Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Математический Институт им. В. А. Стеклова
Российской Академии Наук

На правах рукописи



Криворoль Вячеслав Александрович

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ СИГМА–МОДЕЛЕЙ

Специальность: 1.3.3 – теоретическая физика

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва 2026

Работа выполнена в ФГБУН «Математический Институт им. В. А. Стеклова РАН», г. Москва

Научный руководитель

Быков Дмитрий Владимирович – доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник отдела теоретической физики ФГБУН Математический институт им. В.А. Стеклова РАН
(специальность – 01.04.02)

Официальные оппоненты:

Иванов Евгений Алексеевич – доктор физико – математических наук, профессор, главный научный сотрудник лаборатории теоретической физики им. Н.Н. Боголюбова международной межправительственной организации «Объединенный институт ядерных исследований» (специальность – 01.04.02)
Горский Александр Сергеевич – доктор физико – математических наук, ведущий научный сотрудник лаборатории квантовой физики и информации ФГБУН Институт проблем передачи информации им. А.А. Харкевича Российской академии наук (специальность – 01.04.02)

Ведущая организация: – автономная некоммерческая образовательная организация высшего образования «Сколковский институт науки и технологий»

Защита диссертации состоится 24.09.2026 в 14 час. на заседании диссертационного совета 24.1.167.02 по адресу: г. Москва ул. Губкина, д. 8, ауд. 104.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке МИАН и на сайте https://mi-ras.ru/dis/ref26/krivorol/dis.pdf
Автореферат разослан «_____» июня 2026 г.

Ученый секретарь диссертационного совета

кандидат физ.-мат. наук  А.Е. Теретёнков

Общая характеристика работы

Актуальность темы исследования и степень ее разработанности

Диссертационная работа посвящена исследованию взаимосвязи между геометрией комплексных многообразий и квантовыми аспектами специальных теоретико-полевых/квантово-механических систем, называемых (двумерными или одномерными) сигма-моделями, в которых поля принимают значения в этих многообразиях (называемых в данном контексте таргет-пространствами). Такие модели занимают особое место в теоретической физике, поскольку они служат универсальным языком описания низкоэнергетических эффективных теорий в самых разных областях: от физики сильных взаимодействий до теории струн и физики конденсированного состояния. Центральный вопрос, исследуемый в диссертации, можно сформулировать так: если комплексное таргет-пространство допускает некоторую специальную геометрическую реализацию, существует ли для соответствующей сигма-модели эквивалентная физическая формулировка, отражающая эту реализацию? Ввиду общности постановки мы ограничиваемся рассмотрением двух конкретных сценариев. Первый сценарий предполагает, что комплексное многообразие $\mathcal{M}$ получается с помощью гамильтоновой редукции плоского пространства $\mathbb{C}^n$ по действию некоторой комплексной группы $\mathcal{G}_{\mathbb{C}}$. В основном тексте диссертации мы показываем, что для достаточно широкого класса многообразий $\mathcal{M}$ (в том числе содержащего все эрмитовы симметрические пространства классических групп Ли), обладающих этим свойством, соответствующие двумерные сигма-модели могут быть переформулированы как модели, родственные известной модели Гросса-Невё. Второй сценарий касается случая, когда комплексное многообразие $\mathcal{M}$ обладает нетривиальной группой изометрий и реализуется как лагранжево подмногообразие в произведении коприсоединённых орбит этой группы. При выполнении некоторых дополнительных условий одномерной сигма-модели с таргет-пространством $\mathcal{M}$ (т.е. свободной частице на этом многообразии) можно сопоставить эквивалентную систему, представляющую собой некоторую спиновую цепочку.

Данное исследование направлено не только на углубление понимания математических структур квантовой механики и теории поля, но и на разработку

эффективных вычислительных методов, а также на выявление глубоких связей между различными разделами теоретической и математической физики. Так, установление эквивалентности двумерных сигма-моделей с теориями типа Гросса-Невё открывает новые перспективы для вычисления их β-функций. В исходной геометрической формулировке задача перенормировки исключительно сложна: она требует работы с бесконечным числом взаимодействий, громоздкими геометрическими тензорами и привлечения дополнительных методов, таких как метод фонового поля. Напротив, теории типа Гросса-Невё относятся к числу простейших двумерных квантовых моделей, где анализ перенормировок и ренормгруппы может быть выполнен наиболее прямыми и хорошо разработанными способами. Таким образом, это потенциально позволяет обойти многие технические трудности, включая сложность петлевых вычислений и произвол в выборе координат или фоновых значений полей. Установление взаимосвязи между одномерными сигма-моделями и спиновыми цепочками в свою очередь открывает возможность разработки новых методов исследования спектра оператора Лапласа-Бельтрами, который является квантовым гамильтонианом свободной частицы на многообразии. В частности, в ряде случаев спектральную задачу для оператора Лапласа-Бельтрами удаётся свести к спектральной задаче для спинового гамильтониана, допускающей решение методом анзаца Бете.

Цели и задачи

Основная цель диссертации состоит в построении альтернативных формулировок сигма-моделей для класса комплексных проективных таргет-пространств, обладающих определённой геометрической реализацией. В качестве такой реализации мы рассматриваем два типа геометрических свойств. Первое из них связано с тем, что кокасательное расслоение над многообразием допускает описание как так называемое колчанное многообразие, т.е. его тотальное пространство может быть получено посредством гамильтоновой (симплектической) редукции некоторого векторного пространства. На физическом языке это означает, что “фазовое пространство” сигма-модели реализуется как калибровочная теория на плоском пространстве. Класс многообразий, обладающих указанным свойством, на котором мы сосредоточимся, образуют

грассманианы – наиболее прямое обобщение комплексных проективных пространств $\mathbb{CP}^n$. Одной из задач диссертации является построение для сигма-моделей с грассманианами в качестве таргет-пространств так называемой квазилинейной формулировки первого порядка (или формулировки Гросса-Невё[†]), которая непосредственно отражает данное геометрическое свойство. Мы реализуем эту программу как для бозонных, так и для $\mathcal{N} = (2, 2)$ суперсимметричных двумерных сигма-моделей.

Второе исследуемое свойство таргет-пространств состоит в том, что они допускают лагранжево вложение в произведение коприсоединённых орбит своей группы изометрий. Поскольку это свойство уже было детально изучено для группы изометрий $\mathbf{SU}(n)$ в чисто бозонном случае, в диссертации мы сосредоточимся на его суперсимметричном обобщении, ограничиваясь для простоты простейшим случаем коприсоединённых орбит группы $\mathbf{SU}(2)$, т.е. сферами $\mathbb{S}^2 \simeq \mathbb{CP}^1$. Соответствующее лагранжево вложение (относительно суммы одинаково нормированных форм Фубини-Штуди) имеет вид $\mathbb{CP}^1 \hookrightarrow \mathbb{CP}^1 \times \mathbb{CP}^1$ и задаётся отображением $z \mapsto (z, \bar{z})$, где z – неоднородная координата на $\mathbb{CP}^1$. Существование такого вложения позволяет построить $\mathcal{N} = 2$ и $\mathcal{N} = 4$ суперсимметричные $\mathbf{SU}(2)$ спиновые цепочки на двух узлах, которые в пределе большого спина ("пределе Халдейна") эквивалентны одномерным $\mathcal{N} = 2$ и $\mathcal{N} = 4$ суперсимметричным сигма-моделям на сфере $\mathbb{CP}^1$. Таким образом, основной задачей данной части работы является построение соответствующих суперсимметричных спиновых цепочек как в компонентной форме, так и в $\mathcal{N} = 2$ суперполевом формализме. Такое построение представляет интерес не только само по себе (например, суперполевое описание включает весьма необычные геометрические нелинейные условия киральности), но и открывает возможности для дальнейших обобщений рассматриваемой конструкции.

