УТВЕРЖДАЮ
И. о. директора Федерального
государственного бюджетного учреждения науки
Института математики им. С.Л. Соболева
Сибирского отделения Российской академии наук
д.ф.-м.н., профессор



_____ Судоплатов С.В.

«11» 08 2026 г.

ОТЗЫВ

ведущей организации на диссертационную работу Корнева Михаила Игоревича «n-Значные моноиды и группы: алгебраическая теория и топологические приложения», представленную на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 1.1.3 — геометрия и топология

Естественная идея обобщения понятия группы на случай, когда результатом применения операции к паре элементов группы является уже не один элемент, а некоторое подмножество ее элементов, появлялась в математике не раз. Можноупомянуть работы французского математика Фредерика Марти и американского математика Хьюберта Уолла 1930-х годов, в которых возникло понятие *гипергруппы* (см. недавнюю моногорафию «Гипергруппы» П.-Х. Цишанга, посвященную алгебраическим и комбинаторным основам теории гипергрупп, и ссылки там же). По-видимому, первая подобная работа на русском языке «Теория расширений ультрагрупп» (1946) принадлежит ученику А. Г. Куроша Александру Ивановичу Вихрову.

В 1958 году исландский математик Сигурдур Хелгасон в работе, посвященной лакунарным рядам Фурье на компактных группах, рассматривал операцию тензорного произведения на множестве S всех (комплексных) неприводимых линейных представлений компактной группы G как гипероперацию, сопоставляющую паре элементов из S подмножество представлений из S, входящих в разложение их тензорного произведения, с учетом соответствующих кратностей. Таким образом, результатом операции является конечная мера в S. Этот подход привел к теории топологических гипергрупп (см. замечательный обзор «Гипергруппы и гипергрупповые алгебры» Григория Лазаревича Литвинова 1985 года и ставшую уже классической монографию «Гаромнический анализ вероятностных мер на гипергруппах» (1995) Уолтера Блума и Херберта Хейера по этой теме).

Понятие *n-значной группы* — центральное в представленной диссертации — появилось из конструкции квадрата модуля универсальной формальной группы геометрических кобордизмов, возникшей в работе 1971 года Сергея Петровича Новикова и Виктора Матвеевича Бухштабера. В последовавшем за этим цикле работ Бухштабер дал формальное определение n-значной группы, заложил основы теории этих групп и указал на ряд естественных приложений данной теории в различных областях математики (см. его обзор 2006 года «n-Значные группы: теория и приложения» в «Московском математическом журнале»). С тех пор и по сей день теория n-значных

(их также называют *многозначными*, если конкретное n не имеет значения) групп активно развивается, находя многочисленные приложения в алгебре, геометрии, топологии, дискретной математике, теории динамических систем, математической физике и других областях (см. обзор во введении к диссертации и ссылки в ее конце).

В диссертации Михаила Игоревича Корнева, представленной на соискание ученой степени кандидата физико-матетмаических наук, развивается теория алгебраических n-значных групп и моноидов, а также получены ее приложения в задачах алгебраической топологии, алгебраической геометрии, теории чисел и математической физики.

Следующие положения представленной диссертации вынесены на защиту.

1. Описаны структуры двузначных алгебраических моноидов на $\mathbb{C}P^1$ в случае вырожденных кубик.

2. Установлена связь теории алгебраических n-значных моноидов и групп на $\mathbb{C}P^1$ с теорией дискриминантов и проективной двойственности.

3. В аппарате алгебраической топологии введен новый род Хирцебруха Bc. В явном виде представлена соответствующая формальная группа $F_{\mathrm{Bc}}(u,v)$ над кольцом $\mathbb{Z}\left[\frac{1}{2}, a_1, a_2, a_3\right]$. Показано, что формальная группа $F_{\mathrm{Bc}}(u,v)$ универсальна в классе всех однозначных формальных групп (над $\mathbb{Q}$-алгебрами без делителей нуля) с условием $\overline{u} = -u$, для которых конструкция квадрата модуля даёт двузначную формальную группу $\mathbb{G}_{\boldsymbol{a}}$ с двузначным законом:

$$\mathcal{B}_{\boldsymbol{a}}(z;x,y) = (x+y+z-a_2xyz)^2 - 4(1+a_3xyz)(xy+yz+xz+a_1xyz). \qquad (1)$$

