Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Математический институт им. В. А. Стеклова
Российской академии наук

На правах рукописи

УДК: 515.14, 512.74



Корнев Михаил Игоревич

n-ЗНАЧНЫЕ МОНОИДЫ И ГРУППЫ: АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ И ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

1.1.3 — Геометрия и топология

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва
2026

Работа выполнена в отделе геометрии и топологии Математического института им. В. А. Стеклова Российской академии наук.

Научный руководитель — Бухштабер Виктор Матвеевич, доктор физико-математических наук, член-корреспондент РАН, профессор, главный научный сотрудник отдела геометрии и топологии Федерального государственного бюджетного учреждения науки Математического института им. В. А. Стеклова Российской академии наук
(специальность — 01.01.04).

Официальные оппоненты:

Малютин Андрей Валерьевич — доктор физико-математических наук, заместитель директора по научной работе Федерального государственного бюджетного учреждения науки Санкт-Петербургского отделения Математического института им. В. А. Стеклова Российской академии наук
(специальность — 01.01.04).

Петухов Алексей Владимирович — кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник Лаборатории № 4 (Добрушинской математической лаборатории) Федерального государственного бюджетного учреждения науки Института проблем передачи информации им. А. А. Харкевича Российской академии наук
(специальность — 01.01.06).

Ведущая организация:

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт математики им. С. Л. Соболева Сибирского отделения Российской академии наук.

Защита состоится 17 сентября 2026 г. на заседании диссертационного совета 24.1.167.03 при Математическом институте им. В.А. Стеклова Российской академии наук по адресу: 119333, г. Москва, ул. Губкина, д. 8, 9-й этаж, конференц-зал.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Математического института им. В. А. Стеклова и на сайте: https://www.mi-ras.ru/dis/ref26/kornev/dis.pdf.

Автореферат разослан « » июля 2026 г.

Учёный секретарь
диссертационного совета 24.1.167.03,
д.ф.-м.н., профессор РАН  Д. В. Осипов

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Формальная группа геометрических кобордизмов была введена С. П. Новиковым, логарифм этой группы был описан А. С. Мищенко [Нов67]. Как показал Д. Квиллен, формальная группа геометрических кобордизмов изоморфна универсальной формальной группе Лазара [Qui69]. В работе [Бух70] В. М. Бухштабером независимо от результата Квиллена было показано, что кольцо коэффициентов формальной группы геометрических кобордизмов порождает кольцо Ω_U кобордизмов стабильно комплексных многообразий, а экспонента этой формальной группы задает характер Черна $\mathrm{ch}_U : U^*(-) \to H^*(-, \Omega_U \otimes \mathbb{Q})$. В статье [БН71] В. М. Бухштабера и С. П. Новикова была введена конструкция квадрата модуля универсальной формальной группы, названная двузначной формальной группой в кобордизмах, и получены результаты об образе кольца Ω_{Sp} кобордизмов стабильно кватернионных (симплектических) многообразий в кольце Ω_U в терминах закона сложения этой двузначной формальной группы. Это привело к общему понятию n-значной формальной группы и примерам n-значных групп.

Начиная с 30-х годов XX века в разных разделах математики естественно возникают и находят приложения многозначные группы, в которых произведением пары точек пространства X является подмножество в X. Это так называемые мультигруппы и гипергруппы (см., например, [Zie23] и список литературы там). В n-значных группах произведением любых пар точек является мультимножество из n точек. Принципиально новым явилось то, что результат n-значного умножения содержит n точек (для фиксированного n) *с учетом кратностей*. Аксиоматическое определение n-значных групп и первые результаты их алгебраической теории были получены в последующем цикле работ В. М. Бухштабера. В 1976 году В. М. Бухштабер показал [Бух76], что множество двузначных формальных групп разделяется на два класса, построил универсальные формальные группы в каждом из этих классов и доказал, что двузначная формальная группа геометрических кобордизмов изоморфна универсальной формальной группе одного из этих классов. Этот результат привел к топологическим приложениям алгебраической теории двузначных формальных групп.

В настоящее время теория n-значных (формальных, конечных, дискретных, топологических и алгебро-геометрических) групп и ее приложения в различных областях математики и математической физики развиваются рядом авторов, см. работы [Бух75; AL75; Хол81; Вер83; Бух90; BV96; БВЕП96; BR97; Buc06; Dra10; DK14; БВГ22; БВ24; CDFH24; GRS26; BGR26] и список литературы к каждой из них. Сравнительный анализ теорий однозначных и n-значных групп можно найти в работе [BB12].

В задачах классификации двузначных формальных групп над $\mathbb{Q}$-алгебрами Бухштабером была открыта [Бух75] их связь с теорией коалгебр и теорией операторов обобщенного сдвига, которая позволила получить новые доказательства как классических резуль-

татов (например, теоремы Лазара о кольце коэффициентов универсальной одномерной формальной группы), так и новые результаты (например, о кольцах кобордизмов многообразий Стонга [Бух78]). В проблеме вычисления универсальной двузначной формальной группы была использована теория когомологий градуированных коалгебр [Бух76], которая уже в случае двузначных групп привела к кольцам когомологий с некоммутативным умножением в отличие от коммутативного умножения в когомологиях алгебр Хопфа.

Обзор [AL75] Дж. Адамса и А. Люлевичуса посвящен результатам Бухштабера о двузначных формальных группах и их топологическим приложениям.

В работах [Хол81; Хол84] А. Н. Холодова были получены результаты по алгебраической теории n-значных групп.

В совместной работе [БХ82] В. М. Бухштабером и А. Н. Холодовым были построены n-значные аналоги двузначной формальной группы в кобордизмах. В этой статье любой n-значной формальной группе в теории кобордизмов была сопоставлена обобщенная теория когомологий, аналогичная теории комплексных кобордизмов в случае $n = 2$.

В работе [Вер83] В. В. Вершинин, опираясь на результаты [БН71; Бух78], получил результаты о кручении в кольце Ω_{Sp}.

Работа [Бух90] положила начало теории алгебраических n-значных групп, важные примеры которых дает теория автоморфизмов абелевых многообразий и абелевых функций. В этой статье было показано, что каждый многочлен[1]

$$\mathcal{B}_{\boldsymbol{a}}(z;x,y) = (x+y+z-a_2xyz)^2 - 4(1+a_3xyz)(xy+yz+xz+a_1xyz) \tag{0.0.1}$$

определяет двузначную алгебраическую группу $\mathbb{G}_{\boldsymbol{a}}$, универсальную в классе двузначных формальных групп (над $\mathbb{Q}$-алгебрами без делителей нуля), получающихся посредством конструкции квадрата модуля (см. [БН71]) из класса формальных групп

$$\mathcal{F}(u,v) = \frac{u^2\lambda_1(v) - v^2\lambda_1(u)}{u\lambda_2(v) - v\lambda_2(u)}, \tag{0.0.2}$$

где $\lambda_k(u) \in A[[u]], k = 1,2$; кольцо A имеет довольно сложную структуру (см. [БУ15]), однако

$$A \otimes \mathbb{Q} \cong \mathbb{Q}[b_1,b_2,b_3,b_4], \quad b_1 = \alpha, \quad b_2 = \wp(z), \quad b_3 = \wp'(z), \quad b_4 = g_2,$$

причём $\deg b_i = -2i$, $i = 1,\dots,4$, а $\wp(z) = \wp(z;g_2,g_3)$ — функция Вейерштрасса, удовлетворяющая уравнению $(\wp'(z))^2 = 4\wp(z)^3 - g_2\wp(z) - g_3$. Многочлен (0.0.1) играет важную роль в настоящей диссертации.

В статье [BV96] В. М. Бухштабера и А. П. Веселова было обнаружено, что динамика

[1] В работе [Бух90] использован многочлен (0.0.1) в другой нормализации $\widetilde{a}_1$, $\widetilde{a}_2$ и $\widetilde{a}_3$ свободных параметров a_1, a_2 и a_3. Более конкретно, $\widetilde{a}_1 = a_1$ и $\widetilde{a}_2 = a_2$ и $\widetilde{a}_3 = 4a_3$. Однако это отличие в нормализациях несущественно, поскольку работа происходит над $\mathbb{Q}$-алгебрами.

точек, возникающая при соответствии Эйлера–Шаля, управляется законом $m * n = [m + n, |m - n|]$ двузначной группы на множестве целых неотрицательных чисел.

Понятие n-алгебры Хопфа было введено в [BR97] В. М. Бухштабером и Э. Рисом. Показано, что кольцо функций $\mathcal{O}(X)$ и кольцо когомологий $H^*(X)$ на n-значной топологической группе X обладают структурой n-алгебры Хопфа. Используя свойства n-алгебр Хопфа, авторы получили обобщение классического результата Хопфа [Hop41] о пространствах с умножением. Т. Е. Пановым в [Пан96] были получены результаты о структуре 2-алгебры Хопфа в когомологиях четырехмерных многообразий.

В работе [Dra10] В. Драговичем открыта замечательная связь уравнения ассоциативности 2-значной группы на $\mathbb{C}$ с методом интегрирования волчка Ковалевской. В работе [BD18] построена алгебраическая двузначная группа на многообразии Куммера.

Авторы статьи [CDFH24] разработали технику формальных тернарных законов Уолтера и сравнили ее с теорией двузначных формальных групп Бухштабера. Ими также были вычислены элементарные формальные тернарные законы.

В работе [GRS26] авторами рассмотрена производящая функция $\Phi^{(n)}$ для обратных величин n-х степеней факториалов. Установлена связь между формулами произведения для таких рядов и периодами некоторых семейств алгебраических гиперповерхностей. Для этих семейств описаны их сингулярные множества и показано, что эти сингулярные множества задаются нулями многочленов Бухштабера–Риса $p_n(z; x, y)$, которые определяют n-значные групповые законы $\mathbb{G}_n(\mathbb{C})$.

