D'_1 = 1 \qquad \text{и} \qquad N_{L_1/X} = \mathscr{O} \oplus \mathscr{O},$$

где последнее выполняется потому, что L_1 является слоем $\mathbb{P}^1$-расслоения π_1. Применяя лемму 3.3.2, заключаем, что $\dim \mathcal{D}(Y, D') = 2$. Поскольку D'_1 была выбрана общей, $R \cap D'_1$ — гладкая неприводимая кривая, являющаяся "положительным" сечением проекции $D'_1 = \mathbb{F}_1 \to \mathbb{P}^1$. Применяя лемму 3.10.2, заключаем, что $\operatorname{coreg}(X) = 0$. □

Лемма 3.10.8. *Пусть X — трехмерное многообразие Фано из семейства №2.2. Тогда* $\operatorname{coreg}(X) = 0$.

Доказательство. Многообразие X реализуется как двулистное накрытие $f\colon X \to Y = \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^2$, разветвленное вдоль гладкого дивизора R бистепени $(2,4)$. Формула Гурвица дает

$$K_X = f^*(K_Y + R/2) \sim f^*((-1,-1)).$$

Выберем дополнение для $K_Y + R/2$ вида $D' = D'_1 + D'_2$, где D'_1 и D'_2 — дивизоры на Y бистепеней $(1,0)$ и $(0,1)$ соответственно. Покажем, что мы можем выбрать D'_1 и D'_2 так, что пересечение их прообразов $D_1 = f^*(D'_1)$ и $D_2 = f^*(D'_2)$ будет объединением двух гладких рациональных кривых L_1 и L_2. Сначала выберем D'_1 общей и заметим, что $D_1 = f^*(D'_1)$ — гладкая поверхность дель Пеццо степени 2, и для $C = D_2|_{D_1}$ имеем $C \sim -K_{D_1}$. Заметим, что $C' = f(C)$ — прямая на $D'_1 = \mathbb{P}^2$. Мы можем выбрать D'_2 так, что C' будет общей касательной прямой к гладкой квартике $R \cap D'_1$, и D'_2 будет гладким. Тогда C — нодальная неприводимая кривая арифметического рода 1 на D'_1.

Следовательно, мы имеем дополнение для K_X вида $D = D_1 + D_2$, так что

$$K_X + D = f^*(K_Y + R/2 + D') \sim 0.$$

Применяя лемму 3.3.3 и лемму 3.10.2, видим, что $\operatorname{coreg}(X) = 0$. □

Мы рассматриваем трехмерные многообразия Фано, перечисленные в (3.10.1), с рангом Пикара 3.

Лемма 3.10.9. *Пусть X — трехмерное многообразие Фано из семейства №3.2. Тогда* $\operatorname{coreg}(X) = 0$.

Доказательство. Имеем, что X является гладким дивизором в $\mathbb{P}^2$-расслоении над $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ вида

$$\mathbb{P} = \mathbb{P}_{\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1}(\mathscr{O} \oplus \mathscr{O}(-1,-1)^{\oplus 2})$$

таким, что $X \sim 2L + 2F_1 + 3F_3$, где F_1 — прообраз дивизора l_1 бистепени $(1,0)$ на $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ при естественной проекции на $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$, F_2 — прообраз дивизора l_2 бистепени $(0,1)$ при естественной проекции на $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$, а L — тавтологический дивизор. Имеем

$$K_{\mathbb{P}} = -3L - 4F_1 - 4F_2, \qquad K_X = (-L - 2F_1 - F_2)|_X.$$

Положим $L_X = L|_X$. Заметим, что L_X является бисечением естественной проекции $\pi\colon X \to \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$, то есть пересекает ее общий слой в двух точках. Имеем $L_X \simeq \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$. Рассмотрим границу D на X такую, что $D = D_1 + D_2 + D_3 + D_4$, где $D_1 = L_X$, $D_2 \sim D_3 \sim F_1|_X$ общие, и $D_4 \sim F_2|_X$ также общий. Тогда $K_X + D \sim 0$, пара (X, D) имеет простые нормальные пересечения, и

$$(K_X + L_X)|_{L_X} = K_{L_X} \sim -2l_1 - 2l_2.$$

Заметим, что $F_1|_{L_X} \sim l_1$, а $F_2|_{L_X} \sim 2l_2$. Следовательно, $D_1 \cap D_2 \cap D_3 \neq \emptyset$, и поэтому $\operatorname{coreg}(X) = 0$. □

Лемма 3.10.10. *Пусть X — трехмерное многообразие Фано из семейства №3.1. Тогда* $\operatorname{coreg}(X) = 0$.

Доказательство. Многообразие X реализуется как двулистное накрытие $f\colon X \to Y = \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$, разветвленное вдоль гладкого дивизора R типа $(2,2,2)$. Формула Гурвица дает

$$K_X = f^*(K_Y + R/2).$$

Выберем дополнение для $K_Y + R/2 \sim (-1,-1,-1)$ вида $D' = D'_1 + D'_2 + D'_3$, где D'_i — общие дивизоры на Y типа $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ и $(0,0,1)$ соответственно. Заметим, что $D'_1 \cap D'_2 \cap D'_3 \neq \emptyset$, и пара (Y, D') имеет простые нормальные пересечения. Применяя лемму 3.10.2, заключаем, что $\mathrm{coreg}(X) = 0$. □

3.11 Раздутия многообразий Фано с $\rho = 2$

В дальнейшем мы будем использовать следующее хорошо известное описание нормального расслоения к прямой на гладком трехмерном многообразии Фано, см., например, [KPS18, Proposition 2.2.8.]. А именно, для любой прямой $L \subset \mathbb{P}^3$ имеем $N_{L/\mathbb{P}^3} = \mathscr{O}(1) \oplus \mathscr{O}(1)$. Для любой прямой L на гладкой квадрике $Q \subset \mathbb{P}^4$ имеем $N_{L/Y} = \mathscr{O} \oplus \mathscr{O}(1)$. Для гладкого трехмерного многообразия дель Пеццо Y имеем $N_{L/Y} = \mathscr{O} \oplus \mathscr{O}$ для общей прямой $L \subset Y$ и $N_{L/Y} = \mathscr{O}(-1) \oplus \mathscr{O}(1)$ для специальных прямых.

Замечание 3.11.1. Заметим, что трехмерное многообразие дель Пеццо Y с $\rho(Y) = 1$ не содержит плоскостей во вложении, заданном линейной системой $|-K_Y/2|$. Действительно, предположим, что $H \subset Y$ — плоскость, то есть $H \simeq \mathbb{P}^2$. Тогда для двух общих гиперплоских сечений H_1 и H_2 имеем $H \cdot H_1 \cdot H_2 = 1$. С другой стороны, пусть H' — образующая группы $\mathrm{Pic}(Y)$. Тогда $H \sim kH'$, и мы имеем $1 = H \cdot H_1 \cdot H_2 = kH'^3 = kd$, так что $d = 1$ и $k = 1$. Но это противоречит формуле присоединения $-3H|_H = K_H = (K_X + H)|_H = -H|_H$. Рассуждая аналогично, мы видим, что Y не содержит гладких квадрик и квадратичных конусов.

Мы рассматриваем трехмерные многообразия Фано, которые могут быть реализованы как раздутие некоторого другого гладкого многообразия. Сначала разберем случай многообразий с числом Пикара 2.

Лемма 3.11.2. *Пусть X — трехмерное многообразие Фано с числом Пикара 2, которое может быть реализовано как раздутие некоторого другого гладкого многообразия. В случае, когда X принадлежит семейству №2.1, мы предполагаем, что X общее. Тогда* $\mathrm{coreg}(X) = 0$.

Доказательство. Мы применяем лемму 3.10.1 и используем ее обозначения. Далее мы строим пары (Y, D') корегулярности 0 и описываем подмножество $Z \subset Y$ такое, что $X = \mathrm{Bl}_Z Y$. Тогда лог-прообраз (X, D) пары (Y, D') также будет иметь корегулярность 0.

3.11.3 Случай $Y = \mathbb{P}^3$

X — многообразие Фано № 2.30,

Z — плоская коника, $D' = D'_1 + D'_2 + D'_3 + D'_4$, где D'_i — общие плоскости, причем $Z \subset D'_1$.

X — многообразие Фано № 2.28,

Z — плоская кубическая кривая, D' — как в предыдущем случае, и $Z \subset D'_1$.

X — многообразие Фано № 2.27,

Z — скрученная кубическая кривая, $D' = D'_1 + D'_2 + D'_3$, где D'_1 — гладкая квадрика, D'_2 и D'_3 — общие плоскости, и $Z \subset D'_1$.

X — многообразие Фано № 2.25,

Z — гладкая эллиптическая кривая степени 4, являющаяся пересечением двух квадрик, D' — как в предыдущем случае, и $Z \subset D'_1$.

X — многообразие Фано № 2.15,

Z — гладкая кривая степени 6, являющаяся пересечением квадрики и гладкой кубической поверхности, $D' = D'_1 + D'_2 + D'_3$, где D'_1 — либо гладкая квадрика, либо квадрический конус, D'_2 и D'_3 — общие плоскости, и $Z \subset D'_1$.

X — многообразие Фано № 2.12,

Z — гладкая кривая степени 6 и рода 3, являющаяся пересечением 4 кубических поверхностей, $D' = D'_1 + D'_2$, где D'_1 — кубическая поверхность такая, что $Z \subset D'_1$, D'_2 — гиперплоскость такая, что $D'_1 \cap D'_2$ является объединением прямой L и коники C. По лемме 3.3.1 мы можем выбрать D'_1 гладкой. Поскольку $N_{L/Y} = \mathscr{O}(1) \oplus \mathscr{O}(1)$, по лемме 3.3.2 мы видим, что $\dim \mathcal{D}(Y, D') = 2$. Таким образом, $\operatorname{coreg}(Y, D') = 0$.

X — многообразие Фано № 2.9,

Z — гладкая кривая степени 7 и рода 5, являющаяся пересечением кубических поверхностей, D' — как в предыдущем случае, и $Z \subset D'_1$. По лемме 3.3.1

мы можем предположить, что D'_1 гладкая. По лемме 3.3.2 мы видим, что $\dim \mathcal{D}(Y, D') = 2$. Таким образом, $\operatorname{coreg}(Y, D') = 0$.

X — многообразие Фано № 2.4,

Z — гладкая кривая, являющаяся пересечением двух кубических поверхностей, D' — как в предыдущем случае, и $Z \subset D'_1$. По лемме 3.3.1 мы можем предположить, что D'_1 гладкая. По лемме 3.3.2 мы видим, что $\dim \mathcal{D}(Y, D') = 2$. Таким образом, $\operatorname{coreg}(Y, D') = 0$.

3.11.4 Случай $Y = Q$

Рассмотрим случай, когда Y — гладкая квадрика в $\mathbb{P}^4$.

X — многообразие Фано № 2.31,

Z — прямая, $D' = D'_1 + D'_2 + D'_3$, где D'_i — общие гиперплоские сечения, и $Z \subset D'_1$. По лемме 3.3.1 можно выбрать D'_1 так, чтобы она была гладкой.

X — многообразие Фано № 2.29,

Z — коника, D' — как в предыдущем случае, и $Z \subset D'_1$. По лемме 3.3.1 мы можем выбрать D'_1 гладкой.

X — многообразие Фано № 2.23,

Z — гладкая кривая, являющаяся пересечением гиперплоского сечения и элемента из $\mathscr{O}_Y(2)$, $D' = D'_1 + D'_2 + D'_3$, где D'_1 — либо гладкое гиперплоское сечение, либо гиперплоское сечение, являющееся квадрическим конусом, D'_2 и D'_3 — общие гиперплоские сечения, и $Z \subset D'_1$.

X — многообразие Фано № 2.21,

Z — гладкая рациональная квартическая кривая, $D' = D'_1 + D'_2$, где D'_1 — гладкий элемент из $\mathscr{O}_Y(2)$ такой, что $Z \subset D'_1$, D'_2 — гладкое гиперплоское сечение такое, что D'_1 пересекается с D'_2 по объединению прямой L и гладкой рациональной кубической кривой C. Мы можем выбрать такие D'_1 и D'_2 по

лемме 3.3.1. Поскольку $N_{L/Y} = \mathscr{O} \oplus \mathscr{O}(1)$, по лемме 3.3.2 мы видим, что $\dim \mathcal{D}(Y, D') = 2$. Таким образом, $\operatorname{coreg}(Y, D') = 0$.

X — многообразие Фано № 2.17,

Z — эллиптическая кривая степени 5, $D' = D'_1 + D'_2$, где D'_1 — гладкий элемент из $\mathscr{O}_Y(2)$ такой, что $Z \subset D'_1$, D'_2 — гладкое гиперплоское сечение такое, что D'_1 пересекается с D'_2 по объединению прямой L и гладкой рациональной кубической кривой C. Мы можем выбрать такие D'_1 и D'_2 по лемме 3.3.1. Поскольку $N_{L/Y} = \mathscr{O} \oplus \mathscr{O}(1)$, по лемме 3.3.2 мы видим, что $\dim \mathcal{D}(Y, D') = 2$. Таким образом, $\operatorname{coreg}(Y, D') = 0$.

X — многообразие Фано № 2.13,

Z — гладкая кривая степени 6 и рода 2, являющаяся пересечением квадрик, D' — как в предыдущем случае, $D'_1 \cap D'_2$ — объединение прямой L и гладкой рациональной кубической кривой C, и $Z \subset D'_1$. Мы можем выбрать D'_1 гладкой по лемме 3.3.1. По лемме 3.3.2 мы видим, что $\dim \mathcal{D}(Y, D') = 2$. Таким образом, $\operatorname{coreg}(Y, D') = 0$.

X — многообразие Фано № 2.7,

Z — гладкая кривая, являющаяся пересечением двух элементов из $\mathscr{O}_Y(2)$, D' — как в предыдущем случае. Мы можем выбрать D'_1 гладкой по лемме 3.3.1. По лемме 3.3.2 мы видим, что $\dim \mathcal{D}(Y, D') = 2$. Таким образом, $\operatorname{coreg}(Y, D') = 0$.

3.11.5 Случай $Y = V_5$

Рассмотрим случай, когда Y — пересечение грассманиана $\mathrm{Gr}(2, 5) \subset \mathbb{P}^9$ с подпространством коразмерности 3.

X — многообразие Фано № 2.26,

Z — прямая, $D' = D'_1 + D'_2$, где D'_1 и D'_2 — гладкие гиперплоские сечения, пересекающиеся по объединению прямой Z и гладкой рациональной квартической кривой C, см. построение в лемме 3.4.4. По лемме 3.3.2 мы видим, что $\dim \mathcal{D}(Y, D') = 2$. Таким образом, $\operatorname{coreg}(Y, D') = 0$.

X — многообразие Фано № 2.22,

Z — коника, $D' = D'_1 + D'_2$, где D'_1 и D'_2 — гладкие гиперплоские сечения, пересекающиеся по объединению прямой L и гладкой рациональной квартической кривой C, как построено в лемме 3.4.4, и $Z \subset D'_1$. Мы утверждаем, что гиперплоское сечение D'_1 можно выбрать гладким. Пусть $\Pi = \mathbb{P}^2$ — плоскость, содержащая Z. Поскольку грассманиан является пересечением квадрик и Y не содержит плоскостей по замечанию 3.11.1, мы имеем $Y \cap \Pi = Z$. Следовательно, по лемме 3.3.1 мы можем выбрать гладкое гиперплоское сечение D'_1 такое, что $Z \subset D'_1$. Затем мы выбираем гладкое гиперплоское сечение D'_2, которое пересекается с D'_1 по объединению прямой L и гладкой рациональной кривой C, как в лемме 3.4.4. По лемме 3.3.2 мы видим, что $\dim \mathcal{D}(Y, D') = 2$. Таким образом, $\operatorname{coreg}(Y, D') = 0$.

X — многообразие Фано № 2.20,

Z — скрученная кубика, D' — как в предыдущем случае, и $Z \subset D'_1$. Объясним, почему мы можем выбрать такое гладкое гиперплоское сечение D'_1. Пусть $\Pi = \mathbb{P}^3$ — проективное подпространство, содержащее Z. Поскольку грассманиан является пересечением квадрик и Y не содержит квадрик или квадрических конусов по замечанию 3.11.1, мы имеем, что пересечение $Y \cap \Pi$ — это либо Z, либо $Z \cup Z'$, где Z' — прямая. В обоих случаях, используя лемму 3.3.1, можно выбрать D'_1 так, чтобы она была гладкой. Затем мы выбираем гладкое гиперплоское сечение D'_2, которое пересекается с D'_1 по объединению прямой L и гладкой рациональной кривой C, как в лемме 3.4.4. По лемме 3.3.2 мы видим, что $\dim \mathcal{D}(Y, D') = 2$. Таким образом, $\operatorname{coreg}(Y, D') = 0$.

X — многообразие Фано № 2.14,

Z — эллиптическая кривая, являющаяся пересечением двух гиперплоских сечений, D' — как в предыдущем случае, и $Z \subset D'_1$. По лемме 3.3.1 мы можем предположить, что D'_1 гладкая. По лемме 3.3.2 мы видим, что $\dim \mathcal{D}(Y, D') = 2$. Таким образом, $\dim \mathcal{D}(Y, D') = 2$, и $\operatorname{coreg}(Y, D') = 0$.

3.11.6 Случай $Y = V_4$

Рассмотрим случай, когда Y — пересечение двух квадрик в $\mathbb{P}^5$.

X — многообразие Фано № 2.19,

Z — прямая, $D' = D'_1 + D'_2$, где D'_1 и D'_2 — гладкие гиперплоские сечения, пересекающиеся по объединению прямой Z и гладкой рациональной кубической кривой C, как построено в лемме 3.4.4, так что $Z \subset D'_1$. По лемме 3.3.2 мы видим, что $\dim \mathcal{D}(Y, D') = 2$. Таким образом, $\operatorname{coreg}(Y, D') = 0$.

X — многообразие Фано № 2.16,

Z — коника, $D' = D'_1 + D'_2$, где D'_1 и D'_2 — гладкие гиперплоские сечения, пересекающиеся по объединению прямой L и гладкой рациональной кубической кривой C, как построено в лемме 3.4.4, и $Z \subset D'_1$. Объясним, почему мы можем выбрать такое гладкое гиперплоское сечение D'_1. Пусть $\Pi = \mathbb{P}^2$ — плоскость в $\mathbb{P}^5$, содержащая Z. По замечанию 3.11.1 мы имеем, что $\Pi \not\subset Y$. Заметим, что Y задается пучком квадрик, ограничение которого на Π является пучком коник, содержащих Z (в частности, это означает, что ровно одна из квадрик в пучке содержит Π). Это показывает, что $\Pi \cap Y = Z$. По лемме 3.3.1 мы можем выбрать гиперплоское сечение D'_1 так, чтобы оно было гладким и $Z \subset D'_1$. По лемме 3.3.2 мы видим, что $\dim \mathcal{D}(Y, D') = 2$. Таким образом, $\operatorname{coreg}(Y, D') = 0$.

X — многообразие Фано № 2.10,

Z — гладкая эллиптическая кривая, являющаяся пересечением двух гиперплоских сечений, D' — как в предыдущем случае, и $Z \subset D'_1$. По лемме 3.3.2 мы видим, что $\dim \mathcal{D}(Y, D') = 2$. Таким образом, $\operatorname{coreg}(Y, D') = 0$.

3.11.7 Случай $Y = V_3$

Рассмотрим случай, когда Y — гладкая кубическая гиперповерхность в $\mathbb{P}^4$.

X — многообразие Фано № 2.11,

Z — прямая, $D' = D'_1 + D'_2$, где D'_i — гладкие гиперплоские сечения, пересекающиеся по объединению прямой Z и коники C, как построено в лемме 3.4.4, и $Z \subset D'_1$. По лемме 3.3.2 мы видим, что $\dim \mathcal{D}(Y, D') = 2$. Таким образом, $\operatorname{coreg}(Y, D') = 0$.

X — **многообразие Фано № 2.5,**

Z — гладкая плоская кубическая кривая, являющаяся пересечением двух гиперплоских сечений, $D' = D'_1 + D'_2$, где D'_i — гладкие гиперплоские сечения, пересекающиеся по объединению прямой L и коники C, как построено в лемме 3.4.4, и $Z \subset D'_1$. По лемме 3.3.2 мы видим, что $\dim \mathcal{D}(Y, D') = 2$. Таким образом, $\dim \mathcal{D}(Y, D') = 2$, и $\operatorname{coreg}(Y, D') = 0$.

3.11.8 Случай $Y = V_2$

Рассмотрим случай, когда Y — двулистное накрытие $\mathbb{P}^3$, разветвленное вдоль гладкой квартической поверхности. Тогда X — многообразие Фано № 2.3, Z — гладкая плоская кубическая кривая, являющаяся пересечением двух гиперплоских сечений, $D' = D'_1 + D'_2$, где D'_i — гладкие гиперплоские сечения, пересекающиеся по объединению двух гладких рациональных кривых, как построено в лемме 3.4.4, и $Z \subset D'_1$. По лемме 3.3.2 мы видим, что $\dim \mathcal{D}(Y, D') = 2$. Таким образом, $\operatorname{coreg}(Y, D') = 0$.

3.11.9 Случай $Y = V_1$

То есть Y — гиперповерхность степени 6 в $\mathbb{P}(1, 1, 1, 2, 3)$. Тогда X — многообразие Фано № 2.1, Z — эллиптическая кривая, являющаяся пересечением двух элементов H_1 и H_2 таких, что $H_i \sim H$, где $-K_Y \sim 2H$, $D' = D'_1 + D'_2$, где $D'_i \sim H$ — гладкие поверхности, пересекающиеся по нодальной кривой C, как построено в лемме 3.4.7. Здесь мы используем предположение, что Y общее. Точнее, в лемме 3.4.7 мы показали, что для общего элемента в $|H|$ его антиканоническая линейная система содержит нодальную кривую. Следовательно, начиная с $D'_1 = H_1$ и предполагая ее общей, мы можем найти элемент $D'_2 \in |H|$ такой, что пересечение $D'_1 \cap D'_2$ является нодальной кривой. Применяя лемму 3.3.3, мы видим, что $\dim \mathcal{D}(Y, D') = 2$. Таким образом, $\operatorname{coreg}(Y, D') = 0$.

Мы рассмотрели все гладкие трехмерные многообразия Фано с числом Пикара 2, которые могут быть реализованы как раздутие некоторого другого гладкого многообразия, и показали, что они допускают границу корегулярности 0. Это завершает доказательство. □

3.12 Раздутия Фано с $\rho \geq 3$

Осталось рассмотреть трехмерные многообразия Фано с числом Пикара не менее 3, которые могут быть реализованы как раздутие некоторого другого трехмерного многообразия.

Лемма 3.12.1. *Пусть X — трехмерное многообразие Фано с числом Пикара не менее 3 и такое, что оно может быть реализовано как раздутие некоторого другого гладкого многообразия. Тогда* $\operatorname{coreg}(X) = 0$.

Доказательство. Мы применяем лемму 3.10.1 и используем ее обозначения. В дальнейшем мы строим пары (Y, D') коразмерности 0 и описываем подмножество $Z \subset Y$ такое, что $X = \mathrm{Bl}_Z Y$. Тогда лог-прообраз (X, D) пары (Y, D') также будет иметь коразмерность 0.

3.12.2 Случай $Y = \mathbb{P}^3$.

X — многообразие Фано № 3.18,

$Z = Z_1 + Z_2$, где Z_1 — прямая, а Z_2 — коника на плоскости, $D' = D'_1 + D'_2 + D'_3 + D'_4$, где D'_i — общие плоскости, такие что $Z_1 \subset D'_1$ и $Z_2 \subset D'_2$.

X — многообразие Фано № 3.14,

Z — гладкая кубическая кривая, лежащая в плоскости Π, а P — точка, такая что $P \notin \Pi$, D' как в предыдущем случае, но с условием $Z \subset D'_1$ и $P \in D'_2 \cap D'_3$.

X — многообразие Фано № 3.12,

$Z = Z_1 + Z_2$, где Z_1 — прямая, а Z_2 — скрученная кубика, $D' = D'_1 + D'_2 + D'_3$, где D'_1 — гладкая квадрика, D'_2 и D'_3 — общие плоскости, такие что $Z_1 \subset D'_2$, а $Z_2 \subset D'_1$.

X — многообразие Фано № 3.6,

$Z = Z_1 + Z_2$, где Z_1 — эллиптическая кривая степени 4, являющаяся пересечением двух квадрик, Z_2 — прямая, D' как в предыдущем случае, с условием $Z_1 \subset D'_1$ и $Z_2 \subset D'_2$.

X — многообразие Фано № 4.6,

$Z = Z_1 + Z_2 + Z_3$, где Z_i — прямые, $D' = D'_1 + D'_2 + D'_3 + D'_4$, где D'_i — общие плоскости, такие что $Z_1 \subset D'_1$, $Z_2 \subset D'_2$ и $Z_3 \subset D'_3$.

3.12.3 Случай $Y = Q$

Рассмотрим случай, когда X — гладкая квадрика в $\mathbb{P}^4$.

X — многообразие Фано № 3.20,

$Z = Z_1 + Z_2$, где Z_i — прямые, $D' = D'_1 + D'_2 + D'_3$, где D'_i — общие гиперплоские сечения, такие что $Z_1 \subset D'_1$ и $Z_2 \subset D'_2$. Заметим, что мы можем выбрать гладкие D'_i с этим свойством.

X — многообразие Фано № 3.19,

$P = P_1 + P_2$, где P_i — точки, не лежащие на прямой, принадлежащей Y, $D' = D'_1 + D'_2 + D'_3$, где D'_i — общие гиперплоские сечения, такие что $P_1 \in D'_1 \cap D'_2$ и $P_2 \in D'_2 \cap D'_3$.

X — многообразие Фано № 3.15,

$Z = Z_1 + Z_2$, где Z_1 — прямая, Z_2 — коника на плоскости, $D' = D'_1 + D'_2 + D'_3$, где D'_i — общие гиперплоские сечения, такие что $Z_1 \subset D'_1$, $Z_2 \subset D'_2$. По лемме 3.3.1 мы можем выбрать гладкие D'_i с этими условиями.

X — многообразие Фано № 3.10,

$Z = Z_1 + Z_2$, где Z_i — коники на плоскостях, $D' = D'_1 + D'_2 + D'_3$, где D'_i — общие гиперплоские сечения, такие что $Z_1 \subset D'_1$ и $Z_2 \subset D'_2$. По лемме 3.3.1 мы можем выбрать гладкие D'_i с этими условиями.

X — многообразие Фано № 4.4.

В этом случае мы применяем лемму 3.4.3 дважды. Пусть P_1 и P_2 — точки, не лежащие на прямой в Y, Z — коника, проходящая через P_1 и P_2. Положим $D' = D'_1 + D'_2 + D'_3$, где D'_i — гиперплоские сечения. Чтобы получить X, мы сначала раздуваем точки P_1 и P_2, а затем раздуваем собственный прообраз

коники Z. Мы можем выбрать общие гладкие D'_i с условиями $P_1 \subset D'_1 \cap D'_3$, $P_2 \subset D'_1 \cap D'_3$ и $Z_3 \subset D'_3$. По лемме 3.3.1 мы можем выбрать гладкую D'_3 с этими условиями.

3.12.4 Случай, когда Y — трехмерное многообразие Фано из семейства № 2.32

Рассмотрим случай, когда Y — гладкий дивизор бистепени $(1,1)$ в $\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2$. Обозначим через π_1 и π_2 естественные проекции из Y на первый и второй экземпляры $\mathbb{P}^2$ соответственно. Заметим, что π_i являются $\mathbb{P}^1$-расслоениями.

X — многообразие Фано № 3.24,

Z — кривая, являющаяся слоем проекции π_1, $D' = D'_1 + D'_2 + D'_3$, где D'_i — общие дивизоры, такие что D'_1 имеет бистепень $(1,1)$, D'_2 имеет бистепень $(1,0)$, D'_3 имеет бистепень $(0,1)$, и $Z \subset D'_2$. По лемме 3.3.1 мы можем выбрать D'_2 гладким.

X — многообразие Фано № 3.13,

Z — кривая бистепени $(2,2)$, такая что композиция вложения $Z \subset Y$ с проекциями π_i также является вложением, т.е. $\pi_i(C)$ — неприводимые коники, $D' = D'_1 + D'_2 + D'_3$, где D'_i — общие дивизоры, такие что D'_1 имеет бистепень $(0,2)$, D'_2 и D'_3 имеют бистепень $(1,0)$, и $Z \subset D'_1$.

X — многообразие Фано № 3.7,

Z — гладкая эллиптическая кривая, являющаяся пересечением двух дивизоров H_1 и H_2, каждый из которых имеет бистепень $(1,1)$, $D' = D'_1 + D'_2 + D'_3$, где D'_i — общие дивизоры, такие что D'_1 имеет бистепень $(1,1)$, D'_2 имеет бистепень $(1,0)$, D'_3 имеет бистепень $(0,1)$, причем $Z = D'_1 \cap H_2$. По лемме 3.3.1 мы можем выбрать D'_1 гладким.

X — многообразие Фано № 4.7,

$Z = Z_1 + Z_2$, где Z_1 — кривая, являющаяся слоем проекции π_1, Z_2 — кривая, являющаяся слоем проекции π_2, $D' = D'_1 + D'_2 + D'_3$, где D'_i — общие дивизоры, такие что D'_1 имеет бистепень $(1,1)$, D'_2 имеет бистепень $(1,0)$, D'_3 имеет

бистепень $(0,1)$, и $Z_1 \subset D'_2$, $Z_2 \subset D'_3$. По лемме 3.3.1 мы можем выбрать D'_i гладкими.

3.12.5 Случай $Y = \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^2$

Обозначим через π_1 и π_2 естественные проекции из Y на $\mathbb{P}^1$ и $\mathbb{P}^2$ соответственно.

X — многообразие Фано № 3.22,

Z — коника в слое проекции π_2, $D' = D'_1 + D'_2 + D'_3 + D'_4 + D'_5$, где D'_1 и D'_2 имеют бистепень $(1,0)$, D'_3, D'_4 и D'_5 имеют бистепень $(0,1)$, и $Z \subset D'_1$.

X — многообразие Фано № 3.21,

Z — кривая бистепени $(2,1)$, $D' = D'_1 + D'_2 + D'_3 + D'_4 + D'_5$, где D'_1 и D'_2 имеют бистепень $(1,0)$, D'_3, D'_4 и D'_5 имеют бистепень $(0,1)$, и $Z \subset D'_3$.

X — многообразие Фано № 3.17,

Z — гладкая кривая рода 0, являющаяся полным пересечением двух дивизоров бистепени $(1,1)$, $D' = D'_1 + D'_2 + D'_3 + D'_4$, где D'_1 имеет бистепень $(1,1)$, D'_2 имеет бистепень $(1,0)$, D'_3 и D'_4 имеют бистепень $(0,1)$, и $Z \subset D'_1$. По лемме 3.3.1 мы можем выбрать D'_1 гладким.

X — многообразие Фано № 3.8,

Z — гладкая рациональная кривая, являющаяся пересечением дивизоров бистепени $(0,2)$ и $(1,2)$, $D' = D'_1 + D'_2 + D'_3$, где D'_1 имеет бистепень $(1,0)$, D'_2 имеет бистепень $(0,1)$, D'_3 имеет бистепень $(0,2)$, причем $Z \subset D'_3$.

X — многообразие Фано № 3.5,

Z — кривая бистепени $(5,2)$, такая что композиция вложения $Z \subset Y$ с проекцией π_2 является вложением, $D' = D'_1 + D'_2 + D'_3 + D'_4$, где D'_1 и D'_2 имеют бистепень $(1,0)$, D'_3 имеет бистепень $(0,1)$, D'_4 имеет бистепень $(0,2)$, и мы выбираем D'_4 так, что $Z \subset D'_4$.

X — **многообразие Фано № 3.3,**

Z — гладкая кривая рода 3, являющаяся полным пересечением двух дивизоров бистепени $(1,2)$, $D' = D'_1 + D'_2 + D'_3$, где D'_1 имеет бистепень $(1,2)$, D'_2 имеет бистепень $(1,0)$, D'_3 имеет бистепень $(0,1)$, причем $Z \subset D'_1$.

X — **многообразие Фано № 4.5,**

$Z = Z_1 + Z_2$, где Z_1 — кривая бистепени $(2,1)$, Z_2 — кривая бистепени $(1,0)$, $D' = D'_1 + D'_2 + D'_3 + D'_4 + D'_5$, где D'_1 и D'_2 имеют бистепень $(1,0)$, D'_3, D'_4 и D'_5 имеют бистепень $(0,1)$, причем $Z_1 \subset D'_3$ и $Z_2 \subset D'_4$.

3.12.6 Случай $Y = \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$

X — **многообразие Фано № 4.13,**

Z — кривая типа $(1,1,3)$, $D' = D'_1 + D'_2 + D'_3 + D'_4$, где D'_1 и D'_2 имеют тип $(1,1,0)$, D'_3 и D'_4 имеют тип $(0,0,1)$, причем $Z \subset D'_1$.

X — **многообразие Фано № 4.8,**

Z — кривая типа $(0,1,1)$, $D' = D'_1 + D'_2 + D'_3 + D'_4$, где D'_1 и D'_2 имеют тип $(0,1,1)$, D'_3 и D'_4 имеют тип $(1,0,0)$, причем $Z \subset D'_1$.

X — **многообразие Фано № 4.3,**

Z — кривая типа $(1,1,2)$, $D' = D'_1 + D'_2 + D'_3 + D'_4$, где D'_1 и D'_2 имеют тип $(1,1,0)$, D'_3 и D'_4 имеют тип $(0,0,1)$, причем $Z \subset D'_1$.

X — **многообразие Фано № 4.1,**

Z — кривая, являющаяся пересечением двух дивизоров типа $(1,1,1)$, $D' = D'_1 + D'_2 + D'_3 + D'_4$, где D'_2 имеет тип $(1,0,0)$, D'_3 имеет тип $(0,1,0)$, D'_4 имеет тип $(0,0,1)$, а D'_1 имеет тип $(1,1,1)$ с условием $Z \subset D'_1$. По лемме 3.3.1 мы можем выбрать D'_1 гладким.

3.12.7 Случай $Y = V_7$

То есть Y — раздутие точки P_1 в $\mathbb{P}^3$. В этом случае мы применяем лемму 3.10.1 дважды, чтобы заключить, что $\operatorname{coreg}(X) = 0$. Сначала мы строим пару $(\mathbb{P}^3, D'')$ коразмерности ноль, затем замечаем, что ее лог-прообразы (Y, D') и (X, D) также имеют коразмерность ноль.

X — многообразие Фано № 3.23,

Z' — коника на $\mathbb{P}^3$, проходящая через P_1, $D'' = D''_1 + D''_2 + D''_3 + D''_4$, где D''_i — общие плоскости со свойством $P_1 \in D''_1 \cap D''_2$ и $Z' \subset D''_1$.

X — многообразие Фано № 3.16,

Z' — скрученная кубика на $\mathbb{P}^3$, проходящая через P_1, $D'' = D''_1 + D''_2 + D''_3$, где D''_1 — гладкая квадрика, D''_2 и D''_3 — общие плоскости со свойством $P_1 \in D''_1 \cap D''_2$, причем $Z' \subset D''_1$.

X — многообразие Фано № 3.11,

Z' — гладкая эллиптическая кривая на $\mathbb{P}^3$, являющаяся пересечением двух квадрик, проходящих через P_1, $D'' = D''_1 + D''_2 + D''_3$, где D''_1 — гладкая квадрика, D''_2 и D''_3 — общие плоскости со свойством $P_1 \in D''_1 \cap D''_2$, и причем $Z' \subset D''_1$.

3.12.8 Случай, когда Y — трехмерное многообразие Фано из семейства № 2.2

Рассмотрим случай, когда Y — двулистное накрытие $f\colon Y \to \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^2$, разветвленное в гладком дивизоре бистепени $(2, 4)$. Тогда X — трехмерное многообразие Фано из семейства № 3.4, Z — гладкий слой композиции $Y \to \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}^2$ двойного накрытия f с проекцией на второй множитель. Согласно доказательству леммы 3.10.8, на Y существует граница $D' = D'_1 + D'_2$ коразмерности 0, и мы можем выбрать D'_2 так, что $Z \subset D'_2$.

3.12.9 Случай $Y = \mathbb{P}_{\mathbb{P}^2}(\mathscr{O} \oplus \mathscr{O}(2))$

Тогда X — трехмерное многообразие Фано из семейства № 3.9, Z — гладкая коника, содержащаяся в проективной плоскости, которая эквивалентна тавтологическому дивизору H на Y. Мы имеем $K_Y \sim -2H - F$, где F — прообраз прямой относительно проекции $Y = \mathbb{P}_{\mathbb{P}^2}(\mathscr{O} \oplus \mathscr{O}(2)) \to \mathbb{P}^2$. Положим $D' = D'_1 + D'_2 + D'_3$, где $D'_1 \sim H$ и $Z \subset D'_1$, $D'_2 \sim H$ — общий дивизор, а $D'_3 \sim F$.

3.12.10 Случай $Y = \mathbb{P}_{\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1}(\mathscr{O} \oplus \mathscr{O}(1,1))$

Тогда X — трехмерное многообразие Фано из семейства № 4.2, Z — эллиптическая кривая, содержащаяся в поверхности, эквивалентной тавтологическому дивизору H на Y. Мы имеем $K_Y \sim -2H - F_1 - F_2$, где F_1 и F_2 — прообразы двух различных прямолинейных образующих относительно проекции $Y = \mathbb{P}_{\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1}(\mathscr{O} \oplus \mathscr{O}(1,1)) \to \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$. Положим $D' = D'_1 + D'_2 + D'_3 + D'_4$, где $D'_1 \sim H$ и $Z \subset D'_1$, $D'_2 \sim H$ — общий дивизор, $D'_3 \sim F_1$ и $D'_4 \sim F_2$ также общие.

3.12.11 Случай, когда Y — трехмерное многообразие Фано из семейства № 5.1

Рассмотрим случай, когда Y — раздутие коники C на гладкой квадрике $Q \subset \mathbb{P}^4$. В этом случае мы применяем лемму 3.10.1 дважды. Рассмотрим пару (Q, D'') коразмерности 0, где $D'' = D''_1 + D''_2 + D''_3$, D'_i — общие гиперплоские сечения со свойством $C \subset D'_1 \cap D'_2$. Положим $D' = D'_1 + D'_2 + D'_3 + D'_4$, где D'_1, D''_2 и D'_3 — собственные прообразы D''_1, D''_2 и D''_3 соответственно, а $D'_4 = E$ — исключительный дивизор раздутия $Y \to Q$. Тогда лог-прообраз (Y, D') также имеет коразмерность 0. Теперь пусть $Z = Z_1 + Z_2 + Z_3$ — объединение трех слоев раздутия $Y \to Q$, так что $Z \subset D'_4$.

Мы рассмотрели все гладкие трехмерные многообразия Фано с числом Пикара не менее 3, которые могут быть реализованы как раздутие некоторого другого гладкого многообразия, и показали, что они допускают границу коразмерности 0. Это завершает доказательство. □

3.13 Таблица

Мы комментируем обозначения, используемые в таблице. В столбце “Coreg.” мы указываем значение корегулярности соответствующего многообразия Фано. Когда мы пишем “общ.”, мы имеем в виду общий элемент в соответствующем деформационном семействе. В частности, в семействах 1.2 и 1.5 мы работаем только с первым описанием соответствующего многообразия Фано, данным в столбце “Краткое описание”. Для определения coreg_1, то есть первой корегулярности, мы отсылаем к определению 1.3.28.

Таблица 3.1: Корегулярность гладких трехмерных многообразий Фано

Семейство	$-K_X^3$	Краткое описание	Coreg.	Доказательство
1.1	2	гиперповерхность в $\mathbb{P}(1,1,1,1,3)$ степени 6	общ. ≥ 1	Утверждение 3.6.1
1.2	4	гиперповерхность в $\mathbb{P}^4$ степени 4 или двойное накрытие гладкой квадрики в $\mathbb{P}^4$, разветвленное над поверхностью степени 8	общ. ≥ 1	Утверждение 3.7.1
1.3	6	полное пересечение квадрики и кубики в $\mathbb{P}^5$	общ. $\mathrm{coreg}_1 = 2$	Утверждение 3.8.2
1.4	8	полное пересечение трех квадрик в $\mathbb{P}^6$	общ. $\mathrm{coreg}_1 = 2$	Утверждение 3.9.2
1.5	10	сечение $\mathrm{Gr}(2,5) \subset \mathbb{P}^9$ квадрикой и линейным подпространством размерности 7 или двойное накрытие многообразия 1-15 с ветвлением в антиканоническом дивизоре	общ. ≤ 1	Лемма 3.5.1
1.6	12	сечение эрмитова симметрического пространства $M = G/P \subset \mathbb{P}^{15}$ типа DIII линейным подпространством размерности 8	общ. 0	Лемма 3.5.2
1.7	14	сечение $\mathrm{Gr}(2,6) \subset \mathbb{P}^{14}$ линейным подпространством коразмерности 5	общ. 0	Лемма 3.5.3

1.8	16	сечение эрмитова симметрического пространства $M = G/P \subset \mathbb{P}^{19}$ типа CI линейным подпространством размерности 10	общ. 0	Лемма 3.5.4
1.9	18	сечение 5-мерного рационального однородного контактного многообразия $G_2/P \subset \mathbb{P}^{13}$ линейным подпространством размерности 11	общ. 0	Лемма 3.5.5
1.10	22	нулевое множество трех сечений векторного расслоения ранга 3 $\bigwedge^2 \mathcal{Q}$, где $\mathcal{Q}$ — универсальное факторрасслоение на $\mathrm{Gr}(3,7)$	общ. 0	Лемма 3.5.6
1.11	8	V_1 — гиперповерхность в $\mathbb{P}(1,1,1,2,3)$ степени 6	общ. 0	Лемма 3.4.7
1.12	16	V_2 — гиперповерхность в $\mathbb{P}(1,1,1,1,2)$ степени 4	0	Лемма 3.4.4
1.13	24	V_3 — гиперповерхность в $\mathbb{P}^4$ степени 3	0	Лемма 3.4.4
1.14	32	V_4 — полное пересечение двух квадрик в $\mathbb{P}^5$	0	Лемма 3.4.4
1.15	40	V_5 — сечение $\mathrm{Gr}(2,5) \subset \mathbb{P}^9$ линейным подпространством коразмерности 3	0	Лемма 3.4.4
1.16	54	Q — гиперповерхность в $\mathbb{P}^4$ степени 2	0	Лемма 3.4.3
1.17	64	$\mathbb{P}^3$	0	Лемма 3.4.2
2.1	4	раздутие трехмерного многообразия Фано V_1 вдоль эллиптической кривой, являющейся пересечением двух дивизоров из $\lvert -\frac{1}{2}K_{V_1}\rvert$	общ. 0	Лемма 3.11.9
2.2	6	двойное накрытие $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^2$ с ветвлением в дивизоре бистепени $(2,4)$	0	Лемма 3.10.8

2.3	8	раздутие трехмерного многообразия Фано V_2 вдоль эллиптической кривой, являющейся пересечением двух дивизоров из $\lvert -\frac{1}{2}K_{V_2}\rvert$	0	Лемма 3.11.8
2.4	10	раздутие $\mathbb{P}^3$ вдоль пересечения двух кубик	0	Лемма 3.11.3
2.5	12	раздутие многообразия $V_3 \subset \mathbb{P}^4$ вдоль плоской кубики	0	Лемма 3.11.7
2.6	12	дивизор на $\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2$ бистепени $(2,2)$ или двойное накрытие W, ветвление в поверхности из $\lvert -K_W\rvert$	0	Лемма 3.10.7
2.7	14	раздутие Q вдоль пересечения двух дивизоров из $\lvert\mathcal{O}_Q(2)\rvert$	0	Лемма 3.11.4
2.8	14	двойное накрытие V_7, ветвление в поверхности из $\lvert -K_{V_7}\rvert$	0	Лемма 3.10.6
2.9	16	раздутие $\mathbb{P}^3$ вдоль кривой степени 7 и рода 5, являющейся пересечением кубик	0	Лемма 3.11.3
2.10	16	раздутие $V_4 \subset \mathbb{P}^5$ вдоль эллиптической кривой, являющейся пересечением двух гиперплоских сечений	0	Лемма 3.11.6
2.11	18	раздутие V_3 вдоль прямой	0	Лемма 3.11.7
2.12	20	раздутие $\mathbb{P}^3$ вдоль кривой степени 6 и рода 3, являющейся пересечением кубик	0	Лемма 3.11.3
2.13	20	раздутие $Q \subset \mathbb{P}^4$ вдоль кривой степени 6 и рода 2	0	Лемма 3.11.4
2.14	20	раздутие $V_5 \subset \mathbb{P}^6$ вдоль эллиптической кривой, являющейся пересечением двух гиперплоских сечений	0	Лемма 3.11.5

2.15	22	раздутие $\mathbb{P}^3$ вдоль пересечения квадрики и кубики	0	Лемма 3.11.3
2.16	22	раздутие $V_4 \subset \mathbb{P}^5$ вдоль коники	0	Лемма 3.11.6
2.17	24	раздутие $Q \subset \mathbb{P}^4$ вдоль эллиптической кривой степени 5	0	Лемма 3.11.4
2.18	24	двойное накрытие $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^2$ с ветвлением в дивизоре бистепени $(2,2)$	0	Лемма 3.10.5
2.19	26	раздутие $V_4 \subset \mathbb{P}^5$ вдоль прямой	0	Лемма 3.11.6
2.20	26	раздутие $V_5 \subset \mathbb{P}^6$ вдоль скрученной кубики	0	Лемма 3.11.5
2.21	28	раздутие $Q \subset \mathbb{P}^4$ вдоль скрученной квартики	0	Лемма 3.11.4
2.22	30	раздутие $V_5 \subset \mathbb{P}^6$ вдоль коники	0	Лемма 3.11.5
2.23	30	раздутие $Q \subset \mathbb{P}^4$ вдоль кривой степени 4, являющейся пересечением поверхности из $\lvert\mathcal{O}_{\mathbb{P}^4}(1)\rvert_Q\rvert$ и поверхности из $\lvert\mathcal{O}_{\mathbb{P}^4}(2)\rvert_Q\rvert$	0	Лемма 3.11.4
2.24	30	дивизор на $\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2$ бистепени $(1,2)$	0	Лемма 3.10.4
2.25	32	раздутие $\mathbb{P}^3$ вдоль эллиптической кривой, являющейся пересечением двух квадрик	0	Лемма 3.11.3
2.26	34	раздутие многообразия $V_5 \subset \mathbb{P}^6$ вдоль прямой	0	Лемма 3.11.5
2.27	38	раздутие $\mathbb{P}^3$ вдоль скрученной кубики	0	Лемма 3.11.3
2.28	40	раздутие $\mathbb{P}^3$ вдоль плоской кубики	0	Лемма 3.11.3
2.29	40	раздутие $Q \subset \mathbb{P}^4$ вдоль коники	0	Лемма 3.11.4
2.30	46	раздутие $\mathbb{P}^3$ вдоль коники	0	Лемма 3.11.3
2.31	46	раздутие $Q \subset \mathbb{P}^4$ вдоль прямой	0	Лемма 3.11.4
2.32	48	W — дивизор на $\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2$ бистепени $(1,1)$	0	Лемма 3.10.3
2.33	54	раздутие $\mathbb{P}^3$ вдоль прямой	0	Замечание 3.4.1
2.34	54	$\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^2$	0	Замечание 3.4.1

2.35	56	$V_7 \cong \mathbb{P}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1))$	0	Замечание 3.4.1
2.36	62	$\mathbb{P}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(2))$	0	Замечание 3.4.1
3.1	12	двойное накрытие $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ с ветвлением в дивизоре типа $(2,2,2)$	0	Лемма 3.10.10
3.2	14	дивизор на $\mathbb{P}^2$-расслоении $\mathbb{P}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1}(-1,-1) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1}(-1,-1))$, принадлежащий классу $\lvert L^{\otimes 2} \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1}(2,3)\rvert$, где L — тавтологическое линейное расслоение	0	Лемма 3.10.9
3.3	18	дивизор на $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^2$ типа $(1,1,2)$	0	Лемма 3.12.5
3.4	18	раздутие трехмерного многообразия Фано Y из семейства 2.18 вдоль гладкого слоя композиции $Y \to \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}^2$ двойного накрытия с проекцией	0	Лемма 3.12.8
3.5	20	раздутие $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^2$ вдоль кривой C бистепени $(5,2)$, такой что композиция $C \hookrightarrow \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}^2$ является вложением	0	Лемма 3.12.5
3.6	22	раздутие $\mathbb{P}^3$ вдоль дизъюнктного объединения прямой и эллиптической кривой степени 4	0	Лемма 3.12.2
3.7	24	раздутие многообразия W вдоль эллиптической кривой, являющейся пересечением двух дивизоров из $\lvert -\frac{1}{2}K_W\rvert$	0	Лемма 3.12.4
3.8	24	дивизор в классе $\lvert(\alpha \circ \pi_1)^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1)) \otimes \pi_2^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(2))\rvert$, где $\pi_1\colon \mathbb{F}_1 \times \mathbb{P}^2 \to \mathbb{F}_1$ и $\pi_2\colon \mathbb{F}_1 \times \mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}^2$ — проекции, а $\alpha\colon \mathbb{F}_1 \to \mathbb{P}^2$ — раздутие точки	0	Лемма 3.12.5

