Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Математический институт им. В. А. Стеклова
Российской академии наук

На правах рукописи

УДК: 515.14, 512.74

Корнев Михаил Игоревич

n-ЗНАЧНЫЕ МОНОИДЫ И ГРУППЫ: АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ И ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

1.1.3 — Геометрия и топология

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
член-корреспондент РАН,
доктор физико-математических наук,
профессор
Виктор Матвеевич Бухштабер

Москва
2026

Оглавление

Введение **4**

1 Симметрические n-алгебраические n-значные группы **29**
1.1 Основные понятия теории n-значных групп 29
1.2 Алгебраические n-значные моноиды и группы 32
1.3 Кубики и n-значные косетные законы сложения 40
1.3.1 Случай эллиптической кривой 41
1.3.2 Случай особой кубики 54
1.4 Симметрические n-алгебраические n-значные группы 60
1.5 Кронекеровы суммы и сопровождающие матрицы Фробениуса . 74
1.6 Группы $\mathbb{G}_n(\mathbb{C})$ и суммы Кронекера 80
1.7 Группы $\mathbb{G}_n(\mathbb{C})$ и матрицы Вендта 83

2 Алгебраические n-значные моноиды, проективная двойственность и гиперповерхности Ферма **95**
2.1 Проективная двойственность и семейство моноидов $\mathbb{M}_n(\mathbb{C}P^1)$ . . 95
2.2 Законы $p_n(z; x, y)$ и дискриминанты расширений полей 102
2.3 Предварительные сведения о топологических свойствах гиперповерхностей Ферма M_d^n 103
2.4 Проблема Милнора–Хирцебруха и многообразия M_d^n 107
2.4.1 Классы $[M_d^2]$ и $[M_d^3]$ комплексных кобордизмов 107
2.4.2 Представление $[M_d^n]$ через тета-дивизоры 113

3 Двузначная формальная группа в комплексных кобордизмах **118**
3.1 Конструкция квадрата модуля 118
3.2 Род Бухштабера 123
3.3 Теория когомологий Бухштабера 131
3.4 Эквивариантный род Бухштабера и проблема жесткости родов . 133

4 Дискретные n-значные группы и динамика **140**

4.1 n-значные моноиды и группы порядка 3 140
4.1.1 Классификация 140
4.1.2 Следствия 143
4.2 Двузначные группы и динамика 149
4.2.1 Предварительные сведения 149
4.2.2 Рост n-значных групп 151
4.3 Группы $\mathbb{G}_n^m(\mathbb{C})$ 157

Заключение **161**

Публикации по теме диссертации **162**

Список литературы **163**

Введение

Актуальность темы. Формальная группа геометрических кобордизмов была введена С. П. Новиковым, логарифм этой группы был описан А. С. Мищенко [Нов67]. Как показал Д. Квиллен, формальная группа геометрических кобордизмов изоморфна универсальной формальной группе Лазара [Qui69]. В работе [Бух70] В. М. Бухштабером независимо от результата Квиллена было показано, что кольцо коэффициентов формальной группы геометрических кобордизмов порождает кольцо Ω_U кобордизмов стабильно комплексных многообразий, а экспонента этой формальной группы задает характер Черна $\mathrm{ch}_U : U^*(-) \to H^*(-, \Omega_U \otimes \mathbb{Q})$. В статье [БН71] В. М. Бухштабера и С. П. Новикова была введена конструкция квадрата модуля универсальной формальной группы, названная двузначной формальной группой в кобордизмах, и получены результаты об образе кольца Ω_{Sp} кобордизмов стабильно кватернионных (симплектических) многообразий в кольце Ω_U в терминах закона сложения этой двузначной формальной группы. Это привело к общему понятию n-значной формальной группы и примерам n-значных групп.

Начиная с 30-х годов XX века в разных разделах математики естественно возникают и находят приложения многозначные группы, в которых произведением пары точек пространства X является подмножество в X. Это так называемые мультигруппы и гипергруппы (см., например, [Zie23] и список литературы там). В n-значных группах произведением любых пар точек является мультимножество из n точек. Принципиально новым явилось то, что результат n-значного умножения содержит n точек (для фиксированного n) *с учетом кратностей*. Аксиоматическое определение n-значных групп и первые результаты их алгебраической теории были получены в последующем цикле работ В. М. Бухштабера. В 1976 году В. М. Бухштабер показал [Бух76], что множество двузначных формальных групп разделяется на два класса, построил универсальные формальные группы в каждом из этих классов и доказал, что двузначная формальная группа геометрических кобордизмов изоморфна универсальной формальной группе одного из этих классов. Этот результат привел

к топологическим приложениям алгебраической теории двузначных формальных групп.

В настоящее время теория n-значных (формальных, конечных, дискретных, топологических и алгебро-геометрических) групп и ее приложения в различных областях математики и математической физики развиваются рядом авторов, см. работы [Бух75; AL75; Хол81; Вер83; Бух90; BV96; БВЕП96; BR97; Buc06; Dra10; DK14; БВГ22; БВ24; CDFH24; GRS26; BGR26] и список литературы к каждой из них. Сравнительный анализ теорий однозначных и n-значных групп можно найти в работе [BB12].