В связи с задачами геометрической программы Ленглендса авторы статьи [BGR26] ввели понятие обобщенного многочлена Концевича D_a. Оказалось, что многочлен (0.0.1) связан с D_a преобразованием Мебиуса.

Актуальная проблема классификации n-значных групп даже на конечных множествах оказалась сложной (даже для случая специальных двузначных групп [БВГ22]). О результатах разных авторов в этом направлении в сопоставлении с результатами нашей диссертации будет сказано ниже.

Цели и задачи работы. Цель диссертации — развить теорию алгебраических n-значных групп и моноидов и получить ее приложения в задачах алгебраической топологии, алгебраической геометрии, теории чисел и математической физики. Это привело к следующим задачам:

1. Классифицировать симметрические n-алгебраические n-значные группы при $n = 2$ и 3.

2. Классифицировать и представить явные формулы двух-, трех-, четырех- и шестизначных общих законов сложения на $\mathbb{C}P^1$, определяемых эллиптическими кривыми и их автоморфизмами.

3. Описать алгебраические двузначные структуры на $\mathbb{C}P^1$ в случае вырожденных кубик.

4. Получить матричные формулы для известных законов сложения $p_n(z;x,y)$ и найти их приложения.

5. Установить и обосновать связь между семейством $\{\mathbb{G}_n(\mathbb{C}P^1)\}$ алгебраических n-значных косетных моноидов на $\mathbb{C}P^1$, гиперповерхностями Ферма и проективной двойственностью.

6. Описать классы комплексных кобордизмов гиперповерхностей Ферма в терминах классов тета-дивизоров Θ_n общих главно поляризованных абелевых многообразий.

7. Найти явный пример формальной группы, отличной от формальной группы Бухштабера–Кричевера, конструкция квадрата модуля которой дает семейство многочленов Бухштабера.

8. Классифицировать n-значные моноиды и группы порядка 3.

9. Получить результаты об n-значных динамиках, определяемых косетными конструкциями известных серий групп с циклическим представлением.

Основные результаты диссертации.

1. **Теорема 2.1.11** [БК26]**.** Структура алгебраической n-значной косетной группы $\mathbb{G}_n(\mathbb{C})$ продолжается (лишь) до структуры алгебраического n-значного косетного моноида $\mathbb{M}_n(\mathbb{C}P^1)$ на $\mathbb{C}P^1$. При этом $\infty * x = x * \infty = [\infty, \infty, \dots, \infty]$ для любого $x \in \mathbb{C}P^1 \backslash \{\infty\}$ и значение $\infty * \infty$ не определено.

2. **Теорема 2.1.14** [БК26]**.** При проективной двойственности кривая

$$X_n = \{\, p_n(z;x,y) = 0 \,\} \subset \mathbb{C}P^2, \ (n \geq 2)$$

переходит в кривую

$$X_n^\vee = \{\, (uvw)^{n-1}\, p_{n-1}(1/w; 1/u, 1/v) = 0 \,\} \subset (\mathbb{C}P^2)^*.$$

Композиция двойственности $X_n \mapsto X_n^\vee$ с последующим преобразованием Мёбиуса $(u,v,w) \mapsto (1/u, 1/v, 1/w)$ задает операцию сдвига

$$\mathbb{M}_n(\mathbb{C}P^1) \mapsto \mathbb{M}_{n-1}(\mathbb{C}P^1)$$

в семействе алгебраических n-значных моноидов.

3. **Теорема 3.2.1** [Kor26]**.**

(i) Пусть

$$u := I(x) = \int_0^{\sqrt{x}} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1 + a_1 t^2 + a_2 t^4 + a_3 t^6}}, \qquad (0.0.3)$$
$$g_2 = 4\left(\frac{a_1^2}{3} - a_2\right), \qquad g_3 = 4\left(\frac{a_1 a_2}{3} - \frac{2a_1^3}{27} - a_3\right).$$

Тогда

$$x(u) = \frac{1}{\wp(u; g_2, g_3) - a_1/3}.$$

(Если $g_2^3 - 27 g_3^2 = 0$, то функция $\wp(u; g_2, g_3) = -\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}u^2} \log \sigma(u; g_2, g_3)$ соответствует вырождению σ-функции Вейерштрасса).

(ii) Логарифм и экспонента формальной двузначной группы $\mathbb{G}_a$ с двузначным законом (0.0.1) задаются следующими формальными рядами над алгеброй $\mathbb{Q}[a_1, a_2, a_3]$:

$$B(x) = I^2(x) = \left(\int_0^{\sqrt{x}} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1 + a_1 t^2 + a_2 t^4 + a_3 t^6}}\right)^2,$$
$$B^{-1}(x) = \frac{1}{\wp(\sqrt{x}; g_2, g_3) - a_1/3}.$$

(iii) Пусть $Q(t) := 1 - a_1 t^2 + a_2 t^4 - a_3 t^6$. Тогда закон $F_{\mathrm{Bc}}(u, v)$, его экспонента $f_{\mathrm{Bc}}(u)$ и его логарифм $g_{\mathrm{Bc}}(u)$ имеют вид:

$$F_{\mathrm{Bc}}(u, v) = \left[\left(\frac{u\sqrt{Q(v)} - v\sqrt{Q(u)}}{u^2 - v^2}\right)^2 + a_3 u^2 v^2\right]^{-1/2}, \qquad (0.0.4)$$

$$f_{\mathrm{Bc}}(u) = \frac{1}{\sqrt{\wp(u; g_2, -g_3) + \frac{a_1}{3}}}, \qquad g_{\mathrm{Bc}}(u) = \int_0^u \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1 - a_1 t^2 + a_2 t^4 - a_3 t^6}}.$$

(iv) Формальная группа $F_{\mathrm{Bc}}(u, v)$ универсальна в классе всех однозначных формальных групп (над $\mathbb{Q}$-алгебрами без делителей нуля) с условием $\overline{u} = -u$, для которых конструкция квадрата модуля даёт двузначную формальную группу $\mathbb{G}_a$ с двузначным законом (0.0.1).

(v) Пересечение классов $\mathcal{F}(u, v)$ (см. (0.0.2)) и $F_{\mathrm{Bc}}(u, v)$ совпадает с родом Ошанина. Это характеризуется условиями $\lambda_1(u) \equiv 1$ для $\mathcal{F}(u, v)$ и $a_3 = 0$ для $F_{\mathrm{Bc}}(u, v)$.

(vi) Формальная группа $F_{\mathrm{Bc}}(u, v)$ соответствует роду Хирцебруха

$$\mathrm{Bc} : \Omega_{\mathrm{U}} \to \mathbb{Z}\left[\frac{1}{2}, a_1, a_2, a_3\right],$$

который мы называем родом Бухштабера, где $\deg a_i = -4i$, $i = 1, \ldots, 3$.

4. **Теорема 3.2.4** [Kor26]. Значения $\mathrm{Bc}(\Theta_n)$ принадлежат кольцу $\mathbb{Z}[a_1, a_2, a_3]$, где Θ_n обозначает тета-дивизор общего главно поляризованного абелева многообразия.

5. **Теорема 4.1.4** [Kor26]. Пусть $X = \{e, x_1, x_2\}$ и

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}^{\circledast 2} = \begin{pmatrix} x_1 * x_1 \\ x_1 * x_2 \\ x_2 * x_1 \\ x_2 * x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ b_0 & b_1 & b_2 \\ d_0 & d_1 & d_2 \\ c_0 & c_1 & c_2 \end{pmatrix} \mathfrak{X} = B\,\mathfrak{X}\,. \tag{0.0.5}$$

Тогда каждый n-значный моноид на множестве X представляется одной из следующих матриц $B = B_j$ при условии, что дробные выражения являются целыми неотрицательными числами:

$$B_1 = \begin{pmatrix} a_0 & n-a_0 & 0 \\ 0 & 0 & n \\ 0 & 0 & n \\ c_0 & \frac{c_0 n}{a_0} & n - c_0 - \frac{c_0 n}{a_0} \end{pmatrix},$$

$$B_2 = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & n-a_0-a_1 \\ b_0 & b_1 & n-b_0-b_1 \\ b_0 & b_1 & n-b_0-b_1 \\ \frac{b_0(n-b_0-b_1)+a_0 b_1 - a_1 b_0}{n-a_0-a_1} & \frac{(b_0+b_1)(n-b_1)}{n-a_0-a_1} & \frac{(n-b_0-b_1)^2+n(b_1-a_0-a_1)+a_1 b_0 - a_0 b_1}{n-a_0-a_1} \end{pmatrix},$$

$$B_3 = \begin{pmatrix} 0 & n & 0 \\ 0 & n & 0 \\ 0 & n & 0 \\ c_0 & c_1 & n-c_0-c_1 \end{pmatrix}, \quad B_4 = \begin{pmatrix} 0 & n & 0 \\ 0 & 0 & n \\ 0 & 0 & n \\ 0 & c_1 & n-c_1 \end{pmatrix},$$

$$B_5 = \begin{pmatrix} 0 & n & 0 \\ 0 & n & 0 \\ 0 & 0 & n \\ 0 & 0 & n \end{pmatrix}, \quad B_6 = \begin{pmatrix} 0 & n & 0 \\ 0 & 0 & n \\ 0 & n & 0 \\ 0 & 0 & n \end{pmatrix}.$$

Два моноида, соответствующие сериям B_i и B_j (i и j необязательно различны) изоморфны тогда и только тогда, когда матрица B_i пропорциональна матрице B_j, либо матрице $\varphi(B_j)$, где $\varphi : X \to X$ — изоморфизм моноидов, для которого $\varphi(x_1) = x_2$. Каждая матрица B_j с целыми неотрицательными элементами задает некоторый n-значный моноид порядка 3.