3.9	26	раздутие конуса $W_4 \subset \mathbb{P}^6$ над поверхностью Веронезе $R_4 \subset \mathbb{P}^5$ с центром в дизъюнктном объединении вершины и квартики на $R_4 \cong \mathbb{P}^2$	0	Лемма 3.12.9
3.10	26	раздутие $Q \subset \mathbb{P}^4$ вдоль дизъюнктного объединения двух коник	0	Лемма 3.12.3
3.11	28	раздутие многообразия V_7 вдоль эллиптической кривой, являющейся пересечением двух дивизоров из $\lvert -\frac{1}{2}K_{V_7}\rvert$	0	Лемма 3.12.7
3.12	28	раздутие $\mathbb{P}^3$ вдоль дизъюнктного объединения прямой и скрученной кубики	0	Лемма 3.12.2
3.13	30	раздутие $W \subset \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2$ вдоль кривой C бистепени $(2,2)$, такой что $\pi_1(C) \subset \mathbb{P}^2$ и $\pi_2(C) \subset \mathbb{P}^2$ — неприводимые коники, где $\pi_1 \colon W \to \mathbb{P}^2$ и $\pi_2 \colon W \to \mathbb{P}^2$ — естественные проекции	0	Лемма 3.12.4
3.14	32	раздутие $\mathbb{P}^3$ вдоль дизъюнктного объединения плоской кубической кривой, лежащей в плоскости $\Pi \subset \mathbb{P}^3$, и точки, не лежащей в Π	0	Лемма 3.12.2
3.15	32	раздутие $Q \subset \mathbb{P}^4$ вдоль дизъюнктного объединения прямой и коники	0	Лемма 3.12.3
3.16	34	раздутие V_7 вдоль собственного прообраза при раздутии $\alpha \colon V_7 \to \mathbb{P}^3$ скрученной кубики, проходящей через центр раздутия α	0	Лемма 3.12.7
3.17	36	дивизор на $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^2$ типа $(1,1,1)$	0	Лемма 3.12.5

3.18	36	раздутие $\mathbb{P}^3$ вдоль дизъюнктного объединения прямой и коники	0	Лемма 3.12.2
3.19	38	раздутие $Q \subset \mathbb{P}^4$ в двух неколлинеарных точках	0	Лемма 3.12.3
3.20	38	раздутие $Q \subset \mathbb{P}^4$ вдоль дизъюнктного объединения двух прямых	0	Лемма 3.12.3
3.21	38	раздутие $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^2$ вдоль кривой бистепени $(2, 1)$	0	Лемма 3.12.5
3.22	40	раздутие $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^2$ вдоль коники в слое проекции $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}^1$	0	Лемма 3.12.5
3.23	42	раздутие V_7 вдоль собственного прообраза при раздутии $\alpha\colon V_7 \to \mathbb{P}^3$ неприводимой коники, проходящей через центр раздутия α	0	Лемма 3.12.7
3.24	42	$W \times_{\mathbb{P}^2} \mathbb{F}_1$, где $W \to \mathbb{P}^2$ — $\mathbb{P}^1$-расслоение, а $\mathbb{F}_1 \to \mathbb{P}^2$ — раздутие	0	Лемма 3.12.4
3.25	44	раздутие $\mathbb{P}^3$ вдоль дизъюнктного объединения двух прямых	0	Замечание 3.4.1
3.26	46	раздутие $\mathbb{P}^3$ с центром в дизъюнктном объединении точки и прямой	0	Замечание 3.4.1
3.27	48	$\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$	0	Замечание 3.4.1
3.28	48	$\mathbb{P}^1 \times \mathbb{F}_1$	0	Замечание 3.4.1
3.29	50	раздутие трехмерного многообразия Фано V_7 вдоль прямой в $E \cong \mathbb{P}^2$, где E — исключительный дивизор раздутия $V_7 \to \mathbb{P}^3$	0	Замечание 3.4.1
3.30	50	раздутие V_7 вдоль собственного прообраза при раздутии $\alpha\colon V_7 \to \mathbb{P}^3$ прямой, проходящей через центр раздутия α	0	Замечание 3.4.1
3.31	52	раздутие конуса над гладкой квадрикой в $\mathbb{P}^3$ в вершине	0	Замечание 3.4.1

4.1	24	дивизор на $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ мультистепени $(1,1,1,1)$	0	Лемма 3.12.6
4.2	28	раздутие конуса над гладкой квадрикой $S \subset \mathbb{P}^3$ вдоль дизъюнктного объединения вершины и эллиптической кривой на S	0	Лемма 3.12.10
4.3	30	раздутие $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ вдоль кривой типа $(1,1,2)$	0	Лемма 3.12.6
4.4	32	раздутие гладкого трехмерного многообразия Фано Y из семейства 3.19 вдоль собственного прообраза коники на квадрике $Q \subset \mathbb{P}^4$, проходящей через оба центра раздутия $Y \to Q$	0	Лемма 3.12.3
4.5	32	раздутие $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^2$ вдоль дизъюнктного объединения двух неприводимых кривых бистепени $(2,1)$ и $(1,0)$	0	Лемма 3.12.5
4.6	34	раздутие $\mathbb{P}^3$ вдоль дизъюнктного объединения трех прямых	0	Лемма 3.12.2
4.7	36	раздутие $W \subset \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2$ вдоль дизъюнктного объединения двух кривых бистепени $(0,1)$ и $(1,0)$	0	Лемма 3.12.4
4.8	38	раздутие $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ вдоль кривой типа $(0,1,1)$	0	Лемма 3.12.6
4.9	40	раздутие гладкого трехмерного многообразия Фано Y из семейства 3.25 вдоль кривой, стягиваемой раздутием $Y \to \mathbb{P}^3$	0	Замечание 3.4.1
4.10	42	$\mathbb{P}^1 \times S_7$	0	Замечание 3.4.1
4.11	44	раздутие $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{F}_1$ вдоль кривой $C \cong \mathbb{P}^1$, такой что C содержится в слое $F \cong \mathbb{F}_1$ проекции $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{F}_1 \to \mathbb{P}^1$ и $C \cdot C = -1$ на F	0	Замечание 3.4.1

4.12	46	раздутие гладкого трехмерного многообразия Фано Y из семейства 2.33 вдоль двух кривых, стягиваемых раздутием $Y \to \mathbb{P}^3$	0	Замечание 3.4.1
4.13	26	раздутие $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ вдоль кривой типа $(1, 1, 3)$	0	Лемма 3.12.6
5.1	28	раздутие гладкого трехмерного многообразия Фано Y из семейства 2.29 вдоль трех кривых, стягиваемых раздутием $Y \to Q$	0	Лемма 3.12.11
5.2	36	раздутие гладкого трехмерного многообразия Фано Y из семейства 3.25 вдоль двух кривых $C_1 \neq C_2$, стягиваемых раздутием $\phi\colon Y \to \mathbb{P}^3$ и лежащих в одном и том же исключительном дивизоре раздутия ϕ	0	Замечание 3.4.1
5.3	36	$\mathbb{P}^1 \times S_6$	0	Замечание 3.4.1
6.1	30	$\mathbb{P}^1 \times S_5$	0	Следствие 3.1.6
7.1	24	$\mathbb{P}^1 \times S_4$	0	Следствие 3.1.6
8.1	18	$\mathbb{P}^1 \times S_3$	0	Следствие 3.1.6
9.1	12	$\mathbb{P}^1 \times S_2$	0	Следствие 3.1.6
10.1	6	$\mathbb{P}^1 \times S_1$	общ. 0	Следствие 3.1.7

Глава 4

Конечные абелевы 3-подгруппы в группе Кремоны

4.1 Введение

Мы работаем над полем комплексных чисел $\mathbb{C}$. *Группа Кремоны* $\mathrm{Cr}_n(\mathbb{C})$ — это группа бирациональных автоморфизмов n-мерного комплексного проективного пространства $\mathbb{P}^n$. При $n = 1$ эта группа изоморфна $\mathrm{PGL}(2, \mathbb{C})$. В отличие от этого, при $n \geq 2$ группа Кремоны становится очень сложным объектом для изучения. Один из способов понять ее структуру — это изучение ее конечных подгрупп. Такие подгруппы были классифицированы для $n = 2$ И. Долгачевым и В. Исковских, см. [DI09]. В размерности 3 ситуация более деликатна, и полная классификация, по-видимому, недостижима. Тем не менее, существуют классификационные результаты для некоторых классов групп, см., например, [Pr09] в случае простых групп. Также имеется множество результатов об ограниченности конечных подгрупп группы Кремоны, см. [PrSh16] и приведенные там ссылки.

Мы концентрируемся на одном конкретном типе таких подгрупп, а именно, на p-группах. Под *p-группой* мы понимаем конечную группу порядка p^k, где p — простое число. Ранг $r(G)$ p-группы G определяется как минимальное число элементов, порождающих G. Естественной является следующая задача: оценить ранг p-подгруппы в группе Кремоны $\mathrm{Cr}_n(\mathbb{C})$, см. [Ser09]. Полный

ответ на этот вопрос для $n = 2$ был получен А. Бовилем, см. теорему 5.1.3.

В больших размерностях можно рассматривать группу бирациональных автоморфизмов рационально связного многообразия данной размерности и искать аналогичные оценки для ранга его p-подгрупп. Для $n = 3$ точные оценки были получены для $p = 2$ и $p \geq 5$, см. теорему 5.1.5. Для $n = 3$, $p = 3$ в работе [Kuz20] была получена оценка $r(G) \leq 4$ с точностью до трех исключительных случаев. В настоящей работе мы доказываем следующее

Теорема 4.1.1. *Пусть X — трехмерное рационально связное многообразие, и пусть $G \subset \mathrm{Bir}(X)$ — конечная 3-группа. Тогда $r(G) \leq 4$, и эта оценка точна.*

Следствие 4.1.2. Пусть $G \subset \mathrm{Cr}_3(\mathbb{C})$ — конечная 3-группа. Тогда $r(G) \leq 4$, и эта оценка точна.

В качестве следствия мы можем сформулировать следующую теорему, которая дает точные оценки для рангов p-подгрупп, действующих на рационально связных трехмерных многообразиях.

Теорема 4.1.3 (ср. [Pr11], [Pr14], [PrSh17], [Kuz20], [Xu20])**.** *Пусть X — рационально связное многообразие размерности 3, и пусть $G \subset \mathrm{Bir}(X)$ — конечная p-группа. Тогда она может быть порождена не более чем r элементами, где*

- $r = 6$ *при* $p = 2$,
- $r = 4$ *при* $p = 3$,
- $r = 3$ *при* $p \geq 5$.

Более того, эти оценки точны.

В предположениях теоремы 5.1.5 из [Xu20] следует, что при $p \geq 5$ группа G абелева. Для обсуждения аналогичных утверждений в случае $p = 2, 3$ см. пример 4.2.7 и вопрос 4.2.8. Утверждение о том, что оценка точна, следует из примера 4.2.5 для $p = 2$, Примера 4.2.6 для $p = 3$ и естественного действия $(\mathbb{Z}/p)^3$ на $\mathbb{P}^3$ для $p \geq 5$. Сформулируем аналогичное утверждение в размерности 2.

Теорема 4.1.4 ([Beau07])**.** *Пусть X — рациональная поверхность, и пусть $G \subset \mathrm{Bir}(X)$ — конечная абелева p-группа. Тогда она может быть порождена не более чем r элементами, где*

- $r = 4$ *при* $p = 2$,
- $r = 3$ *при* $p = 3$,
- $r = 2$ *при* $p \geq 5$.

Более того, эти оценки точны.

Предположение об абелевости G может быть удалено из теоремы 5.1.3 благодаря утверждению 4.2.9. Фактически, Бовиль доказывает, что если оценки, указанные выше, достигаются, то можно описать класс сопряженности данной подгруппы. Было бы интересно получить аналогичное описание в трехмерном случае, ср. вопрос 1.9 в [PrSh17]. Интересные результаты в этом направлении были получены в [Xu18].

Мы приведем схему доказательства теоремы 4.1.1. Мы предполагаем, что 3-группа G ранга ≥ 5 действует на трехмерном рационально связном многообразии бирациональными автоморфизмами. Мы предполагаем, что группа G абелева: этого можно добиться, переходя к факторгруппе по ее подгруппе Фраттини, см. утверждение 4.2.9. Сначала мы используем стандартную технику: разрешаем неопределенности действия G на X и применяем G-ПММ, чтобы получить $G\mathbb{Q}$-расслоение Мори с точным действием G. Затем, используя известные результаты о 3-группах в группе Кремоны плоскости, мы исключаем случай положительной размерности базы. Таким образом, нам остается разобраться только со случаем трехмерного $G\mathbb{Q}$-многообразия Фано. В этом случае мы рассматриваем действие G на антиканонической линейной системе, которая оказывается непустой в силу орбифолдной теоремы Римана-Роха, см. раздел 4.4. Более точно, есть два случая для изучения: либо антиканоническая система содержит один элемент с точностью до умножения на скаляр, либо ее размерность не менее 2.

В первом случае мы изучаем геометрию антиканонического дивизора, см. раздел 5.8. Мы показываем, что это приведенная неприводимая поверхность, допускающая действие 3-группы ранга $r(G)-1$. Более того, она бирационально эквивалентна либо поверхности K3, либо рациональной поверхности, либо поверхности, расслоенной над эллиптической кривой. Во всех этих случаях мы используем оценки на ранг 3-групп, действующих на таких поверхностях (см. раздел 4.3), чтобы прийти к противоречию.

В разделе 4.6 мы разбираем случай, когда антиканоническая система имеет размерность ≥ 2. Поскольку G абелева, мы можем найти G-инвариантное

пучок антиканонических элементов. Если особенности этого пучка "достаточно плохи", в утверждении 4.6.2 мы доказываем, что наше многообразие G-бирационально $G\mathbb{Q}$-расслоению Мори с базой положительной размерности, и мы завершаем доказательство. В противном случае мы получаем пучок поверхностей K3 с каноническими особенностями в худшем случае. Снова, используя оценки на ранг 3-групп, действующих на таких поверхностях, мы приходим к противоречию.

Наш подход отличается от подхода в [Kuz20]: мы не используем классификационные результаты для трехмерных горенштейновых многообразий Фано. Это может быть полезно для возможных обобщений.

4.2 Предварительные сведения

Мы работаем над полем комплексных чисел. Все многообразия проективны и определены над $\mathbb{C}$, если не оговорено иное. Мы используем язык программы минимальных моделей (сокращенно ПММ), см., например, [KM98], и программы минимальных моделей для линейных систем, см. [Al94].

Мы формулируем результаты О. Отьена, которые применимы к изучению p-подгрупп в группе Кремоны. Напомним, что *число Черна* гладкого проективного многообразия — это число пересечения классов Черна его касательного расслоения.

Теорема 4.2.1 ([Ha19, 1.1.2]). *Пусть G является p-группой, и пусть X — гладкое проективное многообразие, снабженное действием G. Предположим, что либо G абелева, либо $p > \dim X$. Если G не имеет неподвижных точек на X, то каждое число Черна X делится на p.*

Следствие 4.2.2. Пусть $p > 2$ является простым числом, и пусть G — абелева p-группа. Предположим, что X является терминальным $G\mathbb{Q}$-факториальным трехмерным многообразием, чьи негоренштейновы особенности имеют тип $\frac{1}{2}(1,1,1)$. Более того, предположим, что G не имеет неподвижных точек на X. Тогда целое число $2^3(-K_X)^3$ делится на p.

Доказательство. Поскольку негоренштейновы особые точки на X имеют тип $\frac{1}{2}(1,1,1)$, мы имеем $(-K_X)^3 = \frac{a}{2}$, где $a \in \mathbb{Z}$. Пусть $f\colon X' \to X$ является

G-эквивариантным разрешением особенностей [AW97]. Мы можем предполагать, что f является изоморфизмом вне конечного числа особых точек X. Запишем

$$K_{X'} = f^*K_X + \sum a_i E_i.$$

Поскольку 2 обратимо по модулю p, мы можем рассматривать следующую формулу по модулю p:

$$(-K_{X'})^3 = \left(-f^*K_X - \sum a_i E_i\right)^3 = (-K_X)^3 - \sum_Q a_Q,$$

где a_Q является вкладом, вносимым исключительными дивизорами над особой точкой $Q \in X$. По теореме 4.2.1 целое число $(-K_{X'})^3$ делится на p. Поскольку G не имеет неподвижных точек на X, исключительные дивизоры E_i образуют G-орбиты, длина которых делится на p, откуда следует, что $\sum_Q a_Q$ равно 0 по модулю p. Заметим, что $2^3(-K_X)^3$ является целым числом, поскольку $-2K_X$ является дивизором Картье. Следовательно, $2^3(-K_X)^3$ делится на p, и утверждение доказано. □

Теорема 4.2.3 ([Ha19, 1.2.1]). *Пусть G является p-группой, и пусть X — гладкое проективное многообразие с действием G. Предположим, что либо G циклическая, либо* $\dim X < p-1$. *Тогда G не имеет неподвижных точек на X тогда и только тогда, когда эйлерова характеристика $\chi(X, F)$ каждого G-эквивариантного когерентного $\mathscr{O}_X$-модуля F делится на p.*

Следствие 4.2.4 ([Xu20, Main theorem]). Пусть X — рационально связное многообразие размерности n. Если $G \subset \mathrm{Bir}(X)$ является p-группой и $p > n+1$, то G абелева и ранг G не более n.

Как следствие, если $n = 3$, то любая p-группа $G \subset \mathrm{Bir}(X)$ для $p \geq 5$ абелева и имеет ранг ≤ 3. Теперь мы представляем примеры действий p-групп.

Пример 4.2.5. Рассмотрим точное действие группы $(\mathbb{Z}/2)^2$ на $\mathbb{P}^1$, заданное матрицами

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Тогда группа $G = (\mathbb{Z}/2)^6$ точно действует на $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$. Это показывает, что оценка $r(G) \leq 6$ в теореме 5.1.5 точна для $p = 2$.

Пример 4.2.6. Пусть S является кубической поверхностью Ферма, определенной уравнением

$$x_0^3 + x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = 0$$

в $\mathbb{P}^3$. Пусть группа $(\mathbb{Z}/3)^3$ действует на S умножением на кубический корень из единицы на координаты x_i, $1 \leq i \leq 3$. Тогда группа $G = (\mathbb{Z}/3)^3 \times \mathbb{Z}/3$ точно действует на $X = S \times \mathbb{P}^1$, где действие второго множителя $\mathbb{Z}/3$ на проективной прямой стандартно. Это показывает, что 3-группа G ранга 4 может быть вложена в $\mathrm{Cr}_3(\mathbb{C})$, так что оценка $r(G) \leq 4$ в теореме 5.1.5 точна для $p = 3$.

Пример 4.2.7. Для $p = 3$ существует действие неабелевой группы на рациональном трехмерном многообразии. Действительно, рассмотрим действие группы $G = \mathcal{H}_3 \times \mathbb{Z}/3$ ранга 3 на $X = \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^1$. Здесь $\mathcal{H}_3 = (\mathbb{Z}/3 \times \mathbb{Z}/3) \rtimes \mathbb{Z}/3$ является группой Гейзенберга ранга 2 и порядка 27, см. [Kuz20, A.2]. Аналогично можно построить пример неабелевой 2-группы ранга 5, действующей на рациональном трехмерном многообразии, см. [PrSh17, Пример 2.2].

Следующий вопрос представляется естественным.

Вопрос 4.2.8. Предположим, что для $p = 2$ (соответственно, $p = 3$) p-группа G с $r(G) = 6$ (соответственно, $r(G) = 4$) точно действует на рационально связном трехмерном многообразии. Верно ли, что G абелева?

Следующее утверждение показывает, что для ограничения ранга p-групп, действующих на рационально связном многообразии, достаточно ограничить ранг абелевых p-групп.

Утверждение 4.2.9 ([Kuz20, 3.1])**.** *Предположим, что для всех рационально связных многообразий Y размерности n и любой абелевой p-группы $A \subset \mathrm{Bir}(Y)$ мы имеем $r(A) \leq N$ для некоторого числа N. Если X рационально связно и имеет размерность n, то для любой p-группы $G \subset \mathrm{Bir}(X)$ (в частности, неабелевой) мы имеем $r(G) \leq N$.*

Мы приводим идею его доказательства для удобства читателя. Напомним, что *подгруппа Фраттини* $\Phi(G)$ p-группы G является пересечением всех максимальных собственных подгрупп G. Она нормальна и имеет следующее замечательное свойство: факторгруппа $G/\Phi(G)$ изоморфна элементарной абелевой p-группе $(\mathbb{Z}/p)^{r(G)}$. Переходя к разрешению неопределенности действия группы, мы можем считать, что p-группа G точно действует на рационально

связном многообразии X размерности n. Тогда факторгруппа $G/\Phi(G)$ ранга $r(G)$ точно действует на рационально связном многообразии $X/\Phi(G)$, и утверждение следует.

Следующее утверждение ограничивает ранг 3-группы, которая действует на трехмерной терминальной особенности.

Утверждение 4.2.10 ([Pr11, 2.4], [Kuz20, 4.4])**.** *Предположим, что X является трехмерным многообразием с терминальными особенностями и G является 3-группой, вложенной в $\mathrm{Aut}(X)$ и фиксирующей точку $x \in X$. Тогда $r(G) \leq 3$.*

4.3 Действие групп на поверхностях K3

В этом разделе мы рассматриваем действия абелевых p-групп на (возможно, особых) поверхностях K3 и их обобщениях. Под поверхностью K3 мы понимаем нормальную проективную поверхность S с не хуже чем каноническими (то есть 1-lc) особенностями, такую что $\mathrm{H}^1(S, \mathscr{O}_S) = 0$ и $K_S \sim 0$.

Утверждение 4.3.1. *Для $p \geq 3$ предположим, что p-группа G точно действует на K3 поверхности S. Тогда $r(G) \leq 3$.*

Доказательство. Переходя к минимальному разрешению, мы можем предположить, что S является гладкой поверхностью K3 с точным действием группы G. Тогда утверждение следует из теоремы В. Никулина [Nik80, 4.5]. □

Теперь мы рассматриваем действия p-групп на парах Калаби-Яу размерности 2. Такие пары обобщают понятие поверхности K3. Пусть (S, Δ) является lc парой Калаби-Яу размерности 2, снабженной действием p-группы G. В частности, поверхность S нормальна, а граничный $\mathbb{Q}$-дивизор Δ является G-инвариантным.

Утверждение 4.3.2. *Для $p \geq 3$ предположим, что p-группа действует на паре Калаби-Яу (S, Δ) размерности 2, которая является lc, но не 1-lc (в частности, это выполняется либо если $\Delta \neq 0$, либо $\Delta = 0$ и S не каноническая). Тогда $r(G) \leq 3$.*

Доказательство. Используя предположение, что (S, Δ) не является 1-lc, и беря минимальное разрешение S, мы можем запустить G-ПММ, чтобы по-

лучить G-эквивариантное расслоение Мори $S' \to Z$, где S' является гладкой поверхностью, а Z — либо точка, либо кривая.

Если Z является точкой, то S' изоморфна $\mathbb{P}^2$, но p-группа ранга больше трех не может действовать на $\mathbb{P}^2$ точно, например, по теореме 5.1.3. Следовательно, мы можем предполагать, что Z является гладкой кривой. Хорошо известно, что в этом случае Z является либо рациональной кривой, либо кривой рода 1. Если Z является рациональной кривой, то S' рациональна, поэтому снова $r(G) \leq 3$ по теореме 5.1.3.

Итак, мы предполагаем, что Z является гладкой кривой рода 1. Заметим, что Z допускает точное действие p-группы G' ранга $r(G) - 1$. Хорошо известно, что после фиксации точки на Z имеем $\mathrm{Aut}(Z) \simeq Z \rtimes \mathbb{Z}/k$, где Z отождествляется с подгруппой сдвигов, и k может быть равно $2, 4, 6$. Для $p \geq 5$ очевидно $G' \subset Z$, и следовательно, G' лежит в подгруппе p-кручения Z, которая изоморфна $(\mathbb{Z}/p)^2$. Поэтому в этом случае $r(G') \leq 2$ и $r(G) \leq 3$. Для $p = 3$ мы должны обратить внимание на случай $k = 6$. В этом случае существует подгруппа, изоморфная $(\mathbb{Z}/3 \times \mathbb{Z}/3) \rtimes \mathbb{Z}/3$ в $\mathrm{Aut}(Z)$. Однако проверяется, что ранг такой подгруппы равен 2, следовательно, $r(G') \leq 2$. Поэтому $r(G) = 3$, и утверждение доказано. □

4.4 Антиканоническая линейная система

В этом разделе мы оцениваем размерность антиканонической линейной системы $\mathrm{H}^0(X, \mathscr{O}_X(-K_X))$ $G\mathbb{Q}$-многообразия Фано X, допускающего действие абелевой 3-группы ранга 5 и выше. Предположение, что G абелева, оправдано утверждением 4.2.9.

4.4.1 Орбифолдная формула Римана-Роха

Согласно [Re85, 10.2], для терминального трехмерного многообразия X и дивизора Вейля D, являющегося $\mathbb{Q}$-Картье, имеет место следующая версия формулы Римана-Роха:

$$\chi(\mathscr{O}_X(D)) = \chi(\mathscr{O}_X) + \frac{1}{12} D(D - K_X)(2D - K_X) + \frac{1}{12} D \cdot c_2(X) + \sum_Q c_Q(D), \quad (4.4.1)$$

где для любой циклической факторособенности Q имеем

$$c_Q(D) = -i\frac{r^2-1}{12r} + \sum_{j=1}^{i-1} \frac{\overline{bj}(r-\overline{bj})}{2r}. \tag{4.4.2}$$

Здесь r — индекс Q, дивизор D имеет тип $i\frac{1}{r}(a,-a,1)$ в Q, b удовлетворяет $ab = 1 \bmod r$, и - обозначает вычет по модулю r. Нециклические негоренштейновы особенности соответствуют корзине циклических точек. Более того, согласно [Re85, 10.3] имеем

$$(-K_X)\cdot c_2(X) + \sum_Q (r - 1/r) = 24. \tag{4.4.3}$$

Следующее утверждение показывает, что число негоренштейновых точек ограничено 9 при наших предположениях. Мы опускаем его доказательство, которое следует из утверждения 4.2.10 и формул (4.4.1), (4.4.3).

Утверждение 4.4.2 ([Kuz20, 4.9])**.** *Предположим, что 3-группа G ранга r действует на $G\mathbb{Q}$-факториальном терминальном трехмерном многообразии Фано X, и что X негоренштейново. Тогда $r \le 5$, и если $r = 5$, то негоренштейновы точки на X имеют тип $\frac{1}{2}(1,1,1)$ и образуют одну орбиту длины 9.*

Теперь мы будем предполагать, что $r(G) = 5$. В следующем предложении мы вычисляем размерность антиканонической системы на X при этом предположении.

Утверждение 4.4.3. *Пусть X является $G\mathbb{Q}$-факториальном трехмерным многообразием Фано, где G — 3-группа ранга 5. Тогда*

- *либо $(-K_X)^3 = 1/2$ и $\dim|-K_X| = 0$,*
- *либо $\dim|-K_X| \ge 1$.*

Доказательство. Рассмотрим два случая: когда X горенштейново и когда нет. В первом случае мы можем использовать обычную формулу Римана-Роха (4.4.1) без поправочных членов c_Q. Из теоремы о зануленении Каваматы-Фивега следует, что $\chi(\mathscr{O}_X(-K_X)) = h^0(\mathscr{O}_X(-K_X))$ и $\chi(\mathscr{O}_X) = 1$, поэтому для $D = -K_X$ получаем

$$4 \le g + 2 = h^0(\mathscr{O}_X(-K_X)) = 3 + \frac{1}{2}(-K_X)^3,$$

где число g называется *родом* X. Утверждение доказано в этом случае.

Теперь предположим, что X негоренштейново. Для $D = -K_X$ и особых точек типа $\frac{1}{2}(1,1,1)$ имеем $c_Q = -1/8$, поэтому, если есть N таких точек, в формуле (4.4.1) они дают вклад $-N/8$. Из (4.4.3) следует, что

$$(-K_X) \cdot c_2(X) = 24 - \frac{3N}{2}. \tag{4.4.4}$$

Имеем

$$h^0(\mathscr{O}_X(-K_X)) = 3 + \frac{1}{2}(-K_X)^3 - \frac{N}{4}. \tag{4.4.5}$$

Поскольку согласно утверждению 4.4.2 мы имеем $N = 9$, используя $(-K_X)^3 \geq 1/2$, получаем

$$h^0(\mathscr{O}_X(-K_X)) = \frac{3}{4} + \frac{1}{2}(-K_X)^3 \geq 1. \tag{4.4.6}$$

Мы видим, что $h^0(\mathscr{O}_X(-K_X)) = 1$ тогда и только тогда, когда $(-K_X)^3 = 1/2$, и если $(-K_X)^3 \geq 1$, то $h^0(\mathscr{O}_X(-K_X)) \geq 2$. □

4.5 Действие G на трехмерных многообразиях. Особый случай

В этом разделе мы работаем в следующем сеттинге.

Соглашение 4.5.1. Пусть X является терминальным $G\mathbb{Q}$-факториальным трехмерным многообразием Фано, где G — абелева 3-группа ранга $r = 5$. Предположим, что $(-K_X)^3 = 1/2$ и $\dim |-K_X| = 0$. Обозначим единственный антиканонический элемент в $|-K_X|$ через S.

Следующий частный случай может быть исключен с помощью следствия 4.2.2, однако мы приводим альтернативное доказательство.

Утверждение 4.5.2 ([Pr11, 2.9])**.** *Пара (X, S) является lc.*

Набросок доказательства. Если пара (X, S) не является lc, то выберем максимальное $\lambda < 1$, такое что пара $(X, \lambda S)$ является lc. Заметим, что это lc пара Фано. Рассмотрим ее минимальный lc-центр Z. После возмущения пары G-инвариантным дивизором с малыми коэффициентами мы можем предположить, что Z является единственным, а следовательно, G-инвариантным, lc-центром lc пары Фано (X, Δ). Более того, Z является либо точкой, либо гладкой рациональной кривой. Рассматривая действие G на Z в нормальном

расслоении к Z и используя утверждение 4.2.10, мы заключаем, что в обоих случаях имеем $r(G) \leq 3$, что противоречит нашим предположениям. □

Утверждение 4.5.3. *S неприводима и приведена.*

Доказательство. По нашим предположениям $S^3 = 1/2$ и $2S$ является дивизором Картье. Предположим, что S либо приводима, либо неприведена. Запишем $S = \sum k_i S_i$ для некоторых простых дивизоров Вейля S_i и $k_i \geq 1$. Число пересечения $(2S)^2 \cdot D$ для дивизора Картье $2S$ и дивизора Вейля D является целым числом, см., например, [KM98, 1.34]. Имеем $(2S)^2 \cdot D > 0$ по критерию Накая-Мойшезона, см. [KM98, 1.37]. Запишем

$$2 = \sum k_i S_i \cdot (2S)^2 \geq \sum k_i$$

и заключим, что либо $S = S_1 + S_2$, либо $S = 2S_1$. Поскольку G является 3-группой, в обоих случаях компоненты S являются G-инвариантными.

Так как $\rho^G(X) = 1$, отсюда следует, что S_i пропорциональны S в $\mathrm{Cl}(X)$ по модулю подгруппы кручения. По утверждению 5.8.1 мы можем предположить, что пара (X, S) является lc. Тогда нормализация S_1^ν для S_1 является lc поверхностью дель Пеццо, снабженной действием 3-группы G' ранга $r(G)-1 = 4$. Действительно, это можно увидеть, рассматривая действие G на S_1 и на касательном пространстве к общей точке S_1. Если S_1^ν является klt, то она рациональна, и мы приходим к противоречию с теоремой 5.1.3. Если S_1^ν является строго lc, то мы можем применить тот же аргумент, что и в предложении 5.8.1 для $\lambda = 1$, чтобы получить противоречие. Это показывает, что S неприводима и приведена. □

Утверждение 4.5.4. *Случай $r(G) = 5$, как в соглашении 4.5.1, не возникает.*

Доказательство. По утверждению 4.5.3 мы можем предположить, что S приведена и неприводима. Рассматривая действие G на касательном пространстве к общей точке S, мы видим, что p-группа G' ранга 4 точно действует на S. Пусть $\nu : S' \to S$ — нормализация S. Рассмотрим пару (S', Δ'), определенную формулой

$$K_{S'} + \Delta' = \nu^* K_S \sim 0.$$

Здесь Δ' является эффективным $\mathbb{Q}$-дивизором Вейля, называемым дифферентой. Более того, носитель $\nu(\Delta')$ содержится в ненормальном локусе S,

пара (S', Δ') является lc, и Δ' является G'-инвариантным. Если $\Delta' = 0$ и $S' = S$ каноническая, мы применяем утверждение 4.3.1. Действительно, мы имеем $K_S \sim 0$ по формуле присоединения, и из точной последовательности

$$0 \to \mathscr{O}_X(K_X) \to \mathscr{O}_X \to \mathscr{O}_S \to 0$$

следует, что $h^1(\mathscr{O}_S) = 0$, поэтому S является поверхностью K3 с не хуже чем каноническими особенностями. По утверждению 4.3.1 мы заключаем, что $r(G') \leq 2$, следовательно, $r(G) \leq 3$. Если либо $\Delta' \neq 0$, либо $\Delta' = 0$ и $S' = S$ не каноническая, то мы применяем утверждение 4.3.2 и получаем $r(G') \leq 3$, так что $r(G) \leq 4$. Это противоречит предположению $r(G) = 5$, и утверждение доказано. □

4.6 Действие G на трехмерных многообразиях. Общий случай

В этом разделе мы работаем в следующем сеттинге. Пусть X является терминальным $G\mathbb{Q}$-факториальным трехмерным многообразием Фано, где G является 3-группой ранга $r(G) = 5$, и $(-K_X)^3 > 1/2$.

Используя утверждение 4.2.9, мы будем предполагать, что G абелева. Тогда по утверждению 4.4.3 мы имеем $\dim |-K_X| \geq 1$, и поскольку представление G в $\mathrm{H}^0(X, \mathscr{O}(-K_X))$ раскладывается в прямую сумму одномерных представлений, мы видим, что $|-K_X|$ имеет G-инвариантную линейную подсистему $\mathscr{H}$ размерности 1. Нам понадобится следующая лемма.

Лемма 4.6.1. *Предположим, что p-группа ранга r для $p \geq 3$ точно действует на трехмерном рационально связном $G\mathbb{Q}$-расслоении Мори $X \to Z$ с условием, что* $\dim Z > 0$. *Тогда $r(G) \leq 4$, если $p = 3$, и $r(G) \leq 3$, если $p > 3$.*

Доказательство. Рассмотрим точную последовательность

$$1 \to G_1 \to G \to G_2 \to 1,$$

где G_2 точно действует на базе Z, а G_1 точно действует на общем слое расслоения $X \to Z$. Если $\dim Z = 1$, то $Z \simeq \mathbb{P}^1$ и $r(G_2) \leq 1$, поэтому G_1 точно действует на гладкой геометрически рациональной поверхности. Следовательно, мы имеем $r(G_1) \leq 3$, если $p = 3$, и $r(G_1) \leq 2$, если $p > 3$, согласно теореме 5.1.3, и утверждение доказано в этом случае. Случай $\dim Z = 2$ доказывается аналогично. □

Следующее утверждение является ключевым техническим инструментом в данном разделе.

Утверждение 4.6.2 (ср. [Al94, 3.1], [Pr09, 6.6]). *Предположим, что X является нормальным терминальным трехмерным многообразием, снабженным точным действием конечной группы G, и пусть $\mathscr{H}$ является непустым G-инвариантным пучком (то есть линейной системой размерности 1) на X без неподвижных компонент, такой что*

$$-K_X - \mathscr{H} \sim E,$$

где E является эффективным $\mathbb{Q}$-дивизором. Предположим, что

- *либо $E = 0$, и пара $(X, \mathscr{H})$ не является канонической,*
- *либо $E \neq 0$.*

Тогда X G-бирационально эквивалентно $G\mathbb{Q}$-расслоению Мори с базой положительной размерности.

Доказательство. Начнем с первого случая. Предположим, что линейная система $\mathscr{H}$ не имеет неподвижных компонент и что пара $(X, \mathscr{H})$ не является канонической. Пусть c является ее каноническим порогом, то есть c максимально со свойством, что $(X, c\mathscr{H})$ является канонической. Очевидно, $0 < c < 1$. Пусть $f : (X', c\mathscr{H}') \to (X, c\mathscr{H})$ является G-эквивариантной $G\mathbb{Q}$-факториальной терминализацией. Мы имеем

$$K_{X'} + c\mathscr{H}' = f^*(K_X + c\mathscr{H}),$$

$$K_{X'} + \mathscr{H}' + E = f^*(K_X + \mathscr{H}) \sim 0,$$

где E является ненулевым эффективным целым (поскольку $\mathscr{H} \sim -K_X$) f-исключительным дивизором. Заметим, что E может быть приводимым. Поскольку $-K_X - c\mathscr{H}$ обилен, мы имеем, что $-K_{X'} - c\mathscr{H}'$ является объемным и численно эффективным. Запустим G-эквивариантную $(K_{X'} + c\mathscr{H}')$-ПММ и получим $G\mathbb{Q}$-расслоение Мори $(\overline{X}, \overline{\mathscr{H}}) \to Z$.

Заметим, что $\overline{X}$ является терминальным. Действительно, покажем, что каждый шаг $(X', c\mathscr{H}')$-ПММ также является шагом обычной $K_{X'}$-ПММ. Это следует из того факта, что на терминализации X' линейная система $\mathscr{H}'$ не содержит кривых в базисном множестве [Al94, 1.22], и, следовательно, она является численно эффективной. На каждом шаге пара остается терминальной,

поэтому базисное множество не содержит кривых, и, следовательно, линейная система остается численно эффективной, так что тот же аргумент применим на каждом шаге ПММ.

Мы можем считать, что Z является точкой, иначе утверждение доказано. Итак, $\rho^G(\overline{X}) = 1$, и мы имеем

$$K_{\overline{X}} + \overline{\mathscr{H}} + \overline{E} \sim 0.$$

Из [Al94, 3.1] следует, что $\overline{E} \neq 0$. Тогда

$$-K_{\overline{\mathscr{H}}} - \overline{\mathscr{H}} \sim \overline{E},$$

и мы свели первый случай утверждения ко второму.

Теперь мы рассматриваем второй случай. В частности, имеем $E \neq 0$. Перейдем к $G\mathbb{Q}$-факториальной терминализации $f\colon (X', \mathscr{H}') \to (X, \mathscr{H})$. Запишем

$$K_{X'} + \mathscr{H}' + E' = f^*(K_X + \mathscr{H} + E) \sim 0,$$

где $E' \neq 0$. Применим G-ПММ к паре $(X', \mathscr{H}')$. На каждом шаге этой ПММ мы стягиваем $(K_{X'} + \mathscr{H}')$-отрицательный экстремальный луч. Но $-(K_{X'} + \mathscr{H}') \sim E'$, следовательно, E' не может занулиться в процессе ПММ по лемме отрицательности. Следовательно, G-ПММ завершается $G\mathbb{Q}$-расслоением Мори $\overline{X} \to Z$. Если размерность Z положительна, утверждение доказано. Итак, мы предполагаем, что Z является точкой, $\rho^G(\overline{X}) = 1$, и

$$K_{\overline{X}} + \overline{\mathscr{H}} + \overline{E} \sim 0.$$

Запишем $-K_{\overline{X}} \sim a\overline{\mathscr{H}}$ для некоторого $a > 1$. Как объяснено выше, пара $(\overline{X}, \overline{\mathscr{H}})$ является терминальной. Следовательно, по [Al94, 1.22] общий элемент $\overline{H} \in \overline{\mathscr{H}}$ является гладким и содержится в гладком множестве $\overline{X}$. По формуле присоединения получаем

$$K_{\overline{H}} = (K_{\overline{X}} + \overline{H})|_{\overline{H}} = (a-1)\overline{H}|_{\overline{H}},$$

следовательно, $\overline{H}$ является гладкой поверхностью дель Пеццо. Заметим, что линейная система $\overline{\mathscr{H}}$ определяет рациональное отображение $\overline{X} \dashrightarrow \mathbb{P}^1$. Разрешим базисное множество $\overline{\mathscr{H}}$ и запустим относительную G-ПММ над $\mathbb{P}^1$, чтобы получить Мори расслоение с базой положительной размерности. Утверждение доказано. □

Следствие 4.6.3. Пусть X является трехмерным $G\mathbb{Q}$-многообразием Фано, которое допускает G-инвариантный антиканонический пучок, то есть G-инвариантную линейную систему $\mathscr{H}$ такую, что $\dim \mathscr{H} = 1$, и $\mathscr{H} \subset |-K_X|$. Тогда либо

- X G-бирационально эквивалентно $G\mathbb{Q}$-расслоению Мори с базой положительной размерности, либо
- пара $(X, \mathscr{H})$ является канонической, линейная система $\mathscr{H}$ не имеет неподвижных компонент, и X G-бирационально эквивалентно G-эквивариантно расслоению над $\mathbb{P}^1$, общий слой которого является гладкой поверхностью К3.

Доказательство. По утверждению 4.6.2 мы можем предположить, что пара $(X, \mathscr{H})$ является канонической и не имеет неподвижных компонент.

Мы разрешаем неопределенность рационального отображения $X \dashrightarrow \mathbb{P}^1$, заданного $\mathscr{H}$. Рассмотрим терминализацию $(X', \mathscr{H}') \to (X, \mathscr{H})$. Мы имеем

$$K_{X'} + \mathscr{H}' = f^*(K_X + \mathscr{H}) \sim 0,$$

и пара $(X', \mathscr{H}')$ является терминальной. Из [Al94, 1.23] следует, что $\mathscr{H}'$ может иметь только изолированные базисные точки (которые являются неособыми на X') такие, что кратность общего элемента в $\mathscr{H}'$ в них равна 1. Мы утверждаем, что $\mathscr{H}'$ не может иметь изолированных базисных точек. Действительно, поскольку $\mathscr{H}'$ порождена двумя элементами, которые являются собственными прообразами D_1, D_2 на X, базисное множество $\mathscr{H}'$ совпадает с их пересечением. Но поскольку базисное множество принадлежит неособому множеству X', две поверхности не могут пересекаться в точке там, так что базисное множество $\mathscr{H}'$ пусто. Следовательно, общий элемент $\mathscr{H}'$ является гладкой поверхностью К3, и следствие доказано. □

Таким образом, мы получаем G-морфизм $X' \to \mathbb{P}^1$. Но тогда группа ранга $r(G) - 1 = 4$ точно действует на общем слое, который является гладкой поверхностью К3. Это противоречит утверждению 4.3.1.

Теперь мы суммируем полученные результаты, чтобы доказать Теорему 4.1.1.

4.7 Доказательство основных результатов

Доказательство теоремы 4.1.1. Предположим, что G является 3-группой ранга 5 или выше, которая точно действует на рационально связном трехмерном многообразии Y. Согласно утверждению 4.2.9 мы можем предположить, что G абелева. Переходя к G-эквивариантному разрешению особенностей и запуская G-ПММ, мы можем предположить, что G точно действует на $G\mathbb{Q}$-расслоении Мори $X \to Z$. Из леммы 4.6.1 мы заключаем, что Z является точкой, так что X является трехмерным $G\mathbb{Q}$-факториальным многообразием Фано с $\rho^G(X) = 1$.

По утверждению 4.4.3 либо $(-K_X)^3 = 1/2$ и $\dim |-K_X| = 0$, либо $\dim |-K_X| \geq 1$. Мы показываем, что первый случай не реализуется. Для единственного элемента $S \in |-K_X|$ по утверждению 5.8.1 мы можем считать, что пара (X, S) является lc. Затем по утверждению 4.5.3 дивизор S приведен и неприводим. Утверждение 4.5.4 показывает, что S является поверхностью К3 с не хуже чем каноническими особенностями, но тогда 3-группа ранга $r(G)-1 \geq 4$ не может точно действовать на S по утверждению 4.3.2.

Итак, мы видим, что $\dim |-K_X| \geq 1$. Следовательно, существует G-инвариантный пучок $\mathscr{H}$, то есть G-инвариантная линейная система размерности 1, состоящая из антиканонических элементов. Мы рассматриваем пару $(X, \mathscr{H})$. Применяя утверждение 4.6.2 и лемму 4.6.1, мы заключаем, что $\mathscr{H}$ не имеет базисных компонент и что пара $(X, \mathscr{H})$ является канонической. Но тогда по следствию 4.6.3 мы имеем, что X является G-бирационально эквивалентным расслоению над $\mathbb{P}^1$, общий слой которого является гладкой поверхностью К3. Группа ранга $r(G) - 1 = 4$ точно действует на общем слое, что противоречит утверждению 4.3.1.

Это доказывает, что $r(G) \leq 4$. Тот факт, что эта оценка точна, следует из примера 4.2.6. □

Доказательство следствия 4.1.2. Следует из теоремы 4.1.1 и того факта, что многообразие X в примере 4.2.6 является рациональным. □

Глава 5

Конечные абелевы подгруппы группы Кремоны

В этой главе мы работаем над полем комплексных чисел $\mathbb{C}$, если не сказано противное.

5.1 Введение

Рассмотрим следующий вопрос:

Вопрос 5.1.1. Какие конечные абелевы группы могут действовать точно и бирегулярно на рациональных (или рационально связных) многообразиях заданной размерности?

Поскольку мы рассматриваем многообразия, снабженные действием конечной группы, существует эквивариантное разрешение особенностей, поэтому мы можем рассматривать класс конечных абелевых групп, которые точно действуют на гладких проективных рациональных (или рационально связных) многообразиях. Кроме того, понятия бирегулярного и бирационального группового действия дадут нам один и тот же список групп в ответе на вопрос 5.1.1, поскольку мы можем разрешить точки неопределенности группового действия.

В размерности 1 ответ на вопрос 5.1.1 следует из классификации конечных подгрупп $\mathrm{Aut}(\mathbb{P}^1) = \mathrm{PGL}(2, \mathbb{C})$ или, что эквивалентно, из классификации платоновых тел. Ответ таков: либо циклическая группа, либо группа Клейна. Мы сформулируем этот элементарный результат для дальнейшего использо-

вания.

Утверждение 5.1.2. *Пусть G — конечная абелева подгруппа группы* $\mathrm{Aut}(\mathbb{P}^1) = \mathrm{PGL}(2,\mathbb{C})$. *Тогда G изоморфна одной из следующих групп:*

1. $\mathbb{Z}/n$ *для* $n \geq 1$,
2. $(\mathbb{Z}/2)^2$.

Рассмотрим утверждение 5.1.2 более внимательно. Мы видим, что есть два типа конечных абелевых групп, которые могут точно действовать на $\mathbb{P}^1$: группы первого типа являются подгруппами тора $\mathbb{C}^\times$ в $\mathrm{PGL}(2,\mathbb{C})$, а группа второго типа довольно специальна. Во-первых, такая группа только одна, так что имеет место «свойство ограниченности». Затем, группа второго типа индуцирует нетривиальный автоморфизм дивизора $D = \{0\} + \{\infty\}$ (в подходящих координатах) на $\mathbb{P}^1$, который является антиканоническим, то есть $D \sim -K_{\mathbb{P}^1}$, где $K_{\mathbb{P}^1}$ — канонический класс. Мы можем рассматривать D как «нульмерное многообразие Калаби–Яу», вложенное в $\mathbb{P}^1$ как его антиканоническое сечение. Цель этой главы — обобщить это наблюдение на высшие размерности.

Чтобы поместить вопрос 5.1.1 в более общий контекст, напомним некоторые определения. В дальнейшем мы обозначаем через $\mathrm{Bir}(X)$ группу бирациональных автоморфизмов многообразия X. *Группа Кремоны* $\mathrm{Cr}_n(\mathbb{C}) = \mathrm{Bir}(\mathbb{P}^n)$ — это группа бирациональных автоморфизмов n-мерного проективного пространства $\mathbb{P}^n$ над полем $\mathbb{C}$. Для $n = 1$ эта группа изоморфна $\mathrm{PGL}(2,\mathbb{C})$. При $n \geq 2$ группа Кремоны становится гораздо более сложным объектом для изучения. Один из способов понять ее структуру — это изучение ее конечных подгрупп. Изучение конечных подгрупп $\mathrm{Cr}_2(\mathbb{C})$ является классическим и восходит к работам Кантора и Вимана [Kan95], [Wim96], написанным в конце XIX века. Однако полная классификация конечных подгрупп $\mathrm{Cr}_2(\mathbb{C})$ была получена гораздо позже Долгачевым и Исковских, см. [DI09]. Заметим, что ответить на вопрос 5.1.1 в случае рациональных многообразий размерности n — это то же самое, что классифицировать с точностью до изоморфизма конечные абелевы подгруппы группы $\mathrm{Cr}_n(\mathbb{C})$. Ответ на вопрос 5.1.1 в размерности 2 таков.

Теорема 5.1.3 ([Bl07])**.** *Пусть X — рациональная поверхность, и пусть* $G \subset \mathrm{Bir}(X) = \mathrm{Cr}_2(\mathbb{C})$ *— конечная абелева группа. Тогда G изоморфна одной из следующих групп:*

1. $\mathbb{Z}/n \times \mathbb{Z}/m$ *для* $n \geq 1, m \geq 1$,

2. $\mathbb{Z}/2n \times (\mathbb{Z}/2)^2$ *для* $n \geq 1$,

3. $(\mathbb{Z}/4)^2 \times \mathbb{Z}/2$,

4. $(\mathbb{Z}/3)^3$,

5. $(\mathbb{Z}/2)^4$.

Снова мы можем разделить эти группы на два класса. Группы (1), (2) и (5) являются произведениями групп, действующих на $\mathbb{P}^1$. В частности, они реализуются как подгруппы в прямом произведении

$$\mathrm{Cr}_1(\mathbb{C}) \times \mathrm{Cr}_1(\mathbb{C}) \subset \mathrm{Cr}_2(\mathbb{C}).$$

Группы (3) и (4) могут быть реализованы как подгруппы группы автоморфизмов поверхности дель Пеццо степени 2, ассоциированной с квартикой Ферма, и, соответственно, кубической поверхности Ферма. Более того, можно показать, что группы (3) и (4) являются циклическими расширениями абелевых групп, действующих на эллиптических кривых, которые являются G-инвариантными антиканоническими сечениями соответствующих поверхностей дель Пеццо. Эти кривые допускают комплексное умножение (см. утверждение 5.4.2), поэтому мы можем рассматривать их как антиканонически вложенные одномерные многообразия Калаби–Яу с «исключительными» симметриями (см. определение 1.3.5 для нашего определения многообразий Калаби–Яу). Более подробно это объясняется в разделе 5.6, где мы даем альтернативное доказательство теоремы 5.1.3. Заметим, что групп типа (3) и (4) всего две, так что снова имеет место «свойство ограниченности». Также интересно отметить, что группы типа (3) и (4) не могут точно действовать на расслоении на коники, см. утверждение 5.5.1.

