ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ
БЮДЖЕТНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ НАУКИ
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ им. В.А.СТЕКЛОВА
РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК

На правах рукописи

Криворольб Вячеслав Александрович

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ СИГМА–МОДЕЛЕЙ

Специальность: 1.3.3 – Теоретическая физика

ДИССЕРТАЦИЯ

на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель доктор физ.-мат. наук Д. В. Быков

Москва 2026

Оглавление

Введение **4**

1 Формализм Гросса-Невё для грассманианов **26**
1.1 Унитарные грассманианы 26
1.2 Ортогональные грассманианы $\mathsf{OGr}(m,n)$ 28
1.2.1 Свободная теория. 29
1.2.2 Взаимодействие и переход к сигма-модели. 31
1.3 Симплектические грассманианы $\mathsf{SGr}(m,2n)$ 35
1.3.1 Переход к сигма-модели. 37
1.4 Исключение калибровочных полей 39
1.5 Однопетлевая бета-функция 40
1.5.1 Бета-функция в случае $\mathbb{CP}^{n-1}$. 41
1.5.2 Бета-функция в случае $\mathsf{Gr}(m,n)$. 43
1.5.3 Бета-функция в случае $\mathsf{OGr}(m,n)$. 44
1.5.4 Бета-функция в случае $\mathsf{SGr}(m,2n)$. 45

2 Суперсимметризация формализма Гросса-Невё **47**
2.1 Унитарные грассманианы 48
2.1.1 Свободная система. 48
2.1.2 Взаимодействие. 50
2.1.3 Калибровочная симметрия. 51
2.2 Экстремальные грассманианы 51
2.2.1 Ортогональные грассманианы. 52
2.2.2 Неэкстремальные грассманианы: препятствия к суперсимметрии. . . . 55
2.2.3 Фиксация калибровки. 56
2.2.4 Симплектические грассманианы. 57
2.3 Максимальные грассманианы и “минимальные фермионы” 58
2.3.1 Минимальное взаимодействие в модели $\mathbb{CP}^1$. 59
2.3.2 Квантовомеханическая эквивалентность $\mathbb{CP}^1$ моделям. 61
2.3.3 Максимальный ортогональный грассманиан. 62
2.3.4 Симметрии в формулировке “геометрических фермионов”. 63
2.3.5 Лагранжев грассманиан. 63
2.3.6 Явная эквивалентность $\mathbb{CP}^1$ сигма-моделям. 64

3 Одномерные сигма-модели и спиновые цепочки . . . 67
3.1 Спиновая цепочка комплекса Дольбо (D-модель) . . . 67
3.2 Спиновая цепочка комплекса Кэлера–де Рама (K-модель) . . . 72
3.3 Колчанная формулировка . . . 74
3.4 Классическая D-модель и суперпространство . . . 75
3.4.1 $\mathcal{N} = 2$ суперпространство. . . . 76
3.4.2 Редукция к $\mathcal{N} = 1$ суперпространству. . . . 77
3.4.3 Компонентная формулировка и связь с квантовой D-моделью. . . . 78
3.5 Классическая K-модель . . . 78
3.5.1 $\mathcal{N} = 2$ суперпространство. . . . 79
3.5.2 Сравнение с D-моделью. . . . 80
3.5.3 Редукция к $\mathcal{N} = 1$ суперпространству. . . . 80
3.6 Связь с суперсимметричными сигма-моделями . . . 81
3.6.1 От D-модели к $\mathcal{N} = 2$ сигма-модели. . . . 81
3.6.2 От K-модели к $\mathcal{N} = 4$ сигма-модели. . . . 84

Приложение А: O- и Sp-грассманианы как однородные пространства . . . 86
А.1 $\mathsf{OGr}(m, n)$ как однородное пространство . . . 86
А.2 $\mathsf{SGr}(m, 2n)$ как однородное пространство . . . 88
А.3 Инвариантные метрики на $\mathsf{OGr}(m, n)$ . . . 89
А.4 Инвариантные метрики на $\mathsf{SGr}(m, 2n)$ . . . 93

Приложение Б: Касательное расслоение грассманианов . . . 95
Б.0.1 “Дифференциально-геометрический” аргумент. . . . 95
Б.0.2 Экстремальные грассманианы. . . . 96
Б.0.3 “Формальный” аргумент. . . . 96

Приложение В: Детали суперсимметричных преобразований для моделей с “геометрическими” фермионами . . . 98
В.0.4 Вывод суперсимметричных преобразований. . . . 98
В.0.5 Суперсимметричная инвариантность действия. . . . 100

Заключение . . . 102

Список основных работ автора по теме диссертации . . . 104

Список литературы . . . 105

Список иллюстраций и таблиц . . . 115

Введение

Актуальность темы исследования и степень ее разработанности

Диссертационная работа посвящена исследованию взаимосвязи между геометрией комплексных многообразий и квантовыми аспектами специальных теоретико-полевых/квантово-механических систем, называемых (двумерными или одномерными) сигма-моделями, в которых поля принимают значения в этих многообразиях (называемых в данном контексте таргет-пространствами). Такие модели занимают особое место в теоретической физике, поскольку они служат универсальным языком описания низкоэнергетических эффективных теорий в самых разных областях: от физики сильных взаимодействий (в контексте которой они исторически возникли в работе [71]) до теории струн [148] и физики конденсированного состояния [149]. Неудивительно, что этим моделям уделяется большое внимание во многих монографиях и учебниках [97; 129; 153; 164].

Центральный вопрос, исследуемый в диссертации, можно сформулировать так: если комплексное таргет-многообразие допускает некоторую специальную геометрическую реализацию, существует ли для соответствующей сигма-модели эквивалентная физическая формулировка, отражающая эту реализацию? Ввиду общности постановки мы ограничиваемся рассмотрением двух конкретных сценариев. Первый сценарий предполагает, что комплексное многообразие $\mathcal{M}$ получается с помощью гамильтоновой редукции плоского пространства $\mathbb{C}^n$ по действию некоторой комплексной группы $\mathcal{G}_{\mathbb{C}}$. В основном тексте диссертации мы показываем, что для достаточно широкого класса многообразий $\mathcal{M}$ (в том числе содержащего все эрмитовы симметрические пространства классических групп Ли), обладающих этим свойством, соответствующие двумерные сигма-модели могут быть сформулированы как модели, родственные известной модели Гросса-Невё. Второй сценарий касается случая, когда комплексное многообразие $\mathcal{M}$ обладает нетривиальной группой изометрий и реализуется как лагранжево подмногообразие в произведении коприсоединённых орбит этой группы. При выполнении некоторых дополнительных условий одномерной сигма-модели с таргет-пространством $\mathcal{M}$ (т.е. свободной частице на этом многообразии) можно сопоставить эквивалентную систему, представляющую собой некоторую спиновую цепочку.

Данное исследование направлено не только на углубление понимания математических структур квантовой механики и теории поля, но и на разработку эффективных вычисли-

тельных методов, а также на выявление глубоких связей между различными разделами теоретической и математической физики. Так, установление эквивалентности двумерных сигма-моделей с теориями типа Гросса-Невё открывает новые перспективы для вычисления их β-функций. В исходной геометрической формулировке задача перенормировки исключительно сложна: она требует работы с бесконечным числом взаимодействий, громоздкими геометрическими тензорами и привлечения дополнительных методов, таких как метод фонового поля. Напротив, теории типа Гросса-Невё относятся к числу простейших двумерных квантовых моделей, где анализ перенормировок и ренормгруппы может быть выполнен наиболее прямыми и хорошо разработанными способами. Таким образом, это потенциально позволяет обойти многие технические трудности, включая сложность петлевых вычислений и произвол в выборе координат или фоновых значений полей [5]. Установление взаимосвязи между одномерными сигма-моделями и спиновыми цепочками в свою очередь открывает возможность разработки новых методов исследования спектра оператора Лапласа-Бельтрами, который является квантовым гамильтонианом свободной частицы на многообразии. В частности, в ряде случаев спектральную задачу для оператора Лапласа-Бельтрами удаётся свести к спектральной задаче для спинового гамильтониана, допускающей решение методом анзаца Бете [33].

Цели и задачи

Основная цель диссертации состоит в построении альтернативных формулировок сигма-моделей для класса комплексных проективных таргет-пространств, обладающих определённой геометрической реализацией. В качестве такой реализации мы рассматриваем два типа геометрических свойств. Первое из них связано с тем, что кокасательное расслоение над многообразием допускает описание как так называемое колчанное многообразие, т.е. его тотальное пространство может быть получено посредством гамильтоновой (симплектической) редукции некоторого векторного пространства. На физическом языке это означает, что "фазовое пространство"[1] сигма-модели реализуется как калибровочная теория на плоском пространстве. Класс многообразий, обладающих указанным свойством, на котором мы сосредоточимся, образуют грассманианы – наиболее прямое обобщение комплексных проективных пространств $\mathbb{CP}^n$. Одной из задач диссертации является построение для сигма-моделей с грассманианами в качестве таргет-пространств так называемой квазилинейной формулировки первого порядка (или формулировки Гросса-Невё[2]), которая непосредственно отражает данное геометрическое свойство. Мы реализуем эту программу как для бозонных, так и для $\mathcal{N} = (2, 2)$ суперсимметричных двумерных сигма-моделей.

Второе исследуемое свойство таргет-пространств состоит в том, что они допускают лагранжево вложение в произведение коприсоединённых орбит своей группы изометрий.

[1]В контексте двумерных сигма-моделей кокасательное расслоение над таргет-пространством не является фазовым пространством системы в строгом смысле. Тем не менее, для простоты изложения мы будем использовать эту терминологию, поскольку она не должна приводить к путанице.

[2]Здесь и далее мы используем термины "квазилинейная формулировка первого порядка" и "формулировка Гросса-Невё" как взаимозаменяемые.

Поскольку это свойство было детально изучено для группы изометрий $\mathbf{SU}(n)$ в чисто бозонном случае в работах [28; 33], мы сосредоточимся на его суперсимметричном обобщении, ограничиваясь для простоты простейшим случаем коприсоединённых орбит группы $\mathbf{SU}(2)$, т.е. сферами $\mathbb{S}^2 \simeq \mathbb{CP}^1$ (с симплектическими формами Фубини-Штуди, в данном случае пропорциональными форме объёма на сфере). Соответствующее лагранжево вложение (относительно суммы одинаково нормированных форм Фубини-Штуди) имеет вид $\mathbb{CP}^1 \hookrightarrow \mathbb{CP}^1 \times \mathbb{CP}^1$ и задаётся отображением $z \mapsto (z, \overline{z})$, где z – неоднородная координата на $\mathbb{CP}^1$. В основном тексте работы существование такого вложения позволяет построить $\mathcal{N} = 2$ и $\mathcal{N} = 4$ суперсимметричные $\mathbf{SU}(2)$ спиновые цепочки на двух узлах, которые в пределе большого спина ("пределе Халдейна" [79; 80]) эквивалентны одномерным $\mathcal{N} = 2$ и $\mathcal{N} = 4$ суперсимметричным сигма-моделям на сфере $\mathbb{CP}^1$. Таким образом, основной задачей данной части работы является построение соответствующих суперсимметричных спиновых цепочек как в компонентной форме, так и в $\mathcal{N} = 2$ суперполевом формализме. Такое построение представляет интерес не только само по себе (например, суперполевое описание включает весьма необычные геометрические нелинейные условия киральности), но и открывает возможности для дальнейших обобщений рассматриваемой конструкции.

Основные задачи диссертации:

- Исходя из того, что тотальное пространство кокасательного расслоения над (ортогональными и симплектическими) грассманианами является колчанным многообразием, построить альтернативную формулировку соответствующих двумерных сигма-моделей, содержащую лишь конечное число вершин взаимодействия.
- Обобщить данную конструкцию на случай двумерных $\mathcal{N} = (2, 2)$ суперсимметричных сигма-моделей, построенных на грассманианах с (в некотором смысле допустимой) кэлеровой метрикой.
- Верифицировать согласованность предложенного построения посредством вычисления однопетлевой β-функции полученных бозонных формулировок грассманианных сигма-моделей.
- Построить $\mathcal{N} = 2$ и $\mathcal{N} = 4$ суперсимметричные спиновые цепочки группы $\mathbf{SU}(2)$ на двух узлах, в пределе большого спина воспроизводящие одномерные сигма-модели с соответствующей суперсимметрией и $\mathbb{CP}^1$ таргет-пространством; представить как их компонентное, так и суперполевое описание.

Научная новизна

Полученные результаты являются новыми. Перечислим основные из них:

- Изучены квазилинейные формулировки первого порядка для сигма-моделей с таргет-пространствами в виде ортогональных и симплектических грассманианов, снабжённых специальной, так называемой нормальной римановой метрикой, и B-полем, задавае-

мым фундаментальной эрмитовой формой этой метрики. Показано, что такие эквивалентные формы сигма-моделей имеют, в отличие от стандартной "геометрической" формулировки, лишь конечное число вершин взаимодействия.

- Вычислены соответствующие однопетлевые β-функции в такой формулировке. В специальном случае симметрических грассманианов, когда нормальная риманова метрика является кэлеровой, показано, что однопетлевая β-функция в квазилинейной формулировке первого порядка совпадает с β-функцией стандартной формулировки соответствующих сигма-моделей. В случае несимметрических пространств (с нетривиальным B-полем) однопетлевая β-функция ранее не была известна, что делает данный результат новым.

- Для симметрических таргет-пространств построено $\mathcal{N} = (2,2)$ суперсимметричное обобщение квазилинейной формулировки первого порядка.

- Построены $\mathcal{N} = 2$ и $\mathcal{N} = 4$ суперсимметричные $\mathbf{SU}(2)$ спиновые цепочки, воспроизводящие в пределе большого спина сигма-модели с $\mathbb{CP}^1$ таргет-пространством и соответствующей суперсимметрией. Такие модели являются новыми; более того, они допускают необычное $\mathcal{N} = 2$ суперполевое описание, основанное на ранее неизвестных нелинейных киральных мультиплетах, построенных на основе некоторой плоской суперсвязности.

Теоретическая и практическая значимость работы

Результаты, полученные в диссертации, могут быть использованы как для получения новых численных результатов, так и для построения новых интересных моделей математической физики. В частности, квазилинейная формулировка первого порядка открывает возможность проведения многопетлевых пертурбативных вычислений в сигма-моделях, поскольку в данном формализме число взаимодействий и констант связи конечно и невелико. Предположительно, аналогичный подход может быть применён и к другим типам колчанных многообразий. Кроме того, при редукции мирового листа к одномерной мировой линии соответствующие формулировки первого порядка могут быть эффективно использованы для нахождения спектра операторов Лапласа–Бельтрами (то есть квантовых гамильтонианов одномерных сигма-моделей), что на примере $\mathbb{CP}^n$ было продемонстрировано в работе [21].

Аналогично, построение суперсимметричных спиновых цепочек, эквивалентных сигма-моделям, может быть использовано для вычисления спектра операторов Лапласа–Дольбо и Лапласа–де Рама на различных многообразиях, допускающих реализацию в виде лагранжевых подмногообразий в произведении коприсоединённых орбит. Как показано в работе [30], суперсимметричные спиновые цепочки также могут быть использованы для вычисления топологических характеристик таргет-многообразий, связанных с теоремами об индексе [11].

Сами по себе суперсимметричные спиновые цепочки также представляют значительный интерес ввиду их слабой изученности. Построенные нами модели с использованием осцилляторов Швингера–Вигнера и нелинейных киральных мультиплетов плоских суперсвязностей, насколько нам известно, не имеют аналогов в современной литературе. Можно надеяться, что предложенные нами "короткие" суперсимметричные спиновые цепочки допускают "длинные" обобщения, обладающие хорошими свойствами; в частности, было бы интересно построить суперсимметричные интегрируемые спиновые цепочки с большим числом узлов, обобщающие XXX цепочки, модели Годена и так далее.

Методология и методы исследования

При проведении исследований использовались разнообразные математические методы и конструкции из теоретической и математической физики. В частности, при построении квазилинейной формулировки первого порядка для грассманианов применялись методы теории групп, симплектической и комплексной геометрии, включая гамильтонову редукцию (или, в более общем смысле, так называемый GIT-фактор), колчанные многообразия, симметрические пространства и так далее. Ключевое наблюдение, лежащее в основе квантово-полевых следствий, состоит в том, что тотальное пространство кокасательного расслоения к (унитарному, ортогональному или симплектическому) грассманиану является колчанным многообразием, то есть может быть получено как гамильтонова редукция плоского матричного пространства под действием некоторой (калибровочной) группы. Квантово-полевое вычисление однопетлевой β-функции опирается на методы пертурбативной теории поля в двух измерениях с использованием (анти)голоморфных пропагаторов и ненулевого числа "цветовых индексов", роль которых играют внутренние векторные индексы однородных координат. Например, для грассманиана $\mathsf{Gr}(m,n)$ пропагаторы и вершины несут два внутренних индекса: один принимает m значений, другой — n значений. При построении $\mathcal{N}=(2,2)$ обобщений теорий типа Гросса-Невё также существенно использовалась специфическая геометрия грассманианов и векторных расслоений над ними. Для построения суперсимметричных спиновых цепочек, сходящихся к одномерным сигма-моделям на сфере, использовались методы суперсимметрии и суперпространств, а также элементы теории представлений и гармонического анализа. Суперсимметризация таких цепочек, в свою очередь, приводит к $\mathcal{N}=2$ экзотическим условиям нелинейной киральности, возможность существования которых была открыта в работе [93].

Положения, выносимые на защиту

На защиту выносятся следующие основные результаты:

1. Для комплексных двумерных сигма-моделей, таргет-пространства которых есть ортогональные и симплектические грассманианы, наделённые нормальной метрикой и B-полем, задающимся фундаментальной эрмитовой формой данной метрики, на классическом уровне

построены эквивалентные квазилинейные формулировки первого порядка, характеризующиеся конечным числом вершин взаимодействий. В данном формализме вычислены соответствующие однопетлевые β-функции.

2. В случае симметрических ортогональных и симплектических грассманианов построены $\mathcal{N} = (2, 2)$ суперсимметричные обобщения квазилинейных формулировок первого порядка. Для максимального ортогонального грассманиана предложена альтернативная $\mathcal{N} = (2, 2)$ суперсимметричная формулировка, в которой фермионы явно являются сечениями касательного расслоения, взаимодействие имеет чисто бозонный характер, а фермионы взаимодействуют с бозонами только через топологическое калибровочное поле.

3. Построены двухузловые $\mathcal{N} = 2$ и $\mathcal{N} = 4$ суперсимметричные спиновые цепочки группы $\mathbf{SU}(2)$, которые в пределе большого спина эквивалентны одномерным $\mathcal{N} = 2$ и $\mathcal{N} = 4$ суперсимметричным сигма-моделям с таргет-пространством $\mathbb{CP}^1$. С помощью специальных нелинейных киральных мультиплетов, основанных на плоских суперсвязностях, для данных цепочек построено $\mathcal{N} = 2$ суперполевое описание.

Степень достоверности и апробация результатов

Результаты представлялись соискателем на отечественных и международных конференциях и семинарах, в частности на Student Workshop on Integrability университета Амстердама (Нидерланды), конференциях ОИЯИ “Supersymmetries and Quantum Symmetries”, “Problems of Modern Mathematical Physics” и “Advances in Quantum Field Theory” (г. Дубна), конференциях СПбГУ и института имени Эйлера “Models in Quantum Field Theory” и “Integrable Systems and Quantum Theory” (г. Санкт-Петербург), конференции института математики им. С.Л. Соболева “Механика, геометрия, интегрируемость” (г. Новосибирск), конференции МИАН “Fields and Strings 2025”, семинаре отдела теоретической физики МИАН, семинарах теоргруппы ЛФВЭ МФТИ, а также семинарах пекинского института математических наук и приложений (BIMSA) и математического научного центра Яу университета Цинхуа (Китай).

Содержание диссертации

Диссертация посвящена исследованию геометрических аспектов некоторых одномерных и двумерных сигма-моделей (как бозонных, так и суперсимметричных) с проективными таргет-пространствами, реализуемыми в виде однородных пространств групп $\mathbf{U}(n)$, $\mathbf{O}(n)$ и $\mathbf{Sp}(2n)$. Простейшим примером такой геометрии служит двумерная сфера $\mathbb{S}^2 \simeq \mathbb{CP}^1 \simeq \frac{\mathbf{SU}(2)}{\mathbf{U}(1)}$; хорошо известны комплексные проективные пространства $\mathbb{CP}^n$ [9]. В настоящей работе внимание также уделяется дальнейшим классам таких пространств, а именно унитарным, ортогональным и симплектическим грассманианам, определения которых будут приведены ниже. Сигма-модели с такими таргет-пространствами впервые рассматривались в работах [56; 110], см. также [40].

Модели с указанными таргет-пространствами возникают в разнообразных физических и математических контекстах: в физике конденсированного состояния, где они появляются как предел Халдейна для спиновых цепочек [2]; в физических системах со спонтанным нарушением симметрии, где они выступают в роли низкоэнергетических эффективных теорий; а также в теории струн [148], дифференциальной геометрии [87], теории классической и квантовой интегрируемости [85; 86] и многих других областях. Они долгое время привлекают внимание благодаря известному сходству с четырёхмерными калибровочными теориями. Например, они проявляют асимптотическую свободу, обладают инстантонными решениями [10; 43; 54], демонстрируют нарушение киральной симметрии, конфайнмент [42] и так далее. Классические решения таких моделей широко изучались в бозонном [47; 49; 110; 134; 137], а также в суперсимметричном случае [65; 91] (см. также [12; 116]). В работе [92] авторы объясняют, как сигма-модели на грассманианах возникают в контексте неабелевых струн в четырёхмерных суперсимметричных калибровочных теориях. Статья [104] посвящена $\mathcal{N} = (0, 2)$-деформации сигма-модели на грассманиане. Сигма-модели на расслоениях типа Хопфа над грассманианами обсуждались в [135]. Фазовая структура сигма-моделей на грассманианах, определённых на пространственном интервале, изучалась в [124]. Некоторые приложения в физике конденсированного состояния можно найти в [152]. Наконец, "экзотические" сигма-модели на грассманианах рассматривались в [52; 84].

Однако такие теории в общем случае являются сильно нелинейными, что существенно затрудняет работу с ними. Например, для двумерных теорий поля это проявляется в том, что лагранжиан таких моделей, вообще говоря, содержит бесконечное число взаимодействий, что делает стандартные пертурбативные методы (например, теорию возмущений по константам связи) неприменимыми. Разумеется, можно развивать альтернативные подходы к теории возмущений, например метод фонового поля (о последних достижениях см. [4; 5]). Стратегия в данном случае заключается в разложении квантовых полей на классические компоненты (т.е. удовлетворяющие уравнениям движения) и квантовые поправки, которые предполагаются малыми. Ограничиваясь определённой степенью квантовых поправок в лагранжиане, мы получаем теорию поля с конечным числом взаимодействий. Однако у этого метода есть ряд недостатков. В частности, вычисления могут быть крайне сложными и

трудными для автоматизации, а выбор фонового поля зачастую неоднозначен. Эти трудности мотивируют нас на поиск способов уменьшения нелинейности исходной постановки задачи путём привлечения дополнительной информации, например, симметрий системы. Для одномерных же сигма-моделей эта нелинейность проявляется, например, в том, что спектральная задача для квантового гамильтониана свободной частицы на многообразии (оператора Лапласа–Бельтрами) сводится к необходимости решения в общем случае довольно сложного эллиптического дифференциального уравнения второго порядка в частных производных, для которого не существует общего метода решения.

Цель данной работы – используя дополнительные данные о геометрии указанных выше проективных таргет-пространств, в определённом смысле снизить степень нелинейности таких теорий, сделав их анализ более прозрачным и удобным. Более конкретно, мы предъявим два типа эквивалентных формулировок сигма-моделей, основанных на специфических геометрических реализациях таргет-пространств.

Первая реализация связана с тем, что кокасательное расслоение над грассманианом является колчанным многообразием, то есть гамильтоновой редукцией плоского пространства под действием некоторой матричной группы. Соответствующую формулировку сигма-моделей мы будем называть *квазилинейной формулировкой первого порядка*. Термин “квазилинейная” указывает на то, что нелинейное таргет-пространство сигма-модели описывается через линейное с добавлением калибровочной симметрии. “Первого порядка” означает, что наряду с координатами на таргет-пространстве вводятся также “импульсы”, лежащие в слоях кокасательного расслоения. Как будет показано далее, именно такая комбинация геометрических конструкций позволяет построить наиболее простую и элегантную переформулировку. В дальнейшем мы также будем называть её формулировкой Гросса–Невё для сигма-моделей ввиду её структурного сходства с известной двумерной теорией Гросса–Невё. В этом контексте имеет смысл рассматривать как двумерные сигма-модели, так и их одномерные редукции.

Вторая реализация основана на представлении таргет-пространства в виде лагранжева подмногообразия в произведении коприсоединённых орбит, наделённых естественной симплектической структурой — формой Кириллова-Костанта-Сурио. Основное преимущество такого подхода заключается в том, что коприсоединённые орбиты являются в определённом смысле “наименьшими” фазовыми пространствами: квантование одной такой орбиты приводит к “наименьшему” гильбертову пространству, соответствующему неприводимому представлению группы симметрий. В квантовомеханическом контексте это позволяет заменить задачу диагонализации оператора Лапласа–Бельтрами эквивалентной задачей о диагонализации некоторого “спинового” гамильтониана в произведении неприводимых представлений, то есть в спиновой цепочке, для которой уже можно применять мощные алгебраические методы, например анзац Бете [33]. Крайне интересна также суперсимметризация данного соответствия, на чём мы и сосредоточимся в данной работе, поскольку она приводит к неизвестным ранее $\mathcal{N} = 2$ и $\mathcal{N} = 4$ спиновым цепочкам, имеющим при этом довольно “экзотическую” формулировку в $\mathcal{N} = 2$ суперпространстве. В данном контексте мы ограничиваемся рассмот-

рением простейшей проективной таргет-геометрии $\mathbb{CP}^1$ для одномерных суперсимметричных сигма-моделей, хотя выход за эти рамки представляет собой важную и интересную задачу.

Суммируя вышесказанное, нашей задачей является получение физических следствий из геометрической информации о возможных реализациях проективных таргет-пространств. Первая реализация связана с представлением в виде колчанного многообразия, вторая – с представлением в виде лагранжева подмногообразия в произведении коприсоединённых орбит. Рассмотрим теперь эти две реализации в отдельности и более подробно.

Двумерные комплексные сигма-модели

Прежде чем обсуждать непосредственно саму квазилинейную формулировку, зафиксируем некоторые определения, наиболее подходящие нашему контексту и удобные для работы с комплексными многообразиями. Пусть заданы следующие геометрические данные: риманова поверхность[3] Σ (мировой лист) с комплексной координатой z, комплексное многообразие $\mathcal{M}$ (таргет-пространство) с комплексными координатами $\left\{u^i\right\}_{i=1}^{\dim_{\mathbb{C}}\mathcal{M}}$ и эрмитова метрика $g = g_{i\bar{j}}\mathrm{d}u^i\mathrm{d}\overline{u}^{\bar{j}}$. Тогда сигма-модель представляет собой теорию поля на гладких отображениях $\varphi : \Sigma \to \mathcal{M}$ с функционалом действия

$$\mathcal{S}[u] = \int_{\Sigma} \mathrm{d}^2 z \left(g_{i\bar{j}}(u,\overline{u})\,\overline{\partial} u^i \partial \overline{u}^{\bar{j}} \right) \tag{0.0.1}$$

где все координатные функции спущены на мировой лист посредством отображения φ, то есть $u^i(z,\overline{z}) := \varphi^* u^i$, где φ^* есть обратный образ.

Отметим, что наше определение двумерной сигма-модели, вообще говоря, отличается от общепринятого. В частности, оно не обладает явной ковариантностью относительно мирового листа, поскольку явно содержит дифференцирования $\partial := \frac{\partial}{\partial z}$ и $\overline{\partial} := \frac{\partial}{\partial \overline{z}}$. Однако, добавив и вычтя под интегралом слагаемые вида $\frac{1}{2} g_{i\bar{j}}(u,\overline{u})\,\partial u^i \overline{\partial}\overline{u}^{\bar{j}}$, это определение можно переписать в явно инвариантном виде:

$$\mathcal{S}[\varphi] = \frac{1}{2}\int_{\Sigma} |\mathrm{d}\varphi|^2\, \mathsf{vol}(\Sigma) + \int_{\Sigma} \varphi^*\omega\,, \tag{0.0.2}$$

где $\mathsf{vol}(\Sigma)$ — форма объёма на Σ, построенная по метрике, согласованной с комплексной структурой на римановой поверхности, $|\mathrm{d}\varphi|^2$ — квадрат нормы дифференциала отображения $\varphi : \Sigma \to \mathcal{M}$, вычисленный по соответствующим метрикам, а ω — фундаментальная эрмитова форма метрики g, которая в локальных координатах имеет вид

$$\omega = \frac{i}{2} g_{i\bar{j}}\,\mathrm{d}u^i \wedge \mathrm{d}\overline{u}^{\bar{j}}\,. \tag{0.0.3}$$

Смысл данного обсуждения заключается в том, что наше определение сигма-модели (0.0.2)

[3]Для целей нашей работы мы всегда предполагаем $\Sigma = \mathbb{C}$. Однако случай произвольных римановых поверхностей также представляет большой интерес, см. [25].

в комплексном контексте явно включает в себя как стандартное определение сигма-модели (первое слагаемое в (0.0.2), представляющее собой функционал энергии), так и слагаемое с B-полем, задаваемое интегралом от фундаментальной эрмитовой 2-формы. Такое B-поле является топологическим (и, следовательно, не вносит вклад в уравнения движения) в случае, когда $\mathrm{d}\omega = 0$, что означает, что многообразие $\mathcal{M}$ кэлерово. Таким образом, с точностью до топологических слагаемых наше определение (0.0.2) для кэлеровых многообразий совпадает со стандартным, а в общем случае содержит, вообще говоря, нетривиальное B-поле.

В качестве прототипичного примера приведем явно $\mathbb{CP}^{n-1}$ сигма-модель, построенной по метрике Фубини–Штуди (т.е. единственной $\mathbf{SU}(n)$-инвариантной метрике на комплексном проективном пространстве):

$$\mathcal{S}[u] = \int_\Sigma \mathrm{d}^2 z \left(\frac{\big(1+|u|^2\big)|\overline{\partial} u|^2 - |\overline{u}\cdot\overline{\partial} u|^2}{2\pi\kappa\big(1+|u|^2\big)^2} \right). \tag{0.0.4}$$

Здесь u – это "вектор", составленный из неоднородных координат $u^1, \dots, u^{n-1}$, точка $\cdot$ обозначает скалярное произведение (свёртку индексов), $|u|^2 := \overline{u}\cdot u$, а κ — константа связи.

Квазилинейная формулировка сигма-моделей

Долгое время изучение сигма-моделей, особенно в контексте интегрируемости, было сосредоточено на случае симметрических таргет-пространств (см. книги [1; 78; 81] и обзор [125]). Позднее было замечено, что существуют широкие классы несимметрических таргет-пространств (таких как многообразия флагов), для которых интегрируемость, по-видимому, также имеет место[4]. В работе [23] было высказано предположение, что ключевым свойством, обеспечивающим интегрируемость в этом классе моделей, является, возможно, наличие комплексной структуры на таргет-пространстве. Впоследствии в [39] подчеркивалось, что решающим ингредиентом является комплексная симплектическая структура на фазовом пространстве модели (которое можно рассматривать как кокасательное расслоение к таргет-пространству), что оправдывает наше чисто комплексное определение (0.0.2). Весьма вероятно, однако, что на квантовом уровне не произвольное комплексное симплектическое фазовое пространство будет допустимым. Затем в [21] было предложено ограничиться моделями, допускающими квазилинейное (GLSM) описание[5] (первого порядка). На физическом языке это не что иное, как бозонные воплощения обобщенных киральных моделей Гросса–Невё (ГН) [76; 155] (см. также [8] и обсуждение в [140]), которые можно воспринимать как аналог теории φ^4 в двух измерениях. Именно такого типа модели и будут предметом дальнейшего обсуждения. Что касается математической интерпретации, как уже

[4] В диссертации мы фокусируемся на однородных моделях. Другое обобщение связано с интегрируемыми (неоднородными) деформациями этих моделей — тема, активно изучавшаяся в последние годы, см., например, [5; 15; 46; 58; 59; 86; 101—103; 107; 109; 139] и ссылки там.

[5] Следует отметить, что GLSM (не первого порядка) для всех эрмитовых симметрических пространств были построены в [84]. В качестве частичного обобщения, GLSM для общих $\mathbf{U}(n)$ многообразий флагов были описаны в [52].

говорилось, это модели, фазовые пространства которых являются многообразиями колчанов [115]. Разумно полагать, что именно эта связь с давно изученными моделями Гросса–Невё [7; 48], дает простейшее объяснение интегрируемости этих моделей. Модели Гросса–Невё также представляют самостоятельный интерес как теории, демонстрирующие асимптотическую свободу, конфайнмент и нарушение киральной симметрии [155] (фактически, именно в такого типа моделях исторически была открыта асимптотическая свобода [8; 140]). В этом контексте также следует упомянуть, что модели типа Гросса–Невё могут быть получены из четырёхмерной полуголоморфной теории Черна–Саймонса с дефектами порядка [39]. В частности, соответствующие операторы Лакса оказываются ультралокальными [36; 37; 51] — свойство, которое должно существенно упростить квантование этих моделей.

Идея формализма Гросса-Невё, или квазилинейной формулировки первого порядка[6], следующая. Как уже упоминалось, основная проблема исследования сигма-моделей заключается в том, что, вообще говоря, таргет-пространство в общем случае является крайне нелинейным. Идея состоит в том, чтобы перейти от теории со сложным таргет-пространством к калибровочной теории с *плоским "фазовым пространством"*[7]

$$\underbrace{\mathcal{M}}_{\text{стандартная формулировка}} \rightsquigarrow \underbrace{\mathrm{T}^*\mathcal{M}}_{\text{формулировка 1-го порядка}} \simeq \underbrace{\mathrm{T}^*\mathbb{C}^N /\!/ \mathcal{G}_{\mathbb{C}}}_{\text{GLSM 1-го порядка ("Гросс-Невё")}} \tag{0.0.5}$$

для некоторых N и *комплексной калибровочной группы* $\mathcal{G}_{\mathbb{C}}$ (символ $/\!/$ означает гамильтонову редукцию[8] по $\mathcal{G}_{\mathbb{C}}$ пространства $\mathrm{T}^*\mathbb{C}^N$ со стандартной симплектической формой). С точностью до некоторых технических предположений многообразия, обладающие таким представлением, называются *колчанными многообразиями* [115]. Эта схема напоминает трюк Ольшанецкого–Переломова из теории интегрируемых систем [123]. Если такая формулировка касательного расслоения к таргет-пространству существует, наш метод состоит в том, чтобы постулировать действие специального вида, а затем обосновать его эквивалентность сигма-модели.

Построение осуществляется в два этапа. Сначала обсудим кинетический член таких теорий. Предположим, что u и v — это вектор и ковектор, составленные из канонических координат и импульсов на $\mathrm{T}^*\mathbb{C}^N$ соответственно, а $\mu = \mu(v,u) \in \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}^*$ — отображение момента симплектической редукции относительно $\mathcal{G}_{\mathbb{C}}$. Тогда можно определить следующую *калибровочную $\beta\gamma$-систему* [17],

$$\mathcal{S}_0[v,u,A] = \int_\Sigma \mathrm{d}^2 z \Big(v \cdot \overline{\partial} u + \langle \overline{\mathcal{A}}, \mu \rangle - \overline{v} \cdot \partial \overline{u} - \langle \mathcal{A}, \overline{\mu} \rangle \Big) , \tag{0.0.6}$$

где $A = \mathcal{A}\mathrm{d}z + \overline{\mathcal{A}}\mathrm{d}\overline{z}$ — $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$-значное калибровочное поле на Σ (множитель Лагранжа для связи

[6] Здесь и далее эти термины используются как синонимы.

[7] О чистой формулировке первого порядка сигма-моделей см. [68; 108].

[8] Более точно, в случае, когда действие группы не является свободным, необходимо использовать так называемый GIT-фактор. Он отличается от гамильтоновой редукции тем, что некоторые "плохие точки" исключаются из $\mathrm{T}^*\mathbb{C}^N$ перед факторизацией. Это позволяет гарантировать, что результат снова является гладким симплектическим многообразием. Здесь и далее под $/\!/$ мы понимаем именно GIT-фактор.

$\mu = 0$), а $\langle \bullet, \bullet \rangle$ — спаривание между $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ и $\mathfrak{g}^*_{\mathbb{C}}$. В дальнейшем, однако, мы иногда будем рассматривать μ как "отображение комоментов", то есть как элемент $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$, получаемый из $\mathfrak{g}^*_{\mathbb{C}}$ с помощью метрики Киллинга (которую мы далее обозначаем как Tr).

Далее в эту теорию вводятся взаимодействия. Для этого необходимо найти другую группу $\widetilde{\mathcal{G}_{\mathbb{C}}}$ глобальных симметрий голоморфного сектора свободного действия (0.0.6). Действие этой группы имеет некоторое отображение комомента (ток Нётер), который мы обозначим через $J \in \widetilde{\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}}$. Затем можно связать голоморфный и антиголоморфный сектора теории (0.0.6) ток-токовым членом с константой связи κ, то есть

$$\mathcal{S}_{\mathrm{GN}} = \mathcal{S}_0 + 2\pi\kappa \int_\Sigma \mathrm{d}^2 z \, \mathrm{Tr}\big(J\bar{J}\big) \,. \tag{0.0.7}$$

Мы называем это действие *действием GLSM первого порядка*, или *обобщённым (киральным) действием Гросса–Невё*. Действия такого типа можно рассматривать как некоторое обобщение киральных моделей Гросса–Невё. Мотивация введения такого действия заключается в том, что определённый класс сигма-моделей может быть тождественно (по крайней мере на классическом уровне) переписан в такой форме. Более того, число вершин взаимодействия в таких теориях конечно, а калибровочное поле является топологическим [25] (для плоского мирового листа это означает, что существует калибровка $A = 0$).

По существу, подход Гросса–Невё объединяет конструкцию квазилинейной сигма-модели (GLSM) с формализмом первого порядка. Формулировка первого порядка сигма-моделей восходят к [108] (см. также [66; 67; 69; 163]). Конструкция GLSM в случае $\mathbb{CP}^{n-1}$ восходит к работам [40; 42; 43]; в $\mathcal{N} = 2$ суперсимметричном случае эта конструкция широко использовалась в [41; 114; 117; 157], а также во многих других работах. Ещё один, более поздний аспект этой истории [21] состоит в том, что конструкцию Гросса–Невё, как мы видели выше, можно рассматривать как деформацию искривлённых $\beta\gamma$-систем [17; 159] ток-токовыми взаимодействиями. Наконец, подчеркнём, что простейший пример киральной модели Гросса–Невё (в некотором смысле её абелева версия) — это модель Тирринга. Её суперсимметричный аналог был введён в [63] в контексте суперконформных духовых систем. Однако лишь недавно была показана эквивалентность этой модели сигма-модели с таргет-пространством в виде цилиндра $\mathbb{R} \times \mathbb{S}^1$ путём явного анализа корреляционных функций [34].

Класс моделей, которые к настоящему времени были сформулированы в виде ГН-моделей, включает теории с $\mathbf{SU}(n)$-симметрией, в частности $\mathbb{CP}^{n-1}$ модели [26; 27]. Естественно ожидать, что аналогичная программа может быть выполнена для теорий с другими группами симметрии. Настоящая диссертация делает шаг в этом направлении, наиболее концентрируясь на семействах ортогональных (группа симметрии[9] $\mathbf{O}(n)$) и симплектических (группа симметрии $\mathbf{Sp}(2n)$) грассманианов. Включая $\mathbf{SU}(n)$-случай, эти семейства имеют

[9] Здесь под $\mathbf{O}$ и $\mathbf{Sp}$ мы подразумеваем компактные формы

$$\mathbf{O}(n) = \mathbf{O}(n,\mathbb{C}) \bigcap \mathbf{U}(n) \quad \text{и} \quad \mathbf{Sp}(2n) = \mathbf{Sp}(2n,\mathbb{C}) \bigcap \mathbf{U}(2n) \,. \tag{0.0.8}$$

Комплексные группы обычно обозначаются как $\mathbf{GL}(n,\mathbb{C})$, $\mathbf{O}(n,\mathbb{C})$ и $\mathbf{Sp}(2n,\mathbb{C})$.

вид[10], указанный в Таблице 1.

Тип	**Факторпространство**
Унитарные	$\mathsf{Gr}(m,n) := \dfrac{\mathbf{U}(n)}{\mathbf{U}(m)\times\mathbf{U}(n-m)}$
Ортогональные	$\mathsf{OGr}(m,n) := \dfrac{\mathbf{O}(n)}{\mathbf{U}(m)\times\mathbf{O}(n-2m)}$
Симплектические	$\mathsf{SGr}(m,2n) := \dfrac{\mathbf{Sp}(2n)}{\mathbf{U}(m)\times\mathbf{Sp}(2(n-m))}$

Таблица 1: Грассманианы унитарной, ортогональной и симплектической серий.

Хотя модели на симметрических пространствах составляют лишь часть полного ландшафта интегрируемых сигма-моделей, они действительно выделяются. Причина в том, что только для этих пространств наша конструкция дает кэлеровы метрики для сигма-моделей. Фактически, все указанные выше грассманианы допускают кэлеровы метрики[11], но в общем случае они отличаются от так называемой "нормальной", или редуктивной, метрики, которую дает наша конструкция.

Кратко напомним определение. Пусть задана полупростая группа Ли $\mathcal{G}$ с подгруппой $\mathcal{H}\hookrightarrow\mathcal{G}$, а соответствующие алгебры Ли обозначим $\mathfrak{g}$ и $\mathfrak{h}$. Тогда можно разложить $\mathfrak{g}=\mathfrak{h}\oplus\mathfrak{m}$, где $\mathfrak{m}$ — ортогональное дополнение к $\mathfrak{h}$ относительно метрики Киллинга. Аналогично разложим соответствующую форму Маурера–Картана $\theta = g^{-1}\mathrm{d}g$ на компоненты $\theta=\theta_{\mathfrak{h}}+\theta_{\mathfrak{m}}$. Нормальную метрику на однородном пространстве $\mathcal{G}/\mathcal{H}$ можно ввести как $\mathrm{d}s^2_{\text{норм}} = -\mathrm{Tr}\,\theta^2_{\mathfrak{m}}$. Оказывается, что именно такой тип метрики является наиболее естественным в нашем контексте.

Весьма вероятно, что для других выборов метрик интегрируемость моделей теряется. В Таблице 2 мы явно выписываем те из вышеуказанных грассманианов, которые являются эрмитово симметрическими[12] $\big($в последней строке мы сохраняем одну компоненту связности $\mathsf{OGr}(n,2n)\big)$. С точки зрения формализма Гросса–Невё эти симметрические пространства характеризуются также тем, что нормальные римановы метрики сигма-моделей, возникающие в формализме второго порядка после исключения вспомогательных полей, являются кэлеровыми [29]. Следовательно, согласно известному результату [165], такие сигма-модели допускают $\mathcal{N}=(2,2)$ суперсимметричные расширения[13]. Отметим также, что в рамках изложенной выше логики B-поле, входящее в наше определение сигма-модели, в случае симметрических пространств оказывается чисто топологическим. В настоящей диссертации мы

[10]Заметим, что $\mathsf{OGr}(m,2m)$ имеет две компоненты связности. Мы обсудим это подробно в Приложении А ниже.

[11]Кэлеровы однородные пространства были классифицированы в [18].

[12]Фактически, они исчерпывают все эрмитовы симметрические пространства классических групп.

[13]Обычные суперполевые формулировки сигма-моделей с таргет-пространствами в виде грассманианов изучались в [77; 84].

Эрмитово симметрическое пространство	**Название**	**Интерпретация**
$\frac{\mathbf{U}(n)}{\mathbf{U}(m)\times\mathbf{U}(n-m)}$	Унитарные грассманианы	Пространство модулей m-мерных подпространств в $\mathbb{C}^n$
$\frac{\mathbf{Sp}(2n)}{\mathbf{U}(n)}$	Лагранжев грассманиан	Компактный аналог верхней полуплоскости Зигеля
$\frac{\mathbf{O}(n)}{\mathbf{O}(n-2)\times\mathbf{O}(2)}$	Грассманиан вещественных 2-плоскостей	Квадрика в $\mathbb{CP}^{n-1}$
$\frac{\mathbf{O}(2n)}{\mathbf{U}(n)}$	Пространство ортогональных комплексных структур	Многообразие проективных чистых спиноров (ср. [17])

Таблица 2: Эрмитовы симметрические пространства классических групп.

также объясним, как можно суперсимметризовать лагранжианы обобщённых моделей Гросса–Невё, соответствующие сигма-моделям на симметрических грассманианах.

Основной задачей данной части работы является построение квазилинейной формулировки первого порядка (0.0.7) для грассманианов, указанных в Таблице 1, и установление эквивалентности данных моделей с соответствующими сигма-моделями, наделёнными описанной выше нормальной римановой метрикой. Опишем кратко основной результат о данных, необходимых для построения грассманианных моделей Гросса-Невё, эквивалентных сигма-моделям. Все кокасательные расслоения таких таргет-пространств имеют вид симплектического фактора $\mathrm{T}^*\mathrm{Mat}_{m,n}(\mathbb{C})//\mathcal{G}_{\mathbb{C}}$ для различных $\mathcal{G}_{\mathbb{C}}$, которые мы опишем ниже. В качестве канонически сопряжённых координат на $\mathrm{T}^*\mathrm{Mat}_{m,n}(\mathbb{C})$ используются матрицы U размера $m\times n$ и V размера $n\times m$ соответственно. Все группы $\widetilde{\mathcal{G}_{\mathbb{C}}}$ являются подгруппами в $\mathbf{GL}(n,\mathbb{C})$ и действуют как $U\to hU$, $V\to Vh^{-1}$. Далее, существуют три ситуации, соответствующие различным грассманианам в Таблице 1:

- Унитарный случай: группа калибровочных преобразований $\mathcal{G}_{\mathbb{C}}=\mathbf{GL}(m,\mathbb{C})$ действует как $U\to Ug$, $V\to g^{-1}V$ с отображением комоментов $\mu=VU$. Глобальная группа $\widetilde{\mathcal{G}_{\mathbb{C}}}$ есть[14] $\mathbf{GL}(n,\mathbb{C})$, а соответствующий ток имеет вид $J=UV$.

- Ортогональный случай: калибровочная группа $\mathcal{G}_{\mathbb{C}}=\mathbf{GL}(m,\mathbb{C})\rtimes\mathrm{Mat}_m^{\mathrm{symm}}$, где $\mathrm{Mat}_m^{\mathrm{symm}}$ — абелева группа по сложению симметричных матриц размера $m\times m$. Действие задаётся как $U\to Ug$, $V\to g^{-1}V+qU^t$, $q\in\mathrm{Mat}_m^{\mathrm{symm}}$. Удобно считать, что имеются два отображения комоментов, соответствующие первому и второму сомножителям полупрямого произведения: $\mu_1=VU$ и $\mu_2=U^tU$. Глобальная группа $\widetilde{\mathcal{G}_{\mathbb{C}}}$ равна $\mathbf{SO}(n,\mathbb{C})$, а соответствующий ток имеет вид $J=UV-(UV)^t$.

