ОТЗЫВ
официального оппонента на диссертацию
Корнева Михаила Игоревича
«n-значные моноиды и группы:
алгебраическая теория и топологические приложения»,
представленную на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук
по специальности 1.1.3 — Геометрия и топология

Диссертация Корнева Михаила Игоревича на тему «n-значные моноиды и группы: алгебраическая теория и топологические приложения» относится к обширной и активно развивающейся области алгебраической топологии, занимающейся описанием топологических инвариантов гладких многообразий с использованием различных алгебраических структур. В диссертации соискателя можно выделить два основных направления: 1) исследование алгебраических свойств n-значных моноидов и групп (классификация в некоторых случаях, установление связи теории алгебраических n-значных моноидов и групп на $\mathbb{CP}^1$ с теорией дискриминантов и проективной двойственности, построение контрпримеров); 2) введение и исследование нового рода Хирцебруха — рода Бухштабера Bc, соответствующей ему формальной группы и обобщённой теории когомологий, а также получение результатов о целочисленности значений этого рода. n-значные группы — это структуры, введённые и активно исследовавшиеся В. М. Бухштабером и С. П. Новиковым. Кольцо Ω_U и связанная с ним теория комплексных кобордизмов исследовались многими учёными; упомяну В. М. Бухштабера, С. П. Новикова, М. Атью, Дж. Милнора, И. М. Кричевера, Ф. Хирцебруха. М. И. Корнев внёс существенный вклад в развитие этих направлений.

Целью диссертации М. И. Корнева является развитие теории алгебраических n-значных групп и моноидов и разработка её приложений к задачам алгебраической топологии, алгебраической геометрии, теории чисел и математической физики. М. И. Корневым рассмотрены следующие задачи:

(1) Классифицировать симметрические n-алгебраические n-значные группы при $n = 2$ и 3.

(2) Классифицировать и представить явные формулы двух-, трёх-, четырёх- и шестизначных законов сложения на $\mathbb{CP}^1$, определяемых эллиптическими кривыми и их автоморфизмами.

(3) Описать алгебраические двузначные структуры на $\mathbb{CP}^1$ в случае вырожденных кубических кривых.

(4) Получить матричные формулы для известных законов сложения $p_n(z; x, y)$ и найти их приложения.

(5) Установить и обосновать связь между семейством $\{\mathbb{G}_n(\mathbb{CP}^1)\}$ алгебраических n-значных косетных моноидов на $\mathbb{CP}^1$, гиперповерхностями Ферма и проективной двойственностью.

(6) Описать классы комплексных кобордизмов гиперповерхностей Ферма в терминах классов тета-дивизоров Θ_n общих главно поляризованных абелевых многообразий.

(7) Найти явный пример формальной группы, отличной от формальной группы Бухштабера–Кричевера, конструкция квадрата модуля которой даёт семейство многочленов Бухштабера.

(8) Классифицировать n-значные моноиды и группы порядка 3.

(9) Получить результаты об n-значных динамиках, определяемых косетными конструкциями известных серий групп с циклическим представлением.

Диссертация имеет следующую структуру.

Во введении перечисляются результаты диссертации и методы, использованные для их получения; полученные результаты соотносятся с результатами работ, логически предшествовавших данной диссертации.

Глава 1 посвящена результатам об n-значных n-алгебраических группах. В разделе 1.1 приводятся основные понятия общей теории n-значных групп. В разделе 1.2 приводятся основные конструкции, примеры и свойства алгебраических n-значных моноидов и групп. Раздел 1.3

посвящён результатам по n-значным законам, соответствующим кубическим кривым. Проверено, что n-значные законы, соответствующие эллиптическим кривым, задаются многочленами. В теоремах 1.3.9, 1.3.16, 1.3.19 и 1.3.23 описаны n-значные законы сложения при $n = 2, 3, 4$ и 6, которые в явном виде задаются полиномами и получаются косетными конструкциями из геометрических законов сложения на эллиптических кривых. Косетная конструкция для групп без затруднений переносится на случай моноидов. В работе n-значный моноид M_H, построенный по 1-значному моноиду M и подгруппе H порядка n группы $\mathrm{Aut}(M)$, называется косетным. Раздел 1.4 посвящён симметрическим n-алгебраическим n-значным группам и их классификации при $n = 2$ и 3. В разделе 1.5 напоминаются необходимые конструкции из линейной алгебры. В разделе 1.6 приводятся детерминантные формы многозначных законов умножения $p_n(z; x, y)$ и $p_{n.m}(z; x)$ при помощи сумм Кронекера сопровождающих матриц Фробениуса. Показано, что n-значная группа $\mathbb{G}_n(\mathbb{C})$ реализуется при помощи корней характеристического многочлена переменной $z = t^n$ кронекеровой суммы (см. определение 1.5.1) двух сопровождающих матриц Фробениуса (1.5.5) для многочленов $t^n - x$ и $t^n - y$. Итерации n-значного умножения приводят к однородным симметрическим многочленам $p_n(z; x_1, \ldots, x_m)$, см. теорему 1.6.6. В разделе 1.7 устанавливается связь n-значных законов умножения $p_n(z; x, y)$ с классическими матрицами Вендта и приводится результат о делимости на n^4 коэффициентов разности $p_n(z; x, y) - (z+x+y)^n$ двух n-значных законов умножения (закона $p_n(z; x, y)$ и диагонального закона $(z + x + y)^n$) при простых $n \geq 5$. В теореме 1.7.4 показывается, что каждый многочлен $p_n(z; x, y)$ представляется детерминантом $(n \times n)$-матрицы (1.7.5), которая принадлежит классу, известному в литературе под названием y-циркулянтных матриц.