Основные задачи диссертации:

- Исходя из того, что тотальное пространство кокасательного расслоения над (ортогональными и симплектическими) грассманианами является колчанным многообразием, построить альтернативную формулировку соответствующих двумерных сигма-моделей, содержащую лишь конечное число вершин взаимодействия.

[†]Здесь и далее мы используем термины "квазилинейная формулировка первого порядка" и "формулировка Гросса-Невё" как взаимозаменяемые.

- Обобщить данную конструкцию на случай двумерных $\mathcal{N} = (2, 2)$ суперсимметричных сигма-моделей, построенных на грассманианах с (в некотором смысле допустимой) кэлеровой метрикой.

- Верифицировать согласованность предложенного построения посредством вычисления однопетлевой β-функции полученных бозонных переформулировок грассманианных сигма-моделей.

- Построить $\mathcal{N} = 2$ и $\mathcal{N} = 4$ суперсимметричные спиновые цепочки группы $\mathbf{SU}(2)$ на двух узлах, в пределе большого спина воспроизводящие одномерные сигма-модели с соответствующей суперсимметрией и $\mathbb{CP}^1$ таргет-пространством; представить как их компонентное, так и суперполевое описание.

Научная новизна

Полученные результаты являются новыми. Перечислим основные из них:

- Изучены квазилинейные формулировки первого порядка для сигма-моделей с таргет-пространствами в виде ортогональных и симплектических грассманианов, снабжённых специальной, так называемой нормальной римановой метрикой, и B-полем, задаваемым фундаментальной эрмитовой формой этой метрики. Показано, что такие эквивалентные формы сигма-моделей имеют, в отличие от стандартной "геометрической" формулировки, лишь конечное число вершин взаимодействия.

- Вычислены соответствующие однопетлевые β-функции в такой формулировке. В специальном случае симметрических грассманианов, когда нормальная риманова метрика является кэлеровой, показано, что однопетлевая β-функция в квазилинейной формулировке первого порядка совпадает с β-функцией стандартной формулировки соответствующих сигма-моделей. В случае несимметрических пространств (с нетривиальным B-полем) однопетлевая β-функция ранее не была известна, что делает данный результат новым.

- Для симметрических таргет-пространств построено $\mathcal{N} = (2,2)$ суперсимметричное обобщение квазилинейной формулировки первого порядка.
- Построены $\mathcal{N} = 2$ и $\mathcal{N} = 4$ суперсимметричные $\mathbf{SU}(2)$ спиновые цепочки, воспроизводящие в пределе большого спина сигма-модели с $\mathbb{CP}^1$ таргет-пространством и соответствующей суперсимметрией. Такие модели являются новыми; более того, они допускают необычное $\mathcal{N} = 2$ суперполевое описание, основанное на ранее неизвестных нелинейных киральных мультиплетах, построенных на основе некоторой плоской суперсвязности.

Теоретическая и практическая значимость работы

Результаты, полученные в диссертации, могут быть использованы как для получения новых численных результатов, так и для построения новых интересных моделей математической физики. В частности, квазилинейная формулировка первого порядка открывает возможность проведения многопетлевых пертурбативных вычислений в сигма-моделях, поскольку в данном формализме число взаимодействий и констант связи конечно и невелико. Предположительно, аналогичный подход может быть применён и к другим типам колчанных многообразий. Кроме того, при редукции мирового листа к одномерной мировой линии соответствующие формулировки первого порядка могут быть эффективно использованы для нахождения спектра операторов Лапласа-Бельтрами (то есть квантовых гамильтонианов одномерных сигма-моделей).

Аналогично, построение суперсимметричных спиновых цепочек, эквивалентных сигма-моделям, может быть использовано для вычисления спектра операторов Лапласа-Дольбо и Лапласа-де Рама на различных многообразиях, допускающих реализацию в виде лагранжевых подмногообразий в произведении коприсоединённых орбит. Как показано в работе, суперсимметричные спиновые цепочки также могут быть использованы для вычисления топологических характеристик таргет-многообразий, связанных с теоремами об индексе.

Сами по себе суперсимметричные спиновые цепочки также представляют значительный интерес ввиду их слабой изученности. Построенные нами модели с использованием осцилляторов Швингера–Вигнера и нелинейных киральных мультиплетов плоских суперсвязностей, насколько нам известно, не имеют аналогов в современной литературе. Можно надеяться, что предложенные нами

"короткие" суперсимметричные спиновые цепочки допускают "длинные" обобщения, обладающие хорошими свойствами; в частности, было бы интересно построить суперсимметричные интегрируемые спиновые цепочки с большим числом узлов, обобщающие XXX цепочки, модели Годена и так далее.

Методология и методы исследования

При проведении исследований использовались разнообразные математические методы и конструкции из теоретической и математической физики. В частности, при построении квазилинейной формулировки первого порядка для грассманианов применялись методы теории групп, симплектической и комплексной геометрии, включая гамильтонову редукцию (или, в более общем смысле, так называемый GIT-фактор), колчанные многообразия, симметрические пространства и так далее. Ключевое наблюдение, лежащее в основе квантово-полевых следствий, состоит в том, что тотальное пространство кокасательного расслоения к (унитарному, ортогональному или симплектическому) грассманиану является колчанным многообразием, то есть может быть получено как гамильтонова редукция плоского матричного пространства под действием некоторой (калибровочной) группы. Квантово-полевое вычисление однопетлевой β-функции опирается на методы пертурбативной теории поля в двух измерениях с использованием (анти)голоморфных пропагаторов и ненулевого числа "цветовых индексов", роль которых играют внутренние векторные индексы однородных координат. Например, для грассманиана $\mathsf{Gr}(m,n)$ пропагаторы и вершины несут два внутренних индекса: один принимает m значений, другой — n значений. При построении $\mathcal{N}=(2,2)$ обобщений теорий типа Гросса-Невё также существенно использовалась специфическая геометрия грассманианов и векторных расслоений над ними. Для построения суперсимметричных спиновых цепочек, сходящихся к одномерным сигма-моделям на сфере, использовались методы теории, суперсимметрии и суперпространств, а также элементы теории представлений и гармонического анализа. Суперсимметризация таких цепочек, в свою очередь, приводит к $\mathcal{N}=2$ экзотическим условиям нелинейной киральности.

Положения, выносимые на защиту

На защиту выносятся следующие основные результаты:

1. Для комплексных двумерных сигма-моделей, таргет-пространства которых есть ортогональные и симплектические грассманианы, наделённые нормальной метрикой и B-полем, задающимся фундаментальной эрмитовой форме данной метрики, на классическом уровне построены эквивалентные квазилинейные формулировки первого порядка, характеризующиеся конечным числом вершин взаимодействий. В данном формализме вычислены соответствующие однопетлевые β-функции.

2. В случае симметрических ортогональных и симплектических грассманианов построены $\mathcal{N} = (2, 2)$ суперсимметричные обобщения квазилинейных формулировок первого порядка. Для максимального ортогонального грассманиана предложена альтернативная $\mathcal{N} = (2, 2)$ суперсимметричная формулировка, в которой фермионы явно являются сечениями касательного расслоения, взаимодействие имеет чисто бозонный характер, а фермионы взаимодействуют с бозонами только через топологическое калибровочное поле.