- Симплектический случай: он дословно повторяет предыдущий с незначительными изменениями. Достаточно сказать, что $\mathcal{G}_{\mathbb{C}}=\mathbf{GL}(m,\mathbb{C})\rtimes\mathrm{Mat}_m^{\text{skew-symm}}$, а $\widetilde{\mathcal{G}_{\mathbb{C}}}$ есть $\mathbf{Sp}(2n,\mathbb{C})$.

[14]Оказывается, её можно редуцировать до $\mathbf{PSL}(n,\mathbb{C})$.

Одномерные сигма-модели и спиновые цепочки

Мы уже рассмотрели квазилинейную формулировку первого порядка для грассманианов, в которой из факта представления кокасательных расслоений как колчанных многообразий следует существование эквивалентной формулировки соответствующих сигма-моделей с конечным числом взаимодействий. Теперь обратимся к другой, сходной по духу, но отличающейся в деталях идее: если таргет-пространство одномерной сигма-модели допускает реализацию в виде лагранжева подмногообразия в произведении коприсоединённых орбит, то квантовомеханическая задача о свободной частице на таком пространстве может быть сформулирована в терминах спиновой цепочки, получаемой из геометрического квантования этих орбит. Хотя в диссертации мы сосредоточимся на весьма частном аспекте этого соответствия — а именно на $\mathcal{N} = 2$ и $\mathcal{N} = 4$ суперсимметризации связи между $\mathbb{CP}^1$ сигма-моделью и двухузловой $\mathbf{SU}(2)$-спиновой цепочкой в пределе большого спина, — для полноты картины приведём краткий общий обзор обсуждаемых идей.

Пусть $\mathcal{M}$ — риманово многообразие. С общей математической точки зрения нас будут интересовать операторы лапласовского типа $-\triangle$, действующие, вообще говоря, на квадратично интегрируемых сечениях векторных расслоений $\mathscr{E}$ над $\mathcal{M}$. К таким операторам относятся оператор Лапласа–Бельтрами, действующий на функциях $L^2(\mathcal{M})$, магнитный лапласиан, действующий на сечениях векторных расслоений $L^2(\mathcal{M}, \mathscr{E})$, оператор Лапласа–де Рама, действующий на дифференциальных формах $\Omega^\bullet(\mathcal{M})$, и так далее. Один из главных вопросов спектральной геометрии состоит в изучении спектральной задачи

$$-\triangle\Psi = E\Psi\,. \tag{0.0.9}$$

Однако, как показывает практика, эта спектральная задача столь же богата, сколь и сложна. Действительно, она представляет собой эллиптическое дифференциальное уравнение в частных производных второго порядка, для которого не существует общего алгоритма решения. На практике эта задача может быть решена точно только для многообразий с “достаточно большой” симметрией [32].

Спектральная задача (0.0.9) имеет замечательно продуктивную физическую интерпретацию. Ряд операторов лапласовского типа возникают как квантовые гамильтонианы[15] $\mathcal{H} = -\triangle$ для одномерных сигма-моделей. Они описывают динамику свободной частицы, движущейся по римановому многообразию $\mathcal{M}$, возможно, в присутствии дополнительных геометрических структур. Стандартное действие для таких теорий имеет вид

$$\mathcal{S} = \frac{1}{2}\int \big(g_{ij}\dot{q}^i\dot{q}^j\big)\mathrm{d}t + \int \mathcal{A} + (\text{фермионы})\,, \tag{0.0.10}$$

[15]Неоднозначность упорядочения при квантовании может, на самом деле, приводить к аддитивному вкладу скалярной кривизны в гамильтониан [151]. Однако мы будем пренебрегать этим членом, поскольку наше внимание сосредоточено на инвариантных метриках на однородных пространствах, где кривизна постоянна.

где q^i — координаты на $\mathcal{M}$, $g_{ij}(q)$ — компоненты метрического тензора, а $\mathcal{A}$ — 1-форма[16] на $\mathcal{M}$, интерпретируемая как векторный потенциал магнитного поля. Чтобы получить оператор лапласовского типа, действующий на дифференциальные формы после квантования, обычно вводят фермионы суперсимметричным образом [142]. В таком случае уравнение (0.0.9) может интерпретироваться как стационарное уравнение Шрёдингера для соответствующей квантовой сигма-модели.

Оказывается, в рамках некоторых предположений возможно подменить задачу диагонализации оператора Лапласа на некотором многообразии задачей нахождения собственных значений некоторого гамильтониана для конкретной *спиновой цепочки*. В данной диссертации под квантовыми спиновыми цепочками понимаются квантовомеханические системы, гильбертовы пространства которых образованы тензорным произведением неприводимых представлений некоторых групп Ли. В ряде случаев такая формулировка может сильно упростить спектральную задачу и позволить использовать новые методы, типичные для спиновых моделей, например анзац Бете [141]. В этом формализме часто удобно переходить к осцилляторному представлению [126], что позволяет свести задачу к вычислениям в терминах операторов рождения и уничтожения алгебры Гейзенберга. С физической точки зрения такой подход также полезен, поскольку даёт новую глобальную схему квантования точечных частиц. Это открывает новые возможности для исследований в областях, где такое свойство может оказаться существенным, например при изучении AdS-частиц [14] или даже BMS-частиц [13; 16]. Кроме того, как будет показано ниже, этот метод иногда позволяет свести квантование некомпактных кокасательных расслоений к квантованию некоторых компактных многообразий, что само по себе интересно в контексте геометрического квантования [99; 154]. В комплексном случае мы иногда можем переформулировать задачи *гармонического анализа* [83] полностью в рамках *комплексной* или даже *алгебраической геометрии* [75].

Итак, как уже отмечалось, основная идея состоит в установлении связи между двумя, на первый взгляд, не связанными моделями:

$$\text{1D сигма-модели} \qquad \leftrightsquigarrow \qquad \text{спиновые цепочки}\,. \tag{0.0.11}$$

Основной подход состоит в том, чтобы заменить фазовое пространство частицы $\mathrm{T}^*\mathcal{M}$ — которое может быть трудно квантовать напрямую — произведением более простых многообразий, геометрическое квантование которых хорошо изучено. В частности, используются многообразия, квантование которых даёт единственное неприводимое унитарное представление группы, соответствующее простейшему, или минимальному, возможному гильбертову пространству. Как известно из теории геометрического квантования, чтобы получить унитарные неприводимые представления в качестве гильбертовых пространств, необходимо выполнить геометрическое квантование специальных симплектических многообразий, называемых коприсоединёнными орбитами $\mathcal{O}$, наделённых естественной симплектической формой

[16] Оказывается, существуют интересные физические ситуации, в которых 1-форма $\mathcal{A}$ не определена глобально, однако действие $\mathcal{S}$ остаётся корректно определённым [6; 160]. Простейший пример — монополь Дирака на сфере [50].

Кириллова–Костанта–Сурио[17] [98]. В наиболее распространённом физическом случае полупростых компактных групп Ли, таких как $\mathbf{SU}(n)$, $\mathbf{SO}(n)$ и $\mathbf{Sp}(2n)$, это утверждение воплощено в *теореме Бореля–Ботта–Вейля* [19]. Неформально, она утверждает, что конечномерные неприводимые унитарные представления этих групп могут быть реализованы на пространствах голоморфных сечений (или, в более общем смысле, старших когомологий) некоторых линейных расслоений над обобщёнными флаговыми многообразиями. Для более широкого класса групп метод орбит остаётся скорее руководящим принципом, чем полной теорией. Тем не менее, существуют конструктивные результаты для конкретных типов групп, таких как нильпотентные группы [100] (например, группа Гейзенберга) и некоторые некомпактные группы (например, $\mathbf{SL}(2,\mathbb{R})$ [118]). В данном тексте мы оставим в стороне трудности, связанные с отсутствием всеобъемлющей общей теории, и будем считать известными конкретные орбиты и методы квантования, дающие интересующие нас унитарные представления.

С точки зрения метода орбит Кириллова классическим аналогом спиновой цепочки является механическая система, фазовое пространство которой является произведением конкретных коприсоединённых орбит. С другой стороны, фазовое пространство частицы на $\mathcal{M}$ — это кокасательное расслоение $\mathrm{T}^*\mathcal{M}$. Предполагая соответствие между такими фазовыми пространствами и их гамильтонианами,

$$\Big(\mathrm{T}^*\mathcal{M}\,,\mathcal{H}_{\text{свободная частица}}\Big) \qquad \rightsquigarrow \qquad \Big(\mathcal{O}_1\times\mathcal{O}_2\times\ldots\times\mathcal{O}_n\,,\mathcal{H}_{\text{spin}}\Big), \tag{0.0.12}$$

для некоторых коприсоединённых орбит $\mathcal{O}_i$ и гамильтониана спиновой цепочки $\mathcal{H}_{\text{spin}}$ на их произведении, мы стремимся заменить "сложный" объект квантования – кокасательное расслоение с геодезическим гамильтонианом – произведением более простых симплектических многообразий, а именно коприсоединённых орбит, снабжённых "спиновым" гамильтонианом. Квантование этого соответствия имеет вид

$$\Big(L^2(\mathcal{M})\,,-\triangle\Big) \qquad \rightsquigarrow \qquad \Big(\mathsf{V}_1\otimes\mathsf{V}_2\otimes\ldots\otimes\mathsf{V}_n\,,\mathcal{H}_{\text{spin}}\Big)\,, \tag{0.0.13}$$

где каждое гильбертово пространство V_i получено геометрическим квантованием орбиты $\mathcal{O}_i$. В идеальном сценарии такое соответствие означало бы эквивалентность соответствующих спектральных задач. Более конкретно, справедлив следующий принцип [28]:

> *Если существует лагранжево вложение конфигурационного пространства частицы в произведение коприсоединённых орбит, которое в подходящем смысле продолжается до симплектоморфизма фазовых пространств частицы и спиновой цепочки, то спиновый гамильтониан, имеющий минимум на этом лагранжевом подмногообразии, индуцирует динамику свободной частицы на этом лагранжевом подмногообразии, наделённом метрикой, задаваемой квадратичной по импульсам частью спинового гамильтониана.*

[17] На практике мы не будем использовать общее определение коприсоединённой орбиты и её симплектической структуры. Вместо этого будем считать известным тот факт, что в конкретных случаях они изоморфны хорошо известным симплектическим многообразиям, таким как двумерная сфера для группы $\mathbf{SU}(2)$.

Вместо того чтобы подробно излагать общую схему установления такого соответствия, рассмотрим важный для нашей работы пример. Отправной точкой является подходящее лагранжево вложение сферы в произведение коприсоединённых орбит. Поскольку $\mathbf{SU}(2)$ — группа изометрий сферы, естественно рассмотреть её коприсоединённые орбиты. Все коприсоединённые орбиты $\mathbf{SU}(2)$ сами являются сферами, снабжёнными симплектической формой, пропорциональной форме объёма. Эти сферы удобно параметризовать комплексными векторами единичной длины в $\mathbb{C}^2$, определёнными с точностью до фазы ("параметризация Хопфа"). В качестве классического фазового пространства спиновой цепочки мы берём произведение $\mathbb{CP}^1 \times \mathbb{CP}^1$, наделённое симплектической формой

$$\omega_p = ip\big(\mathrm{d}\overline{z} \wedge \mathrm{d}z + \mathrm{d}\overline{w} \wedge \mathrm{d}w\big)\,, \qquad |z|^2 = |w|^2 = 1\,, \tag{0.0.14}$$

где двухкомпонентные комплексные векторы z и w параметризуют первую и вторую сферы соответственно, и подразумевается суммирование по индексам $\mathbb{C}^2$. Центральным для конструкции является следующее утверждение. Подмногообразие $\big(\mathbb{CP}^1 \times \mathbb{CP}^1, \omega_p\big)$, задаваемое уравнением[18] $\overline{z} \circ w = 0$, является лагранжевым и диффеоморфно сфере. Это утверждение легко проверить в конкретной параметризации уравнения $\overline{z} \circ w = 0$ в виде $w_i = \varepsilon_{ij}\overline{z}^j$, где ε_{ij} — двумерный символ Леви-Чивиты. Полезно также понять это вложение в неоднородных координатах. Параметризуя $z = [1, z_{\mathrm{inh}}]$ и $w = [w_{\mathrm{inh}}, -1]$, условие $\overline{z} \circ w = 0$ переходит в $z_{\mathrm{inh}} = \overline{w}_{\mathrm{inh}}$, что вкладывает сферу в произведение как $z_{\mathrm{inh}} \mapsto (z_{\mathrm{inh}}, \overline{z}_{\mathrm{inh}})$.

Более того, данное лагранжево вложение может быть продолжено до симплектоморфизма в следующем смысле.

Теорема. ([33]) Существует симплектоморфизм[19]

$$\mathrm{T}^*\mathbb{CP}^1 \simeq \lim_{p\to\infty} \frac{\big(\mathbb{CP}^1 \times \mathbb{CP}^1, \omega_p\big)}{\{\det \mathcal{Z} = 0\}}\,, \tag{0.0.15}$$

где $\mathcal{Z}$ — матрица 2×2, столбцами которой являются векторы z и w.

Квантование данного симплектоморфизма и приводит к искомой связи задач о квантовой свободной частице на сфере (т.е. одномерной сигма-модели) и спиновой цепочки. Действительно, квантование левой части (0.0.15) даёт гильбертово пространство свободной частицы $L^2\big(\mathbb{CP}^1\big)$, в то время как квантование правой части даёт пространство состояний вида $\lim\limits_{p\to\infty}\big(\mathsf{V}_{\frac{p}{2}} \otimes \mathsf{V}_{\frac{p}{2}}\big)$, то есть двухузловой спиновой цепочки в пределе бесконечного спина, где $\mathsf{V}_{\frac{p}{2}}$ есть представление $\mathfrak{su}(2)$ со спином $\frac{p}{2}$. Более того, как показано в [33], гамильтониану свободной частицы $\mathcal{H} = -\triangle$ на стороне сигма-модели соответствует стандартный XXX га-

[18] Здесь и далее для векторов $u, v \in \mathbb{C}^n$ обозначаем через $\overline{v} \circ u$ стандартное эрмитово скалярное произведение.

[19] Утверждение о пределе большого λ следует понимать так: при конечном λ мы получаем симплектоморфизм на трубчатую окрестность Дарбу–Вейнстейна $U_\lambda\big(\mathrm{T}^*\mathbb{CP}^1\big)$, линейный размер которой масштабируется с λ. Переход $\lambda \to \infty$ расширяет эту окрестность до всего $\mathrm{T}^*\mathbb{CP}^1$.

мильтониан

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}\sum_{m=1}^{3} S^m \otimes S^m \tag{0.0.16}$$

на стороне спиновой цепочки, где S^m есть m-й генератор $\mathfrak{su}(2)$ в представлении $\mathsf{V}_{\frac{p}{2}}$. Также можно показать, что в случае конечного спина $\frac{p}{2}$ соответсвующая спиновая цепочка является естественным усечением $L^2\big(\mathbb{CP}^1\big)$ до гармоник уровня не выше p, что следует из правила сложения спинов

$$\mathsf{V}_{\frac{p}{2}} \otimes \mathsf{V}_{\frac{p}{2}} \simeq \bigoplus_{k=0}^{p} \mathsf{V}_k\,, \qquad L^2\big(\mathbb{CP}^1\big) \simeq \bigoplus_{k=0}^{\infty} \mathsf{V}_k\,. \tag{0.0.17}$$

В этом контексте представление V_k имеет интерпретацию как пространство сферических гармоник уровня k.

История изложенных выше идей о связи сигма-моделей и спиновых цепочек начинается с работы Д. Халдейна, который показал, что низкоэнергетическая эффективная теория для антиферромагнитной $\mathbf{SU}(2)$ бесконечной спиновой цепочки в пределе большого спина — это знаменитая $(1+1)$-мерная $\mathbf{O}(3)$ сигма-модель, модифицированная топологическим θ-членом [79; 80]. Математическая интерпретация этой конструкции на языке симплектической и лагранжевой геометрии была позже предложена Д. Быковым [24; 28].

Впоследствии внимание сместилось на более простой и математически строгий одномерный случай. В [33] Д. Быков и А. Кузовчиков построили $\mathbf{SU}(n)$ спиновые цепочки типа "все со всеми" с n узлами, предел большого спина которых даёт одномерные сигма-модели на флаговых многообразиях. В той же работе и в продолжении [32] они также показали, как с помощью алгебраических методов можно получить спектр оператора Лапласа–Бельтрами на флаговых многообразиях, наделённых различными инвариантными метриками, таким образом решив, например, общий случай полного флага $\mathcal{F}_3$. В статье [31] сделаны первые шаги для изотропных флаговых многообразий путём построения нескольких соответствующих лагранжевых вложений в присоединённые орбиты $\mathbf{SO}$ и $\mathbf{Sp}$.

Изложенный контекст взаимосвязи между спиновыми цепочками и сигма-моделями является достаточно общим. В диссертации мы сосредоточимся на рассмотренном выше примере такого соответствия, а именно на связи сигма-модели с таргет-пространством в виде двумерной сферы и двухузловой XXX спиновой цепочки. Новый элемент, который вносит данная работа, заключается в построении суперсимметричного аналога описанной схемы.

Суперсимметричные сигма-модели

Опишем кратко два класса суперсимметричных сигма-моделей в 1D, важные для нашего контекста. Это модели, чьи суперзаряды соответствуют дифференциалам в комплексах Дольбо и Кэлера–де Рама [94; 142]. Хотя первая обладает $\mathcal{N}=2$ суперсимметрией, а вторая — $\mathcal{N}=4$, обе модели проще всего объяснить на языке $\mathcal{N}=2$ суперсимметрии. В 1D существуют два фундаментальных типа $\mathcal{N}=2$ сигма-моделей, так называемые модели типа $2a$ и $2b$ в [89]. Модель $2a$ может быть получена размерной редукцией из $\mathcal{N}=(1,1)$ моде-

ли в 2D и описывает комплекс де Рама. В свою очередь, модель $2b$ может быть получена из («киральной») $\mathcal{N} = (0,2)$ модели в 2D и описывает комплекс Дольбо. Если, кроме того, метрика таргет-пространства является кэлеровой, суперсимметрия модели $2a$ автоматически повышается[20] до $\mathcal{N} = 4$, и в этом случае называется моделью типа $4a$.

Нелинейные киральные мультиплеты и «спиновые цепочки».

Одной из целей данной работы является построение, по аналогии с бозонным случаем, $\mathcal{N} = 2$ и $\mathcal{N} = 4$ суперсимметричных спиновых цепочек, которые в пределе большого спина воспроизводят $2b$ и $4a$ суперсимметричные сигма-модели с таргет-пространством $\mathbb{CP}^1$. С точки зрения суперсимметрии, это, по-видимому, новые спиновые модели, которые удобнее всего описывать в $\mathcal{N} = 2$ суперпространстве в терминах *нелинейных киральных мультиплетов* — обобщения мультиплета, рассмотренного в [93]. Соответствующая нелинейная суперполевая связь на самом деле является обобщённым условием киральности относительно некоторой плоской суперсвязности $\mathscr{A}$ в $\mathcal{N} = 2$ суперпространстве (тривиальная связность соответствует обычному условию киральности). Так же, как и в случае сигма-моделей, мы строим два типа суперсимметричных спиновых цепочек:

- **D-модель:** суперсвязность $\mathscr{A}$ со значениями в верхнетреугольных матрицах $n \times n$,
- **K-модель:** суперсвязность $\mathscr{A}$ со значениями в общих матрицах $n \times n$.

Оказывается, это естественные спиноцепочечные аналоги сигма-моделей типа 2b и 4a соответственно (**D** — сокращение от Dolbeault, а **K** — от Kähler-de Rham). В частности, суперсимметрия K-модели автоматически повышается до $\mathcal{N} = 4$, по аналогии с моделью $4a$. Сигма-модели восстанавливаются в пределе $p \to \infty$, где p — уровень усечения, обсуждавшийся выше (связанный с числом допустимых гармоник на стороне сигма-модели или значением «спина» на стороне спиновой цепочки).

Довольно поразительно, что для обоих типов моделей лагранжианы можно взять как «свободные лагранжианы» для нелинейных мультиплетов в $\mathcal{N} = 2$ суперпространстве, а взаимодействия *полностью* закодированы в деформированных условиях киральности[21]. Более того, квантование таких теорий с использованием представления Швингера-Вигнера приводит к осцилляторным представлениям для гамильтониана и суперзарядов (суперзаряды кубичны по осцилляторам, напоминая модели[22] из [119; 120]). Конструкция также естественным образом приводит к связям на гильбертово пространство, которые гарантируют, что оно является *конечномерным* усечением осцилляторного пространства Фока. Структу-

[20] Аналогично тому, как $\mathcal{N} = (1,1)$ суперсимметрия 2D сигма-модели повышается до $\mathcal{N} = (2,2)$ для кэлеровых метрик. Отметим также, что существуют интересные 1D $\mathcal{N} = 4$ модели с гиперкэлеровыми целевыми пространствами, которые не могут быть получены размерной редукцией [45; 60].

[21] Существуют $\mathcal{N} = 4$ сигма-модели с гиперкэлеровыми таргет-пространствами, чья суперполевая формулировка также обладает этим свойством [45].

[22] Родственные решёточные модели были построены в [61; 62]. Модели спиновых цепочек с $\mathcal{N} = 1$ суперсимметрией также появлялись в литературе [113; 133]. Критическое отличие наших моделей в том, что они включают бозонные осцилляторы вместе с фермионными. Конечномерность гильбертова пространства достигается наложением инвариантных относительно суперсимметрии ограничений.

ра гильбертова пространства может быть закодирована в ориентированных графах (колчанах) специального вида. Более того, классические фазовые пространства (содержащие в том числе и фермионы) являются соответствующими колчанными многообразиями, уже упоминавшимися в связи с моделями Гросса-Невё, в то время как соответствующие гильбертовы пространства получаются их геометрическим квантованием.

Для соответствующих $\mathbf{SU}(2)$ суперсимметричных спиновых цепочек мы также вычисляем индекс Виттена [143]

$$W = \mathsf{Tr}(-1)^F e^{-\beta\mathcal{H}}\,, \tag{0.0.18}$$

а также его эквивариантную версию $\widetilde{W}$, учитывающую $\mathbf{SU}(2)$-симметрию моделей. По стандартным соображениям, индекс не зависит от β, поэтому предел $\beta \to \infty$ проецирует на собственные состояния гамильтониана с нулевой энергией, то есть состояния, аннигилируемые суперзарядами. С другой стороны, в наших спиновых цепочках (с конечным спином) гильбертово пространство конечномерно, поэтому выбор $\beta = 0$ не нарушает сходимость (0.0.18), и в этом случае индекс превращается просто в суперразмерность гильбертова пространства (или в суперхарактер в эквивариантном случае). Мы используем этот подход для вычисления индекса Виттена и обнаруживаем, что, к удивлению, он не зависит от параметра усечения p (хотя изменение p меняет гильбертово пространство спиновой цепочки, что не является гладкой деформацией системы). Таким образом, индекс Виттена совпадает с соответствующим индексом сигма-моделей, возникающих в пределе $p \to \infty$, который, в свою очередь, равен индексу операторов Дольбо и де Рама (в случаях $2b$ и $4a$ соответственно). С математической точки зрения это открывает новые инструменты для анализа теорем об индексе, связанных с индексом Виттена [142], используя конечномерные усечения, то есть спиновые цепочки.

Содержание по главам

Диссертационная работа состоит из введения, основной части, содержащей 3 главы, заключения и 3 приложений.

В главе 1 представлено построение квазилинейной формулировки первого порядка (формулировки Гросса–Невё) для двумерных комплексных сигма-моделей, таргет-пространства которых есть комплексные грассманианы, оснащённые нормальной римановой метрикой и B-полем, пропорциональным фундаментальной эрмитовой форме метрики. В данной формулировке вычисляется однопетлевая β-функция соответсвующих сигма-моделей.

В главе 2 строится $\mathcal{N} = (2,2)$ суперсимметричное обобщение квазилинейной формулировки первого порядка для сигма-моделей, чьи таргет-пространства являются симметрическими грассманианами, для которых нормальная риманова метрика является кэлеровой. В случае максимального ортогонального грассманиана строится альтернативная суперсим-

метричная формулировка, в которой фермионы явно принимают значение в касательном расслоении.

В главе 3 построены $\mathcal{N} = 2$ и $\mathcal{N} = 4$ суперсимметричные спиновые цепочки, которые в пределе большого спина переходят в сигма-модели с таргет-пространством $\mathbb{CP}^1$ и соответствующей суперсимметрией. Также предложено $\mathcal{N} = 2$ суперполевое описание данных цепочек, основанное на нелинейных киральных мультиплетах, построенных с помощью некоторых плоских суперсвязностей.

В заключении обсуждаются полученные результаты и их возможное развитие.

В приложениях приводятся некоторые сведения о геометрии грассманианов (Приложения А и Б), а также детали о преобразованиях суперсимметрии для теорий Гросса-Невё максимальных ортогональных грассманианов в формулировке "минимальных геометрических фермионов" (Приложение В).

Благодарности. Я благодарю своих друзей и коллег, в особенности Д. Агеева, А. Будёхину, И. Выборного, Д. Калинину, Г. Кочнева, А. Кузовчикова, О. Малатеста, М. Маркова, А. Михайлова, И. Найдёнова, А. Овсянникова, Д. Пономарёва, М. Посысоева, С. Рамазанова, Д. Рудинского, А. Селеменчука, К. Точёных, Т. Хабибулина, М. Чудову, О. Шевцову, А. Шейкина, а также моих родителей Александра и Светлану и моих сестёр Анну и Ольгу, за создание тёплой и понимающей атмосферы, без которой я не смог бы преодолеть трудности, возникавшие в моей жизни во время обучения физике и математике.

Я признателен кафедрам физики высоких энергий и элементарных частиц, статистической физики и математической физики СПбГУ за курсы, давшие мне необходимую техническую базу в бакалавриате и магистратуре. Я также благодарю Институт Теоретической и Математической Физики МГУ и отдел теоретической физики МИАН, которые способствовали моему развитию во время моей аспирантуры.

Я неизмеримо благодарен людям, у которых я в той или иной степени учился искусству занятия наукой: М. Налимову, М. Комаровой, С. Рычкову и, в особенности, Д. Быкову. Практически всё, что я умею в теоретической и математической физике, а также вкус к выбору задач я приобрёл у них, и я бесконечно ценю каждую потраченную на меня минуту.

Я хотел бы посвятить эту диссертацию своей семье, а также памяти Елены Аксёновой, с которой мне многие годы выпадало счастье разделять мечту о занятиях математической физикой.

Глава 1. Формализм Гросса-Невё для грассманианов

1.1 Унитарные грассманианы

В этой главе мы обсуждаем квазилинейную формулировку первого порядка, или формализм Гросса-Невё, для сигма-моделей с таргет-пространствами в виде унитарных, ортогональных и симплектических грассманианов.

Начнем с формулировки сигма-моделей на грассманиане $\mathsf{Gr}(m,n)$ в виде калибровочных киральных "моделей Гросса–Невё". Для этого мы сначала опишем соответствующую модель типа Гросса–Невё, а затем докажем её эквивалентность сигма-модели. Напомним, что как многообразие $\mathsf{Gr}(m,n)$ есть пространство m-мерных подпространств в $\mathbb{C}^n$. Как таргет-пространство сигма-модели $\mathsf{Gr}(m,n)$ в некотором смысле можно рассматривать как "конфигурационное пространство" сигма-модели, и ключевым шагом будет построение гамильтоновой формулировки с "фазовым пространством" $\mathrm{T}^*\mathsf{Gr}(m,n)$. Удобно представить эту систему в терминах "расширенного фазового пространства" $\mathrm{T}^*\mathrm{Hom}(\mathbb{C}^m,\mathbb{C}^n) \simeq \mathbb{C}^{2mn}$, на которое наложены некоторые связи, возникающие из процедуры симплектической редукции. Построенная теория первого порядка с "фазовым пространством" в виде симплектического фактора, по сути, и есть формулировка Гросса–Невё. Как уже упоминалось, это представление отражает тот факт, что тотальное пространство кокасательного расслоения к грассманиану является колчанным многообразием [115]. Как мы покажем в следующих разделах, эта стратегия также работает в случае ортогональных и симплектических грассманианов. Мы также объясним, что эта конструкция подразумевает специальную форму взаимодействия, а именно $\mathrm{Tr}(\mu\bar{\mu})$, где μ – отображение моментов для остаточной глобальной симметрии (после симплектической редукции).

Чтобы продемонстрировать, как эта схема работает на практике, введем набор матричнозначных полей

$$U \in \mathrm{Hom}(\mathbb{C}^m,\mathbb{C}^n), \qquad V \in \mathrm{Hom}(\mathbb{C}^n,\mathbb{C}^m)\,, \tag{1.1.1}$$

а также калибровочное поле $\mathcal{A}$ для естественного действия $U \to Ug$, $V \to g^{-1}V$ группы $\mathbf{GL}(m,\mathbb{C})$. Геометрический смысл этих определений заключается в следующем: каждую m-мерную плоскость в $\mathbb{C}^n$ можно параметризовать матрицей U, столбцы которой образуют си-

стему из m линейно независимых векторов в $\mathbb{C}^n$, а действие калибровочной группы $\mathbf{GL}(m,\mathbb{C})$ выражает тот факт, что разные наборы линейно независимых векторов могут задавать одно и то же m-мерное подпространство. Чтобы установить связь с моделью ГН, мы объединяем эти поля в формальный "дираковский спинор" $\Psi := \begin{pmatrix} U & \overline{V} \end{pmatrix}$, где черта означает эрмитово сопряжение. Свободная часть системы тогда описывается просто дираковским лагранжианом

$$\mathcal{L}_0 = \mathrm{Tr}\left(\overline{\Psi}\gamma^\mu D_\mu \Psi\right) = \mathrm{Tr}\left(V\overline{D}U\right) + \mathrm{Tr}\left(\overline{U}D\overline{V}\right)\,, \qquad \overline{D}U = \overline{\partial} - U\overline{\mathcal{A}}\,. \tag{1.1.2}$$

Мы работаем в комплексных координатах $(z,\overline{z}) = (x+iy, x-iy)$, а комплексные производные ∂ и $\overline{\partial}$ определены стандартным образом[1]. Таким образом, (1.1.2) представляет собой бозонный аналог свободного фермиона, также известный как "симплектический бозон" [72]. Так же, как и в фермионном случае, эта система обладает голоморфным током

$$\frac{1}{2\pi}\, J_{\mathsf{sl}} := UV\,, \qquad \overline{\partial} J_{\mathsf{sl}} = 0\,, \tag{1.1.3}$$

что следует из глобальной $\mathbf{GL}(m,\mathbb{C})$-инвариантности свободного действия. Заметим, что варьирование (1.1.2) по калибровочному полю $\overline{\mathcal{A}}$ дает ограничение $VU = 0$, так что J_{sl} принимает значения в $\mathfrak{sl}(n)$. Можно показать [25], что при квантовании моды J_{sl} образуют алгебру Каца–Муди $\mathfrak{sl}(n)$.

Существует красивый геометрический способ интерпретации системы (1.1.2), а также её обобщений с взаимодействием. Чтобы объяснить это, давайте сосредоточимся на голоморфной части лагранжиана и проведем редукцию на одномерное пространство-время, так что $\overline{\partial} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$. Если опустить калибровочное поле, то свободное действие есть обратный образ на мировую линию канонической 1-формы на $\mathrm{T}^*\mathrm{Hom}(\mathbb{C}^m,\mathbb{C}^n)$. Эта 1-форма, которую мы называем θ, имеет тип «$p\mathrm{d}q$», а её внешняя производная является симплектической формой: $\mathrm{d}\theta = \mathrm{Tr}\,(\mathrm{d}U \wedge \mathrm{d}V)$. В свою очередь калибровочное поле отвечает за симплектическую редукцию относительно калибровочной группы $\mathbf{GL}(m,\mathbb{C})$. Ограничение на нулевой уровень отображения момента, необходимое для редукции, получается варьированием лагранжиана по $\overline{\mathcal{A}}$, что даёт условие $VU = 0$. Кроме того, существует остаточная глобальная симметрия $\mathbf{PSL}(n,\mathbb{C})$, чье соответствующее отображение моментов равно $\mu_{\mathsf{sl}} = UV$. Заметим, что

$$\mu_{\mathsf{sl}}^2 = 0\,, \tag{1.1.4}$$

как следствие условия $VU = 0$. Очевидно, $\mu_{\mathsf{sl}} := \frac{1}{2\pi}\, J_{\mathsf{sl}}$, так что отображение моментов — это, по существу, ток Каца–Муди свободной системы.

Взаимодействия, приводящие к квазилинейным формулировкам первого порядка, вво-

[1] На двумерной плоскости (x,y) комплексные производные (также называемые производными Виртингера) равны $\partial = \frac{1}{2}(\partial_x - i\partial_y)$ и $\overline{\partial} = \frac{1}{2}(\partial_x + i\partial_y)$.

дятся единообразным способом [21]: свободное действие $\mathcal{S}_0 = \int_\Sigma \mathrm{d}^2 z\, \mathcal{L}_0$ заменяется на[2]

$$\mathcal{S} = \mathcal{S}_0 + \frac{\kappa}{2\pi} \int_\Sigma \mathrm{d}^2 z\, \mathrm{Tr}\left(J\overline{J}\right) , \tag{1.1.5}$$

где J — ток Каца–Муди соответствующей группы симметрии, а κ — некоторая константа связи. Например, взяв базовый лагранжиан (1.1.2) и ток (1.1.3), мы получим действие[3]

$$\mathcal{S} = \int_\Sigma \mathrm{d}^2 z \left[2\Big(\mathrm{Tr}\left(V\overline{D}U\right) + \mathrm{Tr}\left(\overline{U}D\overline{V}\right)\Big) + 2\pi\kappa\, \mathrm{Tr}\left(\overline{U}UV\overline{V}\right)\right] . \tag{1.1.6}$$

Заметим, что с помощью интегрирования по частям можно добиться того, чтобы поле V и его сопряжённое входили в действие без производных. Таким образом, V и $\overline{V}$ можно воспринимать как вспомогательные поля. Более того, при $\kappa \neq 0$ мы можем воспользоваться их уравнениями движения, чтобы алгебраически выразить V и $\overline{V}$ через $U, \overline{U}$ и их производные. Проделывая данную процедуру, мы получаем квазилинейный лагранжиан сигма-модели

$$\mathcal{L} = \frac{2}{\pi\kappa}\, \mathrm{Tr}\left[\frac{1}{\overline{U}U}\, D\overline{U}\overline{D}U\right] . \tag{1.1.7}$$

Это выражение всё ещё калибровочно инвариантно относительно калибровочных преобразований $\mathbf{GL}(m,\mathbb{C})$: $U \to Ug$, $g \in \mathbf{GL}(m,\mathbb{C})$. Мы можем использовать эту калибровочную симметрию, чтобы наложить частичную калибровку $\overline{U}U = \mathbb{1}_m$. Выражая калибровочные поля $\mathcal{A}$ и $\overline{\mathcal{A}}$ через их уравнения движения и подставляя обратно в лагранжиан, можно убедиться, что получится комплексная двумерная сигма-модель, построенная по метрике Фубини-Штуди (точнее, ее обобщение на грассманиан для $m > 1$), пропорциональной $\mathrm{d}s^2 \sim \kappa^{-1}\mathrm{Tr}\left(\mathrm{d}\overline{U}\left(\mathbb{1}_n - U\overline{U}\right)\mathrm{d}U\right)$. Также видно, что κ^{-1} играет роль квадрата “радиуса” (характерного масштаба) грассманиана. В результате теория возмущений по степеням κ должна соответствовать стандартной α'-теории возмущений сигма-модели [128] (разложение по кривизне таргет пространства).

1.2 Ортогональные грассманианы $\mathsf{OGr}(m,n)$

Здесь мы начинаем обсуждение ортогональных грассманианов. Введём основные определения. Рассмотрим векторное пространство $\mathbb{C}^n$ с невырожденной симметричной билинейной формой $\mathbb{h}_n$ на нем. Ортогональный грассманиан $\mathsf{OGr}(m,n)$ можно определить как множество m-мерных плоскостей, изотропных относительно $\mathbb{h}_n$. В дальнейшем, аналогично предыдущему подразделу, мы объединим m векторов в одну матрицу U размера $n \times m$, так что условие изотропности плоскостей принимает вид $U^t\mathbb{h}_n U = 0$. Таким образом, $\mathsf{OGr}(m,n)$ есте-

[2]Вообще говоря, Σ — это риманова поверхность, но поскольку в этой статье мы не обсуждаем глобальные аспекты, можно считать $\Sigma \simeq \mathbb{C}$.

[3]При нормировке кинетического члена и члена взаимодействия лагранжиана (1.1.6) мы следуем соглашениям работы [22]. В ортогональном и симплектическом случаях ниже появятся две вершины вместо одной, каждая с множителем $2\pi\kappa$ перед собой, что означает, что в действии (1.1.5) $\kappa/2\pi$ следует заменить на $\kappa/4\pi$ в этих случаях, см. раздел 1.5.

ственно вложен в стандартный грассманиан $\mathsf{Gr}(m,n)$.

1.2.1 Свободная теория.

В этом разделе мы построим свободную часть квазилинейной формулировки первого порядка для ортогональных грассманианов. Однако прежде чем переходить к общим ортогональным грассманианам, начнем с простейшего случая $\mathsf{OGr}(1,n)$. В качестве матричного поля здесь удобно рассматривать дублет $W \in \mathrm{Hom}(\mathbb{C}^2,\mathbb{C}^n)$, определяемый следующим образом:

$$W = \begin{pmatrix} U & V^t \end{pmatrix} . \tag{1.2.8}$$

Чтобы была ясна связь с унитарным случаем, обсуждавшимся выше, можно представить, что мы объединили поля U и V в единое поле W. Очевидно, существует естественное правое действие группы $\mathbf{SL}(2,\mathbb{C})$ на W. Однако в качестве калибровочной группы модели следует взять подгруппу верхнетреугольных матриц, изоморфную $\mathbb{C}^* \ltimes \mathbb{C}$. Голоморфная часть свободного лагранжиана имеет вид[4]

$$\mathcal{L} = \mathrm{Tr}\left(\overline{D}W\omega_2 W^t \mathbb{h}_n\right), \quad \overline{D}W := \overline{\partial}W - W\begin{pmatrix} \overline{\mathcal{A}} & \overline{\mathcal{A}}_+ \\ 0 & -\overline{\mathcal{A}} \end{pmatrix}, \quad \omega_2 := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{1.2.9}$$

тогда как связи, налагаемые нединамическими калибровочными полями, суть

$$V\mathbb{h}_n U = 0\,, \qquad U^t\mathbb{h}_n U = 0\,. \tag{1.2.10}$$

Остаточной группой глобальной симметрии является $\mathbf{SO}(n,\mathbb{C})$, с отображением моментов

$$\mu_{\mathsf{o}} = W\omega_2 W^t\mathbb{h}_n = \left(U\otimes V - V^t\otimes U^t\right)\mathbb{h}_n\,. \tag{1.2.11}$$

Заметим, что

$$\mu_{\mathsf{o}}^2 = -\left(V\mathbb{h}_n V^t\right)\, U\otimes U^t\mathbb{h}_n \qquad \text{и} \qquad \mu_{\mathsf{o}}^3 = 0\,. \tag{1.2.12}$$

Тот факт, что μ_{o} нильпотентен, аналогичен наблюдению (1.1.4) в унитарном случае. Это намекает на то, что теория квазилинейных формулировок первого порядка тесно связана с теорией нильпотентных орбит комплексных полупростых групп Ли.

Для обобщения (1.2.9) на произвольные m мы начинаем с пар канонических переменных U и V, обе из которых снова являются матрицами размеров $n\times m$ и $m\times n$, т.е.

$$U \in \mathrm{Hom}(\mathbb{C}^m,\mathbb{C}^n)\,, \quad V\in\mathrm{Hom}(\mathbb{C}^n,\mathbb{C}^m)\,. \tag{1.2.13}$$

Как мы уже знаем из раздела 1.1, выбор калибровочной группы $\mathbf{GL}(m,\mathbb{C})$ привел бы нас к унитарным грассманианам. Здесь же $\mathbf{GL}(m,\mathbb{C})$ будет лишь частью калибровочной группы. Обобщая пример $\mathsf{OGr}(1,n)$, мы заменяем связи (1.2.10) матричными $m\times m$ связями того же

[4] В некоторых аффинных случаях, таких как конифолд (когда нет калибровочной симметрии $\mathbb{C}^*$), похожая свободная система обсуждалась в [73].

вида

$$H_{\text{symm}} := U^t \mathbb{h}_n U = 0\,, \qquad V \mathbb{h}_n U = 0\,, \tag{1.2.14}$$

а также производим симплектическую редукцию относительно этих связей, то есть воспринимая их как нулевой уровень отображений моментов. Здесь H_{symm} — симметрическая матрица размера $m \times m$, то есть $H^t_{\text{symm}} = H_{\text{symm}}$. Под действием $\mathbf{GL}(m, \mathbb{C})$ эта связь преобразуется однородным образом, т.е. $H_{\text{symm}} \to g^t H_{\text{symm}} g$. Следовательно, полная группа симплектической редукции (она же калибровочная группа) есть

$$\mathcal{G} = \mathbf{GL}(m, \mathbb{C}) \ltimes \mathrm{Mat}^{\text{symm}}_m(\mathbb{C})\,, \tag{1.2.15}$$

где второй фактор — пространство симметрических матриц, рассматриваемое как аддитивная абелева группа[5]. Размерность комплексного "пространства полей", полученного после симплектической редукции, равна

$$\dim_{\mathbb{C}} \Phi = 2mn - 2\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{G} = 2\left(mn - \frac{3m^2 + m}{2}\right) = 2\dim_{\mathbb{C}} \mathsf{OGr}(m, n)\,. \tag{1.2.17}$$

Это вдвое больше размерности самого ортогонального грассманиана, что подтверждает интерпретацию "фазового пространства" модели как кокасательного расслоения к соответствующему грассманиану.

Грассманиан вещественных 2-плоскостей, обсуждавшийся выше, соответствует случаю $m = 1$. Конкретный лагранжиан, обобщающий (1.2.9), может быть сформулирован с использованием того же дублета (1.2.8) $W \in \mathrm{Hom}(\mathbb{C}^{2m}, \mathbb{C}^n)$, где теперь U и V — матрицы размеров $n \times m$ и $m \times n$ соответственно:

$$\mathcal{L} = \mathrm{Tr}\left(\overline{D} W \omega_{2m} W^t \mathbb{h}_n\right), \qquad \text{где} \qquad \overline{D} W := \overline{\partial} W - W \begin{pmatrix} \overline{\mathcal{A}} & \overline{\mathcal{A}}_+ \\ 0 & -\overline{\mathcal{A}}^t \end{pmatrix}$$

где $\overline{\mathcal{A}}$ — калибровочное поле группы $\mathbf{GL}(m, \mathbb{C})$, $\overline{\mathcal{A}}_+$ — симметрическая матрица $m \times m$, представляющая калибровочное поле группы $\mathrm{Mat}^{\text{symm}}_m(\mathbb{C})$, и $\omega_{2m} = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1}_m \\ -\mathbb{1}_m & 0 \end{pmatrix}$ — "эталонная" симплектическая форма на $\mathbb{C}^{2m}$. Расписывая этот лагранжиан покомпонентно,

$$\mathcal{L} \simeq 2\,\mathrm{Tr}\left(V \mathbb{h}_n \overline{D} U\right) + \mathrm{Tr}\left(\overline{\mathcal{A}}_+ U^t \mathbb{h}_n U\right), \qquad \overline{D} U = \overline{\partial} U - U \overline{\mathcal{A}}, \tag{1.2.18}$$

где здесь и далее символ $\simeq$ означает равенство с точностью до интегрирования по частям. Варьирование по $\overline{\mathcal{A}}$ и $\overline{\mathcal{A}}_+$ естественно приводит к связям (1.2.14). Это прямое обобщение связей (1.2.10) на случай произвольного m.

[5]Матричная реализация этой калибровочной группы имеет вид

$$\begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & (g^{-1})^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbb{1}_m & \alpha \\ 0 & \mathbb{1}_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g & g \cdot \alpha \\ 0 & (g^{-1})^t \end{pmatrix}, \quad g \in \mathbf{GL}(m, \mathbb{C}), \quad \alpha^t = \alpha\,. \tag{1.2.16}$$

Очевидно, связи (1.2.14) сохраняют $\mathbf{SO}(n,\mathbb{C})$ симметрию. Соответствующее этой глобальной группе отображение моментов есть

$$\mu_{\circ} = \left(UV - V^t U^t\right) \mathbb{h}_n \,. \tag{1.2.19}$$

На самом деле, от явного вида $\mathbb{h}_n$ ничего не зависит в том смысле, что грассманианы, соответствующие разным $\mathbb{h}_n$, изоморфны. Одна из причин, по которой мы сохранили зависимость от $\mathbb{h}_n$, вместо того чтобы сразу положить $\mathbb{h}_n = \mathbb{1}_n$, заключается в возможности в конечном итоге сравнить это выражение с аналогичным в симплектическом случае. Для различных вычислений могут подходить разные варианты выбора $\mathbb{h}_n$, но для технической простоты мы всегда будем предполагать, что $\mathbb{h}_n$ вещественен и удовлетворяет условию $\mathbb{h}_n^2 = \mathbb{1}_n$ (эквивалентно, $\mathbb{h}_n\overline{\mathbb{h}}_n = \mathbb{1}_n$).

1.2.2 Взаимодействие и переход к сигма-модели.

В данном разделе мы предъявим квазилинейные формулировки первого порядка для сигма-моделей с таргет-пространствами в виде ортогональных грассманианов. Однако в этом контексте существенен вопрос о том, какой метрике на грассманиане будет соответствовать сигма-модель. Дело в том, что общие ортогональные грассманианы не являются симметрическими пространствами и, как правило, допускают двухпараметрическое семейство инвариантных метрик (это доказано в Приложении А). Один из параметров метрики — это общий масштаб, однако имеется один дополнительный существенный параметр, который исчезает только в случае симметрических пространств.

В рассматриваемых нами моделях типа Гросса-Невё, однако, нет свободных параметров, кроме константы связи (которая соответствует общему масштабу). Таким образом, возникает разумный вопрос: какая метрика из всего семейства метрик реализуется в этих моделях? Как можно ожидать из общих соображений [23], результирующая метрика является так называемой *нормальной* (редуктивной) метрикой на однородном пространстве. Она не является кэлеровой, если только пространство не является симметрическим[6].