Глава 2 посвящена результатам о связи алгебраических n-значных моноидов с проективной двойственностью и гиперповерхностями Ферма. В разделе 2.1 исследуются эти связи, а также показывается, что композиция проективной двойственности с последующим преобразованием Мёбиуса задаёт сдвиг в семействе n-значных алгебраических структур. Теорема 2.1.10 утверждает, что при проективной двойственности кривая Ферма $\{x^n + y^n = z^n\}$ переходит в кривую $\{p_{n-1}(z^n; x^n, y^n) = 0\}$. Теорема 2.1.11 показывает, что структура алгебраической n-значной косетной группы $\mathbb{G}_n(\mathbb{C})$ продолжается лишь до структуры алгебраического n-значного моноида $M_n(\mathbb{CP}^1)$ на $\mathbb{CP}^1$. В разделе 2.2 освещается связь законов $p_n(z; x, y)$ и дискриминантов расширений полей. В предложении 2.2.3 многочлен $p_n(z; x, y)$ описывается как дискриминант некоторого расширения полей. Раздел 2.3 посвящён предварительным сведениям о геометрии и топологии гиперповерхностей Ферма. В разделе 2.4 приводятся результаты по теории кобордизмов гиперповерхностей Ферма в контексте проблемы Милнора–Хирцебруха. В разделе 2.4.1 получены результаты о сравнении классов кобордизмов $[M^{2d}]$ с классами, возникающими из классификационной теоремы Фридмана при использовании наивного равенства $[M_1 \# M_2] = [M_1] + [M_2]$ в кольце Ω_U, где $M_1 \# M_2$ обозначает операцию связной суммы многообразий M_1 и M_2. Классы комплексных кобордизмов гиперповерхностей Ферма $[M^{2d}]$ и $[M^{3d}]$ выражены при помощи классов проективных пространств и гладких тета-дивизоров. Из разложения по тета-дивизорам получены утверждения о делимости этих классов на целые числа. В разделе 2.4.2 автор приводит общую формулу, выражающую классы гиперповерхностей Ферма в кольце Ω_U через классы тета-дивизоров (см. теорему 2.4.22). Возникающие при этом многочлены связаны с комбинаторикой ассоциаэдров. Полученный результат обобщает результат другой работы, в которой классы комплексных проективных пространств были выражены через тета-дивизоры.

В главе 3 вводится и исследуется род Бухштабера и строится сопутствующая ему обобщённая теория когомологий. В разделе 3.1 напоминаются основы теории двузначных формальных групп. В разделе 3.2 вводятся род и формальная группа Бухштабера и исследуются их свойства целочисленности. В частности, в предложениях 3.2.9 и 3.2.12 сравниваются роды Бухштабера, Ошанина, Кричевера и Виттена. В разделе 3.3 строится обобщённая теория когомологий, соответствующая роду Бухштабера. В разделе 3.4 рассматривается эквивариантный род Бухштабера Bc_{T^k} для касательно стабильно комплексных $\mathbb{T}^k$-многообразий.

Глава 4 посвящена классификации n-значных моноидов и групп порядка 3, а также вопросам роста n-значных динамик. В разделе 4.1 приводится классификация n-значных моноидов и групп порядка 3 и её важные следствия. Построена серия (4.1.22) $\star$-инволютивных групп на трёх точках. Оказывается, что в существующей литературе до настоящего времени

явные конструкции нереверсивных групп были неизвестны. Автором найдена корректная серия нереверсивных n-значных групп порядка 3 для всех $n \geq 3$ (пример 4.1.15).