3. Построены двухузловые $\mathcal{N} = 2$ и $\mathcal{N} = 4$ суперсимметричные спиновые цепочки группы $\mathbf{SU}(2)$, которые в пределе большого спина эквивалентны одномерным $\mathcal{N} = 2$ и $\mathcal{N} = 4$ суперсимметричным сигма-моделям с таргет-пространством $\mathbb{CP}^1$. С помощью специальных нелинейных киральных мультиплетов, основанных на плоских суперсвязностях, для данных цепочек построено $\mathcal{N} = 2$ суперполевое описание.

Степень достоверности и апробация результатов

Результаты представлялись соискателем на отечественных и международных конференциях и семинарах, в частности на Student Workshop on Integrability университета Амстердама (Нидерланды), конференциях ОИЯИ “Supersymmetries and Quantum Symmetries”, “Problems of Modern Mathematical Physics” и “Advances in Quantum Field Theory” (г. Дубна), конференциях СПбГУ и института имени Эйлера “Models in Quantum Field Theory” и “Integrable Systems and Quantum Theory” (г. Санкт-Петербург), конференции института математики им. С.Л. Соболева “Механика, геометрия, интегрируемость” (г. Новосибирск), конференции МИАН “Fields and Strings 2025”, семинаре отдела тео-

ретической физики МИАН, семинарах теоргруппы ЛФВЭ МФТИ, а также семинарах пекинского института математических наук и приложений (BIMSA) и математического научного центра Яу университета Цинхуа (Китай).

Публикации

По материалам диссертации опубликовано 4 работы [1–4] в рецензируемых журналах, включённых в список ВАК и/или международных баз данных Web of Science и/или Scopus.

Объем и структура диссертации

Диссертация состоит из введения, 3 глав, заключения и трёх приложений. Суммарный объем цитируемой литературы 165 источников. Общий объем составляет 115 страниц.

Содержание диссертации

Диссертация посвящена исследованию геометрических аспектов некоторых одномерных и двумерных сигма-моделей (как бозонных, так и суперсимметричных) с проективными таргет-пространствами, реализуемыми в виде однородных пространств групп $\mathbf{U}(n)$, $\mathbf{O}(n)$ и $\mathbf{Sp}(2n)$. Простейшим примером такой геометрии служит двумерная сфера $\mathbb{S}^2 \simeq \mathbb{CP}^1 \simeq \frac{\mathbf{SU}(2)}{\mathbf{U}(1)}$; хорошо известны комплексные проективные пространства $\mathbb{CP}^n$. В настоящей работе внимание также уделяется дальнейшим классам таких пространств, а именно унитарным, ортогональным и симплектическим грассманианам. Такие теории в общем случае являются сильно нелинейными, что существенно затрудняет работу с ними. Например, для двумерных теорий поля это проявляется в том, что лагранжиан таких моделей, вообще говоря, содержит бесконечное число взаимодействий, что делает стандартные пертурбативные методы (например, теорию возмущений по константам связи) неприменимыми. Разумеется, можно развивать альтернативные подходы к теории возмущений, например метод фонового поля. Стратегия в данном случае заключается в разложении квантовых полей на классические компоненты (т.е. удовлетворяющие уравнениям движения) и

квантовые поправки, которые предполагаются малыми. Ограничиваясь определённой степенью квантовых поправок в лагранжиане, мы получаем теорию поля с конечным числом взаимодействий. Однако у этого метода есть ряд недостатков. В частности, вычисления могут быть крайне сложными и трудными для автоматизации, а выбор фонового поля зачастую неоднозначен. Эти трудности мотивируют нас на поиск способов уменьшения нелинейности исходной постановки задачи путём привлечения дополнительной информации, например, симметрий системы. Для одномерных же сигма-моделей эта нелинейность проявляется, например, в том, что спектральная задача для квантового гамильтониана свободной частицы на многообразии (оператора Лапласа–Бельтрами) сводится к необходимости решения в общем случае довольно сложного эллиптического дифференциального уравнения второго порядка в частных производных, для которого не существует общего метода решения.

Цель данной диссертации заключается в том, чтобы, используя дополнительные данные о геометрии указанных выше проективных таргет-пространств, снизить степень нелинейности таких теорий, сделав их анализ более прозрачным и удобным. Более конкретно, мы представим два типа эквивалентных переформулировок сигма-моделей, основанных на специфических геометрических реализациях таргет-пространств. Первой переформулировке (в бозонной версии) посвящена Глава 1, а её $\mathcal{N} = (2,2)$ суперсимметричному обобщению — Глава 2. Вторая переформулировка (сразу в суперсимметричном случае) изложена в Главе 3.

Первая реализация связана с тем, что кокасательное расслоение над грассманианом является колчанным многообразием, то есть гамильтоновой редукцией плоского пространства под действием некоторой матричной группы. Соответствующую переформулировку сигма-моделей мы будем называть *квазилинейной формулировкой первого порядка*. Термин “квазилинейная” указывает на то, что нелинейное таргет-пространство сигма-модели описывается через линейное с добавлением калибровочной симметрии. “Первого порядка” означает, что наряду с координатами на таргет-пространстве вводятся также “импульсы”, лежащие в слоях кокасательного расслоения. Как будет показано в основном тексте диссертации, именно такая комбинация геометрических конструкций позволяет построить наиболее простую и элегантную переформулировку. В дальнейшем мы также будем называть её формулировкой Гросса-Невё для сигма-моделей ввиду её структурного сходства с известной двумерной теори-

ей Гросса-Невё. В этом контексте имеет смысл рассматривать как двумерные сигма-модели, так и их одномерные редукции.

Вторая реализация основана на представлении таргет-пространства в виде лагранжева подмногообразия в произведении коприсоединённых орбит, наделённых естественной симплектической структурой — формой Кириллова-Костанта-Сурио. Основное преимущество такого подхода заключается в том, что коприсоединённые орбиты являются в определённом смысле "наименьшими" фазовыми пространствами: квантование одной такой орбиты приводит к "наименьшему" гильбертову пространству, соответствующему неприводимому представлению группы симметрий. В квантовомеханическом контексте это позволяет заменить задачу диагонализации оператора Лапласа–Бельтрами эквивалентной задачей о диагонализации некоторого "спинового" гамильтониана в произведении неприводимых представлений, то есть в спиновой цепочке, для которой уже можно применять мощные алгебраические методы, например анзац Бете. Крайне интересна также суперсимметризация данного соответствия, на чём мы и сосредоточимся в Главе 3, поскольку она приводит к неизвестным ранее $\mathcal{N} = 2$ и $\mathcal{N} = 4$ спиновым цепочкам, имеющим при этом довольно "экзотическую" формулировку в $\mathcal{N} = 2$ суперпространстве. В данном контексте мы ограничиваемся рассмотрением простейшей проективной таргет-геометрии $\mathbb{CP}^1$ для одномерных суперсимметричных сигма-моделей, хотя выход за эти рамки представляет собой важную и интересную задачу.

Суммируя вышесказанное, нашей задачей является получение физических следствий из геометрической информации о возможных реализациях проективных таргет-пространств. Первая реализация связана с представлением в виде колчанного многообразия, вторая – с представлением в виде лагранжева подмногообразия в произведении коприсоединённых орбит. Рассмотрим теперь эти две реализации в отдельности и более подробно.