Положения, выносимые на защиту.

1. Описаны структуры двузначных алгебраических моноидов на $\mathbb{C}P^1$ в случае вырожденных кубик.

2. Установлена связь теории алгебраических n-значных моноидов и групп на $\mathbb{C}P^1$ с теорией дискриминантов и проективной двойственности.

3. В аппарате алгебраической топологии введен новый род Хирцебруха Bc. В явном виде представлена соответствующая формальная группа $F_{\mathrm{Bc}}(u,v)$ над кольцом $\mathbb{Z}\left[\frac{1}{2},a_1,a_2,a_3\right]$. Показано, что формальная группа $F_{\mathrm{Bc}}(u,v)$ универсальна в классе всех однозначных формальных групп (над $\mathbb{Q}$-алгебрами без делителей нуля) с условием $\overline{u}=-u$, для которых конструкция квадрата модуля даёт двузначную формальную группу $\mathbb{G}_a$ с двузначным законом (0.0.1).

4. Получен результат по классической топологической проблеме о целочисленных родах Хирцебруха. Род Bc задается рядом над кольцом $\mathbb{Q}[a_1,a_2,a_3]$, а на любом стабильно комплексном многообразии род Bc принимает значения в кольце $\mathbb{Z}\left[\frac{1}{2},a_1,a_2,a_3\right]$. Показано, что род Bc на тета-дивизорах общих главно поляризованных абелевых многообразий принимает значения в кольце $\mathbb{Z}[a_1,a_2,a_3]$, а на комплексных проективных пространствах — в кольце $\mathbb{Z}\left[\frac{1}{2},a_1,a_2,a_3\right]$.

5. Получена классификация n-значных моноидов и групп, завершающая исследования ряда авторов по проблеме n-значных групп порядка 3.

Научная новизна. Все результаты, выносимые на защиту, являются новыми. Все результаты диссертации, опубликованные в совместных работах, принадлежат автору.

Методы исследования. В работе используются методы теории n-значных групп, теории n-значных формальных групп, теории характеристических классов векторных расслоений, теории комплексных многообразий, теории расширений полей.

Теоретическая и практическая ценность работы. Работа носит теоретический характер. Результаты диссертации могут найти применение в алгебраической топологии, алгебраической геометрии, алгебраической теории чисел, теории групп и динамических системах.

Соответствие паспорту научной специальности. Тематика диссертации соответствует паспорту научной специальности 1.1.3 «Геометрия и топология». В работе рассматриваются геометрические свойства эллиптических кривых в рамках теории n-значных групп, структуры двузначных формальных групп из теории характеристических классов векторных расслоений, структуры обобщенных теорий когомологий, а также конструкции теории n-значных динамик. Это соответствует предметной области по следующим направ-

лениям исследований: алгебраическая геометрия (топологические аспекты), алгебраическая топология, топология многообразий, геометрия и топология действий групп, а также геометрия и топология в теоретической и математической физике.

Достоверность результатов и апробация работы. Результаты работы снабжены строгими доказательствами. Основные результаты диссертации представлены на следующих научных конференциях и семинарах.

Доклады на конференциях:

1. «Род Бухштабера и формальные группы», конференция «Алгебраическая топология, действия групп и комбинаторика», 12 мая 2026 г., Международный математический центр «Сириус», ФТ «Сириус», Россия.

2. «n-значные группы, суммы Кронекера и матрицы Вендта», V конференция математических центров России, 15 августа 2025 г., Сибирский федеральный университет, г. Красноярск, Россия.

3. «Dynamics and multivalued groups», конференция «Молодежный забег МЦМУ МИАН», 13 марта 2023 г., Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, Москва, Россия.

Доклады на семинарах:

1. «Род Бухштабера и формальные группы», семинар «Торическая топология, комбинаторика и теория гомотопий», совместный семинар лаборатории топологии и сложных сетей факультета математики и лаборатории алгебраической топологии и ее приложений факультета компьютерных наук НИУ ВШЭ, НМУ, 4 мая 2026 г., Москва, Россия.

2. «Гиперповерхности Ферма, проективная двойственность и алгебраические n-значные моноиды», семинар «Алгебраическая топология и ее приложения. Семинар им. М. М. Постникова», механико-математический факультет МГУ им. М. В. Ломоносова, 17 декабря 2025 г., Москва, Россия.

3. «Дискретные и алгебраические n-значные группы», научно- исследовательский семинар по дискретной геометрии и геометрии чисел, механико- математический факультет МГУ им. М. В. Ломоносова, 3 декабря 2025 г., Москва, Россия.

4. «n-значные алгебраические моноиды, кубики и дискриминанты», семинар лаборатории алгебраической топологии и ее приложений факультета компьютерных наук, НИУ ВШЭ, 21 ноября 2025 г., Москва, Россия.

5. «n-значные группы, суммы Кронекера и матрицы Вендта» (совместный доклад с В. М. Бухштабером), семинар отдела геометрии и топологии МИАН и кафедры высшей геометрии и топологии механико-математического факультета МГУ «Геометрия, тополо-

гия и математическая физика» (семинар С. П. Новикова), 20 мая 2025 г., Москва, Россия.

Публикации по теме диссертации. Основные результаты диссертации опубликованы в трех работах автора (первая из которых в соавторстве) в рецензируемых научных журналах: [БК26; Kor26; Kor26]. В работе [БК26] автору диссертации принадлежит решающая роль в полученных результатах.

Основное содержание работы

Глава 1 посвящена результатам об n-значных n-алгебраических группах и основана на статье [БК26] и препринтах [ВК25a; ВК25b].

В Разделе 1.1 приводятся основные понятия общей теории n-значных групп.

В Разделе 1.2 приводятся основные конструкции, примеры и свойства алгебраических n-значных моноидов и групп. *Алгебраическим n-значным моноидом* называется алгебраическое многообразие X с ассоциативным n-значным умножением, определенным рациональным морфизмом $X \times X \to \mathrm{Sym}^n(X)$ с нейтральным элементом (единицей) $e \in X$, т.е. существуют $x * e$, $e * x$ и имеют место равенства: $x * e = e * x = [x, x, ..., x]$ при любом $x \in X$. *Алгебраической n-значной группой* называется алгебраический n-значный моноид на X с рациональным морфизмом обращения $\mathrm{inv} : X \to X$, для которого если существует $\mathrm{inv}(x)$, то выполнены условия: существуют $x * \mathrm{inv}(x)$, $\mathrm{inv}(x) * x$, и $e \in x * \mathrm{inv}(x)$, $e \in \mathrm{inv}(x) * x$. Алгебраический n-значный моноид (или группа) на X называется *регулярным*, если n-значное умножение $X \times X \to \mathrm{Sym}^n(X)$ определено на всем многообразии $X \times X$ (и отображение inv определено всюду на X в случае группы). n-значная группа X называется *инволютивной*, если отображение inv определено однозначно и $\mathrm{inv}(x) = x$ для каждого $x \in X$.

Пусть

$$\delta_{\boldsymbol{a}} = \mathrm{disc}_t(t^3 + a_1 t^2 + a_2 t + a_3)$$

— дискриминант. Показано [БВ19, Теорема 6.3], [ВК25a, Theorem 1], что для любого выбора комплексных параметров $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, a_3)$ многочлены Бухштабера (0.0.1) определяют структуру универсальной симметрической 2- алгебраической 2-значной группы $\mathbb{G}_{\mathbb{C}}(\mathcal{B}_{\boldsymbol{a}})$ на $\mathbb{C}$ с умножением

$$x * y = \{z \mid \mathcal{B}_{\boldsymbol{a}}(z; x, y) = 0\},$$

нулем 0 и обратным $\mathrm{inv}(x) = x$. Согласно недавней работе [BGR26, Theorem 4.7] закон (0.0.1) при $\delta_{\boldsymbol{a}} \neq 0$ задает на $\mathbb{C}P^1$ структуру регулярной 2-значной алгебраической группы на $\mathbb{C}P^1$.

Как было замечено в [BGR26, Theorem 4.7], имеет место равенство:

$$D_a(z;x,y) = (xyz)^2\,\mathcal{B}_a(-1/z;-1/x,-1/y),$$

где

$$D_a(z;x,y) = \operatorname{disc}_t\bigl(t^3 + a_1t^2 + a_2t + a_3 - (t-x)(t-y)(t-z)\bigr)$$

— обобщенный многочлен Концевича.

Обозначим через $\mathbb{G}_n(\mathbb{C})$ косетную [Buc06, Theorem 1] n-значную алгебраическую группу на $\mathbb{C}$ с нулем 0, обратным $\operatorname{inv}(x) = (-1)^n x$ и умножением

$$x * y = [z \mid p_n(z;(-1)^n x,(-1)^n y) = 0],$$

где

$$p_n(z;x,y) = \prod_{r,s=1}^{n}(\sqrt[n]{z} + \varepsilon^r\sqrt[n]{x} + \varepsilon^s\sqrt[n]{y}) \tag{0.0.6}$$

— симметрический многочлен с целыми коэффициентами, $\varepsilon = e^{2\pi i/n}$ для фиксированной ветви $\sqrt[n]{-}$. Группа $\mathbb{G}_n(\mathbb{C})$ впервые была рассмотрена в работе [БН71].

Содержание Раздела 1.3 посвящено результатам по n-значным законам, соответствующим кубическим кривым.