В этом разделе мы напрямую вычислим соответствующую метрику, переходя от квазилинейной формулировки первого порядка к геометрической форме сигма-модели путём исключения вспомогательных полей. Для построения квазилинейной формулировки мы добавляем взаимодействие к ранее обсуждавшейся свободной системе:

$$\mathcal{L} = \mathrm{Tr}\left(\overline{D}W\omega_{2m}W^t\mathbb{h}_n\right) + \mathrm{Tr}\left(\overline{W}^t\omega_{2m}D\overline{W}\mathbb{h}_n\right) + \frac{\kappa}{4\pi}\,\mathrm{Tr}(J_{\circ}\overline{J}_{\circ})\,, \qquad \frac{1}{2\pi}J_{\circ} := \mu_{\circ}\,. \tag{1.2.20}$$

Здесь κ — константа связи, а взаимодействия построены с использованием отображения моментов (1.2.19). Удобно, однако, переписать этот лагранжиан в более явных терминах

[6] Для случая $\mathbf{SU}(n)$ это было доказано в [20], тогда как в случаях $\mathbf{O}(n)$ или $\mathbf{Sp}(2n)$ доказательство приведено в Приложении А.

полей $U,\ V$:

$$\mathcal{L} \simeq 2\,\mathrm{Tr}\left(V\mathbb{h}_n\overline{D}U + \overline{U}\mathbb{h}_n D\overline{V}\right) + \mathrm{Tr}\left(\mathcal{A}_+U^t\mathbb{h}_nU - \overline{\mathcal{A}}_+\overline{U}\mathbb{h}_n\overline{U}^t\right) + \frac{\kappa}{4\pi}\,\mathrm{Tr}(J_\circ\overline{J}_\circ)\,. \tag{1.2.21}$$

Здесь ковариантные производные, действующие на поля U и V, суть $\overline{D}U = \bar{\partial}U - U\overline{\mathcal{A}}$ и $\overline{D}V = \bar{\partial}V - \overline{\mathcal{A}}V$, с аналогичными выражениями для сопряженных переменных.

Как обсуждалось выше, калибровочной группой данной теории является $\mathbf{GL}(m,\mathbb{C}) \ltimes \mathrm{Mat}_m^{\mathrm{symm}}(\mathbb{C})$, и калибровочные преобразования действуют следующим образом:

$$U \mapsto Ug\,, \qquad V \mapsto g^{-1}V + q\,U^t, \qquad g \in \mathbf{GL}(m,\mathbb{C})\,, \quad q \in \mathrm{Mat}_m^{\mathrm{symm}}(\mathbb{C})\,. \tag{1.2.22}$$

Заметим, в частности, что отображение моментов (1.2.19) инвариантно относительно этих преобразований. В результате возможности сдвига V на qU^t эрмитова квадратичная форма полей $(V,\overline{V})$ в члене взаимодействия в (1.2.20) является вырожденной[7]. Таким образом, перед интегрированием по V и $\overline{V}$ необходимо зафиксировать калибровку. Подходящая нам удобная частичная калибровка имеет вид

$$\overline{U}U = \mathbb{1}_m\,, \qquad \frac{1}{2\pi}\mathcal{F} := \overline{V}^tU + U^t\overline{V} = 0\,. \tag{1.2.24}$$

Это редуцирует калибровочную свободу к $\mathbf{U}(m) \subset \mathbf{GL}(m,\mathbb{C})$. Для вычислительных целей ещё удобнее использовать её в виде обобщенной "α-калибровки", которая сводится к добавлению члена $\frac{1}{2\alpha}\,\mathrm{Tr}(\mathcal{F}\overline{\mathcal{F}})$ к лагранжиану[8]. Случай $\alpha \to 0$ тогда соответствовал бы указанной выше калибровке, однако удобнее положить $\alpha^{-1} = \frac{\kappa}{2\pi}$, и в этом случае член взаимодействия в фиксированном лагранжиане приобретает вид (здесь мы используем $\mathbb{h}_n\overline{\mathbb{h}}_n = \mathbb{1}_n$)

$$\frac{\kappa}{4\pi}\,\left[\mathrm{Tr}(J_\circ\overline{J}_\circ) + \mathrm{Tr}(\mathcal{F}\overline{\mathcal{F}})\right] = 2\pi\kappa\,\mathrm{Tr}\left[\,\overline{V}V\left(\mathbb{1}_n + \overline{U}^tU^t\right)\right]. \tag{1.2.25}$$

С помощью этих манипуляций мы эффективно диагонализовали квадратичную форму полей V и $\overline{V}$, стоящую в члене взаимодействия. Интегрируя теперь по V и $\overline{V}$, мы получаем лагранжиан сигма-модели в геометрической форме:

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \frac{2}{\pi\kappa}\,\mathrm{Tr}\left[D\overline{U}\,\mathbb{h}_n\,\frac{1}{\mathbb{1}_n + \left(U\overline{U}\right)^t}\,\mathbb{h}_n\,\overline{D}U\right] + \mathrm{Tr}\left(\mathcal{A}_+U^t\mathbb{h}_nU - \overline{\mathcal{A}}_+\overline{U}\mathbb{h}_n\overline{U}^t\right) = \\ &= \frac{2}{\pi\kappa}\,\mathrm{Tr}\left[D\overline{U}\,\mathbb{h}_n\left(\mathbb{1}_n - \frac{1}{2}\left(U\overline{U}\right)^t\right)\mathbb{h}_n\,\overline{D}U\right] + \mathrm{Tr}\left(\mathcal{A} + U^t\mathbb{h}_nU - \overline{\mathcal{A}}_+\overline{U}\mathbb{h}_n\overline{U}^t\right)\,.\end{aligned} \tag{1.2.26}$$

[7]Например, если $m = 1$, член взаимодействия можно записать в виде

$$\mathcal{L}_{\mathrm{int}} = V\Big(|U|^2\,\mathbb{1}_n - \overline{U}\otimes U\Big)\overline{V}\,, \tag{1.2.23}$$

так что он пропорционален унитарному проектору. Это означает, что проблема вывода метрики сигма-модели полностью аналогична проблеме нахождения пропагатора в КЭД.

[8]Формально этого можно достичь, вставив $\delta(\mathcal{F} - M)\delta(\overline{\mathcal{F}} - \overline{M})$ в функциональный интеграл, а затем проинтегрировав по $M, \overline{M}$ с весом $e^{-\alpha^{-1}\mathrm{Tr}(M\overline{M})}$. Это прямой аналог α-калибровки в неабелевой калибровочной теории, где добавляют член $\frac{1}{\alpha}\,\mathrm{Tr}(\partial_\mu A^\mu)^2$ к калибровочно-инвариантному лагранжиану.

При обращении матрицы мы использовали условие нормировки $\overline{U}U = \mathbb{1}_m$, входящее в частичную калибровку. Благодаря условию изотропности $U^t\mathbb{h}_n U = 0$, мы можем переписать вышеуказанный лагранжиан как

$$\begin{gathered}\mathcal{L} = \tfrac{2}{\pi\kappa}\operatorname{Tr}\left[D\overline{U}\,\overline{D}U\right] - \tfrac{1}{\pi\kappa}\operatorname{Tr}\left[\partial\overline{U}\,\mathbb{h}_n\left(U\overline{U}\right)^t\mathbb{h}_n\,\overline{\partial}U\right] + \\ +\operatorname{Tr}\left(\mathcal{A}_+U^t\mathbb{h}_nU - \overline{\mathcal{A}}_+\overline{U}\mathbb{h}_n\overline{U}^t\right)\,.\end{gathered} \tag{1.2.27}$$

Первое слагаемое, по сути, повторяет действие (1.1.7) для унитарного грассманиана $\mathsf{Gr}(m,n)$. В частности, калибровочное поле группы $\mathbf{GL}(m,\mathbb{C})$ $\mathcal{A}$ входит только в этот член, и его исключение приводит к стандартной метрике (Фубини-Штуди) на грассманиане. Второй член представляет собой поправку к ней, и третий член с $\mathcal{A}_+$ калибровочным полем обеспечивает условие изотропии $U^t\mathbb{h}_nU = 0$. Таким образом, как видно из (1.2.27), фундаментальная эрмитова форма полученной метрики имеет вид

$$\Omega = \Omega^{(FS)} - \frac{i}{2}\operatorname{Tr}\left[\mathrm{d}\overline{U}\,\mathbb{h}_n\left(U\overline{U}\right)^t\mathbb{h}_n\wedge\mathrm{d}U\right]\,, \tag{1.2.28}$$

где

$$\Omega^{(FS)} = i\operatorname{Tr}\left[\mathrm{d}\overline{U}\left(\mathbb{1}_n - U\overline{U}\right)\wedge\mathrm{d}U\right] \tag{1.2.29}$$

есть стандартная форма Фубини-Штуди на грассманиане $\mathsf{Gr}(m,n)$.

Нормальная метрика.

Теперь мы докажем, что метрика сигма-модели, фигурирующая в (1.2.27), является нормальной метрикой. Напомним здесь соответствующее определение для однородного пространства $\mathcal{G}/\mathcal{H}$. Пусть $\mathfrak{g} = \mathsf{h}\oplus\mathsf{m}$ — разложение алгебры Ли группы $\mathcal{G}$ (здесь m — ортогональное дополнение к подалгебре Ли h группы $\mathcal{H}$ относительно метрики Киллинга), а $J = -g^{-1}\mathrm{d}g = J_\mathsf{h} + J_\mathsf{m}$ — соответствующее разложение формы Маурера–Картана. Тогда нормальная метрика есть

$$\left(\mathrm{d}s^2\right)_{\text{нормальная}} = -\operatorname{Tr}\left(J_\mathsf{m}^2\right)\,. \tag{1.2.30}$$

Информацию о структуре ортогональных грассманианов как однородных пространств можно найти в Приложении А.

Чтобы вычислить J_m в нашем случае ортогонального грассманиана, будет несколько проще работать с недиагональной формой $\mathbb{h}_n$:

$$\mathbb{h}_n = \begin{pmatrix}0 & \mathbb{1}_m & 0\\ \mathbb{1}_m & 0 & 0\\ 0 & 0 & \mathbb{1}_{n-2m}\end{pmatrix}. \tag{1.2.31}$$

Для данной матрицы U из m изотропных ортонормированных векторов, удовлетворяющих

$U^t\mathbb{h}_n U = 0$ и $\overline{U}U = \mathbb{1}_m$, построим элемент группы

$$g = (U\ \mathbb{h}_n U^*\ Y)\ , \tag{1.2.32}$$

где Y — матрица из $n-2m$ дополнительных ортонормированных векторов, удовлетворяющих условиям $\overline{Y}U = 0\,, Y^t\mathbb{h}_n U = 0$. Эти ограничения следуют из требования, чтобы g была ортогональной, $g \in \mathbf{O}(n)$. Подробнее об этой параметризации см. в Приложении А.

Преимущество работы с недиагональной формой (1.2.31) $\mathbb{h}_n$ заключается в том, что пространство m особенно легко описать:

$$\mathsf{m} = \begin{pmatrix} \mathbf{0}_m & \bullet & \bullet \\ \bullet & \mathbf{0}_m & \bullet \\ \bullet & \bullet & \mathbf{0}_{n-2m} \end{pmatrix}. \tag{1.2.33}$$

Здесь $\mathbf{0}_m$ — нулевой блок размера $m \times m$. В результате мы вычисляем

$$J_{\mathsf{m}} = \left[-g^{-1}\mathrm{d}g\right]_{\mathsf{m}} = -\begin{pmatrix} \mathbf{0}_m & \overline{U}\mathbb{h}_n \mathrm{d}U^* & \overline{U}\mathrm{d}Y \\ U^t\mathbb{h}_n\mathrm{d}U & \mathbf{0}_m & U^t\mathbb{h}_n\mathrm{d}Y \\ \overline{Y}\mathrm{d}U & \overline{Y}\mathbb{h}_n\mathrm{d}U^* & \mathbf{0}_{n-2m} \end{pmatrix}. \tag{1.2.34}$$

Нормальная метрика (1.2.30) в такой параметризации равна

$$\left(\mathrm{d}s^2\right)_{\text{нормальная}} = 4\,\mathrm{Tr}\left(\mathrm{d}\overline{U}\left(1 - U\overline{U}\right)\mathrm{d}U\right) - 2\,\mathrm{Tr}\left(\mathrm{d}\overline{U}\,\mathbb{h}_n\left(U\overline{U}\right)^t\mathbb{h}_n\mathrm{d}U\right)\ , \tag{1.2.35}$$

где мы использовали соотношение полноты $U\overline{U} + \mathbb{h}_n(U\overline{U})^t\mathbb{h}_n + Y\overline{Y} = \mathbb{1}_n$, чтобы исключить $Y, \overline{Y}$. Очевидно, это выражение совпадает с метрикой в (1.2.27).

В Приложении А мы также доказываем, что нормальная метрика является кэлеровой только в двух особых случаях, а именно в случаях минимального ($m = 1$) и максимального ($n = 2m$) ортогональных грассманианов. Один из способов понять это следующий. Все ортогональные грассманианы допускают кэлеровы метрики [77], однако в общем случае такие метрики являются особыми точками в пространстве модулей инвариантных метрик и не совпадают с нормальной метрикой, возникающей из подхода квазилинейной формулировки первого порядка. Два крайних случая $m = 1$ и $n = 2m$ соответствуют симметрическим пространствам. Если кэлерово многообразие является симметрическим пространством, инвариантная метрика единственна (с точностью до общего масштаба), так что она совпадает с нормальной метрикой и является кэлеровой. Рассмотрим теперь эти особые случаи подробно.

Минимальный грассманиан $m = 1$.

В этом простейшем случае поля U и $\overline{U}$ являются просто векторами-строками и векторами-столбцами, что приводит к значительному упрощению. Действительно, второй член в (1.2.27) обращается в нуль, поскольку он пропорционален производным от условий

изотропности $U^t\mathbb{h}_n U = \overline{U}\mathbb{h}_n\overline{U}^t = 0$. Лагранжиан в этом случае имеет вид

$$\mathcal{L}_{\mathsf{OGr}(1,n)} = \frac{2}{\pi\kappa}\, D\overline{U}\, \overline{D}U\,, \tag{1.2.36}$$

где мы опустили слагаемые с калибровочным полем $\mathcal{A}_+$. Оказывается, что метрика — это просто метрика Фубини-Штуди, ограниченная на подмногообразие, задаваемое условиями изотропии, поэтому она, очевидно, кэлерова. Сам минимальный грассманиан является квадрикой в $\mathbb{CP}^{n-1}$: при $n = 3$ это $\mathbb{CP}^1$, вложенное в $\mathbb{CP}^2$ с помощью отображения Веронезе, тогда как при $n = 4$ оно, как известно, изоморфно $\mathbb{CP}^1 \times \mathbb{CP}^1$ [82].

Максимальный грассманиан $n = 2m$.

В этом особом случае, помимо m ортонормированных векторов $u_1, \ldots, u_m$ (столбцов матрицы U, удовлетворяющих $\overline{U}U = \mathbb{1}_m$), рассмотрим дополнительные векторы $\widetilde{u}_k = \mathbb{h}_{2m}u_k^*$, где k пробегает значения от 1 до m. Эти последние векторы снова ортонормированы и, более того, ортогональны векторам первой группы, вследствие $U^t\mathbb{h}_{2m}U = \widetilde{U}^\dagger U = 0$. В результате мы получаем полный базис ортонормированных векторов $u_1, \ldots, u_m, \mathbb{h}_{2m}u_1^*, \ldots, \mathbb{h}_{2m}u_m^*$ в $\mathbb{C}^{2m}$. Эти векторы удовлетворяют разбиению единицы: $\sum_{i=1}^m (u_i \otimes \overline{u}_i + \mathbb{h}_{2m}u_i^* \otimes \overline{u}_i^*\mathbb{h}_{2m}) = \mathbb{1}_{2m}$, что в матричных терминах может быть записано как

$$\mathbb{h}_{2m}(U\overline{U})^t\mathbb{h}_{2m} = \mathbb{1}_{2m} - U\overline{U}\,. \tag{1.2.37}$$

Подставляя в (1.2.28), находим, что в этом случае

$$\Omega = \frac{1}{2}\,\Omega^{(FS)}\,, \qquad (n = 2m)\,. \tag{1.2.38}$$

В частности, $\mathrm{d}\Omega = 0$, так что метрика является кэлеровой.

1.3 Симплектические грассманианы $\mathsf{SGr}(m, 2n)$

В этом разделе мы применяем логику, предложенную в предыдущих разделах, к симплектическому случаю. Структура построения квазилинейной формулировки первого порядка та же, различия носят в основном технический характер.

Определение симплектического грассманиана аналогично определению ортогонального грассманиана. Рассмотрим векторное пространство $\mathbb{C}^{2n}$ с невырожденной кососимметрической билинейной формой ω_{2n} на нем, то есть $\omega_{2n}^t = -\omega_{2n}$. Симплектический грассманиан $\mathsf{SGr}(m, 2n)$ можно определить как множество m-мерных плоскостей, изотропных относительно ω_{2n}. Как и прежде, мы объединяем m векторов в одну матрицу U размера $m \times 2n$, так что условие изотропности принимает вид $U^t\omega_{2n}U = 0$. Таким образом, $\mathsf{SGr}(m, 2n)$ естественно вложен в унитарный грассманиан $\mathsf{Gr}(m, 2n)$.

Опять же, для технической простоты мы потребуем, чтобы матрица ω_{2n} была веще-

ственной и дополнительно удовлетворяла условию $\omega_{2n}\overline{\omega}_{2n} = \mathbb{1}_{2n}$ (эквивалентно, $\omega_{2n}^2 = -\mathbb{1}_{2n}$). В остальном матрицу ω_{2n} можно выбирать по нашему усмотрению.

Как и в ортогональном случае, мы начинаем с пар канонических переменных U, V, обе из которых являются матрицами размеров $2n \times m$ и $m \times 2n$, т.е.

$$U \in \mathrm{Hom}(\mathbb{C}^m, \mathbb{C}^{2n}) \,, \qquad V \in \mathrm{Hom}(\mathbb{C}^{2n}, \mathbb{C}^m) \,. \tag{1.3.39}$$

Разница в том, что вместо симметрической матрицы $\mathbb{h}_n$, введенной в случае ортогональных грассманианов, здесь имеется кососимметрический невырожденный тензор ω_{2n} на $\mathbb{C}^{2n}$. Его можно рассматривать как симплектическую форму с постоянными коэффициентами. Такая форма может существовать только на пространствах четной размерности, поэтому в этом разделе мы ограничиваемся объемлющим пространством $\mathbb{C}^{2n}$ четной комплексной размерности.

Далее мы требуем, чтобы столбцы U образовывали базис в m-мерной плоскости, изотропной относительно ω_{2n} [77]:

$$H_{\mathrm{asymm}} := U^t \omega_{2n} U = 0 \,. \tag{1.3.40}$$

Здесь H_{asymm} — кососимметрическая матрица $m \times m$, $H^t_{\mathrm{asymm}} = -H_{\mathrm{asymm}}$, преобразующаяся однородно под действием $\mathbf{GL}(m, \mathbb{C})$, т.е. $H_{\mathrm{asymm}} \to g^t H_{\mathrm{asymm}} g$. Следовательно, группа симплектической редукции есть

$$\mathcal{G} = \mathbf{GL}(m, \mathbb{C}) \ltimes \mathrm{Mat}_m^{\mathrm{asymm}}(\mathbb{C}) \,, \tag{1.3.41}$$

где второй фактор — пространство антисимметрических матриц, рассматриваемое как аддитивная абелева группа. Размерность комплексного пространства полей, полученного после симплектической редукции, равна

$$\dim_{\mathbb{C}} \Phi = 4mn - 2\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{G} = 2\left(2mn - \frac{3m^2 - m}{2}\right) = 2\dim_{\mathbb{C}} \mathsf{SGr}(m, 2n) \,, \tag{1.3.42}$$

что вдвое больше размерности симплектического грассманиана. Конкретный лагранжиан типа Гросса-Невё для этого случая (точнее, его голоморфная свободная часть) может быть записан по аналогии с (1.2.18):

$$\mathcal{L} = \mathrm{Tr}\left(\overline{D} W \mathbb{h}_{2m} W^t \omega_{2n}\right) , \qquad \text{где} \qquad W = \begin{pmatrix} U & V^t \end{pmatrix} , \quad \overline{D} W := \overline{\partial} W - W \begin{pmatrix} \overline{\mathcal{A}} & \overline{\mathcal{A}}_+ \\ 0 & -\overline{\mathcal{A}}^t \end{pmatrix} ,$$

где теперь $\overline{\mathcal{A}}_+$ — кососимметрическая матрица $m \times m$, представляющая калибровочное поле группы $\mathrm{Mat}_m^{\mathrm{asymm}}(\mathbb{C})$, и $\mathbb{h}_{2m} = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1}_m \\ \mathbb{1}_m & 0 \end{pmatrix}$. Расписывая это покомпонентно,

$$\mathcal{L} \simeq 2\,\mathrm{Tr}\left(V \omega_{2n} \overline{D} U\right) + \mathrm{Tr}\left(\overline{\mathcal{A}}_+ U^t \omega_{2n} U\right) . \tag{1.3.43}$$

Калибровочные преобразования действуют следующим образом:

$$U \mapsto Ug\,, \qquad V \mapsto g^{-1}V + q\,U^t, \qquad g \in \mathbf{GL}(m,\mathbb{C})\,, \quad q \in \mathrm{Mat}_m^{\mathrm{asymm}}(\mathbb{C})\,. \tag{1.3.44}$$

Перейдем к описанию взаимодействий. Здесь соответствующее отображение моментов, по аналогии с (1.2.19), имеет вид

$$\mu_{\mathsf{sp}} = \left(UV + V^tU^t\right)\omega_{2n}\,. \tag{1.3.45}$$

Легко проверить, что $\mu_{\mathsf{sp}}^t\omega_{2n} + \omega_{2n}\mu_{\mathsf{sp}} = 0$, так что такое отображение моментов действительно принадлежит симплектической алгебре Ли: $\mu_{\mathsf{sp}} \in \mathfrak{sp}(2n)$. Заметим, что отображение моментов инвариантно относительно калибровочных преобразований (1.3.44). Кроме того, оно эквивариантно относительно преобразований группы $\mathbf{Sp}(2n,\mathbb{C})$

$$U \to g_0U, \qquad V \to Vg_0^t, \qquad g_0 \in \mathbf{Sp}(2n,\mathbb{C})\,. \tag{1.3.46}$$

Действительно, так как $g_0^t\omega_{2n}g_0 = \omega_{2n}$, находим $\mu_{\mathsf{sp}} \to g_0\mu_{\mathsf{sp}}g_0^{-1}$. Кроме того, как и в унитарном и ортогональном случаях, мы обнаруживаем, что μ_{sp} нильпотентно:

$$\mu_{\mathsf{sp}}^2 = UV\omega_{2n}V^tU^t\omega_{2n}\,, \qquad \text{и} \qquad \mu_{\mathsf{sp}}^3 = 0\,. \tag{1.3.47}$$

Чтобы получить это, используются связи $V\omega_{2n}U = 0$ и $U^t\omega_{2n}U = 0$, которые следуют из варьирования лагранжиана (1.3.43) по калибровочным полям.

1.3.1 Переход к сигма-модели.

Чтобы вывести геометрическую форму сигма-модели из квазилинейной формулировки первого порядка, сначала добавим к свободному лагранжиану член взаимодействия

$$\mathcal{L}_{\mathrm{int}} = \frac{\kappa}{4\pi}\,\mathrm{Tr}\left(J_{\mathsf{sp}}\overline{J}_{\mathsf{sp}}\right), \qquad \frac{1}{2\pi}J_{\mathsf{sp}} := \mu_{\mathsf{sp}}\,. \tag{1.3.48}$$

Это выражение инвариантно только относительно подмножества преобразований (1.3.46), где матрица g_0 дополнительно удовлетворяет условию $\overline{g_0}g_0 = \mathbb{1}_{2n}$, так что группа глобальной симметрии в присутствии такого взаимодействия сводится к компактной подгруппе $\mathbf{Sp}(2n)$. Это и есть истинная группа симметрии для сигма-моделей на симплектических грассманианах.

Как и в ортогональном случае, для исключения полей V и $\overline{V}$ на уравнениях движения необходимо выбрать частичную калибровку для калибровочной симметрии (1.3.44). Подходящая калибровка имеет вид

$$\overline{U}U = \mathbb{1}_m, \qquad \frac{1}{2\pi}\mathcal{F} := \overline{V}^tU - U^t\overline{V} = 0\,. \tag{1.3.49}$$

Чтобы превратить ее в α-калибровку, мы добавляем к калибровочно-инвариантному лагранжиану с взаимодействием член $\frac{1}{2\alpha}\,\mathrm{Tr}(\mathcal{F}\overline{\mathcal{F}})$. Как и прежде, удобно положить $\alpha^{-1} = \frac{\kappa}{2\pi}$, и в этом случае лагранжиан принимает вид

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= 2\,\mathrm{Tr}\left(V\omega_{2n}\overline{D}U + \overline{U}\omega_{2n}D\overline{V}\right) + \tfrac{\kappa}{4\pi}\left[\mathrm{Tr}(J_{\mathsf{sp}}\overline{J}_{\mathsf{sp}}) + \mathrm{Tr}(\mathcal{F}\overline{\mathcal{F}})\right] = \\ &= 2\,\mathrm{Tr}\left(V\omega 2n\overline{D}U + \overline{U}\omega_{2n}D\overline{V}\right) + 2\pi\kappa\,\mathrm{Tr}\left[\overline{V}V\left(\mathbb{1}_n + \overline{U}^t U^t\right)\right].\end{aligned} \tag{1.3.50}$$

Для краткости мы не выписываем явно второй член в (1.3.43), но следует помнить, что нединамическое калибровочное поле $\overline{\mathcal{A}}_+$ налагает условие $U^t\omega_{2n}U = 0$. Интегрирование по $V, \overline{V}$ теперь выполняется непосредственно и приводит к следующему выражению, в полной аналогии с (1.2.26):

$$\mathcal{L} = \frac{4}{2\pi\kappa}\,\mathrm{Tr}\left[D\overline{U}\,\omega_{2n}^{-1}\left(\mathbb{1}_n - \frac{1}{2}\left(U\overline{U}\right)^t\right)\omega_{2n}\,\overline{D}U\right], \tag{1.3.51}$$

где мы использовали $\omega_{2n}^{-1} = -\omega_{2n}$. Используя ограничение изотропности, можно снова упростить второй член, получив

$$\mathcal{L} = \frac{4}{2\pi\kappa}\,\mathrm{Tr}\left[D\overline{U}\,\overline{D}U\right] - \frac{1}{\pi\kappa}\mathrm{Tr}\left[\partial\overline{U}\,\omega_{2n}^{-1}\left(U\overline{U}\right)^t\omega_{2n}\,\overline{\partial}U\right]. \tag{1.3.52}$$

Первый член приводит к метрике Фубини-Штуди на $\mathsf{Gr}(m, 2n)$, а второй член является поправкой к ней.

Нормальная метрика.

Как и в ортогональном случае, можно доказать, что метрика в (1.3.52) является нормальной; определение см. в разделе 1.2.2. Для данной матрицы U размера $m \times n$, удовлетворяющей $U^t\omega_{2n}U = 0$ и $\overline{U}U = \mathbb{1}_m$, мы строим элемент группы $g = (U\ \omega_{2n}^{-1}U^*\ Y)$, что является прямым обобщением (1.2.32) из ортогонального случая. Мы подробно описываем эту параметризацию в Приложении А.

Далее нам нужно вычислить m-компоненту тока Маурера–Картана J_{m}. Будет полезно записать симплектическую форму в виде блочной матрицы 3×3:

$$\omega_{2n} = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1}_m & 0 \\ -\mathbb{1}_m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \omega_{2n-2m} \end{pmatrix}. \tag{1.3.53}$$

В этом случае m состоит из внедиагональных матриц:

$$\mathsf{m} = \begin{pmatrix} \mathbf{0}_m & \bullet & \bullet \\ \bullet & \mathbf{0}_m & \bullet \\ \bullet & \bullet & \mathbf{0}_{n-2m} \end{pmatrix}. \tag{1.3.54}$$

Вычисляя m-часть $J = -g^{-1}\mathrm{d}g$, а затем метрику $\mathrm{d}s^2 = -\mathrm{Tr}(J_{\mathsf{m}}^2)$, находим согласие с метрикой

в (1.3.52).

Как и в ортогональном случае, максимальный грассманиан $m = n$ является особым в том смысле, что результирующая метрика является кэлеровой[9]. Мы опускаем доказательство этого факта, так как оно абсолютно аналогично доказательству для ортогонального случая в разделе 1.2.2.

1.4 Исключение калибровочных полей

Все модели, которые мы обсуждали до сих пор, схематически имеют следующий лагранжиан[10]:

$$\mathcal{L} = 2\,\mathrm{Tr}\left(V\overline{D}U + \overline{U}D\overline{V}\right) + 2\pi\kappa\,(\text{взаимодействия})\ . \tag{1.4.55}$$

Чтобы изучить β-функцию таких моделей, нам сначала нужно решить, как избавиться от нединамических калибровочных полей. Один из вариантов — наложить калибровочное ограничение на поля U, V и явно разрешить связи, возникающие при варьировании по калибровочным полям $\mathcal{A}$ и $\overline{\mathcal{A}}$. Недостатком такого способа действий является то, что полная глобальная симметрия при таком подходе обычно перестаёт быть реализована явно.

Однако существует альтернативный вариант — наложить условие калибровки на само калибровочное поле. Примечательно, что в случае плоского мирового листа можно тождественно положить его в ноль:

$$\mathcal{A} = \overline{\mathcal{A}} = 0\,. \tag{1.4.56}$$

Очевидно, это не типичное калибровочное условие, с которым сталкиваются в калибровочной теории. Причина, по которой оно допустимо в данной постановке, заключается в том, что в наших моделях калибровочное поле по существу является топологическим (подробнее см. [25]).

Чтобы пояснить, почему можно наложить (1.4.56), мы начнем с абелева случая. Здесь калибровочные преобразования имеют вид

$$\overline{\mathcal{A}} \;\mapsto\; \overline{\mathcal{A}} + \overline{\partial}\chi(z,\overline{z})\,, \tag{1.4.57}$$

где χ — комплекснозначная функция. По формуле Коши-Грина, мы можем положить преобразованное калибровочное поле равным нулю, выбрав

$$\chi(z,\overline{z}) = \frac{i}{\pi}\int d^2w\,\frac{\overline{\mathcal{A}}(w,\overline{w})}{z-w}\,. \tag{1.4.58}$$

Интеграл сходится при условии, что $\overline{\mathcal{A}} = O\left(\frac{1}{r^{1+\delta}}\right)$ для $\delta > 0$ при $r = |w| \to \infty$. Это асимптотическое поведение также гарантирует, что первый класс Черна расслоения обращается в

[9] Однако, в отличие от ортогонального случая, здесь случай $m = 1$ не является выделенным.

[10] Чтобы упростить выражения, здесь мы опускаем члены с калибровочными полями $\mathcal{A}_+$ и $\overline{\mathcal{A}}_+$.

нуль:

$$\int_{\mathbb{R}^2} c_1 = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} \mathrm{d}A = \lim_{r\to\infty} \frac{1}{2\pi} \oint\limits_{C_r} A = 0\,, \tag{1.4.59}$$

где C_r — окружность радиуса r, и $A = i\left(\mathcal{A}\mathrm{d}z - \overline{\mathcal{A}}\mathrm{d}\overline{z}\right)$.

Неабелев случай более сложен. Здесь соответствующее калибровочное преобразование имеет вид

$$\overline{\mathcal{A}} \;\mapsto\; \overline{\mathcal{A}} + \overline{\partial} g \cdot g^{-1}\,, \tag{1.4.60}$$

где $g \in \mathcal{G}_{\mathbb{C}}$ — элемент соответствующей комплексной калибровочной группы (в приведенном выше абелевом случае $\mathcal{G}_{\mathbb{C}} = \mathbb{C}^*$ и $g = e^{\chi}$). Таким образом, мы хотели бы решить уравнение

$$\overline{\partial} g + \overline{\mathcal{A}}\, g = 0\,. \tag{1.4.61}$$

Для общего $\overline{\mathcal{A}}$ его нельзя решить аналитически. Однако можно установить существование решения с помощью теории возмущений (как было первоначально показано в [121; 130]; см. также [53, Раздел 2.2]). Для простоты изложения мы опустим доказательство этого факта, которое можно найти в работе [29].

1.5 Однопетлевая бета-функция

Цель настоящего раздела — вычислить однопетлевые бета-функции для семейств унитарных, ортогональных и симплектических грассманианов в формализме квазилинейной формулировки первого порядка. В "геометрическом" подходе к сигма-моделям, где действие формулируется в терминах метрики и B-поля, это обычно делается с помощью метода фонового поля (см. [97] и ссылки там). Здесь же вычисление сводится к анализу некоторых элементарных диаграмм Фейнмана, аналогичных диаграммам φ^4-теории.

Наш результат будет состоять в том, что, независимо от конкретной модели, бета-функция пропорциональна дуальному числу Кокстера [95; 131] $h^\vee$ соответствующей алгебры симметрии (отвечающей группе изометрий однородного пространства). В случае симметрических пространств это хорошо известный результат [162; 164]. Для дальнейшего использования мы собрали значения $h^\vee$ для соответствующих алгебр Ли в Таблице 1.1.

Обозначение	Алгебра Ли	$h^\vee$
A_n	$\mathfrak{sl}(n+1)$	$n+1$
B_n	$\mathfrak{o}(2n+1)$	$2n-1$
C_n	$\mathfrak{sp}(2n)$	$n+1$
D_n	$\mathfrak{o}(2n)$	$2n-2$

Таблица 1.1: Дуальные числа Кокстера классических алгебр Ли.

Полезно также заметить, что для произвольной ортогональной алгебры Ли $\mathfrak{so}(n)$ дуальное число Кокстера равно просто $h^\vee = n-2$.

1.5.1 Бета-функция в случае $\mathbb{CP}^{n-1}$.

Прежде чем переходить к общим грассманианам, полезно обсудить простейший случай $\mathsf{Gr}(1,n) \simeq \mathbb{CP}^{n-1}$. Как мы увидим, диаграммные вычисления для произвольных грассманианов являются простыми обобщениями случая $\mathbb{CP}^{n-1}$.

Как было установлено, соответствующий лагранжиан Гросса-Невё с нулевым калибровочным полем имеет вид

$$\mathcal{L} = 2\left(V\overline{\partial}U + \overline{U}\partial\overline{V}\right) + \frac{\kappa}{2\pi}\,\mathrm{Tr}\big(J_{\mathsf{cp}}\overline{J}_{\mathsf{cp}}\big), \qquad \frac{1}{2\pi}J_{\mathsf{cp}} := U\otimes V\,. \tag{1.5.62}$$

Здесь поля U и V являются векторами-строками и векторами-столбцами соответственно, а пропагаторы этих полей приведены на Рис. 1.1. Чтобы прояснить вычисления диаграмм

$$\Big\langle U_a(z,\overline{z})V_b(w,\overline{w})\Big\rangle_0 = \quad a \longrightarrow b \quad = \frac{\delta_{ab}}{2\pi(z-w)}\,,$$

$$\Big\langle \overline{U}_a(z,\overline{z})\overline{V}_b(w,\overline{w})\Big\rangle_0 = \quad a \longrightarrow b \quad = \frac{\delta_{ab}}{2\pi(\overline{w}-\overline{z})}\,.$$

Рис. 1.1: Элементарные функции Грина (пропагаторы). Индекс 0 обозначает усреднение в свободной теории, а латинские индексы — компоненты векторов. В дальнейшем предполагается, что латинские индексы принимают значения от 1 до n.

Фейнмана, перепишем взаимодействие в терминах компонент полей:

$$\mathcal{L}_{int} = \frac{\kappa}{2\pi}\,\mathrm{Tr}\big(J_{\mathsf{cp}}\overline{J}_{\mathsf{cp}}\big) = 2\pi\kappa\left(U_aV_b\overline{V}_b\overline{U}_a\right)\,. \tag{1.5.63}$$

Соответствующая вершина изображена на Рис. 1.2.

Для вычисления бета-функции модели необходимо рассмотреть четырехточечную функцию Грина типа $\big\langle\, U_a\,\overline{U}_b\,V_c\,\overline{V}_d\,\big\rangle$. На однопетлевом уровне существуют два типа расходящихся диаграмм (см. Рис. 1.3). Можно показать (см. [22]), что каждая из этих диаграмм пропорциональна следующему элементарному интегралу[11]:

$$\frac{I(p)}{2\pi} = \int\frac{\mathrm{d}^2z_{12}}{2\pi}\,e^{i(p,z_{12})}\,\frac{1}{|z_{12}|^2} = -\frac{1}{2}\ln\left(\frac{p^2}{\Lambda^2}\right) + \mathrm{const}\,, \tag{1.5.64}$$

где p — внешний импульс, $z_{12} = z_1 - z_2$, а Λ есть ультрафиолетовое обрезание. Заметим, что диаграммы имеют симметрийный фактор 2 и различаются знаком из-за противоположных направлений синей линии.

Таким образом, мы сводим однопетлевые вычисления к задаче определения тензорной структуры расходящихся диаграмм. Для этого мы модифицируем правила Фейнмана, что-

[11] Мы полагаем два из четырех внешних импульсов в четырехточечной функции Грина равными нулю. В силу сохранения импульса диаграммы тогда зависят только от одного импульса p.

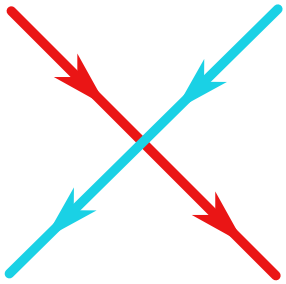


Рис. 1.2: Вершина.

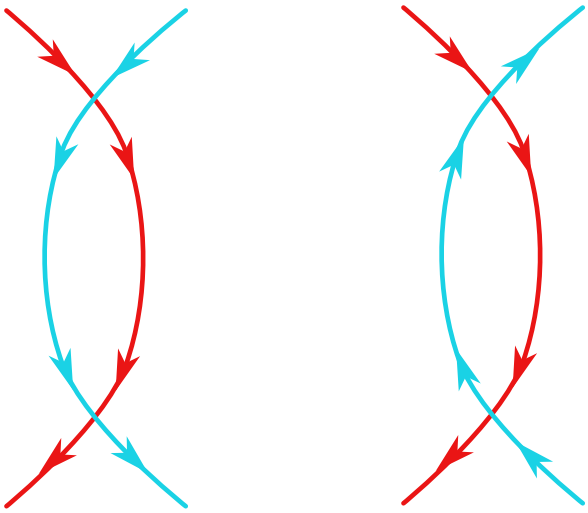


Рис. 1.3: Два типа расходящихся диаграмм.

бы визуализировать тензорную структуру взаимодействия: итоговая вершина показана на Рисунке 1.4. Здесь черные линии обозначают свертки по векторным внутренним индексам,

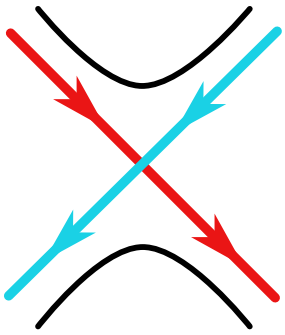


Рис. 1.4: Модифицированная вершина с учётом тензорной структуры.

аналогично теории $1/N$-разложения [111; 150; 164]. В этих обозначениях замкнутая линия соответствует следу единичной матрицы и, следовательно, дает фактор n. На Рис. 1.5 мы указываем тензорную структуру диаграмм с Рис. 1.3 в новых обозначениях. Суммируя эти две диаграммы, мы получаем четырехточечную функцию Грина в импульсном представлении с точностью до κ^2 (с ампутированными внешними линиями):

$$\left\langle U_a\,\overline{U}_b\,V_c\,\overline{V}_d\right\rangle = 2\pi\kappa\,\delta_{ab}\delta_{cd} + 2\pi\kappa^2 n\left(\delta_{ab}\delta_{cd} - \frac{1}{n}\delta_{ac}\delta_{bd}\right)\ln\left(\frac{|p|}{\Lambda}\right) + O(\kappa^3). \tag{1.5.65}$$

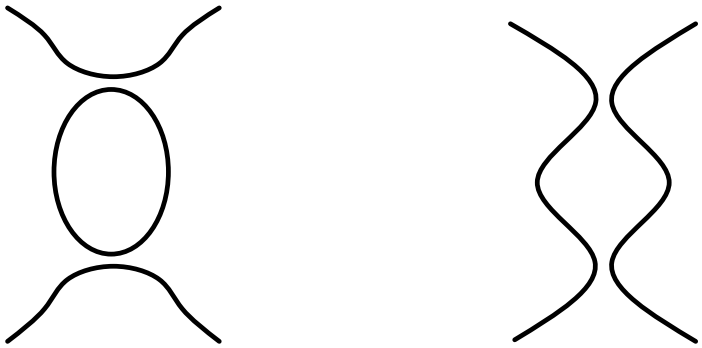


Рис. 1.5: Тензорная структура расходящихся диаграмм, показанных на Рис. 1.3.

Как мы видим, петлевой вклад оказывается пропорционален поперечному проектору. Смысл этого в следующем. Строго говоря, лагранжиан без калибровочного поля (1.5.62) в том виде, в каком он есть, не стабилен относительно перенормировки. Причина в том, что к нему можно добавить еще один член $2\pi\widetilde{\kappa}|U_a V_a|^2$ с новой константой связи $\widetilde{\kappa}$, не нарушая никаких симметрий. Формула (1.5.65) тогда означает, что перенормируется только поперечная комбинация двух членов.

В результате однопетлевая бета-функция равна

$$\beta_\kappa^{\mathsf{CP}} = -n\,\kappa^2 + O(\kappa^3)\,. \tag{1.5.66}$$

1.5.2 Бета-функция в случае $\mathsf{Gr}(m,n)$.

Вышеприведенный результат об однопетлевой β-функции $\mathsf{Gr}(1,n) \simeq \mathbb{CP}^{n-1}$ сигма-модели легко обобщается на случай произвольного m для $\mathsf{Gr}(m,n)$. Теперь поля являются матрицами $n\times m$ и $m\times n$, поэтому на этот раз нужно ввести два типа внутренних индексов. Соответствующий лагранжиан Гросса-Невё имеет вид

$$\mathcal{L} = 2\,\mathrm{Tr}\Big(V\overline{\partial}U + \overline{U}\partial\overline{V}\Big) + \frac{\kappa}{2\pi}\,\mathrm{Tr}\big(J_{\mathsf{sl}}\overline{J}_{\mathsf{sl}}\big)\,, \qquad \frac{1}{2\pi}J_{\mathsf{sl}} := \mu_{\mathsf{sl}} = UV. \tag{1.5.67}$$

Пропагаторы диагональны по обоим типам индексов, и их координатная зависимость такая же, как в случае $m=1$. Взаимодействие можно записать в виде

$$\mathcal{L}_{\mathrm{int}} = \frac{\kappa}{2\pi}\,\mathrm{Tr}\big(J_{\mathsf{sl}}\overline{J}_{\mathsf{sl}}\big) = 2\pi\kappa\,\big(U_{a\alpha}V_{\alpha b}\overline{V}_{b\beta}\overline{U}_{\beta a}\big)\,. \tag{1.5.68}$$

Здесь и далее греческие индексы пробегают значения от 1 до m.

Снова нам нужно вычислить четырехточечную функцию Грина $\big\langle\, U_{a\alpha}\,\overline{U}_{\beta b}\,V_{\gamma c}\,\overline{V}_{d\zeta}\,\big\rangle$. Ключевой момент состоит в том, что тензорная структура взаимодействия по греческим индексам тривиальным образом обобщает графические обозначения Рис. 1.4. Действительно, можно использовать графические обозначения, установленные в случае $\mathsf{Gr}(1,n)$, с дополнительным правилом, что греческие индексы независимо проходят по красным и синим линиям. В этой схеме все диаграммы содержат одинаковый общий множитель $\delta_{\alpha\gamma}\delta_{\beta\zeta}$. Четырехто-

чечная функция отличается от (1.5.65) лишь этим тривиальным множителем, так что для произвольного m автоматически получается тот же ответ для однопетлевой бета-функции:

$$\beta_\kappa^{\mathsf{Gr}} = -n\,\kappa^2 + \mathcal{O}(\kappa^3)\,. \tag{1.5.69}$$

1.5.3 Бета-функция в случае $\mathsf{OGr}(m,n)$.

Легко обобщить вычисления предыдущего раздела на случай ортогональных и симплектических грассманианов. Начнем с ортогонального случая. Лагранжиан квазилинейной формулировки первого порядка без калибровочных полей имеет структуру, аналогичную (1.5.67), то есть

$$\mathcal{L} = 2\,\mathrm{Tr}\Big(V\mathbb{h}_n\overline{\partial}U + \overline{U}\mathbb{h}_n\partial\overline{V}\Big) + \frac{\kappa}{4\pi}\,\mathrm{Tr}\big(J_\circ\overline{J}_\circ\big), \qquad \frac{1}{2\pi}J_\circ := \mu_\circ, \tag{1.5.70}$$

а отображение моментов (пропорциональное току Каца-Муди, по которому строится взаимодействие) задается формулой (1.2.19). Пропагаторы в данной модели имеют вид

$$\Big\langle U_{a\alpha}(z,\overline{z})V_{\beta b}(w,\overline{w})\Big\rangle_0 = \frac{\delta_{\alpha\beta}\,\mathbb{h}_{ab}}{2\pi(z-w)}, \quad \Big\langle \overline{U}_{\alpha a}(z,\overline{z})\overline{V}_{b\beta}(w,\overline{w})\Big\rangle_0 = \frac{\delta_{\alpha\beta}\,\mathbb{h}_{ab}}{2\pi(\overline{w}-\overline{z})}, \tag{1.5.71}$$

где $\mathbb{h}_{ab}$ обозначает матричные элементы $\mathbb{h}_n$ (напомним, что $\mathbb{h}_n$ симметричен и $\mathbb{h}_n^2 = \mathbb{1}_n$). В терминах компонент полей взаимодействие можно записать как

$$\boxed{\mathcal{L}_{\mathrm{int}} = \frac{\kappa}{4\pi}\,\mathrm{Tr}\big(J_\circ\overline{J}_\circ\big) = 2\pi\kappa\,\Big(U_{a\alpha}V_{\alpha b}\overline{V}_{b\beta}\overline{U}_{\beta a} - U_{a\alpha}V_{\alpha b}\overline{V}_{a\beta}\overline{U}_{\beta b}\Big).} \tag{1.5.72}$$

По тем же соображениям, что и в предыдущем разделе, бета-функция не зависит от m. Это означает, что можно положить $m = 1$ и использовать лагранжиан, пренебрегая греческими индексами. Всё отличие от случая унитарного грассманиана заключается в наличии дополнительной вершины. Введем аналогичные унитарному случаю графические обозначения, см. Рис. 1.6. Здесь две вершины соответствуют двум членам в (1.5.72) (знак, указанный в

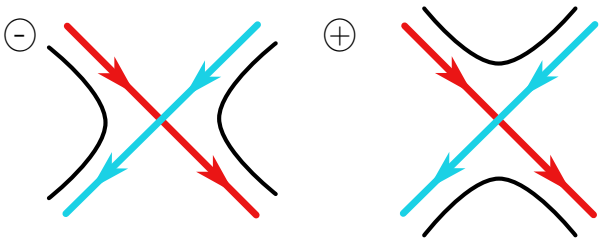


Рис. 1.6: Два типа вершин.

