ОТЗЫВ

Официального оппонента, доктора физико-математических наук, профессора Евгения Алексеевича Иванова, о диссертации Вячеслава Александровича Кривороля «Геометрические аспекты сигма-моделей», представленной на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальность 1.3.3 – теоретическая физика.

Нелинейные сигма-модели на однородных пространствах (как двумерные, так и их механические редукции) представляют собой в высшей степени интересный и содержательный класс моделей математической физики, находящий применения как в физических, так и в математических задачах. Стандартной трудностью при их изучении является существенная нелинейность. Однако в тех случаях, когда пространство отображения обладает достаточно богатой симметрией (например, когда метрика на нём инвариантна), можно ожидать, что эта нелинейность может быть учтена систематическим и достаточно компактным образом. Именно развитию этой идеи в различных направлениях и посвящена диссертация В.А. Кривороля.

Более конкретно, в диссертации выделены два подхода к проблеме нелинейности сигма-моделей. Первый подход, называемый квазилинейной формулировкой первого порядка, применим к теориям, в которых кокасательное пространство может быть представлено в виде гамильтоновой редукции плоского пространства, что само по себе уже указывает на возможность уменьшения степени нелинейности таких моделей. В качестве конкретных примеров пространств отображения, удовлетворяющих этому свойству, рассматриваются унитарные, ортогональные и симплектические грассманианы. С одной стороны, благодаря своему единообразию, это достаточно удобный класс многообразий, с другой же стороны, он достаточно широк. Например, в него входят все симметрические эрмитовы однородные пространства классических групп, хорошо известные в контексте интегрируемости соответствующих сигма-моделей. В диссертации для таких грассманианных пространств отображения (со специфическими геометрическими данными, в частности с нормальной римановой метрикой и B-полем, задаваемым фундаментальной эрмитовой формой) были построены альтернативные формулировки соответствующих двумерных евклидовых сигма-моделей в форме двумерных киральных теорий поля, структурно напоминающих теорию Гросса – Невё (с киральным взаимодействием). Также в рамках данного подхода была вычислена однопетлевая бета-функция, что в случае нетривиального B-поля является новым результатом. Этим результатам для бозонных сигма-моделей в основном посвящена *первая глава* диссертации.

Во *второй главе* ставится задача обобщения данного подхода на N = (2,2) суперсимметричный случай. В ней показано, что такая программа может быть реализована только для симметрических пространств, для которых нормальная риманова метрика является кэлеровой, что согласуется с тем известным фактом, что N = (2,2) суперсимметрия в случае отсутствия B-поля предполагает кэлерову геометрию для пространства отображения. Также показано, что суперсимметрия в квазилинейной формулировке первого порядка может быть реализована по-разному. Например, в случае так называемых максимальных грассманианов были построены две суперсимметричные версии модели, в одной из которых суперсимметрия реализована простым линейным образом, но геометрия касательного расслоения к пространству отображения не является явной, хотя фермионы должны принимать значения именно в этом расслоении; во второй, наоборот, фермионы явно принимают значения в касательном расслоении, но суперсимметрия реализована

существенно нелинейно. Вторая из этих формулировок также обладает тем интересным свойством, что вершины взаимодействия в ней являются чисто бозонными, а взаимодействие бозонов со свободными фермионами осуществляется через топологическое калибровочное поле.

Второй подход к сигма-моделям основан на идее о том, что в некоторых случаях они могут быть представлены как предел некоторых спиновых цепочек, что потенциально позволяет свести задачу к квантово-механической решёточной системе, в благоприятных случаях более контролируемой. Новым элементом, который диссертация привносит в данный формализм, является суперсимметрия. В *третьей главе*, где рассмотрение ограничено одномерной редукцией сигма-моделей и простейшей сферической геометрией пространства отображения, были построены $N = 2$ и $N = 4$ суперсимметричные $SU(2)$ спиновые цепочки, в пределе большого спина воспроизводящие соответствующие $N = 2$ и $N = 4$ сигма-модели со сферой как пространством отображения. Такие спиновые цепочки представляют особый интерес, поскольку они демонстрируют новый механизм появления суперсимметрии в спиновых системах, а также потому, что их классическое описание наиболее просто даётся в терминах так называемых нелинейных киральных мультиплетов, в которых условие киральности модифицируется за счёт некоторой плоской суперсвязности. Также в таких системах индекс Виттена, который стандартно связан с известными в математике теоремами об индексе, не зависит от спина, а следовательно может быть вычислен при любом конечном, не обязательно большом, значении спина, что открывает новые возможности для вычисления сигма-модельных характеристик в терминах спиновых цепочек с конечномерным гильбертовым пространством.

