О Т З Ы В

официального оппонента о диссертационной работе
Корнева Михаила Игоревича
«n-ЗНАЧНЫЕ МОНОИДЫ И ГРУППЫ:
АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ И
ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ ПРИЛОЖЕНИЯ»,
представленной на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук
по специальности 1.1.3 — геометрия и топология

Диссертация М. И. Корнева посвящена развитию теории n-значных моноидов и групп и ее приложениям к алгебраической топологии, алгебраической геометрии, теории чисел и теории динамических систем. Теория многозначных групп имеет достаточно долгую историю и естественным образом соприкасается с широким спектром областей математики. В рассматриваемой работе изучаются различные классы n-значных групп и моноидов, прежде всего алгебраические и формальные. Рассматриваемые многозначные структуры оказываются связанными с эллиптическими кривыми, проективной двойственностью, гиперповерхностями Ферма, дискриминантами, матрицами Вендта, родами Хирцебруха и обобщенными теориями когомологий. Уже этот круг связей показывает, что выбранная тема находится на пересечении нескольких активно развиваемых направлений современной геометрии и топологии.

Интерес к многозначным алгебраическим структурам дополнительно поддерживается наличием содержательных приложений и появлением новых связей с задачами математической физики, теорией специальных функций, мультипликативными ядрами, геометрическими конструкциями, возникающими в программе Ленглендса. При этом даже базовые классификационные задачи для n-значных групп остаются нетривиальными; в частности, классификация конечных n-значных групп оказывается содержательной уже для множеств очень малого порядка. Таким образом, тема диссертации М. И. Корнева, несомненно, актуальна.

Диссертация объединяет несколько взаимосвязанных направлений. Первое из них относится к алгебраической теории n-значных групп и моноидов на $\mathbb{CP}^1$. В диссертации описаны многочлены, задающие с точностью до изоморфизма все косетные законы сложения в алгебраических n-значных моноидах и группах на $\mathbb{CP}^1$, моделируемые кубиками. Основным новым результатом этой части работы является описание структур двузначных алгебраических моноидов на $\mathbb{CP}^1$, соответствующих вырожденным кубикам. Отдельно исследованы нодальный и каспидальный случаи; описаны также вырождения трех-, четырех- и шестизначных групповых структур в каспидальном случае. Полученная в диссертации единая алгебраическая картина охватывает как невырожденные, так и вырожденные кубики.

Отдельный круг результатов относится к многочленам $p_n(z; x, y)$, задающим умножение в косетной n-значной группе $G_n(\mathbb{C})$. В диссертации эти многочлены выражаются через характеристические многочлены кронекеровых сумм сопровождающих матриц Фробениуса и через определители обобщенных матриц Вендта.

В частности, для простого $n \geqslant 5$ доказана делимость на n^4 коэффициентов разности $p_n(z; x, y) - (x + y + z)^n$. Эти результаты дают алгебраическое объяснение некоторым арифметическим свойствам коэффициентов рассматриваемых многозначных законов.

Второе направление связано с проективной двойственностью. Автор описывает, в частности, проективно-двойственные кривые к кривым, задаваемым многочленами p_n, и доказывает, что в композиции с преобразованием Мёбиуса проективная двойственность даёт сдвиг в семействе алгебраических многозначных моноидов. При этом двойственная к кривой Ферма описывается явным уравнением через многочлен p_{n-1}. Этот результат допускает многомерное продолжение: для гиперповерхностей Ферма также получается явное уравнение двойственной гиперповерхности.

К этому кругу вопросов примыкают топологические результаты о гиперповерхностях Ферма. Автор получает в рационализированном кольце комплексных кобордизмов $\Omega^U \otimes \mathbb{Q}$ явную формулу разложения классов гиперповерхностей Ферма через произведения классов гладких тета-дивизоров общих главно поляризованных абелевых многообразий. Коэффициенты этого разложения выражаются через числа граней ассоциаэдров и соответствующую весовую функцию.

Третье направление диссертации относится к алгебраической топологии. Автор вводит новый род Хирцебруха Bc, называемый родом Бухштабера, и явно описывает соответствующую формальную группу $F_{Bc}(u, v)$. Эта формальная группа связана посредством конструкции квадрата модуля с семейством двузначных групп Бухштабера. Получено утверждение об универсальности F_{Bc} в соответствующем классе формальных групп, а пересечение построенного семейства с классом формальных групп Бухштабера–Кричевера характеризуется родом Ошанина. Автор исследует также свойства целочисленности нового рода. В частности, значения Bc на тета-дивизорах принадлежат кольцу $\mathbb{Z}[a_1, a_2, a_3]$. На основе рода Бухштабера строится комплексно ориентируемая мультипликативная обобщенная теория когомологий; после соответствующей локализации устанавливается точность по Ландвеберу. Рассматривается также эквивариантная версия рода и вопросы жесткости.

Наконец, четвертое направление посвящено дискретным n-значным группам и динамике. Получена полная классификация n-значных моноидов и групп порядка 3. Из нее выводится ряд следствий о различных специальных классах многозначных групп; в частности, строится серия нереверсивных n-значных групп порядка 3. Для некоторых классов циклических косетных групп получены точные и асимптотические формулы функций роста. В заключительной части работы даётся динамическая интерпретация многочленов $p_n(z; x_1, \ldots, x_m)$ через действие декартовых степеней многозначной группы.