Двумерные комплексные сигма-модели

Прежде чем обсуждать непосредственно саму квазилинейную формулировку, которой посвящены Главы 1 и 2, зафиксируем некоторые определения, наиболее подходящие нашему контексту и удобные для работы с комплексными многообразиями. Пусть заданы следующие геометрические данные: риманова

поверхность Σ (мировой лист) с комплексной координатой z, комплексное многообразие $\mathcal{M}$ (таргет-пространство) с комплексными координатами $\{u^i\}_{i=1}^{\dim_{\mathbb{C}}\mathcal{M}}$ и эрмитова метрика $g = g_{i\bar{j}}\mathrm{d}u^i\mathrm{d}\bar{u}^{\bar{j}}$. Тогда сигма-модель представляет собой теорию поля на гладких отображениях $\varphi : \Sigma \to \mathcal{M}$ с функционалом действия

$$\mathcal{S}[u] = \int_\Sigma \mathrm{d}^2 z \left(g_{i\bar{j}}(u, \bar{u})\, \bar{\partial} u^i \partial \bar{u}^{\bar{j}} \right) \tag{1}$$

где все координатные функции спущены на мировой лист посредством отображения φ, то есть $u^i(z, \bar{z}) := \varphi^* u^i$, где φ^* есть обратный образ.

Отметим, что наше определение двумерной сигма-модели, вообще говоря, несколько отличается от общепринятого. Его можно переписать в явно инвариантном виде:

$$\mathcal{S}[\varphi] = \frac{1}{2}\int_\Sigma |\mathrm{d}\varphi|^2\, \mathsf{vol}(\Sigma) + \int_\Sigma \varphi^*\omega\,, \tag{2}$$

где $\mathsf{vol}(\Sigma)$ — форма объёма на Σ, построенная по метрике, согласованной с комплексной структурой на римановой поверхности, $|\mathrm{d}\varphi|^2$ — квадрат нормы дифференциала отображения $\varphi : \Sigma \to \mathcal{M}$, вычисленный по соответствующим метрикам, а ω — фундаментальная эрмитова форма метрики g, которая в локальных координатах имеет вид

$$\omega = \frac{i}{2} g_{i\bar{j}}\, \mathrm{d}u^i \wedge \mathrm{d}\bar{u}^{\bar{j}}\,. \tag{3}$$

Таким образом, наше определение сигма-модели (2) в комплексном контексте явно включает в себя как стандартное определение сигма-модели (первое слагаемое в (2), представляющее собой функционал энергии), так и слагаемое с так называемым B-полем, задаваемое интегралом от фундаментальной эрмитовой 2-формы. Такое B-поле является топологическим (и, следовательно, не вносит вклад в уравнения движения) в случае, когда $\mathrm{d}\omega = 0$, что означает, что многообразие $\mathcal{M}$ кэлерово. Таким образом, с точностью до топологических слагаемых наше определение (2) для кэлеровых многообразий совпадает со стандартным, а в общем случае содержит, вообще говоря, нетривиальное B-поле.

В качестве прототипичного примера приведем явно $\mathbb{CP}^{n-1}$ сигма-модель, построенной по метрике Фубини–Штуди (т.е. единственной $\mathbf{SU}(n)$-инвариантной

метрике на комплексном проективном пространстве):

$$\mathcal{S}[u] = \int_\Sigma \mathrm{d}^2 z \left(\frac{\left(1+|u|^2\right)|\bar\partial u|^2 - |\bar u \cdot \bar\partial u|^2}{2\pi\kappa\left(1+|u|^2\right)^2} \right). \tag{4}$$

Здесь u – это "вектор", составленный из неоднородных координат $u^1, \ldots, u^{n-1}$, точка $\cdot$ обозначает скалярное произведение (свёртку индексов), $|u|^2 := \bar u \cdot u$, а κ — константа связи.

Квазилинейная формулировка сигма-моделей

Обсудим идею формализма Гросса–Невё (или квазилинейной формулировки первого порядка[‡]). Бозонный вариант этого формализма для двумерных сигма-моделей рассматривается в Главе 1, а его $\mathcal{N} = (2,2)$ суперсимметричное обобщение — в Главе 2. Как уже упоминалось, основная проблема исследования сигма-моделей заключается в том, что, вообще говоря, таргет-пространство в общем случае является крайне нелинейным. Идея состоит в том, чтобы перейти от теории со сложным таргет-пространством к калибровочной теории с *плоским "фазовым пространством"*

$$\underbrace{\mathcal{M}}_{\text{стандартная формулировка}} \rightsquigarrow \underbrace{\mathrm{T}^*\mathcal{M}}_{\text{формулировка 1-го порядка}} \simeq \underbrace{\mathrm{T}^*\mathbb{C}^N /\!/ \mathcal{G}_{\mathbb{C}}}_{\text{GLSM 1-го порядка ("Гросс-Невё")}} \tag{5}$$

для некоторых N и *комплексной калибровочной группы* $\mathcal{G}_{\mathbb{C}}$ (символ $/\!/$ означает гамильтонову редукцию по $\mathcal{G}_{\mathbb{C}}$ пространства $\mathrm{T}^*\mathbb{C}^N$ со стандартной симплектической формой). С точностью до некоторых технических предположений многообразия, обладающие таким представлением, называются *колчанными многообразиями*. Если такая формулировка кокасательного расслоения к таргет-пространству существует, наш метод, используемый в диссертации, состоит в том, чтобы постулировать действие специального вида, а затем обосновать его эквивалентность сигма-модели.

Построение осуществляется в два этапа. Сначала обсудим кинетический член таких теорий. Предположим, что u и v — это вектор и ковектор, составленные из канонических координат и импульсов на $\mathrm{T}^*\mathbb{C}^N$ соответственно, а

[‡]Здесь и далее эти термины используются как синонимы.

$\mu = \mu(v,u) \in \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}^*$ — отображение момента симплектической редукции относительно $\mathcal{G}_{\mathbb{C}}$. Тогда можно определить следующую *калибровочную $\beta\gamma$-систему*,

$$\mathcal{S}_0[v,u,A] = \int_\Sigma \mathrm{d}^2 z \Big(v \cdot \bar\partial u + \langle \overline{\mathcal{A}}, \mu \rangle - \bar v \cdot \partial \bar u - \langle \mathcal{A}, \bar\mu \rangle \Big) , \tag{6}$$

где $A = \mathcal{A}\mathrm{d}z + \overline{\mathcal{A}}\,\mathrm{d}\bar z$ — $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$-значное калибровочное поле на Σ (множитель Лагранжа для связи $\mu = 0$), а $\langle \bullet, \bullet \rangle$ — спаривание между $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ и $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}^*$. В дальнейшем, однако, мы иногда будем рассматривать μ как "отображение комоментов", то есть как элемент $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$, получаемый из $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}^*$ с помощью метрики Киллинга (которую мы далее обозначаем как Tr).

Далее в теорию (6) вводятся взаимодействия. Для этого необходимо найти группу $\widetilde{\mathcal{G}_{\mathbb{C}}}$ глобальных симметрий голоморфного сектора свободного действия (6). Действие этой группы имеет некоторое отображение комоментов (ток Нётер), который мы обозначим через $J \in \widetilde{\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}}$. Затем можно связать голоморфный и антиголоморфный сектора теории (6) ток-токовым членом с константой связи κ, то есть

$$\mathcal{S}_{\mathrm{GN}} = \mathcal{S}_0 + 2\pi\kappa \int_\Sigma \mathrm{d}^2 z \, \mathrm{Tr}\big(J\, \overline{J}\, \big) . \tag{7}$$

Мы называем это действие *квазилинейным действием (GLSM) первого порядка*, или *обобщённым (киральным) действием Гросса–Невё*. Действия такого типа можно рассматривать как некоторое обобщение киральных моделей Гросса–Невё. Мотивация введения такого действия заключается в том, что определённый класс сигма-моделей может быть тождественно (по крайней мере на классическом уровне) переписан в такой форме. Более того, число вершин взаимодействия в таких теориях конечно, а калибровочное поле является топологическим (для плоского мирового листа это означает, что существует калибровка $A = 0$).