В задачах классификации двузначных формальных групп над $\mathbb{Q}$-алгебрами Бухштабером была открыта [Бух75] их связь с теорией коалгебр и теорией операторов обобщенного сдвига, которая позволила получить новые доказательства как классических результатов (например, теоремы Лазара о кольце коэффициентов универсальной одномерной формальной группы), так и новые результаты (например, о кольцах кобордизмов многообразий Стонга [Бух78]). В проблеме вычисления универсальной двузначной формальной группы была использована теория когомологий градуированных коалгебр [Бух76], которая уже в случае двузначных групп привела к кольцам когомологий с некоммутативным умножением в отличие от коммутативного умножения в когомологиях алгебр Хопфа.

Обзор [AL75] Дж. Адамса и А. Люлевичуса посвящен результатам Бухштабера о двузначных формальных группах и их топологическим приложениям.

В работах [Хол81; Хол84] А. Н. Холодова были получены результаты по алгебраической теории n-значных групп.

В совместной работе [БХ82] В. М. Бухштабером и А. Н. Холодовым были построены n-значные аналоги двузначной формальной группы в кобордизмах. В этой статье любой n-значной формальной группе в теории кобордизмов была сопоставлена обобщенная теория когомологий, аналогичная теории комплексных кобордизмов в случае $n = 2$.

В работе [Вер83] В. В. Вершинин, опираясь на результаты [БН71; Бух78], получил результаты о кручении в кольце Ω_{Sp}.

Работа [Бух90] положила начало теории алгебраических n-значных групп, важные примеры которых дает теория автоморфизмов абелевых многообра-

зий и абелевых функций. В этой статье было показано, что каждый многочлен[1]

$$\mathcal{B}_{\boldsymbol{a}}(z;x,y)=(x+y+z-a_2xyz)^2-4(1+a_3xyz)(xy+yz+xz+a_1xyz) \quad (0.0.1)$$

определяет двузначную алгебраическую группу $\mathbb{G}_{\boldsymbol{a}}$, универсальную в классе двузначных формальных групп (над $\mathbb{Q}$-алгебрами без делителей нуля), получающихся посредством конструкции квадрата модуля (см. [БН71]) из класса формальных групп

$$\mathcal{F}(u,v)=\frac{u^2\lambda_1(v)-v^2\lambda_1(u)}{u\lambda_2(v)-v\lambda_2(u)}, \quad (0.0.2)$$

где $\lambda_k(u)\in A[[u]], k=1,2$; кольцо A имеет довольно сложную структуру (см. [БУ15]), однако

$$A\otimes\mathbb{Q}\cong\mathbb{Q}[b_1,b_2,b_3,b_4],\quad b_1=\alpha,\quad b_2=\wp(z),\quad b_3=\wp'(z),\quad b_4=g_2,$$

причём $\deg b_i=-2i, i=1,\dots,4$, а $\wp(z)=\wp(z;g_2,g_3)$ — функция Вейерштрасса, удовлетворяющая уравнению $(\wp'(z))^2=4\wp(z)^3-g_2\wp(z)-g_3$. Многочлен (0.0.1) играет важную роль в настоящей диссертации.

В статье [BV96] В. М. Бухштабера и А. П. Веселова было обнаружено, что динамика точек, возникающая при соответствии Эйлера–Шаля, управляется законом $m*n=[m+n,|m-n|]$ двузначной группы на множестве целых неотрицательных чисел.

Понятие n-алгебры Хопфа было введено в [BR97] В. М. Бухштабером и Э. Рисом. Показано, что кольцо функций $\mathcal{O}(X)$ и кольцо когомологий $\mathrm{H}^*(X)$ на n-значной топологической группе X обладают структурой n-алгебры Хопфа. Используя свойства n-алгебр Хопфа, авторы получили обобщение классического результата Хопфа [Hop41] о пространствах с умножением. Т. Е. Пановым в [Пан96] были получены результаты о структуре 2-алгебры Хопфа в когомологиях четырехмерных многообразий.

В работе [Dra10] В. Драговичем открыта замечательная связь уравнения ассоциативности 2-значной группы на $\mathbb{C}$ с методом интегрирования волчка Ковалевской. В работе [BD18] построена алгебраическая двузначная группа на многообразии Куммера.

[1] В работе [Бух90] использован многочлен (0.0.1) в другой нормализации $\widetilde{a}_1$, $\widetilde{a}_2$ и $\widetilde{a}_3$ свободных параметров a_1, a_2 и a_3. Более конкретно, $\widetilde{a}_1=a_1$ и $\widetilde{a}_2=a_2$ и $\widetilde{a}_3=4a_3$. Однако это отличие в нормализациях несущественно, поскольку работа происходит над $\mathbb{Q}$-алгебрами.

Авторы статьи [CDFH24] разработали технику формальных тернарных законов Уолтера и сравнили ее с теорией двузначных формальных групп Бухштабера. Ими также были вычислены элементарные формальные тернарные законы.