В работе [ББ11] представлен 1-значный закон сложения на эллиптических кривых в общей модели Вейерштрасса, используя униформизацию Тейта. Этот закон задается формальными рядами. Одним из следствий нашей работы является тот факт, что n-значные законы, соответствующие эллиптическим кривым, задаются многочленами. В Теоремах 1.3.9, 1.3.16, 1.3.19 и 1.3.23 нами описаны n-значные законы сложения при $n = 2$, 3, 4 и 6, которые в явном виде задаются полиномами и получаются косетными конструкциями из геометрических законов сложения на эллиптических кривых. Косет-конструкция для групп [Buc06, Theorem 1] без затруднений переносится на случай моноидов. Мы называем n-значный моноид M_H, построенный по 1-значному моноиду M и подгруппе H порядка n группы $\operatorname{Aut}(M)$, *косетным*.

В Теореме 1.3.9 описана классификация всех 2-значных косетных групп и моноидов на $\mathbb{C}P^1$, получаемых косетной конструкцией из группы точек эллиптической кривой относительно инволюции. Хотя содержание пункта **(i)** не является новым, таковым служит его метод доказательства. Данный результат был получен впервые в [BGR26, Theorem 4.7] с опорой на теорию эллиптических функций. Согласно ему при $\delta_a \neq 0$ (и только в этом случае) универсальный 2-значный групповой закон $\mathbb{G}_{\mathbb{C}}(\mathcal{B}_a)$, полученный в [БВ19, Теорема 6.3], продолжается до 2-значной косетной алгебраической регулярной инволютивной группы $\mathbb{G}_{\mathbb{C}P^1}(\mathcal{B}_a)$ на $\mathbb{C}P^1$ с единицей 0 и умножением μ_a. В [BGR26, Theorem 5.1] было показано, что преобразование Мебиуса $x \mapsto -1/x$, $y \mapsto -1/y$, $z \mapsto -1/z$ переводит группу $\mathbb{G}_{\mathbb{C}P^1}(\mathcal{B}_a)$ в изоморфную группу $\mathbb{G}_{\mathbb{C}P^1}(D_a)$ с единицей ∞ и умножением, заданным мно-

гочленом Концевича $D_a(-z;-x,-y)$. Группа $\mathbb{G}_{\mathbb{C}P^1}(D_a)$ совпадает с косетной группой $\mathcal{E}_{\langle\sigma\rangle}$, где

$$\mathcal{E} = \{\eta^2 = \zeta^3 + a_1\zeta^2 + a_2\zeta + a_3\} \tag{0.0.7}$$

— эллиптическая кривая и

$$\sigma : (\zeta, \eta) \mapsto (\zeta, -\eta)$$
$$\infty \mapsto \infty$$

— инволюция. Пункт **(ii)** Теоремы 1.3.9 является новым и говорит о том, что группы $\mathbb{G}_{\mathbb{C}P^1}(\mathcal{B}_a)$ классифицируются j-инвариантом эллиптической кривой $\mathcal{E}$.

Назовем элемент w из n-значного моноида (группы) $\mathbb{M}$ *итерирующим* (при $n = 2$ *удваивающим*), если для каждого $m \in \mathbb{M}$ мультимножества $m * w$ и $w * m$ содержат точки кратности не меньше 2. При $n = 2$ множество удваивающих точек образует 2-значный диагональный подмоноид (подгруппу). Если n-значная алгебраическая группа задается в некоторой карте U корнями по z некоторого многочлена $P(z;x,y)$, то элемент y является итерирующим в том и только в том случае, когда y является корнем дискриминанта $\mathrm{disc}_z(P(z;x,y))$ при любом $x \in U$. Таким образом, дискриминант $\mathrm{disc}_z(P(z;x,y))$ закона $P(z;x,\,y)$ несет важную информацию о структуре n-значного алгебраического моноида. В Теореме 1.3.12 показывается, что при $\delta_a \neq 0$ группа удваивающих точек 2-значной группы $\mathbb{G}(\mathcal{B}_a)$ изоморфна четверной группе Клейна $\mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/2$. Согласно Предложению 1.3.17, множество $\{0, \pm 1/\sqrt{c}\}$ итерирующих элементов 3- значной группы $\mathbb{G}_{3,c}(\mathbb{C}P^1)$ является (как 3-значная подгруппа) диагональной конструкцией от 1-значной группы, изоморфной $\mathbb{Z}/3$. Согласно Предложению 1.3.20, итерирующие элементы 4-значной группы $\mathbb{G}_{4,b}(\mathbb{C}P^1)$ образуют 4-значную подгруппу, изоморфную группе $\mathrm{diag}_2((\mathbb{Z}/4)/\sigma)$, где diag_2 обозначает двукратную диагональ и $(\mathbb{Z}/4)/\sigma$ — двузначная косетная группа, построенная по аддитивной группе $\mathbb{Z}/4$ и инволюции $\sigma : g \mapsto -g$ для всех $g \in \mathbb{Z}/4$.

Как уже отмечалось, в Теоремах 1.3.16, 1.3.19 и 1.3.23 явно описаны полиномы, задающие умножение во всех возможных (с точностью до изоморфизма) косетных 3-, 4- и 6-значных группах $\mathbb{G}_{3,c}(\mathbb{C}P^1)$, $\mathbb{G}_{4,b}(\mathbb{C}P^1)$ и $\mathbb{G}_{6,c}(\mathbb{C}P^1)$ на $\mathbb{C}P^1$, моделируемых эллиптическими кривыми и автоморфизмами. Они соответствуют эквиангармонической ($j = 0$, $\mathrm{Aut}\,\mathcal{E}(\mathbb{C}) \cong \mathbb{Z}/6$) и гармонической ($j = 1728$, $\mathrm{Aut}\,\mathcal{E}(\mathbb{C}) \cong \mathbb{Z}/4$) эллиптическим кривым $\mathcal{E}$.

В нодальном случае кубики $\mathcal{E}$ согласно Теореме 1.3.36 косетная группа $\mathbb{G}_{\mathbb{C}P^1}(D_a)$ превращается (с точностью до изоморфизма) в косетный моноид $\mathbb{M}_{\mathrm{node}}(\mathbb{C}P^1)$.

В каспидальном случае кубики $\mathcal{E}$ согласно Теореме 1.3.45 косетные группы

$$\mathbb{G}_{\mathbb{C}P^1}(D_a),\ \mathbb{G}_{3,c}(\mathbb{C}P^1),\ \mathbb{G}_{4,b}(\mathbb{C}P^1),\ \mathbb{G}_{6,c}(\mathbb{C}P^1)$$

превращаются (с точностью до изоморфизма) в косетные моноиды

$$\mathbb{M}_2(\mathbb{C}P^1),\ \mathbb{M}_3(\mathbb{C}P^1),\ \mathbb{M}_4(\mathbb{C}P^1),\ \mathbb{M}_6(\mathbb{C}P^1)$$

соответственно.

Раздел 1.4 посвящен симметрическим n-алгебраическим n-значным группам и их классификациям при $n = 2$ и 3.

Результаты о косетных моноидах и группах мотивируют понятие классов симметрических n-алгебраических n-значных групп (см. Определения 1.2.8, 1.4.6 и 1.4.9). Для $n = 2$ и 3 нами получено описание универсальных объектов этих классов (Теоремы 1.4.22 и 1.4.25). Группа $\mathbb{G}_n(\mathbb{C})$ принадлежит одному из этих классов. Отметим, что на сегодняшний день неизвестна полная классификация n-алгебраических n-значных групп при $n > 3$.

В Разделе 1.5 мы напоминаем необходимые конструкции из линейной алгебры.

В Разделе 1.6 приводятся детерминантные формы многозначных законов умножения $p_n(z; x, y)$ и $p_{n,m}(z; \boldsymbol{x})$ при помощи сумм Кронекера сопровождающих матриц Фробениуса.

Семейство многочленов $p_n(z; x, y)$, см. (0.0.6), было введено в статье [BR97]. В той же работе отмечено, что многочлены $p_n(z; x, y)$ являются целочисленными однородными симметрическими степени n. Они явно представлены в [Buc06] для $n = 1, \ldots, 7$ (см. также формулы (1.6.2) настоящей работы) в виде целочисленных многочленов от элементарных симметрических многочленов σ_1, σ_2 и σ_3, и поставлены задачи о структуре коэффициентов этих многочленов в зависимости от n.

Группы $\mathbb{G}_n(\mathbb{C})$ и многочлены $p_n(z; x, y)$ возникают и в настоящее время изучаются в различных областях математики и математической физики. В недавней работе [Чир24] исследована функция роста n-значной динамики группы $\mathbb{G}_n(\mathbb{C})$. В другой недавней работе [GRS26] описана связь многочленов $p_n(z; x, y)$ с мультипликативными ядрами в смысле Концевича– Одесского, n-бесселевыми ядрами и потенциалами в модели Ландау–Гинзбурга. Как уже отмечалось выше, в [BGR26] установлена связь между симметрической 2- алгебраической 2-значной группы из [Бух90] (совпадающей с $\mathbb{G}_2(\mathbb{C})$ при $\boldsymbol{a} = 0$) с многочленами Концевича, введенными в рамках программы Ленглендса.

Мы показываем, что n-значная группа $\mathbb{G}_n(\mathbb{C})$ реализуется при помощи корней характеристического многочлена переменной $z = t^n$ кронекеровой суммы (см. Определение 1.5.1) двух сопровождающих матриц Фробениуса (1.5.5) для многочленов $t^n - x$ и $t^n - y$. Итерации n-значного умножения приводят к однородным симметрическим многочленам $p_n(z; x_1, \ldots, x_m)$, см. Теорему 1.6.6.

В Разделе 1.7 устанавливается связь многозначных законов умножения $p_n(z; x, y)$ с классическими матрицами Вендта и приводится результат о делимости коэффициентов разности $p_n(z; x, y) - (z + x + y)^n$ n-значных законов умножения (закона $p_n(z; x, y)$ и диагонального закона $(z + x + y)^n$) на n^4 при простых $n \geq 5$.