4. Получен результат по классической топологической проблеме о целочисленных родах Хирцебруха. Род Bc задается рядом над кольцом $\mathbb{Q}[a_1,a_2,a_3]$, а на любом стабильно комплексном многообразии род Bc принимает значения в кольце $\mathbb{Z}\left[\frac{1}{2}, a_1, a_2, a_3\right]$. Показано, что род Bc на тета-дивизорах общих главно поляризованных абелевых многообразий принимает значения в кольце $\mathbb{Z}[a_1,a_2,a_3]$, а на комплексных проективных пространствах — в кольце $\mathbb{Z}\left[\frac{1}{2}, a_1, a_2, a_3\right]$.

5. Получена классификация n-значных моноидов и групп, завершающая исследования ряда авторов по проблеме n-значных групп порядка 3.

Работа состоит из введения, четырех глав, заключения и списка литературы.

Во введении дано содержательное сопоставление результатов и методов диссертации с известными, позволяющее судить о ее актуальности.

Первая глава посвящена n-значным алгебраических группам. В § 1 изложены основы общей теории n-значных групп. В § 2 приводятся основные конструкции, примеры и свойства алгебраических n-значных моноидов и групп. Содержание третьего параграфа посвящено результатам по n-значным законам на кубических кривых. В четвертом — речь идет о симметрических n-алгебраических n-значных группах и их классификации при $n = 2, 3$. После напоминания в § 5 некоторых конструкций из линейной алгебры в § 6 приводятся детерминантные формы многозначных законов умножения многочленов $p_n(z;x,y)$ и $p_{n,m}(z;x)$, введенных Бухштабером, при помощи сумм Кронекера сопровождающих матриц Фробениуса. В последнем седьмом параграфе устанавливается связь многозначных законов умножения многочлена $p_n(z;x,y)$ с классическими матрицами Вендта.

Вторая глава посвящена связи алгебраических n-значных моноидов с проективной двойственностью и гиперповерхностями Ферма. В первом параграфе доказано, что при проективной двойственности кривая Ферма $\{x^n + y^n = z^n\}$ переходит в кривую $\{p_{n-1}(z^n; x^n, y^n) = 0\}$, а структура алгебраической n-значной косетной группы $\mathbb{G}_n(\mathbb{C})$ продолжается до структуры алгебраического n-значного моноида $\mathbb{M}_n(\mathbb{C}P^1)$ на $\mathbb{C}P^1$ (теорема 2.1.11 диссертации). Там же показывается, что композиция проективной двойственности с последующим преобразованием Мёбиуса задает сдвиг в семействе многозначных алгебраических структур (теорема 2.1.14). Отметим, что две указанные теоремы отнесены соискателем к основным результатам диссертации. В § 2 обозначена связь законов сложения многочленов $p_n(z; x, y)$ и дискриминантов расширений полей. После напоминания в § 3 сведений о геометрии и топологии гиперповерхностей Ферма в следующем четвертом параграфе, завершающим главу, приводятся результаты по теории кобордизмов гиперповерхностей Ферма в контексте проблемы Милнора–Хирцебруха.

В третьей главе автор вводит новый род Хирцебруха, который он называет *родом Бухштабера*, и исследует его, а также строит сопутствующую ему обобщенную теорию когомологий. В первом параграфе приводятся основы теории двузначных формальных групп. Во втором — вводится род и формальная группа Бухштабера (теорема 3.2.1), а также изучены их свойства целочисленности (теорема 3.2.4); эти теоремы включены в основные результаты диссертации. В § 3 строится обобщенная теория когомологий, соответствующая роду Бухштабера. В последнем пятом параграфе рассматривается эквивариантный род Бухштабера $\mathrm{Bc}^{\mathbb{T}^k}$ для касательно стабильно комплексных $\mathbb{T}^k$-многообразий.