Класс моделей, которые к настоящему времени были переформулированы в виде моделей Гросса-Невё, включает теории с $\mathbf{SU}(n)$-симметрией, в частности $\mathbb{CP}^{n-1}$ модели. Естественно ожидать, что аналогичная программа может быть выполнена для теорий с другими группами симметрии. Настоящая диссертация делает шаг в этом направлении, наиболее концентрируясь на семействах ортогональных (группа симметрии $\mathbf{O}(n)$) и симплектических (группа симметрии $\mathbf{Sp}(2n)$) грассманианов в Главах 1 и 2. Включая $\mathbf{SU}(n)$-случай, эти семейства имеют вид, указанный в Таблице 1.

Тип	**Факторпространство**
Унитарные	$\mathsf{Gr}(m,n) := \dfrac{\mathbf{U}(n)}{\mathbf{U}(m)\times\mathbf{U}(n-m)}$
Ортогональные	$\mathsf{OGr}(m,n) := \dfrac{\mathbf{O}(n)}{\mathbf{U}(m)\times\mathbf{O}(n-2m)}$
Симплектические	$\mathsf{SGr}(m,2n) := \dfrac{\mathbf{Sp}(2n)}{\mathbf{U}(m)\times\mathbf{Sp}(2(n-m))}$

Таблица 1: Грассманианы унитарной, ортогональной и симплектической серий.

Хотя модели на симметрических пространствах составляют лишь часть полного ландшафта интегрируемых сигма-моделей, они действительно выделяются. Причина в том, что только для этих пространств наша конструкция дает кэлеровы метрики для сигма-моделей. Фактически, все указанные выше грассманианы допускают кэлеровы метрики, но в общем случае они отличаются от так называемой "нормальной", или редуктивной, метрики, которую, как показано в Главе 1, дает наша конструкция.

Кратко напомним определение. Пусть задана полупростая группа Ли $\mathcal{G}$ с подгруппой $\mathcal{H} \hookrightarrow \mathcal{G}$, а соответствующие алгебры Ли обозначим $\mathfrak{g}$ и $\mathfrak{h}$. Тогда можно разложить $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{m}$, где $\mathfrak{m}$ — ортогональное дополнение к $\mathfrak{h}$ относительно метрики Киллинга. Аналогично разложим соответствующую форму Маурера–Картана $\theta = g^{-1}\mathrm{d}g$ на компоненты $\theta = \theta_{\mathfrak{h}} + \theta_{\mathfrak{m}}$. Нормальную метрику на однородном пространстве $\mathcal{G}/\mathcal{H}$ можно ввести как $\mathrm{d}s^2_{\text{норм}} = -\mathrm{Tr}\,\theta^2_{\mathfrak{m}}$. Оказывается, что именно такой тип метрики является наиболее естественным в нашем контексте. Полезно отметить, что такая метрика является кэлеровой (а, значит, определяет только топологическое B-поле для сигма-моделей) только в случае так называемых симметрических грассманианов $\mathsf{Gr}(m,n)$, $\mathsf{OGr}(1,n)$, $\mathsf{OGr}(m,2m)$, $\mathsf{SGr}(m,2m)$.

Таким образом, основной задачей Главы 1 диссертации является построение квазилинейной формулировки первого порядка (7) для грассманианов, указанных в Таблице 1, и установление эквивалентности данных моделей с соответствующими сигма-моделями, наделёнными описанной выше нормальной римановой метрикой. Опишем кратко основной результат о данных, необхо-

димых для построения грассманианных моделей Гросса-Невё, эквивалентных сигма-моделям. Все кокасательные расслоения таких таргет-пространств имеют вид симплектического фактора $\mathrm{T}^*\mathrm{Mat}_{m,n}(\mathbb{C})//\mathcal{G}_{\mathbb{C}}$ для различных $\mathcal{G}_{\mathbb{C}}$, которые мы опишем ниже. В качестве канонически сопряжённых координат на $\mathrm{T}^*\mathrm{Mat}_{m,n}(\mathbb{C})$ используются матрицы U размера $m \times n$ и V размера $n \times m$ соответственно. Все группы $\widetilde{\mathcal{G}_{\mathbb{C}}}$ являются подгруппами в $\mathbf{GL}(n,\mathbb{C})$ и действуют как $U \to hU$, $V \to Vh^{-1}$. Далее, существуют три ситуации, соответствующие различным грассманианам в Таблице 1:

- Унитарный случай: группа калибровочных преобразований $\mathcal{G}_{\mathbb{C}} = \mathbf{GL}(m,\mathbb{C})$ действует как $U \to Ug$, $V \to g^{-1}V$ с отображением комоментов $\mu = VU$. Глобальная группа $\widetilde{\mathcal{G}_{\mathbb{C}}}$ есть $\mathbf{GL}(n,\mathbb{C})$, а соответствующий ток имеет вид $J = UV$.

- Ортогональный случай: калибровочная группа $\mathcal{G}_{\mathbb{C}} = \mathbf{GL}(m,\mathbb{C}) \rtimes \mathrm{Mat}_m^{\text{symm}}$, где $\mathrm{Mat}_m^{\text{symm}}$ — абелева группа по сложению симметричных матриц размера $m \times m$. Действие задаётся как $U \to Ug$, $V \to g^{-1}V + qU^t$, $q \in \mathrm{Mat}_m^{\text{symm}}$. Удобно считать, что имеются два отображения комоментов, соответствующие первому и второму сомножителям полупрямого произведения: $\mu_1 = VU$ и $\mu_2 = U^tU$. Глобальная группа $\widetilde{\mathcal{G}_{\mathbb{C}}}$ равна $\mathbf{SO}(n,\mathbb{C})$, а соответствующий ток имеет вид $J = UV - (UV)^t$.

- Симплектический случай: он дословно повторяет предыдущий с незначительными изменениями. Достаточно сказать, что калибровочная группа есть $\mathcal{G}_{\mathbb{C}} = \mathbf{GL}(m,\mathbb{C}) \rtimes \mathrm{Mat}_m^{\text{skew-symm}}$, а глобальная группа $\widetilde{\mathcal{G}_{\mathbb{C}}}$ есть $\mathbf{Sp}(2n,\mathbb{C})$.

Таким образом, в Главе 1 мы обсуждаем, что квазилинейная формулировка первого порядка (7) для указанных выше грассманианов имеет структуру

$$\mathcal{L} = \mathrm{Tr}\left(V\,\overline{D}U + \bar{U}D\bar{V}\right) + (\text{условия изотропии}) + 2\pi\kappa\,\mathrm{Tr}\big(J\,\overline{J}\,\big)\,, \qquad (8)$$

где токи J явно указаны выше, а D является ковариантной производной относительно калибровочного поля $\mathcal{A}$. Условия изотропии, например для ортогональных грассманианов, имеют вид $U^tU = 0$; для данных таргет-пространств они добавляются в действие с помощью множителей Лагранжа. Мы доказываем, что если исключить вспомогательные переменные $\mathcal{A}$ и V, выражая их

алгебраически из уравнений движения, и зафиксировать калибровку относительно группы $\mathcal{G}_{\mathbb{C}}$, то модели (8) оказываются явно эквивалентны соответствующим сигма-моделям грассманианов из Таблицы 1, наделённых нормальной метрикой. В случае изотропных (т.е. ортогональных и симплектических) грассманианов из-за дополнительной абелевой калибровочной симметрии $\mathrm{Mat}_m^{\text{symm}}$ или $\mathrm{Mat}_m^{\text{skew-symm}}$ квадратичная форма полей V и $\bar{V}$ в действии оказывается вырожденной, поэтому для доказательства приходится накладывать промежуточную калибровку и использовать "трюк α-калибровки" (аналогично вычислению пропагатора в КЭД и КХД).