Достоверность представленных результатов обеспечивается строгими доказательствами, приведенными в тексте. Результаты диссертации неоднократно докладывались на научных конференциях и семинарах, в том числе на конференции «Алгебраическая топология, действия групп и комбинаторика» в ММЦ «Сириус», конференции математических центров России и семинарах МИАН, МГУ и НИУ ВШЭ.

Основные результаты диссертации опубликованы в трех работах в рецензи-

руемых научных изданиях: в «Успехах математических наук», «Математических заметках» и *Journal of Geometry and Physics*. (Одна из этих работ выполнена совместно с В. М. Бухштабером.) Таким образом, число публикаций превышает установленный для кандидатской диссертации по физико-математическим наукам минимум, а основные результаты работы представлены в ведущих математических изданиях.

Автореферат правильно и достаточно полно отражает содержание диссертации.

Диссертация представляет собой завершенную научно-квалификационную работу и обладает внутренним единством. Несмотря на разнообразие рассматриваемых объектов, ее части объединены теорией n-значных групп и, в значительной степени, семейством многозначных законов p_n. Изложение в целом последовательное, определения и основные утверждения сформулированы явно, доказательства приведены с достаточной полнотой. Работа имеет преимущественно теоретический характер; содержащиеся в ней конструкции и результаты могут использоваться в дальнейших исследованиях по алгебраической топологии, алгебраической геометрии, теории групп, теории чисел, многозначной динамике.

Текст диссертации не лишен недостатков. В частности, некоторые из формулировок не вполне удачны (см., например, пункт 2.3.1: Гиперповерхности Ферма имеют следующие хорошо известные представители). Кроме того, местами изложение кажется чрезмерно сжатым: для удобства читателя было бы полезно, по-видимому, пополнить текст некоторыми определениями и конструкциями. К примеру, определение 1.2.4 изоморфности для различных типов n-значных моноидов можно было бы предварить определениями аналитических и топологических n-значных моноидов (либо добавить эти определения в сносках). В определении 1.2.11 косетных n-значных моноидов естественно было бы напрямую указать, что под конструкцией теоремы 1 из работы Buchstaber V. M. n-valued groups: theory and applications имеется в виду именно конструкция n-значных групп, описанная в диссертации (поскольку описание давалось без ссылки на теорему 1), и т. п. В формулировке и доказательстве предложения 3.4.5, по всей видимости, присутствуют опечатки в индексах. Рассматривается действие на $\mathbb{CP}^n$, но в левой части формулы (3.4.6) однородные координаты записаны как $[z_0 : \ldots : z_{2n+1}]$, тогда как в правой части используются только $z_0, \ldots, z_n$. В конце доказательства фигурирует $\mathbb{CP}^{2n+1}$ вместо $\mathbb{CP}^n$ при нечетном n. Кроме того, здесь не ясно соотношение между векторами m_i и λ_i. Указанные замечания имеют главным образом характер пожеланий к изложению и не влияют на высокую оценку полученных результатов.

Диссертация соответствует специальности 1.1.3 — геометрия и топология. Ее содержание непосредственно относится к алгебраической топологии, топологии многообразий, топологическим аспектам алгебраической геометрии, теории характеристических классов и обобщенных теорий когомологий.

Итак, диссертация М. И. Корнева представляет собой завершенную научно-исследовательскую и научно-квалификационную работу на актуальную тему. В ней решен комплекс научных задач, имеющих значение для развития геометрии и топологии: развита теория алгебраических n-значных моноидов и групп, установлены ее новые связи с проективной двойственностью и гиперповерхностями Ферма, получены результаты в комплексных кобордизмах, введен новый род Хирцебру-

ха и построена связанная с ним обобщенная теория когомологий, а также решена классификационная задача для n-значных моноидов и групп порядка 3. Собственные результаты автора обладают научной новизной, аргументированы и снабжены доказательствами; используемые в диссертации известные результаты сопровождаются ссылками, а результаты совместных работ и личный вклад автора в их получение отмечены в тексте.

По своему содержанию и уровню полученных результатов диссертация удовлетворяет критериям пунктов 9–14 «Положения о присуждении ученых степеней», утвержденного постановлением Правительства Российской Федерации от 24 сентября 2013 г. № 842: работа содержит решение научных задач, имеющих значение для развития соответствующей отрасли знаний, обладает внутренним единством, содержит новые результаты и положения, свидетельствует о личном вкладе автора; основные результаты опубликованы в рецензируемых научных изданиях.

Таким образом, работа М. И. Корнева отвечает требованиям, предъявляемым к кандидатским диссертациям, а ее автор, Корнев Михаил Игоревич, заслуживает присуждения ему ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 1.1.3 — геометрия и топология.

Официальный оппонент
доктор физико-математических наук
(по специальностям 01.01.04 — геометрия и топология,
01.01.06 — математическая логика, алгебра и теория чисел),
заместитель директора по научной работе
ФГБУН Санкт-Петербургское отделение
Математического института им. В. А. Стеклова
Российской академии наук (ПОМИ РАН),
Малютин Андрей Валерьевич

28 августа 2026 г.

Почтовый адрес: 191023, Санкт-Петербург, набережная реки Фонтанки, д. 27
Телефон: 8 (812) 312-40-58
Электронная почта: malyutin@pdmi.ras.ru

Подпись А. В. Малютина заверяю
Главный специалист
Скрипка Е. Г.
28.08.2026