В Теореме 1.7.4 показывается, что каждый многочлен $p_n(z; x, y)$ представляется детерминантом $(n \times n)$-матрицы (1.7.5), которая принадлежит классу, известному в литературе под названием *y-циркулянтные матрицы* [Баб86, с. 211]. Более того, для каждого n при $x = (-1)^n$, $y = z = 1$ данный детерминант $p_n(z; x, y)$ превращается в детерми-

нант $\det W_n$ матрицы Вендта W_n, который имеет важные приложения в теории чисел в контексте большой теоремы Ферма (см. например, [Rib99, Chapter IV, **(2b)**]). Это позволяет ввести обобщение — матрицы Вендта $W_n(z;x,y)$. Тогда Теорема 1.7.4 эквивалентно переформулируется в утверждение о том, что многочлены $p_n(z;x,y)$, выражающие n-значное умножение в группе $\mathbb{G}_n(\mathbb{C})$, являются определителями матрицы Вендта (Теорема 1.7.27). Данный результат переносится в Теореме 1.7.17 на многочлены $p_n(z;x_1,\dots,x_m)$. Возникает круг вопросов, связанный с теоретико-числовыми свойствами коэффициентов многочленов $p_n(z;x,y)$ и обобщающий соответствующий круг вопросов для W_n. В Теореме 1.7.9 при помощи теоремы Вольстенхольма показывается, что коэффициенты многочлена $p_n(z;x,y)-(x+y+z)^n$ делятся на n^4 для каждого простого $n\geq 5$. Одним из стимулов данной части работы был экспериментальный факт о том, что в разложениях коэффициентов многочленов $p_n(z;x,y)$ на простые в базисе элементарных симметрических многочленов возникают простые числа, существенно большие, чем n уже при $n\leq 20$. Многочлены $p_n(z;x_1,\dots,x_m)$ естественно связаны с несколькими классическими и современными вопросами теории чисел, в том числе с проблемой Варинга. Теорема 1.7.28 говорит о том, что минимальный многочлен элемента $\theta = {x_1}^{1/n_1}+\dots+{x_m}^{1/n_m}$ расширения $\mathbb{C}(x_1,\dots,x_m)\subset\mathbb{C}({x_1}^{1/n_1},\dots,{x_m}^{1/n_m})$ с алгебраически независимыми формальными переменными $x_1,\dots,x_m$ представляет собой характеристический многочлен суммы Фробениуса сопровождающих матриц многочленов $t^{n_j}-x_j$ для $j=1,\dots,m$. Как следствие, многочлены $p_n(z;x_1,\dots,x_m)$ неприводимы над $\mathbb{C}$.

Глава 2 посвящена результатам о связи алгебраических n- значных моноидов с проективной двойственностью и гиперповерхностями Ферма. В главу вошли результаты статьи [БК26].

В Разделе 2.1 показывается, что при проективной двойственности кривая Ферма $\{x^n+y^n=z^n\}$ переходит в кривую $\{p_{n-1}(z^n;x^n,y^n)=0\}$, а также что структура алгебраической n-значной косетной группы $\mathbb{G}_n(\mathbb{C})$ продолжается (лишь) до структуры алгебраического n- значного моноида $\mathbb{M}_n(\mathbb{C}P^1)$ на $\mathbb{C}P^1$. В этом же разделе показывается, что композиция проективной двойственности с последующим преобразованием Мёбиуса задает сдвиг в семействе многозначных алгебраических структур.

Авторы работы [GRS26] при исследовании сингулярных множеств оператора Пикара–Фукса для мультипликативных ядер в смысле Концевича– Одесского пришли к удивительным соотношениям, выражающим законы $p_n(z;x,y)$ через дискриминанты некоторых многочленов. Наши результаты проясняют эти соотношения при помощи связи между теорией проективной двойственности и теорией алгебраических n-значных моноидов.

А именно, наша Теорема 2.1.10 утверждает, что при проективной двойственности кривая Ферма $\{x^n+y^n=z^n\}$ переходит в кривую $\{p_{n-1}(z^n;x^n,y^n)=0\}$.

Теорема 2.1.11 показывает, что структура алгебраической n-значной косетной группы $\mathbb{G}_n(\mathbb{C})$ продолжается (лишь) до структуры алгебраического n-значного моноида $\mathbb{M}_n(\mathbb{C}P^1)$

на $\mathbb{C}P^1$. Здесь точка ∞ является поглощающей, то есть

$$\infty * x = x * \infty = [\infty, \infty, \dots, \infty] \quad \text{для каждого } x \in \mathbb{C}P^1 \setminus \{\infty\}.$$

Для каждого натурального n многочлен p_n задает кривую

$$X_n = \{p_n(z; x, y) = 0\}$$

в $\mathbb{C}P^2$. По Теореме 2.1.14, при проективной двойственности кривая X_n ($n \geq 2$) переходит в кривую

$$X_n^\vee = \{(uvw)^{n-1} p_{n-1}(1/w; 1/u, 1/v) = 0\} \subset (\mathbb{C}P^2)^*,$$

а композиция двойственности $X_n \mapsto X_n^\vee$ с последующим преобразованием Мёбиуса $(u, v, w) \mapsto (1/u, 1/v, 1/w)$ задает операцию сдвига $\mathbb{M}_n(\mathbb{C}P^1) \mapsto \mathbb{M}_{n-1}(\mathbb{C}P^1)$ в семействе алгебраических n-значных моноидов. Из формул Плюккера [GKZ94, Proposition 2.4] следует, что если X — гладкая кривая степени n, то кривая $X^\vee$ имеет степень $n(n-1)$. В нашем случае X_n и $X_n^\vee$ сингулярны при $n \geq 3$, причем $\deg X_n = n$ и $\deg X_n^\vee = (n-1)^2$. Кривые X_2 и $X_2^\vee$ неособые (см. Пример 2.1.7).

Согласно [GRS26, Theorem 2.3] многочлен $p_n(z; x, y)$ и дискриминант $\operatorname{disc}_t(P_{x,y,z}(t))$ многочлена

$$P_{x,y,z}(t) = (-1)^n x\, t^{n-1}(1+t)^{n-1} + (-1)^n y (1+t)^{n-1} - t^{n-1} z$$

по переменной t удовлетворяют равенству

$$(-1)^n (n-1)^{2(n-1)} (xyz)^{n-2} p_n(z; x, y) = \operatorname{disc}_t\big(P_{x,y,z}(t)\big). \tag{0.0.8}$$

Прямое доказательство см. в [BK25a, Theorem 8]. Итак, Теоремы 2.1.10, 2.1.11 и 2.1.14 объясняют (0.0.8) с помощью теории алгебраических n-значных моноидов и групп.

Итерации n-значного сложения в $\mathbb{G}_n(\mathbb{C})$ задаются симметрическими многочленами

$$p_{n,m}(z; \boldsymbol{x}) = \prod_{k_1, \dots, k_m = 1}^{n} \big(\sqrt[n]{z} + \varepsilon^{k_1} \sqrt[n]{x_1} + \dots + \varepsilon^{k_m} \sqrt[n]{x_m} \big),$$

которые возникают, например, в связи с дифференциальным уравнением Пикара–Фукса [GRS26, Section 3]. Обозначим через $\mathcal{O}_{n,m}(\mathbb{C}P^1)$ многообразие $\mathbb{C}P^1$, наделенное этой операцией. Пусть $X_{n,m} = \{p_{n,m} = 0\}$ — гиперповерхность в $\mathbb{C}P^m$, и положим

$$P_{n,m}(w; \boldsymbol{u}) = (u_1 \cdots u_m w)^{n-1}\, p_{n-1}(w^{-1}; u_1^{-1}, \dots, u_m^{-1}).$$

Тогда Теорема 2.1.18 утверждает, что композиция двойственности ($m \geq 2$, $n \geq 2$)

$$X_{n,m} \mapsto X_{n,m}^\vee = \{P_{n,m} = 0\} \subset (\mathbb{C}P^m)^*$$

с последующим преобразованием Мёбиуса

$$(u_1, \dots, u_m, w) \mapsto (1/u_1, \dots, 1/u_m, 1/w)$$

задает операцию сдвига

$$\mathcal{O}_{n,m}(\mathbb{C}P^1) \mapsto \mathcal{O}_{n-1,m}(\mathbb{C}P^1)$$

в семействе m-арных n^{m-1}-значных алгебраических структур $\mathcal{O}_{n,m}(\mathbb{C}P^1)$.

Теорема 2.1.19 является итерированным аналогом Теоремы 2.1.10. Она дает конкретную реализацию

$$F_n^\vee = \{\, p_{n-1,m}(w^n; u_1^n, \dots, u_m^n) = 0\}$$

как явного уравнения для двойственной гиперповерхности к гиперповерхности Ферма

$$F_{n,m} = \{\, x_1^n + \dots + x_m^n = z^n \,\}.$$

В Разделе 2.2 освещается связь законов $p_n(z; x, y)$ и дискриминантов расширений полей.

В Предложении 2.2.3 описывается многочлен $p_n(z; x, y)$ как дискриминант некоторого расширения полей.

Раздел 2.3 посвящен предварительным сведениям о геометрии и топологии гиперповерхностей Ферма.

В Разделе 2.4 приводятся результаты по теории кобордизмов гиперповерхностей Ферма в контексте проблемы Милнора–Хирцебруха.

Задача Милнора–Хирцебруха была впервые сформулирована Хирцебрухом в его докладе на ICM 1958 года [Hir58]. Её алгебраическая версия выглядит следующим образом: какие наборы из $p(n)$ целых чисел

$$c_\lambda, \qquad \lambda \in \mathscr{P}(n) \text{ — множество разбиений числа } n,$$

могут быть реализованы как (касательные или нормальные) числа Черна $c_\lambda(M^n)$ некоторого гладкого неприводимого комплексного алгебраического многообразия M^n?