кружке на данном рисунке, соответствует знаку перед соответствующим членом в лагранжиане). Также имеется два типа расходящихся диаграмм (как на Рис. 1.3), каждый из которых делится на четыре диаграммы в соответствии с потоком линий внутренних векторных индексов (они показаны на Рис. 1.7). Суммируя эти восемь диаграмм, получаем четырёхточечную

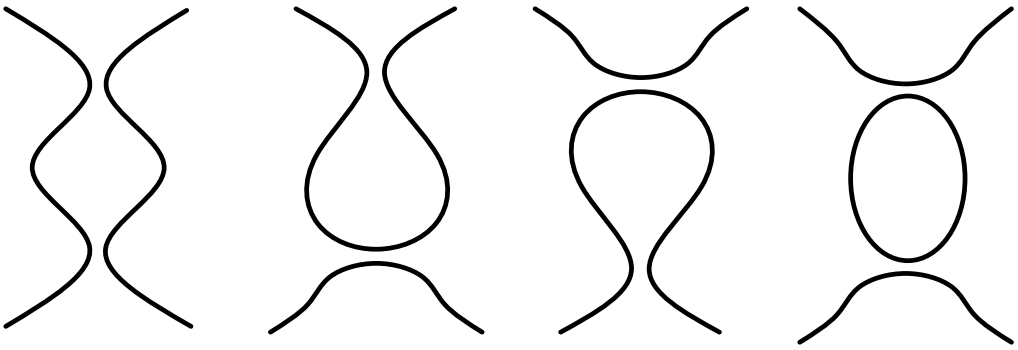


Рис. 1.7: Тензорная структура расходящихся диаграмм.

функцию в импульсном представлении вида

$$\left\langle \overline{U}_a\, U_b\, \overline{V}_c\, V_d \right\rangle = 2\pi(\delta_{ab}\delta_{cd} - \delta_{ad}\delta_{cb})\left(\kappa + \kappa^2(n-2)\ln\left(\frac{|p|}{\Lambda}\right)\right) + O(\kappa^3). \tag{1.5.73}$$

Заметим, что все диаграммы, пропорциональные $\mathbb{h}_{ac}\mathbb{h}_{bd}$, сокращаются. Причина этого есть $\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2$-симметрия действия, которая действует как $U\to -V$, $V\to U$ и $\overline{U}\to -\overline{V}$, $\overline{V}\to\overline{U}$. Это означает, что четырехточечная функция Грина (1.5.73) кососимметрична по $a\leftrightarrow c$ и $b\leftrightarrow d$. Из (1.5.73) можно получить однопетлевую бета-функцию модели $\mathsf{OGr}(m,n)$:

$$\beta_\kappa^{\mathsf{OGr}} = -(n-2)\,\kappa^2 + O(\kappa^3)\,. \tag{1.5.74}$$

1.5.4 Бета-функция в случае $\mathsf{SGr}(m,2n)$.

Здесь мы, по аналогии с ортогональным случаем, рассматриваем лагранжиан Гросса-Невё вида

$$\mathcal{L} = 2\,\mathrm{Tr}\Big(V\omega_{2n}\overline{\partial}U + \overline{U}\omega_{2n}\partial\overline{V}\Big) + \frac{\kappa}{4\pi}\,\mathrm{Tr}\big(J_{\mathsf{sp}}\overline{J}_{\mathsf{sp}}\big), \qquad \frac{1}{2\pi}J_{\mathsf{sp}} := \mu_{\mathsf{sp}}, \tag{1.5.75}$$

с отображением моментов (1.3.45). Основные пропагаторы отличаются от пропагаторов предыдущего раздела заменой $\mathbb{h}_{ab}\to(-\omega_{ab})$, где ω_{ab} обозначают матричные элементы ω_{2n}, т.е.

$$\Big\langle U_{a\alpha}(z,\overline{z})V_{\beta b}(w,\overline{w})\Big\rangle_0 = \frac{-\delta_{\alpha\beta}\,\omega_{ab}}{2\pi(z-w)}, \quad \Big\langle \overline{U}_{\alpha a}(z,\overline{z})\overline{V}_{b\beta}(w,\overline{w})\Big\rangle_0 = \frac{-\delta_{\alpha\beta}\,\omega_{ab}}{2\pi(\overline{w}-\overline{z})}. \tag{1.5.76}$$

Здесь мы используем $\omega_{2n}^2 = -\mathbb{1}_{2n}$. Напомним, что билинейная форма ω_{2n} кососимметрична. Можно проверить прямым вычислением, что в этом случае взаимодействие отличается от (1.5.72) знаком перед первой вершиной, т.е.

$$\mathcal{L}_{\mathrm{int}} = -2\pi\kappa\left(U_{a\alpha}V_{\alpha b}\overline{V}_{b\beta}\overline{U}_{\beta a} \;+\; U_{a\alpha}V_{\alpha b}\overline{V}_{a\beta}\overline{U}_{\beta b}\right). \tag{1.5.77}$$

В результате четырехточечная функция пропорциональна $-(\delta_{ab}\delta_{cd}+\delta_{ad}\delta_{cb})$. Как и в предыдущем случае, можно считать, что в вычислениях $m=1$, и существует симметрия $\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2$, отображающая $U\leftrightarrow V$ и $\overline{U}\leftrightarrow\overline{V}$, что приводит к сокращению всех диаграмм, пропорцио-

нальных $\omega_{ac}\omega_{bd}$.

Можно видеть, что однопетлевая бета-функция в случае $\mathsf{SGr}(m, 2n)$ получается заменой знака перед второй и третьей диаграммами на Рис. 1.7. Также необходимо добавить дополнительный знак в каждой диаграмме из-за замены $\mathbb{h}_{2n} \to (-\omega_{2n})$ в пропагаторах. В результате получаем

$$\beta_\kappa^{\mathsf{SGr}} = -2(n+1)\,\kappa^2 + O(\kappa^3)\,. \tag{1.5.78}$$

Глава 2. Суперсимметризация формализма Гросса-Невё

Цель данной главы — включить суперсимметрию в формализм Гросса-Невё для унитарных, ортогональных и симплектических грассманианов. В частности, мы построим суперсимметричные расширения сигма-моделей с симметрическими грассманианами в качестве таргет-пространств в рамках этого формализма. В качестве предпосылки суперсимметричная $\mathbb{CP}^{n-1}$ модель изучалась в [27], а различные пределы деформированной суперсимметричной $\mathbb{CP}^1$ модели (включая самый базовый случай — супер-модель Тирринга) обсуждались в [34].

Хорошо известно, что грассманианы вида $\mathsf{Gr}(m,n)$, $\mathsf{OGr}(1,n)$, $\mathsf{OGr}(m,2m)$ и $\mathsf{SGr}(m,2m)$ есть единственные эрмитовы симметрические пространства, являющиеся однородными пространствами классических групп[1]. Как обьяснялось в прошлой главе, с точки зрения формализма Гросса-Невё эти симметрические пространства характеризуются тем, что метрики сигма-моделей, возникающие в формализме второго порядка после исключения вспомогательных полей, являются кэлеровыми [29]. Таким образом, согласно известному результату [165], сигма-модели с такими таргет-пространствами допускают $\mathcal{N}=(2,2)$ суперсимметричные расширения. Обычные суперполевые формулировки сигма-моделей с грассманианами в качестве целевых пространств изучались в [77; 84]. В данной главе мы объясним, как можно суперсимметризовать лагранжианы Гросса-Невё, соответствующие сигма-моделям на симметрических грассманианах. В случае несимметрических грассманианов мы опишем препятствия к суперсимметризации соответствующих квазилинейных формулировок первого порядка: они связаны с тем фактом, что метрики соответствующих таргет-пространств не являются кэлеровыми.

Вторая часть этой главы посвящена геометрической интерпретации получающихся суперсимметричных лагранжианов Гросса-Невё. Напомним, что в суперсимметричных сигма-моделях фермионы принимают значения в тотальном пространстве касательного расслоения (со сдвинутой чётностью) к таргет-пространству [87]. Удобный факт из алгебраической геометрии состоит в том, что в случае максимальных ортогональных и симплектических грассманианов касательное расслоение достаточно просто связано с двойственным тавто-

[1] Существуют два дополнительных эрмитовых симметрических пространства, которые строятся с использованием исключительных групп $\mathbf{E}_6$ и $\mathbf{E}_7$.

логическим расслоением — оно является либо его симметрическим, либо кососимметрическим квадратом. Оказывается, это приводит к замечательным переформулировкам наших лагранжианов на максимальных ортогональных и симплектических грассманианах. Более того, удивительным образом можно ввести новые поля таким образом, что фермионы будут взаимодействовать с бозонными полями минимальным образом, то есть только через взаимодействие с калибровочными полями. В частности, фермионы в этой формулировке вообще не входят в член взаимодействия. Однако цена, которую приходится за это заплатить, заключается в том, что реализация суперсимметрии на этом языке является более сложной и нелинейной.

Мы исследуем классическую сторону этого вопроса и оставляем изучение эквивалентности полученных формулировок на квантовом уровне для будущих исследований (хотя, в качестве иллюстрации, мы доказываем эквивалентность соответствующих квантовомеханических моделей в наиболее простом случае $\mathbb{CP}^1$).

2.1 Унитарные грассманианы

Сначала напомним бозонную сигма-модель в квазилинейной формулировке первого порядка с грассманианом в качестве таргет пространства:

$$\mathcal{S}[U,V] = \int \mathrm{d}^2 z \, \Big[2\Big(\mathrm{Tr}\big(V\overline{D}U\big) + \mathrm{Tr}\big(\overline{U}D\overline{V}\big)\Big) + \frac{\kappa}{2\pi}\mathrm{Tr}\left(J_{\mathsf{sl}}\overline{J}_{\mathsf{sl}}\right)\Big]. \tag{2.1.1}$$

Здесь V и U — матричные поля размером $m \times n$ и $n \times m$ соответственно, $\overline{D}U = \overline{\partial}U - iU\overline{\mathcal{A}}$ и $\overline{D}V = \overline{\partial}U + i\overline{\mathcal{A}}V$ — ковариантные производные группы $\mathbf{GL}(m,\mathbb{C})$ с калибровочным полем $A := \mathcal{A}\mathrm{d}z + \overline{\mathcal{A}}\mathrm{d}\bar{z}$ и $J_{\mathsf{sl}} = 2\pi\, UV$ — глобальный ток группы $\mathbf{GL}(n,\mathbb{C})$.

Для построения суперсимметричной версии этой модели мы используем технику из работы [27], где подробно обсуждалась суперсимметричная сигма-модель $\mathbb{CP}^{n-1}$. Фактически все вычисления из случая $\mathbb{CP}^{n-1}$ переносятся на случай унитарных грассманианов почти без изменений. Тем не менее, для самосогласованности мы начнём с напоминания основных идей и проведения аналогичных вычислений с небольшими модификациями.

2.1.1 Свободная система.

Мы будем строить суперсимметричное обобщение поэтапно. Удобно начать с рассмотрения случая "бесконечного объёма $\kappa = 0$ и плоского фазового пространства (т.е. $A = 0$)" для модели (2.1.1). Чтобы суперсимметризовать модель, рассмотрим промежуточное свободное действие

$$\mathcal{S}[U,V,B,C] = \int \mathrm{d}^2 z \left[2\,\mathrm{Tr}\big(V\,\overline{\partial}U + \overline{U}\partial\overline{V} + B\,\overline{\partial}C - \overline{C}\partial\overline{B}\,\big)\right], \tag{2.1.2}$$

где V и U — по-прежнему бозонные матричные переменные размером $m \times n$ и $n \times m$, а B и C — их фермионные суперпартнёры того же матричного размера соответственно. Известно,

что это действие допускает $\mathcal{N} = (2,2)$ суперсимметрию [64] (см. также [74; 96])

$$\delta U = \epsilon_1 C, \quad \delta C = -\epsilon_2 \partial U \qquad \text{и} \qquad \delta V = \epsilon_2 \partial B, \quad \delta B = -\epsilon_1 V. \tag{2.1.3}$$

Следующий шаг — модифицировать эту "плоскую" модель таким образом, чтобы описать нетривиальные таргет-пространства. Для этого мы просто заменяем обычные производные на ковариантные $\partial \to D$, $\overline{\partial} \to \overline{D}$ в действии (2.1.2) и в преобразованиях суперсимметрии[2] (2.1.3). Уравнение движения для калибровочного поля $\overline{\mathcal{A}}$ теперь имеет вид

$$VU + BC = 0\,. \tag{2.1.4}$$

Однако новое действие с удлинёнными производными больше не является суперсимметричным, поскольку его вариация относительно преобразований суперсимметрии (2.1.3) равна[3]

$$\delta\mathcal{S} \simeq 2\epsilon_2 \int \mathrm{d}^2 z\, \mathrm{Tr}\Big(\mathscr{F}_{\bar{z}z} BU\Big)\,, \tag{2.1.5}$$

где $\mathscr{F}_{\bar{z}z} := \big[\overline{D}, D\big]$ — коммутатор ковариантных производных, т.е. кривизна калибровочной связности. Способ устранить это препятствие к суперсимметрии состоит в наложении новой связи $BU = 0$ с помощью нового фермионного нединамического калибровочного поля, которое мы обозначим как $\overline{\mathcal{W}}$. Таким образом, мы приходим к рассмотрению действия

$$\mathcal{S} = \int \mathrm{d}^2 z \Big[2\,\mathrm{Tr}\big(V\overline{D}U + B\overline{D}C\big) + i\overline{\mathcal{W}}BU - \text{к.с.}\Big]\,, \tag{2.1.6}$$

где к.с. для краткости обозначает комплексно-сопряженные слагаемые к слагаемым, записанным правее.

Эта теория уже суперсимметрична. В частности, система связей "первого рода", задаваемая нединамическими калибровочными полями, для неё замкнута относительно преобразований суперсимметрии, т.е.

$$\delta(BU) = -\epsilon_1(VU + BC) \simeq 0 \quad \text{и} \quad \delta(VU + BC) = \epsilon_2\, D(BU) \simeq 0. \tag{2.1.7}$$

Закон преобразования для калибровочных полей имеет вид

$$\delta\overline{\mathcal{A}} = \frac{1}{2}\epsilon_1 \overline{\mathcal{W}}\,, \qquad \delta\overline{\mathcal{W}} = 2i\epsilon_2 \mathscr{F}_{\bar{z}z}\,. \tag{2.1.8}$$

Однако сдвиг калибровочных полей эквивалентен рассмотрению системы на массовой поверхности. Поскольку при рассмотрении обобщений (включая взаимодействия и т.д.) закон

[2]Вообще говоря, этот шаг не обязателен для (2.1.3). Дело в том, что члены в вариациях преобразований суперсимметрии, происходящие от калибровочного поля, которым мы расширяем производную, могут быть устранены калибровочным преобразованием. Однако мы предпочитаем сделать этот шаг, поскольку он делает анализ модели более прозрачным и явным.

[3]В этой главе мы используем символ $\simeq$ для обозначения равенства с точностью до уравнений движения и полных производных.

преобразования калибровочных полей становится довольно сложным, мы выбираем более простой путь, рассматривая вариации преобразований суперсимметрии на поверхности связей. Поэтому мы можем дополнительно предположить, что калибровочные поля не преобразуются под действием суперсимметрии. Однако заметим, что всегда можно восстановить полные непротиворечивые преобразования вне массовой поверхности, следуя методу, изложенном в Приложении А в [27].

2.1.2 Взаимодействие.

Теперь суперсимметризуем член взаимодействия

$$\mathcal{S}_{\rm int} = \frac{\kappa}{2\pi}\int \mathrm{d}^2 z\, \mathrm{Tr}\left(J_{\mathsf{sl}}\overline{J}_{\mathsf{sl}}\right) = 2\pi\kappa\int \mathrm{d}^2 z\, \mathrm{Tr}\big(UV\overline{V}\,\overline{U}\big)\,. \tag{2.1.9}$$

Глобальный $\mathfrak{sl}(n)$ ток Каца-Муди свободной суперсимметричной системы (2.1.2), по которому мы хотим построить взаимодействие суперсимметричной теории аналогично формуле выше, равен

$$\mathcal{J}_{\mathsf{sl}} = 2\pi\,(UV - CB)\ . \tag{2.1.10}$$

Наша идея состоит в том, чтобы модифицировать взаимодействие (2.1.9) бозонной теории заменой $J_{\mathsf{sl}} \to \mathcal{J}_{\mathsf{sl}}$ и проверить суперсимметричность получившейся теории.

Таким образом, мы предполагаем, что окончательная форма суперсимметричного действия Гросса-Невё для унитарных грассманианов имеет вид

$$\mathcal{S} = \int \mathrm{d}^2 z \left[2\,\mathrm{Tr}\big(V\overline{D}U + B\overline{D}C + i\overline{\mathcal{W}}BU\big) - \text{к.с.}\right] + \frac{\kappa}{2\pi}\int \mathrm{d}^2 z\, \mathrm{Tr}\left(\mathcal{J}_{\mathsf{sl}}\overline{\mathcal{J}}_{\mathsf{sl}}\right)\ . \tag{2.1.11}$$

Докажем, что это действие действительно суперсимметрично. Вариация тока относительно преобразований суперсимметрии равна

$$\delta\mathcal{J}_{\mathsf{sl}} = \epsilon_2\partial\widetilde{\mathcal{J}}_{\mathsf{sl}}, \quad \text{где} \quad \widetilde{\mathcal{J}}_{\mathsf{sl}} = 2\pi\, UB\,. \tag{2.1.12}$$

Также заметим, что уравнения движения подразумевают, что

$$\overline{\partial}\mathcal{J}_{\mathsf{sl}} = \frac{\kappa}{2\pi}\big[\mathcal{J}_{\mathsf{sl}}, \overline{\mathcal{J}}_{\mathsf{sl}}\big]\,. \tag{2.1.13}$$

Используя (2.1.12) и (2.1.13), легко видеть, что член взаимодействия действительно суперсимметрично инвариантен. Его вариацию можно вычислить следующим образом:

$$\delta\mathrm{Tr}\left(\mathcal{J}_{\mathsf{sl}}\overline{\mathcal{J}}_{\mathsf{sl}}\right) = \epsilon_2\mathrm{Tr}\left(\overline{\mathcal{J}}_{\mathsf{sl}}\,\delta\widetilde{\mathcal{J}}_{\mathsf{sl}}\right) + \text{к.с.} \simeq \epsilon_2\,\frac{\kappa}{2\pi}\mathrm{Tr}\Big(\big[\mathcal{J}_{\mathsf{sl}}, \widetilde{\mathcal{J}}_{\mathsf{sl}}\big]\,\overline{\mathcal{J}}_{\mathsf{sl}}\Big) + \text{к.с.} \tag{2.1.14}$$

Вычисление коммутатора даёт

$$\big[\mathcal{J}_{\mathsf{sl}}, \widetilde{\mathcal{J}}_{\mathsf{sl}}\big] = 4\pi^2\Big(U(VU + BC)B - UBUV - CBUB\Big) \simeq 0\,, \tag{2.1.15}$$

где мы явно воспользовались связями, налагаемыми калибровочными полями $\overline{\mathcal{A}}$, $\overline{\mathcal{W}}$. То же самое относится к комплексно-сопряжённым членам. Это означает, что вариация действия относительно преобразований суперсимметрии есть $\delta\mathcal{S} \simeq 0$, следовательно действие (2.1.11) инвариантно относительно суперсимметрии на массовой поверхности при преобразованиях

$$\delta U = \epsilon_1 C, \quad \delta C = -\epsilon_2 DU \qquad \text{и} \qquad \delta V = \epsilon_2 DB, \quad \delta B = -\epsilon_1 V. \tag{2.1.16}$$

Таким образом, мы действительно построили $\mathcal{N} = (2,2)$ суперсимметричное обобщение квазилинейной формулировки первого порядка для унитарных грассманианов.

2.1.3 Калибровочная симметрия.

Кратко обсудим калибровочную симметрию этой модели. Связи первого рода (то есть уравнения движения нединамических полей $\overline{\mathcal{A}}$ и $\overline{\mathcal{W}}$) порождают следующие калибровочные преобразования (вместе со стандартными компенсирующими преобразованиями калибровочных полей $\overline{\mathcal{A}}$ и $\overline{\mathcal{W}}$):

$$U \to Ug\,, \quad V \to g^{-1}V + e\,B\,, \tag{2.1.17}$$

$$C \to Cg + Ue\,, \quad B \to g^{-1}B\,, \tag{2.1.18}$$

$$\text{где} \quad g \in \mathbf{GL}(m,\mathbb{C})\,, \quad e \in \Pi\mathrm{Mat}_m\,.$$

Здесь Mat_m — аддитивная группа матриц $m \times m$, тогда как символ 'Π' означает, что соответствующие параметры являются грассмановыми числами (т.е. указывает на сдвиг фермионной чётности). Таким образом, калибровочная группа (или группа комплексной симплектической редукции) $\mathcal{G}_{\mathbb{C}}$ имеет структуру

$$\mathcal{G}_{\mathbb{C}} = G_{\mathbb{C}} \ltimes \Pi\mathfrak{g}\,, \tag{2.1.19}$$

где в данном случае $G_{\mathbb{C}} = \mathbf{GL}(m,\mathbb{C})$, а $\mathfrak{g} = \mathrm{Mat}_m$ — её алгебра Ли. Структура (2.1.19) калибровочной группы довольно общая и, в частности, также выполняется для ортогональных и симплектических грассманианов, как мы увидим ниже.

2.2 Экстремальные грассманианы

В этом разделе мы обсуждаем суперсимметризацию сигма-моделей с таргет-пространствами $\mathsf{OGr}(m,n)$ и $\mathsf{SGr}(m,n)$. Основное утверждение состоит в том, что здесь, в отличие от унитарного случая, имеется нетривиальное препятствие к суперсимметрии, которое исчезает только в экстремальных случаях $\mathsf{OGr}(1,n)$, $\mathsf{OGr}(m,2m)$ и $\mathsf{SGr}(m,2m)$. Это согласуется с хорошо известными фактами о суперсимметрии в обычной геометрической формулировке второго порядка. Как известно, в отсутствие кручения именно сигма-модели с кэлеровыми целевыми пространствами допускают расширенную $\mathcal{N} = (2,2)$ суперсиммет-

рию [165]. Однако формализм Гросса-Невё порождает кэлеровы метрики на грассманианах только в том случае, если они являются симметрическими пространствами[4], что в общем случае неверно для ортогональных и симплектических грассманианов.

Если допустить ненулевое кручение, априори появляется больше возможностей, которые связаны с включением как киральных, так и твистованных киральных мультиплетов [70] (см. [106]). Примеры включают суперсимметричную версию модели Весса–Зумино–Новикова–Виттена на групповом многообразии, допускающем комплексную структуру [132]. Общие модели с групповым целевым пространством и членами WZNW, допускающие различное количество суперсимметрий, изучались в компонентной форме в [138; 145; 146]. Однако есть различные причины, по которым это обобщение не применимо к нашей установке. Например, конструкция [70] требует, чтобы таргет-пространство допускало две *интегрируемые* комплексные структуры $\mathcal{J}_\pm$. Для однородного пространства $\frac{\mathcal{G}}{\mathcal{H}}$ это чисто теоретико-представленческий вопрос, который для случая грассманианов разобран в Приложении А. Как обычно, алгебра Ли группы G разлагается следующим образом: $\mathfrak{g} = \mathsf{h} \oplus \mathsf{m}$, где m — ортогональное дополнение к h относительно метрики Киллинга. Кроме того, в случае несимметрических грассманианов имеем разложение $\mathsf{m}_{\mathbb{C}} = \mathsf{m}_1 \oplus \mathsf{m}_2 \oplus \bar{\mathsf{m}}_1 \oplus \bar{\mathsf{m}}_2$, где слагаемые в правой части являются неприводимыми представлениями h. Выбор инвариантной почти комплексной структуры $\mathcal{J}$ сводится к выбору знаков в $\mathcal{J}\mathsf{m}_{1,2} = \pm i\mathsf{m}_{1,2}$, так что всего имеется 4 выбора. Два из них связаны с двумя другими заменой $\mathcal{J} \mapsto -\mathcal{J}$, так что на самом деле существенно различны только два выбора. Однако, как следует из Приложения А, только один из этих оставшихся вариантов соответствует *интегрируемой* комплексной структуре. Таким образом, в нашем формализме нельзя найти две существенно различные комплексные структуры $\mathcal{J}_\pm$, поэтому наиболее общая модель с $\mathcal{N} = (2,2)$ суперсимметрией требует кэлеровой метрики и нулевого (или топологического) B-поля, что естественно выполнено в квазилинейной формулировке первого порядка только для симметрических грассманианов.

2.2.1 Ортогональные грассманианы.

Начнём с рассмотрения ортогонального случая, а затем перейдём к симплектическому, поскольку они связаны небольшими техниескими модификациями. Технология суперсимметризации действий типа Гросса-Невё в значительной степени аналогична той, что использовалась выше для унитарных грассманианов. Поэтому мы в основном сосредоточимся на новых (по сравнению с унитарным случаем) аспектах.

Напомним результат из Главы 1, что действие чисто бозонной сигма-модели на ортогональном грассманиане $\mathsf{OGr}(m,n)$ в формализме Гросса-Невё имеет вид

$$\mathcal{S} = \int \mathrm{d}^2 z \, \mathrm{Tr}\left[\left(2V \circ \overline{D}U + i\overline{\mathcal{R}}\, U^t \circ U - \text{к.с.}\right) + \frac{\kappa}{4\pi}\mathrm{Tr}\left(J_{\mathsf{so}}\overline{J}_{\mathsf{so}}\right)\right]. \tag{2.2.20}$$

По сравнению с предыдущей главой, здесь мы переобозначили калибровочное поле условий

[4] В других случаях *нормальная* метрика, возникающая из формулировки Гросса-Невё, не является кэлеровой.

изотропии $\overline{\mathcal{A}}_+$ на $\overline{\mathcal{R}}$. Также, через $\circ$ мы обозначаем скалярное произведение со вставкой симметрической невырожденной матрицы $\mathbb{h}_n$ размера $n \times n$, удовлетворяющей[5] $\mathbb{h}_n^2 = \mathbb{1}_n$, например $V \circ U = V\mathbb{h}_n U$. Матрица $\mathbb{h}_n$, как и раньше, представляет собой симметрическую билинейную форму в $\mathbb{C}^n$. Простейший выбор есть $\mathbb{h}_n = \mathbb{1}_n$, и мы часто его используем, но иногда будем оставлять матрицу произвольной, чтобы продемонстрировать параллели между ортогональным и симплектическим случаями (чтобы перейти к симплектическому случаю, нужно просто заменить $\mathbb{h}_n$ на кососимметрическую матрицу). Кроме того,

$$J_{\mathsf{so}} = 2\pi\big(UV - V^tU^t\big)\mathbb{h}_n \tag{2.2.21}$$

есть нётеровский ток глобальной группы $\mathbf{SO}(n,\mathbb{C})$ симметрии свободной теории. Важное отличие вышеуказанного действия от (2.1.1) заключается в наличии калибровочного поля $\overline{\mathcal{R}}$, налагающего условия изотропности.

Как и в предыдущем разделе, для суперсимметризации мы начинаем со свободной системы (2.1.2) с преобразованиями суперсимметрии, заданными (2.1.3). Затем мы налагаем условия изотропности, характерные для ортогонального грассманиана. Как и в унитарном случае, суперсимметризация $\overline{\mathcal{A}}$-ограничения $V \circ U + B \circ C = 0$ требует введения калибровочного поля-суперпартнёра $\overline{\mathcal{W}}$, налагающего связь-суперпартнёр $B \circ U = 0$. Поскольку суперсимметричная вариация условий изотропности $U^t \circ U = 0$, налагаемых бозонным калибровочным полем $\overline{\mathcal{R}}$, есть

$$\delta(U^t \circ U) = \epsilon_1 \left(C^t \circ U + U^t \circ C\right) , \tag{2.2.22}$$

следует добавить в действие связь-суперпартнёр $C^t \circ U + U^t \circ C = 0$. Соответствующий множитель Лагранжа обозначается $\overline{\mathcal{Q}}$ и также играет роль фермионного нединамического калибровочного поля.

Следуя схеме из предыдущего раздела, на последнем шаге необходимо добавить взаимодействие. В ортогональном случае мы модифицируем ток-токовое взаимодействие бозонной модели (2.2.20) заменой $J_{\mathsf{so}} \to \mathcal{J}_{\mathsf{so}}$, где

$$\frac{1}{2\pi}\mathcal{J}_{\mathsf{so}} = \big(UV - CB\big)\mathbb{h}_n - \big(UV - CB\big)^t\,\mathbb{h}_n\,. \tag{2.2.23}$$

Уравнения движения для $\mathcal{J}_{\mathsf{so}}$ имеют ту же форму (2.1.13), что и ранее. Суперсимметричная вариация этого тока имеет структуру

$$\delta\mathcal{J}_{\mathsf{so}} = \epsilon_2\partial\widetilde{\mathcal{J}}_{\mathsf{so}}, \quad \text{где} \quad \widetilde{\mathcal{J}}_{\mathsf{so}} = 2\pi\big(UB - B^tU^t\big)\mathbb{h}_n\,. \tag{2.2.24}$$

Как и в унитарном случае (2.1.14), вариация члена взаимодействия пропорциональна коммутатору $\big[\mathcal{J}_{\mathsf{so}}, \widetilde{\mathcal{J}}_{\mathsf{so}}\big]$. В унитарном случае этот коммутатор пропорционален уравнениям движения, но для ортогональных грассманианов в общем случае это неверно. Явное вычисление

[5] Здесь и далее $\mathbb{1}_n$ — единичная матрица размера $n \times n$.

коммутатора даёт следующий результат:

$$\big[\mathcal{J}_{\mathsf{so}},\widetilde{\mathcal{J}_{\mathsf{so}}}\big]\simeq 4\pi^2\Big(CB\circ B^tU^t+UB\circ B^tC^t+U\big(B\circ V^t-V\circ B^t\big)U^t\Big)\mathbb{h}_n\,, \tag{2.2.25}$$

где мы использовали связи, задаваемые нединамическими калибровочными полями, для упрощения правой части. Наше утверждение состоит в том, что $\big[\mathcal{J}_{\mathsf{so}},\widetilde{\mathcal{J}_{\mathsf{so}}}\big]\simeq 0$ для "минимальных" и "максимальных" ортогональных грассманианов $\mathsf{OGr}(1,n)$ и $\mathsf{OGr}(m,2m)$. Докажем это.

Квадрика.

Случай минимального грассманиана $\mathsf{OGr}(1,n)$ элементарен, поскольку здесь B и V — это просто фермионный и бозонный векторы соответственно. Из-за того, что B_i являются грассмановыми числами, $B\circ B^t=0$. Кроме того, $B\circ V^t=V\circ B^t$, так что $\big[\mathcal{J}_{\mathsf{so}},\widetilde{\mathcal{J}_{\mathsf{so}}}\big]\simeq 0$.

Максимальный грассманиан.

Случай максимального грассманиана несколько сложнее. Для удобства зафиксируем на время $\mathbb{h}_n=\mathbb{1}_n$. Напомним, что столбцы матрицы U составляют m изотропных векторов, $U^tU=0$. Как обычно, мы предполагаем, что U имеет *максимальный ранг*, т.е. эти векторы линейно независимы. Наблюдение состоит в том, что m комплексно-сопряжённых векторов, являясь столбцами[6] матрицы U^*, дополняют исходные m векторов до полного базиса. Действительно, эти векторы порождают m-мерную плоскость, ортогональную исходной, поскольку $\overline{U}^*U=U^tU=0$. Напомним, что мы уже использовали данное наблюдение в Разделе 1.2.2 предыдущей главы. Следующее разбиение единицы является следствием этого факта:

$$U\big(\overline{U}U\big)^{-1}\overline{U}+\overline{U}^t\big(\overline{U}U\big)^{-1t}U^t=\mathbb{1}_{2m}\,. \tag{2.2.26}$$

Это утверждение означает, что сумма проекторов на ортогональные подпространства равна единичному оператору. Удобно ввести обозначение

$$P:=\big(\overline{U}U\big)^{-1}\overline{U}\,. \tag{2.2.27}$$

В этих терминах разбиение единицы принимает вид

$$UP+(UP)^t=\mathbb{1}_{2m}\,. \tag{2.2.28}$$

Теперь, подставляя разбиение единицы между двумя B в BB^t, находим, что каждый из двух членов содержит BU и, следовательно, обращается в нуль на поверхности связей. Это автоматически приводит к $BV^t-VB^t\simeq 0$, потому что оно связано преобразованием суперсимметрии с BB^t, т.е. $\delta\big(BB^t\big)=\epsilon_1\big(BV^t-VB^t\big)$. Однако это можно также доказать

[6]Здесь и далее звёздочкой * мы обозначаем обычное комплексное сопряжение (без транспонирования).

напрямую, дважды вставив разбиение единицы и используя $\overline{\mathcal{W}}$-связь $BU = 0$:

$$BV^t - VB^t = BP^t(VU)^t - VUPB^t \simeq \{\text{используя } VU + BC \simeq 0\} \simeq$$
$$\simeq BP^tC^tB^t + BCPB^t = BP^t\left(C^tU + U^tC\right)PB^t \simeq 0\,, \tag{2.2.29}$$

где на последнем шаге мы использовали $\overline{\mathcal{Q}}$-связь $C^tU + U^tC = 0$, которая следует из (2.2.22). Таким образом, доказательство суперсимметричной инвариантности квазилинейной формулировки первого порядка в случае максимального ортогонального грассманиана завершено.

Резюмируя вышесказанное, мы построили суперсимметричную формулировку для сигма-моделей с таргет-пространствами $\mathsf{OGr}(1,n)$ и $\mathsf{OGr}(m,2m)$ в формализме Гросса-Невё. Окончательное действие, инвариантное относительно преобразований суперсимметрии (2.1.16), в обоих случаях можно записать в виде

$$\mathcal{S} = \int \mathrm{d}^2z\,\mathrm{Tr}\Big[2\big(V\circ\overline{D}U + B\circ\overline{D}C\big) + i\overline{\mathcal{R}}\,U^t\circ U + i\overline{\mathcal{W}}\,B\circ U + \\ + i\overline{\mathcal{Q}}\left(C^t\circ U + U^t\circ C\right) - \text{к.с.}\Big] + \frac{\kappa}{4\pi}\int \mathrm{d}^2z\,\mathrm{Tr}\left(\mathcal{J}_{\mathsf{so}}\overline{\mathcal{J}}_{\mathsf{so}}\right)\,, \tag{2.2.30}$$

где мы восстановили матрицу $\mathbb{h}_n$, входящую через скалярное произведение $\circ$. В случае квадрики $\mathsf{OGr}(1,n)$ лагранжиан можно упростить, избавившись от следа и используя тот факт, что два слагаемых в $\overline{\mathcal{Q}}$-связи идентичны.

Для моделей ортогональных грассманианов дополнительные (по сравнению с унитарным случаем) связи, задаваемые нединамическими калибровочными полями $\overline{\mathcal{R}}$ и $\overline{\mathcal{Q}}$, порождают дополнительные калибровочные преобразования. В результате полная калибровочная группа действует на поля следующим образом:

$$U \to Ug\,,\quad V \to g^{-1}V + q\,U^t + e\,B + y\,C^t\,, \tag{2.2.31}$$
$$C \to Cg + Ue\,,\quad B \to g^{-1}B + y\,U^t\,, \tag{2.2.32}$$
$$g \in \mathbf{GL}(m,\mathbb{C})\,,\quad q \in \mathrm{Mat}_m^{\mathrm{symm}}\,,\quad e \in \Pi\mathrm{Mat}_m\,,\quad y \in \Pi\mathrm{Mat}_m^{\mathrm{symm}}\,. \tag{2.2.33}$$

Здесь (g,e) и (q,y) являются супердублетами, соответствующими структуре калибровочной группы (2.1.19). С точки зрения (2.1.19), бозонная группа в этом случае равна

$$G_{\mathbb{C}} = \mathbf{GL}(m,\mathbb{C}) \ltimes \mathrm{Mat}_m^{\mathrm{symm}}\,. \tag{2.2.34}$$

2.2.2 Неэкстремальные грассманианы: препятствия к суперсимметрии.

Отметим, что в общем случае (т.е. для произвольного ортогонального грассманиана) BB^t и $BV^t - VB^t$ нельзя свести к нулю с помощью уравнений движения. Но можно спросить: что, если добавить эти ограничения вручную, как мы делаем для BU и $C^tU + U^tC$? Это, ко-

нечно, можно сделать, но это разрушает геометрическую интерпретацию поля U как аналога однородных координат на грассманиане. Причина в том, что такие новые связи порождают дополнительные калибровочные преобразования $U \to U + B^t k$, где k — фермионная матрица $m \times m$, в результате чего фазовое пространство больше не является кокасательным расслоением. Более того, если мы ослабим условие максимальности ранга U, вышеприведённое доказательство того, что BB^t и $BV^t - VB^t$ обращаются в нуль на поверхности связей для минимального и максимального ортогональных грассманианов, также не сработает, поскольку в доказательстве мы использовали разбиение единицы (2.2.26).

Таким образом, ослабляя условие на ранг U и/или добавляя дополнительные связи, мы получаем самосогласованные суперсимметричные модели типа Гросса-Невё, которые, однако, по-видимому не имеют геометрической интерпретации.

2.2.3 Фиксация калибровки.

Последний момент, который мы хотим здесь обсудить, — это введение удобной калибровки. Следуя общей логике, мы знаем, что для перехода к геометрической формулировке нам нужно исключить алгебраически на уравнениях движения вспомогательные поля (например, "импульсы" V и $\overline{V}$). Но, как мы обсуждали в предыдущей главе, квадратичная форма по $(V, \overline{V})$ в части взаимодействия действия (2.2.30) вырождена. Это верно и для суперсимметричной системы. Поэтому, аналогично КХД, для интегрирования по $(V, \overline{V})$ нам нужно фиксировать калибровку. Простейшая подходящая калибровка для бозонного сектора есть[7]

$$\overline{U}U = \mathbb{1}_m \qquad \text{и} \qquad \mathcal{F} := V^*U + (V^*U)^t = 0\,. \tag{2.2.35}$$

Последнее условие можно выбрать, поскольку калибровочное преобразование $V \to V + q\,U^t$ сдвигает симметричную часть V^*U на симметричную матрицу q. Фермионными суперпартнёрами для этих калибровок являются $\overline{C}U = 0$ и $B^*U + (B^*U)^t = 0$. Хотя, поскольку $\delta\mathcal{F} \neq 0$, наша калибровка наивно нарушает суперсимметрию, её можно восстановить с помощью *дополнительного калибровочного преобразования*. Действительно, предположим, что вариация относительно суперсимметричных преобразований имеет вид $\delta\mathcal{F} = 2R$, где R — симметричная матрица. Тогда можно сделать дополнительное калибровочное преобразование $\delta' V = -R^*U^t$, так что модифицированное преобразование суперсимметрии $\delta + \delta'$ оставит калибровочное ограничение неизменным. Конечно, в нашей суперсимметричной модели (2.2.30) необходимо выбрать больше калибровочных условий. В дополнение к $\overline{U}U = \mathbb{1}_m$ и $\mathcal{F} = 0$, нужно ввести их соответствующие суперпартнёры. Однако аналогичное рассуждение можно провести и для них.

[7] Здесь соглашения немного отличаются от (1.2.24).

2.2.4 Симплектические грассманианы.

Суперсимметризация симплектических грассманианов $\mathsf{SGr}(m,2n)$ может быть построена параллельно ортогональным. В этом разделе мы разберём некоторые незначительные различия от ортогонального случая и приведём окончательные ответы. Напомним результат предыдущей главы, что действие чисто бозонной сигма-модели на симплектическом грассманиане $\mathsf{SGr}(m,2n)$ в квазилинейной формулировке первого порядка имеет вид

$$\mathcal{S}[U,V]=\int \mathrm{d}^2z\,\Big[2\Big(\mathrm{Tr}\big(V\circ\overline{D}U\big)+i\overline{\mathcal{R}}\,U^t\circ U-\text{к.с.}\Big)+\frac{\kappa}{4\pi}\mathrm{Tr}\left(J_{\mathsf{sp}}\overline{J}_{\mathsf{sp}}\right)\Big]\,. \tag{2.2.36}$$

На протяжении этого раздела кружок $\circ$ обозначает матричное умножение со вставкой кососимметрической невырожденной матрицы ω_{2n} размера $2n\times 2n$, которую, напомним, можно рассматривать как симплектическую форму в $\mathbb{C}^{2n}$. Глобальный ток здесь равен

$$J_{\mathsf{sp}}=2\pi\left(UV+V^tU^t\right)\omega_{2n}\,. \tag{2.2.37}$$

Заметим, что это действие отличается от (2.2.20) заменой[8] $\mathbb{h}_n\to\omega_{2n}$ и дополнительным знаком в токе. Таким образом, мы приходим к рассмотрению следующего фермионного расширения действия (симплектический аналог (2.2.30)):

$$\begin{aligned}\mathcal{S}=\int \mathrm{d}^2z\,\mathrm{Tr}\Big[2\big(V\circ\overline{D}U+B\circ\overline{D}C\,\big)+i\overline{\mathcal{R}}\,U^t\circ U+i\overline{\mathcal{W}}\,B\circ U+\\ +i\overline{\mathcal{Q}}\left(C^t\circ U+U^t\circ C\right)-\text{к.с.}\Big]+\frac{\kappa}{4\pi}\int \mathrm{d}^2z\,\mathrm{Tr}\left(\mathcal{J}_{\mathsf{sp}}\overline{\mathcal{J}}_{\mathsf{sp}}\right).\end{aligned} \tag{2.2.38}$$

Здесь "суперток" Каца-Муди равен

$$\mathcal{J}_{\mathsf{sp}}=2\pi\big(UV-CB\big)\omega_{2n}+2\pi\big(UV-CB\big)^t\omega_{2n}\,. \tag{2.2.39}$$

Как и в ортогональном случае, препятствия к суперсимметричной инвариантности действия (2.2.38) пропорциональны $B\circ B^t$ и его суперпартнёру $B\circ V^t-V\circ B^t$. Ключевое различие между симплектическим и ортогональным случаями состоит в том, что в общем случае действие для минимального симплектического грассманиана $\mathsf{SGr}(1,2n)$ больше не является суперсимметричным[9]. Причина в том, что, хотя B^t — (фермионный) вектор, билинейная комбинация $B\circ B^t=B\omega_{2n}B^t$ в общем случае больше не обращается в нуль, так как ω_{2n} кососимметрична. Этого следовало ожидать, поскольку $\mathsf{SGr}(1,2n)$ не является симметрическим пространством. В результате формализм Гросса-Невё не порождает кэлерову метрику на таргет-пространстве, которая необходима для суперсимметрии. Можно доказать, что $B\circ B^t$ и $B\circ V^t-V\circ B^t$ обращаются в нуль (опять же, в предположении максимальности ранга

[8]Так что, например, в этом разделе $V\circ U$ означает $V\omega_{2n}U$.

[9]За исключением специального случая $n=1$, поскольку $\mathsf{SGr}(1,2)\simeq\mathbb{CP}^1$. Мы подробно обсуждаем модель $\mathbb{CP}^1$ в разделе 2.3.1.

U) только в максимальном (лагранжевом) случае[10] $\mathsf{SGr}(m,2m)$. Доказательство этого факта полностью параллельно доказательству для ортогональных грассманианов из предыдущего раздела, поэтому мы позволим себе опустить данную выкладку.

Калибровочная группа модели действует на поля аналогично (2.2.31-2.2.33), с той лишь разницей, что в симплектическом случае

$$q \in \mathrm{Mat}_m^{\text{skew-symm}} \quad \text{и} \quad y \in \Pi\mathrm{Mat}_m^{\text{skew-symm}},$$

так что соответствующие матрицы являются кососимметрическими, а не симметрическими.

2.3 Максимальные грассманианы и "минимальные фермионы"

В этом разделе мы сосредоточимся на геометрии фермионных степеней свободы для $\mathcal{N}=(2,2)$ сигма-моделей на максимальных грассманианах в квазилинейной формулировке первого порядка. Мы покажем, что геометризация фермионов здесь — это не просто упражнение в абстрактной математике, но и приводит к очень конкретным теоретико-полевым результатам.

Стандартная формулировка суперсимметричных сигма-моделей (см. Главу 13 в [87]) с кэлеровыми таргет-пространствами с необходимостью диктует, что фермионы должны быть сечениями касательного расслоения таргет-пространства (со сдвинутой фермионной чётностью в каждом слое). Наивное объяснение этого факта состоит в том, что фермионы несут векторные индексы, которые сворачиваются с символами Кристоффеля, тензором Римана и так далее.

В терминах нашего формализма этот факт имеет интересные следствия в случаях максимальных грассманианов $\mathsf{OGr}(m,2m)$ и $\mathsf{SGr}(m,2m)$. Стандартный фольклорный результат проективной алгебраической геометрии гласит, что справедливы следующие изоморфизмы векторных расслоений (подробности см. в Приложении Б)

$$\mathrm{T}\mathsf{OGr}(m,2m) \simeq \left(\bigwedge^2 \mathcal{S}^\vee\right)\Big|_{\mathsf{OGr}(m,2m)}, \quad \mathrm{T}\mathsf{SGr}(m,2m) \simeq \left(\mathrm{Sym}^2\mathcal{S}^\vee\right)\Big|_{\mathsf{SGr}(m,2m)}. \tag{2.3.40}$$

Здесь T обозначает касательное расслоение, $\mathcal{S}$ — тавтологическое расслоение[11] над грассманианом, а $\mathcal{S}^\vee$ — двойственное к нему (оба ранга m).

Поскольку фермионы принимают значения в касательном расслоении, из (2.3.40) следует, что они должны представляться кососимметрическими (в случае $\mathsf{OGr}(m,2m)$) и симмет-

[10] Это также ожидаемый результат, поскольку среди симплектических грассманианов только лагранжевы являются эрмитовыми симметрическими.

[11] То есть слой над m-мерной плоскостью, понимаемой как точка грассманиана, есть эта же m-мерная плоскость, понимаемая уже как векторное пространство.

рическими (в случае $\mathsf{SGr}(m,2m)$) матрицами $m\times m$. Это прекрасно согласуется с подсчётом степеней свободы в обеих теориях. Принимая во внимание действие калибровочной группы (2.2.31-2.2.33) и её симплектического аналога, легко найти, что число фермионных степеней свободы в ортогональном случае равно $\frac{m(m-1)}{2}$ (и $\frac{m(m+1)}{2}$ в симплектическом случае). Очевидно, это совпадает с числом компонент кососимметрических и симметрических матриц $m\times m$ соответственно. Однако в лагранжианах (2.2.30) и (2.2.38) фермионы[12] являются матрицами $m\times 2m$, и описанная выше структура касательного расслоения не проявляется явно. Основная цель этого раздела — построить формулировку, которая отражает геометрию касательного расслоения более явным образом.

Прежде чем переходить к общему случаю, рассмотрим простейший пример лагранжева грассманиана $\mathsf{SGr}(1,2)\simeq\mathbb{CP}^1$ без взаимодействий, т.е. на уровне свободных $\beta\gamma$-систем.

2.3.1 Минимальное взаимодействие в модели $\mathbb{CP}^1$.