Также в Главе 1 мы вычисляем однопетлевую β-функцию для константы связи κ в моделях (8) для плоского мирового листа в топологической калибровке $\mathcal{A} = \overline{\mathcal{A}} = 0$, существование которой можно обосновать методами комплексного анализа. Мы показываем, что на однопетлевом уровне все диаграммы имеют одинаковую логарифмическую расходимость, и вся нетривиальность перенормировки сводится к учёту внутренних матричных индексов полей U, V и их сопряжённых. Проведённый анализ показывает, что однопетлевая β-функция пропорциональна $\beta^{(\text{one loop})} = -h^\vee \kappa^2$, где $h^\vee$ — двойственное число Кокстера алгебры глобальной симметрии теории. Для симметрических пространств (где B-поле является топологическим, как обсуждалось) этот результат воспроизводит известные результаты, тогда как для несимметрических пространств он является новым.

$\mathcal{N} = (2,2)$ обобщение формализма Гросса-Невё

Как уже отмечалось, в формализме Гросса-Невё симметрические пространства выделяются тем, что нормальные римановы метрики сигма-моделей, получаемые во втором порядке после исключения вспомогательных полей, оказываются кэлеровыми. Следовательно, такие сигма-модели допускают $\mathcal{N} = (2,2)$ суперсимметричные расширения, и логично предполагать, что аналогичную суперсимметризацию должны получать и соответсвующие модели типа Гросса-Невё. Следуя этой идее, в Главе 2 построено $\mathcal{N} = (2,2)$ суперсимметричное обобщение квазилинейной формулировки первого порядка для симметрических грассманианов классических серий. При этом предлагаются два варианта таких обобщений: первый реализует суперсимметрию наиболее явным образом, а второй делает явной геометрию фермионных степеней свободы.

Мы строим суперсимметричное обобщение моделей типа (8) следующим образом. Для матричных полей U, V вводятся фермионные матричные поля-суперпартнёры C, B тех же матричных размеров. По аналогии с известными суперсимметричными $\beta\gamma$-системами, $\mathcal{N} = (2,2)$ суперсимметричные преобразования, относительно которых мы ищем обобщение, имеют вид

$$\delta U = \epsilon_1 C, \quad \delta C = -\epsilon_2 DU \qquad \text{и} \qquad \delta V = \epsilon_2 DB, \quad \delta B = -\epsilon_1 V. \tag{9}$$

Здесь $\epsilon_{1,2}$ есть параметры преобразований суперсимметрии. Идея состоит в том, чтобы постулировать прямое обобщение системы (8), в котором поля C и B входят аналогично полям U и V, и затем выяснить, при каких условиях такие действия действительно инвариантны относительно (9). Конкретнее, в Главе 2 мы постулируем лагранжиан вида

$$\mathcal{L} = \operatorname{Tr}\big(V\overline{D}U + B\overline{D}C + i\overline{\mathcal{W}}BU\big) + (\text{связи изотропии}) - \text{к.с.} + \kappa \operatorname{Tr}\big(\mathcal{J}\overline{\mathcal{J}}\,\big)\,. \tag{10}$$

Здесь к.с. обозначает комплексно сопряжённые слагаемые, дополнительный множитель Лагранжа $\overline{\mathcal{W}}$ введён для реализации связи $BU = 0$, являющейся суперсимметричным партнёром связи $VU + BC = 0$ (вместе с $\overline{\mathcal{A}}$). (Супер)условия изотропии и "супертоки" $\mathcal{J}$ имеют следующий вид:

- Унитарный случай: $\mathcal{J} = UV - CB$; условия изотропии отсутствуют.
- Ортогональный случай: $\mathcal{J} = UV - CB - (UV - CB)^t$; условия изотропии: $U^tU = 0$ и их суперпартнёры $C^tU + U^tC = 0$ относительно (9).

Симплектический случай определяется аналогично ортогональному, поэтому его описание, приведённое в основном тексте диссертации, здесь опущено.

Одно из основных утверждений Главы 2 является то, что действия вида (10) являются симметричными относительно (9) только в случае симметрических грассманианов. Для несимметрических грассманианов соответствующая нормальная метрика не является кэлеровой, и потому в рамках данного подхода $\mathcal{N} = (2,2)$ суперсимметрия указанного вида не реализуется в виду наличия некоторых описанных в тексте препятствий. Тем самым построение $\mathcal{N} = (2,2)$ суперсимметричных теорий Гросса-Невё, связанных с сигма-моделями, замыкается только на эрмитовых симметрических пространствах:

$$\mathsf{Gr}(m,n), \qquad \mathsf{OGr}(1,n), \qquad \mathsf{OGr}(m,2m), \qquad \mathsf{SGr}(m,2m), \tag{11}$$

что находится в согласии с известным фактом о суперсимметричных сигма-моделях с кэлеровыми таргет-пространствами. Тем самым в Главе 2 построены $\mathcal{N} = (2,2)$ суперсимметричные формулировки первого порядка для всех симметрических, в том числе максимальных и минимальных ортогональных, а также максимальных симплектических грассманианов.

Отдельно в диссертации рассмотрен случай максимальных грассманианов. У этого имеется следующая мотивация. Из теории $\mathcal{N} = (2,2)$ суперсимметричных сигма-моделей известно, что фермионы принимают значения в касательном расслоении таргет-пространства (иначе говоря, они несут "касательные" индексы, которые свёртываются с тензором Римана, связностью Леви-Чивиты и т.д.). Однако действия (10) для симметрических грассманианов этого свойства, по крайней мере явно, не отражают. Поэтому для грассманианов с наиболее простым устройством касательного расслоения целесообразно переписать действия (10) в форме, где геометрия касательного расслоения проявляется более явно.

Оказывается, касательное пространство наиболее просто устроено для максимальных грассманианов:

$$\mathsf{TOGr}(m,2m) \simeq \Lambda^2\mathcal{S}^\vee, \qquad \mathsf{TSGr}(m,2m) \simeq \mathrm{Sym}^2\mathcal{S}^\vee, \tag{12}$$

где $\mathcal{S}^\vee$ — расслоение, двойственное к тавтологическому на соответствующем грассманиане, а Λ^2 и Sym^2 обозначают внешний и симметрический квадраты соответственно. Из этих изоморфизмов следует, что фермионы в соответсвующих суперсимметричных моделях можно переписать как кососимметрические матрицы в ортогональном случае и как симметрические матрицы в симплектическом случае. Оказывается, это простое соображение приводит к альтернативной формулировке суперсимметричных моделей типа Гросса–Невё, в которой фермионы взаимодействуют с бозонным сектором "минимальным образом" — исключительно через калибровочное поле $\mathcal{A}$.