В работе [GRS26] авторами рассмотрена производящая функция $\Phi^{(n)}$ для обратных величин n-х степеней факториалов. Установлена связь между формулами произведения для таких рядов и периодами некоторых семейств алгебраических гиперповерхностей. Для этих семейств описаны их сингулярные множества и показано, что эти сингулярные множества задаются нулями многочленов Бухштабера–Риса $p_n(z; x, y)$, которые определяют n-значные групповые законы $\mathbb{G}_n(\mathbb{C})$.

В связи с задачами геометрической программы Ленглендса авторы статьи [BGR26] ввели понятие обобщенного многочлена Концевича $D_{\boldsymbol{a}}$. Оказалось, что многочлен (0.0.1) связан с $D_{\boldsymbol{a}}$ преобразованием Мебиуса.

Актуальная проблема классификации n-значных групп даже на конечных множествах оказалась сложной (даже для случая специальных двузначных групп [БВГ22]). О результатах разных авторов в этом направлении в сопоставлении с результатами нашей диссертации будет сказано ниже.

Теперь перейдем к более детальному сопоставлению известных результатов с результатами настоящей диссертации.

Алгебраическим n-значным моноидом называется алгебраическое многообразие X с ассоциативным n-значным умножением, определенным рациональным морфизмом $X \times X \to \mathrm{Sym}^n(X)$ с нейтральным элементом (единицей) $e \in X$, т.е. существуют $x * e$, $e * x$ и имеют место равенства: $x * e = e * x = [x, x, ..., x]$ при любом $x \in X$. *Алгебраической n-значной группой* называется алгебраический n-значный моноид на X с рациональным морфизмом обращения $\mathrm{inv} : X \to X$, для которого если существует $\mathrm{inv}(x)$, то выполнены условия: существуют $x * \mathrm{inv}(x)$, $\mathrm{inv}(x) * x$, и $e \in x * \mathrm{inv}(x)$, $e \in \mathrm{inv}(x) * x$.

Алгебраический n-значный моноид (или группа) на X называется *регулярным*, если n-значное умножение $X \times X \to \mathrm{Sym}^n(X)$ определено на всем многообразии $X \times X$ (и отображение inv определено всюду на X в случае группы). n-значная группа X называется *инволютивной*, если отображение inv определено однозначно и $\mathrm{inv}(x) = x$ для каждого $x \in X$.

Пусть

$$\delta_{\boldsymbol{a}} = \operatorname{disc}_t(t^3 + a_1 t^2 + a_2 t + a_3)$$

— дискриминант. Показано [ББ19, Теорема 6.3], [ВК25a, Theorem 1], что для любого выбора комплексных параметров $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, a_3)$ многочлены Бухштабера (0.0.1) определяют структуру универсальной симметрической 2- алгебраической 2-значной группы $\mathbb{G}_{\mathbb{C}}(\mathcal{B}_{\boldsymbol{a}})$ на $\mathbb{C}$ с умножением

$$x * y = \{z \mid \mathcal{B}_{\boldsymbol{a}}(z; x, y) = 0\},$$

нулем 0 и обратным $\operatorname{inv}(x) = x$. Согласно недавней работе [BGR26, Theorem 4.7] закон (0.0.1) при $\delta_{\boldsymbol{a}} \neq 0$ задает на $\mathbb{C}P^1$ структуру регулярной 2-значной алгебраической группы на $\mathbb{C}P^1$.

Как было замечено в [BGR26, Theorem 4.7], имеет место равенство:

$$D_{\boldsymbol{a}}(z; x, y) = (xyz)^2\, \mathcal{B}_{\boldsymbol{a}}(-1/z; -1/x, -1/y),$$

где

$$D_{\boldsymbol{a}}(z; x, y) = \operatorname{disc}_t\big(t^3 + a_1 t^2 + a_2 t + a_3 - (t-x)(t-y)(t-z)\big)$$

— обобщенный многочлен Концевича.

Обозначим через $\mathbb{G}_n(\mathbb{C})$ косетную [Buc06, Theorem 1] n-значную алгебраическую группу на $\mathbb{C}$ с нулем 0, обратным $\operatorname{inv}(x) = (-1)^n x$ и умножением

$$x * y = [z \mid p_n(z; (-1)^n x, (-1)^n y) = 0],$$

где

$$p_n(z; x, y) = \prod_{r,s=1}^{n} (\sqrt[n]{z} + \varepsilon^r \sqrt[n]{x} + \varepsilon^s \sqrt[n]{y}) \tag{0.0.3}$$

— симметрический многочлен с целыми коэффициентами, $\varepsilon = e^{2\pi i/n}$ для фиксированной ветви $\sqrt[n]{-}$. Группа $\mathbb{G}_n(\mathbb{C})$ впервые была рассмотрена в работе [БН71].

В работе [ББ11] представлен 1-значный закон сложения на эллиптических кривых в общей модели Вейерштрасса, используя униформизацию Тейта. Этот закон задается формальными рядами. Одним из следствий нашей работы является тот факт, что n-значные законы, соответствующие эллиптическим кривым, задаются многочленами. В Теоремах 1.3.9, 1.3.16, 1.3.19 и 1.3.23 нами

описаны n-значные законы сложения при $n = 2, 3, 4$ и 6, которые в явном виде задаются полиномами и получаются косетными конструкциями из геометрических законов сложения на эллиптических кривых. Косет- конструкция для групп [Buc06, Theorem 1] без затруднений переносится на случай моноидов. Мы называем n-значный моноид M_H, построенный по 1-значному моноиду M и подгруппе H порядка n группы $\mathrm{Aut}(M)$, *косетным*.