Рассмотрим сумму голоморфной и антиголоморфной копий суперсимметричных искривлённых $\beta\gamma$-систем с таргет-пространством $\mathbb{CP}^1$. Лагранжиан этой модели, как ясно из предыдущих разделов, имеет вид

$$\mathcal{S}=\int \mathrm{d}^2z\Big(v\cdot\overline{D}u+b\cdot\overline{D}c+i\overline{\mathcal{W}}(b\cdot u)-\text{к.с.}\Big)\,. \tag{2.3.41}$$

Здесь u — двухкомпонентный вектор, представляющий однородные координаты на $\mathbb{CP}^1$, v — ковектор (“сопряжённый импульс” к однородным координатам), фермионы b,c — их суперпартнёры соответственно, а точка обозначает обычное скалярное произведение (свёртку индексов). Определение ковариантных производных такое же, как в предыдущих разделах.

Действие (2.3.41) является “свободным” пределом действия (2.2.38) для лагранжевых грассманианов в частном случае $m=1$ (с точностью до переопределения $v_j\to v_i\,\omega_{ij}$). Действительно, в случае $m=1$ связи $U^t\circ U=0$ и $C^t\circ U+U^t\circ C=0$ являются тождествами и просто исчезают из действия. В разделе 2.2 мы уже доказали суперсимметрию действия, но связь фермионов b и c с касательным расслоением к сфере осталась неочевидной. Наша цель — сделать эту связь явной.

Напомним некоторый соответствующий математический контекст[13]. Напомним, что линейные расслоения $\mathscr{O}(n)$ над $\mathbb{CP}^1$ определяются склеивающей функцией $g_{12}=\left(\dfrac{u_2}{u_1}\right)^n$ между двумя стандартными картами $\{u_1\neq 0\}$ и $\{u_2\neq 0\}$. Для $n>0$ это расслоение имеет глобальные голоморфные сечения, которые можно отождествить с однородными полиномами степени n от двух переменных (однородных координат на $\mathbb{CP}^1$). Стандартный результат комплексной алгебраической геометрии гласит, что касательное расслоение $\mathrm{T}\mathbb{CP}^1$ естествен-

[12]Точнее, здесь мы обсуждаем фермионы “конфигурационного пространства”. Полное фазовое пространство, в котором живут все поля, следует рассматривать как кокасательное расслоение вида $\mathrm{T}^*\big(\Pi\mathsf{TOGr}(m,2m)\big)$ или $\mathrm{T}^*\big(\Pi\mathsf{TSGr}(m,2m)\big)$.

[13]Основы структуры голоморфных векторных расслоений над комплексными проективными пространствами см. в [55; 75; 122].

но изоморфно расслоению $\mathscr{O}(2)$. Напомним идею доказательства. Снова рассмотрим карту с $u_1 \neq 0$ и локальной координатой $z = \frac{u_2}{u_1}$. Векторное поле ∂_z естественно отождествить с сечением касательного расслоения в этой карте. Предположим, $w = \frac{u_1}{u_2}$ — координата во второй карте, так что на пересечении мы имеем $w = z^{-1}$. Тогда $\partial_z = -w^2\partial_w$. Таким образом, сечение касательного расслоения преобразуется в точности как однородный полином степени 2, т.е. как сечение $\mathscr{O}(2)$ (дополнительный минус можно убрать заменой знака $w \to -w$). В этих обозначениях тавтологическое расслоение $\mathcal{S}$ есть, как известно, $\mathscr{O}(-1)$, так что

$$\mathrm{T}\mathbb{CP}^1 = \mathscr{O}(2) \simeq \left(\mathcal{S}^\vee\right)^{\otimes 2}, \tag{2.3.42}$$

где $\mathcal{S}^\vee$ — двойственное к тавтологическому линейному расслоению. Это согласуется с общей формулой (2.3.40) в частном случае $m = 1$.

Найдём формулировку модели (2.3.41), в которой расслоение $\mathscr{O}(2)$ явно параметризовало бы фермионы. Сначала мы можем разрешить связь $b \cdot u = 0$ как

$$b_i = h\,\omega_{ij}u_j\,, \tag{2.3.43}$$

где индексы $i, j \in \{1, 2\}$ помечают компоненты (ко)векторов, ω_{ij} представляет стандартную кососимметрическую матрицу $\omega = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, а h — новое фермионное поле. Введём другое фермионное поле с помощью формулы

$$f = c_i\,\omega_{ij}\,u_j\,. \tag{2.3.44}$$

При калибровочном преобразовании $u_i \to gu_i$, где $g \in \mathbb{C}^*$, наши поля преобразуются как

$$v_i \to g^{-1}v_i, \qquad c_i \to gc_i, \qquad b_i \to g^{-1}b_i, \qquad f \to g^2 f, \qquad h \to g^{-2}h. \tag{2.3.45}$$

Заметим, что поле f преобразуется в точности как сечение $\mathscr{O}(2)$. Таким образом, мы можем заключить, что поля в (геометрической) формулировке теории с фазовым пространством $\mathrm{T}^*\Pi\mathscr{O}(2)$ — это в точности $\{u_i, v_i, f, h\}$. Чтобы найти формулировку в терминах этих полей, подставим выражение (2.3.43) для b_i в (2.3.41), проинтегрируем по частям и сделаем замену переменных $v_j \to v_j + h\,c_i\,\omega_{ij}$. После этих манипуляций действие можно переписать как

$$\mathcal{S} \simeq \int \mathrm{d}^2z\Big(v_i\overline{D}u_i + h\overline{D}f - \text{к.с.}\Big)\,, \tag{2.3.46}$$

где мы определили $\overline{D}f = \overline{\partial}f - 2i\overline{\mathcal{A}}f$. Именно это простое действие и отражает геометрическую структуру бозонов и фермионов. Заметим, что ковариантная производная включает правильный заряд 2 поля f относительно калибровочной группы.

Можно проверить, что эта модель также суперсимметрична. Однако мы не будем обсуждать это отдельно: в принципе, это следует из суперсимметрии исходного действия и

эквивалентности между двумя теориями. Вместо этого мы применим идеи, представленные в этом разделе, к обсуждению максимальных ортогональных и симплектических грассманианов и докажем суперсимметрию в этом более общем случае.

2.3.2 Квантовомеханическая эквивалентность $\mathbb{CP}^1$ моделям.

В предыдущем разделе мы утверждаем, что модели (2.3.41) и (2.3.46) эквивалентны на классическом уровне. Хотя доказать эквивалентность этих моделей как квантовых теорий поля может быть довольно непросто, её можно проверить в упрощённом квантовомеханическом контексте, то есть в контексте редукции $z, \bar{z} \to t$ к одному измерению. Редуцированные действия для голоморфных секторов (2.3.41) и (2.3.46) соответственно равны

$$\mathcal{S}_1 = \int \mathrm{d}t \Big(v_i \dot{u}_i + b_i \dot{c}_i - i\overline{\mathcal{A}}(v_i u_i + b_i c_i) + i\overline{\mathcal{W}}(b_i u_i) \Big) \,, \tag{2.3.47}$$

$$\mathcal{S}_2 = \int \mathrm{d}t \Big(v_i \dot{u}_i + h\dot{f} - i\overline{\mathcal{A}}(v_i u_i + 2hf) \Big) \,, \tag{2.3.48}$$

где $\dot{u} := \partial_t u$. Калибровочные преобразования задаются формулами (2.3.45). В результате мы получили механические системы со связями первого рода. В этом разделе мы докажем, что дираковское квантование этих теорий приводит к изоморфным физическим секторам соответствующих гильбертовых пространств.

Начнём с квантования первой теории (2.3.47). Гильбертово пространство $\mathscr{H}$ состоит из следующих функций:

$$\mathscr{H} \simeq \Big\{ \Psi(u,c) = \psi^{(0)}(u) + c_i \psi_i^{(1)}(u) + c_i c_j \psi_{ij}^{(2)}(u) \Big\} \,. \tag{2.3.49}$$

Канонически сопряжённые бозонные и фермионные переменные при квантовании представляются производными $v_i = -i\dfrac{\partial}{\partial u_i}$ и $b_i = -i\dfrac{\partial}{\partial c_i}$. Квантовые связи, определяющие калибровочно-инвариантный физический сектор $\mathscr{H}_{\text{phys}}$, имеют вид

$$\left(u_i \frac{\partial}{\partial u_i} - c_i \frac{\partial}{\partial c_i} \right) \Psi_{\text{phys}}(u,c) = 0 \,, \qquad u_i \frac{\partial}{\partial c_i} \Big(\Psi_{\text{phys}}(u,c) \Big) = 0 \,. \tag{2.3.50}$$

Первая связь в (2.3.50) говорит, что функции $\psi^{(k)}(u)$ имеют степень однородности k, где $k = 0, 1, 2$. Это обеспечивает инвариантность $\Psi_{\text{phys}}(u,c)$ относительно калибровочных преобразований $u \to \lambda u$, $c \to \lambda c$, где $\lambda \in \mathbb{C}^*$. Вторая связь в (2.3.50) приводит к уравнениям

$$u_i \psi_i^{(1)} = 0 \,, \qquad u_i c_j \psi_{ij}^{(2)} = \Big[\text{используя } \psi_{ij}^{(2)} = -\psi_{ji}^{(2)} \Big] = (u_1 c_2 - u_2 c_1) \psi_{12}^{(2)} = 0 \,. \tag{2.3.51}$$

Первое уравнение может быть разрешено как $\psi_i^{(1)} = \omega_{ij} u_j \psi^{(1)}$ (так же как в (2.3.43)), в то время как второе означает, что $\psi_{ij}^{(2)} = 0$. Подставляя эти решения в (2.3.49), получаем

$$\mathscr{H} \simeq \Big\{ \Psi(u,c) = \psi^{(0)}(u) + \big(c_i \omega_{ij} u_j \big) \psi^{(1)}(u) = \psi^{(0)}(u) + f\psi^{(1)}(u) \Big\} \,, \tag{2.3.52}$$

где мы использовали определение (2.3.44). Заметим, что при $\mathbb{C}^*$ калибровочном преобразовании переменная f масштабируется как $f \mapsto \lambda^2 f$. В этих терминах условие на физический сектор $\mathscr{H}_{\rm phys}$ принимает вид

$$\left(u_i \frac{\partial}{\partial u_i} - 2f \frac{\partial}{\partial f}\right) \Psi_{\rm phys}(u, c) = 0\,, \tag{2.3.53}$$

потому что $\psi^{(1)}$ имеет степень однородности 2. Легко видеть, что (2.3.52) и (2.3.53) определяют физический сектор теории (2.3.48), что завершает доказательство квантовомеханической эквивалентности между (2.3.47) и (2.3.48).

2.3.3 Максимальный ортогональный грассманиан.

Чтобы найти искомую формулировку с геометрическими фермионами для суперсимметричной сигма-модели с таргет-пространством $\mathsf{OGr}(m, 2m)$, мы начнём с действия (2.2.30). Мы будем использовать ту же стратегию, что и в предыдущем разделе. Весь анализ из этого раздела естественным образом переносятся на случай лагранжевых грассманианов.

Ключевой момент заключается в том, что в максимальном случае ограничение $B \circ U = 0$ может быть явно разрешено, как и в случае $\mathbb{CP}^1$ выше. Действительно, если $U^t \circ U = 0$ и U имеет максимальный ранг m, то $B \circ U = 0$ влечёт

$$B = H U^t \tag{2.3.54}$$

с некоторым фермионным матричным полем H размера $m \times m$. Используя часть калибровочной симметрии (2.2.32) $B \to B - y\, U^t$ (где y симметрична), можно сделать H кососимметрическим. Мы также вводим новое фермионное матричное поле F размера $m \times m$:

$$F = U^t \circ C\,. \tag{2.3.55}$$

Заметим, что из связи $C^t \circ U + U^t \circ C = 0$ естественно следует $F + F^t = 0$. Подставляя новые кососимметрические поля F и H в действие (2.2.30), выполняя нелинейный сдвиг бозонного поля $V \to V - (CH)^t$ и интегрируя по частям, получаем искомое действие

$$\mathcal{S} \simeq \int \mathrm{d}^2 z\, \mathrm{Tr}\left[2\big(V \circ \overline{D} U + H \overline{D} F\big) + i\overline{\mathcal{R}}\, U^t \circ U - \text{к.с.}\right] + \frac{\kappa}{4\pi} \int \mathrm{d}^2 z\, \mathrm{Tr}\left(J_{\mathsf{so}} \overline{J}_{\mathsf{so}}\right). \tag{2.3.56}$$

Преимущество этой формулировки в том, что член взаимодействия значительно упрощается. Действительно, глобальный "суперток" (2.2.23) $\mathcal{J}_{\mathsf{so}}$ после наших манипуляций превратился в чисто бозонный $J_{\mathsf{so}} = 2\pi\big(UV - V^t U^t\big)\mathbb{h}_{2m}$. Таким образом, мы получили бозонную модель Гросса-Невё, минимально взаимодействующую с кососимметрическими (а значит "геометрическими") фермионами через калибровочное поле.

Ковариантная производная $\overline{D} F = \overline{\partial} F + i\overline{\mathcal{A}}^t F - i F \overline{\mathcal{A}}$ в (2.3.56) согласована с кососим-

метрическим представлением поля F. Уравнение движения калибровочного поля $\overline{\mathcal{A}}$ даёт соответствующий аналог связи (2.1.4):

$$V \circ U + 2HF = 0\,. \tag{2.3.57}$$

2.3.4 Симметрии в формулировке "геометрических фермионов".

Группа калибровочной симметрии в этой формулировке есть (2.2.34) (без какой-либо дополнительной фермионной части), и соответствующие преобразования в этой формулировке суперсимметричной сигма-модели для $\mathsf{OGr}(m,2m)$ (2.3.56) имеют вид[14]

$$U \to Ug\,, \quad V \to g^{-1}V + q\,U^t\,, \tag{2.3.58}$$

$$F \to g^t F g\,, \quad H \to g^{-1}Hg^{-1t}\,, \tag{2.3.59}$$

$$g \in \mathbf{GL}(m,\mathbb{C})\,, \quad q \in \mathrm{Mat}_m^{\mathrm{symm}}\,. \tag{2.3.60}$$

Суперсимметрия модели (2.3.56) уже не является явной, но соответствующие преобразования могут быть выведены из (2.1.16). Они имеют следующий нелинейный вид

$$\delta V = \epsilon_2(DH)U^t + 2\epsilon_2 HDU^t - \epsilon_1 PV^t FP\,, \qquad \delta H = -\epsilon_1\frac{1}{2}\big(VP^t - PV^t\big)\,, \tag{2.3.61}$$

$$\delta U = \epsilon_1 P^t F\,, \qquad \delta F = -\epsilon_2 U^t DU\,. \tag{2.3.62}$$

Здесь, как обычно, для простоты мы положили $\mathbb{h}_{2m} = \mathbb{1}_{2m}$. Вывод этих преобразований и проверку инвариантности действия мы оставляем для Приложения B. Эти преобразования также имеют ту особенность, что алгебра суперсимметрии замыкается с точностью до калибровочных преобразований.

2.3.5 Лагранжев грассманиан.

Представление суперсимметричной сигма-модели на лагранжевом грассманиане как модели с "минимальными геометрическими фермионами" параллельно ортогональному случаю. Путём небольшой модификации аргументов из предыдущего раздела можно доказать, что действие (2.2.38), соответствующее $\mathsf{SGr}(m,2m)$, эквивалентно

$$\mathcal{S} \simeq \int \mathrm{d}^2z\,\mathrm{Tr}\Big[2\big(V\circ\overline{D}U + H\overline{D}F + i\overline{\mathcal{R}}\,U^t\circ U - \text{к.с.}\Big] + \frac{\kappa}{4\pi}\int \mathrm{d}^2z\,\mathrm{Tr}\left(J_{\mathsf{sp}}\overline{J}_{\mathsf{sp}}\right). \tag{2.3.63}$$

Здесь H и F — симметрические фермионные матричные поля $m\times m$, $\circ$ обозначает свёртку с симплектической матрицей ω_{2m}, а J_{sp} — бозонная часть глобального супертока $\mathcal{J}_{\mathsf{sp}}$.

[14] Калибровка, в которой H кососимметричен, уже зафиксирована.

2.3.6 Явная эквивалентность $\mathbb{CP}^1$ сигма-моделям.

Мы вывели суперсимметричные действия с "минимальными геометрическими фермионами" (в том смысле, что они явно принимают значения в касательном расслоении) из суперсимметризованных действий Гросса-Невё. Однако мы хотели бы проверить себя, что эти новые модели действительно эквивалентны сигма-моделям. В этом разделе путём прямого исключения вспомогательных полей мы доказываем, что в простейших случаях $\mathsf{OGr}^+(2,4) \simeq \mathbb{CP}^1$ и $\mathsf{SGr}(1,2) \simeq \mathbb{CP}^1$ наши модели с минимальными фермионами эквивалентны хорошо известной суперсимметричной сигма-модели $\mathbb{CP}^1$. Действие этой модели в геометрической форме имеет вид (см., например, раздел 3 в [34])

$$\mathcal{S}_{\mathsf{CP}^1} = \int \mathrm{d}^2 z \left(g_{u\bar{u}} \big| \overline{\partial} u \big|^2 + b \overline{\nabla} c - \bar{c}\, \nabla \bar{b} + g^{u\bar{u}} g^{u\bar{u}} R_{u\bar{u}u\bar{u}}\, bc\bar{b}\bar{c} \right) . \tag{2.3.64}$$

Здесь $\mathrm{d}s^2 = g_{u\bar{u}}\, \mathrm{d}u \mathrm{d}\bar{u}$ — метрика Фубини–Штуди на $\mathbb{CP}^1$ (или стандартная метрика на сфере, записанная в комплексных координатах), ∇ и $\overline{\nabla}$ — компоненты связности Леви-Чивиты, построенной по g, а $R_{u\bar{u}u\bar{u}}$ — единственная ненулевая компонента тензора кривизны Римана. Явные формулы в удобной нормировке таковы:

$$g_{u\bar{u}} = \frac{1}{2\pi\kappa \big(1+|u|^2\big)^2} , \qquad g^{u\bar{u}} g^{u\bar{u}} R_{u\bar{u}u\bar{u}} = 4\pi\kappa , \tag{2.3.65}$$

$$\overline{\nabla} c = \overline{\partial} c + c\, \Gamma^u_{uu} \overline{\partial} u , \qquad \nabla \bar{b} = \partial \bar{b} - \bar{b}\, \Gamma^{\bar{u}}_{\bar{u}\bar{u}} \partial\, \bar{u} , \tag{2.3.66}$$

$$\Gamma^u_{uu} = -\frac{2\,\bar{u}}{1+|u|^2} , \qquad \Gamma^{\bar{u}}_{\bar{u}\bar{u}} = -\frac{2u}{1+|u|^2} , \tag{2.3.67}$$

где Γ^u_{uu} и $\Gamma^{\bar{u}}_{\bar{u}\bar{u}}$ — соответствующие символы Кристоффеля.

Простейший частный случай действия (2.3.63) соответствует $m = 1$, т.е. таргет-пространству $\mathsf{SGr}(1,2)$. Но существует также очевидный изоморфизм $\mathsf{SGr}(1,2) \simeq \mathbb{CP}^1$, см. Раздел 2.3.1. Таким образом, естественно предположить, что такая теория действительно эквивалентна суперсимметричной сигма-модели $\mathbb{CP}^1$ (2.3.64). Докажем это.

Параметризуя наши поля как

$$V = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 \end{pmatrix} , \qquad U = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} , \qquad H := b , \qquad F := c \tag{2.3.68}$$

и выбирая $\omega_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, мы можем переписать действие модели $\mathsf{SGr}(1,2)$ в виде

$$\begin{aligned} \mathcal{S} = \int \mathrm{d}^2 z \Big[& 2\Big(v_1 \overline{\partial} u_2 - v_2 \overline{\partial} u_1 + b \overline{\partial} c \Big) - i\overline{\mathcal{A}} \big(v_1 u_2 - v_2 u_1 + 2bc \big) - c.c. + \\ & + 2\pi\kappa \big(|u_1|^2 + |u_2|^2 \big) \big(|v_1|^2 + |v_2|^2 \big) + 2\pi\kappa \big(u_1 \bar{v}_1 + u_2 \bar{v}_2 \big) \big(v_1 \bar{u}_1 + v_2 \bar{u}_2 \big) \Big] . \end{aligned} \tag{2.3.69}$$

Мы можем использовать калибровочную свободу $U \to Ug$, чтобы зафиксировать $u_2 = 1$.

Исключая v_1 и v_2 с помощью уравнений движения, получаем

$$\mathcal{S} = 2\int \mathrm{d}^2 z \left(\alpha \big| \,\overline{\partial} u\,\big|^2 + \big(b\,\overline{\partial}\, c + \beta\, bc - c.c. \big) + \gamma\, bc\bar{b}\bar{c} \right), \tag{2.3.70}$$

где мы переобозначили $u_1 := u$, и

$$\alpha = \frac{1}{2\pi\kappa} \frac{1}{\big(1+|u|^2\big)^2}\,, \qquad \beta = -\frac{2\,\bar{u}\,\overline{\partial} u}{1+|u|^2}\,, \qquad \gamma = 4\pi\kappa\,. \tag{2.3.71}$$

С точностью до общего множителя это действие совпадает с (2.3.64).

Рассмотрим другой пример. Существует специальный изоморфизм комплексных проективных многообразий[15] $\mathsf{OGr}(2,4) \simeq \mathbb{CP}^1 \bigsqcup \mathbb{CP}^1$. Вообще, максимальные грассманианы $\mathsf{OGr}(m,2m)$ имеют две компоненты связности[16] и одну из них мы обозначаем через $\mathsf{OGr}^+(m,2m)$, таким образом $\mathsf{OGr}^+(2,4) \simeq \mathbb{CP}^1$. Этот изоморфизм означает, что действие (2.3.56) в случае $m=2$ должно быть эквивалентно суперсимметричной сигма-модели $\mathbb{CP}^1$.

Докажем, что действие (2.3.64) эквивалентно (с точностью до нормировки) действию (2.3.56) в случае $\mathsf{OGr}^+(2,4)$. В этом разделе для простоты положим $\mathbb{h}_4 = \mathbb{1}_4$. Обсудим параметризацию полей $\{V, U, H, F\}$:

- Используя калибровочное преобразование $U \to Ug$ и решая условия изотропности для U, получаем

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \frac{u^2-1}{2u} & \frac{i(u^2+1)}{2u} \\ -\frac{i(u^2+1)}{2u} & \frac{u^2-1}{2u} \end{pmatrix}. \tag{2.3.72}$$

  Здесь подразумевается, что мы ограничились данной связной компонентой $\mathsf{OGr}^+(2,4)$, и u играет роль неоднородной координаты на сфере $\mathbb{CP}^1$.

- Фермионные поля F и H являются кососимметрическими матрицами 2×2, поэтому очевидная параметризация такова:

$$F = \begin{pmatrix} 0 & c \\ -c & 0 \end{pmatrix} = c\,\omega_2\,, \qquad H = \begin{pmatrix} 0 & -b \\ b & 0 \end{pmatrix} = -b\,\omega_2\,. \tag{2.3.73}$$

- Заметим, что мы ещё не использовали калибровочную свободу вида $V \to V + q\,U^t$, где q — симметрическая матрица $m\times m$. Разобьём поля V и U на блоки 2×2 следующим образом:

$$V = \begin{pmatrix} V_1 & V_2 \end{pmatrix}, \qquad U = \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \end{pmatrix}. \tag{2.3.74}$$

[15] Мы не рассматриваем "более простой" пример $\mathsf{OGr}(1,2)$, потому что это тривиальное многообразие (дизъюнктное объединение двух точек).

[16] Подробности см. в Приложении А.

Используя тот факт, что в параметризации (2.3.72) $U_1 = \mathbb{1}_2$, и выбирая

$$q = -\frac{1}{2}\left(V_1 + V_1^t\right) ,$$

можно исключить симметрическую часть V_1. Таким образом, можно параметризовать V как

$$V = \begin{pmatrix} 0 & v & v_1 & v_2 \\ -v & 0 & v_3 & v_4 \end{pmatrix} . \tag{2.3.75}$$

Подставляя параметризацию (2.3.72-2.3.75) в действие (2.3.56) и исключая вспомогательные компоненты V, получаем действие

$$\mathcal{S} = 4\int \mathrm{d}^2 z \left(\alpha \big| \,\overline{\partial} u\, \big|^2 + \left(b\,\overline{\partial}\, c + \beta\, bc - c.c. \right) + \gamma\, bc\bar{b}\bar{c} \right) , \tag{2.3.76}$$

где

$$\alpha = \frac{1}{2\pi\kappa}\frac{1}{\left(1+|u|^2\right)^2} , \qquad \beta = \frac{\bar{u}\,\overline{\partial} u\big(1-|u|^2\big)}{|u|^2\big(1+|u|^2\big)} , \qquad \gamma = 4\pi\kappa\,. \tag{2.3.77}$$

Видно, что (2.3.76) классически эквивалентно модели (2.3.64) с точностью до общего множителя 4 и переопределения полей $c \to u^{-1}\, c$, $b \to ub$ в (2.3.64). Последние необходимы, чтобы компенсировать различие в части со связностью при фермионном члене bc. Действительно, используя (2.3.77) и (2.3.67), это различие равно

$$\beta - \Gamma^u_{uu}\overline{\partial} u = \frac{\bar{u}\overline{\partial} u\big(1-|u|^2\big)}{|u|^2\big(1+|u|^2\big)} + \frac{2\,\bar{u}\overline{\partial} u}{1+|u|^2} = \frac{\overline{\partial} u}{u}\,. \tag{2.3.78}$$

Оно может быть устранено указанным выше переопределением полей в (2.3.64), поскольку оно фактически сводится к замене $b\overline{\partial} c \to b\overline{\partial} c - \big(u^{-1}\,\overline{\partial} u\big) bc$. Тем самым завершено доказательство того, что суперсимметричная модель $\mathsf{OGr}^+(2,4)$ с "геометрическими фермионами" (2.3.56) эквивалентна суперсимметричной $\mathbb{CP}^1$ сигма-модели (2.3.64).

Глава 3. Одномерные сигма-модели и спиновые цепочки

В этой главе мы развиваем ещё один формализм исследования сигма-моделей, связывающий их уже не с теориями типа Гросса-Невё, а со спиновыми цепочками. Как утверждалось во введении, этот формализм также имеет глубокие геометрические корни, связанные с симплектической и лагранжевой геометрией, геометрической теорией представлений и так далее. Вклад диссертации в данную тематику заключается в построении суперсимметричных вариантов этой взаимосвязи. Для того чтобы сделать суперсимметричные аспекты наиболее наглядными, в этой главе мы сосредоточимся на простейшем варианте взаимосвязи между сигма-моделями и спиновыми цепочками, а именно на связи одномерной $\mathbb{CP}^1$ сигма-модели с двухузловой $\mathbf{SU}(2)$ спиновой XXX цепочкой. Конкретнее, в данной главе мы строим $\mathcal{N}=2$ и $\mathcal{N}=4$ обобщения (D-модель и K-модель соответственно) соответствующей двухузловой спиновой цепочки в осцилляторных переменных и показываем, что в пределе бесконечного спина они эквивалентны $\mathbb{CP}^1$ сигма-моделям с соответствующей суперсимметрией. Мы также строим $\mathcal{N}=2$ суперполевое описание соответствующих цепочек. Наша стратегия заключается в следующем: сначала мы аксиоматически определим соответствующие спиновые цепочки в осцилляторных переменных, исследуем их свойства, и лишь затем обсудим их связь с суперсимметричными сигма-моделями с таргет-пространством $\mathbb{CP}^1$.

3.1 Спиновая цепочка комплекса Дольбо (D-модель)

Введём набор бозонных операторов рождения/уничтожения $z_1^\alpha, (z_1^\dagger)^\alpha, z_2^\alpha, (z_2^\dagger)^\alpha$ (где $\alpha = 1,2$), а также пару фермионных операторов рождения/уничтожения $\psi_{12}, \psi_{12}^\dagger$, удовлетворяющих каноническим (анти)коммутационным соотношениям[1]

$$\left[z_A^\alpha, (z_B^\dagger)^\beta\right] = \delta_{AB}\,\delta^{\alpha\beta}\,, \qquad A,B=1,2\,, \quad \alpha,\beta=1,2\,, \tag{3.1.1}$$
$$\left\{\psi_{12}, \psi_{12}^\dagger\right\} = 1\,.$$

Далее будем интерпретировать некоторые "усечённые" пространства Фока такого типа осцилляторов как гильбертовы пространства некоторых "коротких" двухузловых спиновых цепо-

[1] Все остальные (градуированные) коммутаторы равны нулю.

чек. В случае бозонных операторов заглавные латинские индексы будут нумеровать узлы спиновой цепочки, тогда как греческие индексы преобразуются по (2-мерному) определяющему представлению $\mathbf{SU}(2)$. Кружок $\circ$ в данной главе будет обозначать свёртку по греческим индексам, т.е. он представляет скалярное произведение в $\mathbb{C}^2$. В свою очередь, фермионы определяют взаимодействия между узлами спиновой цепочки, поэтому их индексы относятся к парам узлов, которые они соединяют. Мы используем данное соглашение о нумерации бозонных и фермионных осцилляторов, так как оно крайне полезно для построение обобщений на случай большего количества узлов (см. [30]).

Постулируем комплексный $\mathcal{N} = 2$ суперзаряд вида[2]

$$\mathcal{Q} = \psi_{12} \left(z_1^\dagger \circ z_2 \right) , \tag{3.1.2}$$

определяющий нашу модель. Очевидно, $\mathcal{Q}^2 = 0$, и мы определяем гамильтониан стандартной формулой

$$\mathcal{H} = \left\{ \mathcal{Q}, \mathcal{Q}^\dagger \right\} . \tag{3.1.3}$$

Это естественно определяет квантовомеханическую систему с гамильтонианом $\mathcal{H}$ и $\mathcal{N} = 2$ суперсимметрией, задаваемой суперзарядом $\mathcal{Q}$.

Классически, вышеуказанные суперзаряды $\mathcal{Q}$ и $\mathcal{Q}^\dagger$ (и, следовательно, гамильтониан) инвариантны относительно $\mathbf{U}(1) \times \mathbf{U}(1)$ симметрии вида

$$z_1 \mapsto e^{i\varphi} z_1 , \qquad z_2 \mapsto e^{i\varphi'} z_2 , \qquad \psi_{12} \mapsto e^{i(\varphi - \varphi')} \psi_{12} , \qquad \varphi, \varphi' \in \mathbb{R} . \tag{3.1.4}$$

Мы можем легко выписать квантовые операторы, порождающие эти преобразования[3]:

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_1 &= z_1^\dagger \circ z_1 + \psi_{12}^\dagger \psi_{12} - p_1 , \\ \mathcal{C}_2 &= z_2^\dagger \circ z_2 - \psi_{12}^\dagger \psi_{12} - p_2 , \end{aligned} \tag{3.1.5}$$

где мы добавили некоторые константы $p_1 := p$ и $p_2 := p+q$, играющие важную роль в дальнейшем. Поскольку операторы $\mathcal{C}_1$ и $\mathcal{C}_2$ коммутируют с $\mathcal{Q}$, мы можем выбрать подпространство полного фоковского пространства вида

$$\mathscr{H}(p_1, p_2) := \left\{ \mathcal{C}_1 = \mathcal{C}_2 = 0 \right\} \tag{3.1.6}$$

не нарушая $\mathcal{N} = 2$ суперсимметрию. Это ограничения на числа заполнения осцилляторов, поэтому они имеют смысл только если $p, q \in \mathbb{Z}$. В дальнейшем мы всегда будем предполагать, что значения этих констант таковы, что эти ограничения допускают непустое множество состояний (конкретно, $p > \max\{0, -q\}$).

[2]Заметим, что если бы мы заменили квадратичную комбинацию z-осцилляторов на линейную, соответствующая система была бы версией суперсимметричного гармонического осциллятора, изученной ещё в [120].

[3]Здесь мы выбираем нормальное упорядочение осцилляторов. Изменение упорядочения соответствует сдвигу значений p и q.

Легко видеть, что пространство $\mathscr{H}(p_1, p_2)$ является *конечномерным* подпространством полного фоковского пространства. По причине, которая станет ясна позже, мы называем эту модель *усечённой* $\mathbb{CP}^1$ *моделью Дольбо* (или кратко *D-моделью*).

Рассмотрим теперь более подробно гамильтониан, возникающий в только что описанной суперсимметричной системе. В явном виде гамильтониан (3.1.3) равен

$$\mathcal{H} = \left(z_1^\dagger \circ z_2\right)\left(z_2^\dagger \circ z_1\right) + (q+2)\psi_{12}^\dagger \psi_{12}\,, \tag{3.1.7}$$

где мы использовали квантовые связи (3.1.6). Для простоты проанализируем чисто бозонный сектор такого гамильтониана, т.е. положим $\psi_{12}^\dagger \psi_{12} = 0$. Тогда квантовые ограничения на числа заполнения принимают вид (F — фермионное число)

$$z_1^\dagger \circ z_1 = p, \quad z_2^\dagger \circ z_2 = p + q\,, \qquad (F = 0)\,, \tag{3.1.8}$$

так что в бозонном секторе разрешены состояния с p осцилляторами типа z_1 и $(p+q)$ осцилляторами типа z_2. Наиболее общее состояние, таким образом, имеет вид

$$|\Phi\rangle = \Phi_{\alpha_1 \cdots \alpha_p | \beta_1 \cdots \beta_{p+q}} (z_1^\dagger)^{\alpha_1} \cdots (z_1^\dagger)^{\alpha_p} (z_2^\dagger)^{\beta_1} \cdots (z_2^\dagger)^{\beta_{p+q}} |0\rangle\,. \tag{3.1.9}$$

Чтобы дать теоретико-представленческое описание волновой функции, введём пространство T^p — p-ю симметрическую тензорную степень фундаментального представления $\mathbf{SU}(2)$ (то есть представление спина $\frac{p}{2}$). Волновая функция (3.1.9) принадлежит, следовательно, тензорному произведению $\mathsf{T}^p \otimes \mathsf{T}^{p+q}$ представлений. Бозонный гамильтониан, действующий в этом пространстве, может быть также записан в более привычном виде:

$$\mathcal{H}_{\text{bos}} = \frac{1}{2}(S_1, S_2) + \text{const}\,, \qquad (S_1, S_2) = \sum_{a=1}^{3} S_1^a S_2^a\,, \tag{3.1.10}$$

где S_1^a и S_2^b — операторы спина $\mathfrak{su}(2)$, действующие в только что описанном пространстве. Их можно записать в явном виде через осцилляторы:

$$S_1^a = z_1^\dagger\, \sigma^a\, z_1\,, \qquad S_2^a = z_2^\dagger\, \sigma^a\, z_2\,, \tag{3.1.11}$$

где σ^a — матрицы Паули. Это известное осцилляторное представление Швингера–Вигнера [136] (обобщения на $\mathfrak{su}(n)$ см. в [2; 28]). Формулу (3.1.10) можно вывести из бозонной части (3.1.7), используя формулу

$$\sum_{m=1}^{3} \sigma^m \otimes \sigma^m = 2\mathbb{P}_{12} - \mathbb{1}\,, \qquad \mathbb{P}_{12}(v \otimes u) := u \otimes v\,. \tag{3.1.12}$$

Действительно,

$$\frac{1}{2}\sum_{m=1}^{3} S^m \otimes S^m = \frac{1}{2}\big(z_1^\dagger \otimes z_2^\dagger\big)\left(\sum_{m=1}^{3} \sigma^m \otimes \sigma^m\right)\big(z_1 \otimes z_2\big) = \big(z_1^\dagger \circ z_2\big)\big(z_2^\dagger \circ z_1\big) - \text{const}\,, \qquad (3.1.13)$$

где мы использовали связи (3.1.8). Так что нашу суперсимметричную спиновую систему действительно можно отождествить с $\mathcal{N} = 2$ обобщением XXX спиновой цепочки на двух узлах и с гильбертовым пространством $\mathsf{T}^p \otimes \mathsf{T}^{p+q}$.

Стандартная теория представлений $\mathbf{SU}(2)$ ("сложение спинов") говорит, что $\mathsf{T}^p \otimes \mathsf{T}^{p+q}$ может быть разложено в прямую сумму неприводимых представлений как $\oplus_{k=0}^{p}\mathsf{T}^{2k+q}$. Соответственно, общее состояние $|\Phi\rangle$ разлагается на компоненты $|\Phi\rangle_k \in \mathsf{T}^{2k+q}$ следующим образом:

$$|\Phi\rangle_k = \Phi^{(k)}_{\alpha_1\cdots\alpha_k\beta_1\cdots\beta_{k+q}}(z_1^\dagger)^{\alpha_1}\cdots(z_1^\dagger)^{\alpha_k}(z_2^\dagger)^{\beta_1}\cdots(z_2^\dagger)^{\beta_{k+q}}\,\Big(\epsilon_{\alpha\beta}(z_1^\dagger)^\alpha(z_2^\dagger)^\beta\Big)^{p-k}|0\rangle\,, \qquad (3.1.14)$$

где $\Phi^{(k)}$ теперь полностью симметрично по всем индексам. Используя этот факт, мы можем подействовать $\mathcal{H}$ на состояние $|\Phi\rangle_k$ и обнаружить, что оно является собственной функцией:

$$\mathcal{H}\,|\Phi\rangle_k = k(k+1+q)\,|\Phi\rangle_k\,, \qquad k = 0,\dots,p\,. \qquad (3.1.15)$$

Удивительный факт в том, что при $q = 0$ в этом выражении узнаётся спектр лапласиана на сфере $\mathbb{CP}^1 \simeq \mathbb{S}^2$, усечённый до уровня первых $(p+1)$ сферических гармоник. В более общем случае $q > 0$ собственные функции являются хорошо известными монопольными гармониками (с монопольным зарядом q), описанными в [105; 147; 161] (см. также[35]). Как мы покажем далее, данный факт не является простым совпадением.

Спектр (3.1.15) обладает следующим любопытным свойством: если заменить $p \mapsto p+1$, всё, что меняется — добавляется дополнительное состояние с $k = p+1$, тогда как остальные уровни энергии остаются нетронутыми. Это можно объяснить, заметив, что существует оператор $\mathcal{O}_2$, коммутирующий с гамильтонианом:

$$\Big[\mathcal{O}_2,\,\mathcal{H}\Big] = 0\,, \qquad \text{где} \qquad \mathcal{O}_2 := \epsilon_{\alpha\beta}(z_1^\dagger)^\alpha(z_2^\dagger)^\beta\,. \qquad (3.1.16)$$

Этот оператор, однако, не коммутирует со связями (3.1.5): $\Big[\mathcal{O}_2, \mathcal{C}_1\Big] = \mathcal{O}_2$ и $\Big[\mathcal{O}_2, \mathcal{C}_2\Big] = \mathcal{O}_2$. Это означает, что действие $\mathcal{O}_2$ эффективно повышает значение p на единицу: если $|\psi\rangle \in \mathscr{H}(p_1, p_2)$, то $\mathcal{O}_2|\psi\rangle \in \mathscr{H}(p_1+1, p_2+1)$. Однако энергия обоих состояний одинакова в силу (3.1.16).

Резюмируя полученные результаты, мы эмпирически обнаружили, что осцилляторную систему можно интерпретировать как усечение спектральной задачи оператора Лапласа–Бельтрами на сфере (в общем случае в присутствии магнитного монополя) до уровня первых p гармоник. Полный спектр лапласиана на $\mathbb{CP}^1$ восстанавливается в пределе $p \to \infty$. Учитывая логику нашего изложения, в котором суперзаряд (3.1.2) был просто постулирован, этот факт может показаться удивительным. Чтобы прояснить ситуацию, чуть позже мы

дадим прямой вывод (с использованием $\mathcal{N}=1$ суперпространства) одномерной $\mathbb{CP}^1$ сигма-модели из суперсимметричной спиновой цепочки в пределе $p\to\infty$. Более того, можно показать, что это явление переносится на аналогичные сигма-модели с таргет-пространствами — многообразиями флагов [30]. В качестве гипотезы мы также предполагаем, что наша конструкция обобщается на присоединённые орбиты других классических компактных групп Ли.

Индекс D-модели.

В предыдущем разделе мы сосредоточились на бозонном секторе теории. Очевидно, сектор с фермионным числом $F=1$ может быть изучен вполне аналогично. Вместо того чтобы повторять эту часть анализа, мы сосредоточимся здесь на несколько иной задаче: анализе состояний с нулевой энергией и вычислении индекса Виттена, который имеет хорошо известный топологический смысл [143].

В предыдущем разделе мы нашли, что сектор с $F=0$ соответствует представлению $\mathsf{T}^p\otimes\mathsf{T}^{p+q}$. В случае "одного фермиона" имеем

$$z_1^\dagger\circ z_1=p-1\,,\qquad z_2^\dagger\circ z_2=p+q+1\,,\qquad (F=1) \tag{3.1.17}$$

так что эта часть гильбертова пространства есть $\mathsf{T}^{p-1}\otimes\mathsf{T}^{p+q+1}$. Таким образом, полное гильбертово пространство D-модели задаётся как

$$\mathscr{H}(p_1,p_2)=\big(\mathsf{T}^p\otimes\mathsf{T}^{p+q}\big)\oplus\big(\mathsf{T}^{p-1}\otimes\mathsf{T}^{p+q+1}\big)\ . \tag{3.1.18}$$

Индекс Виттена, определяемый как разницу между размерностями пространств бозонных и фермионных состояний, равен

$$\begin{aligned} W=\mathsf{Sdim}\big(\mathscr{H}(p_1,p_2)\big):=\mathsf{dim}\big(\mathsf{T}^p\otimes\mathsf{T}^{p+q}\big)-\mathsf{dim}\big(\mathsf{T}^{p-1}\otimes\mathsf{T}^{p+q+1}\big)=\\ =(p+1)(p+q+1)-p(p+q+2)=1+q\,. \end{aligned} \tag{3.1.19}$$

Заметим, что ответ удивительным образом не зависит от p (при том что изменение p никак нельзя считать "гладкой деформацией" теории). Мы также можем выписать явно состояния с нулевой энергией. Это состояния (3.1.14) с $k=0$:

$$|\Phi\rangle_0=\big(\Phi^{(0)}\big)_{\beta_1\dots\beta_q}(z_2^\dagger)^{\beta_1}\cdots(z_2^\dagger)^{\beta_q}\,\Big(\epsilon_{\alpha\beta}(z_1^\dagger)^\alpha(z_2^\dagger)^\beta\Big)^p\,|0\rangle\,. \tag{3.1.20}$$

Как мы видим, имеется в точности $1+q$ бозонных основных состояний, что согласуется с (3.1.19).

Фактически, мы можем также вычислить так называемый эквивариантный индекс Виттена. Для этого нужно просто заменить размерности представлений в (3.1.19) на их харак-

теры. Вспоминая выражение для характеров $\mathbf{SU}(2)$

$$\chi\big(\mathsf{T}^p\big) := \chi_p = \frac{t^{p+1} - t^{-p-1}}{t - t^{-1}}$$

мы приходим к следующему результату для эквивариантного индекса:

$$\widetilde{W} = \chi_p \chi_{p+q} - \chi_{p-1}\chi_{p+q+1} = \chi_q \,. \tag{3.1.21}$$

Опять же, ответ не зависит от p и правильно воспроизводит характер представления T^q, то есть сектора нулевых мод (3.1.20). Более того, $\widetilde{W}$ совпадает с эквивариантным индексом оператора Дольбо на $\mathbb{CP}^1$, твистованного линейным расслоением $\mathscr{O}(q)$ (см. [127, Sec. 9]).

3.2 Спиновая цепочка комплекса Кэлера–де Рама (K-модель)

В предыдущем разделе мы построили конечномерную осцилляторную модель с $\mathcal{N} = 2$ суперсимметрией, которая воспроизводит квантовые свойства $\mathcal{N} = 2b$ сигма-модели, квантовый гамильтониан которой, как известно, является лапласианом Дольбо [142]. Возникает естественный вопрос: можно ли построить аналогичную модель для комплекса Кэлера–де Рама? Также известно известно, что это подразумевает наличие уже $\mathcal{N} = 4a$ суперсимметрии. Для того, чтобы подходящим образом расширить построенную осцилляторную $\mathcal{N} = 2$ модель до $\mathcal{N} = 4$ симметрии, помимо фермионного осциллятора ψ_{12} добавим дополнительный фермион ϕ_{21}, преобразующийся сопряженныйм образом относительно $\mathbf{U}(1) \times \mathbf{U}(1)$. Мы предполагаем, что фермион ϕ_{21} и его сопряжённый $\phi_{21}^\dagger$ удовлетворяют тем же каноническим антикоммутационным соотношениям, что и ψ_{12} и $\psi_{12}^\dagger$, т.е. $\left\{\phi_{21}, \phi_{21}^\dagger\right\} = 1$. Определим два комплексных суперзаряда

$$\mathcal{Q}_1 = \psi_{12}\left(z_1^\dagger \circ z_2\right), \qquad \mathcal{Q}_2 = \phi_{21}^\dagger\left(z_1^\dagger \circ z_2\right), \tag{3.2.22}$$

а также подходящие аналоги связей (3.1.5):

$$\begin{aligned} \widetilde{\mathcal{C}}_1 &= z_1^\dagger \circ z_1 + \psi_{12}^\dagger\psi_{12} - \phi_{21}^\dagger\phi_{21} - p_1 \,, \\ \widetilde{\mathcal{C}}_2 &= z_2^\dagger \circ z_2 - \psi_{12}^\dagger\psi_{12} + \phi_{21}^\dagger\phi_{21} - p_2 \,. \end{aligned} \tag{3.2.23}$$

Модель, построенную по этим данным, мы будем называть K-моделью. Как и в предыдущем разделе, гильбертово пространство $\mathscr{H}(p_1, p_2)$ K-модели строится из пространства Фока наложением $\widetilde{\mathcal{C}}_1 = \widetilde{\mathcal{C}}_2 = 0$ на состояния.

Очевидно, $\mathcal{Q}_1^2 = \mathcal{Q}_2^2 = \left\{\mathcal{Q}_1, \mathcal{Q}_2\right\} = 0$. Вычисляя антикоммутатор двух суперзарядов и используя квантовые связи (3.2.23), получаем

$$\left\{\mathcal{Q}_1, \mathcal{Q}_2^\dagger\right\} = (p_1 - p_2)\,\psi_{12}\,\phi_{21} \,. \tag{3.2.24}$$

Таким образом, необходимым условием для существования $\mathcal{N}=4$ суперсимметрии в данной теории является равенство $p_1=p_2$. Кроме того, для осмысленности ограничений следует по крайней мере потребовать также

$$p_1=p_2:=p\in\mathbb{Z}\,. \tag{3.2.25}$$

Остальная часть супералгебры легко проверяется, так что она имеет окончательный вид

$$\left\{\mathcal{Q}_\rho,\mathcal{Q}^\dagger_\gamma\right\}=\delta_{\rho\gamma}\,\mathcal{H}\,,\qquad \rho,\gamma=1,2\,,\qquad \text{где} \tag{3.2.26}$$

$$\mathcal{H}=\tfrac{1}{2}\left\{z_1^\dagger\circ z_2,z_2^\dagger\circ z_1\right\}+\psi_{12}^\dagger\psi_{12}+\phi_{21}\phi_{21}^\dagger-2\phi_{21}^\dagger\phi_{21}\psi_{12}\psi_{12}^\dagger-1\,. \tag{3.2.27}$$

Мы записали гамильтониан в форме, явно симметричной относительно $\mathbf{U}(2)$ вращений вида

$$\begin{pmatrix}\psi_{12}\\ \phi_{21}^\dagger\end{pmatrix}\mapsto g\cdot\begin{pmatrix}\psi_{12}\\ \phi_{21}^\dagger\end{pmatrix}\,,\qquad g\in\mathbf{U}(2)\,. \tag{3.2.28}$$

Квантовые связи на числа заполнений (3.2.23) также инвариантны относительно этого преобразования. Эта симметрия является $\mathbf{U}(2)$ R-симметрией супералгебры (3.2.26), которая вращает $(\mathcal{Q}_1,\mathcal{Q}_2)$ как дублет.