Мы напомним некоторые результаты, связанные с вопросом 5.1.1. Под *p-группой* мы понимаем конечную группу порядка p^k, где p — простое число. Следующий результат может быть выведен из теоремы 5.1.3, однако он был получен независимо.

Теорема 5.1.4 ([Beau07])**.** *Пусть X — рациональная поверхность, и пусть $G \subset \mathrm{Bir}(X) = \mathrm{Cr}_2(\mathbb{C})$ — конечная абелева p-группа. Тогда G может быть порождена не более чем r элементами, где*

- $r = 4$ *при* $p = 2$,
- $r = 3$ *при* $p = 3$,
- $r = 2$ *при* $p \geq 5$.

Более того, эти оценки точны.

Начиная с размерности 3, с точки зрения программы минимальных моделей более естественно рассматривать группы бирациональных автоморфизмов рационально связных многообразий заданной размерности. В серии работ, используя явные методы программы минимальных моделей, было получено обобщение теоремы 5.1.4 на размерность 3.

Теорема 5.1.5 ([Pr11], [Pr14], [PrSh17], [Kuz20], [Xu20], [Lo22])**.** *Пусть* X — *рационально связное многообразие размерности* 3, *и пусть* $G \subset \mathrm{Bir}(X)$ — *конечная* p*-группа. Тогда* G *может быть порождена не более чем* r *элементами, где*

- $r = 6$ *при* $p = 2$,
- $r = 4$ *при* $p = 3$,
- $r = 3$ *при* $p \geq 5$.

Более того, эти оценки достигаются в $\mathrm{Cr}_3(\mathbb{C})$.

Недавно с использованием другой техники было получено обобщение теоремы 5.1.5 на высшие размерности.

Теорема 5.1.6 ([KZh24, Corollary 11])**.** *Пусть* X — *рационально связное многообразие размерности* n, *и пусть* $G \subset \mathrm{Bir}(X)$ — *конечная абелева* p*-группа. Тогда* G *может быть порождена* r *элементами, где*

$$r \leq \frac{pn}{p-1} \leq 2n.$$

Начиная с размерности 3 геометрия становится значительно сложнее, и полная классификация конечных подгрупп $\mathrm{Cr}_3(\mathbb{C})$ кажется неразумной. Однако существуют результаты классификации для некоторых классов конечных групп, см., например, [Pr09] в случае простых групп. Также существует множество результатов ограниченности для конечных подгрупп группы Кремоны, важнейшим из которых является следующая теорема.

Теорема 5.1.7 ([PrSh16]). *Существует константа $J(n)$, зависящая только от n, такая что для любого поля k характеристики 0 и любой конечной подгруппы $G \subset \mathrm{Cr}_n(k)$ (либо $G \subset \mathrm{Bir}(X)$, где X — рационально связное многообразие размерности n) существует нормальная абелева подгруппа $A \subset G$ индекса $[G : A] \leq J(n)$.*

Таким образом, из теоремы 5.1.7 следует, что конечные подгруппы группы Кремоны (или, более общим образом, группы бирациональных автоморфизмов рационально связного многообразия) "достаточно близки" к абелевым группам. Теорема 5.1.7 была доказана в предположении о том, что верна гипотеза Борисова-Алексеева-Борисова. Теорема 5.1.7 стала безусловным результатом после доказательством этой гипотезы К. Биркаром, см. теорему 1.3.12.

Наша цель в этой главе — обобщить теорему 5.1.3 на размерность 3, то есть получить классификацию конечных абелевых групп, которые могут точно действовать на трехмерных рационально связных многообразиях. Мы введем следующее определение.

Определение 5.1.8. Конечная абелева группа G называется *группой типа произведения*, если $G \simeq G_1 \times G_2$, где $G_i \subset \mathrm{Cr}_i(\mathbb{C})$. В частности, G изоморфна подгруппе в

$$\mathrm{Cr}_1(\mathbb{C}) \times \mathrm{Cr}_2(\mathbb{C}) \subset \mathrm{Cr}_3(\mathbb{C}).$$

Список групп типа произведения может быть легко выведен из утверждения 5.1.2 и теоремы 5.1.3, см. таблицу 5.3 в разделе 5.3.

Под поверхностью К3 мы понимаем нормальную проективную поверхность S, имеющую не хуже чем канонические (то есть дювалевские) особенности, и такую, что $\mathrm{H}^1(S, \mathscr{O}_S) = 0$ и $K_S \sim 0$.

Определение 5.1.9. Мы говорим, что конечная абелева группа G имеет *тип К3*, если G является расширением конечной абелевой группы H, которая точно действует на поверхности К3, с помощью циклической группы:

$$0 \to \mathbb{Z}/m \to G \to H \to 0.$$

В частности, если конечная абелева группа G точно действует на трехмерном терминальном многообразии X, сохраняя поверхность К3 с не хуже чем дювалевскими особенностями, то G имеет тип К3, см. следствие 5.2.10.

Заметим, что если конечная группа действует на особой поверхности K3, то это действие поднимается на ее минимальное разрешение. Наш основной результат — следующая теорема (см. определение 1.3.7 для определения многообразия $G\mathbb{Q}$-Фано и $G\mathbb{Q}$-расслоения Мори).

Теорема 5.1.10. *Пусть X — рационально связное многообразие размерности 3, и пусть $G \subset \mathrm{Bir}(X)$ — конечная абелева группа. Тогда*

1. *либо G имеет тип произведения,*
2. *либо G имеет тип K3,*
3. *либо G точно действует на $G\mathbb{Q}$-трехмерном многообразии Фано X' с $|-K_{X'}| = \emptyset$, и более того, любое $G\mathbb{Q}$-расслоение Мори с точным действием G является $G\mathbb{Q}$-трехмерным многообразием Фано с пустой антиканонической системой.*

Отметим, что эти три типа не являются взаимно исключающими. На самом деле, мы ожидаем, что нет необходимости в группах третьего типа в теореме 5.1.10. Мы формулируем это как гипотезу:

Гипотеза 5.1.11. В обозначениях теоремы 5.1.10, любая группа третьего типа либо имеет тип произведения, либо тип K3.

С другой стороны, существуют примеры групп типа K3, которые не являются группами типа произведения, см. пример 5.11.5. Из этого следует, что такие группы не допускают точного действия на расслоении Мори с положительной размерностью базы, см. следствие 5.3.14.

Наш следующий результат — свойство ограниченности для групп типа K3. Под индексом Вейля многообразия Фано X с не хуже каноническими особенностями мы понимаем число

$$C(X) = \max\{k \mid -K_X \sim kH\},$$

где H — дивизор Вейля на X.

Утверждение 5.1.12. *Предположим, что G — группа типа K3, такая что $G \subset \mathrm{Aut}(X)$, где X — рационально связное трехмерное многообразие. Тогда в точной последовательности*

$$0 \to \mathbb{Z}/m \to G \to H \to 0$$

где группа H точно действует на поверхности K3, мы имеем $m \leq C$, где C — максимальный индекс Вейля многообразия Фано размерности 3 с не хуже каноническими особенностями.

Существование константы C следует из ограниченности для трехмерных многообразий Фано с каноническими особенностями [B21]. Недавно была получена эффективная оценка $C = 66$ в [JL25]. С другой стороны, полная классификация конечных групп, которые могут точно действовать на гладкой поверхности K3, дана в [BH23]. Поскольку существует только конечное число классов изоморфизма таких групп, мы получаем следующее.

Следствие 5.1.13. Существует только конечное число классов изоморфизма групп типа K3, которые могут точно действовать на рационально связном трехмерном многообразии X.

Мы также устанавливаем следующий результат о расширениях конечных абелевых групп, которые могут действовать на рациональных кривых и рациональных поверхностях.

Утверждение 5.1.14 (=Утверждение 5.3.11)**.** *Пусть $H \subset \mathrm{Cr}_1(\mathbb{C})$ и $K \subset \mathrm{Cr}_2(\mathbb{C})$ — конечные абелевы группы. Тогда абелево расширение G группы H с помощью K (или K с помощью H) имеет тип произведения.*

Заметим, что мы не утверждаем, что такое расширение обязательно расщепляется. Мы доказываем, что в предположениях утверждения G изоморфна произведению некоторых конечных абелевых групп H' и K', которые являются подгруппами $\mathrm{Cr}_1(\mathbb{C})$ и $\mathrm{Cr}_2(\mathbb{C})$ соответственно, причем H', K' могут отличаться от H, K. Этот чисто алгебраический результат о конечных абелевых группах очень полезен для нас. Из этого результата следует, что если конечная абелева группа G точно действует на трехмерном расслоении Мори с положительной размерностью базы, то такая группа может точно действовать на многообразии Фано, которое является произведением рациональной кривой и рациональной поверхности, см. следствие 5.3.14. Это позволяет нам свести нашу задачу классификации к случаю многообразий $G\mathbb{Q}$-Фано размерности 3. Аналогичный результат имеет место в размерности 2, см. утверждение 5.3.10. Это приводит к следующему естественному вопросу.

Вопрос 5.1.15. Существует ли конечная группа G такая, что G точно действует на расслоении Мори $f\colon X \to Z$ с $\dim X = n$ и $\dim Z > 0$, но G не

допускает точного действия на многообразии Фано с терминальными особенностями размерности n?

Хотя классификация конечных подгрупп $\mathrm{Cr}_2(\mathbb{C})$ получена в [DI09], ответ на вопрос 5.1.15 неизвестен даже в случае $n = 2$, см. [DI09, Section 5.7]. В силу утверждении 5.1.14 ответ на вопрос 5.1.15 отрицателен для конечных абелевых групп в случае $n = 3$.

Мы ожидаем, что теорема 5.1.10 может быть обобщена на произвольную размерность следующим образом: конечные абелевы группы, которые могут точно действовать на рационально связном многообразии X размерности n, либо являются произведениями групп, которые точно действуют на рационально связных многообразиях X_i размерности $n_i < n$ с $\sum n_i = n$; либо циклическими расширениями групп, точно действующих на многообразия Калби–Яу размерности $n-1$, антиканонически вложенных в некоторое бирациональное модифицирование X; либо они действуют на многообразии Фано с пустой антиканонической линейной системой. Некоторые результаты в этом направлении приведены в работе [Fil25].

В работе [LPZ25] получен следующий результат.

Теорема 5.1.16. *Пусть X — рационально связное многообразие размерности 3, и пусть $G \subset \mathrm{Bir}(X)$ — конечная абелева группа. Тогда либо G имеет тип произведения, либо тип (3), как в теореме 5.1.10, либо G изоморфна одной из следующих групп:*

1. $(\mathbb{Z}/4)^4$,
2. $(\mathbb{Z}/6)^3 \times \mathbb{Z}/2$,
3. $(\mathbb{Z}/6)^2 \times (\mathbb{Z}/3)^2$,
4. $(\mathbb{Z}/8)^2 \times \mathbb{Z}/4 \times \mathbb{Z}/2$.

Все случаи в теореме 5.1.16 реализуются, как показано в примере 5.11.5. Если гипотеза 5.1.11 верна, то список групп типа произведения вместе с теоремой 5.1.16 дает полный список конечных абелевых групп, которые могут действовать на рационально связном многообразии размерности 3.

Следствие 5.1.17. Пусть X — рационально связное многообразие размерности 3, и пусть $G \subset \mathrm{Bir}(X)$ — конечная абелева группа. Предположим, что

- либо верна гипотеза 5.1.11,

- либо G точно действует на терминальном многообразии Фано X' с $|-K_{X'}| \neq 0$.

Тогда G изоморфна одной из следующих групп (и все эти случаи реализуются):

	G	
(1)	$\mathbb{Z}/k \times \mathbb{Z}/l \times \mathbb{Z}/m$	$k \geq 1,\ l \geq 1,\ m \geq 1$
(2)	$\mathbb{Z}/2k \times (\mathbb{Z}/4)^2 \times \mathbb{Z}/2$	$k \geq 1$
(3)	$\mathbb{Z}/3k \times (\mathbb{Z}/3)^3$	$k \geq 1$
(4)	$\mathbb{Z}/2k \times \mathbb{Z}/2l \times (\mathbb{Z}/2)^2$	$k \geq 1,\ l \geq 1$
(5)	$\mathbb{Z}/2k \times (\mathbb{Z}/2)^4$	$k \geq 1$
(6)	$(\mathbb{Z}/4)^2 \times (\mathbb{Z}/2)^3$	
(7)	$(\mathbb{Z}/2)^6$	
(8)	$(\mathbb{Z}/4)^4$	
(9)	$(\mathbb{Z}/6)^3 \times \mathbb{Z}/2$	
(10)	$(\mathbb{Z}/6)^2 \times (\mathbb{Z}/3)^2$	
(11)	$(\mathbb{Z}/8)^2 \times \mathbb{Z}/4 \times \mathbb{Z}/2$	

Таблица 1. Гипотетический список всех конечных абелевых групп, которые могут точно действовать на рационально связном трехмерном многообразии

В Таблице 1 группы (1)–(7) имеют тип произведения, поэтому они могут действовать на рациональном трехмерном многообразии, в то время как группы (8)–(11) имеют тип K3 и не являются группами типа произведения.

Конечные абелевы группы симплектических автоморфизмов поверхностей K3 были классифицированы Никулиным в знаменитой статье [Nik80]. Классификация Брандхорста и Хофмана [BH23] предоставляет список всех максимальных конечных абелевых групп, которые могут точно действовать на поверхности K3. Оказывается, что все, кроме 6 из них, могут быть реализованы как подгруппы $\mathrm{Cr}_2(\mathbb{C})$.

Утверждение 5.1.18. *Пусть H — конечная абелева группа, которая точно действует на поверхности K3. Предположим дополнительно, что H не изоморфна подгруппе $\mathrm{Cr}_2(\mathbb{C})$, то есть она не может точно действовать на рациональной поверхности. Тогда H изоморфна одной из следующих групп:*

1. $(\mathbb{Z}/4)^3$,

2. $(\mathbb{Z}/6)^2 \times \mathbb{Z}/2$,

3. $\mathbb{Z}/6 \times (\mathbb{Z}/3)^2$,

4. $\mathbb{Z}/8 \times \mathbb{Z}/4 \times \mathbb{Z}/2$,

5. $(\mathbb{Z}/2)^5$,

6. $\mathbb{Z}/4 \times (\mathbb{Z}/2)^3$.

Пример 5.1.19. Мы приводим примеры действия групп типа K3 на (особых) многообразиях Фано, которые являются гиперповерхностями Ферма в взвешенных проективных пространствах. Соответствующие G-инвариантные поверхности K3 задаются гиперплоскими сечениями $x_0 = 0$.

1. Пусть $X_4 \subset \mathbb{P}^4$ задается уравнением

$$x_0^4 + x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 + x_4^4 = 0,$$

   с действием $G = (\mathbb{Z}/4)^4$. Заметим, что X_4 гладкое.

2. Пусть $X_6 \subset \mathbb{P}(1,1,1,1,3)$ задается уравнением

$$x_0^6 + x_1^6 + x_2^6 + x_3^6 + x_4^2 = 0,$$

   с действием $G = (\mathbb{Z}/6)^3 \times \mathbb{Z}/2$. Заметим, что X_6 гладкое.

3. Пусть $X_6' \subset \mathbb{P}(1,1,1,2,2)$ задается уравнением

$$x_0^6 + x_1^6 + x_2^6 + x_3^3 + x_4^3 = 0,$$

   с действием $G = (\mathbb{Z}/6)^2 \times (\mathbb{Z}/3)^2$. Заметим, что X_6' имеет 3 особые точки типа $\frac{1}{2} \times (1,1,1)$.

4. Пусть $X_8 \subset \mathbb{P}(1,1,1,2,4)$ задается уравнением

$$x_0^8 + x_1^8 + x_2^8 + x_3^4 + x_4^2 = 0,$$

   с действием $G = (\mathbb{Z}/8)^2 \times \mathbb{Z}/4 \times \mathbb{Z}/2$. Заметим, что X_8 имеет 2 особые точки типа $\frac{1}{2} \times (1,1,1)$.

Пример 5.1.20. Мы приводим примеры действий конечной абелевой группы G на рационально связном трехмерном многообразии, где G имеет как тип K3, так и тип произведения.

(5) Пусть $X_{2,2,2} \subset \mathbb{P}^6$ — пересечение трех квадрик, задаваемое уравнениями

$$\sum_{i=0}^{6} x_i^2 = \sum_{i=0}^{6} \lambda_i x_i^2 = \sum_{i=0}^{6} \mu_i x_i^2 = 0,$$

с действием $G = (\mathbb{Z}/2)^6$.

(6) Пусть $X_{4,4} \subset \mathbb{P}(1,1,1,2,2,2)$ задается уравнениями

$$x_0^4 + x_1^4 + x_2^4 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 = \lambda_0 x_0^4 + \lambda_1 x_1^4 + \lambda_2 x_2^4 + \lambda_3 x_3^2 + \lambda_4 x_4^2 + \lambda_5 x_5^2 = 0,$$

с действием $G = (\mathbb{Z}/4)^2 \times (\mathbb{Z}/2)^3$. Заметим, что $X_{4,4}$ имеет 4 особые точки типа $\frac{1}{2} \times (1,1,1)$.

Согласно [ChP16, Corollary 1.1.9] многообразия X в случаях (1)–(4) из примера 5.11.5 не являются рациональными. Это наблюдение мотивирует следующий вопрос.

Вопрос 5.1.21. Могут ли группы (1)–(4) из примера 5.11.5 быть реализованы как подгруппы $\mathrm{Cr}_3(\mathbb{C})$? Другими словами, могут ли такие группы точно действовать на рациональном трехмерном многообразии?

Если ответ на вопрос 5.1.21 отрицателен, то гипотеза 5.1.11 влечет, что все конечные абелевы подгруппы $\mathrm{Cr}_3(\mathbb{C})$ имеют тип произведения.

Мы отмечаем, что поверхность K3 Ферма S_4 в $\mathbb{P}^3$, которая является G-инвариантным гиперплоским сечением X_4 из примера 5.11.5(1), обладает многими замечательными свойствами. Например, она имеет максимально возможный ранг Пикара 20. Напомним, что такие поверхности K3 называются *сингулярными* (хотя далее в тексте мы используем этот термин для поверхностей, имеющих особенности, чтобы избежать путаницы). На самом деле S_4 является куммеровской поверхностью K3, ассоциированной с произведением двух изогенных эллиптических кривых $E_{\sqrt{-1}}$ и $E_{2\sqrt{-1}}$. В [Lo24] показано, что конечные абелевы группы в $\mathrm{Cr}_2(\mathbb{C})$, которые не принадлежат $\mathrm{Cr}_1(\mathbb{C}) \times \mathrm{Cr}_1(\mathbb{C})$, то есть группы (3)–(4) из теоремы 5.1.3, соответствуют эллиптическим кривым с комплексным умножением. Как отмечено в [Sch08], сингулярные поверхности K3 во многом ведут себя подобно эллиптическим кривым с комплексным умножением. Пусть $S_6, S_6', S_8, S_{2,2,2}, S_{4,4}$ — G-инвариантные гиперплоские сечения, заданные уравнением $x_0 = 0$, многообразий Фано (2)–(6) из примера 5.11.5 и примера 5.1.20. Используя результаты [EL25], можно вычислить $\rho(S_6) = \rho(S_6') = 20$, $\rho(S_8) = 18$. Известно, что для поверхности Куммера

K3 ее ранг Пикара больше или равен 17. Это наблюдение мотивирует следующий вопрос.

Вопрос 5.1.22. Являются ли $S_6, S_6', S_8, S_{2,2,2}, S_{4,4}$ куммеровскими поверхностями K3?

Известно, что сингулярные поверхности K3 классифицируются своей трансцендентной решеткой T_S, которая является четной, положительно определенной и имеет ранг 2. Если значения квадратичной формы на этой решетке делятся на 4, то S является поверхностью Куммера. Аналогичные критерии известны для поверхностей K3 с рангом Пикара не менее 17, см. [Hu16, 14.3.20]. Было бы интересно вычислить трансцендентные решетки для указанных поверхностей.

5.2 Некоторые факты о действиях групп

Мы начнем с некоторых общие сведениях о действиях конечных групп на многообразиях.

5.2.1 Действия групп на сферах

Мы напоминаем некоторые факты о действии конечных групп на сферах малых размерностей.

Лемма 5.2.2. *Пусть G — конечная абелева группа, которая точно действует на окружности S^1 кусочно-линейными гомеоморфизмами. Тогда $G = \mathbb{Z}/n$ для некоторого $n \geq 1$ или $G = \mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/2$.*

Доказательство. Заметим, что G может быть реализована как подгруппа симметрий правильного n-угольника на плоскости. Следовательно, G является подгруппой диэдральной группы $D_n = \mathbb{Z}/n \rtimes \mathbb{Z}/2$. Таким образом, G встраивается в точную последовательность

$$0 \to H \to G \to K \to 0,$$

где K либо тривиальна, либо $\mathbb{Z}/2$, а H — циклическая, содержащаяся в $\mathbb{Z}/n$. Если K тривиальна, то G циклическая. Если $K = \mathbb{Z}/2$, то H инвариантна относительно действия $\mathbb{Z}/2$ на $\mathbb{Z}/n$, но это действие задается как $x \mapsto -x$, так что H либо тривиальна, либо $\mathbb{Z}/2$. Это доказывает, что G либо циклическая, либо изоморфна $\mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/2$. □

Лемма 5.2.3 (см. [Zim12, Section 2]). *Пусть G — конечная группа, которая точно действует на сфере S^2 кусочно-линейными гомеоморфизмами. Тогда G сопряжена подгруппе ортогональной группы $O(3)$. В частности, если G абелева, то либо $G \subset \mathbb{Z}/n \times \mathbb{Z}/2$ для некоторого $n \geq 1$, либо $G = (\mathbb{Z}/2)^3$. Следовательно, либо G имеет неподвижную точку на S^2, либо G имеет орбиту длины 2 на S^2.*

5.2.4 Действия групп на алгебраических многообразиях

Определение 5.2.5. Пусть G — конечная группа. Через $\mathfrak{r}(G)$ мы обозначаем *ранг* группы G, то есть минимальное число образующих G.

Замечание 5.2.6. Заметим, что если G — конечная абелева группа и $H \subset G$ — подгруппа, то $\mathfrak{r}(H) \leq \mathfrak{r}(G)$.

Лемма 5.2.7 (см. [Po14, Lemma 4]). *Пусть X — алгебраическое многообразие, и G — конечная группа такая, что $G \subset \mathrm{Aut}(X)$. Предположим, что $P \in X$ — неподвижная точка действия G. Тогда индуцированное действие G на касательном пространстве $T_P X$ является точным.*

Следствие 5.2.8. Если конечная абелева группа $G \subset \mathrm{Aut}(X)$ имеет неподвижную точку $P \in X$, где X — алгебраическое многообразие размерности n и P — гладкая точка, то $\mathfrak{r}(G) \leq n$.

В дальнейшем нам понадобятся следующие результаты.

Лемма 5.2.9 (см. [Pr11, Lemma 2.6]). *Пусть X — трехмерное алгебраическое многообразие с изолированными особенностями, и G — конечная абелева группа такая, что $G \subset \mathrm{Aut}(X)$.*

1. *Если существует кривая $C \subset X$ из G-неподвижных точек, то $\mathfrak{r}(G) \leq 2$.*
2. *Если существует (возможно, приводимый) дивизор $S \subset X$ из G-неподвижных точек, то $\mathfrak{r}(G) \leq 1$. Если, кроме того, S особ вдоль кривой, то G тривиальна.*

Доказательство. Докажем первое утверждение. Пусть P — общая точка на C. Поскольку X имеет изолированные особенности, P является гладкой точкой на X. В частности, $\dim T_P X = 3$. По лемме 5.2.7, индуцированное дей-

ствие G на T_PX является точным. С другой стороны, действие G на одномерном подпространстве $T_PC \subset T_PX$ тривиально, так как по предположению действие G на C тривиально. Следовательно, G точно действует на G-инвариантном дополнении T' к T_PC в T_PX. Таким образом, $\dim T' = 2$. Поскольку G — конечная абелева группа, отсюда следует, что $\mathfrak{r}(G) \leq 2$ в этом случае.

Первая часть второго утверждения доказывается аналогично. Докажем вторую часть. По предположению, действие G на S тривиально. Отсюда следует, что индуцированное действие G на T_PS тривиально для любой точки $P \in S$. Для общей точки $P \in \mathrm{Sing}(S)$ мы имеем $T_PS = T_PX$, поскольку X гладкое в P и P — особая точка на S. По лемме 5.2.7 мы заключаем, что G тривиальна. □

Следствие 5.2.10. Если конечная группа G точно действует на трехмерном алгебраическом многообразии X с изолированными особенностями, сохраняя поверхность S, то существует точная последовательность

$$0 \to \mathbb{Z}/m \to G \to H \to 0$$

для $m \geq 1$, где $H \subset \mathrm{Aut}(S)$.

Доказательство. Обозначим через H образ естественного отображения $\phi\colon G \to \mathrm{Aut}(S)$. По лемме 5.2.9.(ii), ядро ϕ — циклическая группа. Следствие доказано. □

Лемма 5.2.11. *Пусть X — алгебраическое многообразие, и пусть G — конечная абелева группа такая, что $G \subset \mathrm{Aut}(X)$. Пусть $S = \sum_{i=1}^{N} S_i$ — дивизор на X такой, что индуцированное действие G на S является точным. Обозначим через G_S образ G в симметрической группе, действующей на множестве компонент $\{S_i\}$. Предположим, что действие G_S на множество компонент $\{S_i\}$ транзитивно. Тогда в точной последовательности*

$$0 \to H \to G \to G_S \to 0 \tag{5.2.1}$$

группа H изоморфна подгруппе $\mathrm{Aut}(S_i)$.

Доказательство. Зафиксируем компоненту S_1 дивизора S. Поскольку действие G_S на множество $\{S_i\}$ транзитивно, для любой компоненты S_j существует элемент $g'_j \in G_S$ такой, что $g'_j(S_1) = S_j$. Выберем прообразы $g_j \in G$

элементов $g'_j \in G_S$. Для каждого j отождествим S_1 и S_j посредством изоморфизма $S_1 \simeq g_j(S_1) = S_j$. Поскольку по предположению действие G на S точно, G может быть встроена в точную последовательность (5.2.1), где

$$H \subset \prod_{i=1}^{N} \mathrm{Aut}(S_i).$$

Рассмотрим произвольный элемент

$$h \in H \subset \prod_{i=1}^{N} \mathrm{Aut}(S_i) \simeq \prod_{i=1}^{N} \mathrm{Aut}(S_1)$$

где мы использовали выбранные выше изоморфизмы. Пусть $\mathrm{pr}_j \colon \prod_{i=1}^{N} \mathrm{Aut}(S_1) \to \mathrm{Aut}(S_1)$ — проекция на j-й сомножитель. Поскольку G абелева, для любого j мы имеем $g_j h g_j^{-1} = h$. Отсюда следует, что $\mathrm{pr}_i(h) = \mathrm{pr}_j(h)$ для любых i, j. Пусть

$$\Delta \colon \mathrm{Aut}(S_1) \to \prod_{i=1}^{N} \mathrm{Aut}(S_1)$$

— диагональное вложение: $\Delta(g) = (g, \ldots, g)$. Тогда $H \simeq \Delta(\mathrm{pr}_1(H))$. Таким образом, $H \simeq \mathrm{pr}_1(H) \subset \mathrm{Aut}(S_1)$, и утверждение доказано. □

5.3 Группы типа произведения

В этом разделе мы фиксируем некоторые обозначения, связанные с конечными абелевыми группами, и вводим определение абелевых групп типа произведения. Мы также изучаем свойства расширений конечных абелевых групп. Мы начинаем со следующей леммы, которая следует из классификации конечных абелевых групп, см. также [Ka69, Theorem 5] для более общего утверждения.

Лемма 5.3.1. *Пусть G — конечная абелева группа. Пусть $g \in G$ — элемент, и пусть $\langle g \rangle \subset G$ — подгруппа, порожденная g. Предположим, что $\langle g \rangle$ является максимальной циклической подгруппой в G, что означает, что если существует циклическая подгруппа $H \subset G$ такая, что $\langle g \rangle \subset H$, то $H = \langle g \rangle$. Тогда $G \simeq \langle g \rangle \times K$ для некоторой подгруппы $K \subset G$. В частности, $\mathfrak{r}(G/\langle g \rangle) < \mathfrak{r}(G)$.*

Следствие 5.3.2. Пусть G — конечная абелева группа такая, что G вписывается в точную последовательность

$$0 \to H \to G \to K \to 0 \tag{5.3.1}$$

Предположим, что H циклическая. Тогда либо точная последовательность (5.3.1) расщепляется, либо мы имеем $G \simeq H^+ \times K^-$, где H^+ — циклическая группа, содержащая H как подгруппу, и $K^- = K/\phi(H)$.

Доказательство. Предположим, что не существует циклической подгруппы H^+ в G такой, что $H \subset H^+$ и $H \neq H^+$. Тогда по лемме 5.3.1 мы имеем $G \simeq H \times K$, и точная последовательность (5.3.1) расщепляется. Таким образом, мы можем предполагать, что существует циклическая подгруппа H^+ в G такая, что $H \subset H^+$ и $H \neq H^+$. Мы можем считать, что H^+ максимальна с этим свойством. Положим $K^- = K/\phi(H^+)$. Тогда мы имеем точную последовательность

$$0 \to H^+ \to G \to K^- \to 0.$$

Поскольку циклическая подгруппа H^+ максимальна в G, по лемме 5.3.1 получаем $G \simeq H^+ \times K^-$. □

Пусть G — конечная абелева группа. В дальнейшем через G_p мы обозначаем p-силовскую подгруппу группы G, где p — простое число, так что мы имеем

$$G = \prod_{p \geq 2} G_p.$$

Будем говорить, что G_p является *p-частью* группы G.

Замечание 5.3.3. Предположим, что $\mathfrak{r}(G_p) \leq k$ для любого простого числа p. Тогда $\mathfrak{r}(G) \leq k$.

Например, по теореме 5.1.5, если G действует точно на рационально связном трехмерном многообразии, то $\mathfrak{r}(G_2) \leq 6$, $\mathfrak{r}(G_3) \leq 4$ и $\mathfrak{r}(G_p) \leq 3$ для $p \geq 5$.

Для конечной абелевой группы G мы полагаем

$$G_{\neq p} = \prod_{q \neq p} G_q, \qquad \text{так что} \qquad G = G_p \times G_{\neq p}.$$

Для абелевой p-группы G_p мы говорим, что G_p имеет тип

$$\lambda = [\lambda_1, \ldots, \lambda_k] \qquad \text{для} \qquad \lambda_1 \geq \ldots \geq \lambda_k \geq 1,$$

если

$$G_p = \mathbb{Z}/p^{\lambda_1} \times \ldots \times \mathbb{Z}/p^{\lambda_k}.$$

Заметим, что тип конечной абелевой p-группы определен однозначно.

Замечание 5.3.4. Последовательность конечных абелевых групп

$$0 \to H \to G \to K \to 0 \tag{5.3.2}$$

точна тогда и только тогда, когда для любого простого p соответствующие p-части H_p, G_p, K_p групп H, G, K образуют точную последовательность

$$0 \to H_p \to G_p \to K_p \to 0. \tag{5.3.3}$$

Мы говорим, что точная последовательность (5.3.3) является *p-частью* точной последовательности (5.3.2).

С каждым типом $\lambda = [\lambda_1, \ldots, \lambda_k]$ связана диаграмма Юнга с λ_i клетками в i-й строке. Для двух диаграмм Юнга $\lambda = [\lambda_1, \ldots, \lambda_k]$ и $\mu = [\mu_1, \ldots \mu_l]$ можно определить их произведение $\lambda \cdot \mu$ как формальную линейную комбинацию диаграмм Юнга с неотрицательными коэффициентами, см. например [Fu00, Section 2]. Тогда *коэффициент Литтлвуда–Ричардсона* $c^{\nu}_{\lambda\mu}$ — это коэффициент при диаграмме Юнга $\nu = [\nu_1, \ldots \nu_s]$ в произведении диаграмм Юнга $\lambda \cdot \mu$.

Теорема 5.3.5 ([Fu00, Section 2])**.** *В приведенных обозначениях предположим, что G_p имеет тип λ, H_p имеет тип μ, и K_p имеет тип ν. Тогда расширение вида* (5.3.3) *существует тогда и только тогда, когда для коэффициента Литтлвуда–Ричардсона выполнено $c^{\lambda}_{\mu\nu} > 0$.*

Замечание 5.3.6. Пусть G, H и K — конечные абелевы группы. Поскольку $c^{\lambda}_{\mu\nu} = c^{\lambda}_{\nu\mu}$ (см. [Fu06, I.5.1, Corollary 3]), из замечания 5.3.4 и теоремы 5.3.5 следует, что абелево расширение K с помощью H, изоморфное G, существует тогда и только тогда, когда существует абелево расширение H с помощью K, изоморфное G.

Определение 5.3.7. Мы говорим, что конечная абелева группа G является *группой типа произведения*, если $G \simeq G_1 \times G_2$, где $G_i \subset \mathrm{Cr}_i(\mathbb{C})$. В частности, G изоморфна подгруппе в

$$\mathrm{Cr}_1(\mathbb{C}) \times \mathrm{Cr}_2(\mathbb{C}) \subset \mathrm{Cr}_3(\mathbb{C}).$$

Утверждение 5.3.8. *Для конечной абелевой группы G следующие условия эквивалентны:*

1. $G \subset A_1 \times A_2$*, где* A_i *— произвольные группы,*

2. $G \simeq G_1 \times G_2$*, где* $G_i \subset A_i$*.*

Таким образом, конечная абелева группа G *является группой типа произведения тогда и только тогда, когда* G *изоморфна подгруппе группы* $\mathrm{Cr}_1(\mathbb{C}) \times \mathrm{Cr}_2(\mathbb{C})$*.*

Доказательство. Импликация из (2) в (1) очевидна. Докажем импликацию из (1) в (2). Достаточно доказать ее для каждой p-примарной подгруппы G_p группы G, поскольку $G = \prod_p G_p$. Рассмотрим гомоморфизмы проекции $\pi_i \colon A_1 \times A_2 \to A_i$. Положим $G_i = \pi_i(G)$ и $N_i = \mathrm{Ker}(G \to G_i)$. Рассмотрим короткую точную последовательность:

$$1 \to N_1 \to G \to G_1 \to 1.$$

Покажем, что она расщепляется. Поскольку G — конечная абелева p-группа, G_1 является прямой суммой циклических групп. Для каждого циклического слагаемого $\langle x \rangle$ группы G_1 выберем прообраз $g \in G$ для x. Ограничение проекции π_1 на $\langle g \rangle$ является либо изоморфизмом, либо тривиальным, но поскольку $\pi_1(g) = x$, оно является изоморфизмом. Таким образом, последовательность расщепляется, и $G \cong G_1 \times N_1$. Аналогично, $N_1 \cong G_2$ и $G_1 \cong N_2$, так что мы также имеем $G \cong G_1 \times G_2$ с $G_i \subset A_i$. □

Заметим, что утвержденииe 5.3.8 не выполняется для произвольных (конечных) групп.

Используя утверждение 5.1.2 и теорему 5.1.3, можно проверить, что группы типа произведения — это в точности следующие группы:

	G	
(1)	$\mathbb{Z}/k \times \mathbb{Z}/l \times \mathbb{Z}/m$	$k \geq 1,\ l \geq 1,\ m \geq 1$
(2)	$\mathbb{Z}/2k \times (\mathbb{Z}/4)^2 \times \mathbb{Z}/2$	$k \geq 1$
(3)	$\mathbb{Z}/3k \times (\mathbb{Z}/3)^3$	$k \geq 1$
(4)	$\mathbb{Z}/2k \times \mathbb{Z}/2l \times (\mathbb{Z}/2)^2$	$k \geq 1,\ l \geq 1$
(5)	$\mathbb{Z}/2k \times (\mathbb{Z}/2)^4$	$k \geq 1$
(6)	$(\mathbb{Z}/4)^2 \times (\mathbb{Z}/2)^3$	
(7)	$(\mathbb{Z}/2)^6$	

Таблица 1. Группы типа произведения

Заметим, что класс групп типа произведения замкнут относительно взятия подгрупп и фактор-групп.

В дальнейшем мы будем использовать следующее наблюдение.

Замечание 5.3.9. Пусть G — конечная абелева группа. Если $\mathfrak{r}(G) \leq n$, то $G \subset \mathrm{Cr}_n(\mathbb{C})$. Если $\mathfrak{r}(G) \leq 3$, то G является группой типа произведения.

Сформулируем еще одно простое наблюдение, которое может быть доказано разбором случаев.

Утверждение 5.3.10. *Пусть $H, K \subset \mathrm{Cr}_1(\mathbb{C})$ — конечные абелевы группы. Пусть G — абелева группа, являющаяся расширением H с помощью K (или K с помощью H). Тогда мы имеем*

$$G \simeq H' \times K'$$

для некоторых подгрупп $H', K' \subset \mathrm{Cr}_1(\mathbb{C})$. В частности, G изоморфна подгруппе группы

$$\mathrm{Cr}_1(\mathbb{C}) \times \mathrm{Cr}_1(\mathbb{C}) \subset \mathrm{Cr}_2(\mathbb{C}).$$

Более того, в этом случае G имеет тип (1), (2) или (5) как в теореме 5.1.3.

В некотором роде удивительно, что аналогичный результат имеет место в размерности 3.

Утверждение 5.3.11. *Пусть $H \subset \mathrm{Cr}_1(\mathbb{C})$ и $K \subset \mathrm{Cr}_2(\mathbb{C})$ — конечные абелевы группы. Тогда абелево расширение G группы K с помощью H (или H с помощью K) является группой типа произведения.*

Доказательство. Согласно замечанию 5.3.6, достаточно рассмотреть случай расширения K с помощью H. Мы имеем точную последовательность

$$0 \to H \to G \to K \to 0 \tag{5.3.4}$$

где G — конечная абелева группа. Согласно утверждению 5.1.2, существуют две возможности для группы H:

1. $\mathbb{Z}/k$ для $k \geq 1$,
2. $(\mathbb{Z}/2)^2$.

Согласно теореме 5.1.3, имеются следующие возможности для K:

1. $\mathbb{Z}/n \times \mathbb{Z}/m$ для $n \geq 1, m \geq 1$,

2. $\mathbb{Z}/2n \times (\mathbb{Z}/2)^2$ для $n \geq 1$,

3. $(\mathbb{Z}/4)^2 \times \mathbb{Z}/2$,

4. $(\mathbb{Z}/3)^3$,

5. $(\mathbb{Z}/2)^4$.

Если точная последовательность (5.3.4) расщепляется, группа G является группой типа произведения. Так что мы можем считать, что она не расщепляется. Предположим, что H циклическая. Тогда, согласно следствию 5.3.2, мы имеем $G \simeq H^+ \times K^-$, где H^+ циклическая, и K^- — факторгруппа K. Поскольку конечные абелевы подгруппы группы $\mathrm{Cr}_2(\mathbb{C})$ замкнуты относительно взятия факторгрупп, мы получаем, что G является группой типа произведения. Таким образом, мы можем считать, что $H = (\mathbb{Z}/2)^2$. Мы применяем теорему 5.3.5 и рассматриваем пять случаев.

Случай (1). Предположим, что K имеет тип (1) как в теореме 5.1.3. Рассмотрим 2-часть точной последовательности (5.3.4). Пусть (k, l) — тип K_2, где $k \geq l$. Мы можем считать, что $l \geq 1$, иначе $G = G_2 \times G_{\neq 2}$ является группой типа произведения, потому что $\mathfrak{r}(G_{\neq 2}) \leq 2$. Тогда произведение диаграмм Юнга, соответствующих K_2 и $H = H_2$, выглядит следующим образом:

$$[k, l] \cdot [1, 1] = [k + 1, l + 1] + [k + 1, l, 1] + [k, l + 1, 1] + [k, l, 1, 1].$$

Поскольку $G = G_2 \times G_{\neq 2}$ и $\mathfrak{r}(G_2) \leq 3$ для первых трех слагаемых, мы имеем $\mathfrak{r}(G) \leq 3$. Так что нам нужно рассмотреть только тип $[k, l, 1, 1]$. Но в этом случае $\mathfrak{r}(G_{\neq 2}) \leq 2$, откуда следует, что $G = G_2 \times G_{\neq 2}$ является группой типа произведения.

Случай (2). Предположим, что K имеет тип (2). Рассмотрим произведение диаграмм Юнга для 2-части точной последовательности (5.3.4):

$$[k, 1, 1] \cdot [1, 1] = [k + 1, 2, 1] + [k + 1, 1, 1, 1] + [k, 2, 2] + [k, 2, 1, 1] + [k, 1, 1, 1, 1].$$

Поскольку $\mathfrak{r}(G_{\neq 2}) \leq 1$, отсюда следует, что $G = G_2 \times G_{\neq 2}$ является группой типа произведения.

Случай (3). Предположим, что K имеет тип (3). Рассмотрим произведение диаграмм Юнга для 2-части (5.3.4):

$$[2,2,1]\cdot[1,1]=[3,3,1]+[3,2,2]+[3,2,1,1]+[2,2,2,1]+[2,2,1,1,1].$$

Отсюда следует, что $G=G_2$ является группой типа произведения.

Случай (4). Предположим, что K имеет тип (4). Очевидно, что в этом случае мы имеем $\mathfrak{r}(G)\leq 3$, так что G является группой типа произведения.

Случай (5). Наконец, предположим, что K имеет тип (5). Рассмотрим произведение диаграмм Юнга для (5.3.4):

$$[1,1,1,1]\cdot[1,1]=[2,2,1,1]+[2,1,1,1,1]+[1,1,1,1,1,1].$$

Отсюда следует, что $G=G_2$ является группой типа произведения. □

Следствие 5.3.12. Пусть X — трехмерное алгебраическое многообразие с изолированными особенностями, и пусть G — конечная абелева группа такая, что $G\subset \mathrm{Aut}(X)$. Если на X существует G-инвариантная рациональная кривая C, то G является группой типа произведения. Если на X существует G-инвариантная рациональная поверхность S, то G является группой типа произведения.

Доказательство. Предположим, что на X существует G-инвариантная рациональная кривая C. Тогда мы имеем точную последовательность

$$0\to G_N\to G\to G_C\to 0, \tag{5.3.5}$$

где G_C действует точно на C, так что $G_C\subset \mathrm{Cr}_1(\mathbb{C})$, и G_N действует точно на нормальном расслоении к C, и поэтому $\mathfrak{r}(G_N)\leq 2$ (см. лемму 5.2.9). В частности, $G_N\subset \mathrm{Cr}_2(\mathbb{C})$. Теперь из утверждения 5.3.11 следует, что G является группой типа произведения.

Предположим, что на X существует G-инвариантная рациональная поверхность S. Тогда в обозначениях следствия 5.2.10 мы имеем $\mathbb{Z}/m\subset \mathrm{Cr}_1(\mathbb{C})$ и $H\subset \mathrm{Cr}_2(\mathbb{C})$. По утверждению 5.3.11 мы заключаем, что G является группой типа произведения. □

Следующая полезная лемма следует из принципа Лефшеца.

Лемма 5.3.13. *Пусть* $\mathbb{K}$ *— поле характеристики* 0. *Предположим, что конечная группа* G *изоморфна подгруппе группы* $\mathrm{Cr}_n(\mathbb{K})$ *для некоторого* $n \geq 1$. *Тогда* G *изоморфна подгруппе группы* $\mathrm{Cr}_n(\mathbb{C})$.

Следствие 5.3.14. Пусть G — конечная абелева группа. Пусть $f\colon X \to Z$ — $G\mathbb{Q}$-расслоение Мори такое, что $\dim X = 3$, $\dim Z > 0$, и X рационально связно. Тогда G является группой типа произведения.

Доказательство. Заметим, что Z рационально. Предположим, что $\dim Z = 2$ (случай $\dim Z = 1$ аналогичен). Тогда $\dim X_\eta = 1$, где X_η — схемно-теоретический общий слой. Мы имеем точную последовательность

$$0 \to G_f \to G \to G_Z \to 0, \tag{5.3.6}$$

где G_Z действует точно на Z, так что $G_Z \subset \mathrm{Cr}_2(\mathbb{C})$, и G_f действует точно на X_η. Поскольку X_η — гладкая кривая Фано над $\overline{\mathbb{C}(t)}$, она рациональна над $\overline{\mathbb{C}(t)}$, так что $G_f \subset \mathrm{Cr}_1(\overline{\mathbb{C}(t)})$. По лемме 5.3.13 следует, что G_f изоморфна подгруппе в $\mathrm{Cr}_1(\mathbb{C})$. Тогда утверждение следует из утверждения 5.3.11. □

Мы формулируем следующий результат для дальнейшего использования.

Лемма 5.3.15. *Пусть* H *— группа типа (1), (2) или (5) как в теореме 5.1.3. Пусть* G *— абелево циклическое расширение группы* H. *Предположим, что* $\mathfrak{r}(G_2) = 4$. *Тогда* $\mathfrak{r}(G_p) \leq 2$ *для* $p > 2$. *В частности, мы имеем*

$$G = (\mathbb{Z}/2)^2 \times \mathbb{Z}/2n \times \mathbb{Z}/2m \qquad \text{для некоторых} \qquad n, m \geq 1.$$

Доказательство. Поскольку $\mathfrak{r}(G_2) = 4$ и G является циклическим расширением H, получаем, что для 2-части H_2 группы H мы имеем $\mathfrak{r}(H_2) \geq 3$. Следовательно, H имеет тип (2) или (5) как в теореме 5.1.3. В частности, $\mathfrak{r}((H)_p) \leq 1$ для $p > 2$, где H_p — p-часть H. Таким образом, $\mathfrak{r}(G_p) \leq 2$ для $p > 2$. □

5.4 Действие групп на кривых

В этом разделе мы доказываем некоторые результаты о действии конечных абелевых групп на гладких проективных кривых. Следующее утверждение является немного более точной версией утверждения 5.1.2.

Утверждение 5.4.1. *Пусть G — конечная абелева подгруппа группы* $\mathrm{Aut}(\mathbb{P}^1) \simeq \mathrm{PGL}(2,\mathbb{C})$.

Если $G = \mathbb{Z}/n$ для $n \geq 2$, то G имеет 2 неподвижные точки на $\mathbb{P}^1$, и любая другая точка на $\mathbb{P}^1$ имеет G-орбиту мощности n.

Если $G = (\mathbb{Z}/2)^2$, то существует три G-орбиты на $\mathbb{P}^1$ мощности 2, и любая другая G-орбита на $\mathbb{P}^1$ имеет мощность 4.

Доказательство. Циклическая подгруппа $\mathbb{Z}/n$ группы $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{C})$ для $n \geq 2$ с точностью до сопряжения порождена преобразованием $[x_0 : x_1] \mapsto [\xi x_0 : x_1]$, где ξ — примитивный корень степени n из единицы. Следовательно, имеются две неподвижные точки: $[0 : 1]$ и $[1 : 0]$. Все остальные точки имеют орбиту мощности $n \geq 2$.

Подгруппа группы $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{C})$, изоморфная $(\mathbb{Z}/2)^2$, с точностью до сопряжения порождена преобразованиями $[x_0 : x_1] \mapsto [-x_0 : x_1]$ и $[x_0 : x_1] \mapsto [x_1 : x_0]$. Существуют три орбиты мощности 2: $\{[0 : 1], [1 : 0]\}$, $\{[1 : 1], [1 : -1]\}$, $\{[1 : i], [1 : -i]\}$. Любая другая G-орбита на $\mathbb{P}^1$ имеет мощность 4. □

Утверждение 5.4.2. *Пусть C — гладкая кривая рода 1, и пусть G — конечная абелева группа такая, что $G \subset \mathrm{Aut}(C)$. Тогда возможны следующие случаи (мы обозначаем через σ антиподальную инволюцию на C, через Ord CM мы обозначаем порядок комплексного умножения на C):*

	G	Мин. длина орбиты	$\sigma \in G$	Ord CM
(1)	$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$	mn		
(2)	$\mathbb{Z}/2$	1	✓	
(3)	$(\mathbb{Z}/2)^2$	2	✓	
(4)	$(\mathbb{Z}/2)^3$	4	✓	
(5)	$\mathbb{Z}/4$	1	✓	4
(6)	$\mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/4$	2	✓	4
(7)	$\mathbb{Z}/3$	1		3
(8)	$(\mathbb{Z}/3)^2$	3		3
(9)	$\mathbb{Z}/6$	1	✓	3

Таблица 2. Конечные абелевы группы, действующие на гладких кривых рода 1

Доказательство. Хорошо известно, что

$$\mathrm{Aut}(C) \simeq C_0 \rtimes \mathbb{Z}/k\mathbb{Z}$$

где C_0 — подгруппа сдвигов, которую можно отождествить (после выбора базовой точки на C) с C, и $k \in \{2, 4, 6\}$. Если $k > 2$, то говорят, что C имеет комплексное умножение. Если $G \subset C_0$, имеем, что $\mathfrak{r}(G) \leq 2$ и G действует сдвигами, так что мы находимся в первом случае таблицы. Следовательно, мы можем считать, что $G \not\subset C_0$. Рассмотрим точную последовательность

$$0 \to H \to G \to K \to 0 \tag{5.4.1}$$

где $H \subset C_0$, и $K \subset \mathbb{Z}/k\mathbb{Z}$. Имеем $K = \mathbb{Z}/r$ для $r \in \{2, 3, 4, 6\}$. Рассмотрим случаи.