Эта версия задачи в значительной степени остаётся открытой, хотя некоторые арифметические ограничения известны из теоремы Гротендика–Римана–Роха–Хирцебруха.

В частности, можно задаться вопросом о представлении класса $[M] \in \Omega_{\mathrm{U}}$ в виде $[M] = k[\widetilde{M}]$, где $[\widetilde{M}]$ — неделимый класс в кольце Ω_{U}.

В Разделе 2.4.1 получены результаты о сравнении классов кобордизмов $[M_d^2]$ с классами, возникающими из классификационной теоремы Фридмана при использовании наивного равенства $[M_1 \# M_2] = [M_1] + [M_2]$ в кольце Ω_{U}, где $M_1 \# M_2$ обозначает операцию связной суммы многообразий M_1 и M_2. Классы комплексных кобордизмов гиперповерхностей Ферма $[M_d^2]$ и $[M_d^3]$ выражены при помощи классов проективных пространств

и гладких тета-дивизоров. Из разложения по тета-дивизорам получены делимости этих классов на целые числа.

В работе [BV24] была получена формула, согласно которой каждое стабильно комплексное многообразие M^{2n} единственным образом представляется в кольце $\Omega_U \otimes \mathbb{Q}$ в виде многочлена по неособым неприводимым алгебраическим многообразиям Θ_j (комплексной размерности j) — тета-дивизорам общих главно поляризованных абелевых многообразий $\mathcal{A}^{j+1}$:

$$[M^{2n}] = \sum_{\lambda \vdash n} c_\lambda(\nu M^{2n}) \frac{[\Theta_\lambda]}{(\lambda+1)!},$$

где $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_k)$, $\lambda \vdash n$ — разбиение числа n, $(\lambda+1)! = (\lambda_1+1)!\ldots(\lambda_k+1)!$, $\Theta_\lambda = \Theta_{\lambda_1} \times \ldots \times \Theta_{\lambda_k}$ и $c_\lambda(\nu M^{2n})$ — симметрическое мономиальное характеристическое число стабильного нормального расслоения νM^{2n} многообразия M^{2n}.

В Разделе 2.4.2 мы приводим общую формулу, выражающую классы гиперповерхностей Ферма в кольце Ω_U через классы тета-дивизоров (см. Теорему 2.4.22). Возникающие при этом многочлены связаны с комбинаторикой ассоциаэдров. Наш результат обобщает результат работы [BV26, Theorem 1.1], в которой классы комплексных проективных пространств были выражены через тета-дивизоры.

В Главе 3 вводится и исследуется род Бухштабера и строится сопутствующая ему обобщенная теория когомологий. В данную главу вошли результаты статьи [Kor26].

В Разделе 3.1 мы напоминаем основы теории двузначных формальных групп.

В Разделе 3.2 мы вводим род и формальную группу Бухштабера и исследуем их свойства целочисленности.

Класс формальных групп (0.0.2) содержит формальные группы, соответствующие роду Тодда, сигнатуре, роду Ошанина (также называемому эллиптическим) [Och87] и роду Кричевера. В [Бух90] было доказано, что класс формальных групп $\mathcal{F}(u,v)$, является реализацией класса формальных групп Кричевера (см. [Кри90]) с экспонентой

$$f_{\mathrm{Kr}}(x) = \frac{e^{\alpha x}}{\Phi(x,z)}, \quad \text{где} \quad \Phi(x,z) = \Phi(x,z;g_2,g_3) = \frac{\sigma(z-x)}{\sigma(z)\sigma(x)} e^{\zeta(z)x} \tag{0.0.9}$$

— функцией Бейкера–Ахиезера, а $\sigma(z) = \sigma(z;g_2,g_3)$, $\zeta(z) = \frac{d}{dz}\log\sigma(z)$ — функциями Вейерштрасса (см., например, [Lan87], [WW96]).

В Теореме 3.2.1 вводится новый класс формальных групп

$$F_{\mathrm{Bc}}(u,v) = \left[\left(\frac{u\sqrt{Q(v)} - v\sqrt{Q(u)}}{u^2 - v^2} \right)^2 + a_3 u^2 v^2 \right]^{-1/2}, \tag{0.0.10}$$

где $Q(t) = 1 - a_1 t^2 + a_2 t^4 - a_3 t^6$, квадрат модуля которых задаётся семейством многочленов (0.0.1). Закон формальной группы $F_{\mathrm{Bc}}(u,v)$ принадлежит семейству законов формальных групп (0.0.2) тогда и только тогда, когда $a_3 = 0$. В случае $a_3 = 0$ мы получаем род Ошанина.

Следовательно, при $a_3 \neq 0$ соответствующий род отличен от эллиптических родов уровня n, введённых Хирцебрухом (см. [HBJ92, приложение III, раздел 1]).

Таким образом, формальная группа (0.0.10) определяет род Хирцебруха Bc, называемый *родом Бухштабера*. В качестве приложений мы вычисляем его значения на гладких тета-дивизорах и комплексных проективных пространствах. Оказывается, значения $\mathrm{Bc}(\Theta_n)$ принадлежат кольцу $\mathbb{Z}[a_1, a_2, a_3]$, см. Теорему 3.2.4. В Предложениях 3.2.9 и 3.2.12 мы сравниваем роды Бухштабера, Ошанина, Кричевера и Виттена.

В Разделе 3.3 строится обобщенная теория когомологий, соответствующая роду Бухштабера.

Обобщенные теории когомологий, соответствующие роду Ошанина и его локализациям, были рассмотрены в статье [LRS95]. Поскольку род Бухштабера является деформацией рода Ошанина, наши результаты развивают результаты данной статьи. Теорема 3.3.1 говорит о том, что существует комплексно ориентируемая мультипликативная теория когомологий Buc^*, такая, что отображение ориентации $\mathrm{U}^* \to \mathrm{Buc}^*$ индуцирует на кольцах коэффициентов отображение $\mathrm{U}^*(\mathrm{pt}) \to \mathrm{Buc}^*(\mathrm{pt})$, совпадающее с родом Бухштабера $\mathrm{Bc} : \Omega_{\mathrm{U}} \to \mathbb{Z}\left[\frac{1}{2}, a_1, a_2, a_3\right]$. Согласно Теореме 3.3.2 теория когомологий $\mathrm{U}^*(\cdot) \otimes_{\Omega_{\mathrm{U}}} \mathbb{Z}\left[\frac{1}{2}, a_1, a_2, a_3, \Delta^{-1}\right]$ точна по Ландвеберу и естественное преобразование

$$\mathrm{U}^*(\cdot) \otimes_{\Omega_{\mathrm{U}}} \mathbb{Z}\left[\frac{1}{2}, a_1, a_2, a_3, \Delta^{-1}\right] \to \mathrm{Buc}^*(\cdot)[\Delta^{-1}]$$

является изоморфизмом.

В Разделе 3.4 рассматривается эквивариантный род Бухштабера $\mathrm{Bc}^{\mathbb{T}^k}$ для касательно стабильно комплексных $\mathbb{T}^k$-многообразий.

Проблема жесткости эквивариантных родов Хирцебруха исследовалась рядом авторов, включая Ошанина, Кричевера и Хирцебруха (см., например, [Och87; Кри90; HBJ92]). В работе [BPR10] введено понятие универсального эквивариантного торического рода. Данное понятие мотивирует вопросы по исследованию классов многообразий, для которых эквивариантный род $\mathrm{Bc}^{\mathbb{T}^k}$ является жестким. В настоящей диссертации мы вводим понятие эквивариантного рода Бухштабера. Это открывает направление изучения эквивариантного рода Бухштабера, в том числе вопросы о классах многообразий, для которых род Bc принимает целые значения — на таких классах многообразий потенциально могут существовать интересные геометрические структуры, что подсказывается теорией Атьи–Зингера. В Предложении 3.4.5 для каждого нечетного рода Хирцебруха $\mathscr{G} : \Omega_{\mathrm{U}} \to R$ (где $R \otimes \mathbb{Q} \neq 0$) приводится пример действия ρ тора $\mathbb{T}^k$ на $\mathbb{C}P^n$ (где n нечетно), такого, что $\mathbb{T}^k$- эквивариантный род $\mathscr{G}^{\mathbb{T}^k}(\mathbb{C}P^n, \rho)$ равен нулю и, следовательно, род $\mathscr{G}^{\mathbb{T}^k}$ является $\mathbb{T}^k$-жестким на многообразии $\mathbb{C}P^n$ с действием (3.4.6). В Примере 3.4.8 приводится действие $\widetilde{\rho}$ окружности $\mathbb{S}^1$ на $\mathbb{C}P^3$, такое, что $\mathrm{Bc}^{\mathbb{S}^1}(\mathbb{C}P^3, \widetilde{\rho}) = \frac{15}{2} a_3 t^2 + O(t^5)$. Откуда $\mathrm{Bc}^{\mathbb{S}^1}(\mathbb{C}P^3, \widetilde{\rho}) \neq 0$, если $a_3 \neq 0$. При $a_3 = 0$ род Bc совпадает с родом Кричевера, и в этом случае $\mathrm{Bc}^{\mathbb{S}^1}(\mathbb{C}P^3, \widetilde{\rho}) = 0$. Это согласуется с классическим результатом Хирцебруха [HBJ92,

Section 4.6, Proposition].

Глава 4 посвящена классификации n-значных моноидов и групп порядка 3, а также вопросам роста n-значных динамик. Данная глава основана на результатах статей [Кор24; Кор26] и препринта [ВК25а].

В Разделе 4.1 приводится классификация n-значных моноидов и групп порядка 3 и ее важные следствия.