Объясним, почему мы настаивали на сохранении "неголоморфного" преобразования (3.2.28) вместо переобозначения фермионов $\phi_{21}^\dagger\equiv\phi_{12}$. Причина в том, что мы хотим придерживаться общепринятого определения вакуума пространства Фока:

$$z_A^\alpha|0\rangle=\psi_{12}|0\rangle=\phi_{21}|0\rangle=0\,. \tag{3.2.29}$$

В этом случае оператор фермионного числа $F=\psi_{12}^\dagger\psi_{12}+\phi_{21}^\dagger\phi_{21}$ совпадает со степенью дифференциальной формы через стандартное отображение фермионов на дифференциальные формы [158]. Таким образом, можно рассматривать $\psi_{12}^\dagger$ как $\mathrm{d}z$, а $\phi_{21}^\dagger$ как $\mathrm{d}\overline{z}$, где z — комплексная координата на $\mathbb{CP}^1$. Обратной стороной этого определения является то, что определённое таким образом вакуумное состояние не инвариантно относительно $\mathbf{U}(2)$ вращений (3.2.28).

Индекс K-модели.

Так же, как в $\mathcal{N}=2$ спиновой системе, мы можем вычислить индекс Виттена для $\mathcal{N}=4$ цепочки. В зависимости от значения оператора фермионного числа, в гильбертовом пространстве имеются следующие $\mathbf{SU}(2)$ представления:

$$F=0:\qquad \mathsf{T}^p\otimes\mathsf{T}^p\,, \tag{3.2.30}$$

$$F=1:\qquad \left(\mathsf{T}^{p-1}\otimes\mathsf{T}^{p+1}\right)\oplus\left(\mathsf{T}^{p+1}\otimes\mathsf{T}^{p-1}\right)\,, \tag{3.2.31}$$

$$F=2:\qquad \mathsf{T}^p\otimes\mathsf{T}^p\,. \tag{3.2.32}$$

В результате эквивариантный индекс Виттена, определение которого было дано в предыдущем разделе, принимает вид

$$\widetilde{W} = 2\,\chi_p^2 - 2\,\chi_{p-1}\chi_{p+1} = 2 = \mathrm{Eu}(\mathbb{CP}^1)\,, \tag{3.2.33}$$

где Eu обозначает эйлерову характеристику. Весьма примечательно, что, как и в $\mathcal{N} = 2$ системе выше, ответ не зависит от p и совпадает с эйлеровой характеристикой $\mathbb{CP}^1$. Фактически, существует два основных состояния, которые могут быть явно построены следующим образом:

$$|\mathrm{vac}_1\rangle = \left(\epsilon_{\alpha\beta}(z_1^\alpha)^\dagger(z_2^\beta)^\dagger\right)^p |0\rangle\,, \tag{3.2.34}$$

$$|\mathrm{vac}_2\rangle = \left(\epsilon_{\alpha\beta}(z_1^\alpha)^\dagger(z_2^\beta)^\dagger\right)^p \psi_{12}^\dagger\phi_{21}^\dagger|0\rangle\,, \tag{3.2.35}$$

где $|0\rangle$ — вакуум пространства Фока, определённый в (3.2.29).

Два состояния образуют дублет относительно $\mathbf{SU}(2)$-части (3.2.28). Отождествляя пространство вакуумов с $H^*(\mathbb{CP}^1)$, можно показать, что это $\mathbf{SU}(2)$ совпадает с $\mathbf{SU}(2)$ Лефшеца, действующим в кольце когомологий кэлеровых многообразий (см. [75] для определения или [38] для обсуждения в контексте суперсимметричной квантовой механики). Оставшийся $\mathbf{U}(1) \subset \mathbf{U}(2)$, порождённый $F' = \psi_{12}^\dagger\psi_{12} - \phi_{21}^\dagger\phi_{21}$, действует на формах типа Ходжа (m_L, m_R) умножением на $m_L - m_R$.

3.3 Колчанная формулировка

Оказывается, содержание обеих моделей, обсуждавшихся выше, может быть кратко описано в терминах раскрашенных колчанов (т.е. ориентированных графов):



Рис. 3.1: Колчаны определяющие фазовую структуру D- и K-моделей.

Опишем процедуру сопоставления таким графам гильбертовых пространств наших теорий, а также их классических аналогов (т.е. фазовых пространств).

Колчаны будут иметь два типа вершин и два типа рёбер. Вершины будут изображаться либо кружками, либо квадратами. Кружки будут называться “локальными” — они соответствуют действию калибровочной группы, тогда как квадраты будут называться “глобальными” и соответствовать действию глобальной группы симметрии. Красные и синие рёбра будут ассоциироваться с бозонными и фермионными полями соответственно.

Мы начнём с построения фазовых пространств, которые в этом случае называются колчанными многообразиями. Каждой вершине колчана мы сопоставляем векторное пространство $\mathbb{C}^m$ (для некоторого m) и группу $\mathbf{U}(m)$, действующую на нём. Каждому ориентированному ребру, идущему от $\mathbb{C}^m$ к $\mathbb{C}^k$, мы сопоставляем линейное пространство матриц размера $k \times m$, обозначаемое $\mathrm{Hom}\big(\mathbb{C}^m, \mathbb{C}^k\big)$, снабжённое симплектической формой

$$i\,\mathsf{Tr}\big(\mathrm{d}\zeta^\dagger \wedge \mathrm{d}\zeta\big)\,, \tag{3.3.36}$$

где $\zeta \in \mathrm{Hom}\big(\mathbb{C}^m, \mathbb{C}^k\big)$. Если ребро фермионное, то мы дополнительно предполагаем, что матричные элементы являются грассмановыми (т.е. антикоммутирующими) переменными. Эти векторные пространства снабжены действиями групп $\mathbf{U}(m)$ и $\mathbf{U}(k)$, связанных с вершинами. Конкретно, действие $\mathbf{U}(k) \times \mathbf{U}(m)$ на $\zeta \in \mathrm{Hom}\big(\mathbb{C}^m, \mathbb{C}^k\big)$ задаётся формулой

$$\zeta \;\mapsto\; g_1 \zeta g_2^\dagger\,, \qquad g_1 \in \mathbf{U}(k)\,, \quad g_2 \in \mathbf{U}(m)\,. \tag{3.3.37}$$

Чтобы построить колчанное многообразие, берут прямую сумму векторных матричных пространств Hom по всем ориентированным рёбрам, которая естественным образом является симплектическим многообразием с симплектической структурой прямого произведения, и выполняют симплектическую (гамильтонову) редукцию по действию всех $\mathbf{U}$-групп, связанных с локальными вершинами. Полученное многообразие дополнительно снабжено действием $\mathbf{U}$-групп глобальных вершин.

Гильбертовы пространства, связанные с колчанами, строятся посредством геометрического квантования колчанных многообразий. Технически это означает, что матричные элементы всех ζ становятся квантовыми осцилляторами, тогда как отображения моментов, соответствующие симплектической редукции, налагаются как квантовые связи на пространство Фока этих осцилляторов.

3.4 Классическая D-модель и суперпространство

Цель настоящего раздела — определить “классическую спиновую модель”, квантование которой приводит к спиновой цепочке комплекса Дольбо, описанной в Разделе 3.1. Классический аналог D-модели обладает $\mathcal{N} = 2$ суперсимметрией, так же как и её квантовая версия. Это означает, что мы можем записать соответствующие лагранжианы тремя разными способами: либо используя $\mathcal{N} = 2$ суперполя, либо $\mathcal{N} = 1$ суперполя, либо в компонентной форме. Мы выберем следующую стратегию: сначала постулируем абстрактную систему в $\mathcal{N} = 2$ суперполях, затем последовательно редуцируем её к $\mathcal{N} = 1$ суперполям, а также к компонентам, и, наконец, убедимся, что она действительно воспроизводит классическую версию D-модели.

3.4.1 $\mathcal{N}=2$ суперпространство.

Начнём с определения промежуточной свободной калибровочной системы в $\mathcal{N}=2$ суперполях, добавив к ней взаимодействия позже.

В $\mathcal{N}=2$ суперпространстве с координатами $\left(t,\theta_c,\overline{\theta}_c\right)$ свободная версия нашей системы может быть описана двумя киральными бозонными дублетными суперполями $\mathbf{Z}_1^\alpha,\mathbf{Z}_2^\alpha$, одним киральным фермионным суперполем $\mathbf{\Psi}_{12}$ и двумя вещественными калибровочными суперполями $\mathbf{V}_1,\mathbf{V}_2$ общего типа. Чтобы зафиксировать обозначения, напомним, что киральные поля удовлетворяют условиям киральности $\overline{D}_c\mathbf{Z}_1^\alpha=\overline{D}_c\mathbf{Z}_2^\alpha=\overline{D}_c\mathbf{\Psi}_{12}=0$ (вместе с комплексно-сопряжёнными выражениями), где суперпроизводные определяются как[4]

$$\overline{D}_c=-\frac{\partial}{\partial\overline{\theta}_c}+i\theta_c\frac{\partial}{\partial t}\,,\qquad D_c=\frac{\partial}{\partial\theta_c}-i\overline{\theta}_c\frac{\partial}{\partial t}\,,\qquad \overline{D}_c^2=D_c^2=0\,. \tag{3.4.38}$$

Свободный калибровочный лагранжиан, который является стартовой точкой наших построений, может быть записан следующим образом (см. [88; 119; 120]):

$$\mathscr{L}_0=\frac{1}{2}\int \mathrm{d}^2\theta_c\left(|\mathbf{Z}_1|^2e^{\mathbf{V}_1}+|\mathbf{Z}_2|^2e^{\mathbf{V}_2}+|\mathbf{\Psi}_{12}|^2e^{\mathbf{V}_1-\mathbf{V}_2}+\xi_1\mathbf{V}_1+\xi_2\mathbf{V}_2\right), \tag{3.4.39}$$

где ξ_1,ξ_2 — (вещественные) члены Файе–Илиопулоса (FI). Позже мы сопоставим значения этих параметров с p_A из D-модели. По определению, $|\mathbf{Z}_A|^2=\overline{\mathbf{Z}}_A\circ\mathbf{Z}_A$ и $|\mathbf{\Psi}_{12}|^2=\overline{\mathbf{\Psi}}_{12}\mathbf{\Psi}_{12}$.

Чтобы ввести взаимодействие в определённую выше систему, мы не добавляем дополнительные члены к (3.4.39), а модифицируем условия киральности следующим образом:

$$\overline{D}_c\mathbf{Z}_1=\mathbf{\Psi}_{12}\mathbf{Z}_2\,,\qquad D_c\overline{\mathbf{Z}}_1=\overline{\mathbf{\Psi}}_{12}\overline{\mathbf{Z}}_2\,,\qquad \overline{D}_c\mathbf{Z}_2=\overline{D}_c\mathbf{\Psi}_{12}=0\,. \tag{3.4.40}$$

Суперсимметричные системы с такого типа условиями изучались в [93]. Наше утверждение состоит в том, что модель, описываемая (3.4.39)-(3.4.40), является классическим аналогом D-модели из Раздела 3.1. Прежде чем проверять это утверждение в компонентах, мы редуцируем $\mathcal{N}=2$ до $\mathcal{N}=1$ суперполей. Полученная форма лагранжиана будет полезна для установления связи между D-моделью и суперсимметричной $\mathbb{CP}^1$ сигма-моделью.

В этом формализме можно, однако, ценой усложнения лагранжиана перейти к стандартным киральным полям[5]. Действительно, мы можем положить $\mathbf{\Psi}_{12}=\overline{D}_c\widetilde{\mathbf{\Psi}}_{12}$ и решить нелинейное ограничение с помощью $\mathbf{Z}_1=\widetilde{\mathbf{Z}}_1+\widetilde{\mathbf{\Psi}}_{12}\mathbf{Z}_2$, где $\widetilde{\mathbf{Z}}_1$ — обычное киральное суперполе, удовлетворяющее $\overline{D}_c\widetilde{\mathbf{Z}}_1=0$. Подставляя эти значения в лагранжиан (3.4.39), получаем выражение в терминах киральных полей $\widetilde{\mathbf{Z}}_1,\mathbf{Z}_2$ и суперполей $\widetilde{\mathbf{\Psi}}_{12},\mathbf{V}_1,\mathbf{V}_2$ общего типа.

[4]Здесь $\overline{D}_c$ — эрмитово-сопряжённый к D_c. Сопряжение $D_c\mathbf{B}$ и $D_c\mathbf{F}$ даёт $\overline{D}_c\overline{\mathbf{B}}$ и $-\overline{D}_c\overline{\mathbf{F}}$ для бозонного $\mathbf{B}$ и фермионного $\mathbf{F}$ суперполей соответственно.

[5]Здесь использование нелинейных киральных мультиплетов является, по сути, вопросом удобства. Однако мы не исключаем, что они имеют более глубокий геометрический смысл.

3.4.2 Редукция к $\mathcal{N}=1$ суперпространству.

В этом разделе мы обсудим редукцию модели (3.4.39) с деформированными условиями киральности (3.4.40) к $\mathcal{N}=1$ суперпространству. Для этого введём "вещественные" координаты в $\mathcal{N}=2$ суперпространстве

$$\theta_c = \theta + i\theta', \quad \overline{\theta}_c = \theta - i\theta' \quad \Rightarrow \quad \theta = \frac{\theta_c + \overline{\theta}_c}{2}, \quad \theta' = \frac{\theta_c - \overline{\theta}_c}{2i}, \tag{3.4.41}$$

а также "вещественные" суперпроизводные

$$D = D_c - \overline{D}_c = \frac{\partial}{\partial\theta} - 2i\theta\frac{\partial}{\partial t}, \qquad D' = i\big(D_c + \overline{D}_c\big) = \frac{\partial}{\partial\theta'} - 2i\theta'\frac{\partial}{\partial t}. \tag{3.4.42}$$

Мера интегрирования в суперпространстве тогда может быть записана как $\int \mathrm{d}^2\theta_c := i\int \mathrm{d}\theta\mathrm{d}\theta'$.

Теперь мы хотим явно проинтегрировать, скажем, по θ'. Стандартный способ сделать это следующий. Поскольку взятие интеграла по θ' эквивалентно применению D' с точностью до полной производной (см. (3.4.38)), это означает, что после применения D' к лагранжиану $\mathcal{N}=2$ суперполя зависимость от θ' станет полной производной. Таким образом, после дифференцирования мы можем положить $\theta'=0$. Оставшийся лагранжиан даёт искомую $\mathcal{N}=1$ формулировку, поскольку всё выражено в терминах θ. Очевидно, в результирующем выражении все суперпроизводные должны быть выражены через D: например,

$$D'\mathbf{Z}_1 = iD\mathbf{Z}_1 + 2i\mathbf{\Psi}_{12}\mathbf{Z}_2, \quad D'\,\overline{\mathbf{Z}}_1 = -iD\overline{\mathbf{Z}}_1 + 2i\overline{\mathbf{\Psi}}_{12}\overline{\mathbf{Z}}_2. \tag{3.4.43}$$

В процессе редукции каждое киральное или обобщённое киральное суперполе редуцируется до одного $\mathcal{N}=1$ суперполя, например $\mathbf{Z}_A \mapsto \mathbf{Z}_A|_{\theta'=0}$. Однако суперполе общего типа редуцируется до *двух* $\mathcal{N}=1$ суперполей, $\mathbf{V}_A \mapsto (\mathbf{V}_A|_{\theta'=0},\, D'\mathbf{V}_A|_{\theta'=0})$. Мы введём следующие обозначения для этих $\mathcal{N}=1$ полей:

$$\begin{aligned}\Big\{\mathbf{Z}_A\big(\theta,\theta'\big), \mathbf{V}_A\big(\theta,\theta'\big), D'\mathbf{V}_A\big(\theta,\theta'\big), \mathbf{\Psi}_{12}\big(\theta,\theta'\big)\Big\}\Big|_{\theta'=0} :=\\ := \Big\{\mathsf{Z}_A(\theta),\, \mathsf{V}_A(\theta),\, -2i\,\mathsf{\Lambda}_A(\theta),\, \mathsf{\Psi}_{12}(\theta)\Big\}.\end{aligned} \tag{3.4.44}$$

Используя этот подход, мы получаем следующее выражение для лагранжиана в $\mathcal{N}=1$ суперпространстве:

$$\begin{aligned}\mathscr{L} = \frac{i}{2}\int \mathrm{d}\theta\Big[2i\,\overline{\mathsf{Z}}_A \circ D\mathsf{Z}_A - 2i\,\overline{\mathsf{\Psi}}_{12}D\mathsf{\Psi}_{12} + 2i\overline{\mathsf{\Psi}}_{12}\overline{\mathsf{Z}}_2 \circ \mathsf{Z}_1 + 2i\mathsf{\Psi}_{12}\overline{\mathsf{Z}}_1 \circ \mathsf{Z}_2\Big) +\\ + \mathsf{\Lambda}_1\Big(|\mathsf{Z}_1|^2 + |\mathsf{\Psi}_{12}|^2 + \xi_1\Big) + \mathsf{\Lambda}_2\Big(|\mathsf{Z}_2|^2 - |\mathsf{\Psi}_{12}|^2 + \xi_2\Big)\Big].\end{aligned} \tag{3.4.45}$$

Здесь мы избавились от экспонент от полей V_A, выполнив "комплексифицированное калибровочное преобразование"

$$\mathsf{Z}_1 \to e^{-\frac{1}{2}\mathsf{V}_1}\mathsf{Z}_1, \qquad \mathsf{Z}_2 \to e^{-\frac{1}{2}\mathsf{V}_2}\mathsf{Z}_2, \qquad \mathsf{\Psi}_{12} \to e^{-\frac{1}{2}(\mathsf{V}_1-\mathsf{V}_2)}\mathsf{\Psi}_{12} \tag{3.4.46}$$

вместе со сдвигом Λ_A после дифференцирования. Мы видим, что связи, налагаемые множителями Лагранжа Λ_A, являются суперполевым воплощением (3.1.5), поэтому мы отождествляем $\xi_1 = -p_1$ и $\xi_2 = -p_2$.

3.4.3 Компонентная формулировка и связь с квантовой D-моделью.

Последний шаг — переписать теорию (3.4.45) в компонентах и проверить, что она совпадает с классической версией D-модели. Компонентное разложение суперполей (3.4.44) имеет вид:

$$\mathsf{Z}_A := z_A + i\theta\gamma_A\,, \quad \Psi_{12} := i\big(\psi_{12} + \theta\zeta_{12}\big)\,, \qquad \Lambda_A := \eta_A + \theta\lambda_A\,, \quad A = 1, 2\,. \tag{3.4.47}$$

В терминах этих компонентных полей лагранжиан (3.4.45) довольно сложен. Его можно значительно упростить, заметив, что кинетический член имеет следующее разложение:

$$\int \mathrm{d}\theta \Big(-\overline{\mathsf{Z}}_A \circ D\mathsf{Z}_A\Big) = i\,\overline{z}_A \circ \dot{z}_A + \overline{\gamma}_A \circ \gamma_A\,, \tag{3.4.48}$$

$$\int \mathrm{d}\theta \Big(\overline{\Psi}_{12} D\Psi_{12}\Big) = i\overline{\psi}_{12}\dot{\psi}_{12} + \overline{\zeta}_{12}\zeta_{12}\,. \tag{3.4.49}$$

В результате γ_A и ζ_{12} являются нединамическими степенями свободы и, следовательно, могут быть исключены с помощью уравнений движения. Проделав это, получаем

$$\begin{aligned}\mathcal{S} = \int \mathrm{d}t \Big[i\,\overline{z}_A \circ \dot{z}_A + i\overline{\psi}_{12}\dot{\psi}_{12} - \big(\overline{z}_1 \circ z_2\big)\big(\overline{z}_2 \circ z_1\big) - \overline{\psi}_{12}\psi_{12}\big(\overline{z}_2 \circ z_2 - \overline{z}_1 \circ z_1\big) + \\ + \lambda_1\big(\overline{z}_1 \circ z_1 + \overline{\psi}_{12}\psi_{12} - p_1\big) + \lambda_2\big(\overline{z}_2 \circ z_2 - \overline{\psi}_{12}\psi_{12} - p_2\big)\Big]\,.\end{aligned} \tag{3.4.50}$$

Заметим, что множители Лагранжа η_A также выпадают из этого выражения.

Из приведённого выше действия ясно, что абстрактная $\mathcal{N} = 2$ теория (3.4.39), дополненная модифицированными условиями киральности (3.4.40), в точности является классическим аналогом D-модели, описанной в Разделе 3.1. Действительно, квантование этой теории воспроизводит[6] коммутационные соотношения (3.1.1), суперзаряд (3.1.2) и гамильтониан, а также связи (3.1.5).

3.5 Классическая K-модель

В этом разделе мы обсудим классический аналог $\mathcal{N} = 4$ осцилляторной K-модели, построенной в Разделе 3.2. Мы будем использовать стратегию из предыдущего раздела. А именно, мы постулируем абстрактную модель в $\mathcal{N} = 2$ суперпространстве, затем редуцируем её к $\mathcal{N} = 1$ суперпространству и, наконец, к компонентной форме, которую можно

[6] Чтобы различать квантовый и классический случаи, мы пишем $z_A^\dagger$ для эрмитово-сопряжённого оператора в квантовом случае, тогда как в классическом случае мы пишем $\overline{z}_A$.

напрямую сравнить с K-моделью. Вычисления аналогичны случаю D-модели, поэтому мы сосредоточимся на необходимых модификациях.

3.5.1 $\mathcal{N} = 2$ суперпространство.

Чтобы ввести необходимую свободную систему[7], рассмотрим следующий набор полей в $\mathcal{N} = 2$ суперпространстве: два бозонных киральных дублета $\mathbf{Z}_1^\alpha, \mathbf{Z}_2^\alpha$, два фермионных киральных поля $\mathbf{\Psi}_{12}, \mathbf{\Phi}_{21}$ и два дополнительных фермионных киральных суперполя $\mathbf{\Lambda}_1, \mathbf{\Lambda}_2$. Постулируем свободную систему вида

$$\begin{aligned}\mathscr{L}_0 = \frac{1}{2}\int \mathrm{d}^2\theta\Big(|\mathbf{Z}_1|^2 + |\mathbf{Z}_2|^2 + |\mathbf{\Psi}_{12}|^2 + |\mathbf{\Phi}_{21}|^2\Big) + \\ +\xi\int \mathrm{d}\theta_c\left(\mathbf{\Lambda}_1 + \mathbf{\Lambda}_2\right) - \xi\int \mathrm{d}\overline{\theta}_c\left(\overline{\mathbf{\Lambda}}_1 + \overline{\mathbf{\Lambda}}_2\right),\end{aligned} \tag{3.5.51}$$

где ξ — (вещественный) FI-параметр. Чтобы добавить взаимодействие в эту систему, мы деформируем условия киральности для наших полей следующим образом:

$$\begin{pmatrix}\overline{D}_c\mathbf{Z}_1\\ \overline{D}_c\mathbf{Z}_2\end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix}\mathbf{\Lambda}_1 & \mathbf{\Psi}_{12}\\ \mathbf{\Phi}_{21} & \mathbf{\Lambda}_2\end{pmatrix}}_{:=\mathscr{A}}\begin{pmatrix}\mathbf{Z}_1\\ \mathbf{Z}_2\end{pmatrix}. \tag{3.5.52}$$

Уравнение (3.5.52) может интерпретироваться как утверждение о существовании базиса ковариантно постоянных сечений (в данном случае соответствующих $\begin{pmatrix}\mathbf{Z}_1^\alpha\\ \mathbf{Z}_2^\alpha\end{pmatrix}$ с $\alpha = 1, 2$) относительно суперсвязности $\overline{D}_c - \mathscr{A}$. Таким образом, суперсвязность должна быть плоской[8], т.е.

$$\overline{D}_c\,\mathscr{A} - \mathscr{A}^2 = 0\,, \tag{3.5.53}$$

что в терминах матричных элементов может быть записано как

$$\overline{D}_c\mathbf{\Lambda}_1 = \mathbf{\Psi}_{12}\mathbf{\Phi}_{21}\,, \qquad \overline{D}_c\mathbf{\Psi}_{12} = \mathbf{\Psi}_{12}\big(\mathbf{\Lambda}_2 - \mathbf{\Lambda}_1\big)\,, \tag{3.5.54}$$

$$\overline{D}_c\mathbf{\Lambda}_2 = \mathbf{\Phi}_{21}\mathbf{\Psi}_{12}\,, \qquad \overline{D}_c\mathbf{\Phi}_{21} = \mathbf{\Phi}_{21}\big(\mathbf{\Lambda}_1 - \mathbf{\Lambda}_2\big)\,. \tag{3.5.55}$$

Эквивалентно, условие того, что суперсвязность должна быть плоской, может быть получена применением $\overline{D}_c$ к уравнению (3.5.52) и использованием нильпотентности суперпроизводной. Заметим, что как следствие уравнений $\mathbf{\Lambda}_1 + \mathbf{\Lambda}_2$ по-прежнему является киральным суперполем в обычном смысле, так что слагаемые с интегралом по половине суперпространства в (3.5.51) имеют смысл[9].

[7] См. Раздел 3.4 для соглашений о $\mathcal{N} = 2$ суперпространстве.

[8] Такие условия нулевой кривизны в суперпространстве встречались при изучении 2D $\mathcal{N} = 2$ алгебр Каца–Муди в [90].

[9] Таким образом, в данном случае можно ввести только один FI-параметр. Это параллельно ситуации в K-модели, где, как объяснялось в Разделе 3.2 (см. формулу (3.2.25)), можно ввести только один параметр p. Ниже мы увидим, что $\xi = -p$.

Можно проверить, что уравнения (3.5.52)-(3.5.55) полностью совместны, и применение суперпроизводной $\overline{D}_c$ к каждому уравнению не даёт новых соотношений.

3.5.2 Сравнение с D-моделью.

На первый взгляд $\mathcal{N} = 2$ формулировки D- и K-моделей выглядят несколько поразному, однако в этом разделе мы покажем, что они тесно связаны. Чтобы увидеть это, вместо действия (3.4.39) с явными множителями калибровочного поля можно было бы начать со свободного действия вида

$$\mathscr{L}_0 = \frac{1}{2}\int \mathrm{d}^2\theta\Big(|\mathbf{Z}_1|^2 + |\mathbf{Z}_2|^2 + |\mathbf{\Psi}_{12}|^2\Big) + \left(\int \mathrm{d}\theta_c \left(\xi_1\mathbf{\Lambda}_1 + \xi_2\mathbf{\Lambda}_2\right) + \text{к.с.}\right), \tag{3.5.56}$$

которое напоминает (3.5.51). Предположим, что поля $\mathbf{Z}_1^\alpha, \mathbf{Z}_2^\alpha$ не являются киральными, а удовлетворяют обобщённому условию киральности

$$\begin{pmatrix} \overline{D}_c\mathbf{Z}_1 \\ \overline{D}_c\mathbf{Z}_2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{\Lambda}_1 & \mathbf{\Psi}_{12} \\ 0 & \mathbf{\Lambda}_2 \end{pmatrix}}_{:=\,\widetilde{\mathscr{A}}} \begin{pmatrix} \mathbf{Z}_1 \\ \mathbf{Z}_2 \end{pmatrix}. \tag{3.5.57}$$

Для существования решений таких уравнений связность $\overline{D}_c - \widetilde{\mathscr{A}}$ снова должна быть плоской. В частности, отсюда следует, что

$$\overline{D}_c\mathbf{\Lambda}_1 = \overline{D}_c\mathbf{\Lambda}_2 = 0\,, \tag{3.5.58}$$

так что $\mathbf{\Lambda}_1$ и $\mathbf{\Lambda}_2$ являются киральными полями в обычном смысле. Чтобы вернуться к исходной формулировке (3.4.39), нужно решить условия киральности (3.5.58) как $\mathbf{\Lambda}_A = \overline{D}_c\mathbf{V}_A$, где $\mathbf{V}_A$ — суперполя общего вида. Затем, сделав замену переменных $\mathbf{Z}_A \mapsto e^{\mathbf{V}_A}\mathbf{Z}_A$ и $\mathbf{\Psi}_{12} \mapsto e^{\mathbf{V}_1 - \mathbf{V}_2}\mathbf{\Psi}_{12}$, мы восстанавливаем действие (3.4.39) и условия (3.4.40).

Обратим внимание на существенное различие между нелинейными условиями киральности в D-модели (3.5.57) и в K-модели (3.5.52). В случае D-модели каждое из двух полей $\mathbf{\Lambda}_1$ и $\mathbf{\Lambda}_2$ является киральным по отдельности, в результате можно добавить два FI-параметра как в (3.5.56). В K-модели, напротив, только их сумма является киральной, что приводит к единственному FI-параметру. Это означает, что в K-модели нельзя ввести “магнитный заряд монополя” q, не нарушая суперсимметрию.

3.5.3 Редукция к $\mathcal{N} = 1$ суперпространству.

Редукция от $\mathcal{N} = 2$ к $\mathcal{N} = 1$ суперполям практически дословно повторяет процедуру, описанную в разделе 3.4.2. Как и в случае D-модели, мы определяем $\mathcal{N} = 1$ суперполя следующим образом:

$$\Big\{\mathbf{Z}_A\big(\theta,\theta'\big), \mathbf{\Psi}_{12}\big(\theta,\theta'\big), \mathbf{\Phi}_{21}\big(\theta,\theta'\big)\Big\}\Big|_{\theta'=0} := \Big\{\mathsf{Z}_A(\theta), \Psi_{12}(\theta), \Phi_{21}(\theta)\Big\}. \tag{3.5.59}$$

В случае множителей Лагранжа мы полагаем

$$\Big\{\mathbf{\Lambda}_A\big(\theta,\theta'\big)+\overline{\mathbf{\Lambda}}_A\big(\theta,\theta'\big)\Big\}\Big|_{\theta'=0}:=\Big\{-\Lambda_A(\theta)\Big\}\,. \tag{3.5.60}$$

Явно интегрируя по θ', получаем действие в терминах $\mathcal{N}=1$ суперполей:

$$\begin{aligned}\mathcal{S}=\int \mathrm{d}t\,\mathrm{d}\theta\Big[&-\overline{\mathsf{Z}}_A\circ D\mathsf{Z}_A+\overline{\Psi}_{12}D\Psi_{12}+\overline{\Phi}_{21}D\Phi_{21}+\\&+\Big(\overline{\Psi}_{12}\,\overline{\mathsf{Z}}_2\circ\mathsf{Z}_1+\Psi_{12}\,\overline{\mathsf{Z}}_1\circ\mathsf{Z}_2\Big)+\Big(\overline{\Phi}_{21}\overline{\mathsf{Z}}_1\circ\mathsf{Z}_2+\Phi_{21}\overline{\mathsf{Z}}_2\circ\mathsf{Z}_1\Big)+\\&+\Lambda_1\Big(|\mathsf{Z}_1|^2+|\Psi_{12}|^2-|\Phi_{21}|^2+\xi\Big)+\Lambda_2\Big(|\mathsf{Z}_2|^2-|\Psi_{12}|^2+|\Phi_{21}|^2+\xi\Big)\Big]\,.\end{aligned} \tag{3.5.61}$$

Как можно проверить, это действие в самом деле является классическим аналогом K-модели из Раздела 3.2. Для этого нужно отождествить ведущие компоненты $\mathsf{Z}_A,\Psi_{12},\Phi_{21}$ с $z_A,i\psi_{12},i\phi_{21}$ соответственно и исключить остальные нединамические компоненты. Как и в случае D-модели, только старшая компонента Λ_A является истинным множителем Лагранжа, из вариации которого получаются нетривиальные связи (ведущая компонента Λ_A является вспомогательным полем и просто выпадает из действия). Формулировка в терминах компонент после исключения вспомогательных полей даёт связи (3.2.23) и гамильтониан (3.2.27). Легко видеть, что FI-параметр должен быть отождествлён с параметром p K-модели как $\xi=-p$.

3.6 Связь с суперсимметричными сигма-моделями

До сих пор мы обсуждали некоторые свойства D- и K-моделей, а также их формулировки в суперпространстве. Было замечено, что некоторые характеристики таких квантовых теорий (а именно спектр гамильтониана и индекс Виттена) напоминают соответствующие характеристики суперчастицы на сфере. Однако можно ли строго проследить связь этих теорий с $\mathbb{CP}^1$ сигма-моделями, обладающими соответствующей суперсимметрией? Наша следующая цель — показать, что эквивариантный индекс Виттена $\widetilde{W}$ и g-твистованная статистическая сумма $\mathscr{Z}$ (где $g\in\mathbf{SU}(2)$) для D- и K-моделей совпадают с таковыми для суперсимметричных $\mathbb{CP}^1$ сигма-моделей.

3.6.1 От D-модели к $\mathcal{N}=2$ сигма-модели.

Начнём наш анализ с D-модели. Для начала напомним определение индекса Виттена и статистической суммы:

$$\widetilde{W}(g)=\mathsf{STr}_{\mathscr{H}(p_1,p_2)}\Big(g\cdot e^{-\beta\mathcal{H}}\Big),\quad \mathscr{Z}\,(g)=\mathsf{Tr}_{\mathscr{H}(p_1,p_2)}\Big(g\cdot e^{-\beta\mathcal{H}}\Big), \tag{3.6.62}$$

где β — формальный параметр (“обратная температура”). Через $\mathscr{H}(p_1,p_2)$ и $\mathcal{H}$ мы обозначаем гильбертово пространство (3.1.18) и гамильтониан (3.1.7) D-модели соответственно. Для анализа данных характеристик удобно использовать метод функционального интеграла. Клас-

сическое действие в $\mathcal{N}=1$ суперполях, стоящее в показателе экспоненты в подынтегральном выражении, одинаково в обоих случаях и задаётся формулой

$$\mathcal{S}=\int_0^\beta \mathrm{d}t\int \mathrm{d}\theta\Big[-\overline{\mathsf{Z}}_A\circ D\mathsf{Z}_A+\overline{\Psi}_{12}D\Psi_{12}+\big(\Psi_{12}\overline{\mathsf{Z}}_1\circ\mathsf{Z}_2+\overline{\Psi}_{12}\overline{\mathsf{Z}}_2\circ\mathsf{Z}_1\big)+ \\ +\Lambda_1\Big(|\mathsf{Z}_1|^2+|\Psi_{12}|^2-p_1\Big)+\Lambda_2\Big(|\mathsf{Z}_2|^2-|\Psi_{12}|^2-p_2\Big)\Big]. \tag{3.6.63}$$

Однако в двух случаях мы должны наложить разные граничные условия на бозонные и фермионные компоненты суперполей (3.4.47) (подробности можно найти в [142]):

$$\begin{aligned} z_A(t+\beta)&=g\cdot z_A(t)\,, & \gamma_A(t+\beta)&=\pm g\cdot\gamma_A(t)\,,\\ \psi_{12}(t+\beta)&=\pm\psi_{12}(t)\,, & \zeta_{12}(t+\beta)&=\zeta_{12}(t)\,, \end{aligned} \tag{3.6.64}$$

где ‘+’ соответствует случаю $\widetilde{W}(g)$, а ‘−’ соответствует $\mathscr{Z}(g)$.

Однако, оказывается, удобно работать с (3.6.63) в немного другой форме. Введём 2×2 матричное суперполе $\mathsf{Z}=\begin{pmatrix}\mathsf{Z}_1 & \mathsf{Z}_2\end{pmatrix}$, элементы которого есть столбцы Z_A. Будем предполагать, что эта матрица невырождена[10]. В этом случае теорема о полярном разложении утверждает, что факторизация $\mathsf{Z}=\mathsf{U}\mathsf{H}$ единственна, где U — унитарное матричнозначное бозонное суперполе, а H — эрмитово положительно определённое матричнозначное бозонное суперполе. Компоненты этих суперполей наследуют граничные условия от компонент Z_1 и Z_2. Фактически, мы делаем замену переменных от Z_1 и Z_2 к U и H. В этих терминах действие принимает вид:

$$\mathcal{S}=\int \mathrm{d}t\,\mathrm{d}\theta\Big[\mathsf{Tr}\left(-\mathsf{K}\mathsf{U}^\dagger D\mathsf{U}-\mathsf{H}D\mathsf{H}\right)+\overline{\Psi}_{12}D\Psi_{12}+\Psi_{12}\mathsf{K}_{12}+\overline{\Psi}_{12}\mathsf{K}_{21}\Big], \tag{3.6.65}$$

где мы ввели обозначение $\mathsf{K}:=\mathsf{H}^2$ и K_{AB} — его матричные элементы. Из унитарности матрицы U подразумевается, что U подчиняется условиям $\overline{\mathsf{U}}_A\circ\mathsf{U}_B=\delta_{AB}$, где U_A обозначает A-й столбец. Также следует отметить, что

$$\mathsf{K}_{11}=p_1-|\Psi_{12}|^2\quad\text{и}\quad\mathsf{K}_{22}=p_2+|\Psi_{12}|^2 \tag{3.6.66}$$

благодаря связям при множителях Лагранжа из (3.6.63).

Далее выделим члены $p\sum_{A=1}^2\overline{\mathsf{U}}_A D\mathsf{U}_A=p\,D\ln\left(\varepsilon_{\alpha_1\alpha_2}\mathsf{U}_1^{\alpha_1}\mathsf{U}_2^{\alpha_2}\right)$ и $\mathsf{Tr}\left(\mathsf{H}D\mathsf{H}\right)=\frac{1}{2}D\,\mathsf{Tr}\left(\mathsf{H}^2\right)$ из первой и второй частей следа в (3.6.65) соответственно. Эти члены являются полными (супер)производными и, следовательно, обращаются в нуль под знаком интеграла[11]. Итого,

[10]Множество таких матриц плотно в исходной области интегрирования, поэтому значение интеграла не изменится, если ограничиться этим множеством.

[11]Более того, второй член $\frac{1}{2}D\,\mathsf{Tr}\left(\mathsf{H}^2\right)$ является тождественным нулём, так как является производной от константы, что следует из условий (3.6.66).

мы получаем

$$\mathcal{S} = \int \mathrm{d}t\,\mathrm{d}\theta \Big[|\Psi_{12}|^2\,\overline{\mathsf{U}}_1 \circ D\mathsf{U}_1 - |\Psi_{12}|^2\,\overline{\mathsf{U}}_2 \circ D\mathsf{U}_2 - \mathsf{K}_{12}\overline{\mathsf{U}}_2 \circ D\mathsf{U}_1 - \mathsf{K}_{21}\overline{\mathsf{U}}_1 \circ D\mathsf{U}_2 - \\ - q\,\overline{\mathsf{U}}_2 \circ D\mathsf{U}_2 + \frac{1}{2}\big(\overline{\Psi}_{12} D\Psi_{12} + D\overline{\Psi}_{12}\Psi_{12}\big) + \Psi_{12}\mathsf{K}_{12} + \overline{\Psi}_{12}\mathsf{K}_{21} \Big], \tag{3.6.67}$$

где мы дополнительно симметризовали член $\overline{\Psi}_{12} D\Psi_{12}$.

Следующее действие — исключить вспомогательные переменные K_{12} и K_{21}. Однако эти поля не произвольны из-за условия положительной определённости $\mathsf{H} = \sqrt{\mathsf{K}}$, поэтому в общем случае мы имеем ограничения на область функционального интегрирования. Однако эти ограничения снимаются в пределе $p \to \infty$ с фиксированным q. Действительно, в этом пределе диагональные элементы K стремятся к бесконечности, как видно из (3.6.66). Таким образом, $\mathsf{H} = \sqrt{\mathsf{K}}$ приближается к диагональной матрице с положительными элементами. В этом пределе поля K_{12} и K_{21} поэтому являются множителями Лагранжа, порождающими алгебраические связи $\Psi_{12} = \overline{\mathsf{U}}_2 \circ D\mathsf{U}_1$ и $\overline{\Psi}_{12} = \overline{\mathsf{U}}_1 \circ D\mathsf{U}_2$. Подставляя их в действие, получаем окончательный ответ

$$\mathcal{S} = \int \mathrm{d}t\,\mathrm{d}\theta \left[\frac{i}{2_{12}^2} \Big(D\overline{\mathsf{U}}_1 \circ \mathsf{U}_2\overline{\mathsf{U}}_2 \circ \dot{\mathsf{U}}_1 + \dot{\overline{\mathsf{U}}}_1 \circ \mathsf{U}_2\overline{\mathsf{U}}_2 \circ D\mathsf{U}_1 \Big) - q\,\overline{\mathsf{U}}_2 \circ D\mathsf{U}_2 \right]. \tag{3.6.68}$$

Это, на самом деле, $\mathcal{N} = 2b$ суперсимметричная $\mathbb{CP}^1$ сигма-модель (обычно определяемая в $\mathcal{N} = 2$ суперпространстве через киральные поля) с дополнительным магнитным полем, записанная в $\mathcal{N} = 1$ суперпространстве и использующая однородные координаты [35]. Как мы видели ранее, квантовая D-модель имеет $\mathcal{N} = 2$ суперсимметрию. Таким образом, естественно ожидать, что та же суперсимметрия должна сохраняться и в сигма-модели. Как мы сейчас покажем, (3.6.68) действительно является $\mathcal{N} = 2b$ моделью. Таким образом, мы доказали, что эквивариантный индекс Виттена и твистованная статистическая сумма D-модели совпадают с таковыми для суперсимметричной $\mathbb{CP}^1$ сигма-модели в пределе $p \to \infty$ и при фиксированном заряде монополя q.

Проверим, что (3.6.68) действительно является $\mathcal{N} = 2b$ моделью. Сначала напомним хорошо известное выражение для последней в $\mathcal{N} = 2$ суперпространстве [94]:

$$-i \int \mathrm{d}^2\theta\,\mathrm{d}t \left(\frac{\overline{D}_c\overline{\mathbf{Z}} D_c\mathbf{Z}}{4\left(1 + \overline{\mathbf{Z}}\mathbf{Z}\right)^2} - \frac{q}{2}\ln\left(1 + \overline{\mathbf{Z}}\mathbf{Z}\right) \right), \tag{3.6.69}$$

где теперь $\mathbf{Z} = z + \sqrt{2}\theta\psi - i\theta\overline{\theta}\,\dot{z}$ — бозонное киральное $\mathcal{N} = 2$ суперполе. Чтобы сравнить (3.6.68) с (3.6.69), мы должны явно решить условия $\overline{\mathsf{U}}_A \circ \mathsf{U}_B = \delta_{AB}$ на U-поля, например в виде

$$\mathsf{U}_1 = \left(1 + \overline{\mathsf{Z}}\mathsf{Z}\right)^{-1/2} \begin{pmatrix} \overline{\mathsf{Z}} \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \mathsf{U}_2 = \left(1 + \overline{\mathsf{Z}}\mathsf{Z}\right)^{-1/2} \begin{pmatrix} 1 \\ \mathsf{Z} \end{pmatrix}, \tag{3.6.70}$$

где $\mathsf{Z} = z + i\theta\psi$ — бозонное комплексное $\mathcal{N} = 1$ суперполе. Подставляя эту параметризацию в (3.6.68) и далее редуцируя действие до компонентных полей, получаем

$$\mathcal{S} = \int \mathrm{d}t \left(\frac{\dot{\overline{z}}\dot{z}}{(1+\overline{z}z)^2} + \frac{i}{2}\frac{\overline{\psi}\nabla\psi + \psi\nabla\overline{\psi}}{(1+\overline{z}z)^2} + q\left(\frac{i\,\overline{z}\dot{z} + \overline{\psi}\psi}{1+\overline{z}z} + \frac{z\overline{z}\,\psi\overline{\psi}}{(1+\overline{z}z)^2} \right) \right),$$
$$\text{где} \quad \nabla\psi := \dot{\psi} - 2\left(\frac{\overline{z}\dot{z}}{1+\overline{z}z}\right)\psi, \quad \nabla\overline{\psi} := \dot{\overline{\psi}} - 2\left(\frac{\dot{\overline{z}}z}{1+\overline{z}z}\right)\overline{\psi}. \tag{3.6.71}$$

Это в точности совпадает с компонентной редукцией (3.6.69); это система, изученная в [3; 112] (а также в [94] для более общих таргет-пространств).

Фактически, обнаруженная связь D-модели с суперсимметричной $\mathbb{CP}^1$ сигма-моделью позволяет с помощью простых алгебраических манипуляций легко вычислить спектр лапласиана Дольбо на $\mathbb{CP}^1$ в присутствии магнитного монополя, поскольку именно этот оператор является гамильтонианом $\mathcal{N} = 2b$ сигма-модели. Это непосредственно вытекает из равенства твистованных статистических сумм. Выбирая достаточно большое значение p и вычисляя спектр D-модели, мы фактически получаем часть спектра лапласиана Дольбо. В этом, по сути, и заключается основное преимущество работы со спиновыми цепочками по сравнению с исходными сигма-моделями. Эта идея уже была проиллюстрирована на примере чисто бозонного сектора теории в Разделе 3.1.

3.6.2 От K-модели к $\mathcal{N} = 4$ сигма-модели.

В предыдущем разделе мы обсудили связь D-модели из Раздела 3.1 с суперсимметричной $\mathcal{N} = 2b$ сигма-моделью на $\mathbb{CP}^1$. Из Раздела 3.2 известно, что существует аналогичная K-модель, обладающая $\mathcal{N} = 4$ суперсимметрией, поэтому в настоящем разделе мы рассмотрим связь K-модели с $\mathcal{N} = 4$ суперсимметричной сигма-моделью на $\mathbb{CP}^1$.