В Теореме 1.3.9 описана классификация всех 2-значных косетных групп и моноидов на $\mathbb{C}P^1$, получаемых косетной конструкцией из группы точек эллиптической кривой относительно инволюции. Хотя содержание пункта **(i)** не является новым, таковым служит его метод доказательства. Данный результат был получен впервые в [BGR26, Theorem 4.7] с опорой на теорию эллиптических функций. Согласно ему при $\delta_{\boldsymbol{a}} \neq 0$ (и только в этом случае) универсальный 2-значный групповой закон $\mathbb{G}_{\mathbb{C}}(\mathcal{B}_{\boldsymbol{a}})$, полученный в [БВ19, Теорема 6.3], продолжается до 2-значной косетной алгебраической регулярной инволютивной группы $\mathbb{G}_{\mathbb{C}P^1}(\mathcal{B}_{\boldsymbol{a}})$ на $\mathbb{C}P^1$ с единицей 0 и умножением $\mu_{\boldsymbol{a}}$. В [BGR26, Theorem 5.1] было показано, что преобразование Мебиуса $x \mapsto -1/x$, $y \mapsto -1/y$, $z \mapsto -1/z$ переводит группу $\mathbb{G}_{\mathbb{C}P^1}(\mathcal{B}_{\boldsymbol{a}})$ в изоморфную группу $\mathbb{G}_{\mathbb{C}P^1}(D_{\boldsymbol{a}})$ с единицей ∞ и умножением, заданным многочленом Концевича $D_{\boldsymbol{a}}(-z; -x, -y)$. Группа $\mathbb{G}_{\mathbb{C}P^1}(D_{\boldsymbol{a}})$ совпадает с косетной группой $\mathcal{E}_{\langle\sigma\rangle}$, где

$$\mathcal{E} = \{\eta^2 = \zeta^3 + a_1\zeta^2 + a_2\zeta + a_3\} \tag{0.0.4}$$

— эллиптическая кривая и

$$\sigma : (\zeta, \eta) \mapsto (\zeta, -\eta)$$
$$\infty \mapsto \infty$$

— инволюция. Пункт **(ii)** Теоремы 1.3.9 является новым и говорит о том, что группы $\mathbb{G}_{\mathbb{C}P^1}(\mathcal{B}_{\boldsymbol{a}})$ классифицируются j-инвариантом эллиптической кривой $\mathcal{E}$.

Назовем элемент w из n-значного моноида (группы) $\mathbb{M}$ *итерирующим* (при $n = 2$ *удваивающим*), если для каждого $m \in \mathbb{M}$ мультимножества $m * w$ и $w * m$ содержат точки кратности не меньше 2. При $n = 2$ множество удваивающих точек образует 2-значный диагональный подмоноид (подгруппу). Если n-значная алгебраическая группа задается в некоторой карте U корнями по z некоторого многочлена $P(z; x, y)$, то элемент y является итерирующим в том и

только в том случае, когда y является корнем дискриминанта $\mathrm{disc}_z(P(z;x,y))$ при любом $x \in U$. Таким образом, дискриминант $\mathrm{disc}_z(P(z;x,y))$ закона $P(z;x,y)$ несет важную информацию о структуре n-значного алгебраического моноида. В Теореме 1.3.12 показывается, что при $\delta_a \neq 0$ группа удваивающих точек 2-значной группы $\mathbb{G}(\mathcal{B}_a)$ изоморфна четверной группе Клейна $\mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/2$. Согласно Предложению 1.3.17, множество $\{0, \pm 1/\sqrt{c}\}$ итерирующих элементов 3- значной группы $\mathbb{G}_{3,c}(\mathbb{C}P^1)$ является (как 3-значная подгруппа) диагональной конструкцией от 1-значной группы, изоморфной $\mathbb{Z}/3$. Согласно Предложению 1.3.20, итерирующие элементы 4-значной группы $\mathbb{G}_{4,b}(\mathbb{C}P^1)$ образуют 4-значную подгруппу, изоморфную группе $\mathrm{diag}_2((\mathbb{Z}/4)/\sigma)$, где diag_2 обозначает двукратную диагональ и $(\mathbb{Z}/4)/\sigma$ — двузначная косетная группа, построенная по аддитивной группе $\mathbb{Z}/4$ и инволюции $\sigma : g \mapsto -g$ для всех $g \in \mathbb{Z}/4$.