Хорошо известен естественный вопрос о классификации n-значных моноидов и групп порядка 3 с точностью до изоморфизма. В статье [БВЕП96] введено понятие инволютивных n-значных групп (у нас они называются $\bigstar$- инволютивными, см. Определение 4.1.17). Показано, что их можно отождествить с комбинаторными алгебрами и построена некоторая серия (4.1.22) $\bigstar$-инволютивных групп на трёх точках. Классификация всех косетных n- значных групп порядка 3 была завершена в работах [Пон24; GPV25] на основе классификации всех (однозначных) конечных групп перестановок ранга 3 (см. список литературы там же).

Мы вводим понятие нереверсивной n-значной группы (Определение 4.1.12). Оказывается, что в существующей литературе до настоящего времени явные конструкции нереверсивных групп были неизвестны. Как заметил В. М. Бухштабер, в работе [ВВ12, с. 246] продемонстрирован некорректный пример нереверсивной двузначной группы. Автором была найдена серия нереверсивных n-значных групп порядка 3 для всех $n \geq 3$ (Пример 4.1.15).

Одним из основных результатов данной диссертации является полная классификация n- значных моноидов и групп порядка 3 (см. Теорему 4.1.4), а также ее важные следствия, возникающие из сопоставления с результатами работы [GPV25]. Это приводит к ответам на вопросы о соотношении известных в настоящее время разных классов n-значных групп. Следствие 4.1.7 дает классический результат [Pin14; OEI00] о классификации однозначных моноидов порядка 3, согласно которому имеется ровно 7 моноидов порядка 3 с точностью до изоморфизма. Следствие 4.1.9 показывает, что имеется лишь две серии n-значных групп того же порядка. Согласно Следствию 4.1.10, каждый некоммутативный n-значный моноид порядка 3 изоморфен одному из двух некоммутативных однозначных моноидов с таблицами умножения:

$$\begin{array}{ll} 1*1=1, & 1*1=1, \\ 1*2=1, & 1*2=2, \\ 2*1=2, & 2*1=1, \\ 2*2=2. & 2*2=2. \end{array} \tag{0.0.11}$$

По Следствию 4.1.16 имеется лишь одно семейство нереверсивных n-значных групп порядка 3. В Примере 4.1.15 в явном виде представлено семейство нереверсивных групп $\mathbb{X}_n$ порядка 3. В Следствии 4.1.20 завершена классификация всех $\bigstar$-инволютивных групп

порядка 3, начатая в работе [GPV25].

Таким образом, из результатов настоящей работы получается правая стрелка в следующей диаграмме всевозможных строгих вложений n-значных групп любых порядков:



(0.0.12)

В Разделе 4.2 мы получаем точные и асимптотические формулы для функций роста классов n-значных циклических косетных групп.

В работе В. М. Бухштабера и А. П. Веселова [BV96] было введено определение интегрируемости многозначных динамик в терминах представлений n-значных групп и построен важный пример интегрируемой динамики. В последующей работе А. А. Гайфуллина и П. В. Ягодовского [ГЯ07] указаны условия, когда n-значная динамика задается представлением циклической n-значной группы, т. е. является интегрируемой. Важной характеристикой динамики дискретного времени является ее функция роста. Как уже отмечалось, в работе М. А. Чиркова [Чир24] исследована функция роста n-значной динамики группы $\mathbb{G}_n(\mathbb{C})$.

Мы получаем точные и асимптотические формулы для функций роста n-значных косетных групп

$$\mathbb{G}_{\varphi_s}\left(\langle a_1,\dots,a_s \mid a_1^2=\dots=a_s^2=1\rangle\right) \quad \text{и} \quad \mathbb{G}_{\psi_m}(\langle a,b \mid a^m=b^m=1\rangle),$$

где φ_s и ψ_m — автоморфизмы, циклически переставляющие образующие копредставлений групп в каждом случае (Предложения 4.2.9 и 4.2.15). Данная проблема удивительным образом оказывается связанной с n-боначчиевыми числами. Мы используем результат работы [DD14], чтобы получить асимптотику функции роста.

Группы

$$\langle a_1,\dots,a_s \mid a_1^2=\dots=a_s^2=1\rangle \quad \text{и} \quad \langle a,b \mid a^m=b^m=1\rangle$$

являются примерами циклически представленных групп. Еще одним известным примером циклически представленных групп являются группы Фибоначчи. В статье [БВ24] введен широкий класс циклических n-значных групп, возникающих косетной конструкцией из групп с циклическим представлением (см. [БВ24, Определение 1.8]) и автоморфизма циклической перестановки образующих. В той же работе построено действие циклических n-значных групп этого класса на $\mathbb{R}^3$ с пространством орбит, гомеоморфным $\mathbb{S}^3$. Показано, что проекции $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{S}^3$ на пространство орбит связаны коммутативными диаграммами с циклически разветвленными вдоль гиперболического узла накрытиями сферы $\mathbb{S}^3$

трехмерными компактными гиперболическими многообразиями.

Раздел 4.3 посвящен динамическим свойствам группы $\mathbb{G}_n^m(\mathbb{C})$.

Для n-значных групп имеется естественное определение декартова произведения (см. Определение 4.3.1). Рассматривая левое действие группы $\mathbb{G}_n^m(\mathbb{C})$ на группе $\mathbb{G}_n(\mathbb{C})$, мы приходим к динамической интерпретации многочленов $p_n(z; x_1, \ldots, x_m)$ в Теореме 4.3.10.

Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения и списка литературы из 105 наименований.

Благодарности

Автор выражает искреннюю благодарность своему дорогому научному руководителю Виктору Матвеевичу Бухштаберу за постановки задач, ценные советы, полезные обсуждения и замечания. Автор благодарит Владимира Николаевича Рубцова, Александра Александровича Гайфуллина и Федора Юрьевича Попеленского за полезные обсуждения и внимание к работе. Автор сердечно благодарит своих любимых родителей, Елену Анатольевну Корневу и Игоря Михайловича Корнева за теплоту и постоянную поддержку. Автор выражает благодарность всем своим друзьям за поддержку и замечательно проведенное вместе время.

Заключение

В диссертации развита алгебраическая теория n-значных моноидов и групп и получены ее приложения к задачам алгебраической топологии. Перечислим основные результаты данной диссертации.

1. Описаны структуры двузначных алгебраических моноидов на $\mathbb{C}P^1$ в случае вырожденных кубик.

2. Установлена связь теории алгебраических n-значных моноидов и групп на $\mathbb{C}P^1$ с теорией дискриминантов и проективной двойственности.

3. В аппарате алгебраической топологии введен новый род Хирцебруха Bc. В явном виде представлена соответствующая формальная группа $F_{\mathrm{Bc}}(u, v)$ над кольцом $\mathbb{Z}\left[\frac{1}{2}, a_1, a_2, a_3\right]$. Показано, что формальная группа $F_{\mathrm{Bc}}(u, v)$ универсальна в классе всех однозначных формальных групп (над $\mathbb{Q}$-алгебрами без делителей нуля) с условием $\overline{u} = -u$, для которых конструкция квадрата модуля даёт двузначную формальную группу $\mathbb{G}_a$ с дву-

значным законом (0.0.1).

4. Получен результат по классической топологической проблеме о целочисленных родах Хирцебруха. Род Bc задается рядом над кольцом $\mathbb{Q}[a_1, a_2, a_3]$, а на любом стабильно комплексном многообразии род Bc принимает значения в кольце $\mathbb{Z}\left[\frac{1}{2}, a_1, a_2, a_3\right]$. Показано, что род Bc на тета-дивизорах общих главно поляризованных абелевых многообразий принимает значения в кольце $\mathbb{Z}[a_1, a_2, a_3]$, а на комплексных проективных пространствах — в кольце $\mathbb{Z}\left[\frac{1}{2}, a_1, a_2, a_3\right]$.

5. Получена классификация n-значных моноидов и групп, завершающая исследования ряда авторов по проблеме n-значных групп порядка 3.

Публикации по теме диссертации

[БК26] *Бухштабер В. М.*, *Корнев М. И.* n-значные моноиды на $\mathbb{C}P^1$ и дискриминанты // УМН. — 2026. — Т. 81, 1(487). — С. 207—208.

[Кор26] *Корнев М. И.* О классификации n-значных моноидов и групп порядка 3 // Матем. заметки. — 2026. — Т. 119, № 2. — С. 244—252.

[Kor26] *Kornev M. I.* Buchstaber, Ochanine, Krichever, and Witten genera // Journal of Geometry and Physics. — 2026. — Vol. 226, no. 105855. — 10 p.

Список литературы

[Баб86] *Бабенко К. И.* О тёплицевых и ганкелевых матрицах // УМН. — 1986. — Т. 41, 1(247). — С. 171—178.

[Бух70] *Бухштабер В. М.* Характер Чженя–Дольда в кобордизмах // Матем. сб. — 1970. — Т. 83(125), 4(12). — С. 575—595.

[Бух75] *Бухштабер В. М.* Двузначные формальные группы. Алгебраическая теория и приложения к кобордизмам. I // Изв. АН СССР. Сер. матем. — 1975. — Т. 39, № 5. — С. 1044—1064.

[Бух76] *Бухштабер В. М.* Двузначные формальные группы. Алгебраическая теория и приложения к кобордизмам. II // Изв. АН СССР. Сер. матем. — 1976. — Т. 40, № 2. — С. 289—325.

[Бух78] *Бухштабер В. М.* Топологические приложения теории двузначных формальных групп // Изв. АН СССР. Сер. матем. — 1978. — Т. 42, № 1. — С. 130—184.

[Бух90] *Бухштабер В. М.* Функциональные уравнения, ассоциированные с теоремами сложения для эллиптических функций, и двузначные алгебраические группы // УМН. — 1990. — Т. 45, 3(273). — С. 185—186.