Действие классической K-модели в $\mathcal{N} = 1$ суперполях, построенное в предыдущих разделах, имеет вид

$$\begin{aligned} \mathcal{S} = \int \mathrm{d}t\,\mathrm{d}\theta \Big[&- \overline{\mathsf{Z}}_A \circ D\mathsf{Z}_A + \overline{\Psi}_{12} D\Psi_{12} + \overline{\Phi}_{21} D\Phi_{21} + \\ &+ \Psi_{12}\overline{\mathsf{Z}}_1 \circ \mathsf{Z}_2 + \overline{\Psi}_{12}\overline{\mathsf{Z}}_2 \circ \mathsf{Z}_1 + \overline{\Phi}_{21}\overline{\mathsf{Z}}_1 \circ \mathsf{Z}_2 + \Phi_{21}\overline{\mathsf{Z}}_2 \circ \mathsf{Z}_1 + \\ &+ \Lambda_1\left(|\mathsf{Z}_1|^2 + |\Psi_{12}|^2 - |\Phi_{21}|^2 - p\right) + \Lambda_2\left(|\mathsf{Z}_2|^2 - |\Psi_{12}|^2 + |\Phi_{21}|^2 - p\right) \Big], \end{aligned} \tag{3.6.72}$$

где $\mathsf{Z}_1, \mathsf{Z}_2$ и Ψ_{12}, Φ_{21} — бозонные и фермионные суперполя соответственно. При изучении этого действия можно следовать той же линии, что и в Разделе 3.6.1, избавляясь от нединамических степеней свободы. Небольшое отличие состоит в том, что здесь нельзя одновременно исключить Ψ_{12} и Φ_{21}, одно из этих суперполей обязательно останется в действии. Наш выбор

— оставить Φ_{21}. Таким образом, мы получаем

$$\mathcal{S} = \int \mathrm{d}t\, \mathrm{d}\theta \Bigg[\frac{i}{2} \left(D\overline{\mathsf{U}}_1 \circ \mathsf{U}_2\overline{\mathsf{U}}_2 \circ \dot{\mathsf{U}}_1 + \dot{\overline{\mathsf{U}}}_1 \circ \mathsf{U}_2\overline{\mathsf{U}}_2 \circ D\mathsf{U}_1 \right) + \overline{\Phi}_{21} D\Phi_{21} + \Phi_{21} D\overline{\Phi}_{21} + \\ + i \left(\overline{\Phi}_{21}\overline{\mathsf{U}}_1 \circ \dot{\mathsf{U}}_2 + \Phi_{21}\overline{\mathsf{U}}_2 \circ \dot{\mathsf{U}}_1 \right) - 2\,\overline{\Phi}_{21}\Phi_{21} \left(\overline{\mathsf{U}}_1 \circ D\mathsf{U}_1 - \overline{\mathsf{U}}_2 \circ D\mathsf{U}_2 \right) \Bigg], \tag{3.6.73}$$

где снова предполагается, что U_A подчиняются условиям $\overline{\mathsf{U}}_A \circ \mathsf{U}_B = \delta_{AB}$. Теперь мы должны сравнить (3.6.73) с известным действием $\mathcal{N} = 4a$ суперсимметричной $\mathbb{CP}^1$ сигма-модели (стандартно формулируемой в $\mathcal{N} = 2$ суперпространстве с помощью вещественных суперполей). Для этого мы явно разрешим условия на U_A, следуя (3.6.70). Наконец, можно переписать действие в терминах компонентных полей[12]:

$$\mathcal{S} = \int \mathrm{d}t \left[\frac{\dot{\overline{z}}\dot{z}}{2\left(1+\overline{z}z\right)^2} + i\frac{\overline{\psi}\nabla\psi + \psi\nabla\overline{\psi}}{\left(1+\overline{z}z\right)^2} + i\left(\overline{\varphi}\,\nabla\varphi + \varphi\nabla\overline{\varphi}\right) - \right. \\ \left. - \frac{\overline{\varphi}\,\nabla\psi - \varphi\nabla\overline{\psi}}{\left(1+\overline{z}z\right)} - \frac{4\overline{\varphi}\varphi\overline{\psi}\psi}{\left(1+\overline{z}z\right)^2} \right]. \tag{3.6.74}$$

Чтобы привести это выражение к стандартному виду, перерастянем фермионы $\sqrt{2}\,\psi \to \psi$, $2\left(1+\overline{z}z\right)\varphi \to \varphi$ и диагонализуем квадратичную форму фермионов. В итоге получаем

$$\mathcal{S} = \frac{1}{2}\int \mathrm{d}t \left(\frac{\dot{\overline{z}}\dot{z}}{\left(1+\overline{z}z\right)^2} + \frac{i}{2}\frac{\overline{\psi}\nabla\psi + \psi\nabla\overline{\psi}}{\left(1+\overline{z}z\right)^2} + \frac{i}{2}\frac{\overline{\varphi}\,\nabla\varphi + \varphi\nabla\overline{\varphi}}{\left(1+\overline{z}z\right)^2} - \frac{2\overline{\varphi}\varphi\overline{\psi}\psi}{\left(1+\overline{z}z\right)^4} \right), \tag{3.6.75}$$

что является $\mathcal{N} = 4a$ суперсимметричной $\mathbb{CP}^1$ сигма-моделью [44; 94; 144; 156]. Таким образом, мы доказали, что K-модель эквивалентна $\mathcal{N} = 4a$ соответствующей сигма-модели в пределе, когда p стремится к бесконечности.

———————————————

[12] Суперполе Φ_{21} содержит нединамический бозон, который мы также исключаем.

Приложение A: O- и Sp-грассманианы как однородные пространства

В основной части диссертации мы использовали определение комплексных грассманианов как множеств (изотропных) плоскостей в заданном объемлющем пространстве $\mathbb{C}^n$. Как упоминалось во введении, они также являются однородными пространствами соответствующих компактных групп симметрии $\mathbf{U}$, $\mathbf{O}$ и $\mathbf{Sp}$. В настоящем Приложении мы приведём некоторую полезную информацию о групповой и геометрической структуре данных многообразий.

A.1 $\mathsf{OGr}(m,n)$ как однородное пространство

Начнём с ортогональных грассманианов. Как однородные пространства они представляют собой

$$\mathsf{OGr}(m,n) = \frac{\mathbf{O}(n)}{\mathbf{U}(m)\times\mathbf{O}(n-2m)}\,, \tag{A.1.76}$$

где $\mathbf{U}(m)$ вложена в диагональную $\mathbf{O}(2m)\subset\mathbf{O}(n)$. В частности, грассманиан вещественных 2-плоскостей возникает при $m=1$, тогда как грассманиан ортогональных комплексных структур в $\mathbb{R}^{2m}$ соответствует $n=2m$ (оба эти пространства являются симметрическими, см. Таблицу 2). Убедимся, что такое представление в виде однородного пространства действительно имеет место.

Доказательство представления (A.1.76) состоит из двух шагов. Во-первых, нужно показать, что компактная подгруппа $\mathbf{O}(n)=\mathbf{O}(n,\mathbb{C})\bigcap\mathbf{U}(n)$ действует транзитивно на множестве изотропных плоскостей. При доказательстве мы будем считать, что симметрическая форма $\mathbb{h}_n$ выбрана как в (1.2.31). Возьмём произвольную изотропную плоскость, параметризованную матрицей U размера $m\times n$, и выберем в ней ортонормированный базис относительно стандартного скалярного произведения в $\mathbb{C}^n$, так что $\overline{U}U=\mathbb{1}_m$. Эту матрицу U можно вложить в $n\times n$ унитарную ортогональную матрицу как

$$g=\left(U\ \mathbb{h}_n U^*\ Y\right)\,, \tag{A.1.77}$$

где Y — матрица из $n-2m$ дополнительных ортонормированных векторов, удовлетворяющих

условиям

$$\overline{Y}U = 0, \qquad Y^t \mathbb{h}_n U = 0 \tag{A.1.78}$$

$$\text{и} \qquad \overline{Y}Y = \mathbb{1}_{n-2m}\,. \tag{A.1.79}$$

Действительно, выберем произвольную матрицу Y_0, удовлетворяющую $\overline{Y}_0 U = 0$ и имеющую максимальный ранг $n-2m$. Если $Y_0^t \mathbb{h}_n U = X$ $(\neq 0)$, положим $Y = Y_0 - \mathbb{h}_n U^* X^t$, что обеспечит выполнение (A.1.78). Ортонормируя векторы в Y, мы добьёмся также выполнения (A.1.79).

В результате g унитарна, $\overline{g}g = \mathbb{1}_n$, и также ортогональна:

$$g^t \mathbb{h}_n g = \mathbb{h}_n \qquad \Longrightarrow \qquad g \in \mathbf{O}(n)\,. \tag{A.1.80}$$

Если теперь имеется другая изотропная плоскость, параметризованная матрицей U', мы можем аналогично вложить её в матрицу $g' \in \mathbf{O}(n)$. Тогда две матрицы связаны элементом группы

$$g' = g_0 g, \qquad g_0 \in \mathbf{O}(n) \qquad \Longrightarrow \qquad U' = g_0 U\,, \tag{A.1.81}$$

так что $\mathbf{O}(n)$ действительно действует транзитивно на таких плоскостях.

Второй шаг — найти стабилизатор m векторов $u_1, \cdots, u_m$ в $\mathbb{C}^n$, удовлетворяющих условию изотропности (1.2.14). Как и прежде, возьмём симметрическую форму (1.2.31) и m векторов, порождающих изотропное подпространство, в виде[13] $u_j = E_j$, $j = 1, \ldots, m$. Мы ищем матрицы $\mathbf{g} \in \mathbf{O}(n, \mathbb{C})$, стабилизирующие это подпространство и, кроме того, принадлежащие компактной подгруппе $\mathbf{O}(n) = \mathbf{O}(n, \mathbb{C}) \bigcap \mathbf{U}(n)$. Можно убедиться, что это матрицы вида

$$\mathbf{g} = \begin{pmatrix} \mathbf{g}_1 & 0 & 0 \\ 0 & (\mathbf{g}_1^t)^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{g}_2 \end{pmatrix} \in \mathbf{O}(n)\,, \tag{A.1.82}$$

где $\mathbf{g}_1 \in \mathbf{U}(m)$ и $\mathbf{g}_2 \in \mathbf{O}(n-2m)$. Это доказывает (A.1.76).

В качестве небольшого отступления также рассмотрим, когда подгруппа $\mathbf{SO}(n) \subset \mathbf{O}(n)$ действует транзитивно на ортогональном грассманиане. Сначала возьмём $n = 2$ и $m = 1$, где условие изотропности можно решить, взяв либо $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, либо $\widetilde{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Эти два решения связаны матрицей $g_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ с $\mathrm{Det}(g_0) = -1$, так что $g_0 \in \mathbf{O}(2)$. Таким образом, здесь $\mathsf{OGr}(1,2) = \frac{\mathbf{O}(2)}{\mathbf{U}(1)} = \mathbb{Z}_2$ является множеством из двух точек.

Для больших m можно взять векторы $u_j = E_j$, $j = 1, \ldots, m$, или $\widetilde{u}_j := E_{m+j}$, $j = 1, \ldots, m$, или их смесь. Заметим, однако, что когда $n \neq 2m$, можно перевести $\widetilde{u}_j$ в u_j

[13] Здесь E_j — стандартные единичные векторы с компонентами $(E_j)_k = \delta_{jk}$.

преобразованием из $\mathbf{SO}(n)$. Для $n = 3$, например, достаточно взять матрицу $g_1 = \begin{pmatrix} g_0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ с $\mathrm{Det}(g_1) = 1$, а для больших n — её подходящее вложение. Таким образом, в этих случаях $\mathbf{SO}(n)$ действует транзитивно на множестве изотропных плоскостей.

Единственный оставшийся случай — $n = 2m$. Здесь можно перевести пары векторов $\widetilde{u}_1, \widetilde{u}_2$ в u_1, u_2, выбрав матрицу перестановки $g_2 = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1}_2 \\ \mathbb{1}_2 & 0 \end{pmatrix}$ с $\mathrm{Det}(g_2) = 1$ или её подходящее вложение. Поэтому следует различать два случая: когда число векторов $\widetilde{u}_j$ чётно или нечётно. Перейти от одного случая к другому можно только с помощью $\mathbf{O}(n)$, но не $\mathbf{SO}(n)$ преобразования, и в результате ортогональный грассманиан имеет две компоненты связности:

$$\mathsf{OGr}(m, 2m) = \mathsf{OGr}^+(m, 2m) \bigsqcup \mathsf{OGr}^-(m, 2m)\,, \tag{A.1.83}$$

где каждая из них есть $\mathsf{OGr}^{\pm}(m, 2m) \simeq \frac{\mathbf{SO}(2m)}{\mathbf{U}(m)}$.

A.2 $\mathsf{SGr}(m, 2n)$ как однородное пространство

Перейдём к аналогичному описанию симплектических грассманианов как однородных пространств компактной группы $\mathbf{Sp}(2n)$. Действительно, имеется представление в виде однородного пространства

$$\mathsf{SGr}(m, 2n) = \frac{\mathbf{Sp}(2n)}{\mathbf{U}(m) \times \mathbf{Sp}(2(n-m))}\,. \tag{A.2.84}$$

Здесь $\mathbf{U}(m)$ вложена в диагональную $\mathbf{Sp}(2m) \subset \mathbf{Sp}(2n)$. Докажем, что такое представление в действительности имеет место.

Сначала докажем, что компактная группа $\mathbf{Sp}(2n)$ действует транзитивно на пространстве изотропных плоскостей. Как обычно, начнём с матрицы U, составленной из m линейно независимых векторов выделенной плоскости. Будем считать эти векторы ортонормированными, так что $U^t \omega_{2n} U = 0$ и $\overline{U} U = \mathbb{1}_m$. Для данной U построим матрицу $g \in \mathbf{Sp}(2n)$ следующим образом:

$$g = (U\ \omega_{2n}^{-1} U^*\ Y)\,, \tag{A.2.85}$$

где Y — дополнительный набор векторов, такой что $Y^t \omega_{2n} U = 0$ и $\overline{Y} U = 0$. По построению $\overline{g} g = \mathbb{1}_{2n}$, так что g унитарна, и $g^t \omega_{2n} g = \omega_{2n}$, следовательно g симплектична. Иными словами, $g \in \mathbf{Sp}(2n)$.

Если имеется другая изотропная m-мерная плоскость, параметризованная матрицей U', точно так же строим элемент группы $g' \in \mathbf{Sp}(2n)$. В результате два элемента группы связаны $\mathbf{Sp}(2n)$-преобразованием:

$$g' = g_0 g, \qquad g_0 \in \mathbf{Sp}(2n) \qquad \Longrightarrow \qquad U' = g_0 U\,. \tag{A.2.86}$$

Таким образом, транзитивность доказана.

Чтобы вычислить стабилизатор, удобно разбить симплектическую форму на две части

$$\omega_{2n} = \begin{pmatrix} \omega_{2m} & 0 \\ 0 & \omega_{2n-2m} \end{pmatrix} \tag{A.2.87}$$

как в (1.3.53). Теперь можно взять $u_j = E_j$, $j = 1, \ldots, m$ в качестве базиса изотропной m-мерной плоскости. Матрицы $\mathbf{g}$, стабилизирующие это подпространство и принадлежащие компактной подгруппе $\mathbf{Sp}(2n) = \mathbf{Sp}(2n, \mathbb{C}) \bigcap \mathbf{U}(2n)$, имеют вид

$$\mathbf{g} = \begin{pmatrix} \mathbf{g}_1 & 0 & 0 \\ 0 & (\mathbf{g}_1^t)^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{g}_2 \end{pmatrix}, \tag{A.2.88}$$

где $g_1 \in \mathbf{U}(m)$ и $g_2 \in \mathbf{Sp}(2n-2m)$, что доказывает (A.2.84).

Снова рассмотрим интересные предельные случаи. Очевидно, $m = n$ соответствует лагранжеву грассманиану. Случай $m = 1$ более любопытен. Здесь условие изотропности (1.3.40) тривиально, так что

$$\mathsf{SGr}(1, 2n) \simeq \mathbb{CP}^{2n-1}. \tag{A.2.89}$$

Чтобы вывести это из представления в виде факторпространства (A.2.84), заметим, что для $4n-1$-мерных сфер имеется представление

$$\mathbb{S}^{4n-1} \simeq \frac{\mathbf{Sp}(2n)}{\mathbf{Sp}(2(n-1))}. \tag{A.2.90}$$

Это кватернионный аналог представления $\mathbb{S}^{2n-1} \simeq \frac{\mathbf{SU}(n)}{\mathbf{SU}(n-1)}$ для сфер нечётной размерности. Согласно (A.2.84), симплектический грассманиан $\mathsf{SGr}(1, 2n)$ включает дополнительное факторизование сферы (A.2.90) по $\mathbf{U}(1)$, что является расслоением Хопфа и приводит к проективному пространству $\mathbb{CP}^{2n-1}$.

A.3 Инвариантные метрики на $\mathsf{OGr}(m, n)$

Здесь мы приведем построение наиболее общих инвариантных метрик на ортогональных и симплектических грассманианах. Как будет показано, в общем случае существует семейство метрик, и метрика, возникающая из формулировки Гросса–Невё, соответствует особой точке в этом семействе. Начнём с ортогонального случая.

Вернёмся к представлению (A.1.76) ортогонального грассманиана как однородного про-

$$\mathfrak{o}(n) = \left(\begin{array}{c|c} \mathfrak{u}(m) \oplus \mathsf{m}_2 & A \in \mathsf{m}_1 \\ \hline -A^t \in \mathsf{m}_1 & \mathfrak{o}(n-2m) \end{array}\right)$$

Рис. 3.2: Разложение (A.3.91) алгебры Ли $\mathfrak{o}(n)$. Любой элемент m_1 определяется матрицей $A \in \mathrm{Hom}(\mathbb{C}^{n-2m}, \mathbb{C}^{2m})$.

странства группы $\mathbf{O}(n)$. Соответственно выполним разложение алгебры Ли

$$\begin{aligned} &\mathfrak{o}(n) = \mathsf{h} \oplus \mathsf{m}\,, \qquad \text{где} \\ &\mathsf{h} = \mathsf{u}(m) \oplus \mathfrak{o}(n-2m)\,, \qquad \mathsf{m} = \mathsf{h}^{\perp}\,, \end{aligned} \tag{A.3.91}$$

где под $\mathsf{h}^{\perp}$ мы понимаем ортогональное дополнение к h относительно метрики Киллинга. Поскольку $\mathfrak{o}(n)$ — пространство кососимметрических $n \times n$ матриц, метрика — это просто след на таких матрицах. Кроме того, $[\mathsf{h}, \mathsf{m}] \subset \mathsf{m}$, так что подалгебра h действует на m. Более того, над вещественными числами m расщепляется на два неприводимых представления относительно $[\mathsf{h}, \mathsf{m}_i] \subset \mathsf{m}_i$:

$$\mathsf{m} = \mathsf{m}_1 \oplus \mathsf{m}_2\,. \tag{A.3.92}$$

Заметим, что крайние случаи — симметрические пространства $\frac{\mathbf{SO}(n)}{\mathbf{SO}(2)\times\mathbf{SO}(n-2)}$ и $\frac{\mathbf{SO}(2m)}{\mathbf{U}(m)}$ — соответствуют $\mathsf{m}_2 = 0$ и $\mathsf{m}_1 = 0$ соответственно. Приведённое разложение более наглядно показано на Рис. 3.2.

Опишем m_1 и m_2 более явно. Чтобы описать m_2, выберем комплексную структуру

$$\mathcal{J} = \mathbb{1}_m \otimes i\sigma_2\,. \tag{A.3.93}$$

Тогда стабилизатор $\mathfrak{u}(m)$ определяется как множество преобразований, сохраняющих её:

$$\mathfrak{u}(m) = \left\{ \quad \alpha \in \mathfrak{o}(2m), \qquad [\alpha, \mathcal{J}] = 0 \quad \right\}. \tag{A.3.94}$$

Его можно явно описать следующим образом:

$$\alpha = \alpha_1 \otimes \mathbb{1}_2 + \alpha_2 \otimes i\sigma_2 \qquad \text{где} \qquad \alpha_1^t = -\alpha_1, \quad \alpha_2^t = \alpha_2\,. \tag{A.3.95}$$

Соответственно, ортогональное дополнение m_2 описывается матрицами

$$\beta = \beta_1 \otimes \sigma_1 + \beta_2 \otimes \sigma_3 \qquad \text{где} \qquad \beta_1^t = -\beta_1, \quad \beta_2^t = -\beta_2\,. \tag{A.3.96}$$

Далее можно определить комплексную структуру на m_2, задавая голоморф-

ное/антиголоморфное подпространства в $(\mathsf{m}_2)_{\mathbb{C}}$:

$$(\mathsf{m}_2)_{\pm} = \left\{ \quad \beta \otimes (\sigma_1 \mp i\sigma_3)\,, \qquad \beta^t = -\beta \quad \right\}. \tag{A.3.97}$$

Легко видеть, что $(\mathsf{m}_2)_{\pm}$ изотропны относительно формы следа. Можно также проверить, что эти подпространства сохраняются действием стабилизатора $\mathfrak{u}(m)$:

$$[\alpha_1 \otimes \mathbb{1}_2 + \alpha_2 \otimes i\sigma_2, \beta \otimes (\sigma_1 \mp i\sigma_3)] = ([\alpha_1, \beta] - i\{\alpha_2, \beta\}) \otimes (\sigma_1 \mp i\sigma_3)\,. \tag{A.3.98}$$

Таким образом, $(\mathsf{m}_2)_{\mathbb{C}} = \mathsf{m}_{2+} + \mathsf{m}_{2-}$ расщепляется в сумму двух (сопряжённых) неприводимых представлений $\mathfrak{u}(m)$.

Выберем также комплексную структуру на m_1. Как показано на Рис. 3.2, m_1 можно отождествить с пространством матриц $\mathrm{Hom}(\mathbb{C}^{n-2m}, \mathbb{C}^{2m})$ размера $(2m) \times (n-2m)$. Голоморфное/антиголоморфное подпространства тогда определяются следующим образом:

$$\mathsf{m}_{1\pm} = \left\{ \quad v \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ \pm i \end{pmatrix} \quad \right\}, \qquad v \in \mathrm{Hom}(\mathbb{C}^{n-2m}, \mathbb{C}^m)\,. \tag{A.3.99}$$

Снова покажем, что эти подпространства сохраняются действием $\mathfrak{u}(m)$:

$$(\alpha_1 \otimes \mathbb{1}_2 + \alpha_2 \otimes (i\sigma_2))\; v \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ \pm i \end{pmatrix} = (\alpha_1 \pm i\alpha_2) v \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ \pm i \end{pmatrix}. \tag{A.3.100}$$

Таким образом, $\mathfrak{u}(m)$ действует на вектор $v \in \mathrm{Hom}(\mathbb{C}^{n-2m}, \mathbb{C}^m)$ антиэрмитовыми матрицами, как и должно быть.

Наконец, нам нужны коммутационные свойства[14] $[\mathsf{m}_2, \mathsf{m}_1]$ и $[\mathsf{m}_1, \mathsf{m}_1]$. Рассмотрим действие m_2 на $\mathsf{m}_{1\pm}$:

$$(\beta_1 \otimes \sigma_1 + \beta_2 \otimes \sigma_3)\, v \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ \pm i \end{pmatrix} = (\beta_2 \pm i\beta_1) v \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ \mp i \end{pmatrix}. \tag{A.3.101}$$

Что касается последнего коммутатора, очевидно, $[\mathsf{m}_1, \mathsf{m}_1] \subset \mathfrak{o}(n-2m) \oplus (\mathfrak{u}(m) \oplus \mathsf{m}_2)$, и нас интересует выделение $\mathfrak{u}(m)$- и m_2-компонент в правой части. Получаем

$$[\mathsf{m}_{1\pm}, \mathsf{m}_{1\pm}] = (v_2 v_1^t - v_1 v_2^t) \otimes (\sigma_3 \pm i\sigma_1) \;\subset \mathsf{m}_{2\pm}\,, \tag{A.3.102}$$

$$[\mathsf{m}_{1\pm}, \mathsf{m}_{1\mp}] = (v_2 v_1^t - v_1 v_2^t) \otimes \mathbb{1}_2 \mp (v_2 v_1^t + v_1 v_2^t) \otimes \sigma_2 \;\subset \mathsf{u}(m)\,. \tag{A.3.103}$$

[14] Коммутационные свойства $[\mathsf{m}_{2\pm}, \mathsf{m}_{2\pm}]$ и $[\mathsf{m}_{2\pm}, \mathsf{m}_{2\mp}]$ следуют из того факта, что $\frac{\mathbf{SO}(2m)}{\mathbf{U}(m)}$ является эрмитовым симметрическим пространством.

Собирая всё вышесказанное, получаем следующие соотношения:

$$\begin{aligned}
&[\mathsf{m}_{2\pm},\mathsf{m}_{1\pm}]=0\,, \qquad [\mathsf{m}_{1\pm},\mathsf{m}_{1\pm}]\subset\mathsf{m}_{2\pm}\,, \qquad [\mathsf{m}_{2\pm},\mathsf{m}_{2\pm}]=0\,,\\
&[\mathsf{m}_{2-},\mathsf{m}_{1+}]\subset\mathsf{m}_{1-}\,, \qquad [\mathsf{m}_{2+},\mathsf{m}_{1-}]\subset\mathsf{m}_{1+}\\
&[\mathsf{m}_{1+},\mathsf{m}_{1-}]\subset\mathfrak{o}(n-2m)\oplus\mathfrak{u}(m)\,, \qquad [\mathsf{m}_{2+},\mathsf{m}_{2-}]\subset\mathfrak{u}(m)\,.
\end{aligned} \tag{A.3.104}$$

В частности, первая строка означает, что комплексная структура на m, определённая выбором голоморфных подпространств как в (A.3.97) и (A.3.99), интегрируема.

Теперь рассмотрим элемент группы $g\in\mathbf{O}(n)$ и стандартный элемент Маурера–Картана

$$J=-g^{-1}\mathrm{d}g=J_{\mathsf{h}}+J_{\mathsf{m}}\,. \tag{A.3.105}$$

Согласно (A.3.92), разложим ток как $J_{\mathsf{m}}=J_{\mathsf{m}_1}+J_{\mathsf{m}_2}$. Наиболее общая инвариантная метрика тогда имеет вид

$$\mathrm{d}s^2=\frac{a}{2}\,\mathrm{Tr}(J^2_{\mathsf{m}_1})+\frac{b}{2}\,\mathrm{Tr}(J^2_{\mathsf{m}_2})= \tag{A.3.106}$$

$$=a\,\mathrm{Tr}(J_{\mathsf{m}_{1+}}J_{\mathsf{m}_{1-}})+b\,\mathrm{Tr}(J_{\mathsf{m}_{2+}}J_{\mathsf{m}_{2-}})\,. \tag{A.3.107}$$

При переходе ко второй строке мы учли, что $\mathsf{m}_{1\pm}$ и $\mathsf{m}_{2\pm}$ являются изотропными подпространствами относительно формы следа, что легко видеть из (A.3.97) и (A.3.99). Таким образом, метрика эрмитова относительно выбранной интегрируемой комплексной структуры. Соответствующая фундаментальная эрмитова форма, по определению,

$$\Omega=\frac{a}{2}\,\mathrm{Tr}\left(J_{\mathsf{m}_{1+}}\wedge J_{\mathsf{m}_{1-}}\right)+\frac{b}{2}\,\mathrm{Tr}\left(J_{\mathsf{m}_{2+}}\wedge J_{\mathsf{m}_{2-}}\right)\,. \tag{A.3.108}$$

Проверим, в каком случае эта форма замкнута, т.е. когда метрика является кэлеровой. Используем уравнение Маурера–Картана $\mathrm{d}J-J\wedge J=0$ вместе с коммутационными соотношениями (A.3.104) алгебры, чтобы получить

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\Omega=&\frac{a}{2}\,\mathrm{Tr}\left(\{J_{\mathsf{m}_{2+}},J_{\mathsf{m}_{1-}}\}\wedge J_{\mathsf{m}_{1-}}\right)-\frac{a}{2}\,\mathrm{Tr}\left(J_{\mathsf{m}_{1+}}\wedge\{J_{\mathsf{m}_{2-}},J_{\mathsf{m}_{1+}}\}\right)+\\
&+\frac{b}{4}\,\mathrm{Tr}\left(\{J_{\mathsf{m}_{1+}},J_{\mathsf{m}_{1+}}\}\wedge J_{\mathsf{m}_{2-}}\right)-\frac{b}{4}\,\mathrm{Tr}\left(J_{\mathsf{m}_{2+}}\wedge\{J_{\mathsf{m}_{1-}},J_{\mathsf{m}_{1-}}\}\right)\,.
\end{aligned} \tag{A.3.109}$$

Находим, что $\mathrm{d}\Omega=0$ в одном из трёх случаев:

- $2a=b$,
- $\mathsf{m}_1=0$, так что $\mathrm{d}s^2=\frac{b}{2}\,\mathrm{Tr}(J^2_{\mathsf{m}_2})$,
- $\mathsf{m}_2=0$, так что $\mathrm{d}s^2=\frac{a}{2}\,\mathrm{Tr}(J^2_{\mathsf{m}_1})$.

Как упоминалось ранее, последние два случая соответствуют симметрическим пространствам. Наконец, отметим, что метрика, фигурирующая в наших сигма-моделях, является так называемой нормальной (редуктивной) метрикой, определяемой как $\mathrm{d}s^2=\frac{a}{2}\,\mathrm{Tr}(J^2_{\mathsf{m}})$. Ес-

$$\mathfrak{sp}(2n) = \left(\begin{array}{c|c} \mathfrak{u}(m) \oplus \mathsf{m}_2 & A \in \mathsf{m}_1 \\ \hline -A^t \in \mathsf{m}_1 & \mathfrak{sp}(2n-2m) \end{array}\right)$$

Рис. 3.3: Разложение (A.4.113) алгебры Ли $\mathfrak{sp}(2n)$. Любой элемент m_1 определяется матрицей $A \in \mathrm{Hom}(\mathbb{C}^{2n-2m}, \mathbb{C}^{2m})$.

ли рассматривать её как часть общего семейства метрик выше, она соответствует $b = a$. Отсюда следует, что эта метрика является кэлеровой только в случае симметрических пространств.

A.4 Инвариантные метрики на $\mathsf{SGr}(m, 2n)$

В этом Приложении мы укажем построение инвариантных метрик на симплектических грассманианах. Большинство методов легко переносятся из теории ортогональных грассманианов, изложенной выше.

Сначала напомним определение симплектической алгебры $\mathfrak{sp}(2n)$. Она состоит из преобразований, сохраняющих симплектическую форму на $\mathbb{C}^{2n}$. В качестве модельной симплектической формы можно взять $\mathcal{J}$ из (A.3.93):

$$\mathcal{J} = \mathbb{1}_n \otimes i\sigma_2 \,. \tag{A.4.110}$$

Тогда симплектическая алгебра есть

$$\mathfrak{sp}(2n) = \left\{ \quad \tau \in \mathrm{Mat}_{2n}(\mathbb{C}) : \qquad \tau^t \mathcal{J} + \mathcal{J}\tau = 0 \quad \right\}. \tag{A.4.111}$$

Можно выбрать следующий базис:

$$\begin{aligned} &\mathfrak{sp}(2n) = \mathrm{Span}\left(\alpha_1 \otimes \mathbb{1}_2, \quad \alpha_2 \otimes i\sigma_2, \quad \beta_1 \otimes \sigma_1, \quad \beta_2 \otimes \sigma_3\right), \\ &\alpha_1^t = -\alpha_1, \quad \alpha_2^t = \alpha_2, \quad \beta_1^t = \beta_1, \quad \beta_2^t = \beta_2 \,. \end{aligned} \tag{A.4.112}$$

Заметим, что это параллельно выбору базиса (A.3.95)-(A.3.96), за исключением другого выбора свойств симметрии для β.

Согласно определению симплектического грассманиана, приведём ортогональное разложение алгебры Ли

$$\begin{aligned} &\mathfrak{sp}(2n) = \mathsf{h} \oplus \mathsf{m}\,, \qquad \text{где} \\ &\mathsf{h} = \mathfrak{u}(m) \oplus \mathfrak{sp}(2n-2m)\,, \qquad \mathsf{m} = \mathsf{h}^\perp\,, \end{aligned} \tag{A.4.113}$$

где под $\mathsf{h}^\perp$ мы понимаем ортогональное дополнение к h относительно метрики Киллинга. Подалгебра $\mathfrak{sp}(2n-2m) \subset \mathfrak{sp}(2n)$ вложена диагонально. Что касается $\mathfrak{u}(m)$, напомним, что

$$\mathfrak{u}(m) = \mathfrak{o}(2m) \bigcap \mathfrak{sp}(2m)\,. \tag{A.4.114}$$

Таким образом, $\mathfrak{u}(m)$ вложена в $\mathfrak{sp}(2m)$ по той же формуле (A.3.95):

$$\alpha = \alpha_1 \otimes \mathbb{1}_2 + \alpha_2 \otimes i\sigma_2 \qquad \text{где} \qquad \alpha_1^t = -\alpha_1, \quad \alpha_2^t = \alpha_2\,. \tag{A.4.115}$$

Снова, как и в ортогональном случае, над вещественными числами m расщепляется на два неприводимых представления ($[\mathsf{h}, \mathsf{m}_i] \subset \mathsf{m}_i$):

$$\mathsf{m} = \mathsf{m}_1 \oplus \mathsf{m}_2\,. \tag{A.4.116}$$

Это разложение показано на Рис. 3.3. В частности, m_2 состоит из матриц

$$\beta = \beta_1 \otimes \sigma_1 + \beta_2 \otimes \sigma_3 \qquad \text{где} \qquad \beta_1^t = \beta_1, \quad \beta_2^t = \beta_2\,. \tag{A.4.117}$$

Можно определить комплексную структуру на m_1 и m_2 так же, как в ортогональном случае:

$$(\mathsf{m}_2)_\pm = \left\{ \quad \beta \otimes (\sigma_1 \mp i\sigma_3)\,, \qquad \beta^t = \beta \quad \right\}, \tag{A.4.118}$$

$$(\mathsf{m}_1)_\pm = \left\{ \quad v \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ \pm i \end{pmatrix} \quad \right\}. \tag{A.4.119}$$

Все последующие вычисления повторяют вычисления из ортогонального случая. В результате приходим к тем же коммутационным соотношениям (A.3.104), с очевидной заменой $\mathfrak{o} \to \mathfrak{sp}$:

$$\begin{aligned} &[\mathsf{m}_{2\pm}, \mathsf{m}_{1\pm}] = 0\,, \qquad [\mathsf{m}_{1\pm}, \mathsf{m}_{1\pm}] \subset \mathsf{m}_{2\pm}\,, \qquad [\mathsf{m}_{2\pm}, \mathsf{m}_{2\pm}] = 0\,, \\ &[\mathsf{m}_{2-}, \mathsf{m}_{1+}] \subset \mathsf{m}_{1-}\,, \qquad [\mathsf{m}_{2+}, \mathsf{m}_{1-}] \subset \mathsf{m}_{1+}\,, \\ &[\mathsf{m}_{1+}, \mathsf{m}_{1-}] \subset \mathfrak{sp}(n-2m) \oplus \mathfrak{u}(m)\,, \qquad [\mathsf{m}_{2+}, \mathsf{m}_{2-}] \subset \mathfrak{u}(m)\,. \end{aligned} \tag{A.4.120}$$

Снова наиболее общая инвариантная метрика имеет вид

$$\mathrm{d}s^2 = a\,\mathrm{Tr}(J_{\mathsf{m}_{1+}} J_{\mathsf{m}_{1-}}) + b\,\mathrm{Tr}(J_{\mathsf{m}_{2+}} J_{\mathsf{m}_{2-}})\,, \tag{A.4.121}$$

где $J_{\mathsf{m}_\pm}$ — компоненты тока Маурера–Картана. Метрика является кэлеровой, если $2a = b$, или если пространство симметрическое (когда $\mathsf{m}_1 = 0$). Метрики, фигурирующие в наших сигма-моделях, являются редуктивными метриками $\mathrm{d}s^2 = \frac{a}{2}\mathrm{Tr}(J_{\mathsf{m}}^2)$, и отсюда следует, что они кэлеровы только в случае симметрического пространства (которым является лагранжев грассманиан).

Приложение Б: Касательное расслоение грассманианов

Как обсуждалось в основном тексте, фермионы в суперсимметричных сигма-моделях (т.е., в нашей постановке, когда таргет-пространство является квадрикой или максимальным ортогональным/симплектическим грассманианом) принимают значения в касательном расслоении соответствующего грассманиана[15]. Поскольку ортогональный и симплектический случаи параллельны, мы рассмотрим только ортогональный. Здесь фермионы можно рассматривать как сечения расслоения $\Pi\big(\mathsf{TOGr}(m,n)\big)$ (при $m=1$ или $n=2m$). Таким образом, полезно понять структуру касательного расслоения, чему и посвящено данное Приложение.

Стандартный результат о касательных расслоениях ортогональных грассманианов (справедливый для любых значений m,n) заключается в том, что существует короткая точная последовательность голоморфных векторных расслоений

$$0 \longrightarrow \Big(\mathcal{S}^\vee \otimes \big(\mathcal{Q}^\vee/\mathcal{S}\big)\Big)\Big|_{\mathsf{OGr}(m,n)} \longrightarrow \mathsf{TOGr}(m,n) \longrightarrow \left(\bigwedge^2 \mathcal{S}^\vee\right)\Big|_{\mathsf{OGr}(m,n)} \longrightarrow 0\,. \qquad \text{(Б.0.122)}$$

Здесь $\mathcal{S}$ — тавтологическое расслоение над грассманианом, $\mathcal{S}^\vee$ — двойственное к нему, а $\mathcal{Q}\simeq\mathbb{C}^n/\mathcal{S}$ — факторрасслоение.

Б.0.1 “Дифференциально-геометрический” аргумент.

Докажем утверждение о короткой точной последовательности дифференциально-геометрическим способом. Рассмотрим вектор $v := X\frac{\partial}{\partial U}$, который формально является сечением $\mathcal{S}^\vee\otimes\mathbb{C}^n$. Он касателен к $\mathsf{OGr}(m,n)$, если

$$0 = v\big(U^tU\big) = X^tU + U^tX\,. \qquad \text{(Б.0.123)}$$

Таким образом, v является сечением $\mathsf{TOGr}(m,n)$ тогда и только тогда, когда выполняется (Б.0.123). С другой стороны, v является сечением $\Big(\mathcal{S}^\vee\otimes\big(\mathcal{Q}^\vee/\mathcal{S}\big)\Big)\Big|_{\mathsf{OGr}(m,n)}$, если

$$X^tU = 0 \qquad \text{и} \qquad X\sim X+U\lambda\,,\quad \lambda\in \mathrm{Mat}_m\,. \qquad \text{(Б.0.124)}$$

[15] Со сдвинутой фермионной чётностью, означающей, что слои считаются “фермионными”.

Действительно, первое равенство означает, что v обращается в нуль на $\mathcal{S}$ и, как таковое, является сечением $\mathcal{S}^\vee \otimes \mathcal{Q}^\vee$. Второе отождествление, в свою очередь, означает, что мы переходим к факторрасслоению $\mathcal{S}^\vee \otimes \left(\mathcal{Q}^\vee/\mathcal{S}\right)$.

Очевидно, что $X^tU = 0$ влечёт (Б.0.123), что доказывает часть вложения в (Б.0.122). На втором шаге, исходя из v, удовлетворяющего (Б.0.123), можно определить элемент $\left(\bigwedge^2 \mathcal{S}^\vee\right)\Big|_{\mathsf{OGr}(m,n)}$ с помощью отображения

$$v \mapsto Y := X^tU\,. \tag{Б.0.125}$$

Правая часть этого элемента кососимметрична в силу (Б.0.123). Более того, по определению (Б.0.124) ядро этого отображения в точности задаётся сечениями $\left(\mathcal{S}^\vee \otimes \left(\mathcal{Q}^\vee/\mathcal{S}\right)\right)\Big|_{\mathsf{OGr}(m,n)}$. Таким образом, точность доказана. Указанное отображение также сюръективно, поскольку для любого сечения Y расслоения $\bigwedge^2 \mathcal{S}^\vee$ можно построить соответствующее векторное поле $X = -P^tY$, которое отображается в Y при (Б.0.125).

Б.0.2 Экстремальные грассманианы.

Последовательность (Б.0.122) автоматически определяет структуру касательных расслоений в максимальном и минимальном случаях,

$$\mathsf{TOGr}(1,n) \simeq \left(\mathcal{S}^\vee \otimes \left(\mathcal{Q}^\vee/\mathcal{S}\right)\right)\Big|_{\mathsf{OGr}(1,n)}, \quad \mathsf{TOGr}(m,2m) \simeq \left(\bigwedge^2 \mathcal{S}^\vee\right)\Big|_{\mathsf{OGr}(m,2m)}, \tag{Б.0.126}$$

потому что в каждом из этих двух случаев либо первый, либо последний член в последовательности (Б.0.122) обращается в нуль. Например, при $m = 1$ внешний квадрат $\bigwedge^2 \mathcal{S}^\vee = 0$ по соображениям размерности. Альтернативно, имеем $X^tU + U^tX = 2X^tU$, так что условия, определяющие первые два расслоения в (Б.0.122), совпадают. В противоположном случае $n = 2m$ уравнение $X^tU = 0$ приводит к $X = U\lambda$, где $\lambda \in \mathrm{Mat}_m$. Это означает, что $X \sim 0$ в факторе (Б.0.124), так что в этом случае первый член в (Б.0.122) обращается в нуль.

Единственное отличие от этой картины в симплектическом случае состоит в том, что внешний квадрат заменяется симметрическим квадратом, т.е.

$$\mathsf{TSGr}(m,2m) \simeq \left(\mathrm{Sym}^2\mathcal{S}^\vee\right)\Big|_{\mathsf{SGr}(m,2m)}. \tag{Б.0.127}$$

Различие возникает из-за того, что здесь m-мерные плоскости в $\mathbb{C}^n$ изотропны относительно кососимметрической билинейной формы.

Б.0.3 “Формальный” аргумент.

Рассмотрим также более формальный способ доказательства (2.3.40) (который, как уже объяснялось, является частным случаем (Б.0.122)). Рассмотрим для разнообразия лагран-

жев грассманиан $\mathsf{SGr}(m,2m) \hookrightarrow \mathsf{Gr}(m,2m)$, определённый симплектической формой ω на $\mathbb{C}^n$. "Точная последовательность нормального расслоения" для этого вложения имеет вид

$$0 \longrightarrow \mathrm{T}\mathsf{SGr}(m,2m) \longrightarrow \mathrm{T}\mathsf{Gr}(m,2m)\Big|_{\mathsf{SGr}(m,2m)} \longrightarrow \mathcal{N}_{\mathsf{SGr}(m,2m)} \longrightarrow 0\,, \tag{Б.0.128}$$

которая есть просто переформулировка определения нормального расслоения $\mathcal{N}_{\mathsf{SGr}(m,2m)}$. Можно интерпретировать симплектическую форму как сечение $\bigwedge^2 \mathcal{S}^\vee$, а лагранжев грассманиан — как множество нулей этого сечения. Таким образом, нормальное расслоение равно

$$\mathcal{N}_{\mathsf{SGr}(m,2m)} \simeq \left(\bigwedge^2 \mathcal{S}^\vee\right)\Big|_{\mathsf{SGr}(m,2m)}\,. \tag{Б.0.129}$$

Кроме того, существует хорошо известный изоморфизм для касательного расслоения обычного грассманиана [57], а именно $\mathrm{T}\mathsf{Gr}(m,2m) \simeq \mathcal{S}^\vee \otimes \mathcal{Q}$. Подставляя эти факты в (Б.0.128), получаем короткую точную последовательность

$$0 \longrightarrow \mathrm{T}\mathsf{SGr}(m,2m) \xrightarrow{\iota} \Big(\mathcal{S}^\vee \otimes \mathcal{Q}\Big)\Big|_{\mathsf{SGr}(m,2m)} \xrightarrow{\rho} \left(\bigwedge^2 \mathcal{S}^\vee\right)\Big|_{\mathsf{SGr}(m,2m)} \longrightarrow 0\,. \tag{Б.0.130}$$

Рассмотрим расслоение $\mathcal{S}^\perp$ плоскостей в $\mathbb{C}^n$, ортогональных к $\mathcal{S}$ относительно симплектической формы ω. Тогда ω индуцирует изоморфизм между $\mathcal{S}$ и $\left(\mathbb{C}^n\big/\mathcal{S}^\perp\right)^\vee$. Однако в максимальном (лагранжевом) случае имеем $\mathcal{S} \simeq \mathcal{S}^\perp$. Напомним, что $\mathcal{Q} \simeq \mathbb{C}^n\big/\mathcal{S}$, таким образом в максимальном случае $\mathcal{Q} \simeq \mathcal{S}^\vee$. Отсюда следует, что средний член в (Б.0.130) есть просто $\mathcal{S}^\vee \otimes \mathcal{S}^\vee \simeq \mathrm{Sym}^2\mathcal{S}^\vee \oplus \bigwedge^2 \mathcal{S}^\vee$. Таким образом, эпиморфизм ρ является просто проекцией на второе слагаемое, тогда как ι — это тождественное отображение в первое слагаемое. Это доказывает нужное нам утверждение в симплектическом случае; тот же аргумент работает и в максимальном ортогональном случае с очевидными корректировками.

Существует также формальный способ доказательства (Б.0.122) для произвольных ортогональных или симплектических грассманианов, но общее доказательство более техническое. Оно опирается на комбинацию "точной последовательности нормального расслоения" (Б.0.130), "точной последовательности тавтологического расслоения"

$$0 \longrightarrow \mathcal{S} \longrightarrow \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathcal{Q} \longrightarrow 0$$

и леммы о змее.

Приложение B: Детали суперсимметричных преобразований для моделей с “геометрическими” фермионами

Действие (2.3.56) Гросса-Невё с “геометрическими и минимально взаимодействующими” фермионами для сигма-моделей максимальных ортогональных грассманианов было получено из явно суперсимметричного (на поверхности связей) действия (2.2.30). Следовательно, действие (2.3.56) также должно обладать аналогичной суперсимметрией. В этом разделе мы выводим суперсимметричные преобразования полей $\{V, U, H, F\}$ в модели (2.3.56) и проверим инвариантность действия. Отметим, что число независимых компонент полей V и U не равно числу независимых компонент полей H и F. Это связано с калибровочной избыточностью: если её учесть, то теорема о равенстве бозонных и фермионных степеней свободы действительно выполняется. Одно из следствий этого наблюдения состоит в том, что суперсимметричные преобразования полей $\{V, U, H, F\}$ обязательно должны содержать калибровочные преобразования.

B.0.4 Вывод суперсимметричных преобразований.

Мы сосредоточимся на максимальном ортогональном грассманиане, поскольку симплектический случай рассматривается аналогично. Для упрощения вычислений положим $\mathbb{h}_n = \mathbb{1}_{2m}$. Чтобы вывести суперсимметричные преобразования полей $\{V, U, H, F\}$, мы начнём с преобразований исходных полей $\{V, U, B, C\}$, см. (2.1.16). После сдвига $V \to V - HC^t$, который необходимо произвести для установления эквивалентности действий, они слегка изменяются, так что мы начинаем с преобразований

$$\delta U = \epsilon_1 C, \quad \delta C = -\epsilon_2 DU\,, \quad \delta(V - HC^t) = \epsilon_2 DB, \quad \delta B = -\epsilon_1(V - HC^t). \tag{B.0.131}$$

В разделе 2.2 мы объяснили, что для максимальных грассманианов (в предположении максимальности ранга U) существует полезный базис в $\mathbb{C}^n$, состоящий из столбцов U и U^*.