Случай $r = 2$. Заметим, что $K = \mathbb{Z}/2$ действует на C антиподальной инволюцией σ. Можно проверить, что единственные сдвиги, коммутирующие с σ, — это сдвиги на точки 2-кручения. Следовательно, мы получаем $G \subset (\mathbb{Z}/2)^3$ (заметим, что мы не можем получить элемент порядка 4 с расширением (5.4.1)). Также заметим, что действие G на C не свободно, поскольку σ имеет 4 неподвижные точки на C. Мы получаем случаи (2), (3), (4) в таблице.

Случай $r = 3$. Применяя формулу Лефшеца, получаем, что K имеет три неподвижные точки на C. Заметим, что единственные сдвиги, коммутирующие с K, — это сдвиги на точки 3-кручения, которые образуют подгруппу $\mathbb{Z}/3 \times \mathbb{Z}/3$ в C_0. Заметим, что только «диагональная» подгруппа $\mathbb{Z}/3$ из $\mathbb{Z}/3 \times \mathbb{Z}/3$ коммутирует с $K = \mathbb{Z}/3$. Таким образом, $G \subset \mathbb{Z}/3 \times \mathbb{Z}/3$. Если $G = \mathbb{Z}/3 \times \mathbb{Z}/3$, то G имеет орбиту длины 3 на C. Если $G = \mathbb{Z}/3$, то G имеет неподвижную точку на C. Мы получаем случаи (7) и (8) в таблице.

Случай $r = 4$. Как в случае $r = 2$ заметим, что единственные сдвиги, коммутирующие с K, принадлежат подгруппе $\mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/2$ в C_0, которая состоит из сдвигов на точки 2-кручения. С другой стороны, только «диагональная» подгруппа $\mathbb{Z}/2$ из $\mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/2$ коммутирует с $K = \mathbb{Z}/4$. Таким образом, $G \subset \mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/4$. Если $G = \mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/4$, то G имеет орбиту длины 2. Если $G = \mathbb{Z}/4$, то G имеет неподвижную точку. На самом деле, в последнем случае G имеет ровно 2 неподвижные точки, что следует из формулы Лефшеца. Это дает случаи (5) и (6) в таблице.

Случай $r = 6$. Из рассмотрения случаев $r = 2$ и $r = 3$ выше следует, что H тривиальна в этом случае. Тогда G имеет только одну неподвижную точку на C. Мы получаем случай (9) в таблице. Доказательство завершено. □

Следствие 5.4.3. Пусть C — гладкая кривая рода 1, и пусть G — конечная абелева группа такая, что $G \subset \mathrm{Aut}(C)$. Тогда $G \subset \mathrm{Cr}_2(\mathbb{C})$.

Доказательство. Следует из утверждения 5.4.2 и теоремы 5.1.3. □

Пример 5.4.4. Максимальные группы в утверждении 5.4.2, которые не состоят из элементов-сдвигов, реализуются, например, для кривых, заданных следующими уравнениями:

1. $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = a_1x_1^2 + a_2x_2^2 + a_3x_3^2 + a_4x_4^2 = 0$ в $\mathbb{P}^3$, и $G = (\mathbb{Z}/2)^3$,
2. $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = 0$ в $\mathbb{P}^2$, и $G = (\mathbb{Z}/3)^2$,
3. $x_1^2 + x_2^4 + x_3^4 = 0$ в $\mathbb{P}(2, 1, 1)$, и $G = \mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/4$,
4. $x_1^2 + x_2^3 + x_3^6 = 0$ в $\mathbb{P}(3, 2, 1)$, и $G = \mathbb{Z}/6$.

5.5 Действие групп на поверхностях

В этом разделе мы доказываем некоторые результаты о действии конечных абелевых групп на алгебраических поверхностях.

Утверждение 5.5.1. *Пусть S — проективная поверхность, и пусть G — конечная абелева группа такая, что $G \subset \mathrm{Aut}(S)$. Предположим, что S допускает G-инвариантный пучок $\mathcal{H}$, общий элемент которой является неприводимой приведенной рациональной кривой. Тогда G имеет тип (1), (2) или (5), как в теореме 5.1.3.*

Доказательство. Разрешая особенности, мы можем предполагать, что S — гладкая проективная поверхность и $G \subset \mathrm{Aut}(S)$. Разрешая базисное множество $\mathcal{H}$ в G-эквивариантной категории, мы получаем морфизм $f\colon S' \to \mathbb{P}^1$, где S' — гладкая проективная поверхность и $G \subset \mathrm{Aut}(S')$. По теореме Бертини общий слой f является гладкой рациональной кривой. Тогда мы имеем точную последовательность

$$0 \to G_\eta \to G \to G_Z \to 0,$$

где G_Z точно действует на базе $Z = \mathbb{P}^1$, так что $G_Z \subset \mathrm{Cr}_1(\mathbb{C})$, и G_η точно действует на общем слое S'_η, который является кривой Фано, определенной над полем функций базы $\mathbb{C}(t)$. По лемме 5.3.13 мы видим, что $G_\eta \subset \mathrm{Cr}_1(\mathbb{C})$. Теперь утверждение следует из утверждения 5.3.10. Мы также отмечаем, что группы типов (1), (2) и (5) могут точно действовать на $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$. □

Лемма 5.5.2. *Пусть (S, Δ) — лог-каноническая пара Калаби-Яу размерности 2 с действием конечной группы G. Предположим, что $\Delta \neq 0$. Тогда S является G-бирационально эквивалентной либо G-поверхности дель Пеццо, либо G-расслоению на коники над кривой Z такой, что либо $Z \simeq \mathbb{P}^1$, либо Z — гладкая эллиптическая кривая.*

Доказательство. Рассмотрим минимальное разрешение $f\colon S' \to S$, которое автоматически G-эквивариантно, и пусть (S', Δ') — лог-прообраз пары (S, Δ). Запустим G-эквивариантную программу минимальных моделей для $K_{S'}$, чтобы получить G-расслоение Мори $\pi\colon S'' \to Z$, и пусть (S'', Δ'') — образ пары (S', Δ'). Мы имеем следующую диаграмму:

$$\begin{array}{ccc} (S', \Delta') & \xrightarrow{g} & (S'', \Delta'') \\ {\scriptstyle f}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle \pi} \\ S & & Z \end{array} \tag{5.5.1}$$

Заметим, что $\Delta'' \neq 0$. Предположим, что Z — кривая. По формуле для канонического класса, имеем

$$0 \sim_{\mathbb{Q}} K_{S''} + \Delta'' \sim_{\mathbb{Q}} \pi^*(K_Z + \Delta_Z + M_Z)$$

где Δ_Z — граничный $\mathbb{Q}$-дивизор, а M_Z — класс псевдоэффективного (и, следовательно, эффективного, поскольку Z — кривая) $\mathbb{Q}$-дивизора. Таким образом, либо $Z = \mathbb{P}^1$ и $\pi\colon S'' \to Z$ является G-расслоением на коники, либо Z — эллиптическая кривая и $\Delta_Z = 0$, $M_Z = 0$.

Предположим, что Z — точка. Тогда S'' является G-поверхностью дель Пеццо, в частности S рациональна. Лемма доказана. □

Замечание 5.5.3. В доказательстве леммы 5.5.2, если Z — эллиптическая кривая, то G-эквивариантное отображение $\pi \circ g\colon S' \to Z$ является отображением Альбанезе. Это отображение индуцирует G-эквивариантное рациональное отображение $S \dashrightarrow Z$.

Следствие 5.5.4. Предположим, что конечная абелева группа G точно действует на лог-канонической паре Калаби-Яу (S, Δ) с $\dim S = 2$ и $\Delta \neq 0$. Тогда G имеет тип произведения.

Доказательство. По лемме 5.5.2, поверхность S либо рациональна, либо G-бирационально эквивалентна линейчатой поверхности над эллиптической кривой. В первом случае мы имеем $G \subset \mathrm{Cr}_2(\mathbb{C})$, так что G имеет тип произведения. Во втором случае, G является расширением группы, которая точно действует на эллиптической кривой (и, следовательно, изоморфна подгруппе $\mathrm{Cr}_2(\mathbb{C})$ по следствию 5.4.3), с помощью конечной абелевой подгруппы $\mathrm{Cr}_1(\mathbb{C})$. Следовательно, G имеет тип произведения по утверждению 5.3.11. □

5.5.5 Простые эллиптические и касповые особенности

Напомним некоторые факты из теории особенностей поверхностей. По классификации (см., например, [KM98, 4.4]), строго лог-канонические горенштейновы особенности поверхностей являются либо простыми эллиптическими, либо касповыми особенностями. Напомним, что нормальная поверхность S имеет *простую эллиптическую особенность* в точке $P \in S$, если для минимального разрешения $f\colon \widetilde{S} \to S$ имеем $(R^1 f_* \mathscr{O}_{\widetilde{S}})_P = \mathbb{C}$, и исключительный дивизор $\mathrm{Exc}(f)$ является гладкой эллиптической кривой E. Согласно [KM98, Proposition 4.54], имеем

$$\dim T_P S = \max(3, -E^2). \tag{5.5.2}$$

Для простой эллиптической особенности возможны следующие случаи (мы также определяем вектор весов w, который мы будем использовать позже):

1. либо $\mathrm{mult}_P S \geq 3$, и тогда $P \in S$ вкладывается в $\mathbb{C}^k$ для $k = -E^2$. В этом случае,
$$w(x_1, \dots, x_k) = (1, \dots, 1), \qquad -E^2 \geq 3, \tag{5.5.3}$$
2. либо $P \in S$ вкладывается в $\mathbb{C}^3$ и после аналитической замены координат локальное уравнение $\phi = 0$ для $P \in S$ имеет вид
$$x_1^2 + q(x_2, x_3) = 0, \qquad w(x_1, x_2, x_3) = (2, 1, 1), \qquad -E^2 = 2, \tag{5.5.4}$$
где q — однородный многочлен степени 4,

3. либо $P \in S$ вкладывается в $\mathbb{C}^3$ и после аналитической замены координат локальное уравнение $\phi = 0$ для $P \in S$ имеет вид

$$x_1^2 + x_2^3 + ax_2x_3^4 + bx_3^6 = 0, \qquad w(x_1, x_2, x_3) = (3, 2, 1), \qquad -E^2 = 1, \tag{5.5.5}$$

где $a, b \in \mathbb{C}$.

Нормальная поверхность S имеет *касповую особенность* $P \in S$, если S строго лог-канонична в P и для минимального разрешения $f\colon \widetilde{S} \to S$ имеем $(R^1 f_* \mathscr{O}_{\widetilde{S}})_P = \mathbb{C}$, и прообраз P является либо циклом гладких рациональных кривых, либо неприводимой рациональной кривой с одним нодом (то есть обыкновенной двойной точкой).

Утверждение 5.5.6. *Пусть $P \in S$ — росток простой эллиптической особенности, и пусть G — конечная абелева группа такая, что $G \subset \mathrm{Aut}(P \in S)$. Пусть $f\colon \widetilde{S} \to S$ — минимальное разрешение, которое автоматически G-эквивариантно. Тогда существует G-орбита на эллиптической кривой $E = f^{-1}(P)$ мощности не более $-E^2$.*

Доказательство. Мы видим, что $P \in S$ вложена в $\mathbb{C}^k$, где k зависит от $-E^2$, как обсуждалось в начале раздела 5.5.5. Мы покажем, что взвешенное раздутие $g\colon \widetilde{\mathbb{C}^k} \to \mathbb{C}^k$ с весом w является G-эквивариантным, где вес w определен в (5.5.3), (5.5.4), (5.5.5) в зависимости от $-E^2$. Также, g индуцирует минимальное разрешение $f\colon \widetilde{S} \to S$, где $\widetilde{S}$ — собственный прообраз S на $\widetilde{\mathbb{C}^k}$ (см. [KM98, 4.57]).

Предположим, что $-E^2 \geq 3$. Тогда g — раздутие замкнутой точки $P \in \mathbb{C}^k$, так что g является G-эквивариантным морфизмом. По лемме 5.2.7 имеем, что G точно действует на касательном пространстве $T_P S$. Поскольку G абелева, существует G-инвариантная гиперплоскость в $T_P S$, которая соответствует G-инвариантной гиперплоскости H в g-исключительном дивизоре $\mathbb{P}^{k-1}$. Тогда пересечение f-исключительной эллиптической кривой $E \subset \mathbb{P}^{k-1} = \mathbb{P}(T_P S)$ с H является G-инвариантным. Используя тот факт, что $-E^2 = k = H \cdot E$ (см. [KM98, 4.54]), мы получаем результат.

Теперь мы рассмотрим случай $-E^2 = 2$, случай $-E^2 = 1$ аналогичен. Если $-E^2 = 2$, для локального уравнения $\phi = 0$ для $P \in S$, как в (5.5.4), имеем $\mathrm{rk}(\phi_2) = 1$, где ϕ_2 — квадратичный член ϕ. Следовательно, мы можем выбрать (единственную с точностью до скалярного множителя) коор-

динату x_1 на $\mathbb{C}^3$ такую, что $x_1^2 = \phi_2$. Поскольку G абелева, представление G в $(T_P S)^*$ расщепляется, так что существует G-инвариантное дополнение к $\langle x_1 \rangle$ в $\mathbb{C}^3$, натянутое на некоторые координаты x_2, x_3. Следовательно, раздутие g с весами $w = (2,1,1)$ относительно координат x_1, x_2, x_3 является G-эквивариантным морфизмом. Тогда пересечение f-исключительной эллиптической кривой $E \subset \mathbb{P}(2,1,1)$, которая является дивизором Картье, с G-инвариантным дивизором Вейля $H = \{x_2 = 0\} \subset \mathbb{P}(2,1,1)$ является G-инвариантным. Поскольку $H \cdot E = 2$, мы получаем G-орбиту на $E = f^{-1}(P)$ мощности не более, чем 2. Утверждение доказано. □

5.6 Разминка: конечные абелевы подгруппы в $\mathrm{Cr}_2(\mathbb{C})$

В этом разделе мы передоказываем теорему 5.1.3, используя методы, которые мы применим в размерности 3 в дальнейшем.

Доказательство теоремы 5.1.3. Пусть $G \subset \mathrm{Cr}_2(\mathbb{C})$ — конечная абелева группа. Мы получим список возможностей для классов изоморфизма G в три шага.

Шаг 1. Редукция к случаю многообразий Фано. Переходя к G-эквивариантному разрешению особенностей, мы можем считать, что $G \subset \mathrm{Aut}(X)$, где X — гладкая проективная рациональная поверхность. Применяя G-эквивариантную программу минимальных моделей, мы можем считать, что X имеет либо структуру G-расслоения на коники $\pi\colon X \to Z = \mathbb{P}^1$, либо X является G-поверхностью дель Пеццо. В первом случае имеем точную последовательность

$$0 \to G_f \to G \to G_Z \to 0$$

где G_Z точно действует на базе $Z = \mathbb{P}^1$, а G_f точно действует на схемном общем слое $\mathbb{P}^1_{\overline{\mathbb{C}(Z)}}$, где $\overline{\mathbb{C}(Z)}$ — алгебраическое замыкание поля функций Z. По лемме 5.3.13 мы видим, что G_f изоморфна подгруппе $\mathrm{Cr}_1(\mathbb{C})$. Утверждени 5.3.10 влечет, что G имеет тип (1), (2) или (5), как в теореме 5.1.3, в этом случае. Таким образом, мы можем считать, что $G \subset \mathrm{Aut}(X)$, где X — гладкая поверхность дель Пеццо с $\rho^G(X) = 1$.

Заметим, что G действует на линейной системе $\mathrm{H}^0(X, \mathscr{O}(-K_X))$. Поскольку G абелева и мы имеем $h^0(X, \mathscr{O}(-K_X)) \geq 2$, существуют по крайней мере два G-инвариантных антиканонических элемента, скажем C и C'. Мы рассматриваем две возможности: когда один из них особ, и когда оба гладкие.

Шаг 2. Особая антиканоническая кривая. Пусть (X, C) — G-инвариантная пара, где X — гладкая G-минимальная поверхность дель Пеццо, а C — антиканонический элемент, то есть $C \sim -K_X$. Предположим, что C особа. Если пара (X, C) не является lc, стандартным аргументом (см. [Pr11, 2.9]) можно построить G-инвариантный lc-центр размерности 0, что дает нам G-неподвижную точку. В этом случае по следствию 5.2.8 мы получаем $\mathfrak{r}(G) \leq 2$, так что G имеет тип (1), как в теореме 5.1.3.

Таким образом, мы можем считать, что (X, C) является lc. По формуле присоединения C имеет арифметический род $p_a(C) = 1$. Мы утверждаем, что C является либо нодальной кривой, либо циклом, состоящим из (по крайней мере двух) гладких рациональных кривых. Действительно, если C неприводима, то, поскольку по нашему предположению C особа, (X, C) является lc и $p_a(C) = 1$, получаем, что C является рациональной кривой с ровно одним нодом. Если $C = \sum C_i$ приводима (заметим, что C связна, поскольку $C \sim -K_X$ обилен), и (X, C) является lc парой Калаби-Яу, по формуле присоединения мы получаем, что $(C_i, \sum_{j \neq i} C_j)$ является lc парой Калаби-Яу. Так что каждая C_i является гладкой рациональной кривой, и $\sum_{j \neq i} C_j|_{C_i}$ является суммой двух точек. Мы заключаем, что $C = \sum C_i$ в этом случае является циклом из гладких рациональных кривых.

Предположим, что C является неприводимой нодальной кривой. Тогда ее нод является G-неподвижной точкой, и мы завершаем доказательство по следствию 5.2.8. Предположим, что C является циклом из гладких рациональных кривых $C = \sum_{i=1}^{N} C_i$, где $N \geq 2$ (если $N = 2$ мы имеем две гладкие рациональные кривые, трансверсально пересекающиеся в двух точках). Без потери общности мы можем предполагать, что $C_i \cap C_{i+1} \neq \emptyset$ для $1 \leq i \leq N-1$ и $C_N \cap C_1 \neq \emptyset$. Заметим, что действие G на $C = \sum C_i$ является точным. Действительно, если нетривиальный элемент $g \in G$ действует на C тривиально, то g тривиально действует на касательное пространство к особой точке $C_i \cap C_{i+1}$, что противоречит лемме 5.2.7. Таким образом, мы имеем точную

последовательность

$$0 \to H \to G \to G_C \to 0$$

где G_C точно действует на множестве $\{C_i\}$, и $H \subset \prod_i \mathrm{Aut}(C_i)$ с $C_i \simeq \mathbb{P}^1$. Если группа G_C действует на множество компонент $\{C_i\}$ транзитивно, применяя лемму 5.2.11 мы заключаем, что $H \subset \mathrm{Aut}(C_i) = \mathrm{Cr}_1(\mathbb{C})$. Поскольку C является циклом кривых, по утверждению 5.2.2 мы имеем, что G_C либо циклическая, либо изоморфна $(\mathbb{Z}/2)^2$. В обоих случаях $G_C \subset \mathrm{Cr}_1(\mathbb{C})$. По утверждению 5.3.10 мы заключаем, что в этом случае G имеет тип (1), (2) или (5) как в теореме 5.1.3.

Теперь предположим, что $C = C' + C''$, где эффективные кривые C' и C'' являются G-инвариантными. Поскольку $\rho^G(X) = 1$, обе кривые C' и C'' пропорциональны $-K_X$. В частности, C' и C'' являются обильными дивизорами, и $-K_X \sim C' + C''$, так что индекс Фано поверхности X больше единицы. По классификации поверхностей дель Пеццо мы заключаем, что X изоморфна либо $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$, либо $\mathbb{P}^2$. В обоих случаях мы можем исследовать приводимые элементы в $-K_X$ и заключить (напомним, что C является циклом гладких рациональных кривых по нашему предположению и $\rho^G(X) = 1$), что либо C', либо C'' является неприводимой гладкой рациональной кривой, которая G-инвариантна по нашему предположению. Без потери общности мы можем считать, что это C'. Мы можем написать точную последовательность

$$0 \to \mathbb{Z}/m \to G \to G_{C'} \to 0,$$

где $G_{C'} \subset \mathrm{Aut}(C') = \mathrm{Cr}_1(\mathbb{C})$ и $\mathbb{Z}/m$ точно действует на нормальном расслоении к C'. По утверждению 5.3.10 мы заключаем, что и в этом случае G имеет тип (1), (2) или (5) как в теореме 5.1.3.

Шаг 3. Гладкие антиканонические кривые. Пусть X — гладкая G-поверхность дель Пеццо, и предположим, что C и C' являются гладкими G-инвариантными антиканоническими эллиптическими кривыми. Рассмотрим точную последовательность

$$0 \to G_N \to G \to G_C \to 0$$

где G_C точно действует на эллиптической кривой C, G_N фиксирует C поточечно и точно действует на нормальном расслоении $N_{C/X}$. В частности, G_N циклическая, так что $G_N = \mathbb{Z}/n$ для некоторого $n \geq 1$. Если $\mathfrak{r}(G_C) \leq 1$, мы

имеем $\mathfrak{r}(G) \leq 2$, и, следовательно, G имеет тип (1) как в теореме 5.1.3. Следовательно, мы можем считать, что $\mathfrak{r}(G_C) \geq 2$. Поскольку $C \cap C'$ является G-инвариантным, G_C допускает орбиту на C длины не более $(-K_X)^2 \leq 9$. По утверждению 5.4.2 мы получаем, что G_C является подгруппой одной из следующих групп:

$$(\mathbb{Z}/3)^2, \qquad (\mathbb{Z}/2)^3, \qquad \mathbb{Z}/4 \times \mathbb{Z}/2. \tag{5.6.1}$$

Рассмотрим аналогичную точную последовательность для эллиптической кривой C':

$$0 \to G_{N'} \to G \to G_{C'} \to 0$$

где $G_{C'}$ точно действует на C', G'_N фиксирует C поточечно и точно действует на нормальном расслоении $N_{C'/X}$. Заметим, что $G_{N'}$ циклическая, так что $G_N = \mathbb{Z}/n'$ для некоторого $n' \geq 1$. Как и выше, мы можем считать, что $G_{C'}$ является подгруппой одной из групп (5.6.1).

Мы утверждаем, что $G_N \cap G_{N'}$ тривиально. Действительно, если элемент g фиксирует $C \cup C'$ поточечно, то g действует тривиально на касательном пространстве к точке пересечения C и C' (такая точка существует, поскольку $C \sim C' \sim -K_X$ обилен), и тогда g тривиален по лемме 5.2.7. Рассмотрим диаграмму

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & & 0 & & & & \\ & & & & \downarrow & & & & \\ & & & & \mathbb{Z}/n' & \searrow & & & \\ & & & & \downarrow & & & & \\ 0 & \longrightarrow & \mathbb{Z}/n & \longrightarrow & G & \longrightarrow & G_C & \longrightarrow & 0 \\ & & & \searrow & \downarrow & & & & \\ & & & & G_{C'} & & & & \\ & & & & \downarrow & & & & \\ & & & & 0 & & & & \end{array} \tag{5.6.2}$$

Из рассуждения выше следует, что мы имеем вложения $G_N = \mathbb{Z}/n \subset G_{C'}$ и $G_{N'} = \mathbb{Z}/n' \subset G_C$. Мы рассматриваем случай $G_C = G_{C'} = (\mathbb{Z}/3)^2$, другие случаи аналогичны. Заметим, что $n \leq 3$. Поскольку G является абелевым расширением $(\mathbb{Z}/3)^2$ при помощи $\mathbb{Z}/n$, то либо $G = (\mathbb{Z}/3)^3$ (в этом случае точная строка в (5.6.2) расщепляется), либо $\mathfrak{r}(G) \leq 2$. Аналогичные рассуждения показывают, что либо $\mathfrak{r}(G) \leq 2$, либо G является подгруппой одной из

следующих групп:

$$(\mathbb{Z}/3)^3, \qquad (\mathbb{Z}/2)^4, \qquad (\mathbb{Z}/4)^2 \times \mathbb{Z}/2. \tag{5.6.3}$$

Это дает нам случаи (3), (4), (5) в теореме 5.1.3. Более того, заметим, что если G изоморфна одной из трех групп в (5.6.3), то в (5.6.2) как точная строка, так и точный столбец расщепляются. Теорема доказана. □

Замечание 5.6.1. Наше доказательство теоремы 5.1.3 дает нам больше, чем просто список групп. Из приведенного аргумента мы получаем следующие факты:

- Если G точно действует на расслоении Мори $X \to Z$, где X — рациональная поверхность и база Z нетривиальна (так что $Z = \mathbb{P}^1$), то G имеет тип (1), (2) или (5), как в теореме 5.1.3. В частности, $G = H \times K$, где $H, K \in \mathrm{Cr}_1(\mathbb{C})$.
- Если G точно действует на гладкой поверхности дель Пеццо S и существует особая G-инвариантная кривая C с $C \sim -K_X$, то $G = H \times K$, где $H, K \in \mathrm{Cr}_1(\mathbb{C})$.

Наша цель — обобщить эти наблюдения на размерность 3. В следствии ниже мы объясняем связь между группами типа (3) и (4) как в теореме 5.1.3, и некоторыми эллиптическими кривыми с комплексным умножением.

Следствие 5.6.2. Если группа G типа (3) или (4) как в теореме 5.1.3 точно действует на рациональной поверхности X', то X' является G-бирационально эквивалентной G-минимальной поверхности дель Пеццо X такой, что любой ее G-инвариантный антиканонический элемент является гладкой эллиптической кривой. Более того, такая эллиптическая кривая допускает комплексное умножение порядка N, и имеются следующие возможности (здесь $j(C)$ обозначает j-инвариант C):

1. $G = (\mathbb{Z}/3)^2$, $(-K_X)^3 = 3$, $N = 4$, $j(C) = 0$,
2. $G = (\mathbb{Z}/4)^2 \times \mathbb{Z}/2$, $(-K_X)^3 = 2$, $N = 4$, $j(C) = 1728$.

Доказательство. То, что X' является G-бирационально эквивалентной G-минимальной поверхности дель Пеццо X, сразу следует из доказательства теоремы 5.1.3. Пусть C и C' — различные G-инвариантные антиканонические кривые на X. По предположению о группе G и доказательству теоремы

5.1.3 мы знаем, что C и C' являются гладкими эллиптическими кривыми. В обозначениях диаграммы (5.6.2) группы $\mathbb{Z}/n$ (соотв., $\mathbb{Z}/n'$) фиксируют C' (соотв., C) поточечно. Следовательно, образующая $\mathbb{Z}/n$ (соотв., $\mathbb{Z}/n'$) действует на C' (соотв., C) как автоморфизм, который имеет $m = C \cdot C' \geq 1$ неподвижных точек. В частности, это не сдвиг.

Теперь заметим, что C и C' имеют трансверсальное пересечение во всех точках $C \cap C'$. Действительно, пусть $P \in C \cap C'$. Поскольку $\mathbb{Z}/n$ (соотв., $\mathbb{Z}/n'$) действует на C (соотв., C') тривиально, оно действует тривиально на $T_P C$ (соотв., $T_P C'$). Следовательно, $T_P X = T_P C \oplus T_P C'$, так что пересечение C и C' трансверсально в P. Следовательно, $m = C \cdot C'$ равно мощности множества $C \cap C'$. Мы также имеем $(-K_X)^2 = m$, поскольку $C \sim C' \sim -K_X$.

Отсюда следует, что $\mathbb{Z}/n$ действует на C', имея в точности $m = (-K_X)^2 > 0$ неподвижных точек. По нашему предположению о группе G, мы имеем $n = 3$ или $n = 4$, и образующая g группы $\mathbb{Z}/n$ действует посредством комплексного умножения порядка n. Если $n = 3$, элемент g имеет 3 неподвижные точки на C', и если $n = 4$, то g имеет 2 неподвижные точки на C' (см. утверждение 5.4.2). Хорошо известно, что эллиптическая кривая, допускающая автоморфизм комплексного умножения порядка 3, имеет j-инвариант, равный 0, а эллиптическая кривая, допускающая автоморфизм комплексного умножения порядка 4, имеет j-инвариант, равный 1728. Это завершает доказательство. □

5.7 Терминальные особенности

Мы напоминаем некоторые факты о классификации трехмерных терминальных особенностей [Mo85], [Re85]. Пусть $P \in X$ — росток трехмерной терминальной особенности. Тогда особенность изолирована: $\mathrm{Sing}(X) = \{P\}$. *Индекс* точки $P \in X$ — это наименьшее положительное целое число r, такое что rK_X является дивизором Картье. Если $r = 1$, то $P \in X$ является горенштейновой. В этом случае $P \in X$ аналитически изоморфна особенности гиперповерхности кратности 2 в $\mathbb{C}^4$. Более того, любой дивизор Вейля $\mathbb{Q}$-Картье D на $P \in X$ является дивизором Картье [Kaw88, Lemma 5.1]. Также в этом случае $x \in P$ является cDV особенностью, что означает, что ее общее гиперплоское сечение H, содержащее P, является поверхностью с дювалевской особенностью в P. Мы говорим, что $P \in X$ имеет тип cA_n, cD_n, cE_n, соответственно, если H

является дювалевской особенностью типа A_n, D_n, E_n, соответственно.

Если $r > 1$, то существует циклическое накрытие

$$\pi\colon \widetilde{P} \in \widetilde{X} \to X \ni P$$

степени r, такое, что оно этально вне P, и $\widetilde{P} \in \widetilde{X}$ является горенштейновой терминальной особенностью или гладкой точкой. Отображение π называется *накрытием индекса один* для $P \in X$, и оно определено канонически.

Теорема 5.7.1 ([Mo85, Re85])**.** *В приведенных выше обозначениях, $\widetilde{P} \in \widetilde{X}$ является $\mathbb{Z}/r$-эквивариантно аналитически изоморфной гиперповерхности в $\mathbb{C}^4$ с $\mathbb{Z}/r$-полуинвариантными координатами x_1, x_2, x_3, x_4, и действие $\mathbb{Z}/r$ задается формулой*

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) \mapsto (\xi^{a_1} x_1, \xi^{a_2} x_2, \xi^{a_3} x_3, \xi^{a_4} x_4)$$

для некоторого примитивного корня из единицы ξ степени r. Также выполняется одно из следующих условий:

1. $(a_1, \dots, a_4) = (1, -1, a_3, 0) \bmod r$, $\gcd(a_3, r) = 1$,
2. $r = 4$ *и* $(a_1, \dots, a_4) = (1, -1, 1, 2) \bmod 4$.

Теперь мы рассмотрим действие конечной абелевой группы на ростке трехмерной терминальной особенности. Напомним следующий результат.

Утверждение 5.7.2 ([Pr11, Lemma 2.4], [Pr14, Lemma 2.1])**.** *Пусть $P \in X$ — росток трехмерной терминальной особенности и пусть $G \subset \mathrm{Aut}(P \in X)$ — конечная абелева группа. Тогда $\mathfrak{r}(G_2) \leq 4$ и $\mathfrak{r}(G_p) \leq 3$ для $p \geq 3$. Более того, если $\mathfrak{r}(G_2) = 4$, то $P \in X$ не является циклической фактор-особенностью.*

Основная цель этого раздела — улучшить этот результат следующим образом.

Теорема 5.7.3. *Пусть $P \in X$ — росток трехмерной терминальной особенности и пусть $G \subset \mathrm{Aut}(P \in X)$ — конечная абелева группа. Тогда либо $\mathfrak{r}(G) \leq 3$, либо*

$$G = (\mathbb{Z}/2)^2 \times \mathbb{Z}/2n \times \mathbb{Z}/2m$$

для $n, m \geq 1$. Более того, если $\mathfrak{r}(G) = 4$, то $P \in X$ является горенштейновой особенностью типа cA. В частности, в обоих случаях G имеет тип произведения.

Прежде чем доказывать эту теорему, выведем из нее следующее полезное следствие.

Следствие 5.7.4. Пусть X — трехмерное многообразие с терминальными особенностями, и пусть $G \subset \mathrm{Aut}(X)$ — конечная абелева группа. Предположим, что существует G-неподвижная точка $P \in X$. Тогда G имеет тип произведения.

Доказательство. Предположим, что $P \in X$ — гладкая точка. Тогда G имеет тип произведения по следствию 5.2.8. Если $P \in X$ — особая точка, то по теореме 5.7.3 мы заключаем, что G имеет тип произведения. □

Второй случай в теореме 5.7.3 реализуется, как показывает следующий пример.

Пример 5.7.5. Рассмотрим особую точку $P \in \mathbb{C}^4$, заданную уравнением

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^n + x_4^m = 0$$

для $2 \leq n \leq m$. Эта точка является изолированной cDV особенностью типа cA_{n-1} и, следовательно, это терминальная особенность [KS-B88]. Она допускает действие группы $G = (\mathbb{Z}/2)^2 \times \mathbb{Z}/n \times \mathbb{Z}/m$, где образующие группы G действуют на соответствующие координаты в $\mathbb{C}^n$ умножением на корни из единицы.

Пример 5.7.6. Рассмотрим обыкновенную двойную точку $P \in X$, заданную уравнением

$$x_1x_2 + x_3x_4 = 0.$$

Это торическая особенность. В частности, она допускает действие $(\mathbb{Z}/n)^3$ для любого $n \geq 1$.

Нам понадобится следующая известная версия леммы Морса.

Лемма 5.7.7 (см. [AGV85, 11.1])**.** *Пусть $f(x_1, \ldots, x_n)$ — росток голоморфной функции такой, что $0 \in \mathbb{C}^n$ является ее критической точкой. Предположим, что квадратичный член f в разложении вблизи 0 имеет ранг $k \leq n$. Тогда с точностью до голоморфной замены координат мы имеем*

$$f(x_1, \ldots, x_n) = x_1^2 + \ldots + x_k^2 + g(x_{k+1}, \ldots, x_n)$$

где $g(x_{k+1}, \ldots, x_n)$ — росток голоморфной функции, квадратичный член которой равен нулю.

5.7.8 Горенштейновы особенности

Пусть $P \in X$ — росток трехмерной терминальной горенштейновой особенности и пусть $G \subset \mathrm{Aut}(P \in X)$ — конечная абелева группа. Мы можем считать, что $X \subset \mathbb{C}^4$, точка P совпадает с началом координат $0 \in \mathbb{C}^4$, и $G \subset \mathrm{GL}(4, \mathbb{C})$. Отсюда следует, что $\mathfrak{r}(G) \leq 4$. Мы можем записать аналитическое уравнение X в виде $\phi = \sum_{i \geq 1} \phi_i$, где ϕ_i — однородные многочлены степени i. Поскольку G абелева, мы можем считать, что действие G диагонально относительно координат $x_1, \ldots, x_4$. Согласно [Mo85], [Re85], мы можем считать, что ϕ является G-полуинвариантным. Поскольку P является терминальной особенностью, имеем $\phi_2 \neq 0$. Согласно классификации терминальных особенностей, если $\phi_3 = 0$, то $\mathrm{rk}(\phi_2) \geq 2$.

Определение 5.7.9. Мы говорим, что действие группы $H = (\mathbb{Z}/m)^n \subset \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ для некоторых $m \geq 1$, $n \geq 1$ является *стандартным* относительно координат $x_1, \ldots, x_n$ на $\mathbb{C}^n$, если i-я образующая H для $1 \leq i \leq n$ действует следующим образом:

$$x_1 \mapsto x_1, \qquad \ldots \qquad x_i \mapsto \xi_m x_i, \qquad \ldots \qquad x_n \mapsto x_n$$

где ξ_m — примитивный корень из единицы степени m.

Для группы $H = (\mathbb{Z}/m)^n \subset \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ с $m \geq 1$, $n \geq 1$, после замены координат на $\mathbb{C}^n$ и замены образующих H действие H становится стандартным на $\mathbb{C}^n$ относительно координат $x_1, \ldots, x_n$.

Утверждение 5.7.10. *Пусть $P \in X$ — росток трехмерной терминальной горенштейновой особенности, заданный уравнением*

$$\phi(x_1, x_2, x_3, x_4) = \sum_{i \geq 1} \phi_i(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0$$

в $\mathbb{C}^4$ с координатами $x_1, \ldots, x_4$. Пусть G — конечная абелева группа такая, что $G \subset \mathrm{Aut}(P \in X)$. Предположим, что $\mathfrak{r}(G_2) = 4$. Тогда

- *с точностью до аналитической замены координат, ϕ зависит от x_i^2 для $1 \leq i \leq 4$, то есть $\phi(x_1, x_2, x_3, x_4) = \psi(x_1^2, x_2^2, x_3^2, x_4^2)$ для некоторой голоморфной функции ψ,*
- *$\mathrm{rk}(\phi_2) \geq 2$, и $P \in X$ является особенностью типа cA,*

- $\mathfrak{r}(G_p) \leq 2$ *для любого* $p > 2$. *В частности,*

$$G = (\mathbb{Z}/2)^2 \times \mathbb{Z}/2n \times \mathbb{Z}/2m \qquad \text{для} \qquad n, m \geq 1,$$

и, следовательно, G *имеет тип произведения.*

Доказательство. Поскольку $\mathfrak{r}(G_2) = 4$, существует подгруппа $H = (\mathbb{Z}/2)^4 \subset G$. Мы можем предполагать, что действие H является стандартным относительно координат x_i для $1 \leq i \leq 4$. Поскольку ϕ является G-полуинвариантной (и, следовательно, H-полуинвариантной) функцией, получаем, что ϕ зависит от x_i^2 для $1 \leq i \leq 4$, то есть, $\phi(x_1, x_2, x_3, x_4) = \psi(x_1^2, x_2^2, x_3^2, x_4^2)$ для некоторой голоморфной функции ψ. В частности, $\phi_i = 0$ для нечетных i. По классификации терминальных особенностей, $\phi_2 \neq 0$, и поскольку $\phi_3 = 0$, мы имеем $\mathrm{rk}(\phi_2) \geq 2$. Из леммы 5.7.7 следует, что $P \in X$ является особенностью типа cA.

Без потери общности и после перенумерации и перенормировки координат мы можем предполагать, что ϕ_2 содержит члены $x_1^2 + x_2^2$. Мы покажем, что существуют некоторая степень x_3 и некоторая степень x_4, входящие в ϕ с ненулевым коэффициентом. Действительно, если степень x_3 не входит в ϕ, то прямая $x_1 = x_2 = x_4 = 0$ является особой на X, и аналогично для степени x_4. Таким образом, с точностью до перенормировки координат, мы имеем

$$\phi(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^{2k} + x_4^{2l} + \dots \tag{5.7.1}$$

для некоторых $l \geq k \geq 1$. Тогда многочлен

$$\phi'(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^{2k} + x_4^{2l}$$

также является G-полуинвариантным. С точностью до замены k и l их наименьшим общим кратным (что оставляет многочлен G-полуинвариантным) мы можем предполагать, что $k = l$. Таким образом, мы можем предполагать, что $\phi = \phi'$.

Рассмотрим отображение $\phi\colon \mathbb{C}^4 \setminus \{0\} \to \mathbb{P}(k, k, 1, 1)$, которое является факторизацией по действию $\mathbb{C}^\times$, заданному формулой

$$t \cdot (x_1, x_2, x_3, x_4) = (t^{2k} x_1, t^{2k} x_2, t^2 x_3, t^2 x_4).$$

Мы имеем индуцированное отображение $X \setminus \{0\} \to S$, где S — (особая) поверхность дель Пеццо во взвешенном проективном пространстве $\mathbb{P}(k, k, 1, 1)$, заданная уравнением

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^{2k} + x_4^{2k} = 0.$$

Заметим, что на S существует G-инвариантный пучок $\mathcal{H} = \langle x_3, x_4 \rangle$, общий элемент которого является неприводимой рациональной кривой. Мы имеем следующую точную последовательность

$$0 \to G_N \to G \to G_S \to 0 \tag{5.7.2}$$

где G_S точно действует на S, а G_N циклично, так как ϕ является факторизацией по действию $\mathbb{C}^\times$ и $G_N \subset \mathbb{C}^\times$. Поскольку S допускает G-инвариантный пучок рациональных кривых, по утверждению 5.5.1 мы видим, что G_S имеет тип (1), (2) или (5), как в теореме 5.1.3. Теперь мы применяем лемму 5.3.15 к G_S и G_N, чтобы заключить, что $G = (\mathbb{Z}/2)^2 \times \mathbb{Z}/2n \times \mathbb{Z}/2m$ для некоторых $n, m \geq 1$. Это завершает доказательство. □

5.7.11 Негоренштейновы особенности

Предположим, что конечная абелева группа G точно действует на ростке трехмерной терминальной особенности $P \in X$ индекса $r > 1$. По теореме 5.7.1, существует отображение $\pi\colon \widetilde{X} \to X$, где $\widetilde{x} \in \widetilde{X} \subset \mathbb{C}^4$ — росток горенштейновой терминальной особенности, и π является факторизацией по действию группы $\mathbb{Z}/r$ для некоторого $r > 1$. Поскольку

$$\pi|_{\widetilde{X}\setminus\{0\}}\colon \widetilde{X} \setminus \{0\} \to X \setminus \{0\}$$

является топологическим универсальным накрытием, существует поднятие $\widetilde{G} \subset \mathrm{Aut}(\widetilde{X})$, встраивающееся в точную последовательность

$$0 \to \mathbb{Z}/r \to \widetilde{G} \to G \to 0, \tag{5.7.3}$$

где $\widetilde{G} \subset \mathrm{GL}_4(\mathbb{C})$.

Утверждение 5.7.12 (см. [Pr11, Lemma 2.4], [Pr14, Lemma 2.1])**.** *Пусть $P \in X$ — росток трехмерной терминальной особенности, и пусть G — конечная абелева группа такая, что $G \subset \mathrm{Aut}(P \in X)$. Тогда либо поднятие $\widetilde{G}$ группы G является абелевым, либо $r = 2$.*

Доказательство. Предположим, что группа $\widetilde{G}$ не абелева. Ясно, что для горенштейнова индекса $P \in X$ мы имеем $r > 1$. Мы утверждаем, что $r = 2$ в этом случае. Предположим, что $r > 2$. В обозначениях теоремы 5.7.1, подпространство $\mathbb{C}^4$, определенное как

$$T = \mathbb{C}^3 = \{x_4 = 0\},$$

является $\widetilde{G}$-инвариантным. Группа $\widetilde{G}$ переставляет собственные подпространства $\mathbb{Z}/r$ в T. Поскольку $r > 2$, согласно теореме 5.7.1 мы видим, что T содержит $\widetilde{G}$-инвариантное двумерное подпространство T_2. Обозначим через T_1 подпространство T со свойством $T = T_1 \oplus T_2$ и с условием, что это разложение $\widetilde{G}$-инвариантно.

По теореме 5.7.1, группа $\mathbb{Z}/r$ действует на $T_1 \subset T$ точно. Заметим, что коммутант $[\widetilde{G}, \widetilde{G}]$ является нетривиальной подгруппой $\widetilde{G}$, содержащейся в $\mathbb{Z}/r$, см. (5.7.3). Следовательно, $[\widetilde{G}, \widetilde{G}]$ абелева и действует на T_1 точно. С другой стороны, ядро гомоморфизма $\widetilde{G} \to \mathrm{GL}(T_1) = \mathbb{C}^\times$ содержит $[\widetilde{G}, \widetilde{G}]$, что является противоречием. Это показывает, что $r = 2$. □

Утверждение 5.7.13. *Пусть $P \in X$ — росток трехмерной терминальной особенности гореншейнова индекса $r > 1$, и пусть G — конечная абелева группа такая, что $G \subset \mathrm{Aut}(P \in X)$. Предположим, что поднятие $\widetilde{G}$ абелево. Тогда $\mathfrak{r}(G) \leq 3$.*

Доказательство. Поскольку $\widetilde{G}$ абелева, существует подгруппа $\overline{G} \subset \widetilde{G}$ такая, что $\overline{G} \simeq G$. Если $\mathfrak{r}(\widetilde{G}) \leq 3$, то утверждение доказано, потому что $\mathfrak{r}(\overline{G}) \leq \mathfrak{r}(\widetilde{G})$, см. замечание 5.2.6. Предположим, что $\mathfrak{r}(\widetilde{G}) = 4$. Тогда по утверждению 5.7.10 мы имеем, что $\widetilde{P} \in \widetilde{X}$ является точкой типа cA, и

$$\widetilde{G} = (\mathbb{Z}/2)^2 \times \mathbb{Z}/2n \times \mathbb{Z}/2m \qquad \text{для} \qquad n, m \geq 1.$$

Мы можем выбрать координаты таким образом, что уравнение

$$\phi(x_1, x_2, x_3, x_4) = \sum_{i \geq 1} \phi_i(x_1, x_2, x_3, x_4)$$

для $\widetilde{X} \subset \mathbb{C}^4$ является $\widetilde{G}$-полуинвариантным, и, значит, $\mathbb{Z}/r$-полуинвариантным, где отображение $\pi\colon \widetilde{X} \to X$ является факторизацией по действию $\mathbb{Z}/r$. Мы можем предполагать, что действие подгруппы $(\mathbb{Z}/2)^4 \subset \widetilde{G}$ является стандартным (см. определение 5.7.9) относительно координат $x_1, \ldots, x_4$. Следовательно, ϕ зависит от x_i^2, то есть, $\phi(x_1, x_2, x_3, x_4) = \psi(x_1^2, x_2^2, x_3^2, x_4^2)$ для некоторой голоморфной функции ψ, и $2 \leq \mathrm{rk}(\phi_2) \leq 4$ (см. утверждение 5.7.10). Мы анализируем случаи в соответствии с классификацией терминальных особенностей [Re85, 6.1].

Случай: $\mathbb{Z}/r$ действует на $\mathbb{C}^4$ с весами $(a, -a, 1, 0)$. Мы покажем, что $r = 2$ в этом случае. По классификации терминальных особенностей, уравнение ϕ

является $\mathbb{Z}/r$-инвариантным (а не только $\mathbb{Z}/r$-полуинвариантным). Предположим, что $r \geq 3$, и пусть ξ_r — примитивный корень из единицы степени r. Пусть $T_2 \subset \mathbb{C}^4$ — подпространство, натянутое на координаты, на которых $\mathbb{Z}/r$ действует с весами a и $-a$. По классификации терминальных особенностей, мы видим, что $\phi_2|_{T_2}$ невырождена. Поскольку ϕ зависит от x_i^2, отсюда следует, что ϕ_2 содержит члены x_1^2 и x_2^2. С точностью до перенормировки координат, мы можем считать, что ϕ_2 содержит $x_1^2 + x_2^2$.

Отсюда следует, что $\xi_r^{2a} x_1^2 + \xi_r^{-2a} x_2^2$ должно быть равно $x_1^2 + x_2^2$, что возможно только если $\xi_r^{2a} = 1$. Поскольку a взаимно просто с r, это влечет, что $r = 2$ в этом случае. Мы получаем

$$\phi = x_1^2 + x_2^2 + f(x_3, x_4), \qquad r = 2, \qquad w = (1, 1, 1, 0; 0), \tag{5.7.4}$$

где $\mathrm{mult}_0(f) \geq 2$, w — вектор весов действия $\mathbb{Z}/2$ на $\mathbb{C}^4$, и его последний элемент — вес ϕ. Он равен 0, указывая, что ϕ является $\mathbb{Z}/2$-инвариантным.

Случай: $\mathbb{Z}/r$ действует на $\mathbb{C}^4$ с весами $(1, 3, 1, 2)$ и $r = 4$. Единственная возможность в этом случае:

$$\phi = x_1^2 + x_2^2 + f(x_3, x_4), \qquad r = 4, \qquad w = (1, 3, 1, 2; 2), \tag{5.7.5}$$

где $\mathrm{mult}_0(f) \geq 3$, w — вектор весов действия $\mathbb{Z}/2$.

Случай: $\mathbb{Z}/r$ действует на $\mathbb{C}^4$ с весами $(0, 1, 1, 1)$ и $r = 2$. Мы получаем

$$\phi = x_1^2 + x_2^2 + f(x_3, x_4), \qquad r = 2, \qquad w = (0, 1, 1, 1; 0), \tag{5.7.6}$$

где $\mathrm{mult}_0(f) \geq 4$ и w — вектор весов действия $\mathbb{Z}/2$.

Пусть g — образующая группы $\mathbb{Z}/r = \mathbb{Z}/2 \subset \widetilde{G}$. Мы утверждаем, что во всех трех рассмотренных выше случаях $\langle g \rangle = \mathbb{Z}/2$ является максимальной циклической подгруппой в $\widetilde{G}_2$. Действительно, предположим, что $\widetilde{G}_2$ принадлежит строго большей циклической подгруппе. Поскольку $\widetilde{G}_2$ является 2-группой, существует элемент $h \in \widetilde{G}_2$ такой, что $h^2 = g$. Элемент h действует на координаты x_1 и x_2 как $x_1 \mapsto \xi x_1$, $x_2 \mapsto \zeta x_2$, где ξ и ζ — корни из единицы.

В случае (5.7.5), мы имеем $\xi^2 = \sqrt{-1}$, $\zeta^2 = -\sqrt{-1}$, $\xi^2 = \zeta^2$. Здесь последнее равенство выполняется, поскольку уравнение ϕ является $\widetilde{G}$-полуинвариантным.

Это противоречие. В случае (5.7.6), мы имеем $\xi^2 = 1$, $\zeta^2 = -1$, $\xi^2 = \zeta^2$. Это противоречие. В случае (5.7.4), h должен действовать посредством умножения на $\pm\sqrt{-1}$ на координаты x_1, x_2, x_3 и посредством умножения на ± 1 на x_4. Как в доказательстве утверждения 5.7.10 можно показать, что ϕ содержит моном x_4^{2l} с ненулевым коэффициентом. Отсюда следует, что ϕ не может быть h-полуинвариантным. Это противоречие.