Объём диссертации - 115 страниц, она состоит из введения, трёх глав, содержание и оценка которых изложены выше, а также трёх приложений и списка литературы. Как уже отмечено ранее, исследования по избранной тематике являются в высшей степени актуальными. Во введении обосновывается эта актуальность темы диссертационного исследования, в доступной форме формулируются его цели и задачи. Там же приведены основные положения, выносимые на защиту, информация о новизне, практической значимости, достоверности и апробации полученных результатов. Литература включает 165 наименований, включая 4 работы с участием автора, на которых базируется диссертация.

Диссертация выполнена на высоком физическом и математическом уровне по актуальной тематике. Результаты диссертации являются несомненно оригинальными и прошли разностороннюю апробацию в форме публикаций в высокорейтинговых журналах, а также докладов на многочисленных зарубежных и российских конференциях и семинарах по её тематике. Диссертация представляет несомненный интерес для специалистов по математической физике в МИАН, МФТИ, ЛТФ ОИЯИ, и других центрах сходной тематики, как в России, так и за рубежом. Результаты могут быть использованы как для проведения вычислений, таких, как расчёт многопетлевой бета-функции в двумерных системах или нахождение спектра оператора Лапласа – Бельтрами и индекса Виттена в одномерных системах, так и для построения новых нетривиальных моделей (двумерных киральных моделей, суперсимметричных спиновых систем и т.п.), что полезно, например, с точки зрения расширения наших представлений о различных механизмах возникновения и проявления суперсимметрии. Всё это свидетельствует о безусловной актуальности данной диссертационной работы. Автореферат правильно и полностью отражает содержание диссертации.

С моей точки зрения наиболее важные результаты работы состоят в следующем:

1. Построены квазилинейные формулировки для двумерных сигма-моделей на ортгональных и симплектических грассманианах с конечным числом вершин взаимодействия. Для них впервые вычислены однопетлевые бета-функции.
2. Для симметрических грассманианов указанного типа построены N=(2,2) суперсимметричные обобщения квазилинейных формулировок. В случае максимального ортогонального грассманиана найдена новая N=(2,2) суперсимметричная формулировка, в которой взаимодействие имеет чисто бозонный характер, а медиатором взаимодействия с фермионами служит топологическое калибровочное поле.
3. Построены N=2 и N=4 спиновые цепочки на группе SU(2), при больших спинах переходящие в одномерные N=2 и N=4 суперсимметричные CP(1) сигма-модели, которые имеют интересное описание в терминах N=2 суперполей, подчинённых нелинейным условиям киральности.

По результатам хотелось бы сделать следующие замечания: 1. Не для всех рассмотренных в диссертации суперсимметричных моделей были приведены суперполевые лагранжианы; например, для моделей типа Гросса-Невё было бы желательно обсудить лагранжианы в N = (2,2) суперпространстве. 2. Не полностью прослежена связь квазилинейных формулировок со стандартным языком форм Картана, универсальным формализмом для сигма-моделей на групповых многообразиях.

Однако эти замечания не влияют на общую высокую оценку диссертационной работы и не снижают научную значимость полученных в ней результатов. Их можно рассматривать как пожелания для дальнейшей работы.

Суммируя вышеизложенное, считаю, что рассматриваемая дисертационная работа удовлетворяет всем требованиям, предъявляемым к кандидатским диссертациям, установленным Положением о присуждении ученых степеней, утвержденным постановлением Правительства Российской Федерации №842 от 24 сентября 2013 года, а ее автор, Вячеслав Александрович Кривороль, несомненно заслуживает присуждения ему ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 1.3.3 — теоретическая физика.

Официальный оппонент:

Иванов Евгений Алексеевич,
доктор физико-математических наук, профессор,
главный научный сотрудник Лаборатории теоретической
физики имени Н.Н. Боголюбова
Объединенного института ядерных исследований 09.09.2026г.
Дубна, ул. Жолио-Кюри, д.6
email: eivanov@theor.jinr.ru

Подпись Иванова Евгения Алексеевича заверяю

Учёный секретарь ЛТФ им. Н.Н. Боголюбова,

Объединенного института ядерных исследований,

кандидат физико-математических наук А. В. Андреев

09 сентября 2026 г.