Таким образом, мы можем разложить C как

$$C = U\lambda + U^*\beta \tag{B.0.132}$$

с некоторыми фермионными матрицами λ и β размера $m \times m$. Затем можно использовать калибровочную симметрию $C \to C + U\,e$ (см. (2.2.32)), чтобы положить $\lambda = 0$. Умножая разложение C на U^t, получаем $\beta = \big(\overline{U}U\big)^{-1t}F$, где учтено, что $F = U^tC$. Очевидно, эти манипуляции эквивалентны умножению C на левую часть разбиения единицы (2.2.26). Используя эти формулы, можно выразить закон преобразования U как[16]

$$\delta U = \epsilon_1\, C = \epsilon_1 P^t F\,. \tag{B.0.133}$$

Чтобы найти суперсимметричное преобразование F, используем $\delta F = \delta(U^tC)$. Применяя (B.0.131) и (B.0.132), получаем

$$\delta F = -\epsilon_2 U^t \partial U\,. \tag{B.0.134}$$

Далее найдём закон преобразования для H. Поскольку $B = HU^t$, формально получаем $\delta H = -\epsilon_1 V P^t$. В общем случае эта комбинация не является кососимметрической и, следовательно, противоречит нашему предположению, что H — кососимметрическая матрица. Парадокс можно разрешить, применив дополнительное калибровочное преобразование $H \to H + y$, где y — симметрическая фермионная матрица (см. (2.2.32)). Выбирая в качестве y (минус) симметрическую часть вышеуказанной вариации δH, т.е.

$$y = -\frac{1}{2}\Big(\epsilon_1 V P^t + \big(\epsilon_1 V P^t\big)^t\Big)\,, \tag{B.0.135}$$

мы возвращаем H к кососимметрической форме. Итоговое суперсимметричное преобразование принимает вид

$$\delta H = y - \frac{1}{2}\epsilon_1\big(VP^t - PV^t\big)\,, \tag{B.0.136}$$

где y задаётся формулой (B.0.135).

Вывод аналогичной формулы для V представляет собой более техническую задачу, главным образом потому, что V имеет наиболее сложную структуру калибровочных преобразований, см. (2.2.31). Здесь следует использовать разбиение единицы, а также связь $VU + 2HF = 0$. Чтобы не загромождать изложение, мы приводим здесь только окончательный ответ:

$$\delta V = \delta_y V - \epsilon_1 P V^t F P + \epsilon_2\Big((DH)U^t + 2H(DU)^t\Big)\,, \qquad \delta_y V := -2yFP\,. \tag{B.0.137}$$

[16]Напомним, что $P = \big(\overline{U}U\big)^{-1}\overline{U}$.

Здесь, как и ранее, y задаётся формулой (B.0.135).

Таким образом, суперсимметричные преобразования для модели с минимально связанными фермионами задаются формулами (B.0.133, B.0.134, B.0.136, B.0.137). В этих формулах дополнительные калибровочные преобразования $\delta_y H := y$ и $\delta_y V$ выписаны явно, чтобы объяснить вывод из суперсимметричных преобразований исходной модели; в конечном итоге эти калибровочные преобразования можно отбросить из конечных формул.

B.0.5 Суперсимметричная инвариантность действия.

Как уже упоминалось, в разделе 2.3 мы вывели действия, отражающие геометрическую информацию о моделях типа Гросса-Невё с фермионами. Однако финальные суперсимметричные преобразования оказались более сложными, чем в исходной суперсимметризации квазилинейной формулировки первого порядка. В этом разделе мы проверим инвариантность действия (2.3.56), соответствующего максимальным ортогональным грассманианам, относительно суперсимметричных преобразований[17] (B.0.133, B.0.134, B.0.136, B.0.137), полученных в предыдущем разделе:

$$\delta V = \epsilon_2 (DH) U^t + 2\epsilon_2 H D U^t - \epsilon_1 P V^t F P\,, \qquad \delta H = -\epsilon_1 \frac{1}{2}\big(VP^t - PV^t\big)\,, \tag{B.0.138}$$

$$\delta U = \epsilon_1 P^t F\,, \qquad \delta F = -\epsilon_2 U^t D U\,. \tag{B.0.139}$$

Начнём со свободной (калибровочной) голоморфной части действия

$$\mathcal{S}_0 = \int \mathrm{d}^2 z\, \mathrm{Tr}\Big(V\overline{D}U + H\overline{D}F\Big)\,. \tag{B.0.140}$$

Вариация этого действия относительно преобразований (B.0.138-B.0.139) имеет вид

$$\begin{aligned}\delta\mathcal{S}_0 = \ & \epsilon_1 \int \mathrm{d}^2 z\, \mathrm{Tr}\Big(V\overline{D}\big(P^t F\big) - PV^t F P\overline{D}U + PV^t\overline{D}F\Big) + \\ & + \epsilon_2 \int \mathrm{d}^2 z\, \mathrm{Tr}\Big((DH)U^t\overline{D}U + 2HDU^t\overline{D}U + H\overline{D}\big(U^t DU\big)\Big)\,.\end{aligned} \tag{B.0.141}$$

Рассмотрим сначала член, пропорциональный ϵ_2. Интегрируя по частям первый член в скобках и используя тот факт, что $U^t\big[\overline{D}, D\big]U \sim U^t U F_{z\bar{z}} \simeq 0$, мы таким образом преобразуем член, пропорциональный ϵ_2, к виду $HDU^t\overline{D}U + H\overline{D}U^t DU$. Этот член бесследов в силу кососимметричности H.

Далее рассмотрим член, пропорциональный ϵ_1. Здесь полезно помнить о разбиении единицы (2.2.26) $UP + (UP)^t = \mathbb{1}_{2m}$, соотношениях $PU = \mathbb{1}_m$, $PP^t \simeq 0$ и следствиях из их дифференцирований. Используя эти соотношения и ограничение $VU + 2HF = 0$, можно

[17] Здесь мы опускаем калибровочные преобразования, которые, как мы увидели в предыдущем разделе, подмешались к преобразованиям суперсимметрии.

упростить член, пропорциональный ϵ_1, следующим образом:

$$\mathrm{Tr}\Big(V\overline{D}\big(P^tF\big) - PV^tFP\overline{D}U + PV^t\overline{D}F\Big) \simeq \mathrm{Tr}\Big(2\big(\overline{D}P\big)P^t(FHF)\Big)\,. \tag{B.0.142}$$

Комбинация FHF симметрична, тогда как $\big(\overline{D}P\big)P^t$ кососимметрична в силу $PP^t \simeq 0$. Таким образом, член, пропорциональный ϵ_1, также обращается в нуль, и свободная часть действия действительно инвариантна относительно суперсимметричных преобразований.

Далее проверим инвариантность части взаимодействия действия

$$\mathcal{S}_{int} = \int \mathrm{d}^2z\,\mathrm{Tr}\left(J_{\mathsf{so}}\overline{J}_{\mathsf{so}}\right)\,. \tag{B.0.143}$$

Мы будем использовать ту же логику, что и в основном тексте. Вариация тока даётся выражением

$$\delta J_{\mathsf{so}} = 2\epsilon_2\partial\big(UHU^t\big)\,. \tag{B.0.144}$$

Здесь мы использовали разбиение единицы $UP + (UP)^t = \mathbb{1}_{2m}$, чтобы доказать, что члены, пропорциональные ϵ_1, обращаются в нуль. Как и в разделе 2.2, мы вычисляем коммутатор $\widetilde{J_{\mathsf{so}}} := UHU^t$ с током J_{so}, обнаруживая, что он пропорционален связям и, следовательно, также обращается в нуль на поверхности связей. Таким образом, член взаимодействия также инвариантен относительно суперсимметричных преобразований.

Формально мы также должны проверить, что наши преобразования (B.0.138-B.0.139) действительно образуют правильную алгебру $\mathcal{N} = (2,2)$ суперсимметрии. Если записать наши суперсимметричные преобразования как $\delta = \epsilon_1Q_1 + \epsilon_2Q_2$, то должны выполняться соотношения алгебры

$$\{Q_1, Q_2\} = \partial \qquad \text{и} \qquad Q_1^2 = Q_2^2 = 0. \tag{B.0.145}$$

Эта проверка является чисто техническим упражнением, которое требует многократного использования связей и разбиения единицы, здесь поэтому мы позволим себе опустить эти трудоёмкие вычисления.

Аналогичные вычисления можно проделать и для максимальных лагранжевых грассманианов. Единственные изменения, которые необходимо внести в этих случаях, сводятся к восстановлению матрицы ω_{2m} в необходимых местах.

Заключение

В данной диссертации мы исследовали вопрос о том, как можно строить альтернативные формулировки сигма-моделей с проективными таргет-пространствами, используя специфические геометрические реализации таких таргет-пространств. Мы сосредоточились на двух примерах таких реализаций: а именно, реализации кокасательных расслоений грассманианов как колчанных многообразий, а также реализации сферы как лагранжева подмногообразия в произведении двух её копий. Из первой реализации мы вывели так называемую квазилинейную формулировку для двумерных сигма-моделей (она же формулировка Гросса–Невё) со специального вида метриками и B-полем, которая характеризуется конечным числом вершин взаимодействий (в отличие от исходной формулировки). В случае кэлеровых метрик (которые в данном формализме соответствуют симметрическим пространствам) мы построили $\mathcal{N} = (2, 2)$ суперсимметричное обобщение этого формализма. Из второй реализации следует существование специальных $\mathcal{N} = 2$ и $\mathcal{N} = 4$ суперсимметричных $\mathbf{SU}(2)$ спиновых цепочек, которые являются естественными "обрезаниями" квантовых одномерных суперсимметричных $\mathbb{CP}^1$ сигма-моделей на уровне конечного числа гармоник, причём этот уровень естественным образом связан со спином в узлах спиновой цепочки. Два построенных класса теорий (обобщённые теории Гросса–Невё и суперсимметричные спиновые цепочки) не только дают конкретные вычислительные преимущества по сравнению с исходными формулировками сигма-моделей (что было продемонстрировано однопетлевым вычислением в теориях Гросса–Невё и вычислением спектра магнитного оператора Лапласа–Бельтрами с помощью спиновых цепочек), но и являются новыми и самостоятельно интересными моделями теоретической и математической физики. Таким образом, мы показали, как углублённое понимание геометрической структуры физических теорий может быть полезным как для совершенствования вычислительной техники, так и для построения новых теорий. В частности, основными результатами данной работы можно считать построение обобщённых теорий Гросса-Невё для таргет-пространств в виде ортогональных и симплектических грассманианов, а также построение суперсимметричных спиновых цепочек, связанных с суперсимметричными $\mathbb{CP}^1$ моделями.

Обсудим возможные направления развития идей, изложенных в диссертации.

- В рамках развития квазилинейной формулировки первого порядка (формализма Гросса–Невё) было бы интересно построить её для сигма-моделей с таргет-пространствами в виде обобщённых многообразий флагов для групп $\mathbf{O}(n)$ и $\mathbf{Sp}(n)$,

а также для однородных (например, симметрических) пространств, отвечающих исключительным группам Ли. Кроме того, было бы полезно расширить класс таргет-геометрий сигма-моделей в рамках данного подхода, включив, в частности, гиперболические пространства, пространства типа AdS и так далее.

- В данной диссертации мы обсуждали взаимосвязь между сигма-моделями и моделями типа Гросса-Невё для грассманианных таргет-пространств на классическом и однопетлевом уровнях. Было бы крайне интересно исследовать, как эти теории связаны на всепетлевом (или даже непертурбативном) уровне. Первые шаги в этом направлении сделаны, в частности, в работе [22].

- В рамках суперсимметричных обобщений моделей типа Гросса–Невё также желательно установить квантовую эквивалентность двух суперсимметричных формулировок моделей для максимальных ортогональных грассманианов, которые обсуждались в Главе 2 (напомним, что одна формулировка получается "прямолинейной суперсимметризацией" бозонной теории Гросса-Невё, тогда как вторая возникает из неё с помощью функциональной замены переменных, подобранной так, чтобы фермионы отражали структуру касательного расслоения).

- В диссертации построены двухузловые $\mathcal{N} = 2$ и $\mathcal{N} = 4$ спиновые цепочки для группы $\mathbf{SU}(2)$, которые в пределе бесконечного спина (так называемом пределе Халдейна) переходят в одномерные $\mathbb{CP}^1$ сигма-модели с суперсимметриями типа $\mathcal{N} = 2b$ и $\mathcal{N} = 4a$ соответственно. Обобщения таких цепочек на группы $\mathbf{SU}(n)$ с n узлами, в пределе Халдейна дающие суперсимметричные сигма-модели на многообразиях флагов, построены в работе [30]. Однако ясно, что это не самые общие суперсимметричные цепочки, которые можно построить с использованием осцилляторной реализации. Было бы крайне продуктивно построить различные другие суперсимметричные спиновые цепочки и описать их математическую структуру.

- Для спиновых цепочек с $\mathcal{N} = 4$ суперсимметрией было бы интересно построить суперсимметричное описание непосредственно в терминах $\mathcal{N} = 4$ суперполей. Также было бы полезно обобщить нелинейные условия киральности, основанные на более общих плоских суперсвязностях, для получения новых моделей суперсимметричной квантовой механики.

Список основных работ автора по теме диссертации

1. Bykov D., Krivorol V. Grassmannian Sigma Models // Adv. Theor. Math. Phys. — 2024. — Vol. 28. — P. 3.

2. Bykov D., Krivorol V. Supersymmetric Grassmannian sigma models in Gross–Neveu formalism // Lett. Math. Phys. — 2025. — Vol. 115. — P. 85.

3. Bykov D., Krivorol V., Kuzovchikov A. Oscillator calculus on coadjoint orbits and index theorems // Lett. Math. Phys. — 2025. — Vol. 115. — P. 101.

4. Krivorol V. On First-Order GLSM for Sigma Models // Phys. Part. Nucl. Lett. — 2025. — Vol. 22. — P. 1312–1315.

Список литературы

1. *Abdalla E.*, *Abdalla M. C. B.*, *Rothe K. D.* Non perturbative methods in two dimensional quantum field theory. — Singapore : World Scientific, 1991.
2. *Affleck I.*, *Bykov D.*, *Wamer K.* Flag manifold sigma models // Physics Reports. — 2022. — T. 953. — pp. 1—93.
3. *Akulov V. P.*, *Pashnev A. I.* Supersymmetric Quantum Mechanics and Spontaneous Breaking of Supersymmetry at the Quantum Level // Theor. Math. Phys. — 1985. — T. 65. — C. 1027—1032.
4. *Alfimov M.*, *Kalinichenko I.*, *Litvinov A.* On β-function of N = 2 supersymmetric integrable sigma-models // JHEP. — 2024. — T. 05. — C. 297. — arXiv: `2311.14187 [hep-th]`.
5. *Alfimov M.*, *Litvinov A.* On loop corrections to integrable 2D sigma model backgrounds // JHEP. — 2022. — T. 01. — C. 043. — arXiv: `2110.05418 [hep-th]`.
6. *Alvarez O.* Topological Quantization and Cohomology // Commun. Math. Phys. — 1985. — T. 100. — C. 279.
7. *Andrei N.*, *Lowenstein J. H.* Diagonalization of the Chiral Invariant Gross-Neveu Hamiltonian // Physical Review Letters. — 1979. — T. 43. — C. 1698.
8. *Anselm A.* A model of field theory with non vanishing renormalized charge // Soviet Journal of Experimental and Theoretical Physics. — 1959. — T. 36, :9. — pp. 608—611.
9. *Arefeva I. Y.*, *Azakov S. I.* Renormalization And Phase Transition In The Quantum CP(n-1) Model (D = 2, 3) // Nucl. Phys. B. — 1980. — T. 162. — C. 298—310.
10. *Atiyah M. F.* Instantons in Two and Four Dimensions // Commun. Math. Phys. — 1984. — T. 93. — C. 437—451.
11. *Atiyah M.* Vector Fields on Manifolds. — VS Verlag für Sozialwissenschaften, 1970. — (Arbeitsgemeinschaft für Forschung des Landes Nordrhein-Westfalen).
12. *Bak D.*, *Hahn S.-O.*, *Lee J.*, *Oh P.* Supersymmetric Q-lumps in the Grassmannian nonlinear sigma models // Phys. Rev. D. — 2007. — T. 75. — C. 025004. — arXiv: `hep-th/0610067`.
13. *Barnich G.*, *Oblak B.* Notes on the BMS group in three dimensions: II. Coadjoint representation // JHEP. — 2015. — T. 03. — C. 033. — arXiv: `1502.00010 [hep-th]`.

14. *Basile T.*, *Joung E.*, *Oh T.* Manifestly covariant worldline actions from coadjoint orbits. Part I. Generalities and vectorial descriptions // JHEP. — 2024. — T. 01. — C. 018. — arXiv: 2307.13644 [hep-th].

15. *Bazhanov V. V.*, *Kotousov G. A.*, *Lukyanov S. L.* Quantum transfer-matrices for the sausage model // JHEP. — 2018. — T. 01. — C. 021. — arXiv: 1706.09941 [hep-th].

16. *Bekaert X.*, *Donnay L.*, *Herfray Y.* BMS particles // Phys. Rev. Lett. — 2025. — T. 135, :13. — C. 131602. — arXiv: 2412.06002 [hep-th].

17. *Berkovits N.*, *Nekrasov N.* The Character of pure spinors // Letters in Mathematical Physics. — 2005. — T. 74. — C. 75—109. — arXiv: hep-th/0503075.

18. *Borel A.* Kählerian Coset Spaces of Semisimple Lie Groups // Proceedings of the National Academy of Sciences. — 1954. — T. 40, :12. — C. 1147—1151.

19. *Bott R.* On induced representations // Russian Mathematical Surveys. — 1990. — T. 45, :3.

20. *Bykov D.* A gauged linear formulation for flag-manifold σ-models // Theoretical and Mathematical Physics. — 2017. — T. 193, :3. — C. 1737—1753.

21. *Bykov D.* Sigma models as Gross–Neveu models // Theoretical and Mathematical Physics. — 2021. — T. 208. — C. 993—1003. — arXiv: 2106.15598 [hep-th].

22. *Bykov D.* β-function of the level-zero Gross-Neveu model // To appear in SciPost Physics. — 2023. — arXiv: 2209.10502 [hep-th].

23. *Bykov D.* Complex structures and zero-curvature equations for σ-models // Physics Letters B. — 2016. — T. 760. — C. 341—344. — arXiv: 1605.01093 [hep-th].

24. *Bykov D.* Haldane limits via Lagrangian embeddings // Nucl. Phys. B. — 2012. — T. 855. — C. 100—127. — arXiv: 1104.1419 [hep-th].

25. *Bykov D.* Integrable sigma models on Riemann surfaces // Physical Review D. — 2023. — T. 107, :8. — C. 085015. — arXiv: 2202.12805 [hep-th].

26. *Bykov D.* Quantum flag manifold σ-models and Hermitian Ricci flow // Commun. Math. Phys. — 2022. — arXiv: 2006.14124 [hep-th].

27. *Bykov D.* The CP^{n-1}-model with fermions: a new look // Advances in Theoretical and Mathematical Physics. — 2022. — T. 26. — pp. 295 —324. — arXiv: 2009.04608 [hep-th].

28. *Bykov D.* The Geometry of Antiferromagnetic Spin Chains // Communications in Mathematical Physics. — 2013. — T. 322, :3. — pp. 807—834.

29. *Bykov D.*, *Krivorol V.* Grassmannian Sigma Models // Adv. Theor. Math. Phys. — 2024. — T. 28. — C. 3. — arXiv: 2306.04555 [hep-th].

30. *Bykov D.*, *Krivorol V.*, *Kuzovchikov A.* Oscillator calculus on coadjoint orbits and index theorems // Lett. Math. Phys. — 2025. — T. 115, :5. — C. 101. — arXiv: 2412.21024 [hep-th].

31. *Bykov D.*, *Kuzovchikov A.* Isotropic embeddings of coadjoint orbits and magnetic geodesic flows. — 2025. — arXiv: 2503.08646 [math.DG].

32. *Bykov D.*, *Kuzovchikov A.* Sigma models from Gaudin spin chains. — 2025. — arXiv: 2508.20889 [hep-th].

33. *Bykov D.*, *Kuzovchikov A.* The classical and quantum particle on a flag manifold // Class. Quant. Grav. — 2024. — T. 41, :20. — C. 205009. — arXiv: 2404.15900 [hep-th].

34. *Bykov D.*, *Pribytok A.* Supersymmetric deformation of the $\mathbb{CP}^1$ model and its conformal limits. — 2023. — arXiv: 2312.16396 [hep-th] ; — To appear in *Advances in Theoretical and Mathematical Physics*.

35. *Bykov D.*, *Smilga A.* Monopole harmonics on $\mathbb{CP}^{n-1}$ // SciPost Phys. — 2023. — T. 15. — C. 195.

36. *Caudrelier V.*, *Stoppato M.*, *Vicedo B.* Classical Yang–Baxter Equation, Lagrangian Multiforms and Ultralocal Integrable Hierarchies // Commun. Math. Phys. — 2024. — T. 405, :1. — C. 12. — arXiv: 2201.08286 [nlin.SI].

37. *Caudrelier V.*, *Stoppato M.*, *Vicedo B.* On the Zakharov–Mikhailov action: 4d Chern–Simons origin and covariant Poisson algebra of the Lax connection // Lett. Math. Phys. — 2021. — T. 111, :3. — C. 82. — arXiv: 2012.04431 [hep-th].

38. *Cecotti S.*, *Girardello L.*, *Pasquinucci A.* Singularity Theory and $N = 2$ Supersymmetry // Int. J. Mod. Phys. A. — 1991. — T. 6. — C. 2427—2496.

39. *Costello K.*, *Yamazaki M.* Gauge Theory And Integrability, III. — 2019. — arXiv: 1908.02289 [hep-th].

40. *Cremmer E.*, *Scherk J.* The supersymmetric non-linear σ-model in four dimensions and its coupling to supergravity // Physics Letters B. — 1978. — T. 74, :4. — C. 341—343.

41. *D'Adda A.*, *Davis A. C.*, *Di Vecchia P.*, *Salomonson P.* An Effective Action for the Supersymmetric $\mathrm{CP}^{(N-1)}$ Model // Nucl. Phys. B. — 1983. — T. 222. — C. 45—70.

42. *D'Adda A.*, *Di Vecchia P.*, *Lüscher M.* Confinement and chiral symmetry breaking in CP^{n-1} models with quarks // Nuclear Physics B. — 1979. — T. 152, :1. — C. 125—144.

43. *D'Adda A.*, *Lüscher M.*, *Di Vecchia P.* A $1/n$ expandable series of non-linear σ models with instantons // Nuclear Physics B. — 1978. — T. 146, :1. — C. 63—76.

44. *Davis A. C.*, *Macfarlane A. J.*, *Holten J. W. van.* The Quantum Mechanical Supersymmetric O(3) and O(2,1) Models // Nucl. Phys. B. — 1983. — T. 216. — C. 493. — [Erratum: Nucl.Phys.B 223, 544 (1983)].

45. *Delduc F.*, *Ivanov E.* N = 4 mechanics of general (4, 4, 0) multiplets // Nucl. Phys. B. — 2012. — T. 855. — C. 815—853.

46. *Delduc F.*, *Magro M.*, *Vicedo B.* On classical q-deformations of integrable sigma-models // JHEP. — 2013. — T. 11. — C. 192. — arXiv: 1308.3581 [hep-th].

47. *Delisle L.*, *Hussin V.*, *Zakrzewski W. J.* Constant curvature solutions of Grassmannian sigma models: (1) Holomorphic solutions // J. Geom. Phys. — 2013. — T. 66. — C. 24—36. — arXiv: 1204.0545 [math-ph].

48. *Destri C.*, *Vega H. J. de.* Light Cone Lattices and the Exact Solution of Chiral Fermion and σ Models // Journal of Physics A. — 1989. — T. 22. — C. 1329.

49. *Din A. M.*, *Zakrzewski W. J.* Classical Solutions in Grassmannian σ Models // Lett. Math. Phys. — 1981. — T. 5. — C. 553.

50. *Dirac P. A. M.* Quantised singularities in the electromagnetic field // Proc. Roy. Soc. Lond. A. — 1931. — T. 133, :821. — C. 60—72.

51. *Domanevsky D.*, *Levin A.*, *Olshanetsky M.*, *Zotov A.* Integrable deformations of principal chiral model from solutions of associative Yang-Baxter equation. — 2025. — arXiv: `2501.08777 [math-ph]`.

52. *Donagi R.*, *Sharpe E.* GLSM's for partial flag manifolds // Journal of Geometry and Physics. — 2008. — T. 58. — C. 1662—1692. — arXiv: `0704.1761 [hep-th]`.

53. *Donaldson S.*, *Kronheimer P.* The Geometry of Four-manifolds. — Clarendon Press, 1997. — (Oxford mathematical monographs).

54. *Dunne G. V.*, *Unsal M.* Resurgence and Dynamics of O(N) and Grassmannian Sigma Models // JHEP. — 2015. — T. 09. — C. 199. — arXiv: `1505.07803 [hep-th]`.

55. *Eguchi T.*, *Gilkey P. B.*, *Hanson A. J.* Gravitation, gauge theories and differential geometry // Physics Reports. — 1980. — T. 66, :6. — C. 213—393.

56. *Eichenherr H.*, *Forger M.* On the dual symmetry of the non-linear sigma models // Nuclear Physics B. — 1979. — T. 155, :2. — C. 381—393.

57. *Eisenbud D.*, *Harris J.* 3264 and All That: A Second Course in Algebraic Geometry. — Cambridge University Press, 2016.

58. *Fateev V. A.*, *Litvinov A. V.* Integrability, Duality and Sigma Models // JHEP. — 2018. — T. 11. — C. 204. — arXiv: `1804.03399 [hep-th]`.

59. *Fateev V. A.*, *Onofri E.*, *Zamolodchikov A. B.* Integrable deformations of the $O(3)$ sigma model. The sausage model // Nuclear Physics B. — 1993. — T. 406. — C. 521—565.

60. *Fedoruk S.*, *Ivanov E.*, *Smilga A.* Generic HKT geometries in the harmonic superspace approach // J. Math. Phys. — 2018. — T. 59, :8. — C. 083501.

61. *Fendley P.*, *Schoutens K.*, *Boer J. de.* Lattice models with N=2 supersymmetry // Phys. Rev. Lett. — 2003. — T. 90. — C. 120402.

62. *Fendley P.*, *Schoutens K.*, *Nienhuis B.* Lattice fermion models with supersymmetry // J. Phys. A. — 2003. — T. 36. — C. 12399—12424. — arXiv: `cond-mat/0307338`.

63. *Freedman D. Z.*, *Gath E.*, *Pilch K.* Conformal Properties of The Superstring Ghost Thirring Model: Short Distance Structure and Bosonization // Phys. Rev. D. — 1989. — T. 39. — C. 3703.

64. *Friedan D.*, *Martinec E. J.*, *Shenker S. H.* Conformal Invariance, Supersymmetry and String Theory // Nucl. Phys. B. — 1986. — T. 271. — C. 93—165.

65. *Fujii K.*, *Koikawa T.*, *Sasaki R.* Classical Solutions for the Supersymmetric Grassmannian Sigma Models in Two Dimensions. I // Progress of Theoretical Physics. — 1984. — T. 71, :2. — C. 388—394.

66. *Gamayun O.*, *Losev A. S.*, *Marshakov A.* First Order String Theory and the Kodaira-Spencer Equations. I // JHEP. — 2009. — T. 09. — C. 028. — arXiv: 0906.4746 [hep-th].

67. *Gamayun O.*, *Marshakov A.* First Order String Theory and the Kodaira-Spencer Equations. II // JHEP. — 2009. — T. 09. — C. 065. — arXiv: 0907.1503 [hep-th].

68. *Gamayun O.*, *Losev A.*, *Shifman M.* First-order formalism for β functions in bosonic sigma models from supersymmetry breaking // Phys. Rev. D. — 2024. — T. 110, :2. — C. 025017. — arXiv: 2312.01885 [hep-th].

69. *Gamayun O.*, *Losev A.*, *Shifman M.* Peculiarities of beta functions in sigma models // JHEP. — 2023. — T. 10. — C. 097. — arXiv: 2307.04665 [hep-th].

70. *Gates Jr. S. J.*, *Hull C. M.*, *Rocek M.* Twisted Multiplets and New Supersymmetric Nonlinear Sigma Models // Nucl. Phys. B. — 1984. — T. 248. — C. 157—186.

71. *Gell-Mann M.*, *Lévy M.* The axial vector current in beta decay // Il Nuovo Cimento. — 1960. — T. 16. — C. 705—726.

72. *Goddard P.*, *Olive D. I.*, *Waterson G.* Superalgebras, Symplectic Bosons and the Sugawara Construction // Communications in Mathematical Physics. — 1987. — T. 112. — C. 591.

73. *Grassi P. A.*, *Policastro G.* Curved beta-gamma systems and quantum Koszul resolution. — 2006. — arXiv: hep-th/0602153.

74. *Grassi P. A.*, *Policastro G.*, *Scheidegger E.* Partition Functions, Localization, and the Chiral de Rham complex. — 2007. — arXiv: hep-th/0702044.

75. *Griffiths P.*, *Harris J.* Principles of Algebraic Geometry. — John Wiley & Sons, Inc., 1978. — Reprinted in 1994.

76. *Gross D. J.*, *Neveu A.* Dynamical Symmetry Breaking in Asymptotically Free Field Theories // Physical Review D. — 1974. — T. 10. — C. 3235.

77. *Gu W.*, *Sharpe E.*, *Zou H.* GLSMs for exotic Grassmannians // JHEP. — 2020. — T. 10. — C. 200. — arXiv: 2008.02281 [hep-th].

78. *Guest M. A.* Harmonic maps, loop groups, and integrable systems. — Cambridge University Press, 1997.

79. *Haldane F. D. M.* Nonlinear field theory of large spin Heisenberg antiferromagnets. Semiclassically quantized solitons of the one-dimensional easy Axis Neel state // Phys. Rev. Lett. — 1983. — T. 50. — C. 1153—1156.

80. *Haldane F.* Continuum dynamics of the 1-D Heisenberg antiferromagnet: Identification with the O(3) nonlinear sigma model // Physics Letters A. — 1983. — T. 93, :9. — C. 464—468.

81. Harmonic maps and integrable systems / под ред. Fordy A. P., Wood J. C. — Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig, 1994. — C. vi+329. — (Aspects of Mathematics, E23).

82. *Harris J.* Algebraic Geometry: A First Course. — Springer, 1992. — (Graduate Texts in Mathematics).

83. *Helgason S.* Topics in Harmonic Analysis on Homogeneous Spaces. T. 13. — Boston–Basel–Stuttgart : Birkhäuser, 1981. — C. ix + 142. — (Progress in Mathematics).

84. *Higashijima K.*, *Nitta M.* Supersymmetric nonlinear sigma models as gauge theories // Progress of Theoretical Physics. — 2000. — T. 103. — C. 635—663. — arXiv: hep-th/9911139.

85. *Hoare B.* Integrable deformations of sigma models // J. Phys. A. — 2022. — T. 55, :9. — C. 093001. — arXiv: 2109.14284 [hep-th].

86. *Hoare B.*, *Levine N.*, *Tseytlin A. A.* Integrable 2d sigma models: quantum corrections to geometry from RG flow // Nuclear Physics B. — 2019. — T. 949. — C. 114798. — arXiv: 1907.04737 [hep-th].

87. *Hori K.*, *Katz S.*, *Klemm A.*, *Pandharipande R.*, *Thomas R.*, *Vafa C.*, *Vakil R.*, *Zaslow E.* Mirror symmetry. T. 1. — Providence, USA : AMS, 2003. — (Clay mathematics monographs).

88. *Howe P. S.*, *Townsend P. K.* Chern-Simons Quantum Mechanics // Class. Quant. Grav. — 1990. — T. 7. — C. 1655—1668.

89. *Hull C. M.* The Geometry of supersymmetric quantum mechanics. — 1999. — ArXiv: hep-th/9910028 (hep-th).

90. *Hull C. M.*, *Spence B. J.* $N = 2$ Current Algebra and Coset Models // Phys. Lett. B. — 1990. — T. 241. — C. 357—364.

91. *Hussin V.*, *Lafrance M.*, *Yurdusen I.*, *Zakrzewski W. J.* Holomorphic solutions of the susy Grassmannian σ-model and gauge invariance // J. Phys. A. — 2018. — T. 51, :18. — C. 185401. — arXiv: 1711.08415 [math-ph].

92. *Ireson E.*, *Shifman M.*, *Yung A.* Composite non-Abelian strings with Grassmannian models on the worldsheet // Phys. Rev. Res. — 2019. — T. 1. — C. 023002.

93. *Ivanov E.*, *Krivonos S.*, *Toppan F.* N=4 super NLS mKdV hierarchies // Phys. Lett. B. — 1997. — T. 405. — C. 85—94.

94. *Ivanov E. A.*, *Smilga A. V.* Dirac Operator on Complex Manifolds and Supersymmetric Quantum Mechanics // Int. J. Mod. Phys. A. — 2012. — T. 27. — C. 1230024.

95. *Kac V.* Infinite-Dimensional Lie Algebras. — Cambridge University Press, 1990.

96. *Kapustin A.* Chiral de Rham complex and the half-twisted sigma-model. — 2005. — arXiv: hep-th/0504074.

97. *Ketov S.* Quantum Non-linear Sigma-Models: From Quantum Field Theory to Supersymmetry, Conformal Field Theory, Black Holes and Strings. — Springer, 2000. — (Physics and astronomy online library).

98. *Kirillov A.* Merits and demerits of the orbit method // Bull. Am. Math. Soc. — 1999. — T. 36, :4. — C. 433—488.

99. *Kirillov A. A.* Geometric Quantization // Dynamical Systems IV. T. 4 / под ред. Arnold V. I., Novikov S. P. — Berlin, Heidelberg : Springer, 2001. — (Encyclopaedia of Mathematical Sciences).

100. *Kirillov A. A.* Unitary Representations of Nilpotent Lie Groups // Russian Mathematical Surveys. — 1962. — T. 17, :4. — C. 53.

101. *Klimčík C.* Integrability of the bi-Yang-Baxter sigma-model // Lett. Math. Phys. — 2014. — Vol. 104. — P. 1095–1106. — eprint: 1402.2105.

102. *Klimčík C.* On integrability of the Yang-Baxter sigma-model // Journal of Mathematical Physics. — 2009. — T. 50. — C. 043508. — arXiv: 0802.3518 [hep-th].

103. *Kotousov G. A.*, *Lacroix S.*, *Teschner J.* Integrable sigma models at RG fixed points: quantisation as affine Gaudin models. — 2022. — arXiv: 2204.06554 [hep-th].

104. *Kreshchuk M.*, *Kurianovych E.*, *Shifman M.* Grassmannian heterotic sigma model // Phys. Rev. D. — 2019. — T. 99, :12. — C. 125005. — arXiv: 1901.03010 [hep-th].

105. *Kuwabara R.* Spectrum of the Schrödinger operator on a line bundle over complex projective spaces // Tohoku Mathematical Journal. — 1988. — T. 40, :2. — C. 199—211.

106. *Lindström U.* Supersymmetric Sigma Model Geometry // Symmetry. — 2012. — T. 4, :3. — C. 474—506.

107. *Liniado J.*, *Vicedo B.* Integrable degenerate $\mathcal{E}$-models from 4d Chern-Simons theory. — 2023. — arXiv: 2301.09583 [hep-th].

108. *Losev A. S.*, *Marshakov A.*, *Zeitlin A. M.* On first order formalism in string theory // Phys. Lett. B. — 2006. — T. 633. — C. 375—381. — arXiv: hep-th/0510065.

109. *Lukyanov S. L.* The integrable harmonic map problem versus Ricci flow // Nuclear Physics B. — 2012. — T. 865. — C. 308—329. — arXiv: 1205.3201 [hep-th].

110. *Macfarlane A. J.* Generalizations of σ Models and CP(N) Models and Instantons // Phys. Lett. B. — 1979. — T. 82. — C. 239—241.

111. *Makeenko Y.* Methods of Contemporary Gauge Theory. — Cambridge University Press, 2002. — (Cambridge Monographs on Mathematical Physics).

112. *Mezincescu G. A.*, *Mezincescu L.* Factorization method and the supersymmetric monopole harmonics // J. Math. Phys. — 2003. — T. 44. — C. 3595—3606.

113. *Miura U.*, *Shimomura K.*, *Totsuka K.* Interacting Kitaev chain with N=1 supersymmetry // Phys. Rev. B. — 2024. — T. 109, :8. — C. 085141.

114. *Morrison D. R.*, *Plesser M. R.* Summing the instantons: Quantum cohomology and mirror symmetry in toric varieties // Nucl. Phys. B. — 1995. — T. 440. — C. 279—354. — arXiv: hep-th/9412236.

115. *Nakajima H.* Instantons on ALE spaces, quiver varieties, and Kac-Moody algebras // Duke Mathematical Journal. — 1994. — T. 76, :2. — C. 365—416.

116. *Nakajima H.*, *Oh P.*, *Shin S.* Quantum SUSY algebra of Q-lumps in the massive Grassmannian sigma model // Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical. — 2009. — T. 42, :12. — C. 125401.

117. *Nekrasov N. A.*, *Shatashvili S. L.* Supersymmetric vacua and Bethe ansatz // Nucl. Phys. B Proc. Suppl. / под ред. Baulieu L., Boer J. de, Douglas M. R., Rabinovici E., Vanhove P., Windey P. — 2009. — T. 192/193. — C. 91—112. — arXiv: 0901.4744 [hep-th].

118. *Neri G.*, *Varrin L.* Orbit method for quantum corner symmetries // Phys. Rev. D. — 2025. — T. 112, :10. — C. 104010. — arXiv: 2507.10683 [hep-th].

119. *Nicolai H.* Extensions of Supersymmetric Spin Systems // J. Phys. A. — 1977. — T. 10. — C. 2143—2151.

120. *Nicolai H.* Supersymmetry and Spin Systems // J. Phys. A. — 1976. — T. 9. — C. 1497—1506.

121. *Nijenhuis A.*, *Woolf W. B.* Some Integration Problems in Almost-Complex and Complex Manifolds // The Annals of Mathematics. — 1963. — T. 77, :3. — C. 424.

122. *Okonek C.*, *Spindler H.*, *Schneider M.* Vector Bundles on Complex Projective Spaces. — Springer US, 2013. — (Progress in Mathematics).

123. *Ol'shanetskii M. A.*, *Perelomov A. M.* The Toda chain as a reduced system // Theoretical and Mathematical Physics. — 1980. — T. 45. — C. 843—854.

124. *Pavshinkin D.* Grassmannian and Flag sigma models on interval: phase structure and L-dependence // JHEP. — 2019. — T. 12. — C. 075. — arXiv: 1905.02416 [hep-th].

125. *Perelomov A. M.* Chiral Models: Geometrical Aspects // Physics Reports. — 1987. — T. 146. — C. 135—213.

126. *Perelomov A.* Generalized Coherent States and Their Applications. — Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1986. — (Theoretical and Mathematical Physics).

127. *Pestun V.* Review of localization in geometry // J. Phys. A. — 2017. — T. 50, :44. — C. 443002. — arXiv: 1608.02954 [hep-th].

128. *Polchinski J.* String theory. Vol. 1: An introduction to the bosonic string. — Cambridge University Press, 2007. — (Cambridge Monographs on Mathematical Physics).

129. *Polyakov A. M.* Gauge Fields and Strings. T. 3. — Harwood Academic Publishers, 1987. — (Contemporary Concepts in Physics). — ISSN 0272-2488.

130. *Rawnsley J.* Flat Partial Connections and Holomorphic Structures in C^∞ Vector Bundles // Proceedings of The American Mathematical Society. — 1979. — T. 73. — C. 391—391.

131. *Ritbergen T. van*, *Schellekens A. N.*, *Vermaseren J. A. M.* Group theory factors for Feynman diagrams // International Journal of Modern Physics A. — 1999. — T. 14. — C. 41—96. — arXiv: hep-ph/9802376.

132. *Rocek M.*, *Ahn C.-h.*, *Schoutens K.*, *Sevrin A.* Superspace WZW models and black holes // Workshop on Superstrings and Related Topics. — 1991. — arXiv: hep-th/9110035.

133. *Sannomiya N.*, *Katsura H.* Supersymmetry Breaking and Nambu-Goldstone Fermions in Interacting Majorana Chains // Phys. Rev. D. — 2019. — T. 99, :4. — C. 045002.

134. *Sasaki R.* General classical solutions of the complex grassmannian and CP^{N-1} sigma models // Physics Letters B. — 1983. — T. 130, :1. — C. 69—72.

135. *Schubring D.*, *Shifman M.* Sigma models on fiber bundles with a Grassmannian base space // Phys. Rev. D. — 2020. — T. 101, :4. — C. 045003. — arXiv: 1809.08228 [hep-th].

136. *Schwinger J.* On Angular Momentum. — Dover Publications, 2015. — (Dover Books on Physics).

137. *Sergeev A.* Grassmannian Sigma-Models // Journal of Geometry and Symmetry in Physics. — 2007. — T. 9, :none. — C. 45—65.

138. *Sevrin A.*, *Troost W.*, *Van Proeyen A.*, *Spindel P.* Extended Supersymmetric Sigma Models on Group Manifolds. 2. Current Algebras // Nucl. Phys. B. — 1988. — T. 311. — C. 465—492.

139. *Sfetsos K.* Integrable interpolations: From exact CFTs to non-Abelian T-duals // Nuclear Physics B. — 2014. — T. 880. — C. 225—246. — arXiv: 1312.4560 [hep-th].

140. *Shifman M.* Anselm's Discovery of the Gross-Neveu Model in 1958 // Under the Spell of Landau: When Theoretical Physics was Shaping Destinies. Edited by Shifman Mikhail. Published by World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd. — 2013. — C. 524—525.

141. *Slavnov N. A.* Algebraic Bethe ansatz. — (2018). — arXiv: 1804.07350 [math-ph].

142. *Smilga A. V.* Differential Geometry through Supersymmetric Glasses. — WSP, 2020.

143. *Smilga A.* Witten Index. — World Scientific, 2024.

144. *Smilga A. V.* How To Quantize Supersymmetric Theories // Nucl. Phys. B. — 1987. — T. 292. — C. 363—380.

145. *Spindel P.*, *Sevrin A.*, *Troost W.*, *Van Proeyen A.* Complex Structures on Parallelized Group Manifolds and Supersymmetric σ Models // Phys. Lett. B. — 1988. — T. 206. — C. 71—74.

146. *Spindel P.*, *Sevrin A.*, *Troost W.*, *Van Proeyen A.* Extended Supersymmetric Sigma Models on Group Manifolds. 1. The Complex Structures // Nucl. Phys. B. — 1988. — T. 308. — C. 662—698.

147. *Tamm I.* Die verallgemeinerten Kugelfunktionen und die Wellenfunktionen eines Elektrons im Feld eines Magnetpoles // Selected Papers. — Springer Berlin Heidelberg, 1991. — C. 103—113.

148. *Tseytlin A. A.* Sigma Model Approach to String Theory // Int. J. Mod. Phys. A. — 1989. — T. 4. — C. 1257. — arXiv: 2602.10977 [hep-th].

149. *Tsvelik A. M.* Quantum Field Theory in Condensed Matter Physics. — 2-е изд. — Cambridge University Press, 2003.

150. *Vasilev A. N.* The field theoretic renormalization group in critical behavior theory and stochastic dynamics. — Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, FL, 2004. — С. xvi+681.

151. *Wagner F.* Towards quantum mechanics on the curved cotangent bundle // Class. Quant. Grav. — 2024. — Т. 41, :4. — С. 045006. — arXiv: 2112.06758 [gr-qc].

152. *Wang S.-Y., Wang D., Wang Q.-H.* Critical exponents of the nonlinear sigma model on a Grassmann manifold $\mathrm{U}(N)/\mathrm{U}(m)\mathrm{U}(N-m)$ by the $1/N$-expansion // Phys. Rev. B. — 2019. — Т. 99, вып. 16. — С. 165142.

153. *Weinberg S.* The Quantum Theory of Fields. 2: Modern Applications. — Cambridge University Press, 2005. — С. 489.

154. *Wernli K.* Six lectures on geometric quantization // PoS. — 2023. — Т. Modave2022. — С. 005. — arXiv: 2306.00178 [math-ph].

155. *Witten E.* Chiral Symmetry, the 1/n Expansion, and the SU(N) Thirring Model // Nucl. Phys. B. — 1978. — Т. 145. — С. 110—118.

156. *Witten E.* Constraints on Supersymmetry Breaking // Nucl. Phys. B. — 1982. — Т. 202. — С. 253—316.

157. *Witten E.* Phases of N=2 theories in two-dimensions // Nucl. Phys. B / под ред. Greene B., Yau S.-T. — 1993. — Т. 403. — С. 159—222. — arXiv: hep-th/9301042.

158. *Witten E.* Supersymmetry and Morse theory // J. Diff. Geom. — 1982. — Т. 17, :4. — С. 661—692.

159. *Witten E.* Two-dimensional models with (0,2) supersymmetry: Perturbative aspects // Adv. Theor. Math. Phys. — 2007. — Т. 11, :1. — С. 1—63. — arXiv: hep-th/0504078.

160. *Wu T. T., Yang C. N.* Concept of Nonintegrable Phase Factors and Global Formulation of Gauge Fields // Phys. Rev. D / под ред. Hsu J.-P., Fine D. — 1975. — Т. 12. — С. 3845—3857.

161. *Wu T. T., Yang C. N.* Dirac Monopole Without Strings: Monopole Harmonics // Nucl. Phys. B. — 1976. — Т. 107. — С. 365—380.

162. *Zarembo K.* Integrability in Sigma-Models. — 2017. — arXiv: 1712.07725 [hep-th].

163. *Zeitlin A. M.* Perturbed Beta-Gamma Systems and Complex Geometry // Nucl. Phys. B. — 2008. — Т. 794. — С. 381—401. — arXiv: 0708.0682 [hep-th].

164. *Zinn-Justin J.* Quantum Field Theory and Critical Phenomena; 4th ed. — Oxford : Clarendon Press, 2002. — (International series of monographs on physics).

165. *Zumino B.* Supersymmetry and Kahler Manifolds // Phys. Lett. B. — 1979. — Т. 87. — С. 203.

Список иллюстраций и таблиц

Рисунок 1.1. Элементарные функции Грина (пропагаторы) для сигма-моделей однородных пространств унитарных групп в формализме Гросса-Невё.

Рисунок 1.2 Вершина взаимодействия для сигма-моделей однородных пространств унитарных групп в формализме Гросса-Невё.

Рисунок 1.3 Два типа расходящихся диаграмм в одной петле для теорий типа Гросса-Невё.

Рисунок 1.4 Модифицированная структурой векторных индексов вершина взаимодействия в теории Гросса-Невё для теорий с унитарной симметрией.

Рисунок 1.5 Тензорная структура расходящихся диаграмм, показанных на Рис. 1.3, для теорий Гросса-Невё с унитарной симметрией.

Рисунок 1.6 Два типа вершин взаимодействий для моделей Гросса-Невё с ортогональной симметрией.

Рисунок 1.7 Тензорная структура расходящихся диаграмм для моделей Гросса-Невё с ортогональной симметрией.

Рисунок 3.1 Раскрашенные колчаны, задающие фазовую структуру D-модели и K-модели.

Рисунок 3.2 Ортогональное разложение алгебры Ли $\mathfrak{o}(n)$.

Рисунок 3.3 Ортогональное разложение алгебры Ли $\mathfrak{sp}(n)$.

Таблица 1 Грассманианы унитарной, ортогональной и симплектической серий.

Таблица 2 Эрмитовы симметрические пространства классических групп.

Таблица 1.1 Дуальные числа Кокстера классических алгебр Ли.