Следовательно, $\mathbb{Z}/r$ является максимальной циклической подгруппой в $\widetilde{G}_2$ во всех трех рассмотренных выше случаях. Согласно лемме 5.3.1, мы получаем

$$\mathfrak{r}(G_2) = \mathfrak{r}(\widetilde{G}_2/\langle g\rangle) < \mathfrak{r}(\widetilde{G}_2) = 4.$$

Используя утверждения 5.7.10, мы получаем $\mathfrak{r}(G_{\neq 2}) \leq (\widetilde{G}_{\neq 2}) \leq 2$. Мы заключаем, что $\mathfrak{r}(G) \leq 3$, и утверждение доказано. □

Утверждение 5.7.14. *Пусть $P \in X$ — росток трехмерной терминальной особенности горенштейнова индекса $r > 1$, и пусть G — конечная абелева группа такая, что $G \subset \mathrm{Aut}(P \in X)$. Предположим, что поднятие $\widetilde{G}$ не абелево. Тогда $\mathfrak{r}(G) \leq 3$.*

Доказательство. По утверждению 5.7.12, мы имеем $r = 2$. Мы можем считать, что $\mathfrak{r}(G_2) = 4$. Действительно, иначе утверждение 5.7.2 влечет, что $\mathfrak{r}(G_p) \leq 3$ для $p \neq 2$, так что мы имеем $\mathfrak{r}(G) \leq 3$ и доказательство закончено.

Пусть $\widetilde{G}_2$ — силовская 2-подгруппа $\widetilde{G}$. Заметим, что $\widetilde{G}_2$ сюръективно отображается на G_2 при естественной проекции $\widetilde{G} \to G$, как в (5.7.3). Мы утверждаем, что $\widetilde{G}_2$ абелева. В обозначениях теоремы 5.7.1, подпространство $T = \mathbb{C}^3 = \{x_4 = 0\}$ является $\widetilde{G}$-инвариантным. Мы покажем, что существует одномерное подпредставление $\widetilde{G}_2$ в T. Предположим, что представление $\widetilde{G}_2$ на $T = \mathbb{C}^3 = \{x_4 = 0\}$ неприводимо. Тогда $3 = \dim T$ делит $|\widetilde{G}_2|$, что является противоречием. Следовательно, представление $\widetilde{G}_2$ на T приводимо. В частности, существует одномерное подпредставление $T_1 \subset T$.

Заметим, что коммутант $[\widetilde{G}, \widetilde{G}]$ содержится в $\mathbb{Z}/r = \mathbb{Z}/2$. Последняя группа действует на T, и в частности на $T_1 \subset T$, точно. Если $\widetilde{G}_2$ не абелева, то $[\widetilde{G}_2, \widetilde{G}_2] = \mathbb{Z}/2$. С другой стороны, ядро гомоморфизма $\widetilde{G}_2 \to \mathrm{GL}(T_1) = \mathbb{C}^\times$ содержит $[\widetilde{G}_2, \widetilde{G}_2]$, что является противоречием. Это показывает, что $\widetilde{G}_2$ абелева. Утверждение 5.7.13, примененное к G_2 и ее поднятию $\widetilde{G}_2$, показывает, что $\mathfrak{r}(G_2) \leq 3$.

Пусть $\widetilde{G}_p$ — силовская p-подгруппа $\widetilde{G}$ для $p > 2$. Мы утверждаем, что естественная проекция $\widetilde{G} \to G$ индуцирует изоморфизм $\widetilde{G}_p \simeq G_p$. Действительно, поскольку $r = 2$, ядро $\widetilde{G} \to G$ равно $\mathbb{Z}/2$ и, следовательно, не пересекается с $\widetilde{G}_p$, порядок которого является степенью $p > 2$. В частности, $\widetilde{G}_p$ абелева. По утверждению 5.7.13 мы имеем $\mathfrak{r}(\widetilde{G}_p) = \mathfrak{r}(G_p) \leq 3$. Поскольку, как выше, $\mathfrak{r}(G_2) \leq 3$, мы заключаем, что $\mathfrak{r}(G) \leq 3$, и утверждение доказано. □

Теперь теорема 5.7.3 следует из утверждения 5.7.10, утвереждения 5.7.13 и утверждения 5.7.14.

5.8 Неприводимый антиканонический элемент

В этом разделе мы начинаем работать с антиканоническими элементами на трехмерном многообразии $G\mathbb{Q}$-Фано X, где G — конечная абелева группа. Предположим, что $|-K_X| \neq \emptyset$. Тогда группа G действует на $\mathrm{H}^0(X, \mathscr{O}(-K_X))$. Поскольку G абелева, соответствующее представление G расщепляется, поэтому мы можем выбрать G-инвариантный элемент $S \in |-K_X|$.

Основная цель этого раздела — показать в предположении, что S неприводима, что G либо имеет тип произведения, либо тип K3. Сначала мы анализируем особенности пары (X, S). В утверждении 5.8.1 мы доказываем, что либо пара (X, S) является lc, либо G имеет тип произведения. В утверждении 5.8.2 мы доказываем, что если (X, S) является plt, то G имеет тип K3.

Утверждение 5.8.1 (см. [Pr11, 2.9])**.** *В приведенных выше обозначениях, если пара (X, S) не является lc, то существует либо G-инвариантная точка на X, либо G-инвариантная гладкая рациональная кривая на X, либо G-инвариантная рациональная поверхность X. Как следствие, G имеет тип произведения.*

Доказательство. Если пара (X, S) не является lc, то выберем максимальное $\lambda < 1$ такое, что пара $(X, \lambda S)$ является lc. Рассмотрим минимальный lc-центр Z пары $(X, \lambda S)$. Возьмем общий G-инвариантный очень обильный дивизор H на X, проходящий через Z. Тогда пара $(X, \lambda S + \epsilon H)$ при $0 < \epsilon \ll 1$ не является lc в Z, и она является парой Фано. Положим $D = \mu(\lambda S + \epsilon H)$, где $0 < \mu < 1$ — лог-канонический порог пары $(X, \lambda S + \epsilon H)$. Тогда пара (X, D) строго lc в Z, и Z является минимальным lc-центром пары (X, D). Также Z является единственным lc-центром пары (X, D) в своей окрестности.

Поскольку пара (X, D) G-инвариантна, $g(Z)$ также является минимальным lc-центром пары (X, D) для любого $g \in G$, и $g(Z)$ является единственным lc-центром пары (X, D) в своей окрестности. С другой стороны, по теоремы связности Коллара–Шокурова не-klt-локус пары (X, D) связен. Следовательно, Z является G-инвариантным.

Если $\dim Z = 0$, то есть Z — точка, мы применяем следствие 5.7.4, чтобы заключить, что G имеет тип произведения. Если $\dim Z = 1$, то Z — гладкая рациональная кривая, и мы применяем следствие 5.3.12, чтобы заключить, что G имеет тип произведения. Если $\dim Z = 2$, то по формуле присоединения Z является klt лог-поверхностью дель Пеццо. В частности, она рациональна. Снова применяем следствие 5.3.12, чтобы заключить, что G имеет тип произведения. □

Напомним, что поверхность K3 — это нормальная проективная поверхность S с не хуже каноническими (то есть 1-lc) особенностями, такая что $\mathrm{H}^1(S, \mathscr{O}_S) = 0$ и $K_S \sim 0$.

Утверждение 5.8.2. *В приведенных выше обозначениях, если пара (X, S) является plt, то G имеет тип K3.*

Доказательство. Поскольку $S \sim -K_X$ обилен, его носитель связен. Поскольку пара (X, S) является plt, отсюда следует, что S неприводима и приведена. Более того, S нормальна, и по обращению присоединения пара $(S, 0)$ является klt. Поскольку K_S линейно тривиален, из точной последовательности

$$0 \to \mathscr{O}_X(K_X) \to \mathscr{O}_X \to \mathscr{O}_S \to 0$$

следует, что $h^1(\mathscr{O}_S) = 0$. Мы заключаем, что S является поверхностью K3 с не хуже чем каноническими особенностями. Утверждение доказано. □

До конца этого раздела мы работаем в следующих предположениях.

Соглашение 5.8.3. Пусть X — трехмерное многообразие $G\mathbb{Q}$-Фано, где G — конечная абелева группа, и пусть $S \in |-K_X|$ — G-инвариантный элемент такой, что пара (X, S) является lc.

Опишем наш план для оставшейся части раздела. Мы предполагаем, что S неприводима. Мы доказываем, что либо G имеет тип произведения, либо

- S нормальна (утверждение 5.8.4).

- S имеет две простые эллиптические особенности P_1 и P_2, переставляемые G (утвереждение 5.8.5).

- Пусть H — подгруппа индекса 2 в G, которая стабилизирует P_i. Пусть E_i — исключительная эллиптическая кривая над $P_i \in S$ на минимальном разрешении $P_i \in S$. Тогда E_i имеет H-орбиту длины не более 7 (утверждение 5.8.8 и 5.8.9).

- Пусть H_E — образ H в группе автоморфизмов E_i. Используя предыдущие результаты, мы получаем, что либо $\mathfrak{r}(H_E) \leq 1$, либо H_E является подгруппой 3 специальных групп (следствие 5.8.10).

После этого мы показываем, что если $\mathfrak{r}(H_E) \leq 1$, то G имеет тип произведения (следствие 5.8.13). Наконец, мы анализируем оставшиеся 3 случая. Это делается в утвеждении 5.8.15, утверждении 5.8.16, утвереждении 5.8.17 и следствии 5.8.18. Таким образом, мы заключаем, что G либо имеет тип произведения, либо тип К3 при предположении, что S неприводима. Мы действуем в соответствии с этим планом.

Утверждение 5.8.4. *Предположим, что S неприводима, но не нормальна. Тогда G имеет тип произведения.*

Доказательство. Поскольку S является коэн-маколеевой, ненормальный локус S является кривой. Обозначим ее через C. Таким образом, у нас есть G-инвариантная кривая C, такая что S особа вдоль C. Согласно лемме 5.2.9 мы имеем $G \subset \mathrm{Aut}(S)$. Пусть S^ν — нормализация S. По формуле присоединения, (S^ν, Δ) является двумерной lc парой Калаби-Яу с точным действием G и границей $\Delta \neq 0$. Тогда следствие 5.5.4 влечет, что G имеет тип произведения. □

Утверждение 5.8.5. *Предположим, что пара (X, S) строго лог-канонична. Предположим, кроме того, что S неприводима и нормальна. Тогда либо G имеет тип произведения, либо S имеет две строго лог-канонические особые точки, переставляемые G, которые являются простыми эллиптическими особенностями.*

Доказательство. По формуле присоединения, имеем $K_S = (K_X + S)|_S \sim 0$, так что поверхность S горенштейнова. По обращению присоединения, S имеет строго лог-канонические особенности. Поскольку $-K_S \sim 0$ неф, не-klt-локус

S состоит либо из одной, либо из двух точек (см. [B24, Theorem 1.2]). Ясно, что они образуют G-инвариантное множество. Если G имеет неподвижную точку, мы применяем следствие 5.7.4 и завершаем доказательство. Поэтому мы можем предполагать, что G переставляет две строго лог-канонические особенности P_1 и P_2 на S.

Поскольку P_i являются строго лог-каноническими особыми точками на S, согласно разделу 5.5.5 точки P_i являются либо простыми эллиптическими, либо касповыми особенностями. Мы используем обозначения леммы 5.5.2. Если P_i являются касповыми особенностями, то все исключительные кривые в минимальном разрешении $f\colon (S', \Delta') \to S$ рациональны. В частности, все компоненты Δ' являются рациональными кривыми. Это влечет, что S'' рациональна. Следовательно, S также рациональна. Поэтому по следствию 5.3.12 мы заключаем, что G имеет тип произведения. Если P_i не являются касповыми особенностями, мы заключаем, что P_i являются простыми эллиптическими особенностями. □

Утверждение 5.8.6. *Пусть $P \in X$ — росток трехмерной терминальной особенности горенштейнова индекса $r \geq 1$. Предположим, что $P \in S$ является простой эллиптической особенностью, где $S \sim -K_X$ — нормальная неприводимая поверхность. Пусть*

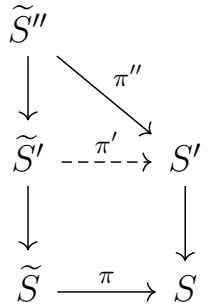
$$\pi\colon \widetilde{P} \in \widetilde{X} \to X \ni P$$

— каноническое циклическое накрытие, и пусть $\widetilde{S} = \pi^{-1}(S)$. Тогда $\widetilde{P} \in \widetilde{S}$ также является простой эллиптической особенностью.

Доказательство. Мы можем считать, что P не горенштейнова, так что $r > 1$. Согласно разделу 5.7, каноническое накрытие π этально на $\widetilde{X} \setminus P$, и $\widetilde{P} \in \widetilde{X}$ горенштейново. Пара (X, S) строго лог-канонична в P, и, следовательно, пара $(\widetilde{X}, \widetilde{S})$ строго лог-канонична в $\widetilde{P}$. Поэтому $\widetilde{P} \in \widetilde{S}$ является либо простой эллиптической, либо касповой особенностью, см. раздел 5.5.5.

Мы показываем, что $\widetilde{P} \in \widetilde{S}$ является простой эллиптической особенностью. Действительно, рассмотрим конечный морфизм $\pi|_{\widetilde{S}}\colon \widetilde{S} \to S$. Пусть $\widetilde{S}' \to \widetilde{S}$ и $S' \to S$ — минимальные разрешения. Тогда $\pi|_{\widetilde{S}}$ индуцирует рациональное отображение $\pi'\colon \widetilde{S}' \dashrightarrow S'$. Мы можем раздуть некоторое количество (возможно, бесконечно близких) точек на $\widetilde{S}'$, чтобы получить конечный в общей точке морфизм $\pi''\colon \widetilde{S}'' \to S'$. Эти отображения образуют следующую комму-

тативную диаграмму:



(5.8.1)

Заметим, что если $\widetilde{P} \in \widetilde{S}$ является касповой особенностью, то объединение рациональных кривых, которые являются исключительными для $\widetilde{S}'' \to \widetilde{S}$, доминировало бы эллиптическую кривую на S', что невозможно. Это доказывает, что $\widetilde{P} \in \widetilde{S}$ является простой эллиптической особенностью, как утверждалось. □

Замечание 5.8.7. Мы сохраняем обозначения как в доказательстве утверждения 5.8.6. Мы утверждаем, что $\pi' \colon \widetilde{S}' \dashrightarrow S'$ на самом деле является морфизмом. Действительно, заметим, что кривые, которые являются исключительными для $\widetilde{S}'' \to \widetilde{S}'$, отображаются в исключительную эллиптическую кривую E от $S' \to S$. Это означает, что они стягиваются при отображении π''. Следовательно, $\widetilde{S}'' = \widetilde{S}'$, так что π' является морфизмом. Мы обозначаем исключительную эллиптическую кривую отображения $\widetilde{S}' \to \widetilde{S}$ через $\widetilde{E}$. Отметим, что π' индуцирует конечный морфизм $\pi'|_{\widetilde{E}} \colon \widetilde{E} \to E$.

По утверждению 5.8.5, мы можем предполагать, что S имеет две простые эллиптические особенности, переставляемые G. Пусть H — подгруппа G индекса 2, которая стабилизирует точки P_1, P_2 на X. Положим $P = P_1$. Локальная конструкция в утверждении 5.8.6 может быть сделана эквивариантной относительно действия конечной группы. Действительно, раз H действует на ростке $P \in X$, существует поднятие $\widetilde{H}$ группы H, которое действует на $\widetilde{P} \in \widetilde{X}$, как в (5.7.3). Тогда поверхность $\widetilde{S}$ является $\widetilde{H}$-инвариантной, и такой же является диаграмма (5.8.1). В частности, морфизм $\widetilde{E} \to E$ является $\widetilde{H}$-эквивариантным, где $\widetilde{H}$ действует на E через H. Согласно утверждению 5.7.12, либо поднятие $\widetilde{H}$ группы H абелево, либо $r = 2$, где r — горенштейнов индекс $P \in X$.

Утверждение 5.8.8. *Предположим, что*

- $P \in X$ *— росток трехмерной терминальной особенности с точным действием конечной абелевой группы* H*,*

- *H-инвариантный элемент $S \in |-K_X|$ имеет простую эллиптическую особенность в P,*
- *поднятие $\widetilde{H}$ группы H на каноническое накрытие $P \in X$ абелево.*

Пусть E — прообраз $P \in S$ в минимальном разрешении S' поверхности S. Тогда E имеет H-орбиту длины не более 4.

Доказательство. По замечанию 5.8.7, отображение $\pi' \colon \widetilde{S}' \to S'$ в диаграмме (5.8.1) является морфизмом. Поскольку $\widetilde{P} \in \widetilde{S} \subset \widetilde{X}$, и точка $\widetilde{P} \in \widetilde{X}$ является терминальной горенштейновой, мы заключаем, что размерность вложения $\widetilde{P} \in \widetilde{S}$ не превосходит 4. Из (5.5.2) следует, что $-\widetilde{E}^2 \leq 4$, где $\widetilde{E} \subset \widetilde{S}'$ — эллиптическая кривая над $\widetilde{P}$ в минимальном разрешении $\widetilde{S}' \to \widetilde{S}$. Поскольку по предположению поднятие $\widetilde{H}$ группы H абелево, по утверждению 5.5.6, мы заключаем, что существует $\widetilde{H}$-орбита длины не более 4 на $\widetilde{E}$. Поскольку индуцированное отображение $\widetilde{E} \to E$ является $\widetilde{H}$-эквивариантным, существует H-орбита длины не более 4 на E, что завершает доказательство. □

Утверждение 5.8.9. *Предположим, что*

- *$P \in X$ — росток трехмерной терминальной особенности с точным действием конечной абелевой группы H,*
- *H-инвариантный элемент $S \in |-K_X|$ имеет простую эллиптическую особенность в P,*
- *поднятие $\widetilde{H}$ группы H на каноническое накрытие $P \in X$ не абелево.*

Пусть E — прообраз $P \in S$ в минимальном разрешении S' поверхности S. Тогда E имеет H-орбиту длины не более 7.

Доказательство. Согласно утверждению 5.7.12, для индекса Картье K_X в $P \in X$ мы имеем $r = 2$. По классификации терминальных особенностей, это влечет, что $\dim T_P X \leq 7$. По (5.5.2), отсюда следует, что $-E^2 \leq 7$. По утверждению 5.5.6, существует H-орбита на E длины не более 7. □

Мы обозначаем через H_E образ H в группе автоморфизмов эллиптической кривой E.

Следствие 5.8.10. Либо $\mathfrak{r}(H_E) \leq 1$, либо H_E изоморфна подгруппе одной из следующих групп:

$$(\mathbb{Z}/3)^2, \qquad (\mathbb{Z}/2)^3, \qquad \mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/4. \tag{5.8.2}$$

Более того, если H_E изоморфна одной из этих трех групп, то H_E не состоит из сдвигов на E, и максимальная длина H_E-орбиты на E равна 4.

Доказательство. Согласно утверждению 5.8.8 и утверждению 5.8.9, существует орбита H_E на E длины не более 7. Применяя утверждение 5.4.2, мы завершаем доказательство утверждения. □

Пусть G_S — образ G в $\mathrm{Aut}(S)$. Тогда мы имеем следующую точную последовательность

$$0 \to G_N \to G \to G_S \to 0, \tag{5.8.3}$$

где G_N — циклическая группа, которая точно действует на касательном пространстве к общей точке S. Напомним диаграмму (5.5.1) из доказательства леммы 5.5.2:

$$\begin{array}{ccc} (S', \Delta') & \xrightarrow{g} & (S'', \Delta'') \\ {\scriptstyle f}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle \pi} \\ S & & Z \end{array} \tag{5.8.4}$$

Здесь S'' — минимальная модель минимального разрешения S' поверхности S, слои $S'' \to Z$ являются гладкими рациональными кривыми, а Z является эллиптической кривой. Эта диаграмма является G_S-эквивариантной (и также H-инвариантной), и G_S точно действует на S''. Заметим, что E принадлежит границе Δ', и E отображается изоморфно на компоненту E'' границы Δ'' на S''. Тогда E'' отображается изоморфно на Z, так что мы имеем $Z \simeq E$. Существует точная последовательность

$$0 \to G_f \to G_S \to G_Z \to 0 \tag{5.8.5}$$

где G_Z — образ G_S в $\mathrm{Aut}(E)$, и G_f точно действует на общем слое $S'' \to Z$. Таким образом, имеем $G_f \subset \mathrm{Cr}_1(\mathbb{C})$.

Утверждение 5.8.11. *Имеем* $G_f \subset (\mathbb{Z}/2)^2$.

Доказательство. Поскольку (S'', Δ'') является lc парой Калаби-Яу, по формуле присоединения, примененной к общему слою $S'' \to Z$, получаем, что Δ'' имеет в точности две компоненты, каждая из которых сюръективно отображаются на Z и пересекает каждый слой в одной точке. Эти компоненты являются исключительными кривыми над P_1 и P_2. Следовательно, G_f допускает инвариантное множество на общем слое отображения $S'' \to Z$, состоящее из двух точек. По утверждению 5.4.1 это влечет $G_f \subset (\mathbb{Z}/2)^2$. □

Заметим, что точная последовательность (5.8.5) вкладывается в следующую коммутативную диаграмму:

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & & 0 & & & & \\ & & & & \downarrow & & & & \\ 0 & \longrightarrow & H \cap G_f & \longrightarrow & H & \longrightarrow & H_E & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & G_f & \longrightarrow & G_S & \longrightarrow & G_Z & \longrightarrow & 0 \\ & & & & \downarrow & & & & \\ & & & & \mathbb{Z}/2 & & & & \\ & & & & \downarrow & & & & \\ & & & & 0 & & & & \end{array} \tag{5.8.6}$$

Возможны два случая:

1. либо $H_E = G_Z$ и $G_f/(H \cap G_f) = \mathbb{Z}/2$,
2. либо $G_Z/H_E = \mathbb{Z}/2$ и $G_f/(H \cap G_f) = 0$.

Утверждение 5.8.12. *Если $\mathfrak{r}(G_Z) \leq 1$, то G имеет тип произведения.*

Доказательство. Если $\mathfrak{r}(G_Z) \leq 1$, то применяя утверждение 5.3.10 и утверждение 5.3.11 к расширениям (5.8.5) и (5.8.3) соответственно, мы видим, что G имеет тип произведения. □

Следствие 5.8.13. Если $\mathfrak{r}(H_E) \leq 1$, то G имеет тип произведения.

Доказательство. Предположим, что $\mathfrak{r}(H_E) \leq 1$, так что $H_E = \mathbb{Z}/m$ для некоторого $m \geq 1$. Если G_Z также циклическая, используя утверждение 5.8.12, мы завершаем доказательство. В противном случае мы имеем $G_Z = \mathbb{Z}/m \times \mathbb{Z}/2$. В этом случае получаем $G_f/(H \cap G_f) = 0$, так что $G_f \subset H$. Следовательно, G_f не содержит элемента, который переставляет два сечения $S'' \to E$, являющиеся компонентами граничного дивизора Δ'', как в диаграмме (5.8.4). Поэтому $G_f \subset \mathbb{Z}/2$. Таким образом, $G_S \subset \mathrm{Cr}_2(\mathbb{C})$, и, следовательно, G имеет тип произведения. □

Утверждение 5.8.14. *Либо G имеет тип произведения, либо G_Z изоморфна подгруппе одной из групп* (5.8.2).

Доказательство. По следствию 5.8.10 мы знаем, что либо H_E является подгруппой одной из групп (5.8.2), либо $\mathfrak{r}(H_E) \leq 1$. По следствию 5.8.13 мы можем считать, что H_E является подгруппой одной из групп (5.8.2). Тогда по утверждению 5.4.2 существует H_E-орбита на E длины не более 4. Поскольку, как мы заметили выше, либо $G_Z = H_E$, либо $G_Z/H_E = \mathbb{Z}/2$, мы заключаем, что существует G_Z-орбита на Z длины не более 8. Снова применяя утверждение 5.4.2, мы видим, что либо $\mathfrak{r}(G_Z) \leq 1$, и в этом случае G имеет тип произведения по следствию 5.8.12, либо G_Z изоморфна подгруппе одной из групп (5.8.2). □

Согласно утверждению 5.8.14, нам нужно рассмотреть три возможности для G_Z, как в (5.8.2).

Утверждение 5.8.15. *Предположим, что $G_Z = (\mathbb{Z}/3)^2$. Тогда G имеет тип произведения.*

Доказательство. Из утверждения 5.8.11 и точной последовательности (5.8.5) мы имеем $G_S \subset (\mathbb{Z}/6)^2$. Таким образом, используя точную последовательность (5.8.3), мы получаем $\mathfrak{r}(G) \leq 3$, поэтому G имеет тип произведения. □

Утверждение 5.8.16. *Предположим, что $G_Z \subset (\mathbb{Z}/2)^3$. Тогда либо G имеет тип произведения, либо*

$$G = (\mathbb{Z}/2)^3 \times \mathbb{Z}/4 \times \mathbb{Z}/2n, \qquad H = (\mathbb{Z}/2)^2 \times \mathbb{Z}/4 \times \mathbb{Z}/2n, \qquad n \geq 1, \quad (5.8.7)$$

$$G_Z = (\mathbb{Z}/2)^3, \qquad G_f = (\mathbb{Z}/2)^2, \qquad G_S = (\mathbb{Z}/2)^3 \times \mathbb{Z}/4, \qquad G_N = \mathbb{Z}/2n.$$

Более того, последовательность (5.8.3) *расщепляется. Точки P_i являются терминальными гореншейновыми типа cA, и $-E^2 = 2$.*

Доказательство. Мы можем считать, что $G_Z = (\mathbb{Z}/2)^3$, иначе $G_Z \subset \mathrm{Cr}_1(\mathbb{C})$, следовательно, по утверждению 5.3.10, примененному к (5.8.5), мы имеем $G_S \subset \mathrm{Cr}_2(\mathbb{C})$, и по утверждению 5.3.11, примененному к (5.8.3), мы заключаем, что G имеет тип произведения. Мы можем считать, что $G_f = (\mathbb{Z}/2)^2$, иначе, рассуждая аналогично, мы видим, что $G_S \subset \mathrm{Cr}_2(\mathbb{C})$, и G имеет тип произведения.

Итак, мы имеем $G_Z = (\mathbb{Z}/2)^3$ и $G_f = (\mathbb{Z}/2)^2$. Тогда 2-группа G_Z имеет тип $[1,1,1]$, G_f имеет тип $[1,1]$, $(G_N)_2$ имеет тип $[k]$ для некоторого $k \geq 0$. Вычислим возможный тип G_2, используя теорему 5.3.5, примененную к точным

последовательностям (5.8.3) и (5.8.5):

$$[k]\cdot[1,1,1]\cdot[1,1] = [k+2,1,1,1] + 2[k+1,2,1,1] \\ + 2[k+1,1,1,1,1] + [k,2,2,1] + [k,2,1,1,1] \\ + [k,1,1,1,1,1] + [k+1,2,1] + [k+1,2,2].$$

Поскольку $\mathfrak{r}(G_{\neq 2}) = \mathfrak{r}((G_N)_{\neq 2}) \leq 1$, мы видим, что группа G может не иметь тип произведения только если G_2 имеет тип $[k,1,1,1,1,1]$ или $[k,2,1,1,1]$. Мы также можем считать, что в этих двух случаях $k \geq 1$, иначе G имеет тип произведения. Мы исключаем первую возможность. В этом случае для подгруппы $H \subset G$ индекса 2, которая стабилизирует P_i, мы имеем $\mathfrak{r}(H) \geq 5$. Однако, по теореме 5.7.3, мы имеем $\mathfrak{r}(H) \leq 4$. Это противоречие. Таким образом, либо G имеет тип произведения, либо G_2 имеет тип $[k,2,1,1,1]$, так что

$$G = \mathbb{Z}/2n \times \mathbb{Z}/4 \times (\mathbb{Z}/2)^3$$

где $n \geq 1$. Заметим, что в этом случае последовательность (5.8.3) расщепляется.

Поскольку $\mathfrak{r}(G) = \mathfrak{r}(G_2) = 5$, мы имеем $\mathfrak{r}(H) \geq 4$. По теореме 5.7.3, мы видим, что $\mathfrak{r}(H) = 4$ и точки P_i являются терминальными горенштейновыми типа cA. По (5.5.2) мы имеем $-E^2 \leq 4$. По утверждению 5.4.2, поскольку $G_Z = (\mathbb{Z}/2)^3$, существует G_Z-орбита длины 4 на Z, и это минимальная длина G_Z-орбиты на Z. Поскольку H_E имеет индекс не более 2 в G_Z, и изоморфизм $E \to Z$, индуцированный отображением $S'' \to Z$, как в (5.8.4), является G_S-эквивариантным, минимальная длина H_E-орбиты на E равна либо 4, либо 2.

Предположим, что минимальная длина H_E-орбиты на E равна 4. Из утверждения 5.5.6 следует, что $-E^2 = 4$. Из (5.5.2) и используя тот факт, что точки P_i горенштейновы, мы получаем $\dim T_{P_i}S = 4$, поэтому $T_{P_i}S = T_{P_i}X$. Таким образом, по лемме 5.2.7 действие H на S точно, так что композиция отображений $H \to G \to G_S$ инъективна. Из точной последовательности (5.8.3) следует, что $H \cap G_N = 0$. Поскольку G_N вкладывается в G, мы видим, что $G_N = G_N/(H \cap G_N)$ вкладывается в $G/H = \mathbb{Z}/2$. Так что мы имеем $G_N \subset \mathbb{Z}/2$, и, следовательно, $G_N = \mathbb{Z}/2$. Отсюда следует, что G_2 имеет тип $(2,1,1,1,1)$, и $G_{\neq 2} = 0$, так что $G = \mathbb{Z}/4 \times (\mathbb{Z}/2)^4$. Мы заключаем, что G имеет тип произведения.

Теперь предположим, что минимальная длина H_E-орбиты на E равна 2. Из утверждения 5.5.6 следует, что $2 \leq -E^2$. Случай $-E^2 = 4$ исключается рассуждением, данным выше. Мы исключаем случай $-E^2 = 3$. Действительно, если $-E^2 = 3$, то по утверждению 5.5.6 кривая E имела бы либо H_E-орбиту длины 1, либо длины 3. Первый случай явно не может быть реализован. Второй случай противоречит $H_E \subset G_Z = (\mathbb{Z}/2)^3$. Следовательно, мы имеем $-E^2 = 2$. Выше мы показали, что $\mathfrak{r}(H) = 4$. Отсюда следует, что либо $H = (\mathbb{Z}/2)^2 \times \mathbb{Z}/4 \times \mathbb{Z}/2n$ для $n \geq 1$, либо $H = (\mathbb{Z}/2)^3 \times \mathbb{Z}/4 \times \mathbb{Z}/n$ и $n = 1$. В последнем случае G имеет тип произведения. Поскольку мы также знаем, что точки P_i являются горенштейновыми типа cA, утверждение доказано. □

Утверждение 5.8.17. *Предположим, что $G_Z \subset \mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/4$. Тогда либо G имеет тип произведения, либо*

$$G = (\mathbb{Z}/2)^3 \times \mathbb{Z}/4 \times \mathbb{Z}/2n, \qquad H = (\mathbb{Z}/2)^2 \times \mathbb{Z}/4 \times \mathbb{Z}/2n, \qquad n \geq 1, \quad (5.8.8)$$

$$G_Z = \mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/4, \qquad G_f = (\mathbb{Z}/2)^2, \qquad G_S = (\mathbb{Z}/2)^3 \times \mathbb{Z}/4, \qquad G_N = \mathbb{Z}/2n.$$

Более того, последовательности (5.8.3) *и* (5.8.5) *расщепляются. Точки P_i являются терминальными горенштейновыми типа cA, и $-E^2 = 2$.*

Доказательство. По утверждению 5.8.12, мы можем считать, что $G_Z = (\mathbb{Z}/2)^2$ или $G_Z = \mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/4$. В первом случае мы имеем $G_Z \subset \mathrm{Cr}_1(\mathbb{C})$. По утверждению 5.8.11 мы имеем $G_f \subset \mathrm{Cr}_1(\mathbb{C})$. Применяя утверждение 5.3.10 к (5.8.5) и утверждение 5.3.11 к (5.8.3), мы видим, что G имеет тип произведения. Итак, мы можем считать, что $G_Z = \mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/4$.

Рассуждая, как в начале доказательства утверждения 5.8.16, мы можем считать, что $G_f = (\mathbb{Z}/2)^2$. Предположим, что последовательность (5.8.5) не расщепляется. Тогда либо

$$G_S = \mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/4 \times \mathbb{Z}/4, \quad \text{либо} \quad G_S = \mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/8, \quad \text{либо} \quad G_S = \mathbb{Z}/4 \times \mathbb{Z}/8.$$

Во всех этих случаях $G_S \subset \mathrm{Cr}_2(\mathbb{C})$, и, следовательно, применяя утверждение 5.3.11 к (5.8.3), мы видим, что G имеет тип произведения.

Таким образом, мы можем считать, что (5.8.5) расщепляется, так что $G_S = (\mathbb{Z}/2)^3 \times \mathbb{Z}/4$. Используя теорему 5.3.5, мы проверяем, что если точная последовательность (5.8.3) не расщепляется, то G имеет тип произведения. Теперь предположим, что (5.8.3) расщепляется, так что

$$G = \mathbb{Z}/n' \times (\mathbb{Z}/2)^3 \times \mathbb{Z}/4$$

для некоторого $n' \geq 1$. Более того, мы можем считать, что $n' = 2n$, иначе G имеет тип произведения.

Напомним, что мы обозначаем через H подгруппу G, которая стабилизирует точки P_i. Поскольку $\mathfrak{r}(G) = \mathfrak{r}(G_2) = 5$, мы имеем $\mathfrak{r}(H) \geq 4$. По теореме 5.7.3 мы видим, что $\mathfrak{r}(H) = 4$ и точки P_i являются терминальными горенштейновыми типа cA. По (5.5.2) мы имеем $-E^2 \leq 4$. По утверждению 5.4.2, поскольку $G_Z = \mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/4$, существует G_Z-орбита длины 2 на Z, и это минимальная длина G_Z-орбиты на Z. Поскольку H_E имеет индекс не более 2 в G_Z, и изоморфизм $E \to Z$, индуцированный отображением $S'' \to Z$, как в (5.8.4), является G_S-эквивариантным, минимальная длина H_E-орбиты на E равна либо 2, либо 1. Поскольку (5.8.3) расщепляется, отсюда следует, что $H_E \simeq G_Z$, и минимальная длина H_E-орбиты на E равна 2.

Выше мы показали, что $\mathfrak{r}(H) = 4$. Отсюда следует, что либо $H = \mathbb{Z}/2n \times (\mathbb{Z}/2)^2 \times \mathbb{Z}/4$ для $n \geq 1$, либо $H = \mathbb{Z}/n \times (\mathbb{Z}/2)^3 \times \mathbb{Z}/4$ и $n = 1$, в котором случае G имеет тип произведения. Итак, мы имеем

$$G = (\mathbb{Z}/2)^3 \times \mathbb{Z}/4 \times \mathbb{Z}/2n, \qquad H = (\mathbb{Z}/2)^2 \times \mathbb{Z}/4 \times \mathbb{Z}/2n$$

для некоторого $n \geq 1$.

Если $-E^2 = 4$, то размерность вложения $P \in S$ равна 4, и мы заключаем, рассуждая, как в утверждении 5.8.16. Таким образом, мы можем считать, что $-E^2 \leq 3$. Мы исключаем случаи $-E^2 = 1$ и $-E^2 = 3$. Из утверждения 5.5.6 следует, что $2 \leq -E^2$. Если $-E^2 = 3$, то по утверждению 5.5.6 кривая E имела бы либо H_E-орбиту длины 1, либо длины 3. Оба случая противоречат тому, что $H_E = G_Z = \mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/4$, и утверждению 5.4.2. Следовательно, мы имеем $-E^2 = 2$. Поскольку мы также знаем, что точки P_i являются горенштейновыми типа cA, утверждение следует. □

Следствие 5.8.18. В случае $-E^2 = 2$ группа G имеет тип произведения.

Доказательство. Нам нужно разобраться с двумя оставшимися случаями, описанными в утверждении 5.8.16 и утверждении 5.8.15. В частности, в обоих случаях $P \in X$ является горенштейновой точкой типа cA. Поскольку в обоих случаях $\mathfrak{r}(H) = 4$, мы можем применить утверждение 5.7.10. Таким образом, мы можем выбрать координаты в $\mathbb{C}^4$, содержащие $0 = P \in X$, такие что действие $(\mathbb{Z}/2)^4 \subset H$ является стандартным относительно координат $x_1, \ldots, x_4$, и локальное уравнение $\phi = 0$ для $0 \in X$ зависит от x_i^2. Более того,

для локального уравнения $0 \in X$ (см. (5.7.1)) мы имеем

$$\phi = x_1^2 + x_2^2 + x_3^{2k} + x_4^{2l} + \dots \tag{5.8.9}$$

для некоторых $k, l \geq 1$,

Пусть $\psi = 0$ — уравнение дивизора D в $\mathbb{C}^4$ такого, что $D|_X = S$. Поскольку $-E^2 = 2$, по (5.5.2) мы имеем $\dim T_P S = 3$. Следовательно, для линейного члена ψ_1 функции ψ мы имеем $\psi_1 \neq 0$. По классификации простых эллиптических особенностей, см. (5.5.4), мы имеем $\mathrm{rk}(\phi_2|_{\psi=0}) = 1$. Поскольку $\mathrm{rk}(\phi_2|_{\psi=0}) = 1$, мы видим, что ψ_1 содержит либо x_1, либо x_2 с ненулевым коэффициентом.

Таким образом, мы можем считать, что ψ_1 содержит x_1. Заметим, что ψ (и также ψ_1) может быть выбран H-полуинвариантным, и поэтому $(\mathbb{Z}/2)^4$-полуинвариантным. Мы заключаем, что ψ должен делиться на x_1. Но поскольку S неприводима, это влечет, что с точностью до перенумерации и перенормировки координат мы имеем $\psi = x_1$.

Через $(\phi|_{\psi=0})_4$ мы обозначаем однородный член степени 4 функции $\phi|_{\psi=0}$. По (5.5.4), мы имеем, что $(\phi|_{\psi=0})_4$ имеет 4 различных корня. Отсюда следует, что x_3^4 и x_4^4 входят в $(\phi|_{\psi=0})_4$ с ненулевыми коэффициентами. Таким образом, после перенормировки координат мы имеем

$$\phi = x_1^2 + x_2^2 + x_3^4 + x_4^4 + \dots$$

Из утверждения 5.8.16 и утверждения 5.8.17 следует, что $G_N = H_N$, где G_N как в (5.8.3), а H_N — подгруппа H, которая действует тривиально на S. Пусть g — образующая G_N. Поскольку g действует на S тривиально, и S задана уравнением $\phi|_{x_1=0} = 0$ в $\mathbb{C}^3$, по лемме 5.2.7 мы имеем, что g действует на $\mathbb{C}^4$ следующим образом: $x_1 \mapsto \xi_{2n} x_1$, $x_i \mapsto x_i$ для $2 \leq i \leq 4$, где ξ_{2n} — корень из единицы порядка $2n$. Однако, поскольку ϕ является H-полуинвариантной, и, следовательно, G_N-полуинвариантной, мы получаем, что $n \leq 1$. Отсюда следует, что $G = (\mathbb{Z}/2)^3 \times (\mathbb{Z}/4)^2$ имеет тип произведения. Утверждение доказано. □

Мы завершаем этот раздел двумя примерами.

Пример 5.8.19. Рассмотрим росток обыкновенной двойной точки $P \in X$, заданный уравнением

$$\phi = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 0,$$

и пусть $S \subset X$ задана уравнением

$$\psi = a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 + a_3 x_3^2 + a_4 x_4^2 = 0$$

где $a_i \in \mathbb{C}$ — общие комплексные числа. Тогда существует диагональное точное действие группы $H = (\mathbb{Z}/2)^3 \times \mathbb{Z}/2n$ на $P \in X$. Заметим, что расширение H при помощи $\mathbb{Z}/2$ имеет тип произведения.

Пример 5.8.20. Рассмотрим росток терминальной особенности $P \in X$, заданный уравнением

$$\phi = x_1^2 + x_2^2 + x_3^4 + x_4^4 = 0.$$

Тогда существует диагональное точное действие группы $H = (\mathbb{Z}/2)^2 \times \mathbb{Z}/4 \times \mathbb{Z}/4n$ на $P \in X$ для $n \geq 1$. Заметим, что $S = \{x_1 = 0\}$ имеет простую эллиптическую особенность в P с $-E^2 = 2$. Однако, в этом случае $\mathbb{Z}/4n \subset G_f$, где G_f как в (5.8.5), так что этот случай не реализуется в описанной выше ситуации, потому что по утверждению 5.8.11 мы имеем $G_f \subset (\mathbb{Z}/2)^2$.

5.9 Приводимый антиканонический элемент: случай dlt

В этом разделе мы рассматриваем случай G-инвариантного приводимого элемента $S \in |-K_X|$, такого, что пара (X, S) имеет dlt особенности, то есть является дивизориально лог терминальной. Мы изучаем индуцированное действие группы G на S. Ключевым понятием здесь является понятие двойственного комплекса. Мы напоминаем некоторые результаты о двойственных комплексах пар Калаби–Яу.

Лемма 5.9.1 ([KX16, 32.1(1)]). *Пусть $(X, S = \sum S_i)$ — dlt пара Калаби-Яу. Предположим, что $\dim \mathcal{D}(S) = \dim X - 1$. Тогда все страты S рационально связны. В частности, если $\dim X = 3$, то все страты S рациональны.*

Лемма 5.9.2 ([KX16, Lemma 25]). *Пусть $(X, S = \sum S_i)$ — snc пара. Тогда для любого $i \geq 0$ существует вложение*

$$\mathrm{H}^i(\mathcal{D}(S), \mathbb{C}) \hookrightarrow \mathrm{H}^i(S, \mathscr{O}_S).$$

Следствие 5.9.3. Пусть $(X, S = \sum S_i)$ — dlt пара. Тогда для любого $i \geq 0$ существует вложение

$$\mathrm{H}^i(\mathcal{D}(S), \mathbb{C}) \hookrightarrow \mathrm{H}^i(S, \mathscr{O}_S).$$

Доказательство. Пусть $f\colon (\widetilde{X}, \widetilde{S}) \to (X, S)$ — лог разрешение dlt пары (X, S), так что

$$f^*(K_X + S) = K_{\widetilde{X}} + \widetilde{S}.$$

Поскольку (X, S) является dlt, мы можем выбрать лог разрешение f таким образом, что лог-дискрепантности всех f-исключительных дивизоров положительны. Положим $S' = \widetilde{S}^{=1}$. Индуцированное отображение $f|_{S'}\colon S' \to S$ индуцирует биекцию между компонентами S' и компонентами S и является бирациональным на каждой компоненте S'. Рассмотрим спектральную последовательность Лере

$$E_2^{p,q} = \mathrm{H}^p(S, R^q\pi_*\mathscr{O}_{S'}) \implies \mathrm{H}^{p+q}(S', \mathscr{O}_{S'}).$$

Поскольку S имеет dlt особенности (см. [Kov22, Definition 10.9] для определения dlt особенностей для приводимых схем), из [Kov22, Theorem 1.11] мы получаем, что S имеет рациональные особенности. Таким образом, $R^i\pi_*\mathscr{O}_{S'} = 0$ для $i > 0$, что влечет, что $\mathrm{H}^i(S, \mathscr{O}_S)$ изоморфно $\mathrm{H}^i(S', \mathscr{O}_{S'})$ для любого i. Мы получаем следующую коммутативную диаграмму:

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{H}^i(\mathcal{D}(S'), \mathbb{C}) & \xhookrightarrow{g} & \mathrm{H}^i(S', \mathscr{O}_S) \\ \downarrow{\scriptstyle p} & & \downarrow{\scriptstyle h} \\ \mathrm{H}^i(\mathcal{D}(S), \mathbb{C}) & & \mathrm{H}^i(S, \mathscr{O}_S) \end{array} \tag{5.9.1}$$

где h является изоморфизмом. Заметим, что p также является изоморфизмом, так как f индуцирует гомеоморфизм между $\mathcal{D}(S)$ и $\mathcal{D}(S')$. По лемме 5.9.2 отображение g является вложением. Мы заключаем, что индуцированное отображение $h \circ g \circ p^{-1}$ является вложением. Утверждение доказано. □

Следствие 5.9.4. Пусть X — трехмерное многообразие Фано с терминальными особенностями. Предположим, что пара (X, S) является lc, где $S = \sum S_i$ и $S \sim -K_X$. Тогда двойственный комплекс $\mathcal{D}(X, S)$ гомеоморфен одному из следующих топологических пространств:

1. точка,
2. интервал I,
3. сфера S^2.

Доказательство. Пусть $f\colon (\widetilde{X}, \widetilde{S}) \to (X, S)$ — $\mathbb{Q}$-факториальная dlt модификация пары (X, S), так что мы имеем

$$K_{\widetilde{X}} + \widetilde{S} = f^*(K_X + S) \sim 0.$$

Положим $S' = \widetilde{S} = \widetilde{S}^{=1}$. Обозначим через $\mathcal{D}(S')$ двойственный комплекс S', который по определению равен двойственному комплексу $\mathcal{D}(X, S)$. Предположим, что $\dim \mathcal{D}(S') = 0$. Поскольку S обилен, его носитель связен, и поэтому носитель S' также связен, следовательно, $\mathcal{D}(S')$ является точкой.

Предположим, что $\dim \mathcal{D}(S') = 1$. По основному результату [KX16] мы имеем, что $\mathcal{D}(S')$ гомеоморфен фактору окружности по конечной группе. Таким образом, $\mathcal{D}(S')$ гомеоморфен либо окружности, либо интервалу. Предположим, что $\mathcal{D}(S')$ гомеоморфен окружности S^1. Рассмотрим точную последовательность

$$0 \to \mathscr{O}_{X'}(-S') \to \mathscr{O}_{X'} \to \mathscr{O}_{S'} \to 0.$$

Поскольку X' рационально связно, мы имеем $h^i(X', \mathscr{O}_{X'}) = 0$ для $i > 0$. Используя двойственность Серра, получаем

$$h^1(X', \mathscr{O}_{X'}(-S')) = h^1(X', \mathscr{O}_{X'}(K_{X'})) = h^2(X', \mathscr{O}_{X'}) = 0.$$

Следовательно, $h^1(S', \mathscr{O}_{S'}) = 0$. Это противоречит следствию 5.9.3. Мы заключаем, что в этом случае $\mathcal{D}(S')$ гомеоморфен интервалу.

Наконец, предположим, что $\dim \mathcal{D}(S') = 2$. По [FMM22, Corollary 4] мы видим, что $\mathcal{D}(S')$ является ориентируемым псевдомногообразием без края. В размерности 2 из этого следует, что $\mathcal{D}(S')$ является замкнутой ориентируемой поверхностью. По основному результату в [KX16] мы имеем, что $\mathcal{D}(S')$ является фактором сферы S^2 по конечной группе. По классификации замкнутых ориентируемых поверхностей мы заключаем, что $\mathcal{D}(S')$ гомеоморфен сфере S^2. □

Лемма 5.9.5. *Пусть G — конечная абелева группа. Предположим, что*

- *X является многообразием $G\mathbb{Q}$-Фано размерности три, и действие G на X точно,*
- *$S \in |-K_X|$ является G-инвариантным элементом,*
- *пара (X, S) является lc, и*
- *$S = \sum S_i$ приводима.*

Тогда либо G имеет тип произведением, либо действие G на множестве $\{S_i\}$ неприводимых компонент S транзитивно.

Доказательство. Поскольку X является многообразием $G\mathbb{Q}$-Фано, мы имеем $\rho^G(X) = 1$. Если действие G на множестве неприводимых компонент $S = \sum S_i$ не транзитивно, то $S = S' + S''$, где S' и S'' являются G-инвариантными дивизорами $\mathbb{Q}$-Картье. В частности, S' и S'' пропорциональны в $\mathrm{Pic}(X)$. Отсюда следует, что пара (X, S') является lc парой Фано. Следующее рассуждение аналогично приведенному в доказательстве утверждения 5.8.1.

Рассмотрим минимальный lc-центр Z пары (X, S'). После возмущения пары G-инвариантным $\mathbb{Q}$-дивизором с малыми коэффициентами мы можем считать, что Z является единственным, и, следовательно, G-инвариантным, lc-центром lc пары Фано (X, Δ). По теореме о связности Коллара–Шокурова, Z является либо точкой, либо гладкой рациональной кривой, либо klt поверхностью дель Пеццо (хорошо известно,, что такие поверхности рациональны). В первом случае применим следствие 5.7.4, чтобы заключить, что G имеет тип произведения. В последних двух случаях применим следствие 5.3.12, чтобы заключить, что G имеет тип произведения. Утверждение доказано. □

Замечание 5.9.6. Пусть $(X, S = \sum S_i)$ — dlt пара Калаби-Яу, где $\dim X = 3$. Предположим, что конечная абелева группа G действует на (X, S) таким образом, что индуцированное действие на двойственный комплекс $\mathcal{D}(S)$ имеет неподвижную точку. Тогда существует G-инвариантная страта S. В частности, если $\dim \mathcal{D}(S) = 2$, по лемме 5.9.1 все страты D рациональны, и, следовательно, G имеет тип произведения по следствию 5.7.4 или следствию 5.3.12.

Утверждение 5.9.7. *Пусть G — конечная абелева группа. Предположим, что*

- *X является многообразием $G\mathbb{Q}$-Фано размерности три, и действие G на X точно,*
- *$S \in |-K_X|$ является приводимым G-инвариантным элементом,*
- *пара (X, S) является dlt, и*
- *двойственный комплекс $\mathcal{D}(S)$ гомеоморфен интервалу.*

Тогда G имеет тип произведения.