Одним из основных результатов диссертации М. И. Корнева является полная классификация n-значных моноидов и групп порядка 3 (см. теорему 4.1.4), а также её важные следствия, возникающие из сопоставления с результатами других работ. Это приводит к ответам на вопросы о соотношении известных в настоящее время разных классов n-значных групп. В разделе 4.2 получены точные и асимптотические формулы для функций роста классов n-значных циклических косетных групп

$$\mathbb{G}_{\varphi_s}\big((a_1, \ldots, a_s \mid a_1^2 = \cdots = a_s^2 = 1)\big) \quad \text{и} \quad \mathbb{G}_{\psi_m}\big((a, b \mid a^m = b^m = 1)\big),$$

где φ_s и ψ_m — автоморфизмы, циклически переставляющие образующие копредставлений групп в каждом случае (предложения 4.2.9 и 4.2.15). Раздел 4.3 посвящён динамическим свойствам группы $\mathbb{G}_m(\mathbb{C})$. Для n-значных групп имеется естественное определение декартова произведения (см. определение 4.3.1). Рассмотрение левого действия группы $\mathbb{G}_m(\mathbb{C})$ на группу $\mathbb{G}_n(\mathbb{C})$ приводит к динамической интерпретации многочленов $p_n(z; x_1, \ldots, x_m)$ в теореме 4.3.10.

Диссертация состоит из введения, четырёх глав, заключения и списка литературы из 105 наименований.

К диссертации имеются следующие замечания:

1. В тексте диссертации, насчитывающей 171 страницу, найдена ровно одна буквальная опечатка («даная» вместо «данная»).
2. Смысловая опечатка в тексте непосредственно перед формулой (0.0.5): написано, что $\deg X_n^\vee = (n-1)^2$, но прямая проверка показывает, что $\deg X_n^\vee = 2(n-1)$. Рассуждение, впрочем, становится верным после данной замены.
3. Смысловая опечатка в начале с. 16: «В теореме 3.3.1 вводится новый класс формальных групп». На самом деле этот класс вводится в теореме 3.2.1(iii), хотя, конечно, имеется содержательная взаимосвязь между этими теоремами.
4. Смысловая опечатка: на с. 64 речь идёт о симметрических трёхзначных группах, а многочлены в вынесенных формулах несимметричны. Это легко исправляется изменением знаков в паре мест.
5. Смысловая опечатка в формуле (3.4.6): слева записан вектор из $2n+1$ координат, а справа — вектор из $n+1$ координат. Видимо, и справа должно быть $2n+1$ координат.
6. Соглашение об уравнении проективно двойственной кривой выглядит несимметричным (имеется различие в знаке), хотя оно в таком виде уже использовалось в работах по схожей тематике.
7. На с. 97 символом $F_n^\vee$ обозначены одновременно и уравнение, и кривая. Это не выглядит удачным решением.
8. Классификацию конечных n-значных групп для малого числа элементов, как кажется, было бы полезно связать с классификацией ассоциативных алгебр над $\mathbb{Q}$ в малых размерностях.
9. Я хотел бы заметить, что для кандидатской диссертации текст очень объёмен как по числу результатов, так и по числу страниц. Более того, для текста такого объёма опечаток очень мало.

Высказанные замечания не носят принципиального характера и не влияют на общую положительную оценку диссертационной работы.

Автореферат верно и полно отражает основные результаты диссертационной работы.

По своему содержанию и уровню полученных результатов диссертация удовлетворяет критериям пунктов 9–14 Положения о присуждении учёных степеней, утверждённого постановлением Правительства Российской Федерации от 24 сентября 2013 г. № 842 «О порядке присуждения учёных степеней»: работа содержит решение научных задач, имеющих значение для развития соответствующей отрасли знаний, обладает внутренним единством, содержит новые результаты и положения, свидетельствует о личном вкладе автора; основные результаты опубликованы в рецензируемых научных изданиях.

Таким образом, диссертация Корнева Михаила Игоревича на тему «n-значные моноиды и группы: алгебраическая теория и топологические приложения» отвечает требованиям, предъявляемым к кандидатским диссертациям, а её автор, Михаил Игоревич Корнев, безусловно заслуживает присуждения учёной степени кандидата физико-математических наук по специальности 1.1.3 — геометрия и топология.

Официальный оппонент
кандидат физико-математических наук
по специальности 01.01.06 — математическая логика,
алгебра и теория чисел,
старший научный сотрудник
Лаборатории 4 Федерального государственного
бюджетного учреждения науки
Института проблем передачи информации
им. А. А. Харкевича Российской академии наук
Алексей Владимирович Петухов

31 августа 2026 г.

Адрес: 127051, г. Москва,
Большой Каретный пер., д. 19, стр. 1
Телефон: +79035421868
Электронная почта: Alex--2@yandex.ru

Подпись А. В. Петухова заверяю

Подпись
Петухов Алексей Владимирович
УДОСТОВЕРЯЮ
Зав. канцелярией

127051, г. Москва,
Б. Каретный пер., д. 19, стр. 1
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ
БЮДЖЕТНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ НАУКИ
ИНСТИТУТ ПРОБЛЕМ ПЕР ИНФОРМАЦИИ
им. А.А. ХАРКЕВИЧА РОСС АДЕМИИ НАУ