Такую альтернативную формулировку, например, для максимального ортогонального грассманиана, можно получить следующим образом. Поскольку касательное расслоение в данном случае представляет собой внешний квадрат, "геометрические" фермионы естественно искать в виде $m \times m$ антисимметрических матриц. Разрешая в (10) связь $BU = 0$ в форме $B = HU^t$ и используя калибровочную симметрию, можно добиться того, чтобы такой новый фермион H оказался кососимметрическим. Второй "геометрический" фермион вво-

дится как $F = U^t C$, который также является антисимметрическим благодаря суперпартнёру условия изотропии. После дополнительного сдвига бозонной переменной $V \to V - (CH)^t$ лагранжиан (10) для максимального ортогонального грассманиана принимает вид

$$\mathcal{L} = \mathrm{Tr}\Big[\big(V\,\overline{D}U + H\,\overline{D}F\big) + i\mathcal{R}\,U^t U - \text{к.с.}\Big] + \kappa\,\mathrm{Tr}\big(J_{\mathfrak{so}}\overline{J}_{\mathfrak{so}}\big)\,. \tag{13}$$

В этом выражении взаимодействие имеет чисто бозонный характер, а фермионы взаимодействуют с бозонами только через "топологическое" калибровочное поле $\mathcal{A}$, которое может быть полностью исключено выбором калибровки. Здесь $\mathcal{R}$ — множитель Лагранжа, обеспечивающий выполнение чисто бозонных условий изотропии. Данный результат, то есть вывод альтернативной суперсимметричной модели типа Гросса-Невё (13), также является ключевым в Главе 2.

Наконец, в простейших случаях

$$\mathsf{OGr}(2,4) \simeq \mathbb{CP}^1, \qquad \mathsf{SGr}(1,2) \simeq \mathbb{CP}^1, \tag{14}$$

путём прямого исключения вспомогательных полей доказана эквивалентность полученных моделей стандартной $\mathcal{N} = (2,2)$ суперсимметричной $\mathbb{CP}^1$-сигма-модели, что является нетривиальной проверкой наших рассуждений.

Итак, основной результат Главы 2 заключается в построении $\mathcal{N} = (2,2)$ суперсимметричных квазилинейных формулировок первого порядка для всех симметрических грассманианов классических серий, а также в выделении для максимальных ортогонального и симплектического случаев специальной формулировки, в которой фермионы явно являются сечениями касательного расслоения.

Одномерные сигма-модели и спиновые цепочки

Целью Главы 3 является построение $\mathcal{N} = 2$ и $\mathcal{N} = 4$ суперсимметричных $\mathbf{SU}(2)$-спиновых цепочек, которые в пределе большого спина воспроизводят так называемые $\mathcal{N} = 2b$ (основанные на киральных $\mathcal{N} = 2$ суперполях) и $\mathcal{N} = 4a$ (основанные на вещественных $\mathcal{N} = 2$ суперполях) одномерные суперсимметричные сигма-модели с таргет-пространством $\mathbb{CP}^1$. Более того, суперсимметричные спиновые цепочки спина $\frac{p}{2}$ могут интерпретироваться как усечения соответсвующих сигма-моделей (то есть свободных суперсимметричных

частиц на сфере) на уровне p сферических гармоник. Как объясняется в начале диссертации, эта задача имеет непосредственный геометрический контекст, связанный с симплектической и лагранжевой геометрией, геометрической теорией представлений и т.д. Однако в Главе 3 мы концентрируемся скорее на суперсимметричных, нежели на геометрических аспектах, что и объясняет выбор простейшего таргет-пространства.

С точки зрения суперсимметрии, построенные модели, по-видимому, являются новыми спиновыми моделями, которые удобнее всего описывать в $\mathcal{N} = 2$ суперпространстве в терминах *нелинейных киральных мультиплетов*. Соответствующая нелинейная суперполевая связь представляет собой обобщённое условие киральности относительно некоторой плоской суперсвязности в $\mathcal{N} = 2$ суперпространстве (тривиальная связность соответствует обычному условию киральности).

Как и в случае $\mathcal{N} = 2$ сигма-моделей на сфере, которые бывают двух видов ($2b$ и $4a$), в Главе 3 мы строим два типа суперсимметричных спиновых цепочек:

- **D-модель**, для которой суперсвязность принимает значения в верхнетреугольных матрицах 2×2. Такая модель обладает $\mathcal{N} = 2$ суперсимметрией.

- **K-модель:** для которой суперсвязность принимает значения в общих матрицах 2×2. Такая модель обладает $\mathcal{N} = 4$ суперсимметрией.

Опишем кратко сначала классический вариант K-модели в суперпространстве, деформируя некоторую свободную механическую систему. Как мы покажем в основном тексте диссертации, суперсимметричная цепочка получается её квантованием. Чтобы ввести необходимую свободную систему, рассмотрим следующий набор полей в $\mathcal{N} = 2$ суперпространстве: два бозонных киральных дублета $\mathbf{Z}_1^\alpha, \mathbf{Z}_2^\alpha$ ($\alpha = 1, 2$), два фермионных киральных поля $\mathbf{\Psi}_{12}, \mathbf{\Phi}_{21}$ и два дополнительных фермионных киральных суперполя $\mathbf{\Lambda}_1, \mathbf{\Lambda}_2$. Постулируем свободную систему вида

$$\begin{aligned}\mathscr{L}_0 = \frac{1}{2}\int \mathrm{d}^2\theta\Big(|\mathbf{Z}_1|^2 + |\mathbf{Z}_2|^2 + |\mathbf{\Psi}_{12}|^2 + |\mathbf{\Phi}_{21}|^2\Big) + \\ -p\int \mathrm{d}\theta\,\Big(\mathbf{\Lambda}_1 + \mathbf{\Lambda}_2\Big) + p\int \mathrm{d}\bar\theta\,\Big(\overline{\mathbf{\Lambda}}_1 + \overline{\mathbf{\Lambda}}_2\Big),\end{aligned} \tag{15}$$

где p — вещественный параметр Файе–Илиопулоса, который, как показано в

тексте диссертации, имеет смысл количества сферических гармоник, учитываемого усечением спиновой цепочки.

Чтобы добавить взаимодействие в эту систему, мы деформируем условия киральности для наших полей следующим нелинейным образом:

$$\begin{pmatrix} \overline{D}\mathbf{Z}_1 \\ \overline{D}\mathbf{Z}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{\Lambda}_1 & \mathbf{\Psi}_{12} \\ \mathbf{\Phi}_{21} & \mathbf{\Lambda}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{Z}_1 \\ \mathbf{Z}_2 \end{pmatrix} , \tag{16}$$

где $\overline{D}$ есть $\mathcal{N} = 2$ суперпроизводная. Уравнение (16) можно интерпретировать как утверждение о существовании базиса ковариантно постоянных сечений относительно некоторой суперсвязности. Такие сечения существуют в том случае, если такая суперсвязность является плоской.

В свою очередь D-модель в данном $\mathcal{N} = 2$ формализме может быть описана аналогичным образом, если формально положить $\mathbf{\Phi}_{21} = 0$.