[ББ11] *Бухштабер В. М.*, *Бунькова Е. Ю.* Формальные группы Кричевера // Функц. анализ и его прил. — 2011. — Т. 45, № 2. — С. 23—44.

[БВЕП96] *Бухштабер В. М.*, *Вершик А. М.*, *Евдокимов С. А.*, *Пономаренко И. Н.* Комбинаторные алгебры и многозначные инволютивные группы // Функц. анализ и его прил. — 1996. — Т. 30, № 3. — С. 12—18.

[БВ19] *Бухштабер В. М.*, *Веселов А. П.* Топограф Конвея, $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{Z})$- динамика и двузначные группы // УМН. — 2019. — Т. 74, 3(447). — С. 17—62.

[БВГ22] *Бухштабер В. М.*, *Веселов А. П.*, *Гайфуллин А. А.* Классификация инволютивных коммутативных двузначных групп // УМН. — 2022. — Т. 77, 4(466). — С. 91—172.

[БВ24] *Бухштабер В. М.*, *Веснин А. Ю.* n-значные группы, разветвленные накрытия и трехмерные гиперболические многообразия // Матем. сб. — 2024. — Т. 215, № 11. — С. 3—32.

[БН71] *Бухштабер В. М.*, *Новиков С. П.* Формальные группы, степенные системы и операторы Адамса // Матем. сб. — 1971. — Т. 84(126), № 1. — С. 81—118.

[БУ15] *Бухштабер В. М.*, *Устинов А. В.* Кольца коэффициентов формальных групп // Матем. сб. — 2015. — Т. 206, № 11. — С. 19—60.

[БХ82] *Бухштабер В. М.*, *Холодов А. Н.* Топологические конструкции, связанные с многозначными формальными группами // Изв. АН СССР. Сер. матем. — 1982. — Т. 46, № 1. — С. 3—27.

[Вер83] *Вершинин В. В.* О кольце симплектических кобордизмов // Тр. МИАН СССР. — 1983. — Т. 154. — С. 49—52.

[ГЯ07] *Гайфуллин А. А.*, *Ягодовский П. В.* Об интегрируемости m-значных динамик при помощи однопорожденных m-значных групп // УМН. — 2007. — Т. 62, 1(373). — С. 201—202.

[Кор24] *Корнев М. И.* n-значные косетные группы и динамика // Матем. заметки. — 2024. — Т. 116, № 1. — С. 77—90.

[Кри90] *Кричевер И. М.* Обобщенные эллиптические роды и функции Бейкера– Ахиезера // Матем. заметки. — 1990. — Т. 47, № 2. — С. 34—45.

[Нов67] *Новиков С. П.* Методы алгебраической топологии с точки зрения теории кобордизмов // Изв. АН СССР. Сер. матем. — 1967. — Т. 31, № 4. — С. 855—951.

[Пан96] *Панов Т. Е.* О структуре 2-алгебры Хопфа в когомологиях четырехмерных многообразий // УМН. — 1996. — Т. 51, № 1. — С. 161—162.

[Пон24] *Пономаренко И. Н.* Об одном семействе многозначных групп : Сборник статей. К 80-летию члена-корреспондента РАН Виктора Матвеевича Бухштабера // Топология, геометрия, комбинаторика и математическая физика. Т. 326. — Москва : МИАН, 2024. — С. 311—313. — (Труды МИАН).

[Хол81] *Холодов А. Н.* Алгебраическая теория многозначных формальных групп // Матем. сб. — 1981. — Т. 114(156), № 2. — С. 299—321.

[Хол84] *Холодов А. Н.* Классификация шестизначных, семизначных и восьмизначных элементарных формальных групп // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех. — 1984. — № 1. — С. 30—33.

[Чир24] *Чирков М. А.* Функция роста n-значной динамики // Матем. заметки. — 2024. — Т. 115, № 3. — С. 458—465.

[AL75] *Adams J. F.*, *Liulevicius A.* Buhstaber's work on two-valued formal groups // Topology. — 1975. — Vol. 14, no. 4. — P. 291–296.

[BB12] *Behravesh H.*, *Borovik A.* A note on multivalued groups // Ricerche di Matematica. — 2012. — Vol. 61. — P. 245–253.

[Buc06] *Buchstaber V. M.* n-valued groups: theory and applications // Mosc. Math. J. — 2006. — Vol. 6, no. 1. — P. 57–84.

[BD18] *Buchstaber V. M.*, *Dragović V.* Two-Valued Groups, Kummer Varieties, and Integrable Billiards // Arnold Mathematical Journal. — 2018. — Vol. 4, no. 1. — P. 27–57.

[BGR26] *Buchstaber V. M.*, *Gaiur I.*, *Rubtsov V.* Algebraic 2-valued group structures on $\mathbb{P}^1$, Kontsevich-type polynomials, and multiplication formulas, I // Izvestiya: Mathematics. — 2026. — Vol. 90, no. 1. — P. 34–69.

[BK25a] *Buchstaber V. M.*, *Kornev M. I.* n-valued groups, Kronecker sums, and Wendt's matrices // arXiv:2505.04296. — 2025.

[BK25b] *Buchstaber V. M.*, *Kornev M. I.* Algebraic n-valued monoids on $\mathbb{C}P^1$, discriminants and projective duality // arXiv:2510.14010. — 2025.

[BPR10] *Buchstaber V. M.*, *Panov T. E.*, *Ray N.* Toric genera // International Mathematics Research Notices. — 2010. — Vol. 2010, no. 16. — P. 3207–3262.

[BR97] *Buchstaber V. M.*, *Rees E. G.* Multivalued groups, their representations and Hopf algebras // Transform. Groups. — 1997. — Vol. 2, no. 4. — P. 325–349.

[BV96] *Buchstaber V. M.*, *Veselov A. P.* Integrable correspondences and algebraic representations of multivalued groups // International Mathematics Research Notices. — 1996. — Vol. 1996, no. 8. — P. 381–400.

[BV24] *Buchstaber V. M.*, *Veselov A. P.* Chern-Dold character in complex cobordisms and theta divisors // Advances in Mathematics. — 2024. — Vol. 449, no. 109720.

[BV26] *Buchstaber V. M.*, *Veselov A. P.* Algebraic topology of the Lagrange inversion // arXiv:2601.06814. — 2026.

[CDFH24] *Coulette D.*, *Déglise F.*, *Fasel J.*, *Hornbostel J.* Formal ternary laws and Buchstaber's 2-groups // Manuscripta Mathematica. — 2024. — Vol. 174. — P. 453–490.

[Dra10] *Dragović V.* Generalization and geometrization of the Kowalevski top // Communications in Math. Phys. — 2010. — Vol. 298. — P. 37–64.

[DK14] *Dragović V.*, *Kukić K.* Discriminantly separable polynomials and quad- equations // Journal of Geometric Mechanics. — 2014. — Vol. 6, no. 3. — P. 319–333.

[DD14] *Du Z.*, *Dresden G. P.* A simplified binet formula for k-generalized Fibonacci numbers // Journal of Integer Sequences. — 2014. — Vol. 17, no. 4.

[GRS26] *Gaiur I.*, *Rubtsov V.*, *Straten D. van*. Product formulas for the higher Bessel functions // Selecta Mathematica. — 2026. — Vol. 32, no. 12.

[GKZ94] *Gelfand I. M.*, *Kapranov M. M.*, *Zelevinsky A. V.* Discriminants, resultants, and multidimensional determinants. — Birkhäuser Boston, MA, 1994. — 523 p. — (Modern Birkhäuser Classics).

[GPV25] *Guo J.*, *Ponomarenko I.*, *Vasil'ev A. V.* On multivalued groups of order 3 // Science China Mathematics. — 2025. — Vol. 68. — P. 1969–1978.

[Hir58] *Hirzebruch F.* Komplexe Mannigfaltigkeiten. — Camb. Univ. Press, 1958. — S. 119–136.

[HBJ92] *Hirzebruch F.*, *Berger T.*, *Jung R.* Manifolds and modular forms. — Vieweg+Teubner Verlag Wiesbaden, 1992. — (Aspects of Mathematics).

[Hop41] *Hopf H.* Über Die Topologie der Gruppen-Mannigfaltigkeiten und Ihre Verallgemeinerungen // Annals of Mathematics. — 1941. — Jg. 42, Nr. 1. — S. 22–52.

[LRS95] *Landweber P. S.*, *Ravenel D. C.*, *Stong R. E.* Periodic cohomology theories defined by elliptic curves // The Čech Centennial: A Conference on Homotopy Theory. Vol. 181 / ed. by M. Cenkl, H. Miller. — Providence, RI : American Mathematical Society, 1995. — P. 317–337. — (Contemporary Mathematics).

[Lan87] *Lang S.* Elliptic Functions. — Springer-Verlag New York, 1987. — 328 p.

[Och87] *Ochanine S.* Sur les genres multiplicatifs définis par des intégrales elliptiques // Topology. — 1987. — T. 26, n° 2. — P. 143-151.

[OEI00] OEIS. — 2000. — URL: http://oeis.org/A058129 (visited on 07/31/2025).

[Pin14] *Pin J.-E.* How many monoids of order three are there? — 2014. — URL: https://math.stackexchange.com/q/806868 (visited on 07/31/2025).

[Qui69] *Quillen D.* On the formal group laws of unoriented and complex cobordism theory // Bull. Amer. Math. Soc. — 1969. — Vol. 75, no. 6. — P. 1293–1298.

[Rib99] *Ribenboim P.* Fermat's Last Theorem for Amateurs. — 1st ed. — Springer New York, NY, 1999. — 420 p.

[WW96] *Whittaker E.*, *Watson G. N.* A course of modern analysis. — 4th ed. Cambridge University Press, 1996. — 608 p.

[Zie23] *Zieschang P.-H.* Hypergroups. — Springer Nature Switzerland AG, 2023. — 406 p.