Как уже отмечалось, в Теоремах 1.3.16, 1.3.19 и 1.3.23 явно описаны полиномы, задающие умножение во всех возможных (с точностью до изоморфизма) косетных 3-, 4- и 6-значных группах $\mathbb{G}_{3,c}(\mathbb{C}P^1)$, $\mathbb{G}_{4,b}(\mathbb{C}P^1)$ и $\mathbb{G}_{6,c}(\mathbb{C}P^1)$ на $\mathbb{C}P^1$, моделируемых эллиптическими кривыми и автоморфизмами. Они соответствуют эквиангармонической ($j = 0$, $\mathrm{Aut}\,\mathcal{E}(\mathbb{C}) \cong \mathbb{Z}/6$) и гармонической ($j = 1728$, $\mathrm{Aut}\,\mathcal{E}(\mathbb{C}) \cong \mathbb{Z}/4$) эллиптическим кривым $\mathcal{E}$.

В нодальном случае кубики $\mathcal{E}$ согласно Теореме 1.3.36 косетная группа $\mathbb{G}_{\mathbb{C}P^1}(D_a)$ превращается (с точностью до изоморфизма) в косетный моноид $\mathbb{M}_{\mathrm{node}}(\mathbb{C}P^1)$.

В каспидальном случае кубики $\mathcal{E}$ согласно Теореме 1.3.45 косетные группы

$$\mathbb{G}_{\mathbb{C}P^1}(D_a),\ \mathbb{G}_{3,c}(\mathbb{C}P^1),\ \mathbb{G}_{4,b}(\mathbb{C}P^1),\ \mathbb{G}_{6,c}(\mathbb{C}P^1)$$

превращаются (с точностью до изоморфизма) в косетные моноиды

$$\mathbb{M}_2(\mathbb{C}P^1),\ \mathbb{M}_3(\mathbb{C}P^1),\ \mathbb{M}_4(\mathbb{C}P^1),\ \mathbb{M}_6(\mathbb{C}P^1)$$

соответственно.

Результаты о косетных моноидах и группах мотивируют понятие классов симметрических n-алгебраических n-значных групп (см. Определения 1.2.8, 1.4.6 и 1.4.9). Для $n = 2$ и 3 нами получено описание универсальных объектов этих классов (Теоремы 1.4.22 и 1.4.25). Группа $\mathbb{G}_n(\mathbb{C})$ принадлежит одному из этих классов. Отметим, что на сегодняшний день неизвестна полная класси-

фикация n-алгебраических n-значных групп при $n > 3$.

Семейство многочленов $p_n(z; x, y)$, см. (0.0.3), было введено в статье [BR97]. В той же работе отмечено, что многочлены $p_n(z; x, y)$ являются целочисленными однородными симметрическими степени n. Они явно представлены в [Buc06] для $n = 1, \ldots, 7$ (см. также формулы (1.6.2) настоящей работы) в виде целочисленных многочленов от элементарных симметрических многочленов σ_1, σ_2 и σ_3, и поставлены задачи о структуре коэффициентов этих многочленов в зависимости от n.

Группы $\mathbb{G}_n(\mathbb{C})$ и многочлены $p_n(z; x, y)$ возникают и в настоящее время изучаются в различных областях математики и математической физики. В недавней работе [Чир24] исследована функция роста n-значной динамики группы $\mathbb{G}_n(\mathbb{C})$. В другой недавней работе [GRS26] описана связь многочленов $p_n(z; x, y)$ с мультипликативными ядрами в смысле Концевича–Одесского, n-бесселевыми ядрами и потенциалами в модели Ландау–Гинзбурга. Как уже отмечалось выше, в [BGR26] установлена связь между симметрической 2- алгебраической 2-значной группы из [Бух90] (совпадающей с $\mathbb{G}_2(\mathbb{C})$ при $\boldsymbol{a} = 0$) с многочленами Концевича, введенными в рамках программы Ленглендса.

Мы показываем, что n-значная группа $\mathbb{G}_n(\mathbb{C})$ реализуется при помощи корней характеристического многочлена переменной $z = t^n$ кронекеровой суммы (см. Определение 1.5.1) двух сопровождающих матриц Фробениуса (1.5.5) для многочленов $t^n - x$ и $t^n - y$. Итерации n-значного умножения приводят к однородным симметрическим многочленам $p_n(z; x_1, \ldots, x_m)$, см. Теорему 1.6.6.

В Теореме 1.7.4 показывается, что каждый многочлен $p_n(z; x, y)$ представляется детерминантом $(n \times n)$-матрицы (1.7.5), которая принадлежит классу, известному в литературе под названием *y-циркулянтные матрицы* [Баб86, с. 211]. Более того, для каждого n при $x = (-1)^n$, $y = z = 1$ данный детерминант $p_n(z; x, y)$ превращается в детерминант $\det W_n$ матрицы Вендта W_n, который имеет важные приложения в теории чисел в контексте большой теоремы Ферма (см. например, [Rib99, Chapter IV, **(2b)**]). Это позволяет ввести обобщение — матрицы Вендта $W_n(z; x, y)$. Тогда Теорема 1.7.4 эквивалентно переформулируется в утверждение о том, что многочлены $p_n(z; x, y)$, выражающие n-значное умножение в группе $\mathbb{G}_n(\mathbb{C})$, являются определителями матрицы Вендта (Теорема 1.7.27). Данный результат переносится в Теореме 1.7.17 на многочлены $p_n(z; x_1, \ldots, x_m)$. Возникает круг вопросов, связанный с