Доказательство. По предположению, $S = \sum S_i$ приводима, и, следовательно, S особа вдоль кривой. По лемме 5.2.9 действие G на S точно. По лемме 5.9.5 мы можем считать, что действие G на множестве компонент S транзитивно. Таким образом, S имеет только две компоненты: $S = S_1 + S_2$. Мы утверждаем, что обе поверхности S_i рациональны. Действительно, это следует из доказательства леммы 5.5.2 и того факта, что ограничение $S_i|_{S_j}$ связно по нашему предположению о $\mathcal{D}(S)$. По лемме 5.2.11 мы имеем, что G является расширением конечной абелевой подгруппы $\mathrm{Cr}_2(\mathbb{C})$ при помощи $\mathbb{Z}/2$. По утверждению 5.3.11 мы заключаем, что G имеет тип произведения. □

Утверждение 5.9.8. *Пусть G — конечная абелева группа. Предположим, что*

- *X является многообразием $G\mathbb{Q}$-Фано размерности три, и действие G на X точно,*
- *$S \in |-K_X|$ является G-инвариантным элементом,*
- *пара (X, S) является dlt, и*
- *двойственный комплекс $\mathcal{D}(S)$ гомеоморфен сфере S^2.*

Тогда G является имеет тип произведения.

Доказательство. По лемме 5.2.9 индуцированное действие G на S точно. По лемме 5.9.5 мы можем считать, что действие $\mathcal{D}(S)$ на множестве компонент S транзитивно. Обозначим через G_{S^2} образо G в группе PL-гомеоморфизмов $\mathcal{D}(S) \simeq S^2$. По лемме 5.2.3 либо G_{S^2} имеет неподвижную точку на $\mathcal{D}(S)$, либо G_{S^2} имеет орбиту длины 2 на $\mathcal{D}(S)$. В первом случае мы получаем требуемое по замечанию 5.9.6. Итак, мы можем считать, что G_{S^2} имеет орбиту длины два на $\mathcal{D}(S)$. Тогда либо G_{S^2} переставляет две вершины, либо два ребра, либо две грани $\mathcal{D}(S)$.

Предположим, что G_{S^2} переставляет две вершины $\mathcal{D}(S)$. Тогда G имеет инвариантную пару рациональных поверхностей (см. замечание 5.9.6), скажем S_1 и S_2, соответствующих этим вершинам. Поскольку действие $\mathcal{D}(S)$ на множестве компонент S транзитивно, мы имеем $S = S_1 + S_2$. По лемме 5.2.11 мы видим, что G является расширением $\mathbb{Z}/2$ при помощи конечной абелевой подгруппы $\mathrm{Cr}_2(\mathbb{C})$. По утверждению 5.3.11 G имеет тип произведения.

Предположим, что G_{S^2} переставляет два ребра $\mathcal{D}(S)$. Они соответствуют двум рациональным кривым (см. замечание 5.9.6), скажем C_1 и C_2. Поскольку (X, S) является dlt, существуют ровно 2 поверхности из S, скажем S_{11} и S_{12}, которые имеют C_1 в качестве своей граничной компоненты, и аналогично S_{21} и S_{22} имеют C_2 в качестве своей граничной компоненты. Это показывает, что G имеет $\{S_{11}, S_{12}, S_{21}, S_{22}\}$ как инвариантное множество компонент S. Поскольку действие $\mathcal{D}(S)$ на множестве компонент S транзитивно, мы имеем $S = \sum S_{ij}$. Таким образом, G_{S^2} изоморфна либо $(\mathbb{Z}/2)^2$, либо $\mathbb{Z}/4$. По лемме 5.2.11 мы имеем, что G является расширением либо $(\mathbb{Z}/2)^2$, либо $\mathbb{Z}/4$ при помощи конечной абелевой подгруппы $\mathrm{Cr}_2(\mathbb{C})$. В обоих случаях, по утверждению 5.3.11 группа G имеет тип произведения.

Наконец, предположим, что G_{S^2} переставляет две грани $\mathcal{D}(S)$. Таким образом, она переставляет две точки P_1 и P_2 на X. Каждая P_i является точкой пересечения некоторого числа компонент S. Поскольку (X, S) является dlt, мы имеем, что S является snc в окрестности P_i, и ровно 3 компоненты S пересекаются в каждой P_i. Назовем их $S_{11}, S_{12}, S_{13}, S_{21}, S_{22}$ и S_{23}. Поскольку действие $\mathcal{D}(S)$ на множестве компонент S транзитивно, мы имеем $S = \sum S_{ij}$. Таким образом, $G_{S^2} = \mathbb{Z}/6$ (см. лемму 5.2.3). По лемме 5.2.11 мы имеем, что G является расширением $\mathbb{Z}/6$ при помощи конечной абелевой подгруппы $\mathrm{Cr}_2(\mathbb{C})$. По утверждению 5.3.11 группа G имеет тип произведения. □

5.10 Приводимый антиканонический элемент: случай lc

В этом разделе мы рассматриваем случай G-инвариантного приводимого элемента $S \in |-K_X|$, такого, что пара (X, S) является lc, но не dlt. Мы изучаем индуцированное действие группы G на S. Ключевым результатом здесь является ограниченность числа компонент S, проходящих через терминальную точку на трехмерном многообразии X, см. утверждение 5.10.3.

Замечание 5.10.1. Пусть $P \in X$ — росток канонической особенности в размерности два. Предположим, что $(X, S = \sum_{i=1}^{n} S_i)$ является lc парой, такой, что $P \in S_i$ для любого i. Тогда, используя классификацию канонических особенностей на поверхностях, можно проверить, что $n \leq 2$.

Пример 5.10.2. Пусть $P \in X \subset \mathbb{C}^4$ — росток обыкновенной двойной точки,

заданный уравнением

$$x_1x_2 + x_3x_4 = 0$$

где P — начало координат в $\mathbb{C}^4$. Рассмотрим дивизор S на X, заданный уравнением $x_1x_2 = 0$. Тогда $S = S_1 + S_2 + S_3 + S_4$ имеет 4 компоненты, проходящие через P. Пара (X, S) является торической, в частности, она lc.

Утверждение 5.10.3. *Пусть $P \in X$ — росток трехмерной терминальной особенности. Пусть $(X, S = \sum_{i=1}^{n} S_i)$ — lc пара, такая, что $P \in S_i$ для любого i. Тогда $n \leq 4$.*

Доказательство. Пусть

$$\pi\colon \widetilde{P} \in \widetilde{X} \to X \ni P$$

– каноническое циклическое накрытием, описанное в разделе 5.7, и пусть $(\widetilde{X}, \widetilde{S})$ — лог прообраз пары (X, S). Мы видим, что число компонент S ограничено числом компонент $\widetilde{S}$. Поэтому мы можем считать, что $P \in X$ является горенштейновой.

Очевидно, что если X гладкое, то $n \leq 3$. Следовательно, мы можем считать, что X особо в P. Предположим, что $0 = P \in X \subset \mathbb{C}^4$ задано уравнением

$$\phi(x_1, x_2, x_3, x_4) = \sum_{i \geq 2} \phi_i(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0$$

где $\deg \phi_i = i$. Поскольку точка $P \in X$ терминальна, имеем $1 \leq \mathrm{rk}(\phi_2) \leq 4$. Рассмотрим раздутие $g\colon \widetilde{\mathbb{C}^4} \to \mathbb{C}^4$ замкнутой точки $P \in X \subset \mathbb{C}^4$ с исключительным дивизором $E \simeq \mathbb{P}^3$. Пусть Y — собственный прообраз X на $\widetilde{\mathbb{C}^4}$. Обозначим через $g\colon Y \to X$ также индуцированное раздутие X. Поскольку $K_X + S$ является дивизором $\mathbb{Q}$-Картье и K_X является дивизором Картье на X, имеем, что S является $\mathbb{Q}$-дивизором Картье, и, следовательно, дивизором Картье, см. [Kaw88, Lemma 5.1]. Обозначим через D дивизор Картье на $\mathbb{C}^4$, такой, что $D|_X = S$. Запишем

$$K_{\widetilde{\mathbb{C}^4}} = g^*K_{\mathbb{C}^4} + 3E, \qquad Y = g^*X - 2E, \qquad D' = g^*D - bE, \quad (5.10.1)$$

где D' является собственным прообразом D на $\widetilde{\mathbb{C}^4}$. Положим $E_Y = E|_Y$. Поскольку пара (X, S) является lc, для лог-дискрепантности E_Y имеем $A(E_Y, X, S) = 2 - b \geq 0$, и поэтому $b \leq 2$.

Заметим, что $E|_E = -H_E$, где H_E является гиперплоскостью на $E \simeq \mathbb{P}^3$. Запишем

$$0 = g^*D|_E = D'|_E + bE|_E = D'|_E - bH_E.$$

Мы покажем, что если $b = 1$, то $n \leq 2$. Предположим, что $b = 1$. Тогда D гладко в точке P. Мы утверждаем, что пересечение $X \cap D = S$, рассматриваемое как дивизор Картье на D, задано уравнением с ненулевым квадратичным членом в разложении вблизи P. Действительно, для лог-дискрепантности E_Y имеем

$$1 = 2 - b = A(E_Y, X, S) = A(E_Y, D, X|_D) = 3 - \mathrm{mult}_P(X|_D),$$

и поэтому $\mathrm{mult}_P(X|_D) = 2$. Следовательно, $P \in S = X|_D$, рассматриваемый как росток поверхности в гладком трехмерном пространстве D, имеет не более 2 компонент, пересекающихся в P. Это показывает, что $n \leq 2$ в этом случае.

Итак, мы можем считать, что $b = 2$, и лог прообразом пары $(\mathbb{C}^4, X + D)$ при морфизме g является пара $(\widetilde{\mathbb{C}^4}, Y + D' + E)$. По предположению, пара (X, S) является lc. По обращению присоединения следует, что $(\mathbb{C}^4, X + D)$ является lc. Следовательно, $(\widetilde{\mathbb{C}^4}, Y+D'+E)$ также является lc. Таким образом, пересечение $Y \cap D' \cap E$ не может содержать поверхность. Поэтому $D'|_Y$ равно собственному прообразу $S' = \sum S'_i$ из S на Y. Также, снова по условию lc, Y нормально вдоль $E \cap Y$, и, следовательно, Y нормально по критерию Серра. По формуле присоединения, пара $(Y, S' + E_Y)$ является lc.

Мы можем записать

$$S'|_{E_Y} = D'|_{E_Y} \sim bH_E|_{E_Y} = 2H_E|_{E_Y}.$$

Заметим, что пересечение $S'_i \cap E_Y$ является кривой для любого i. Действительно, это следует из того, что E_Y является дивизором Картье, и $S'_i \cap E_Y$ непусто для любого i, потому что $P \in S_i$ по предположению.

Поскольку S является дивизором Картье на X, имеем, что $S' = g^*S - 2E_Y$ является Картье на Y. Напомним, что пара $(Y, S' + E_Y)$ является lc, Y является горенштейновым, и оба S' и E_Y являются Картье. Отсюда следует, что Y гладко в общей точке $S' \cap E_Y$. Следовательно, две компоненты S' не могут пересекаться вдоль кривой, которая принадлежит E_Y. Таким образом, достаточно показать, что $S'|_{E_Y}$ имеет не более 4 компонент на E_Y. Мы рассматриваем четыре случая.

Случай $\mathrm{rk}(\phi_2) = 4$. Тогда $P \in X$ является обыкновенной двойной точкой, Y гладко, и E_Y изоморфно $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$. Поскольку $H_E|_{E_Y} \sim (1, 1)$, мы получаем

$$S'|_{E_Y} \sim (2, 2).$$

Поскольку $S'|_{E_Y}$ может быть разложено на не более чем 4 компоненты, отсюда следует, что S' (и S) имеет не более 4 компонент, так что $n \leq 4$.

Случай $\mathrm{rk}(\phi_2) = 3$. Тогда $P \in X$ является точкой типа cA_1^k для некоторого $k \geq 2$. Заметим, что Y либо гладко, либо особо и имеет ровно одну особенность типа cA_1. Также, E_Y изоморфно $\mathbb{P}(1,1,2)$. Поскольку $H_E|_{E_Y} \sim 2L$, где L является положительным образующим группы классов $\mathbb{P}(1,1,2)$, мы получаем

$$S'|_{E_Y} \sim 4L.$$

По формуле присоединения, пара $(E_Y, S'|_{E_Y})$ является lc. Отсюда следует, что $S'|_{E_Y}$ имеет не более 3 компонент. Следовательно, S' (и S) имеет не более 3 компонент, так что $n \leq 3$.

Случай $\mathrm{rk}(\phi_2) = 2$. Тогда $P \in X$ является точкой типа cA_k для некоторого $k \geq 2$, и E_Y приводимо: $E_Y = E_1 + E_2$, где $E_i \simeq \mathbb{P}^2$ и E_1 пересекает E_2 по прямой. Запишем

$$0 = g^*D|_{E_i} = D'|_{E_i} - 2H_E|_{E_i},$$

следовательно, $S|_{E_i} \sim 2H_E|_{E_i}$. Таким образом, ограничение S на E_i является (возможно, приводимой) коникой. Отсюда следует, что $S'|_{E_i}$ имеет не более 2 компонент. Следовательно, S' (и S) имеет не более 4 компонент, так что $n \leq 4$.

Случай $\mathrm{rk}(\phi_2) = 1$. Тогда $P \in X$ является точкой типа cD или cE, и E_Y не приведено. Мы имеем $E_Y = 2E_1$, где $E_1 \simeq \mathbb{P}^2$. Однако, это противоречит тому, что пара $(Y, S' + E_Y)$ является lc, так что этот случай не реализуется. Это завершает доказательство. □

Следствие 5.10.4. Пусть $P \in X$ — росток трехмерной терминальной особенности. Пусть $(X, S = \sum_{i=1}^4 S_i)$ — lc пара, такая, что $P \in S_i$ для любого i. Предположим, что для канонического накрытия $\pi\colon \widetilde{X} \to X$ выполнено, что $\widetilde{P} \in \widetilde{X}$ является обыкновенной двойной точкой. Тогда $P \in X$ является горенштейновой, так что $X = \widetilde{X}$ и $P \in X$ является обыкновенной двойной точкой.

Доказательство. Мы используем обозначения, как в доказательстве утверждения 5.10.3. Предположим, что $P \in X$ не является горенштейновой индекса $r > 1$. Поскольку $n = 4$, отсюда следует, что S имеет 4 компоненты,

пересекающиеся в P, и поэтому $\widetilde{S}$ имеет 4 компоненты, пересекающиеся в $\widetilde{P}$. По предположению, $\widetilde{P} \in \widetilde{X}$ является обыкновенной двойной точкой. По классификации терминальных особенностей [Re85, 6.1], для горенштейнова индекса r точки $P \in X$ имеем $r = 2$, и группа Галуа $\mathbb{Z}/2$ накрытия π переставляет две неэквивалентные образующие нормального конуса к $\widetilde{P} \in \widetilde{X}$, который изоморфен $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$. Таким образом, действие $\mathbb{Z}/2$ переставляет некоторые компоненты $\widetilde{S}$ (см. случай $\mathrm{rk}(\phi_2) = 4$ в доказательстве утверждения 5.10.3), так что число компонент S не может быть равно 4. Это противоречие показывает, что $P \in X$ является горенштейновой, и, следовательно, обыкновенной двойной точкой. □

Лемма 5.10.5. *Пусть $C = \sum_{i=1}^4 C_i$ — торическая граница на $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$. Пусть $G \subset \mathrm{Aut}(\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1, C)$ — конечная абелева группа. Предположим, что образ G в симметрической группе на множестве $\{C_i\}$ содержит цикл длины 4. Тогда либо $\mathfrak{r}(G) \leq 1$, либо $G \subset \mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/4$.*

Доказательство. Группа $\mathrm{Aut}(\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1, C)$ изоморфна $(\mathbb{C}^*)^2 \rtimes D_4$, где D_4 является диэдральной группой, действующей на компонентах C. Поскольку G абелева и ее образ в D_4 содержит элемент порядка 4, ее образ в D_4 это $\mathbb{Z}/4$. Ядро является подгруппой $\mathbb{C}^\times \times \mathbb{C}^\times$, фиксированной элементом порядка 4, заданным как $(x, y) \mapsto (y^{-1}, x)$. Таким образом, ядро циклично порядка 2. Отсюда следует, что либо $\mathfrak{r}(G) \leq 1$, либо $G \subset \mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/4$. □

До конца этого раздела мы придерживаемся следующего соглашения.

Соглашение 5.10.6. Пусть X — многообразие $G\mathbb{Q}$-Фано, где G — конечная абелева группа, которая точно действует на X. Предположим, что $S \in |-K_X|$ является G-инвариантным элементом, таким, что пара (X, S) является lc, и $S = \sum S_i$ приводима.

Утверждение 5.10.7. *Предположим, что G переставляет две точки P_1 и P_2 на X, такие, что 4 компоненты $S = \sum S_i$ пересекаются в каждой точке P_i. Предположим дополнительно, что $P_i \in X$ является обыкновенной двойной точкой. Тогда G имеет тип произведения.*

Доказательство. Пусть H — подгруппа G индекса 2, которая стабилизирует P_i, так что мы имеем точную последовательность

$$0 \to H \to G \to \mathbb{Z}/2 \to 0. \tag{5.10.2}$$

Зафиксируем $i \in \{1,2\}$. По предположению, 4 компоненты S пересекаются в P_i. Как в доказательстве утверждения 5.10.3, для раздутия $g\colon Y \to X$ точки P_i с исключительным дивизором $E_Y \simeq \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ на Y, мы имеем, что лог прообраз пары (X,S) это пара $(Y, S'+E|_Y)$, где S' является собственным прообразом S. Тогда $S'|_{E_Y}$ является приводимым дивизором на $\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1$ бистепени $(2,2)$. Мы имеем $S'|_{E_Y} = C_1+C_2+C_3+C_4$, где каждая C_i изоморфна $\mathbb{P}^1$.

Пусть $\mathcal{D}(S)$ — двойственный комплекс (X,S). Поскольку $S'|_{E_Y}$ допускает нульмерную страту, имеем, что $\mathcal{D}(S)$ имеет размерность 2. По следствию 5.9.4 мы видим, что $\mathcal{D}(S)$ гомеоморфен S^2. Пусть G_{S^2} — образ G в группе автоморфизмов двойственного комплекса $\mathcal{D}(S) \simeq S^2$. По лемме 5.9.5 мы можем считать, что действие G на множестве компонент S транзитивно. По лемме 5.2.3, мы знаем, что либо G_{S^2} изоморфна $\mathbb{Z}/n\times\mathbb{Z}/2$ для некоторого $n\geq 1$, либо $(\mathbb{Z}/2)^3$. Однако, в последнем случае действие G_{S^2} на множестве компонент S не транзитивно, потому что действие H не транзитивно на множестве $\{C_i\}$. Следовательно, H действует на множестве $\{C_i\}$ циклической перестановкой.

Рассмотрим точную последовательность

$$0 \to \mathbb{Z}/m \to H \to H_1 \to 0 \tag{5.10.3}$$

где H_1 точно действует на $\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1$, и $\mathbb{Z}/m$ для $m\geq 1$ точно действует на нормальном расслоении к E_Y. По лемме 5.10.5, либо $\mathfrak{r}(H_1)\leq 1$, либо $H_1 \subset \mathbb{Z}/2\times\mathbb{Z}/4$. Мы можем считать, что $H_1 = \mathbb{Z}/2\times\mathbb{Z}/4$, поскольку иначе $H_1 \subset \mathrm{Cr}_1(\mathbb{C})$, и поэтому по утверждению 5.3.10 и утверждению 5.3.11 мы имеем $H\subset \mathrm{Cr}_2(\mathbb{C})$ и G имеет тип произведения.

Если точная последовательность (5.10.3) расщепляется, то $H = \mathbb{Z}/2\times\mathbb{Z}/4\times\mathbb{Z}/m$. Рассматривая точную последовательность (5.10.2), мы видим, что G имеет тип произведения. Предположим, что точная последовательность (5.10.3) не расщепляется. Тогда либо $\mathfrak{r}(H)\leq 2$, так что $\mathfrak{r}(G)\leq 3$ и G имеет тип произведения, либо $H = \mathbb{Z}/2m\times(\mathbb{Z}/2)^2$, и поэтому $H\subset\mathrm{Cr}_2(\mathbb{C})$. Следовательно, G имеет тип произведения по утверждению 5.3.11. □

Утверждение 5.10.8. *Предположим, что G переставляет две точки P_1 и P_2 на X, такие, что 4 компоненты $S=\sum S_i$ пересекаются в каждой точке P_i. Предположим, что $P\in X$ является гореншетйновой, и локальное уравнение $P_i\in X$ имеет квадратичную часть ранга 2. Тогда G имеет тип произведения.*

Доказательство. Мы используем обозначения, как в доказательстве утверждения 5.10.3. Пусть H — подгруппа G индекса 2, которая стабилизирует P_i. Зафиксируем $i \in \{1, 2\}$. По предположению, 4 компоненты S пересекаются в P_i. Поскольку локальное уравнение $P_i \in X$ имеет квадратичную часть ранга 2, для раздутия $g\colon Y \to X$ точки P_i с исключительным дивизором E_Y, мы имеем $E_Y = E_1 + E_2$, где $E_i \simeq \mathbb{P}^2$.

Рассуждая как в доказательстве утверждения 5.10.3, мы имеем, что лог прообраз $(Y, S' + E_1 + E_2)$ пары (X, S) является lc, где S' является собственным прообразом S. По формуле присоединения, пара $(E_1, S'|_{E_1} + E_2|_{E_1} + D_{E_1})$ также является lc, где D_{E_1} является дифферента (на самом деле, из доказательства утверждения 5.10.3 следует, что дифферента равна 0, но нам это не нужно). Заметим, что дивизор E_1 может не быть дивизором $\mathbb{Q}$-Картье, однако, формула присоединения имеет смысл.

Как показано в доказательстве утверждения 5.10.3, E_1 и E_2 пересекаются по прямой, и $S'|_{E_1}$ является приводимой коникой, то есть объединением двух прямых. Поскольку пара $(E_1, S'|_{E_1} + E_2|_{E_1} + D_{E_1})$ является lc, эти прямые различны и не пересекаются в точке, которая принадлежит $E_1 \cap E_2$. Аналогично, $S'|_{E_1}$ является объединением двух различных прямых, точка пересечения которых не принадлежит $E_1 \cap E_2$. Положим $S' \cap E_1 = L_1 \cup L_2$ и $S' \cap E_2 = L_3 \cup L_4$. С точностью до перенумерации L_i, мы можем считать, что

$$Q_{1,2} = L_1 \cap L_2 \in E_1 \setminus E_2, \qquad Q_{3,4} = L_3 \cap L_4 \in E_2 \setminus E_1,$$

$$Q_{2,3} = L_2 \cap L_3 \in E_1 \cap E_2, \qquad Q_{1,4} = L_1 \cap L_4 \in E_1 \cap E_2.$$

По лемме 5.9.5, либо G имеет тип произведения, либо действие G на множестве компонент S транзитивно. Мы можем считать, что реализуется последний случай.

Тогда группа H действует на множестве компонент $S_1, \dots, S_4$ из S, которые пересекаются в каждой P_i, транзитивно. Пусть H_{P_i} — образ H в симметрической группе на множестве $\{S_1, \dots, S_4\}$. Заметим, что каждая S_i пересекает E_Y ровно в одной прямой L_i (см. доказательство утверждения 5.10.3). Это влечет, что H_{P_i} действует на множестве $\{L_i\}$ транзитивно. Но H сохраняет множества $\{Q_{1,2}, Q_{3,4}\}$ и $\{Q_{2,3}, Q_{1,4}\}$. Поскольку прямые L_k однозначно определяется точками $Q_{i,j}$, которые принадлежат L_k, отсюда следует, что группа H_{P_i} вкладывается в группу $\mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/2$. В частности, H_{P_i} не имеет элемента порядка 4. Таким образом, действие H_{P_i} на множестве компонент S не тран-

зитивно, что противоречит нашему предположению. Это показывает, что G имеет тип произведения. □

Следствие 5.10.9. Предположим, что G переставляет две точки P_1 и P_2 на X, такие, что 4 компоненты $S = \sum S_i$ пересекаются в каждой P_i. Предположим, что каждая $P_i \in X$ не является горенштейновой. Также предположим, что локальное уравнение $\widetilde{P}_i \in \widetilde{X}$ в $\mathbb{C}^4$ имеет квадратичную часть ранга 2. Тогда G имеет тип произведения.

Доказательство. По лемме 5.9.5, либо G имеет тип произведения, либо действие G на множестве компонент S транзитивно. Мы можем считать, что реализуется последний случай. Пусть H — подгруппа G индекса 2, которая стабилизирует P_i. Зафиксируем $i \in \{1, 2\}$. Тогда, для канонического накрытия $\widetilde{P}_i \in \widetilde{X} \to X \ni P_i$ мы имеем, что $\widetilde{P}_i \in \widetilde{X}$ является горенштейновой, и по предположению ранг квадратичной части уравнения $\widetilde{P}_i \in \widetilde{X}$ равен 2. Пусть $\widetilde{S}$ — прообраз S. Тогда $\widetilde{S}$ имеет 4 компоненты, пересекающиеся в $\widetilde{P}_i$. Заметим, что поднятие $\widetilde{H}$ группы H действует на множестве компонент $\widetilde{S}$, которые пересекаются в $\widetilde{P}_i$, транзитивно. По утверждению 5.7.12 и доказательству утверждения 5.7.14, $\widetilde{H}_2$ абелева, где $\widetilde{H}_2$ является поднятием H_2. Поскольку действие H_2 на множестве компонент S, которые пересекаются в P_i, транзитивно, то действие $\widetilde{H}_2$ на множестве компонент $\widetilde{S}$, которые пересекаются в $\widetilde{P}_i$, также транзитивно. Применяя утверждение 5.10.8 к группе $\widetilde{H}_2$, действующей на $\widetilde{P}_i \in \widetilde{X}$, мы получаем противоречие с тем, что $\widetilde{H}_2$ на множестве компонент $\widetilde{S}$, которые пересекаются в $\widetilde{P}_i$, транзитивно. Это показывает, что G имеет тип произведения. □

Утверждение 5.10.10. *Пусть G — конечная абелева группа. Предположим, что*

- *X является многообразием $G\mathbb{Q}$-Фано размерности три, и действие G на X точно,*
- *$S \in |-K_X|$ является приводимым G-инвариантным элементом,*
- *пара (X, S) является lc, но не dlt, и*
- *двойственный комплекс $\mathcal{D}(S)$ гомеоморфен сфере S^2.*

Тогда G имеет тип произведения.

Доказательство. По лемме 5.2.9 действие G на S точно. Пусть (Y, S_Y) — логразрешение пары (X, S). Пусть G_{S^2} — образ G_{S^2} в группе PL-гомеоморфизмов $\mathcal{D}(X, S) = \mathcal{D}(S_Y^{=1}) \simeq S^2$. Если индуцированное действие G_{S^2} на $\mathcal{D}(S_Y^{=1})$ имеет неподвижную точку, мы завершаем доказательство по замечанию 5.9.6, примененному к дивизору $S_Y^{=1}$ на Y. Следовательно, по лемме 5.2.3, мы можем считать, что G_{S^2} имеет орбиту длины 2 на $\mathcal{D}(S_Y^{=1})$. Тогда G_{S^2} переставляет две страты $\mathcal{D}(S_Y^{=1})$. Их образы на X являются двумя не-klt центрами C_1 и C_2 пары (X, S), которые принадлежат S.

Если $\dim C_i = 2$, то G имеет инвариантную пару рациональных поверхностей. По лемме 5.2.11 мы видим, что G является расширением конечной абелевой подгруппы $\mathrm{Cr}_2(\mathbb{C})$ при помощи $\mathbb{Z}/2$. По утверждению 5.3.11 G имеет тип произведения.

Если $\dim C_i = 1$, то G имеет инвариантную пару рациональных кривых. Поскольку пара (X, S) является lc и X имеет изолированные особенности, не более двух компонент S пересекаются вдоль общей точки каждой C_i, так что мы заключаем, что G имеет тип произведения, как в доказательстве леммы 5.9.8.

Итак, мы можем считать, что $\dim C_i = 0$. Положим $P_i = C_i$. По лемме 5.9.5 мы можем считать, что действие G_{S^2} на множестве компонент S транзитивно. Предположим, что не более 3 компонент S пересекаются в P_i. Тогда мы закончили, как в доказательстве леммы 5.9.8. По утверждению 5.10.3 не более 4 компонент S пересекаются в P_i, так что мы можем считать, что число компонент, пересекающихся в P_i, равно в точности 4. Предположим, что $P_i \in X$ является горенштейновой. По доказательству утверждения 5.10.3 мы имеем два случая: ранг квадратичной части уравнения $P_i \in X$ равен либо 4, либо 2. В первом случае G имеет тип произведения по утверждению 5.10.7. Во втором случае утверждение 5.10.8 показывает, что G имеет тип произведения. Предположим, что $P_i \in X$ не является горенштейновой. Тогда следствие 5.10.4 и следствие 5.10.9 показывают, что G имеет тип произведения. Это завершает доказательство. □

Утверждение 5.10.11. *Пусть G — конечная абелева группа. Предположим, что*

- *X является многообразием $G\mathbb{Q}$-Фано размерности три, и действие G на X точно,*

- $S \in |-K_X|$ *является приводимым* G*-инвариантным элементом,*
- *пара* (X, S) *является lc и не dlt, и*
- *двойственный комплекс* $\mathcal{D}(S)$ *гомеоморфен интервалу.*

Тогда G *имеет тип произведения.*

Доказательство. Пусть (Y, S_Y) — лог-разрешение пары (X, S). Тогда $\mathcal{D}(X, S) = \mathcal{D}(S_Y^{=1})$ гомеоморфен интервалу. Положим $S_Y^{=1} = \sum S_i'$. Концы этого интервала соответствуют рациональным поверхностям, в то время как точки в середине соответствуют поверхностям, которые бирационально линейчаты над эллиптической кривой. По лемме 5.9.5 мы можем считать, что действие G на множестве компонент S транзитивно. Отсюда следует, что индуцированное действие G на $\mathcal{D}(S_Y^{=1})$ нетривиально, так что G действует на $\mathcal{D}(S_Y^{=1})$ инволюцией.

Следовательно, S имеет только две компоненты: $S = S_1 + S_2$. Если обе S_i рациональны, то мы закончили, как в доказательстве утверждения 5.9.7. Следовательно, мы можем считать, что каждая S_i бирационально линейчата над эллиптической кривой. Рассмотрим пересечение $C = S_1 \cap S_2$. Поскольку S является коэн-маколеевой, мы имеем $\dim C = 1$, так что это кривая. По формуле присоединения мы имеем, что C либо рациональна, либо эллиптична. В первом случае мы закончили по следствию 5.3.12. Поэтому мы можем считать, что C является эллиптической кривой.

Предположим, что каждая S_i нормальна. Рассуждая как в доказательстве утверждения 5.8.5 мы видим, что каждая S_i имеет простую эллиптическую особенность $P_i \in S_i$. Заметим, что точки P_i не принадлежат пересечению $P_1 \cap P_2$. Пусть H — подгруппа индекса 2 в G, которая стабилизирует каждую S_i. Пусть E_i — прообраз $P_i \in S$ в минимальном разрешении, на котором также действует группа H. Тогда по утверждению 5.8.8 и утверждению 5.8.9 мы видим, что E_i имеет H-орбиту длины не более 7. Заметим, что $E_i \simeq C$, поскольку обе кривые совпадают с образом отображения Альбанезе на минимальном разрешении S_i. Более того, этот изоморфизм H-эквивариантен. Мы обозначим через G_C образ G в группе автоморфизмов E_i. Применяя утверждение 5.4.2 мы видим, что либо $\mathfrak{r}(G_C) \leq 1$, либо G_C содержится в одной из следующих групп:

$$(\mathbb{Z}/3)^2, \qquad (\mathbb{Z}/2)^3, \qquad \mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/4. \tag{5.10.4}$$

Рассматривая действие G на нормальном расслоении к C, мы видим, что либо G имеет тип произведения, либо G является расширением G_C при помощи подгруппу $\mathbb{Z}/n\times\mathbb{Z}/2$ для некоторого $n \geq 1$ (напомним, что G переставляет S_1 и S_2). Используя теорему 5.3.5 и рассматривая все возможные расширения, мы заключаем, что G имеет тип произведения.

Теперь предположим, что S_i не нормальна. Тогда она особа вдоль кривой C_i'. Заметим, что $C_i' \neq C$. Действительно, это следует из того, что пара (X, S) является lc и S_i является Картье в общей точке C. Обозначим морфизм нормализации $\nu_i\colon \widetilde{S}_i \to S_i$. Пусть $\widetilde{C}_i$ — прообраз C_i' посредством отображения ν_i. Тогда $\widetilde{C}_i$ является эллиптической кривой (см. доказательство леммы 5.5.2), и ограничение $\nu_i|_{\widetilde{C}_i}\colon \widetilde{C}_i \to C_i'$ имеет степень 2. Также заметим, что группа H действует на S, сохраняя C_i', и, следовательно, H действует на $\widetilde{S}_i$, сохраняя $\widetilde{C}_i$. Предположим, что кривая C_i' рациональна (и, возможно, особа). Тогда C_i' имеет H-инвариантное множество точек мощности не более 2 (применим лемму 5.4.1 к нормализации C_i'). Таким образом, $\widetilde{C}_i$ имеет H-инвариантное множество точек мощности не более 4.

Если C_i' является эллиптической кривой, мы утверждаем, что образ рациональных компонент $S_Y^{=1}$ при отображении $Y \to X$ имеет размерность 0. Действительно, если он имеет размерность 1, без потери общности мы можем считать, что образ рациональной компоненты содержится в $C_1' \cup C_2'$, что невозможно, так как C_i' являются эллиптическими кривыми. Таким образом, C_i' имеет H-неподвижную точку. Мы заключаем, что в любом случае $\widetilde{C}_i$ имеет H-инвариантное множество точек мощности не более 4. Применяя утверждение 5.4.2 мы видим, что либо G имеет тип произведения, либо группа G_C, определенная выше, принадлежит одной из трех групп, как в (5.10.4). Рассматривая действие G на нормальном расслоении к C, мы видим, что либо G имеет тип произведения, либо G является расширением G_C при помощи подгруппы $\mathbb{Z}/n\times\mathbb{Z}/2$ для некоторого $n \geq 1$ (напомним, что G переставляет S_1 и S_2). Используя теорему 5.3.5 и рассматривая все возможные расширения, мы заключаем, что G имеет тип произведения. □

5.11 Абелевы группы типа K3

В этом разделе мы работаем с конечными абелевыми группами типа K3. Напомним, что под поверхностью K3 мы понимаем нормальную проективную

поверхность S с не хуже чем каноническими (то есть, 1-lc) особенностями, такую, что $\mathrm{H}^1(S, \mathscr{O}_S) = 0$ и $K_S \sim 0$.

Определение 5.11.1. Конечная абелева подгруппа G называется *группой типа K3*, если G является расширением вида

$$0 \to K \to G \to H \to 0$$

где H является конечной абелевой группой, которая точно действует на поверхности K3, и $K = \mathbb{Z}/m$ для некоторого $m \geq 1$.

Пусть X — многообразие $G\mathbb{Q}$-Фано, где G является конечной абелевой группой, и G действует на X точно. Предположим, что существует G-инвариантный элемент $S \in |-K_X|$, который является поверхностью K3 с не хуже чем каноническими особенностями. Рассмотрим следующую точную последовательность

$$0 \to K \to G \to H \to 0$$

где $H \subset \mathrm{Aut}(S)$, и K фиксирует S поточечно. Заметим, что $K = \mathbb{Z}/m$ для некоторого $m \geq 1$ (см. следствие 5.2.10). В частности, группа G является группой типа K3. Рассмотрим фактор $Y = X/K$ и пусть $f\colon X \to Y$ — естественная проекция.

Лемма 5.11.2. *Предположим, что K нетривиальна. Тогда действие K свободно в коразмерности 1 вне S. Следовательно, дивизориальная часть ветвления морфизма f совпадает с S.*

Доказательство. Пусть K' — нетривиальная подгруппа K. Предположим, существует K'-неподвижный дивизор D, такой, что $D \neq S$. Тогда K' фиксирует $S \cup D$ поточечно. Поскольку S обилен, мы имеем $S \cap D \neq \emptyset$. Поскольку S является дивизором $\mathbb{Q}$-Картье, существует кривая $C \subset S \cap D$. В общей точке C многообразие X гладко, так что касательное пространство к $S \cup D$ в некоторой точке $P \in C$ совпадает с касательным пространством к X. Однако, это противоречит лемме 5.2.7, примененной к группе K'. □

Утверждение 5.11.3. *Трехмерное многообразие $Y = X/K$ является $H\mathbb{Q}$-факториальным многообразием Фано с не хуже чем каноническими особенностями. Более того, Y является терминальным вблизи $f(S)$, и $-K_Y \sim mB$ для некоторого $B \in \mathrm{Cl}(Y)$.*

Доказательство. Напомним, что $K = \mathbb{Z}/m$ для некоторого $m \geq 1$. Мы можем считать, что $m > 1$. Сначала мы покажем, что Y является $H\mathbb{Q}$-факториальным. Действительно, это следует из того, что

$$\mathrm{Cl}(Y) \otimes \mathbb{Q} = (\mathrm{Cl}(X) \otimes \mathbb{Q})^K$$

и, следовательно,

$$(\mathrm{Cl}(Y) \otimes \mathbb{Q})^H = (\mathrm{Cl}(X) \otimes \mathbb{Q})^G = (\mathrm{Pic}(X) \otimes \mathbb{Q})^G.$$

Положим $D = f(S)$. Поскольку K фиксирует S поточечно, мы имеем $S \simeq D$. Формула Гурвица дает

$$0 \sim K_X + S = f^*(K_Y + D),$$

и, следовательно, $m(K_Y + D) \sim 0$. Заметим, что Y является многообразием Фано с klt особенностями. По обращению присоединения пара (Y, D) является plt. Заметим, что дивизор D является $\mathbb{Q}$-Картье. Мы покажем, что на самом деле $T = K_Y + D \sim 0$. Действительно, предположим, что $T \not\sim 0$. Мы имеем $mT \sim 0$ для $m > 1$. Рассмотрим точную последовательность (см. [KM98, 5.25])

$$0 \to \mathscr{O}_Y(T - D) \to \mathscr{O}_Y(T) \to \mathscr{O}_D(T) \to 0.$$

По теореме Каваматы-Фивега о занулении мы имеем $\mathrm{H}^1(Y, \mathscr{O}_Y(T - D)) = \mathrm{H}^1(Y, \mathscr{O}_Y(K_X)) = 0$. Поскольку $\mathrm{H}^0(Y, \mathscr{O}(T)) = 0$, мы выводим, что $\mathrm{H}^0(D, \mathscr{O}(T)) = 0$. Таким образом, T ограничивается D как дивизор кручения. Однако, мы утверждаем, что T не может быть элементом кручения в $\mathrm{H}^2(D, \mathbb{Z})$. Действительно, поскольку D является дювалевской поверхностью K3, отсюда следует, что $K_S \sim 0$.

Мы показали, что $-K_Y \sim D$. Мы утверждаем, что Y имеет терминальные особенности вблизи S. Действительно, поскольку $K_Y + D$ линейно тривиально, дискрепантности относительно $K_Y + D$ целые, и поскольку (Y, D) является plt, отсюда следует, что они неотрицательны. Следовательно, вблизи S многообразие Y имеет терминальные особенности.

Мы утверждаем, что существует дивизор Вейля B, такой, что $mB \sim D$. Действительно, пусть Y^0 — гладкий локус Y, и пусть X^0 — его прообраз при отображении f. Мы обозначим соответствующее отображение как $f^0 \colon X^0 \to Y^0$. Положим $D^0 = D \cap Y^0$. Тогда, применяя [?, Theorem 1.2], мы видим, что существует элемент $B^0 \in \mathrm{Pic}(Y^0)$, такой, что $mB^0 \sim D^0$. Поскольку $\mathrm{Pic}(Y^0) =$

$\mathrm{Cl}(Y^0) = \mathrm{Cl}(Y)$, мы видим, что $mB \sim D$, где B является замыканием B^0 в Y. Следовательно, $-K_Y \sim D \sim mB$. Доказательство завершено. □

Замечание 5.11.4. В вышеприведенных обозначениях, если Y терминально (это выполняется, например, если действие H свободно вне S), то по [**?**] мы имеем $m \leq 19$. В общем случае, по [JL25] мы имеем $m \leq 66$.

Пример 5.11.5. Рассмотрим некоторые примеры действий групп типа K3 на многообразиях Фано, являющихся гиперповерхностями во взвешенных проективных пространствах. Заметим, что в этих примерах группа G не имеет тип произведениями.

1. Пусть X — гиперповерхность степени 4 в $\mathbb{P}^4$, заданная уравнением
$$x_0^4 + x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 + x_4^4 = 0,$$
с диагональным действием группы $G = (\mathbb{Z}/4)^4$.

2. Пусть X — гиперповерхность степени 8 в $\mathbb{P}(1,1,1,2,4)$, заданная уравнением
$$x_0^8 + x_1^8 + x_2^8 + x_3^4 + x_4^2 = 0,$$
с диагональным действием группы $G = (\mathbb{Z}/8)^2 \times \mathbb{Z}/4 \times \mathbb{Z}/2$.

3. Пусть X — гиперповерхность степени 6 в $\mathbb{P}(1,1,1,2,2)$ заданной уравнением
$$x_0^6 + x_1^6 + x_2^6 + x_3^3 + x_4^3 = 0,$$
с диагональным действием группы $G = (\mathbb{Z}/6)^2 \times (\mathbb{Z}/3)^2$.

4. Пусть X — гиперповерхность степени 6 в $\mathbb{P}(1,1,1,1,3)$ заданной уравнением
$$x_0^6 + x_1^6 + x_2^6 + x_3^6 + x_4^2 = 0,$$
с диагональным действием группы $G = (\mathbb{Z}/6)^3 \times \mathbb{Z}/2$.

5.12 Доказательство основных результатов

Доказательство теоремы 5.1.10. Пусть X — трехмерное рационально связное многообразие, и пусть G — конечная абелева группа такая, что $G \subset \mathrm{Bir}(X)$. Переходя к G-эквивариантному разрешению особенностей, мы можем считать, что X гладкое и проективное, и что $G \subset \mathrm{Aut}(X)$. Запустим G-эквивариантную программу минимальных моделей, которая завершается на $G\mathbb{Q}$-расслоении Мори $\pi\colon X' \to Z$. Если $\dim Z > 0$, то по следствию 5.3.14 мы заключаем, что G имеет тип произведения. Поэтому мы можем с самого начала считать, что $X = X'$ является многообразием $G\mathbb{Q}$-Фано размерности три, и $G \subset \mathrm{Aut(X)}$.

Рассмотрим линейную систему $|-K_X|$. Если она пуста, мы находимся в последнем случае теоремы 5.1.10. Поэтому мы можем считать, что $|-K_X|$ непуста. Поскольку группа G действует на $\mathrm{H}^0(X, \mathscr{O}(-K_X))$ и G абелева, существует G-инвариантный элемент $S \in |-K_X|$. Мы анализируем особенности пары (X, S). По утверждению 5.8.1 если пара (X, S) не является lc, то G имеет тип произведения. Поэтому мы можем считать, что (X, S) является lc. По утверждению 5.8.2 если (X, S) является plt, то G является типа K3, и мы находимся во втором случае теоремы 5.1.10. Поэтому мы можем считать, что (X, S) не является plt.

Предположим, что (X, S) строго lc и S неприводима. По утверждению 5.8.4 мы имеем, что либо G имеет тип произведения, либо S нормальна. Следовательно, мы можем считать, что S нормальна. Аналогично, по утверждению 5.8.5 мы можем считать, что S имеет две простые эллиптические особенности P_1 и P_2, переставляемые G. Пусть H — подгруппа индекса 2 в G, которая стабилизирует P_i. Из редложения 5.8.8 и утверждения 5.8.9 следует, что исключительная эллиптическая кривая E_i над $P_i \in S$ имеет H-орбиту длины не более 7. Мы обозначим через H_E образ H в группе автоморфизмов E_i. Следствие 5.8.10 показывает, что либо $\mathfrak{r}(H_E) \leq 3$, либо H_E принадлежит списку из 3 групп. Если $\mathfrak{r}(H_E) \leq 3$, то G имеет тип произведения по следствию 5.8.13. Затем мы показываем, что G имеет тип произведения в 3 исключительных случаях. Это сделано в утверждении 5.8.15, утверждении 5.8.16, утверждении 5.8.17 и следствии 5.8.18.

Предположим, что (X, S) является dlt и S приводима. Тогда по следствию 5.9.4 двойственный комплекс S является либо интервалом, либо сферой S^2

(случай точки невозможен, поскольку мы предполагаем, что S приводима). Применяя утверждение 5.9.7 в первом случае и утверждение 5.9.8 во втором случае, мы заключаем, что G имеет тип произведения.

Наконец, предположим, что (X, S) строго lc и S приводима. По следствию 5.9.4 двойственный комплекс S является либо интервалом, либо сферой S^2. Применяя утверждение 5.10.11 в первом случае и утверждение 5.10.10 во втором случае, мы заключаем, что G имеет тип произведения. Теорема доказана. □

Доказательство утверждения 5.1.12. Следует из леммы 5.11.2, утверждения 5.11.3 и замечания 5.11.4. □

Наконец, утверждение 5.1.14 совпадает с утверждением 5.3.11.

Глава 6

Ограниченность слоев в расслоениях на многообразия Фано

6.1 Введение

В этой главе работаем над алгебраически замкнутым полем $\Bbbk$ характеристики 0. Известно, что гладкая поверхность дель Пеццо, являющая рациональной над $\Bbbk$, может вырождаться в нерациональную особую поверхность дель Пеццо. В качестве примера можно рассмотреть гладкую гиперповерхность степени 3 в $\mathbb{P}^3$, являющуюся гладкой поверхностью дель Пеццо, которая вырождается в конус над эллиптической кривой, являющийся нерациональной особой поверхностью дель Пеццо. Это происходит потому, что вырождение имеет лог канонические (lc), но не лог терминальные (klt) особенности.

Цель этой главы — исследовать этот феномен более глубоко. Точнее, мы рассматриваем расслоения Фано на трехмерных многообразиях и хотим понять, насколько компоненты его специальных слоев могут быть далеки от рациональности. В отличие от рассмотренного выше примера, мы допускаем, что специальные слои могут быть неприведенными и приводимыми.

Пусть $f\colon X \to Z$ — klt расслоение Фано, то есть f — стягивание, X имеет klt особенности, и $-K_X$ обилен над Z. Под стягиванием мы понимаем проективный морфизм со связными слоями. Пусть F — слой f (над замкнутой точкой), и пусть F_{red} обозначает F с приведенной структурой. Обозначим его

неприводимые компоненты через F_i. Тогда F_{red} рационально цепно связно; более того, если F — общий слой, то $F = F_{\mathrm{red}}$ рационально связно [Zh06][HM07]. Мы рассматриваем специальные слои и хотим понять, насколько компоненты F_i далеки от рациональности. Так как F_{red} рационально цепно связно, то F_i унирациональны.

В этой главе мы рассматриваем случай, когда X — трехмерное многообразие и $\dim Z > 0$. Таким образом, f либо бирационально, либо является расслоением на коники, либо расслоением на поверхности дель Пеццо. Если F_i — точка, то здесь нечего обсуждать. Если F_i — кривая, то это рациональная кривая. Поэтому мы естественным образом сосредотачиваемся на случае, когда F_i — поверхность; в этом случае F_i бирациональна $\mathbb{P}^1 \times C_i$ для некоторой гладкой проективной кривой C_i. Вопрос тогда заключается в том, насколько C_i далека от рациональности. Один из способов измерить это — оценить род C_i. Другой способ — оценить ее гональность.

В простейшем случае, то есть когда X гладкое (или, более общо, терминальное горенштейново) и $X \to Z$ — расслоение на поверхности дель Пеццо, и F неприводим, можно легко показать, что F, который в этом случае автоматически приведен, либо рационален, либо изоморфен обобщенному конусу над эллиптической кривой (см. [Lo19, 1.3]). Другими словами, F бирационально $\mathbb{P}^1 \times C$, где C — либо гладкая рациональная кривая, либо эллиптическая кривая. Более того, можно описать локальную структуру таких расслоений в окрестности нерациональных слоев. Оказывается, что ростки таких расслоений с очень слабыми особенностями и нерациональным неприводимым специальным слоем находятся во взаимно однозначном соответствии с ростками гладких расслоений дель Пеццо, допускающих действие циклической группы, см. [Lo19, 2.4, 3.4]. Это показывает, что нерациональные слои терминальных горенштейновых расслоений дель Пеццо образуют очень ограниченный класс. С другой стороны, если мы разрешим X иметь произвольные klt особенности, то как род, так и гональность C могут быть сколь угодно большими, см. пример 6.2.1.

Связанная проблема рассматривалась в [BCDP22]. Там авторы изучали группы бирациональных автоморфизмов фиксированного проективного трехмерного многообразия X. Более точно, они изучали бирациональный тип поверхностей, стягиваемых при этих автоморфизмах. Такие поверхности бирациональны $\mathbb{P}^1 \times C$. Доказано, что род C неограничен тогда и только тогда,

когда X бирационально расслоению на коники или расслоению, общий слой которого является поверхностью дель Пеццо степени 3. Аналогично, гональность кривой неограниченна тогда и только тогда, когда X бирационально расслоению на коники. В [BCDP22, 4.6] предлагается следующий вопрос: существует ли целое число $g \geq 1$ такое, что для каждого трехмерного расслоения Мори $X \to Z$ над гладкой кривой приведенный слой бирационален $\mathbb{P}^1 \times C$ для некоторой кривой C рода (соответственно гональности) не выше g? В [BCDP22] авторы предполагают, что X имеет не более чем терминальные $\mathbb{Q}$-факториальные особенности (в этой статье мы работаем с расслоениями Мори с klt особенностями, см. 6.3.3).

Существуют и другие способы измерить, насколько данное алгебраическое многообразие далеко от рационального, см. [BPELU17].