Основной результат заключительной четвертой главы — классификация n-значных моноидов порядка 3 (теорема 4.1.4) и вытекающая из нее классификация n-значных групп порядка 3 (следствие 4.1.9). Эти результаты, которые также отнесены автором к основным достижениям диссертации, составляют содержание первого параграфа главы. В том же параграфе приведен целый ряд интересных следствий полученной классификации: пример серии нереверсивных многозначных групп, классификация $\bigstar$-инволютивных и инволютивных многозначных групп порядка 3. Во втором параграфе получены точные и асимптотические формулы для функций роста классов n-значных циклических косетных групп. Третий параграф посвящен динамическим свойствам группы $\mathbb{G}_n^m(\mathbb{C})$.

В заключении автор повторяет свои основные результаты. Работа завершается списком литературы, состоящим из 105 наименований, причем публикации автора по теме диссертации явно выделены.

Научная значимость и актуальность темы диссертационной работы не вызывает, на наш взгляд, никаких сомнений. Теория многозначных групп — активно развивающееся направление современной математики, связанное, как уже было отмечено выше, с целым рядом различных ее областей. Соискатель получил несколько первоклассных результатов в этой теории, включающих полную классификацию многозначных моноидов и групп порядка 3, показал связь теории n-значных групп с теорией дискриминантных множеств и проективной двойственностью, получил решение известных проблем в рамках теории комплексных кообрдизмов и родов Хирцебруха. Результаты работы представляют интерес для специалистов по алгебре и алгебраической топологии как у нас в стране, так и за рубежом, и могут быть использованы для дальнейших исследований в этой области, подготовке специальных курсов для студентов и аспирантов математических специальностей.

Текст диссертации свидетельствует об уверенном владении соискателем инструментарием современной математики: Максим Игоревич легко переходит от нетривиальных алгебраических выкладок к содержательным геометрическим и топологическим наблюдениям и обратно. Диссертация хорошо оформлена. Доказательства написаны человеческим языком, так что проверка результатов не вызывает у заинтересованного читателя особых затруднений. Конечно, текст такой длины, а диссертация насчитывает 171 страницу, не может обойтись без опечаток и стилистических шероховатостей. Мы не видим смысл перечислять их здесь (аннотированный pdf-файл диссертации, где все они отмечены, отправлен автору). Остановимся лишь на паре замечаний общего характера.

1. Неясно, почему автор не включил в число публикаций по теме диссертации свою личную статью в «Математических заметках» 2024 года. Тем более, что ее результаты представлены в конце четвертой главы (но не отнесены к основным результатам диссертации).

2. При переводе на русский англоязычных работ автору следовало помнить об отличии русской грамматики от английской. Собственно именно с этим связано большинство грамматических и стилистических погрешностей в работе.

Указанные замечания не влияют на общую высокую оценку диссертации.

Результаты диссертации опубликованы в виде 3 статей в журналах «Успехи математических наук», «Математические заметки», «Journal of Geometry and Physics». Первая из них написана в соавторстве с научным руководителем Виктором Матвеевичем Бухштабером, остальные две — личные, без соавторов. Результаты хорошо апробированы, они неоднократно докладывались на конференциях и семинарах в ведущих научных центрах нашей страны. Автореферат правильно и полно отражает содержание диссертации.

Суммируя сказанное, можно заключить, что диссертационная работа соответствует всем требованиям, предъявляемым к кандидатским диссертациям: она представляет собой научно-квалификационную работу, в которой получены важные теоретические результаты по алгебраической теории многозначных моноидов и групп, ее приложениям в задачах алгебраической топологии, алгебраической геометрии и математической физики, их актуальность и новизна не вызывают сомнений. Работа обладает необходимым внутренним единством и безусловно свидетельствует о личном вкладе соискателя в науку. Автор диссертации, Михаил Игоревич Корнев, заслуживает присуждения ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 1.1.3 — геометрия и топология.

Отзыв составлен главным научным сотрудником лаборатории алгебры ИМ СО РАН А.В. Васильевым, обсужден и одобрен в лаборатории алгебры ИМ СО РАН.

И.о. зав. лабораторией алгебры ИМ СО РАН
д.ф.-м.н. М.А. Гречкосеева

Г.н.с лаборатории алгебры ИМ СО РАН
д.ф.-м.н., профессор, проф. РАН А.В. Васильев