теоретико-числовыми свойствами коэффициентов многочленов $p_n(z;x,y)$ и обобщающий соответствующий круг вопросов для W_n. В Теореме 1.7.9 при помощи теоремы Вольстенхольма показывается, что коэффициенты многочлена $p_n(z;x,y)-(x+y+z)^n$ делятся на n^4 для каждого простого $n \geqslant 5$. Одним из стимулов данной части работы был экспериментальный факт о том, что в разложениях коэффициентов многочленов $p_n(z;x,y)$ на простые в базисе элементарных симметрических многочленов возникают простые числа, существенно большие, чем n уже при $n \leqslant 20$. Многочлены $p_n(z;x_1,\ldots,x_m)$ естественно связаны с несколькими классическими и современными вопросами теории чисел, в том числе с проблемой Варинга. Теорема 1.7.28 говорит о том, что минимальный многочлен элемента $\theta = {x_1}^{1/n_1}+\ldots+{x_m}^{1/n_m}$ расширения $\mathbb{C}(x_1,\ldots,x_m) \subset \mathbb{C}({x_1}^{1/n_1},\ldots,{x_m}^{1/n_m})$ с алгебраически независимыми формальными переменными $x_1,\ldots,x_m$ представляет собой характеристический многочлен суммы Фробениуса сопровождающих матриц многочленов $t^{n_j}-x_j$ для $j=1,\ldots,m$. Как следствие, многочлены $p_n(z;x_1,\ldots,x_m)$ неприводимы над $\mathbb{C}$.

Авторы работы [GRS26] при исследовании сингулярных множеств оператора Пикара–Фукса для мультипликативных ядер в смысле Концевича– Одесского пришли к удивительным соотношениям, выражающим законы $p_n(z;x,y)$ через дискриминанты некоторых многочленов. Наши результаты проясняют эти соотношения при помощи связи между теорией проективной двойственности и теорией алгебраических n-значных моноидов.

А именно, наша Теорема 2.1.10 утверждает, что при проективной двойственности кривая Ферма $\{x^n+y^n=z^n\}$ переходит в кривую $\{p_{n-1}(z^n;x^n,y^n)=0\}$.

Теорема 2.1.11 показывает, что структура алгебраической n-значной косетной группы $\mathbb{G}_n(\mathbb{C})$ продолжается (лишь) до структуры алгебраического n-значного моноида $\mathbb{M}_n(\mathbb{C}P^1)$ на $\mathbb{C}P^1$. Здесь точка ∞ является поглощающей, то есть

$$\infty * x = x * \infty = [\infty,\infty,\ldots,\infty] \quad \text{для каждого } x \in \mathbb{C}P^1 \setminus \{\infty\}.$$

Для каждого натурального n многочлен p_n задает кривую

$$X_n = \{p_n(z;x,y)=0\}$$

в $\mathbb{C}P^2$. По Теореме 2.1.14, при проективной двойственности кривая X_n ($n \geq 2$) переходит в кривую

$$X_n^\vee = \{(uvw)^{n-1} p_{n-1}(1/w; 1/u, 1/v) = 0\} \subset (\mathbb{C}P^2)^*,$$

а композиция двойственности $X_n \mapsto X_n^\vee$ с последующим преобразованием Мёбиуса $(u, v, w) \mapsto (1/u, 1/v, 1/w)$ задает операцию сдвига $\mathbb{M}_n(\mathbb{C}P^1) \mapsto \mathbb{M}_{n-1}(\mathbb{C}P^1)$ в семействе алгебраических n-значных моноидов. Из формул Плюккера [GKZ94, Proposition 2.4] следует, что если X — гладкая кривая степени n, то кривая $X^\vee$ имеет степень $n(n-1)$. В нашем случае X_n и $X_n^\vee$ сингулярны при $n \geq 3$, причем $\deg X_n = n$ и $\deg X_n^\vee = (n-1)^2$. Кривые X_2 и $X_2^\vee$ неособые (см. Пример 2.1.7).

Согласно [GRS26, Theorem 2.3] многочлен $p_n(z; x, y)$ и дискриминант $\mathrm{disc}_t(P_{x,y,z}(t))$ многочлена

$$P_{x,y,z}(t) = (-1)^n x\, t^{n-1}(1+t)^{n-1} + (-1)^n y(1+t)^{n-1} - t^{n-1} z$$

по переменной t удовлетворяют равенству

$$(-1)^n (n-1)^{2(n-1)} (xyz)^{n-2} p_n(z; x, y) = \mathrm{disc}_t\big(P_{x,y,z}(t)\big). \tag{0.0.5}$$

Прямое доказательство см. в [BK25a, Theorem 8]. Итак, Теоремы 2.1.10, 2.1.11 и 2.1.14 объясняют (0.0.5) с помощью теории алгебраических n-значных моноидов и групп.