Как показано в работе, такие модели, будучи редуцированы к компонентной формулировке, квантуются в суперсимметричные спиновые цепочки, записанные в осцилляторной реализации Швингера–Вигнера. Сначала опишем квантовую K-модель в терминах осцилляторов. Введём набор бозонных операторов рождения/уничтожения $z_1^\alpha, (z_1^\dagger)^\alpha, z_2^\alpha, (z_2^\dagger)^\alpha$ (где $\alpha = 1, 2$), а также набор фермионных операторов рождения/уничтожения $\psi_{12}, \psi_{12}^\dagger, \phi_{21}, \phi_{21}^\dagger$, удовлетворяющих каноническим (анти)коммутационным соотношениям

$$\begin{gathered} \left[z_A^\alpha, (z_B^\dagger)^\beta \right] = \delta_{AB}\, \delta^{\alpha\beta} , \qquad A, B = 1, 2 , \quad \alpha, \beta = 1, 2 , \\ \left\{ \psi_{12}, \psi_{12}^\dagger \right\} = \left\{ \phi_{21}, \phi_{21}^\dagger \right\} = 1 . \end{gathered} \tag{17}$$

Указанные операторы рождения и уничтожения естественным образом действуют в фоковском пространстве. Наложим дополнительные ограничения, потребовав, чтобы операторы

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_1 &= z_1^\dagger \circ z_1 + \psi_{12}^\dagger \psi_{12} - \phi_{21}^\dagger \phi_{21} - p , \\ \mathcal{C}_2 &= z_2^\dagger \circ z_2 - \psi_{12}^\dagger \psi_{12} + \phi_{21}^\dagger \phi_{21} - p \end{aligned} \tag{18}$$

обращались в нуль при действии на состояния, т.е. дополнительно потребуем $\mathcal{C}_1 = \mathcal{C}_2 = 0$ (в смысле действия на состояния). Здесь $\circ$ обозначает свёртку греческих внутренних индексов. В Главе 3 показано, что квантовая K-модель

определена именно в таком усечённом гильбертовом пространстве, а $\mathcal{N} = 4$ суперсимметрия задаётся посредством суперзарядов

$$\mathcal{Q}_1 = \psi_{12}\left(z_1^\dagger \circ z_2\right), \qquad \mathcal{Q}_2 = \phi_{21}^\dagger\left(z_1^\dagger \circ z_2\right). \tag{19}$$

Более того, можно показать, что такая модель является суперсимметричным обобщением XXX спиновой цепочки спина $\frac{p}{2}$ на двух узлах, записанной в осцилляторном представлении.

В свою очередь D-модель с $\mathcal{N} = 2$ суперсимметрией получается из K-модели формальным обнулением $\phi_{21} = 0$ и использованием только $\mathcal{Q}_1$ в качестве единственного комплексного суперзаряда.

Оказывается, это естественные спиноцепочечные аналоги сигма-моделей типа 2b и 4a соответственно (**D** — сокращение от Dolbeault, а **K** — от Kähler-de Rham). Как мы подробно обсуждаем в Главе 3, соответсвующие сигма-модели получаются из D-моделей и K-моделей в пределе бесконечного спина $p \to \infty$. Это устанавливается наиболее прозрачно на уровне $\mathcal{N} = 1$ классических суперполей с помощью явной замены переменной, использующей полярное разложение.

Примечательно, что для обоих типов "классических спиновых цепочек" лагранжианы можно выбрать в качестве "свободных лагранжианов" для нелинейных мультиплетов в $\mathcal{N} = 2$ суперпространстве, тогда как взаимодействия полностью закодированы в деформированных условиях киральности. Более того, квантование таких теорий с использованием представления Швингера–Вигнера приводит к осцилляторным представлениям для гамильтониана и суперзарядов (суперзаряды, как указано выше, кубичны по осцилляторам). Конструкция также естественным образом содержит связи на гильбертово пространство, которые обеспечивают его *конечномерность* как усечения осцилляторного пространства Фока. Структура гильбертова пространства, как мы обсуждаем в Главе 3, может быть закодирована в ориентированных графах (колчанах) специального вида. Более того, классические фазовые пространства (включающие фермионы) являются соответствующими колчанными многообразиями, уже упоминавшимися в связи с моделями Гросса–Невё, в то время как соответствующие гильбертовы пространства получаются их геометрическим квантованием.

Для соответствующих $\mathbf{SU}(2)$ суперсимметричных спиновых цепочек мы вы-

числяем индекс Виттена

$$W = \mathsf{Tr}(-1)^F e^{-\beta\mathcal{H}}\,, \tag{20}$$

а также его эквивариантную версию $\widetilde{W}$, учитывающую $\mathbf{SU}(2)$-симметрию моделей. Здесь $\mathcal{H}$ есть гамильтониан, построенный по указанным выше суперзарядам, а $(-1)^F$ есть оператор фермионной градуировки. По стандартным соображениям, индекс не зависит от β, поэтому предел $\beta \to \infty$ проецирует на собственные состояния гамильтониана с нулевой энергией, то есть на состояния, аннигилируемые суперзарядами. С другой стороны, в наших спиновых цепочках (с конечным спином) гильбертово пространство конечномерно, поэтому выбор $\beta = 0$ не нарушает сходимость в (20), и в этом случае индекс превращается просто в суперразмерность гильбертова пространства (или в суперхарактер в эквивариантном случае). Мы используем этот подход для вычисления индекса Виттена и обнаруживаем, что, к удивлению, он не зависит от параметра усечения p (хотя изменение p меняет гильбертово пространство спиновой цепочки, что не является гладкой деформацией системы). Таким образом, индекс Виттена совпадает с соответствующим индексом сигма-моделей, возникающих в пределе $p \to \infty$, который, в свою очередь, равен индексу операторов Дольбо и де Рама (в случаях $2b$ и $4a$ соответственно). С математической точки зрения это открывает новые инструменты для анализа теорем об индексе, связанных с индексом Виттена, с использованием конечномерных усечений, то есть спиновых цепочек.

Содержание по главам

Диссертационная работа состоит из введения, основной части, содержащей 3 главы, заключения и 3 приложений.

В главе 1 представлено построение квазилинейной формулировки первого порядка (формулировки Гросса–Невё) для двумерных комплексных сигма-моделей, таргет-пространства которых есть комплексные грассманианы, оснащённые нормальной римановой метрикой и B-полем, пропорциональным фундаментальной эрмитовой форме метрики. В данной формулировке вычисляется однопетлевая β-функция соответсвующих сигма-моделей.

В главе 2 строится $\mathcal{N} = (2,2)$ суперсимметричное обобщение квазилинейной формулировки первого порядка для сигма-моделей, чьи таргет-пространства являются симметрическими грассманианами, для которых нормальная риманова метрика является кэлеровой. В случае максимального ортогонального грассманиана строится альтернативная суперсимметричная формулировка, в которой фермионы явно принимают значение в касательном расслоении.

В главе 3 построены $\mathcal{N} = 2$ и $\mathcal{N} = 4$ суперсимметричные спиновые цепочки, которые в пределе большого спина переходят в сигма-модели с таргет-пространством $\mathbb{CP}^1$ и соответствующей суперсимметрией. Также предложено $\mathcal{N} = 2$ суперполевое описание данных цепочек, основанное на нелинейных киральных мультиплетах, построенных с помощью некоторых плоских суперсвязностей.

В заключении обсуждаются полученные результаты и их возможное развитие.

В приложениях приводятся некоторые сведения о геометрии грассманианов (Приложения А и Б), а также детали о преобразованиях суперсимметрии для теорий Гросса-Невё максимальных ортогональных грассманианов в формулировке “минимальных геометрических фермионов” (Приложение В).

Основные результаты диссертации опубликованы в работах:

[1] Bykov D., Krivorol V. Grassmannian Sigma Models // Adv. Theor. Math. Phys. — 2024. — Vol. 28. — P. 3.

[2] Bykov D., Krivorol V. Supersymmetric Grassmannian sigma models in Gross–Neveu formalism // Lett. Math. Phys. — 2025. — Vol. 115. — P. 85.

[3] Bykov D., Krivorol V., Kuzovchikov A. Oscillator calculus on coadjoint orbits and index theorems // Lett. Math. Phys. — 2025. — Vol. 115. — P. 101.

[4] Krivorol V. On First-Order GLSM for Sigma Models // Phys. Part. Nucl. Lett. — 2025. — Vol. 22. — P. 1312–1315.

Подписано в печать 04.06.2026 г.
Тираж 100 экз.
Отпечатано типографии