Наш первый общий результат касается нерациональности слоев в расслоениях дель Пеццо.

Теорема 6.1.1. *Зафиксируем положительное вещественное число t. Предположим, что $f\colon X \to Z$ — klt расслоение Фано, где $\dim X = 3$ и $\dim Z = 1$. Предположим, что F — неприводимый слой и что (X, tF_{red}) является lc. Тогда*

1. *F_{red} бирационально $\mathbb{P}^1 \times C$, где C — гладкая проективная кривая с гональностью $\mathrm{gon}(C)$, ограниченной в зависимости только от t;*
2. *если $t > \frac{1}{2}$, то род $g(C)$ ограничен;*
3. *если $t = 1$, то род $g(C) \leq 1$.*

Мы увидим ниже в примере 6.2.1 что без предположения, что (X, tF_{red}) является lc, как $g(C)$, так и $\mathrm{gon}(C)$ могут быть сколь угодно большими. В примере 6.2.3 мы увидим, что даже предполагая, что (X, tF_{red}) является lc, $g(C)$ может быть сколь угодно большим, когда $t \leq \frac{1}{2}$.

Теорема 6.1.1 особенно полезна для расслоений Фано с хорошими особенностями. Действительно, если $X \to Z$ — расслоение Фано с трехмерного многообразия на гладкую кривую, где X имеет ϵ-lc особенности при $\epsilon > 0$ (например, терминальные или канонические особенности), то гипотеза Шокурова (см. [B16]) предсказывает, что (X, tF) является lc для любого слоя F и для некоторого $t > 0$, зависящего только от ϵ. В частности, если F

неприводим, то теорема 6.1.1 утверждает, что в этом случае (при условии гипотезы Шокурова) F_{red} бирациональна $\mathbb{P}^1 \times C$, где C — гладкая проективная кривая с гональностью, ограниченной в зависимости только от ϵ. В частности, гипотеза Шокурова влечет, что вопрос из [BCDP22], упомянутый выше, имеет положительный ответ в том смысле, что соответствующая гональность ограничена, поскольку в их случае тотальное пространство расслоения имеет терминальные особенности.

Случай (iii) теоремы 6.1.1 намного проще других случаев. Мы наметим его доказательство здесь. По предположению, $t = 1$ и (X, F_{red}) является lc. Пусть S — нормализация F_{red}. По формуле присоединения мы можем записать $K_S + \Delta_S = (K_X + F_{\mathrm{red}})|_S$, где (S, Δ_S) — lc пара Фано, потому что $-K_X$ обилен над Z и F_{red} численно тривиален над Z, так как F неприводим. Если (S, Δ_S) является klt, то S рациональна по [Zh06]. Следовательно, мы можем предполагать, что эта пара не является klt. Мы имеем

$$K_S + \Delta_S + H \sim_{\mathbb{Q}} 0$$

для некоторого обильного $\mathbb{Q}$-дивизора H такого, что $(S, \Delta_S + H)$ является lc. Таким образом, $(S, \Delta_S + H)$ — lc пара Калаби–Яу размерности 2. Остальная часть доказательства получается рассмотрением ее dlt модели и применением ПММ, см. лемму 6.4.1.

Теорема 6.1.1 является следствием следующего, гораздо более общего утверждения, в котором мы разрешаем слоям быть неприведенными и приводимыми, Z может быть кривой, поверхностью или трехмерным многообразием, и мы работаем с парами Фано.

По определению, *dlt расслоение Фано* $f\colon (X, B) \to Z$ состоит из dlt пары (X, B) и стягивания $f\colon X \to Z$ такого, что $-(K_X + B)$ обилен над Z.

Теорема 6.1.2. *Зафиксируем положительное вещественное число t. Предположим, что $f\colon (X, B) \to Z$ — dlt расслоение Фано, где $\dim X = 3$ и $\dim Z \geq 1$. Предположим, что D — компонента B с коэффициентом $\geq t$, стягиваемая в точку на Z. Тогда*

1. *D бирационально $\mathbb{P}^1 \times C$, где C — гладкая проективная кривая с гональностью $\operatorname{gon}(C)$, ограниченной в зависимости только от t;*
2. *если $t > \frac{1}{2}$, то род $g(C)$ ограничен в зависимости только от t;*
3. *если $t = 1$, то $g(C) \leq 1$.*

Теперь переформулируем теорему на языке расслоений Калаби–Яу (как в [B18]), что более удобно для доказательств и помещает обсуждаемые проблемы в более общий контекст.

Теорема 6.1.3. *Зафиксируем положительное вещественное число t. Предположим, что $(X, B) \to Z$ — расслоение Калаби–Яу типа Фано, где $\dim X = 3$ и $\dim Z \geq 1$. Предположим, что D — компонента B с коэффициентом $\geq t$, стягиваемая в точку на Z. Тогда*

1. *D бирационально $\mathbb{P}^1 \times C$, где C — гладкая проективная кривая с гональностью $\operatorname{gon}(C)$, ограниченной в зависимости только от t;*
2. *если $t > \frac{1}{2}$, то род $g(C)$ ограничен в зависимости только от t;*
3. *если $t = 1$, то $g(C) \leq 1$.*

Свойство типа Фано важно; действительно, взяв гладкое семейство поверхностей K3 над кривой, можно видеть, что уже (i) не выполняется, поскольку слои в таком семействе не унирациональны. Однако даже без свойства типа Фано мы ожидаем некоторого хорошего поведения нерациональности.

Интересный частный случай теоремы — когда мы начинаем с klt пары (Z, B_Z) размерности 3 и спрашиваем, какие дивизоры появляются на разрешениях особенностей пары. Точнее, предположим, что $\phi\colon W \to Z$ — лог разрешение, и запишем $K_W + B_W = \phi^*(K_Z + B_Z)$. Пусть D — простой дивизор на W, стягиваемый в точку на Z. Можно показать, что D унирационален, например, запустив подходящую ПММ над Z, поэтому D бирационален $\mathbb{P}^1 \times C$, где C — гладкая проективная кривая. Вопрос, как и ранее, заключается в том, ограничена ли гональность C (или ее род). Теорема 6.1.3 говорит, что гональность ограничена, если для коэффициента D в B_W выполнено $\geq t$ для некоторого фиксированного $t > 0$, и что род ограничен, если коэффициент $> \frac{1}{2}$. Действительно, запустив подходящую ПММ, мы получим модель $X \to Z$, на которой $B \geq 0$, где B — собственный прообраз B_W, и D не стягивается над X, так что мы можем применить теорему к $(X, B) \to Z$, который является расслоением Калаби–Яу типа Фано. С другой стороны, если коэффициент D в B_W слишком мал или отрицателен, то в общем случае гональность C не ограничена.

Случай, который мы не рассматривали в этой статье, — "глобальный" случай трехмерного многообразия типа Фано. То есть случай, когда (X, B) —

проективная пара Калаби–Яу типа Фано размерности 3, и D — компонента B с коэффициентом $\geq t$, где $t > 0$ фиксировано. В отличие от относительного случая, рассмотренного выше, D не обязательно унирациональна. Но это не конец истории. Например, если $X = \mathbb{P}^3$ или любое многообразие Фано в ограниченном семействе, то D принадлежит ограниченному семейству. В частности, степень иррациональности D ограничена, где степень иррациональности многообразия D определяется как наименьшая возможная степень доминирующих рациональных отображений $D \dashrightarrow \mathbb{P}^{\dim D}$. Это понятие обобщает понятие гональности на высшие размерности. Следующий вопрос помещает приведенные выше частные случаи в общий контекст.

Вопрос 6.1.4. Зафиксируем положительное вещественное число $t > 0$ и натуральное число d. Предположим, что $f\colon (X, B) \to Z$ — расслоение Калаби–Яу типа Фано, где $\dim X = d$. Предположим, что D — компонента B с коэффициентом $\geq t$, стягиваемая в точку на Z. Верно ли, что существует рациональное отображение $D \dashrightarrow C$, чьи общие слои рационально связны, а C — гладкое проективное многообразие с ограниченной степенью иррациональности?

Без предположения типа Фано ответ на этот вопрос ожидается отрицательным. Например, предполагается, что степень иррациональности поверхностей K3 F не ограничена, см. гипотезу 4.2 в [BPELU17], но они появляются как слои расслоения Калаби–Яу $F \times Z \to Z$, где морфизм — проекция, а Z — гладкая кривая.

С другой стороны, можно изменить вопрос и заменить степень иррациональности C на ее покрывающую гональность, которая определяется как наименьшая гональность покрывающих семейств кривых на C. Покрывающая гональность поверхностей K3 и абелевых поверхностей равна 2 (см. [BPELU17] и ссылки там).

В этом вопросе, даже если D не стягивается в точку, можно ожидать некоторых хороших свойств общих слоев $D \to f(D)$. Частный случай этого наблюдения ключевую роль в наших доказательствах, см. 6.5.5.

Наконец, следующий результат является аналогом теоремы 6.1.3 в размерности 2. Здесь мы также разрешаем случай $\dim Z = 0$ и не предполагаем свойства типа Фано.

Теорема 6.1.5. *Пусть ι — положительное вещественное число. Пусть $(S, \Delta) \to Z$ — расслоение Калаби–Яу, где S имеет размерность 2. Пред-*

положим, что коэффициент компоненты D в Δ не меньше u, и что D стягивается в точку на Z. Тогда

1. *гональность D ограничена в зависимости только от u,*
2. *если $u > \frac{1}{2}$, то род $g(D^\nu)$ нормализации D^ν кривой D ограничен в зависимости только от u,*
3. *если $u = 1$, то $g(D^\nu) \leq 1$,*
4. *если $\dim Z \geq 1$, то $g(D^\nu) \leq 1$.*

Мы также дадим точные оценки для гональности и рода в теореме; более точно, мы покажем, что $\operatorname{gon}(D) \leq 3/u - 1$, и в случае $u > 1/2$ мы покажем, что $g(D^\nu) \leq \frac{1}{u-1/2} - 1$. Для более подробной информации см. предложение 6.4.4.

6.2 Примеры

В этом разделе мы приводим несколько примеров, чтобы показать, что происходит, если мы опускаем некоторые условия основных результатов.

Пример 6.2.1. Покажем, что теорема 6.1.1 не выполняется без предположения, что (X, tF_{red}) является lc (и аналогично теорема 6.1.2 не выполняется без предположения, что коэффициент D в B не меньше t). Пусть $X' = \mathbb{P}^2 \times Z \to Z$, где Z — гладкая кривая, а морфизм — проекция. Пусть F' — слой над замкнутой точкой z. Возьмем общий обильный дивизор $H' \geq 0$ на X', не содержащий F', так что $H'|_{F'}$ — гладкая кривая C'. Рассмотрим $B' = aF' + bH'$, где $a < 1$ близко к 1, но b мало, так что $a + b > 1$, (X', B') является klt, и $-(K_{X'} + B')$ обилен над Z. Чем больше $\deg C'$, тем меньше должно быть b, чтобы обеспечить обильность $-(K_{X'} + B')$ над Z. Предположим, что $X'' \to X'$ — раздутие X' вдоль C', и F'' — исключительный дивизор. Пусть $K_{X''} + B''$ — прообраз $K_{X'} + B'$. Тогда коэффициент F'' в B'' равен $a + b - 1$, следовательно, он положителен. Таким образом, X'' является многообразием типа Фано над Z с относительным числом Пикара 2, поэтому, запустив ПММ на $-F''$, мы стянем бирациональный образ F' и получим модель X/Z с относительным числом Пикара 1. Следовательно, $X \to Z$ — klt расслоение Фано, так как $-K_X$ обилен на общих слоях $X \to Z$. Свойство klt следует из того,

что существует $\Delta' \geq B'$ такой, что (X', Δ') является klt и $K_{X'} + \Delta' \equiv 0/Z$. Пусть B, F — прообразы B'', F'' соответственно. Тогда слой $X \to Z$ над z — это в точности F. По построению, F бирационально F'', который, в свою очередь, бирационален $\mathbb{P}^1 \times C'$. Однако, гональность (и, следовательно, род) C' не ограничена, так как $\deg C'$ не ограничен. Заметим, что чем больше $\deg C'$, тем меньше b, и тем меньше коэффициент F в B.

Пример 6.2.2. Мы можем построить похожие примеры, когда $X \to Z$ бирационально. Действительно, выберем гладкое трехмерное многообразие Z, пусть $X' \to Z$ — раздутие в гладкой точке с исключительным дивизором F', затем раздуем кривую в F' и продолжим, как в предыдущем примере, стягивая собственный прообраз F' и т. д.

Пример 6.2.3. Этот пример показывает, что если в теореме 6.1.1 (и аналогично в 6.1.3, которая является переформулировкой 6.1.2) мы возьмем $t \leq \frac{1}{2}$, то в общем случае мы не можем ограничить род C, хотя гональность будет ограничена. Рассмотрим klt расслоение Фано

$$X' = \mathbb{P}(1, 1, n) \times Z \to Z,$$

где Z — гладкая кривая, $\mathbb{P}(1, 1, n)$ — взвешенное проективное пространство, морфизм — проекция, и $n \geq 3$. Выберем замкнутую точку $z \in Z$ и пусть F' — слой над z. Существует гиперэллиптическая кривая C' рода $g = n - 1$, лежащая в гладком локусе слоя F', такая что $-(K_{F'} + \frac{1}{2}C')$ обилен (см. пример 6.4.3). Пусть H' — прообраз C' при проекции $X' \to F'$. Тогда

$$(X', B' := F' + \frac{1}{2}H')$$

является plt (применяя обращение присоединения в ограничении на F') и $-(K_{X'} + B')$ обилен над Z. Пусть $X'' \to X'$ — раздутие X' вдоль C' с исключительным дивизором F''. Пусть $K_{X''} + B''$ — прообраз $K_{X'} + B'$. Тогда коэффициент F'' в B'' равен $\frac{1}{2}$. Таким образом, X'' — многообразие типа Фано над Z, слой которого над z состоит из исключительного дивизора F'' и собственного прообраза F'. В частности, мы можем стянуть бирациональный образ F', запустив ПММ на $-F''$. Мы получаем модель X/Z такую, что $(X, 1/2F)$ является lc, где F — прообраз F''; свойство lc можно увидеть аналогично предыдущему примеру, выбрав подходящий $\Delta' \geq B'$. Тогда $X \to Z$ — klt расслоение Фано. По построению, F бирационально $\mathbb{P}^1 \times C'$, где C' —

гиперэллиптическая кривая рода $g = n-1$, который может быть сколь угодно большим.

6.3 Предварительные сведения

Мы работаем над алгебраически замкнутым полем $\Bbbk$ характеристики 0. Все многообразия в этой главе квазипроективны над $\Bbbk$, если не указано иное.

6.3.1 Дивизоры

Пусть X — многообразие. Если X нормально и M — $\mathbb{R}$-дивизор на X, мы полагаем

$$|M|_{\mathbb{R}} = \{N \geq 0 \mid N \sim_{\mathbb{R}} M\}.$$

Напомним, что $N \sim_{\mathbb{R}} M$ означает, что $N - M = \sum r_i \mathrm{Div}\,(\alpha_i)$ для некоторых вещественных чисел r_i и рациональных функций α_i. Когда все r_i можно выбрать рациональными числами, мы пишем $N \sim_{\mathbb{Q}} M$. Аналогично определяем $|M|_{\mathbb{Q}}$, заменяя $\sim_{\mathbb{R}}$ на $\sim_{\mathbb{Q}}$.

6.3.2 Программа минимальных моделей (ПММ)

Мы будем использовать стандартные результаты программы минимальных моделей (см. [KM98][BCHM09]). Предположим, что (X, B) — пара над Z. Предположим, что H — обильный$/Z$ $\mathbb{R}$-дивизор и что K_X+B+H nef$/Z$. Предположим, что пара (X, B) является klt или что она является $\mathbb{Q}$-факториальной dlt. Тогда мы можем запустить ПММ$/Z$ на $K_X + B$ со скейлингом H. Если (X, B) является klt и если либо $K_X + B$, либо B объемен$/Z$, то ПММ завершается [BCHM09]. В этой главе мы в основном работаем в размерности 3, в этом случае существование ПММ известно в полной общности для lc пар.

6.3.3 Расслоения Фано и расслоения Мори

Расслоение Фано $(X, B) \to Z$ — это пара Фано (X, B) над Z такая, что морфизм $X \to Z$ является стягиванием. *klt (соотв. dlt) расслоение Фано* $\pi\colon (X, B) \to Z$ — это расслоение Фано такое, что (X, B) является klt (соотв. dlt).

Расслоение Фано $(X, B) \to Z$ называется *расслоением Мори*, если

1. X является $\mathbb{Q}$-факториальным,

2. $\dim X > \dim Z$, и

3. относительное число Пикара $\rho(X/Z)$ равно 1.

6.3.4 Расслоения Калаби–Яу

Лог расслоение Калаби–Яу $(X, B) \to Z$ — это lc пара (X, B) над Z такая, что лежащий в основе морфизм $X \to Z$ является стягиванием и $K_X + B \sim_{\mathbb{R}} 0/Z$. Если, кроме того, X является типа Фано над Z, то мы говорим, что $(X, B) \to Z$ — это лог расслоение Калаби–Яу типа Фано.

6.3.5 Гональность кривых

Определение 6.3.6. Под *гональностью* проективной кривой C, обозначаемой $\operatorname{gon}(C)$, мы понимаем наименьшее натуральное число r такое, что нормализация C^ν допускает конечный морфизм $C^\nu \to \mathbb{P}^1$ степени r.

По определению, гональность является бирациональным инвариантом проективных кривых. Так, хорошо известно, что гональность гладкой плоской кривой C степени d равна $d-1$ для $d \geq 2$ и равна 1, когда $d = 1$. Если C особа, то гональность ограничена сверху числом $d - 1$: в этом случае $d \geq 2$; раздувая общую точку на $C \subset \mathbb{P}^2$ и рассматривая получающееся $\mathbb{P}^1$-расслоение $S \to \mathbb{P}^1$, мы видим, что собственный прообраз C пересекает общие слои этого расслоения в $d - 1$ точках, так что гональность не превосходит $d - 1$.

6.4 Размерность два

В этом разделе мы доказываем варианты наших основных результатов в размерности два. Они интересны сами по себе, но также необходимы для рассмотрения трехмерного случая.

Лемма 6.4.1. *Пусть (S, Δ) — лог пара Калаби-Яу размерности 2, которая не является канонической, то есть не является 1-lc. Тогда S бирационально $\mathbb{P}^1 \times C$, где C — гладкая проективная кривая рода $g(C) = 0$ или 1.*

Доказательство. Не умаляя общности, заменим S на ее минимальное разрешение и заменим $K_S + \Delta$ на его прообраз. Поскольку (S, Δ) не является

канонической, имеем $\Delta \neq 0$. Запустим ПММ на K_S, которая закончится расслоением Мори. Заменим S на полученную модель, так что мы можем предположить, что у нас есть структура расслоения Мори $h\colon S \to Z$, где Δ все еще не равен нулю. Если Z — точка, то S — гладкое многообразие Фано, следовательно, рационально связно, поэтому мы полагаем $C = \mathbb{P}^1$. Теперь мы можем предположить, что Z — кривая.

Рассмотрим формулу для канонического расслоения

$$K_S + \Delta \sim_{\mathbb{R}} h^*(K_Z + \Delta_Z + M_Z),$$

где Δ_Z, M_Z — дискриминантный и модульный дивизоры; Δ_Z эффективен, а M_Z псевдоэффективен (см. теорему 3.6 в [B19]). Поскольку

$$\deg(K_Z + \Delta_Z + M_Z) = 0,$$

мы заключаем, что Z — это либо $\mathbb{P}^1$, либо эллиптическая кривая. Таким образом, в этом случае, взяв $C = Z$, утверждение доказано. □

Доказательство теоремы 6.1.5. Шаг 1. Заменив S на минимальное разрешение, мы можем считать, что S гладкое. Утверждение (iii) немедленно следует из формулы присоединения

$$K_{D^\nu} + \Delta_{D^\nu} := (K_S + \Delta)|_{D^\nu},$$

где Δ_{D^ν} — дифферента, и того факта, что $(K_S + \Delta)|_{D^\nu} \equiv 0$.

Шаг 2. Докажем (iv), то есть предположим, что $\dim Z \geq 1$. Поскольку D стягивается в точку на Z, имеем $D^2 \leq 0$: это можно увидеть, взяв эффективный дивизор Картье L на Z, проходящий через $f(D)$, и рассмотрев $(f^*L) \cdot D = 0$. Положим

$$\Gamma = \Delta + (1 - \mu_D \Delta)D,$$

и применив присоединение

$$K_{D^\nu} + \Gamma_{D^\nu} := (K_S + \Gamma)|_{D^\nu},$$

получим $\Gamma_{D^\nu} \geq 0$ и

$$\deg(K_{D^\nu} + \Gamma_{D^\nu}) = (K_S + \Delta) \cdot D + (1 - \mu_D \Delta)D^2 \leq 0.$$

Это означает, что D^ν — либо рациональная кривая, либо эллиптическая кривая. Заметим, что (S, Γ) может не быть lc, но формула присоединения все еще имеет смысл.

Шаг 3. Отныне мы предполагаем, что $\dim Z = 0$. По предположению $\Delta \neq 0$, поэтому S унирационально. Запустив ПММ на K_S и заменив S на полученную модель, мы можем предположить, что у нас есть расслоение Мори $S \to V$. Заметим, что если ПММ стягивает D, то это рациональная кривая, и мы завершаем доказательство, поэтому мы можем считать, что D не стягивается. Теперь S — это либо $\mathbb{P}^2$, либо минимальная линейчатая поверхность над гладкой кривой. Если $S = \mathbb{P}^2$, то степень D ограничена сверху, так как $K_S + \Delta \equiv 0$ и коэффициент D в Δ не меньше u, следовательно, D принадлежит ограниченному семейству, что означает. Это значит, что ее гональность ограничена, и род ее нормализации D^ν также ограничен. Поэтому мы можем предположить, что S — минимальная линейчатая поверхность над V.

Шаг 4. Обозначим $S \to V$ через h. Рассмотрим формулу для канонического расслоения

$$K_S + \Delta \sim_{\mathbb{R}} h^*(K_V + \Delta_V + M_V),$$

где Δ_V, M_V — дискриминантный и модульный дивизоры; Δ_V эффективен, а M_V псевдоэффективен (см. теорему 3.6 в [B19]). Поскольку

$$\deg(K_V + \Delta_V + M_V) = 0,$$

имеем, что V — это либо $\mathbb{P}^1$, либо эллиптическая кривая.

Если D — слой $S \to V$, то он рационален. Поэтому мы предполагаем, что D горизонтален над V. Тогда индекс пересечения D со слоем h ограничен, так как $K_S + \Delta \equiv 0$ и коэффициент D в Δ не меньше u. Таким образом, индуцированное отображение $D \to V$ имеет ограниченную степень, зависящую только от u, поэтому гональность D ограничена в зависимости только от u. Тем самым мы доказали (i).

Шаг 5. Осталось доказать (ii), предполагая, что $u > \frac{1}{2}$ и S — минимальная линейчатая поверхность над V, как в шаге 4. В этом случае степень $D \to V$ не больше 3. Мы можем предположить, что эта степень равна 2 или 3, иначе $D \to V$ бирационально, и тогда $g(D^\nu) \leq 1$.

До конца этого шага мы предполагаем, что V — эллиптическая кривая. Мы утверждаем, что D^2 ограничено сверху в зависимости только от u. Если $D^2 \leq 0$, утверждение очевидно, поэтому предположим $D^2 > 0$, что, в частности, означает, что D — nef и объемен. Выберем $\epsilon > 0$ так, что $u > \frac{1}{2} + \epsilon$.

Предположим, что $\mathrm{vol}(\epsilon D) = \epsilon^2 D^2 > 16$. Тогда мы можем найти $0 \leq L \sim_{\mathbb{R}}$

ϵD такой, что, полагая

$$\Theta := \Delta - \epsilon D + L \sim_{\mathbb{R}} \Delta,$$

пара (S, Θ) является lc, но не klt (см. лемму 7.1 в [HMX14]). Пусть T — не-klt центр пары (S, Θ). Предположим, что T горизонтален над V, в этом случае T — кривая. Тогда $T = D$, иначе, если f — слой h, то

$$\Theta \cdot f \geq ((u - \epsilon)D + T) \cdot f \geq 2(u - \epsilon) + 1 > 2,$$

что противоречит $K_S + \Theta \equiv 0$. Применяя присоединение, ограничивая $K_S + \Theta$ на D^ν, как в шаге 1, мы видим, что род D^ν не больше 1. Теперь предположим, что T вертикален над V. Тогда в формуле для канонического расслоения

$$K_S + \Theta \sim_{\mathbb{R}} h^*(K_V + \Theta_V + N_V),$$

мы получаем $\Theta_V \geq h(T)$ (по определению дискриминантного дивизора) и $\deg N_V \geq 0$, что противоречит предположению, что V — эллиптическая кривая и что

$$\deg K_V = \deg(K_V + \Theta_V + N_V) = 0.$$

Следовательно, $\epsilon^2 D^2 \leq 16$, поэтому D^2 ограничено сверху, как утверждалось.

Теперь, полагая

$$\Gamma = \Delta + (1 - \mu_D \Delta)D$$

и применяя присоединение

$$K_{D^\nu} + \Gamma_{D^\nu} := (K_S + \Gamma)|_{D^\nu},$$

мы имеем $\Gamma_{D^\nu} \geq 0$ и

$$\deg(K_{D^\nu} + \Gamma_{D^\nu}) = (K_S + \Delta) \cdot D + (1 - \mu_D \Delta)D^2 = (1 - \mu_D \Delta)D^2,$$

так что $\deg K_{D^\nu}$ ограничено сверху, следовательно, род D^ν ограничен, что и требовалось.

Шаг 6. Отныне мы предполагаем $V = \mathbb{P}^1$. Таким образом, S — поверхность Хирцебруха $\mathbb{F}_n$ для некоторого $n \geq 0,\ n \neq 1$. Следовательно, мы имеем $D \sim as + bf$, где $a \geq 2,\ b \geq 0,\ f$ — слой h, как выше, и s — сечение h с $s^2 = -n$. Поскольку $K_S + \Delta \equiv 0$, мы имеем

$$2 - ua = -(K_S + uD) \cdot f \geq 0,$$

и поскольку $u > \frac{1}{2}$, мы видим, что $a \leq 3$ (фактически a — это просто степень $D \to V$, так что она равна 2 или 3). Также мы можем предположить $D \neq s$, иначе D была бы рациональной кривой. Тогда

$$D \cdot s = -an + b \geq 0,$$

следовательно, $b \geq an$. Более того, дивизор

$$-K_S - uD = 2s + (2+n)f - uD \sim_{\mathbb{Q}} (2-ua)s + (2+n-ub)f$$

является $\mathbb{R}$-линейно эквивалентным эффективному дивизору $\Delta - uD$. Поскольку конус эффективных кривых на $\mathbb{F}_n$ порожден s и f, это означает, что $2 - ua \geq 0$ и $2 + n - ub \geq 0$. Таким образом, $2 + n \geq ub \geq uan$. Мы получаем $2 \geq n(ua - 1)$. Напомним, что $a \geq 2$, $u > \frac{1}{2}$ и $ua - 1 \geq 2u - 1 > 0$. Следовательно,

$$n \leq 2/(ua-1) \leq 2/(2u-1),$$

что ограничивает n в терминах u. Поскольку $ub \leq 2+n$, следует, что b также ограничено. Следовательно, D принадлежит конечному числу алгебраических семейств. Другими словами, род ее нормализации ограничен. □

Замечание 6.4.2. В шаге 5 доказательства теоремы 6.1.5 мы показали, что $g(D^\nu)$ ограничен сверху в зависимости только от u, когда $u > \frac{1}{2}$ и S — минимальная линейчатая поверхность над эллиптической кривой V. Мы покажем, что фактически в этом случае мы имеем $g(D^\nu) \leq 1$. Сначала заметим, что $\mathrm{NS}(S)$ порожден сечением s и слоем f такими, что $-e = s^2 \leq 1$, $s \cdot f = 1$, $f^2 = 0$. Имеем $K_S \equiv -2s - ef$. Запишем $D \equiv as + bf$, где мы можем предположить $a \geq 2$, иначе $a = 0$, в этом случае D — рациональная кривая (так как D в этом случае был бы слоем), или $a = 1$, в этом случае D — эллиптическая кривая (так как отображение $D \to V$ было бы бирациональным).

Поскольку $K_S + \Delta \equiv 0$, мы имеем

$$2 - ua = -(K_S + uD) \cdot f \geq 0,$$

и поскольку $u > \frac{1}{2}$, мы видим, что $a \leq 3$. Фактически a — это просто степень $D \to V$, так что она равна 2 или 3. Тогда

$$D \cdot s = -ae + b \geq 0,$$

следовательно, $b \geq ae$. Более того,

$$-K_S - uD \equiv 2s + ef - uD \equiv (2-ua)s + (e-ub)f$$

численно эквивалентен эффективному дивизору $\Delta - uD$. Мы рассмотрим два случая: $e \geq 0$ и $e = -1$ отдельно.

В первом случае конус эффективных кривых на S порожден s и f (см. [Ha77], V, 2.20). Это означает, что $2 - ua \geq 0$ и $e - ub \geq 0$. Таким образом, $e \geq ub \geq uae$. Если $e \neq 0$, мы получаем $ua \leq 1$. Напомним, что $a \geq 2$, $u > \frac{1}{2}$ и, следовательно, $ua > 1$. Это противоречие. Значит, $e = 0$ и, следовательно, $b = 0$. Мы заключаем, что $K_S = -2s$, и по присоединению $\deg K_D = (-2 + a)as^2 = 0$, так что $g(D^\nu) \leq 1$.

Во втором случае конус кривых на S порожден $2s - f$ и f (см. [Ha77], V, 2.21). Заметим, что $2s - f = -K_S$ и $-K_S \equiv uD + (\Delta - uD)$. Это, в частности, означает, что D численно пропорциональна $-K_S$, так как $-K_S$ порождает экстремальный луч конуса Мори. Мы можем тогда записать $D \equiv d(2s - f)$, где $d \in \mathbb{Q}^{>0}$ и $d \leq 1/u$. По присоединению

$$\deg K_D = (K_S + D) \cdot D = (1 + d)d(2s - f)^2 = 0,$$

следовательно, $g(D^\nu) \leq 1$.

Пример 6.4.3. Мы покажем, что условие $u > \frac{1}{2}$ важно для второго утверждения теоремы 6.1.5. Рассмотрим klt пару $(S, \frac{1}{2}C)$ размерности 2. Здесь $S = \mathbb{P}(1, 1, n)$ для $n \geq 3$ и C — гладкая гиперэллиптическая кривая, заданная уравнением $z^2 = f_{2n}(x, y)$, где x, y, z — однородные координаты на S с весами $1, 1, n$ соответственно, и однородный многочлен f_{2n} достаточно общий и имеет степень $2n$. Имеем $C \sim 2nh$, где h — положительная образующая группы классов $\mathrm{Cl}(S)$. Легко вычислить, что $g(C) = n - 1$, и дивизор

$$-(K_S + \frac{1}{2}C) \sim (n + 2)h - nh = 2h$$

обилен. В частности, род $g(C)$ не ограничен, но гональность C равна 2. Возьмем $\Delta \geq \frac{1}{2}C$ так, что (S, Δ) является lc и $K_S + \Delta \sim_{\mathbb{Q}} 0$, и возьмем в качестве Z точку. Тогда $(S, \Delta) \to Z$ — расслоение Калаби-Яу, C — компонента Δ с коэффициентом не меньше $\frac{1}{2}$, и C, очевидно, стягивается в точку на Z. Таким образом, мы видим, что теорема 6.1.5 не выполняется, если убрать условие $u > \frac{1}{2}$.

В следующем предложении мы даем эффективные оценки для теоремы 6.1.5. Нам нужно рассмотреть только случаи (i) и (ii), потому что в случаях (iii) и (iv) род D^ν не больше 1.

Утверждение 6.4.4. *Зафиксируем вещественное число $u > 0$. Предположим, что (S, Δ) — lc пара Калаби-Яу на поверхности, и что коэффициент D в Δ не меньше u. Тогда*

$$\operatorname{gon}(D) \leq 3/u - 1,$$

и эта оценка точная. Если, кроме того, $u > 1/2$, то

$$g(D^\nu) \leq \frac{1}{u - 1/2} - 1,$$

и эта оценка точная. В последнем случае, если $g(D^\nu) > 1$, то S рационально.

Доказательство. Мы используем обозначения и идеи, аналогичные использованным в доказательстве теоремы 6.1.5. Мы можем считать, что у нас есть структура расслоения Мори $S \to V$ и что S гладкое. Сначала оценим гональность. Предположим, что V — точка, в этом случае $S = \mathbb{P}^2$. Поскольку $K_S + uD$ анти-nef, имеем $-3 + u \deg D \leq 0$, где $\deg D$ обозначает степень D как плоской кривой. Отсюда следует, что либо $\operatorname{gon}(D) = 1$, либо

$$\operatorname{gon}(D) \leq 3/u - 1, \tag{6.4.1}$$

и эта оценка точная, например, равенство достигается, когда $u = 1$ и D — эллиптическая кривая, где мы используем тот факт, что $\operatorname{gon}(D) \leq \deg D - 1$.

Предположим, что V — кривая. Пусть f — общий слой $S \to V$. Было доказано, что V либо гладкая рациональная кривая, либо гладкая эллиптическая кривая. В первом случае мы имеем

$$0 = (K_S + \Delta) \cdot f = (K_S + uD + (\Delta - uD) + f) \cdot f \geq \deg K_f + uD \cdot f,$$

следовательно, $D \cdot f \leq 2/u$ и, таким образом,

$$\operatorname{gon}(D) \leq 2/u. \tag{6.4.2}$$

Эта оценка точна. Действительно, полагая $S = \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$, $u = 1$, и беря в качестве D общую кривую в $|-K_S|$, имеем, что D — эллиптическая кривая.

Теперь предположим, что V — эллиптическая кривая. Тогда, поскольку $K_S + uD$ анти-nef над V, пересекая с общим слоем, мы видим, что $-2 + ua \leq 0$, где a — степень отображения $D \to V$. Снова $\operatorname{gon}(D) \leq 2/u$. Сравним две полученные оценки для гональности (6.4.1) и (6.4.2). Поскольку $u \leq 1$, имеем

$3/u - 1 \geq 2/u$, поэтому общая оценка для гональности такова: $\operatorname{gon}(D) \leq 3/u - 1$.

Теперь дадим оценку для рода D^ν в предположении $u > 1/2$. Если $g(D^\nu) \leq 1$, то

$$g(D^\nu) \leq 1 \leq \frac{1}{u - 1/2} - 1,$$

так что мы можем считать, что $g(D^\nu) \geq 2$. Положим $\alpha = u - 1/2$. Предположим, что $\dim V = 1$, где V как выше. Рассмотрим случай $V = \mathbb{P}^1$, следовательно, $S = \mathbb{F}_n$ для некоторого $n \geq 0$. Запишем $D \sim as + bf$, где s, f как в доказательстве теоремы 6.1.5 (s — сечение, а f — слой $S \to V$). Тогда

$$\begin{aligned} 2p_a(D) - 2 =& (K_{\mathbb{F}_n} + D) \cdot D \\ =& ((a-2)s + (b-2-n)f)(as + bf) \\ =& -a^2 n + an + 2ab - 2a - 2b, \end{aligned} \tag{6.4.3}$$

так что

$$p_a(D) = \frac{1}{2}an(1-a) + (a-1)(b-1).$$

Из доказательства 6.1.5 следует, что

$$ub - 2 \leq n \leq \frac{2}{2u-1} = \frac{1}{\alpha}, \quad 2 \leq a \leq 3, \quad b \leq \frac{2+n}{u} \leq \frac{2}{u - 1/2} = \frac{2}{\alpha}.$$

Рассмотрим два случая: $a = 2$ и $a = 3$ ($a = 1$ означает, что D рациональна). Если $a = 2$, мы получаем

$$\begin{aligned} p_a(D) =& -n + b - 1 \leq -ub + 2 + b - 1 \\ =& b(1 - (1/2 + \alpha)) + 1 \leq 2/\alpha(1/2 - \alpha) + 1 = 1/\alpha - 1. \end{aligned} \tag{6.4.4}$$

Если $a = 3$, мы получаем

$$\begin{aligned} p_a(D) =& -3n + 2b - 2 \leq 3(-ub + 2) + 2b - 2 \\ =& b(2 - 3(1/2 + \alpha)) + 4 \leq 2/\alpha(1/2 - 3\alpha) + 4 = 1/\alpha - 2. \end{aligned} \tag{6.4.5}$$

Покажем, что оценка (6.4.4) точна. Действительно, аналогично примеру 6.4.3 положим $S = \mathbb{P}(1, 1, n)$, $D \sim 2nh$, $\alpha = 1/n$, $u = 1/2 + \alpha$. Тогда $(S, (1/2 + \alpha)D = uD)$ — lc пара Калаби-Яу и $g(D) = n - 1 = 1/\alpha - 1$.

Теперь рассмотрим случай, когда V — эллиптическая кривая. Из замечания 6.4.2 следует, что $g(D^\nu) \leq 1$.

Наконец, предположим, что $\dim V = 0$. Тогда $-3 + ud \leq 0$, где $d = \deg D$. Поскольку $u > 1/2$, мы имеем $d \leq 5$. Тогда

$$p_a(D) = \frac{1}{2}(d-1)(d-2) \in \{0, 1, 3, 6\},$$

что дает $g(D^\nu) \le p_a(D) \le 6$. Чтобы проверить оценку в утверждении, нам нужно только рассмотреть случаи $d = 4, 5$, потому что в остальных случаях $g(D^\nu) \le 1$. Когда $d = 4$, мы имеем $u \le 3/4$, так что $u - 1/2 \le 1/4$, следовательно, мы видим, что

$$g(D^\nu) \le 3 \le \frac{1}{u - 1/2} - 1.$$

С другой стороны, когда $d = 5$, мы имеем $u \le 3/5$, так что $u - 1/2 \le 1/10$, следовательно, мы видим, что

$$g(D^\nu) \le 6 \le 9 \le \frac{1}{u - 1/2} - 1.$$

Утверждение доказано. □

6.5 Подготовительные результаты

В этом разделе мы проводим некоторые подготовительные рассуждения для доказательства основных результатов в размерности 3.

6.5.1 Dlt модели

Под *dlt моделью* lc-пары (X, B) мы понимаем $\mathbb{Q}$-факториальную dlt пару (Y, B_Y) вместе с бирациональным стягиванием $Y \to X$, таким что $K_Y + B_Y$ является прообразом $K_X + B$.

Лемма 6.5.2. *Пусть (X, B) — $\mathbb{Q}$-факториальная lc-пара и (Y, B_Y) — dlt модель (X, B). Тогда исключительное множество $Y \to X$ содержится в $\lfloor B_Y \rfloor$.*

Доказательство. Поскольку X является $\mathbb{Q}$-факториальным, исключительное множество $Y \to X$ совпадает с исключительной частью $\lfloor B_Y \rfloor$. Действительно, из $\mathbb{Q}$-факториальности X следует существование эффективного исключительного дивизора, который антиобилен над X, следовательно, исключительное множество $Y \to X$ равно приведенному исключительному дивизору; с другой стороны, каждая компонента приведенного исключительного дивизора является компонентой $\lfloor B_Y \rfloor$ по определению dlt модели. □

Лемма 6.5.3. *Пусть $f\colon (X, B) \to Z$ — расслоение Калаби–Яу типа Фано, где $\dim Z \ge 1$. Предположим, что D — простой дивизор над X такой, что*

$A(D, X, B) < 1$ и образ D на Z является замкнутой точкой. Тогда существует расслоение Калаби–Яу типа Фано $(Y, B_Y) \to Z$ и бирациональное отображение $X \dashrightarrow Y$ над Z такие, что

- *(Y, B_Y) является $\mathbb{Q}$-факториальной dlt парой,*
- *$A(D, Y, B_Y) \leq A(D, X, B)$, и*
- *центр D на Y содержится в $\lfloor B_Y \rfloor$.*

Доказательство. Заметим, что в ходе доказательства B_Y не обязательно является бирациональным образом B. Заменяя (X, B) на $\mathbb{Q}$-факториальную dlt модель, мы можем считать, что X является $\mathbb{Q}$-факториальным. Это сохраняет свойство типа Фано в силу относительного варианта [B19, 2.14(7)]. Извлекая D, мы можем считать, что он является дивизором на X с положительным коэффициентом в B. Поскольку D стягивается в точку z на Z и $\dim Z \geq 1$, D не пересекает общие слои $X \to Z$. В частности, $-D$ псевдоэффективен над Z, так как мы можем найти дивизор Картье $L \geq 0$ на Z такой, что $D + f^*L \geq 0$. Поскольку X является типа Фано над Z, мы можем запустить ПММ на $-D$ над Z, которая заканчивается минимальной моделью для $-D$, на которой прообраз $-D$ полуобилен над Z. ПММ не стягивает D по лемме об отрицательности. Заменяя X на минимальную модель, мы можем считать, что $-D$ полуобилен над Z.

Пусть s — лог-канонический порог D относительно (X, B). Мы можем найти общий $0 \leq A \sim_{\mathbb{Q}} -D/Z$, так что $(X, B + sD + sA)$ является lc. Заменяя B на $B + sD + sA$, мы можем считать, что D содержит lc-центр (X, B). Таким образом, существует простой дивизор S над X такой, что $A(S, X, B) = 0$ и центр S на X содержится в D.

Если S не является исключительным над X (т.е. $S = D$), положим $(V, B_V) = (X, B)$. Но если S исключителен над X, пусть $W \to X$ — бирациональное стягивание с $\mathbb{Q}$-факториального W, которое стягивает S, но не стягивает других дивизоров: такое существует по [BCHM09, Corollary 1.4.3]. Заметим, что W является типа Фано над Z в силу относительного варианта [B19, 2.14(7)]. Пусть V — минимальная модель $-S$ над Z (злоупотребляя обозначениями, мы обозначаем бирациональный образ S на V снова через S); пусть $K_W + B_W$ — прообраз $K_X + B$, и $K_V + B_V$ — прообраз $K_W + B_W$. По построению, в любом случае S является компонентой $\lfloor B_V \rfloor$, $-S$ nef над Z, и V является $\mathbb{Q}$-факториальным.

Пусть T — центр D на V. Мы покажем, что T содержится в S. Поскольку V является типа Фано над Z, дивизор $-S$ полуобилен над Z. Значит, он определяет стягивание $g\colon V \to M/Z$, где $M \to Z$ бирационально. Так как S стягивается в точку z на Z, имеем, что S не пересекает общие слои $V \to Z$. Поскольку $S \sim_{\mathbb{Q}} 0/M$ и S вертикален над M, мы имеем $S = g^*E$ для некоторого эффективного $\mathbb{Q}$-дивизора E на M. Поскольку S неприводим, E также неприводим. Более того, E антиобилен над Z, следовательно, его носитель содержит исключительное множество $M \to Z$. Таким образом, поскольку E стягивается в z, носитель E совпадает с прообразом z при отображении $M \to Z$. По предположению, T отображается в z посредством $V \to Z$. Следовательно, T отображается в E посредством $V \to M$, что, в свою очередь, означает, что T содержится в $S = g^*E$.

Пусть (Y, B_Y) — $\mathbb{Q}$-факториальная dlt модель (V, B_V). По построению,

$$A(D, Y, B_Y) = A(D, V, B_V) = A(D, W, B_W) = A(D, X, B) < 1.$$

Напомним, что мы увеличивали B в приведенных выше рассуждениях, поэтому текущее значение $A(D, X, B)$ меньше или равно исходнй лог-дискрепантности $A(D, X, B)$, с которой мы начинали. Остается показать, что центр D на Y содержится в $\lfloor B_Y \rfloor$.

Если $Y \to V$ является изоморфизмом в общей точке T, то центр D на Y содержится в $\lfloor B_Y \rfloor$, поскольку T содержится в S. Но если $Y \to V$ не является изоморфизмом в общей точке T, то центр D на Y содержится в исключительном множестве $Y \to V$, следовательно, он содержится в $\lfloor B_Y \rfloor$, так как V является $\mathbb{Q}$-факториальным, по лемме 6.5.2. Это завершает доказательство. □

6.5.4 Дивизоры над dlt парами

Следующая лемма является ключевой для доказательства основных результатов.

Лемма 6.5.5. *Пусть $s \in [0, 1)$ — вещественное число. Предположим, что*

- *(Y, B) — $\mathbb{Q}$-факториальная dlt-пара размерности 3,*
- *E — простой дивизор над Y с центром T, который является кривой,*
- *T содержится в $\lfloor B \rfloor$,*

- *лог-дискрепантность* $A(E, Y, B) \leq s$.

Тогда существует модификация $\phi\colon Y' \to Y$ *такая, что*

- Y' *является* $\mathbb{Q}$*-факториальным и* $\rho(Y'/Y) = 1$,
- *единственным* ϕ*-исключительным дивизором является* E,
- *количество компонент в общем слое* $E \to T$ *ограничено в зависимости только от* s,
- *если* $s < 1/2$, *то общий слой* $E \to T$ *неприводим.*

Доказательство. Увеличив s, если нужно, мы можем считать, что $A(E, Y, B) < s$. Поскольку (Y, B) является $\mathbb{Q}$-факториальной dlt парой, имеем, что $(Y, 0)$ является klt. Более того, по предположению T содержится в некоторой компоненте B_1 из $\lfloor B \rfloor$, поэтому, возмущая коэффициенты B в компонентах, отличных от B_1, мы можем считать, что (X, B) является plt. Существование модификации $\phi\colon Y' \to Y$ с первыми двумя свойствами следует из [BCHM09, Corollary 1.4.3]. В частности, предположение $\mathbb{Q}$-факториальности гарантирует, что исключительное множество ϕ в точности равно E, т.е. никакие кривые вне E не стягиваются.

Докажем, что выполняется третье свойство. Пусть x — общая точка на T. Слой $E \to T$ над x, который совпадает со слоем $Y' \to Y$ над x, скажем E_x, рационально цепно связен по [HM07], потому что Y' является типа Фано над Y, так как (Y, B) является plt. Пусть $E_x = E_1 + \ldots + E_M$ — разложение E_x в сумму неприводимых компонент. Мы покажем, что M ограничено. Поскольку $\rho(Y'/Y) = 1$ и B_1 содержит T, собственный прообраз B_1' дивизора B_1 обилен над Y. Следовательно, B_1' пересекает каждую E_i.

И B_1, и B_1' нормальны по свойству plt. Таким образом, морфизм $B_1' \to B_1$ является бирациональным стягиванием (по теореме Зарисского). В частности, $B_1' \to B_1$ является изоморфизмом в общей точке T. Поскольку B_1' пересекает каждый слой $E \to T$, пересечение $E \cap B_1'$ отображается на T. Таким образом, существует единственная компонента D пересечения $E \cap B_1'$, для которой отображение $D \to T$ бирационально. В частности, поскольку x общая, пересечение $E_x \cap D$ является одной точкой, скажем x'. Более того, $E_x \cap D = E_x \cap B_1'$. Поэтому, поскольку B_1' пересекает каждую E_i, мы видим, что теоретико-множественное пересечение $E_i \cap B_1'$ состоит в точности из x' для каждой E_i, так что все компоненты E_i слоя E_x проходят через x'.

Рассмотрим общее гиперплоское сечение H на Y и его прообраз H' на Y'. Ясно, что H и H' нормальны. Применим присоединение, чтобы получить

$$K_H + B_H = (K_Y + B + H)\,|_H$$

и

$$K_{H'} + B_{H'} = (K_{Y'} + B' + H')\,|_{H'},$$

где $K_{Y'} + B'$ — прообраз $K_Y + B$. Пары (H, B_H) и $(H', B_{H'})$ являются dlt парами, и

$$K_{H'} + B_{H'} = \phi|^*_{H'}\,(K_H + B_H)\,.$$

Мы можем считать, что $x \in H$, и, следовательно, $x' \in H'$. Тогда в окрестности x мы имеем

$$E \cap H' = E_x = E_1 + \ldots + E_M.$$

Таким образом, каждая E_i является компонентой $B_{H'}$ с коэффициентом $> 1 - s > 0$: действительно, коэффициент E_i не меньше $1 - \frac{1}{n} + \frac{e}{n}$, где n — индекс Картье $K_{Y'} + H'$ вдоль E_i, а e — коэффициент E в $B' + H'$ (см. 3.9 и 3.10 из [Sh92]). Но

$$1 - \frac{1}{n} + \frac{e}{n} \geq e = 1 - A(E, Y, B) > 1 - s > 0.$$

С другой стороны, пересечение $B'_1 \cap H'$ дает компоненту $B_{H'}$ с коэффициентом 1, отличную от каждой E_i. Эта компонента проходит через x', потому что

$$x' \in B'_1 \cap E_x \subset B'_1 \cap H'.$$

Мы показали, что $B_{H'}$ имеет компоненту R' с коэффициентом 1 и M компонент с коэффициентом $> 1-s$, все проходящие через x'. Но тогда, применяя присоединение

$$K_{R'} + B_{R'} = (K_{H'} + B_{H'})|_{R'}$$

и тот факт, что $(R', B_{R'})$ является lc, получаем, что $M(1-s) < 1$, что означает, что M ограничено в зависимости только от s. Если $s < \frac{1}{2}$, то $1 - s > \frac{1}{2}$, и, следовательно, $M = 1$. Утверждение доказано. □

6.5.6 ПММ над парой

Зафиксируем положительное вещественное число t. Рассмотрим $\mathbb{Q}$-факториальную dlt пару (Y, B_Y). Предположим, что D — исключительный простой дивизор над Y такой, что $A(D, Y, B_Y) \leq 1 - t$. Мы построим

- лог гладкую пару (V, Γ) над Y, где каждый простой исключительный дивизор $V \to Y$ является компонентой $\lfloor \Gamma \rfloor$, и центр D на V является дивизором (так что это бирациональный образ D), следовательно, этот центр является компонентой $\lfloor \Gamma \rfloor$,
- ПММ
$$V = V_1 \dashrightarrow V_2 \dashrightarrow \cdots \dashrightarrow V_N = Y$$
на $K_V + \Gamma$ над Y,
- число $0 < u < t$, зависящее только от t, такое что для каждого k выполнено
$$A(D, V_k, \Gamma_k) \leq A(D, Y, (1-\epsilon)B_Y) < 1 - u,$$
где Γ_k — прообраз Γ и $0 < \epsilon \ll 1$, и
- дополнительно, если $t > 1/2$, мы можем считать, что $u > 1/2$.