Итерации n-значного сложения в $\mathbb{G}_n(\mathbb{C})$ задаются симметрическими многочленами

$$p_{n,m}(z; \boldsymbol{x}) = \prod_{k_1,\dots,k_m=1}^{n} \big(\sqrt[n]{z} + \varepsilon^{k_1} \sqrt[n]{x_1} + \dots + \varepsilon^{k_m} \sqrt[n]{x_m}\big),$$

которые возникают, например, в связи с дифференциальным уравнением Пикара–Фукса [GRS26, Section 3]. Обозначим через $\mathcal{O}_{n,m}(\mathbb{C}P^1)$ многообразие $\mathbb{C}P^1$, наделенное этой операцией. Пусть $X_{n,m} = \{p_{n,m} = 0\}$ — гиперповерхность в $\mathbb{C}P^m$, и положим

$$P_{n,m}(w; \boldsymbol{u}) = (u_1 \cdots u_m w)^{n-1}\, p_{n-1}(w^{-1}; u_1^{-1}, \dots, u_m^{-1}).$$

Тогда Теорема 2.1.18 утверждает, что композиция двойственности ($m \geq 2$, $n \geq 2$)

$$X_{n,m} \mapsto X_{n,m}^{\vee} = \{P_{n,m} = 0\} \subset (\mathbb{C}P^m)^*$$

с последующим преобразованием Мёбиуса

$$(u_1, \ldots, u_m, w) \mapsto (1/u_1, \ldots, 1/u_m, 1/w)$$

задает операцию сдвига

$$\mathcal{O}_{n,m}(\mathbb{C}P^1) \mapsto \mathcal{O}_{n-1,m}(\mathbb{C}P^1)$$

в семействе m-арных n^{m-1}-значных алгебраических структур $\mathcal{O}_{n,m}(\mathbb{C}P^1)$.

Теорема 2.1.19 является итерированным аналогом Теоремы 2.1.10. Она дает конкретную реализацию

$$F_n^{\vee} = \{\, p_{n-1,m}(w^n; u_1^n, \ldots, u_m^n) = 0\}$$

как явного уравнения для двойственной гиперповерхности к гиперповерхности Ферма

$$F_{n,m} = \{\, x_1^n + \ldots + x_m^n = z^n \,\}.$$

В Предложении 2.2.3 описывается многочлен $p_n(z; x, y)$ как дискриминант некоторого расширения полей.

Задача Милнора–Хирцебруха была впервые сформулирована Хирцебрухом в его докладе на ICM 1958 года [Hir58]. Её алгебраическая версия выглядит следующим образом: какие наборы из $p(n)$ целых чисел

$$c_\lambda, \qquad \lambda \in \mathscr{P}(n) \text{ — множество разбиений числа } n,$$

могут быть реализованы как (касательные или нормальные) числа Черна $c_\lambda(M^n)$ некоторого гладкого неприводимого комплексного алгебраического многообразия M^n?

Эта версия задачи в значительной степени остаётся открытой, хотя некоторые арифметические ограничения известны из теоремы Гротендика–Римана–Роха–Хирцебруха.

В частности, можно задаться вопросом о представлении класса $[M] \in \Omega_{\mathrm{U}}$

в виде $[M] = k[\widetilde{M}]$, где $[\widetilde{M}]$ — неделимый класс в кольце Ω_{U}.

Нами получены результаты о сравнении классов кобордизмов $[M_d^2]$ с классами, возникающими из классификационной теоремы Фридмана при использовании наивного равенства $[M_1 \# M_2] = [M_1] + [M_2]$ в кольце Ω_{U}, где $M_1 \# M_2$ обозначает операцию связной суммы многообразий M_1 и M_2. Классы комплексных кобордизмов гиперповерхностей Ферма $[M_d^2]$ и $[M_d^3]$ выражены при помощи классов проективных пространств и гладких тета-дивизоров. Из разложения по тета-дивизорам получены делимости этих классов на целые числа.

В работе [BV24] была получена формула, согласно которой каждое стабильно комплексное многообразие M^{2n} единственным образом представляется в кольце $\Omega_{\mathrm{U}} \otimes \mathbb{Q}$ в виде многочлена по неособым неприводимым алгебраическим многообразиям Θ_j (комплексной размерности j) — тета-дивизорам общих главно поляризованных абелевых многообразий $\mathcal{A}^{j+1}$:

$$[M^{2n}] = \sum_{\lambda \vdash n} c_\lambda(\nu M^{2n}) \frac{[\Theta_\lambda]}{(\lambda+1)!},$$

где $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_k)$, $\lambda \vdash n$ — разбиение числа n, $(\lambda+1)! = (\lambda_1+1)!\ldots(\lambda_k+1)!$, $\Theta_\lambda = \Theta_{\lambda_1} \times \ldots \times \Theta_{\lambda_k}$ и $c_\lambda(\nu M^{2n})$ — симметрическое мономиальное характеристическое число стабильного нормального расслоения νM^{2n} многообразия M^{2n}.

Мы приводим общую формулу, выражающую классы гиперповерхностей Ферма в кольце Ω_{U} через классы тета-дивизоров (см. Теорему 2.4.22). Возникающие при этом многочлены связаны с комбинаторикой ассоциаэдров. Наш результат обобщает результат работы [BV26, Theorem 1.1], в которой классы комплексных проективных пространств были выражены через тета-дивизоры.