Пусть $\psi \colon V \to Y$ — лог разрешение (Y, B_Y), на котором D является дивизором. Определим
$$\Gamma = (1-\epsilon)\, B_Y^{\sim} + \sum E_i$$
для некоторого $0 < \epsilon \ll 1$, где $B_Y^{\sim}$ — бирациональный образ B_Y, а E_i — исключительные простые дивизоры ψ.

Пара $(Y, (1-\epsilon)B_Y)$ является klt. Таким образом, мы можем записать
$$K_V + (1-\epsilon)B_Y^{\sim} = \psi^*(K_Y + (1-\epsilon)B_Y) + \sum a_i E_i,$$
где $a_i > -1$. Тогда
$$\begin{aligned} K_V + \Gamma &= K_V + (1-\epsilon)\, B_Y^{\sim} + \sum E_i \\ &= K_V + (1-\epsilon)\, B_Y^{\sim} - \sum a_i E_i + \sum (1+a_i) E_i \\ &= \psi^* \left(K_Y + (1-\epsilon)\, B_Y\right) + \sum (1+a_i) E_i. \end{aligned} \tag{6.5.1}$$

Запустим $(K_V + \Gamma)$-ПММ над Y. Она завершается на Y по теореме 1.8 из [B12], поскольку Y является $\mathbb{Q}$-факториальным и $\sum (1+a_i)E_i$ эффективен, а его носитель совпадает с приведенным исключительным дивизором ψ. Обозначим шаги ПММ через $V_k \dashrightarrow V_{k+1}$, где $V_1 = V$ и $V_N = Y$. Мы найти такое $0 < u < t$, зависящее только от t, что для каждого k выполнено
$$A(D, V_k, \Gamma_k) \leq A(D, Y, (1-\epsilon)B_Y) < 1 - u,$$

где Γ_k — прообраз Γ. Здесь первое неравенство следует из определения Γ и формулы 6.5.1. Второе неравенство следует из предположения, что ϵ достаточно мало (заметим, что ϵ зависит от пары (Y, B_Y)). Кроме того, если $t > 1/2$, мы можем считать, что $u > 1/2$.

6.6 Доказательство основных результатов

В этом разделе мы доказываем наши основные результаты в размерности 3.

Доказательство теоремы 6.1.3. Шаг 1. Сначала докажем (iii), то есть предположим $t = 1$. Пусть S — нормализация D. По формуле присоединения мы можем записать $K_S + B_S = (K_X + B)|_S$, где (S, B_S) является lc-парой. Поскольку $(X, B) \to Z$ — расслоение Калаби–Яу и D стягивается в точку на Z, имеем $K_S + B_S \sim_{\mathbb{R}} 0$. Таким образом, (S, B_S) — пара Калаби–Яу размерности 2. Поскольку X является типа Фано над Z, его слои рационально цепно связны [HM07], следовательно, D унирациональна, что, в свою очередь, означает, что S унирациональна (заметим, что поскольку $\dim Z \geq 1$, D является компонентой слоя $X \to Z$). Это означает, что (S, B_S) не является канонической, т.е. не является 1-lc. Действительно, возьмем минимальное разрешение $\pi\colon S' \to S$ и положим $K_{S'} + B_{S'} = \pi^*(K_S + B_S)$; если (S, B_S) каноническая, то $B_{S'} = 0$, следовательно, $K_{S'} \sim_{\mathbb{Q}} 0$, что противоречит тому, что S унирациональна. Теперь, применяя лемму 6.4.1, мы заключаем, что S (а значит, и D) бирациональна $\mathbb{P}^1 \times C$, где C — гладкая проективная кривая рода ≤ 1. Остается доказать (i) и (ii).

Шаг 2. По предположению,

$$A(D, X, B) = 1 - \mu_D B \leq 1 - t < 1.$$

По лемме 6.5.3, существует расслоение Калаби–Яу типа Фано $(Y, B_Y) \to Z$ и бирациональное отображение $X \dashrightarrow Y$ такие, что

- (Y, B_Y) является $\mathbb{Q}$-факториальной dlt парой,
- $A(D, Y, B_Y) \leq A(D, X, B)$, и
- центр D на Y, скажем T, содержится в $\lfloor B_Y \rfloor$.

В частности, $A(D, Y, B_Y) \leq 1 - t$.

Предположим, что $\dim T = 2$. Тогда T является бирациональным образом D и T — компонента $\lfloor B_Y \rfloor$. Применяя (iii) к $(Y, B_Y) \to Z$, получаем, что D бирациональна $\mathbb{P}^1 \times C$, где C — гладкая проективная кривая рода ≤ 1. Таким образом, в этом случае доказательство завершено.

Шаг 3. Предположим, что $\dim T = 1$. По лемме 6.5.5, примененной к (Y, B_Y), $E := D$ и $s := 1 - t$, существует модификация $\phi\colon Y' \to Y$ такая, что

- Y' является $\mathbb{Q}$-факториальным и $\rho(Y'/Y) = 1$,
- единственным ϕ-исключительным дивизором является E, который является бирациональным образом D,
- количество компонент в общем слое $E \to T$ ограничено в зависимости только от $1 - t$,
- если $1 - t < 1/2$, то есть если $t > \frac{1}{2}$, то общий слой $E \to T$ неприводим.

Рассмотрим нормализацию E^ν дивизора E и факторизацию Штейна $E^\nu \to C \to T$. Тогда общие слои $E^\nu \to C$ изоморфны $\mathbb{P}^1$, потому что слои $E \to T$ рационально цепно связны. Так что E^ν бирациональна $\mathbb{P}^1 \times C$, что означает, что D также бирациональна $\mathbb{P}^1 \times C$. Более того, степень $C \to T$ равна количеству компонент общих слоев $E^\nu \to T$, которое, в свою очередь, равно количеству компонент общих слоев $E \to T$, поскольку $E^\nu \to E$ является изоморфизмом в общей точке любой компоненты общего слоя $E \to T$. Таким образом, степень $C \to T$ ограничена в зависимости только от t, и если $t > \frac{1}{2}$, то эта степень равна 1, то есть в этом случае $C \to T$ бирационально. Поэтому для завершения доказательства в случае $\dim T = 1$ нам нужно только показать, что гональность T ограничена в зависимости только от t, и в случае $t > \frac{1}{2}$ род нормализации T ограничен.

По построению T содержится в некоторой компоненте $\lfloor B_Y \rfloor$, скажем S. Пусть $S \to R \to Z$ — факторизация Штейна $S \to Z$. По формуле присоединения мы можем записать $K_S + B_S = (K_Y + B_Y)|_S$, где (S, B_S) является lc парой, которая является парой Калаби–Яу над R. Мы утверждаем, что коэффициент T в B_S не меньше t. Рассмотрим бирациональный образ S' на Y', а затем применим формулу присоединение $K_{S'} + B_{S'} = (K_{Y'} + B_{Y'})|_S$, где $K_{Y'} + B_{Y'}$ — прообраз $K_Y + B_Y$ (заметим, что S' нормальна, так как легко проверить, что (Y', S') является plt). Тогда B_S — прообраз $B_{S'}$. Поскольку

S' обилен над Y, он пересекает каждый слой $E \to T$, поэтому существует компонента T' пересечения $S' \cap E$, которая отображается на T. Поскольку коэффициент E в $B_{Y'}$ больше или равен коэффициенту D в B, который не меньше t, мы видим, что коэффициент T' в $B_{S'}$ не меньше $1 - \frac{1}{n} + \frac{t}{n}$, где n — индекс Картье $K_{Y'} + S'$ вдоль T' (см. 3.9 и 3.10 из [Sh92]). Но $1 - \frac{1}{n} + \frac{t}{n} \geq t$, следовательно, коэффициент T' в $B_{S'}$ не меньше t, что означает, что коэффициент T в B_S не меньше t.

Поскольку D стягивается в точку на Z, мы заключаем, что T стягивается в точку на R. Применяя теорему 6.1.5 к $(S, B_S) \to R$, получаем, что гональность T ограничена в зависимости только от t, и в случае $t > \frac{1}{2}$ род нормализации T ограничен.

Шаг 4. Остается рассмотреть случай $\dim T = 0$. Применяя раздел 6.5.6 к (Y, B_Y), D, существуют

- лог гладкая пара (V, Γ) над Y, где каждый простой исключительный дивизор $V \to Y$ является компонентой $\lfloor \Gamma \rfloor$, и центр D на V является дивизором (так что это бирациональный образ D), следовательно, этот центр является компонентой $\lfloor \Gamma \rfloor$,
- ПММ
$$V = V_1 \dashrightarrow V_2 \dashrightarrow \cdots \dashrightarrow V_N = Y$$
на $K_V + \Gamma$ над Y,
- число $0 < u < t$, зависящее только от t, такое что для каждого k,
$$A(D, V_k, \Gamma_k) \leq A(D, Y, (1 - \epsilon)B_Y) < 1 - u,$$
где Γ_k — прообраз Γ и $0 < \epsilon \ll 1$,
- дополнительно, если $t > 1/2$, мы можем считать, что $u > 1/2$.

Мы будем обозначать центр D на V_k через T_k. Тогда T_1 является дивизором, бирациональным образом D, который является компонентой $\lfloor \Gamma_1 \rfloor$, и $T = T_N$ является точкой.

Шаги ПММ — это дивизориальные стягивания или флипы. На шаге k множество T_k может содержаться или не содержаться в множестве неопределенности $V_k \dashrightarrow V_{k+1}$, и если оно содержится, то индуцированное отображение $T_k \to T_{k+1}$ может быть, например, стягиванием в точку или конечным

морфизмом. В оставшейся части доказательства мы рассматриваем эти возможности.

Шаг 5. Предположим, что для некоторого k имеем $\dim T_k = 2$ и $\dim T_{k+1} = 0$. Тогда T_k является компонентой Γ_k с коэффициентом 1, и $-(K_{V_k}+\Gamma_k)$ обилен над V_{k+1}. Поэтому, применяя формулу присоединения, мы заключаем, что T_k является типа Фано, следовательно, это рационально связная поверхность, поэтому D рациональна, и в этом случае мы получаем $C = \mathbb{P}^1$.

Затем мы можем считать, что $\dim T_k = 1$ для некоторого k, потому что T_1 является поверхностью, и мы можем считать, что она стягивается в кривую на некотором шаге ввиду предыдущего абзаца. Пусть l — наибольший номер, такой что $\dim T_l \geq 1$, $V_l \dashrightarrow V_{l+1}$ — дивизориальное стягивание, скажем, стягивающее дивизор R, и $T_l \subset R$.

Мы утверждаем, что T_{l+1} является либо точкой, либо рациональной кривой. Это очевидно, если $\dim T_{l+1} = 0$, поэтому мы можем считать, что $\dim T_{l+1} = 1$. Тогда $V_{l+1} \dashrightarrow V_N$ не является изоморфизмом в окрестности общей точки T_{l+1}, потому что T_{l+1} — кривая, а T_N — точка. Существует $k \geq l+1$, такое что $V_{l+1} \dashrightarrow V_k$ является изоморфизмом в окрестности общей точки T_{l+1}, но $V_{l+1} \dashrightarrow V_{k+1}$ не является таковым. В частности, это означает, что T_k содержится в множестве неопределенности $V_k \dashrightarrow V_{k+1}$. Таким образом, по нашему выбору l, $V_k \dashrightarrow V_{k+1}$ не может быть дивизориальным стягиванием, потому что $\dim T_k = 1$. Следовательно, $V_k \dashrightarrow V_{k+1}$ является флипом, и T_k является компонентой исключительного множества соответствующего флипового стягивания. Но тогда T_k является рациональной кривой по варианту теоремы о конусе [Sh96] или по [HM07], учитывая, что T_k является компонентой некоторого слоя флипового стягивания. Следовательно, T_{l+1} также является рациональной кривой, потому что $V_{l+1} \dashrightarrow V_k$ индуцирует бирациональное отображение $T_{l+1} \dashrightarrow T_k$.

Шаг 6. Предположим, что $\dim T_l = 2$. Тогда $T_l = R$ является исключительным дивизором $V_l \dashrightarrow V_{l+1}$ и компонентой $\lfloor \Gamma_l \rfloor$. По предыдущему шагу T_{l+1} является либо точкой, либо рациональной кривой. Если это точка, то T_l рационально связна по предыдущему шагу, и мы можем взять $C = \mathbb{P}^1$. Если это кривая, то общие слои $T_l \to T_{l+1}$ являются $\mathbb{P}^1$, так как $-(K_{V_l}+\Gamma_l)$ обилен над V_{l+1}, что означает, что T_l является типа Фано над T_{l+1}, следовательно, снова T_l рационально связна, и мы завершаем, взяв $C = \mathbb{P}^1$ (заметим, что здесь мы используем тот факт, что $T_l \to T_{l+1}$ является стягиванием, что следует

из того, что $V_l \to V_{l+1}$ является стягиванием и T_l является исключительным множеством).

Шаг 7. Теперь предположим, что $\dim T_l = 1$. Мы утверждаем, что гональность T_l ограничена, и если $t > \frac{1}{2}$, то род нормализации T_l ограничен. По предположению T_l содержится в исключительном дивизоре R, который является компонентой Γ_l с коэффициентом 1. Поскольку $-(K_{V_l} + \Gamma_l)$ обилен над V_{l+1}, существует $\Theta \geq \Gamma_l$, такой что (V_l, Θ) является dlt парой и $K_{V_l} + \Theta \sim_{\mathbb{R}} 0/V_{l+1}$. Пусть M — нормализация образа R в V_{l+1}. Тогда $R \to M$ — стягивание. Применяя формулу присоединения

$$K_R + \Theta_R := (K_{V_l} + \Theta)|_R \sim_{\mathbb{R}} 0/M,$$

получаем, что $(R, \Theta_R) \to M$ является расслоением Калаби–Яу. Более того, поскольку

$$A(D, V_l, \Theta) \leq A(D, V_l, \Gamma_l) < 1 - u,$$

коэффициент T_l в Θ_R больше u (это можно увидеть аналогично шагу 3, извлекая D посредством экстремального стягивания $V_l' \to V_l$ и ограничиваясь на бирациональный образ R на V_l'). Теперь, если T_l стягивается в точку на M, то мы можем применить теорему 6.1.5, чтобы заключить, что гональность T_l ограничена, и в случае $u > \frac{1}{2}$ род нормализации T_l ограничен.

Шаг 8. Остается рассмотреть случай $\dim T_l = \dim T_{l+1} = 1$. В этом случае T_{l+1} является образом R в V_{l+1}, следовательно, M является нормализацией T_{l+1}. Поскольку $(R, \Theta_R) \to M$ является расслоением Калаби–Яу и T_l горизонтальна над T_{l+1}, беря число пересечения $\Theta_R > uT_l$ с общими слоями G отображения $R \to M$, мы видим, что $uT_l \cdot G < 2$, поэтому степень $T_l \to M$ ограничена, следовательно, гональность T_l ограничена, как утверждалось.

Отныне мы предполагаем $t > \frac{1}{2}$, и в этом случае $u > \frac{1}{2}$. Мы докажем, что в этом случае морфизм $T_l \to T_{l+1}$ бирационален. Поскольку T_{l+1} является кривой, а T_N — точкой, T_{l+1} содержится в исключительном множестве $V_{l+1} \to Y$. Более того, поскольку Y является $\mathbb{Q}$-факториальным, исключительное множество является объединением простых исключительных дивизоров, следовательно, T_{l+1} содержится в некотором простом исключительном дивизоре $V_{l+1} \to Y$, скажем S. По построению ПММ в шаге 4, имеем, что $\rho(V_l/V_{l+1}) = 1$ и S является компонентой $\lfloor \Gamma_{l+1} \rfloor$. Пусть S' на V_l — бирациональный образ S. Отсюда следует, что S' обилен над V_{l+1} и, следовательно, пересекает каждый слой стягивания $V_l \to V_{l+1}$. Тогда ограничение $S'|_R$ дает компоненту J

дивизора Θ_R с коэффициентом 1, которая отображается на T_{l+1}.

Предположим, что $J \neq T_l$. Замечая, что $\Theta_R \geq J + uT_l$ и $u > \frac{1}{2}$, и рассматривая числа пересечения

$$2 = -K_R \cdot G = \Theta_R \cdot G \geq (J + uT_l) \cdot G,$$

где G — общий слой $R \to M$, мы видим, что $T_l \cdot G = 1$, так как $J \cdot G \geq 1$. Мы заключаем, что степень $T_l \to T_{l+1}$ равна 1. Другими словами, $T_l \to T_{l+1}$ бирационально, и, следовательно, T_l является рациональной кривой, так как T_{l+1} — рациональная кривая.

Теперь предположим, что $J = T_l$. Применяя присоединение $K_R + \Gamma_R := (K_{V_l} + \Gamma_l)|_R$, замечаем, что коэффициент при T_l в Γ_R равен 1, потому что $\Gamma_l \geq R + S'$ и $J = T_l$ является компонентой $S'|_R$. Поскольку $-(K_{V_l} + \Gamma_l)$ обилен над V_{l+1}, мы видим, что

$$-2 + T_l \cdot G = (K_R + T_l) \cdot G \leq (K_R + \Gamma_R) \cdot G < 0,$$

следовательно, $T_l \cdot G = 1$, что снова означает, что $T_l \to T_{l+1}$ бирационально и что T_l является рациональной кривой. □

Доказательство теоремы 6.1.2. Поскольку (X, B) является dlt парой и дивизор $-(K_X + B)$ обилен над Z, существует $\Delta \geq B$, такой что $(X, \Delta) \to Z$ является расслоением Калаби–Яу. Ввиду теоремы 6.1.3 достаточно показать, что X является типа Фано над Z.

Поскольку (X, B) является dlt парой, по определению существует непустое открытое подмножество $U \subset X$, такое что $(U, B|_U)$ лог гладко и U содержит все не-klt-центры (X, B). Выберем дивизор Картье A, такой что $\mathcal{O}_X(A)$ является обильным обратимым пучком на X (не только относительно над Z). Тогда $\mathcal{O}_X(\lfloor B \rfloor + mA)$ порожден глобальными сечениями для $m \gg 0$. В частности, если m достаточно велико, то для каждой точки $x \in U$ существует сечение $\mathcal{O}_X(\lfloor B \rfloor + mA)$, не обращающееся в нуль в x, потому что X гладко в x, так что $\lfloor B \rfloor + mA$ является дивизором Картье в x. Тогда нулевой дивизор этого сечения дает дивизор $0 \leq N \sim \lfloor B \rfloor + mA$, не проходящий через x. Следовательно, существует достаточно общий дивизор $0 \leq M \sim \lfloor B \rfloor + mA$, не содержащий ни одного не-klt-центра (X, B).

Для таких A, m, M пусть $\epsilon > 0$ — достаточно малое число, и пусть

$$\Gamma = B - \epsilon \lfloor B \rfloor + \epsilon M.$$

Тогда (X, Γ) является klt-парой, как можно увидеть, взяв лог разрешение. Действительно, пусть $W \to X$ — лог разрешение, и пусть $K_W + B_W, L_W$ — прообразы $K_X + B, -\lfloor B \rfloor + M$ соответственно. Тогда прообраз $K_X + \Gamma$ равен $K_W + B_W + \epsilon L_W$. Поскольку ϵ мало, любая компонента D дивизора $B_W + \epsilon L_W$ с коэффициентом ≥ 1 является компонентой B_W с коэффициентом 1. Таким образом, центр D на X, скажем V, является не-klt-центром (X, B), поэтому он не содержится в M. Но тогда $V|_U$ должен быть не-klt-центром $(U, (B - \epsilon\lfloor B \rfloor)|_U)$, что невозможно.

С другой стороны, мы можем обеспечить, чтобы дивизор

$$-(K_X + \Gamma) = -(K_X + B - \epsilon\lfloor B \rfloor + \epsilon M) \sim_{\mathbb{Q}} -(K_X + B + \epsilon m A)$$

был обилен над Z, выбрав ϵ достаточно малым. Следовательно, X является типа Фано над Z, что и требовалось. □

Доказательство теоремы 6.1.1. Следует из теоремы 6.1.2. □

Публикации

Результаты диссертации содержатся в следующих публикациях:

1. Конечные абелевы группы, действующие на рационально связных трехмерных многообразиях,

   К. В. Логинов.

   Успехи математических наук, 81:2 (488), 185–186, 2026.

2. Jordan property for groups of bimeromorphic self-maps of complex manifolds with large Kodaira dimension.

   K. Loginov.

   Mathematische Zeitschrift, 309, article number 21, 2025.

3. K-polystability of 3-dimensional log Fano pairs of Maeda type.

   K. Loginov.

   International Journal of Mathematics, 34 (1), 2250095, 2023.

4. A note on 3-subgroups in the space Cremona group.

   K. Loginov.

   Communications in Algebra, 50 (9), 3704–3714, 2022.

5. On semistable degenerations of Fano varieties.

   K. Loginov.

   European Journal of Mathematics, 8, 991–1005, 2022.

6. О корегулярности поверхностей дель Пеццо с дювалевскими особенностями.

   К. В. Логинов, А. С. Трепалин.

   Успехи математических наук, 81:2 (488), 145–176 , 2026.

7. G-coregularity of del Pezzo surfaces.

   K. Loginov, V. Przyjalkowski and A. Trepalin.

   Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics, 329, 117–147, 2025.

8. K-stability of Fano threefolds of rank 3 and degree 14.

   K. Loginov and G. Belousov.

   Annali dell'Universita di Ferrara, 70, 1093–1114, 2024.

9. Coregularity of smooth Fano threefolds.

   K. Loginov, A. Avilov and V. Przyjalkowski.

   Communications in Number theory and Physics, 18 (3), 2024.

10. K-stability of Fano threefolds of rank 4 and degree 24.

    K. Loginov and G. Belousov.

    European Journal of Mathematics, 9 (80), 2023.

11. Maximal log Fano manifolds are generalized Bott towers

    K. Loginov and J. Moraga.

    Journal of Algebra, 612, 110–146, 2022.

12. Bounding non-rationality of divisors on 3-fold Fano fibrations

    K. Loginov and C. Birkar.

    Journal für die reine und angewandte Mathematik (Crelles Journal), 779, 167–188, 2021.

Литература

[AZ20] H. Abban, Z. Zhuang. *Stability of Fano varieties via admissible flags.* preprint, arXiv:2003.13788, 2020.

[AW97] D. Abramovich, J. Wang. *Equivariant resolution of singularities in characteristic* 0. Math. Res. Lett., 4 (2–3), 427–433, 1997.

[Al94] V. Alexeev. *General elephants of* $\mathbf{Q}$*-Fano 3-folds.* Compositio Math., 91 (1), 91–116, 1994.

[AHK07] V. Alexeev, C. Hacon, Y. Kawamata. *Termination of (many) 4-dimensional log flips.* Invent. Math. 168 (2), 433–448, 2007.

[ACC+21] C. Araujo, A.-M. Castravet, I. Cheltsov, K. Fujita, A.-S. Kaloghiros, J. Martinez-Garcia, C. Shramov, H. Süss, N. Viswanathan. *The Calabi problem for Fano threefolds.* MPIM preprint, 2021.

[AM72] M. Artin, D. Mumford. *Some elementary examples of unirational varieties which are not rational.* Proc. London Math. Soc., 25 (3), 75–95, 1972.

[ABB+23] K. Ascher, D. Bejleri, H. Blum, K. DeVleming, G. Inchiostro, Y. Liu, X. Wang. *Moduli of boundary polarized Calabi-Yau pairs.* arXiv:2307.06522, 2023.

[AGV85] V. Arnold, S. Gusein-Zade, A. Varchenko. *Singularities of differentiable maps.* Birkhauser, 1985.

[AKO06] D. Auroux, L. Katzarkov, D. Orlov. *Mirror symmetry for Del Pezzo surfaces: Vanishing cycles and coherent sheaves.* Inv. Math. 166, 537–582, 2006.

[ALP24] A. Avilov, K. Loginov, V. Przyjalkowski. Coregularity of smooth Fano threefolds. *Commun. Number Theory Phys.*, 18 (3), 509–577, 2024.

[BS76] C. Bănică, O. Stănăşilă. *Algebraic methods in the global theory of complex spaces.* Editura Academiei, Bucharest; John Wiley & Sons, London-New York-Sydney, 296 pp, 1976.

[BPELU17] F. Bastianelli, P. De Poi, L. Ein, R. Lazarsfeld, B. Ullery. *Measures of irrationality for hypersurfaces of large degree.* Compos. Math., 153 (11), 2368–2393, 2017.

[BCDP22] J. Blanc, I. Cheltsov, A. Duncan, Yu. Prokhorov. *Birational self-maps of threefolds of (un)-bounded genus or gonality.* Amer. J. Math., 144 (2), 575–597, 2022.

[Beau83] A. Beauville. *Complex algebraic surfaces.* London Mathematical Society Student Texts. 34, Cambridge University Press, 1983.

[Beau07] A. Beauville. *p-Elementary subgroups of the Cremona group.* Journal of Algebra, 314 (2), 553–564, 2007.

[BL23] G. Belousov, K. Loginov. *K-stability of Fano threefolds of rank 4 and degree 24.* Eur. J. Math., 9, 80, 2023.

[BL24] G. Belousov, K. Loginov. *K-stability of Fano threefolds of rank* 3 *and degree* 14.. Annali dell'Universita di Ferrara, 70, 1093–1114, 2024.

[B07] C. Birkar. *Ascending chain condition for log canonical thresholds and termination of log flips.* Duke Math. J. 136 (1), 173–180, 2007.

[B12] C. Birkar. *On existence of log minimal models and weak Zariski decompositions.* Math. Ann., 354, (2), 787– 799, 2012.

[B16] C. Birkar. *Singularities on the base of a Fano type fibration.* J. Reine Angew Math., J. Reine Angew Math., 715, 125-142, 2016.

[B18] C. Birkar. *Log Calabi-Yau fibrations.* arXiv:1811.10709v2, 2018.

[B19] C. Birkar. *Anti-pluricanonical systems on Fano varieties.* Ann. of Math. 190 (2), 345–463, 2019.

[B21] C. Birkar. *Singularities of linear systems and boundedness of Fano varieties.* Ann. of Math. 193 (2), 347–405, 2021.

[B24] C. Birkar. *On connectedness of non-klt loci of singularities of pairs.* J. Differential Geom. 126 (2), 431–474, 2024.

[BCHM09] C. Birkar, P. Cascini, C. D. Hacon, J. McKernan. *Existence of minimal models for varieties of log general type.* Journal of the American Mathematical Society, 23 (2), 405–468, 2006.

[BL21] C. Birkar, K. Loginov. *Bounding non-rationality of divisors on* 3*-fold Fano fibrations.* Journal für die reine und angewandte Mathematik (Crelles Journal), 779, 167–188, 2021.

[Bl07] J. Blanc. *Finite Abelian subgroups of the Cremona group of the plane.* C.R. Acad. Sci. Paris Ser. I ,344 (1), 21–26, 2007.

[BJ20] H. Blum, M. Jonsson. *Thresholds, valuations, and K-stability.* Advances in Mathematics 365, 107062, 2020.

[BH15] J. Blanc, I. Hedén. *The group of Cremona transformations generated by linear maps and the standard involution.* Ann. Inst. Fourier (Grenoble), 65(6), 2641–2680, 2015.

[BH23] S. Brandhorst, T. Hofmann. *Finite subgroups of automorphisms of K3 surfaces.* In Forum of Mathematics, Sigma, vol. 11, p. e54. Cambridge University Press, 2023.

[Ca01] G. Castelnuovo. Le trasformazioni generatrici del gruppo Cremoniano nel piano. *Atti della R. Accad. delle Scienze di Torino*, 36, 861–874, 1901.

[CM10] M. de Cataldo, L. Migliorini. *The perverse filtration and the Lefschetz hyperplane theorem.* Ann. Math., 171 (3), 2089–2113, 2010.

[ChP16] I. Cheltsov, J. Park. *Birationally Rigid Fano Threefold Hypersurfaces.* Memoirs of the American Mathematical Society, vol. 246, 2016.

[CPW14] I. Cheltsov, J. Park, J. Won. *Log canonical thresholds of certain Fano hypersurfaces.* Math. Z. 276, 51–79, 2014.

[ChP22] I. Cheltsov, V. Przyjalkowski, *Fibers over infinity of Landau–Ginzburg models.* Commun. Number Theory Phys., 16 (4), 673–693, 2022.

[CG72] H. Clemens, P. Griffiths. *The intermediate Jacobian of the cubic threefold.* Ann. of Math. (2) 95, 281–356, 1972.

[CR62] C. W. Curtis, I. Reiner. *Representation theory of finite groups and associative algebras.* Pure and Applied Mathematics, Vol. XI. Interscience Publishers, a division of John Wiley & Sons, New York-London, 1962.

[DI09] I. V. Dolgachev, V. A. Iskovskikh. *Finite subgroups of the plane Cremona group.* Algebra, arithmetic, and geometry: in honor of Yu. I. Manin. Vol. I, vol. 269 of Progr. Math., 443–548. Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 2009.

[Don02] S. Donaldson. *Scalar curvature and stability of toric varieties.* J. Differential Geom., 62 (2), 289–349, 2002.

[Du24] T. Ducat. *Quartic surfaces up to volume preserving equivalence.* Selecta Math. (N.S.), 30 (1), Paper No. 2, 27, 2024.

[EL25] L. Esser, J. Li. *Weighted surfaces with maximal Picard number.* arXiv:2506.14037, 2025.

[dFKX17] T. de Fernex, Já. Kollár, C. Xu. *The dual complex of singularities.* Higher dimensional algebraic geometry, in honour of Professor Yujiro Kawamata's sixtieth birthday, Adv. Stud. Pure Math., vol. 74, Math. Soc. Japan, Tokyo, 103–129, 2017.

[Fil25] L. Filin. *On abelian extensions of finite abelian subgroups of Cremona groups.* arXiv:2510.13200, 2025.

[FMM22] S. Filipazzi, M. Mauri, J. Moraga. *Index of coregularity zero log Calabi–Yau pairs.* arXiv:2209.02925, 2022.

[FMMP25] S. Filipazzi, M. Mauri, J. Moraga, J. Peng. *Complements and coregularity of Fano varieties.* Forum of Mathematics, Sigma, 13:e39, 2025.

[Fr83] R. Friedman. *Global smoothings of varieties with normal crossings.* Ann. of Math. 118, 75–114, 1983.

[Fu04] O. Fujino. *Termination of 4-fold canonical flips.* Publ. Res. Inst. Math. Sci. 40 (1), 231–237, 2004.

[Fu16] K. Fujita. *On K-stability and the volume functions of Q-Fano varieties.* Proc. Lond. Math. Soc. 113, 541–582, 2016.

[Fu19] K. Fujita. *A valuative criterion for uniform K-stability of Q-Fano varieties.* J. Reine Angew. Math. 751, 309–338, 2019.

[Fu20] K. Fujita. *On K-Polystability for Log Del Pezzo Pairs of Maeda Type.* Acta Mathematica Vietnamica, 45, 943–965, 2020.

[Fu00] W. Fulton. *Eigenvalues, invariant factors, highest weights, and Schubert calculus.* Bulletin (New Series) of the American Mathematical Society, 37 (3), 209–249, 2000.

[Fu06] W. Fulton. *Young Tableaux With Application to Representation Theory and Geometry.* London Mathematical Society Student Texts 35. Pages 76–77, 2006.

[Go21] A. Golota. *Jordan property for groups of bimeromorphic automorphisms of compact Kähler threefolds.* arXiv:2112.02673, 2021.

[GPK15] M. Gross, P. Hacking, S. Keel. *Mirror symmetry for log Calabi-Yau surfaces I.* Publications Mathématiques de l'IHÉS, Tome 122, 65–168, 2015.

[GS19] M. Gross, B. Siebert. *Intrinsic mirror symmetry.* arXiv:1909.07649. 2019.

[HX13] C. Hacon, C. Xu. *Existence of log canonical closures.* Invent. Math. 192, no. 1, 161–195, 2013.

[HM07] C. Hacon, J. McKernan. *Shokurov's Rational Connectedness Conjecture.* Duke Math. J., 138 (1), 119–136, 2007.

[HMX14] C. Hacon, J. McKernan, C. Xu. *ACC for log canonical thresholds.* Ann. of Math. (2), 180 (2), 523–571, 2014.

[HX16] C. Hacon, C. Xu. *On finiteness of B-representations and semi-log canonical abundance.* Minimal models and extremal Rays (Kyoto, 2011), 361–378, Adv. Stud. in Pure Math 70, Math. Soc. Japan, Tokyo, 2016.

[Ha19] O. Haution. *Fixed point theorems involving numerical invariants.* Compositio Math., 155 (2), 260–288, 2019.

[HKP20] A. Harder, L. Katzarkov, V. Przyjalkowski. *P=W Phenomena.* Math. Notes, 108:1, 39–49, 2020.

[HL12] W. J. Harvey, A. Lloyd-Philipps. *Symmetry and moduli spaces for Riemann surfaces.* Contemporary Mathematics, 575, 153–170, 2012.

[Ha77] R. Hartshorne. *Algebraic geometry.* Springer, 1977.

[HP76] M. Herzog, Ch. E. Praeger. *Boundedness for finite subgroups of linear algebraic groups.* On the order of linear groups of fixed finite exponent. J. Algebra 43, 216–220, 1976.

[Hu06] S. Hu. *Semi-Stable Degeneration of Toric Varieties and Their Hypersurfaces.* Communications in Analysis and Geometry 14 (1), 59–89, 2006.

[Hu27] H. P. Hudson. *Cremona transformations in plane and space.* Cambridge University Press, 1927.

[Hu16] D. Huybrechts. *Lectures on K3 surfaces.* Cambridge University Press, 2016.

[Ish82] Sh. Ishii. *Characterization of hyperplane cuts of smooth complete intersections.* Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci. 58 (7), 309–311, 1982.

[Isk78] V. A. Iskovskikh. *Fano threefolds II.* Math. USSR Izv., 12 (3), 469–506, 1978.

[Isk89] V. A. Iskovskikh. *A double projection from a line on Fano threefolds of the first kind.* translation from Mat. Sb., 180 (2) 260–278, 1989.

[Is91] V. A. Iskovskikh. Generators in the two-dimensional Cremona group over a nonclosed field. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 200, 173–188, 1993.

[IM71] V. Iskovskikh, Yu. Manin. *Three-dimensional quartics and counterexamples to the Lüroth problem.* Matematicheskii Sbornik, Novaya Seriya, 86 (1), 140–166, 1971.

[IP99] V. A. Iskovskikh, Yu. G. Prokhorov. *Algebraic Geometry V: Fano Varieties.* Encyclopaedia of Mathematical Sciences, Book 47. Springer, 1999.

[JL25] C. Jiang, H. Liu. *A canonical Fano threefold has Fano index* ≤ 66. arXiv:2508.16364v1.

[Ka20] A.-S. Kaloghiros. *Some examples of Calabi-Yau pairs with maximal intersection and no toric model.* Proceedings of the INdAM Workshop BGMS, Springer INdAM Series, 2020.

[Kan95] S. Kantor. *Theorie der endlichen Gruppen von eindeutigen Transformationen in der Ebene*, Mayer and Müller, Berlin, 1895.

[Ka69] I. Kaplansky. *Infinite Abelian Groups*, The University of Michigan Press, Ann Arbor, 1969.

[KKP17] L. Katzarkov, M. Kontsevich, T. Pantev, *Bogomolov–Tian–Todorov theorems for Landau–Ginzburg models.* J. Differential Geom., 105, 55–117, 2017.

[Kaw88] Y. Kawamata. *Crepant Blowing-Up of 3-Dimensional Canonical Singularities and Its Application to Degenerations of Surfaces.* Annals of Mathematics, Second Series, 127 (1), 93–163, 1988.

[KMM87] Y. Kawamata, K. Matsuda, K. Matsuki. *Introduction to the minimal model problem.* Algebraic Geometry Sendai 1985, Advanced Studies in Pure Math. 10 (1987), Kinokuniya and North-Holland, 283–360.

[Kim18] J. H. Kim. *Jordan property and automorphism groups of normal compact Kähler varieties.* Commun. Contemp. Math. 20, 3, 1750024, 2018.

[Ko97] J. Kollár. Singularities of pairs. In *Algebraic geometry—Santa Cruz 1995*, volume 62, Part 1 of *Proc. Sympos. Pure Math.*, 221–287. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1997.

[KM92] J. Kollár, S. Mori. *Classification of three-dimensional flips*, J. Amer. Math. Soc. 5 (3), 533–703, 1992.

[KM98] J. Kollár, S. Mori. *Birational geometry of algebraic varieties*, with the collabration of C. H. Clemens and A. Corti. Translated from the 1998 Japanese original. Cambridge Tracts in Mathematics, 134, Cambridge University Press, Cambridge, 1998.

[KS-B88] J. Kollár, N. Shepherd-Barron. *Threefolds and deformations of surface singularities.* Invent. Math., 91 (2), 299–338, 1988.

[KX16] J. Kollár, C. Xu. *The dual complex of Calabi–Yau pairs.* Invent. Math., 205 (3), 527–557, 2016.

[KZh24] J. Kollár, Z. Zhuang. *Essential dimension of isogenies*, arXiv:2402.15362, 2024.

[KT17] M. Kontsevich, Yu. Tschinkel. *Specialization of birational types.* arXiv 1708.05699, 2017.

[Kov22] S. Kovács. *Rational singularities*, arXiv: 1703.02269, 2022.

[KPS18] A. Kuznetsov, Yu. Prokhorov, C. Shramov. *Hilbert schemes of lines and conics and automorphism groups of Fano threefolds.* Jpn. J. Math. 13, 109–185, 2018.

[Kuz20] A. A. Kuznetsova. *Finite* 3*-Subgroups in the Cremona Group of Rank* 3. Math. Notes, 108 (5), 697–715, 2020.

[Ku99] T. Kuwata. *On log canonical thresholds of surfaces in C3.* Tokyo J. Math. 22, 245–251, 1999.

[Laz04] R. Lazarsfeld. *Positivity in algebraic geometry, I: Classical setting: line bundles and linear series.* Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. (3) 48, Springer, Berlin, 2004.

[Li17] C. Li. *K-semistability is equivariant volume minimization.* Duke Math. J. 166, no. 16, 3147–3218, 2017.

[Lo19] K. Loginov. *On nonrational fibers of del Pezzo fibrations over curves.* Math. Notes, 106, 6, 930–939, 2019.

[Lo24] K. Loginov. *Finite abelian groups acting on rationally connected threefolds I: Groups of product type.* arXiv:2408.11645, 2024.

[Lo22] K. Loginov. *A note on 3-subgroups in the space Cremona group.* Communications in Algebra, 50 (9), 3704–3714, 2022.

[Lo23] K. Loginov. *K-polystability of 3-dimensional log Fano pairs of Maeda type.* International Journal of Mathematics, 34 (01), 2250095, 2023.

[LM22] K. Loginov, J. Moraga. *Maximal log Fano manifolds are generalized Bott towers.* Journal of Algebra, 612, 110–146, 2022.

[LMV24] K. Loginov, J. Moraga, A. Vasilkov. *Toric models of smooth Fano threefolds.* arXiv:2407.09420, 2024.

[LPZ25] K. Loginov, A. Pinardin, Zh. Zhang. *Finite abelian groups acting on rationally connected threefolds II: Groups of K3 type.* arXiv:2509.02531, 2025.

[LPT25] K. Loginov, V. Przyjalkowski, A. Trepalin. *Coregularity of smooth Fano threefolds.* Trudy Matematicheskogo Instituta imeni V.A. Steklova, 329, 132–164, 2025.

[LP18] V. Lunts, V. Przyjalkowski. *Landau–Ginzburg Hodge numbers for mirrors of del Pezzo surfaces.* Adv. Math., 329, 189–216, 2018.

[Ma83] H. Maeda. *Classification of logarithmic Fano* 3*-folds.* Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci. 59 (6), 245–247, 1983.

[MS08] E. Macri, P. Stellari. *Automorphisms and autoequivalences of generic analytic surfaces.* Journal of Geometry and Physics, 58 (1), 133–164, 2008.

[Ma02] K. Matsuki. *Introduction to the Mori program.* Universitext. Springer-Verlag, New York, 2002.

[Mar83] D. Markushevich. *Numerical invariants of families of lines on some Fano varieties.* Math. Sb. 44, 239–260, 1983.

[MZh18] S. Meng, D.-Q. Zhang. *Jordan property for non-linear algebraic groups and projective varieties.* Amer. J. Math. 140 (4), 1133–1145, 2018.

[Mi87a] Y. Miyaoka. *The Chern classes and Kodaira dimension of a minimal variety.* Algebraic geometry, Sendai, 1985, Adv. Stud. Pure Math., vol. 10, North-Holland, Amsterdam, 449–476, 1987.

[Mi87b] Y. Miyaoka. *Deformations of a morphism along a foliation and applications.* Algebraic geometry, Bowdoin, 1985 (Brunswick, Maine, 1985), Proc. Sympos. Pure Math., vol. 46, Amer. Math. Soc., Providence, 245–268, 1987.

[Mi88a] Y. Miyaoka. *Abundance conjecture for 3-folds: case $\nu = 1$.* Compositio Math. 68 (2), 203–220, 1988.

[Mi88b] Y. Miyaoka. *On the Kodaira dimension of minimal threefolds.* Math. Ann. 281 (2), 325–332, 1988.

[Mo24] J. Moraga. *Coregularity of Fano varieties.* Geometriae Dedicata, 218, article number 40, 2024.

[Mo85] S. Mori. *On 3-dimensional terminal singularities.* Nagoya Math. J. 98, 43–66, 1985.

[Mo88] S. Mori. *Flip theorem and the existence of minimal models for* 3*-folds.* J. Amer. Math. Soc., 1, 117–253, 1988.

[MU82] S. Mukai, H. Umemura. *Minimal rational threefolds.* In Algebraic Geometry: Proc. Japan France Conf., Lecture Notes in Mathematics, Vol. 1016 (Springer), 490–518, Tokyo, 1982.

[Nik80] V. V. Nikulin. *Finite automorphism groups of Kähler K3 surfaces.* Trans. Mosc. Math. Soc. 2, 71–135, 1980.

[No70] M. Noether. *Ueber Flächen, welche Schaaren rationaler Curven besitzen.* Math. Ann., 3, 161–227, 1871.

[PW] J. Park, J. Won. *K-stability of smooth del Pezzo surfaces.* Math. Annalen 372 (3–4), 1239–1276, 2017.

[Pa99] I. Pan. *Une remarque sur la génération du groupe de Cremona.* Bol. Soc. Brasil. Mat. (N.S.), 30, 95–98, 1999.

[P17] A. Perry. *Rationality does not specialize among terminal fourfolds.* Algebra Number Theory, 11 (9), 2193–2196, 2017.

[Per77] U. Persson. *On degenerations of algebraic surfaces.* Proc. Amer. Math. Soc. 11, no. 189, 1977.

[Po09] V. L. Popov. *On the Makar-Limanov, Derksen invariants, and finite automorphism groups of algebraic varieties.* In Peter Russell's Festschrift, Proceedings of the conference on Affine Algebraic Geometry held in Professor Russell's honour, 1–5 June 2009, McGill Univ., Montreal., vol. 54 of Centre de Recherches Mathématiques CRM Proc. and Lect. Notes, pages 289–311, 2011.

[Po14] V. L. Popov. *Jordan groups and automorphism groups of algebraic varieties*. In Automorphisms in birational and affine geometry. Papers based on the presentations at the conference, Levico Terme, Italy, October 29 – November 3, 2012, 185–213. Cham: Springer, 2014.

[Pr09] Yu. Prokhorov. *Simple finite subgroups of the Cremona group of rank 3*. J. Algebraic Geom. 21, 563–600, 2009.

[Pr11] Yu. Prokhorov. p-elementary subgroups of the Cremona group of rank 3. In *Classification of algebraic varieties*, EMS Ser. Congr. Rep., 327–338. Eur. Math. Soc., Zürich, 2011.

[Pr14] Yu. Prokhorov. 2-elementary subgroups of the space Cremona group. In *Automorphisms in birational and affine geometry*, volume 79 of *Springer Proc. Math. Stat.*, 215–229. Springer, Cham, 2014.

[Pr21] Yu. Prokhorov. Equivariant minimal model program. Russian Math. Surveys, 76 (3), 461–542, 2021.

[PrSh16] Yu. Prokhorov, C. Shramov. *Jordan property for Cremona groups.* Amer. J. Math., 138 (2), 403–418, 2016.

[PrSh17] Yu. Prokhorov, C. Shramov. *p-subgroups in the space Cremona group.* Math. Nachr., 291 (8–9), 1374–1389, 2017.

[PrSh18] Yu. Prokhorov, C. Shramov. *Finite groups of birational selfmaps of threefolds*. Math. Res. Lett., 25 (3), 957–972, 2018.

[PrSh21] Yu. Prokhorov, C. Shramov. *Automorphism groups of compact complex surfaces*. Int. Math. Res. Notices, 2021 (14), 10490–10520, 2021.

[PrSh21b] Yu. Prokhorov, C. Shramov. *Finite groups of bimeromorphic selfmaps of non-uniruled Kähler threefolds*. arXiv:2110.05825, 2021. To appear in Sb. Math.

[Prz17] V. Przyjalkowski. *Calabi–Yau compactifications of toric Landau–Ginzburg models for smooth Fano threefolds.* Sb. Math., 208 (7), 992–1013, 2017.

[Prz18] V. Przyjalkowski. *Toric Landau–Ginzburg models.* Russian Math. Surveys, 73 (6), 1033–1118, 2018.

[Prz22] V. Przyjalkowski. *On singular log Calabi–Yau compactifications of Landau-Ginzburg models.* Sb. Math., 213 (1), 88–108, 2022.

[Re85] M. Reid. *Young person's guide to canonical singularities.* Proceedings of symposia in pure mathematics, 46, 345–414, 1985.

[Sch08] M. Schütt. *Arithmetic of a singular K3 surface.* Michigan Math. J., 56 (3), 513–527, 2006.

[Ser07] J.-P. Serre. *Bounds for the orders of the finite subgroups of G(k).* In Group representation theory, 405–450. EPFL Press, Lausanne, 2007.

[Ser09] J.-P. Serre. *A Minkowski-style bound for the orders of the finite subgroups of the Cremona group of rank* 2 *over an arbitrary field.* Mosc. Math. J., 9 (1), 193–208, 2009.

[Sh80] V. V. Shokurov. *Smoothness of the general anticanonical divisor on a Fano* 3*-fold.* Math. USSR Izvestija, 14 (2), 1980.

[Sh85] V. V. Shokurov. *A nonvanishing theorem.* Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. 49 (3), 635–651, 1985.

[Sh92] V. V. Shokurov. *Three-dimensional log perestroikas.* Izv. Izv. Ross. Akad. Nauk Ser. Mat. 56 (1), 105–203, 1992.

[Sh96] V. V. Shokurov. *3-fold log models.* Algebraic geometry, 4, 2667–2699, 1996.

[Sh00] V. V. Shokurov. *Complements on surfaces.* Journal of Mathematical Sciences, 102, 3876–3932, 2000.

[Sh04] V. V. Shokurov. *Letters of a bi-rationalist. V. Minimal log discrepancies and termination of log flips.* Tr. Mat. Inst. Steklova 246, no. Algebr. Geom. Metody, Svyazi i Prilozh., 328–351, 2004.

[Tia97] G. Tian. *Kähler-Einstein metrics with positive scalar curvature.* Invent. Math. 130 (1), 1–37, 1997.

[T16] B. Totaro. *Rationality does not specialise among terminal varieties.* Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, 161 (1), 13–15, 2016.

[Ue75] K. Ueno. *Classification theory of algebraic varieties and compact complex spaces.* Lecture Notes in Mathematics, Vol. 439. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1975. Notes written in collaboration with P. Cherenack.

[VT87] V. Van Tan. *On the compactification of strongly pseudoconvex surfaces III.* Math. Z.,195, 259–267, 1987.

[Wim96] A. Wiman. *Zur Theorie der endlichen Gruppen von birationalen Transformationen in der Ebene.* Math. Ann., 48, 195–241, 1896.

[Wl08] Ja. Wlodarczyk. *Resolution of singularities of analytic spaces.* Proceedings of 15th Gökova Geometry-Topology Conference, 31–63, 2008.

[Xu21] C. Xu. *K-stability of Fano varieties: an algebro-geometric approach.* EMS Surveys in Mathematical Sciences, 8 1/2, 265–354, 2021.

[Xu18] J. Xu. *Finite p-groups of birational automorphisms and characterizations of rational varieties.* arXiv 1809.09506, 2018.

[Xu20] J. Xu. *A remark on the rank of finite p-groups of birational automorphisms.* Comptes Rendus Mathématique, 358 (7), 827–829, 2020.

[Za15] Yu. G. Zarhin. *Jordan groups and elliptic ruled surfaces.* Transform. Groups, 20 (2), 557–572, 2015.

[Zim12] B. P. Zimmermann. *On finite groups acting on spheres and finite subgroups of orthogonal groups.* Sib. Elektron. Mat. Izv., 9, 1–12, 2012.

[Zha25] O. Zhakupov. *On smooth Fano threefolds with coregularity zero.* Eur. J. Math., 11 (4), article number 84, 2025.

[Zh06] Q. Zhang. *Rational connectedness of log Q-Fano varieties.* Journal für die reine und angewandte Mathematik (Crelles Journal) 590, 131–142, 2006.