Класс формальных групп (0.0.2) содержит формальные группы, соответствующие роду Тодда, сигнатуре, роду Ошанина (также называемому эллиптическим) [Och87] и роду Кричевера. В [Бух90] было доказано, что класс формальных групп $\mathcal{F}(u,v)$, является реализацией класса формальных групп Кричевера (см. [Кри90]) с экспонентой

$$f_{\mathrm{Kr}}(x) = \frac{e^{\alpha x}}{\Phi(x,z)}, \quad \text{где} \quad \Phi(x,z) = \Phi(x,z;g_2,g_3) = \frac{\sigma(z-x)}{\sigma(z)\sigma(x)} e^{\zeta(z)x} \qquad (0.0.6)$$

— функцией Бейкера–Ахиезера, а $\sigma(z) = \sigma(z;g_2,g_3)$, $\zeta(z) = \frac{d}{dz}\log\sigma(z)$ — функциями Вейерштрасса (см., например, [Lan87], [WW96]).

В Теореме 3.3.1 вводится новый класс формальных групп

$$F_{\mathrm{Bc}}(u,v)=\left[\left(\frac{u\sqrt{Q(v)}-v\sqrt{Q(u)}}{u^2-v^2}\right)^2+a_3u^2v^2\right]^{-1/2}, \tag{0.0.7}$$

где $Q(t)=1-a_1t^2+a_2t^4-a_3t^6$, квадрат модуля которых задаётся семейством многочленов (0.0.1). Закон формальной группы $F_{\mathrm{Bc}}(u,v)$ принадлежит семейству законов формальных групп (0.0.2) тогда и только тогда, когда $a_3=0$. В случае $a_3=0$ мы получаем род Ошанина. Следовательно, при $a_3\neq 0$ соответствующий род отличен от эллиптических родов уровня n, введённых Хирцебрухом (см. [HBJ92, приложение III, раздел 1]).

Таким образом, формальная группа (0.0.7) определяет род Хирцебруха Bc, называемый *родом Бухштабера*. В качестве приложений мы вычисляем его значения на гладких тета-дивизорах и комплексных проективных пространствах. Оказывается, значения $\mathrm{Bc}(\Theta_n)$ принадлежат кольцу $\mathbb{Z}[a_1,a_2,a_3]$, см. Теорему 3.2.4. В Предложениях 3.2.9 и 3.2.12 мы сравниваем роды Бухштабера, Ошанина, Кричевера и Виттена.

Обобщенные теории когомологий, соответствующие роду Ошанина и его локализациям, были рассмотрены в статье [LRS95]. Поскольку род Бухштабера является деформацией рода Ошанина, наши результаты развивают результаты данной статьи. Теорема 3.3.1 говорит о том, что существует комплексно ориентируемая мультипликативная теория когомологий Buc^*, такая, что отображение ориентации $\mathrm{U}^*\to\mathrm{Buc}^*$ индуцирует на кольцах коэффициентов отображение $\mathrm{U}^*(\mathrm{pt})\to\mathrm{Buc}^*(\mathrm{pt})$, совпадающее с родом Бухштабера $\mathrm{Bc}:\Omega_{\mathrm{U}}\to\mathbb{Z}\left[\frac{1}{2},a_1,a_2,a_3\right]$. Согласно Теореме 3.3.2 теория когомологий $\mathrm{U}^*(\cdot)\otimes_{\Omega_{\mathrm{U}}}\mathbb{Z}\left[\frac{1}{2},a_1,a_2,a_3,\Delta^{-1}\right]$ точна по Ландвеберу и естественное преобразование

$$\mathrm{U}^*(\cdot)\otimes_{\Omega_{\mathrm{U}}}\mathbb{Z}\left[\frac{1}{2},a_1,a_2,a_3,\Delta^{-1}\right]\to\mathrm{Buc}^*(\cdot)[\Delta^{-1}]$$

является изоморфизмом.

Проблема жесткости эквивариантных родов Хирцебруха исследовалась рядом авторов, включая Ошанина, Кричевера и Хирцебруха (см., например, [Och87; Кри90; HBJ92]). В работе [BPR10] введено понятие универсального эквивариантного торического рода. Данное понятие мотивирует вопросы по исследованию классов многообразий, для которых эквивариантный род $\mathrm{Bc}^{\mathbb{T}^k}$

является жестким. В настоящей диссертации мы вводим понятие эквивариантного рода Бухштабера. Это открывает направление изучения эквивариантного рода Бухштабера, в том числе вопросы о классах многообразий, для которых род Bc принимает целые значения — на таких классах многообразий потенциально могут существовать интересные геометрические структуры, что подсказывается теорией Атьи–Зингера. В Предложении 3.4.5 для каждого нечетного рода Хирцебруха $\mathscr{G} : \Omega_{\mathrm{U}} \to R$ (где $R \otimes \mathbb{Q} \neq 0$) приводится пример действия ρ тора $\mathbb{T}^k$ на $\mathbb{C}P^n$ (где n нечетно), такого, что $\mathbb{T}^k$- эквивариантный род $\mathscr{G}^{\mathbb{T}^k}(\mathbb{C}P^n, \rho)$ равен нулю и, следовательно, род $\mathscr{G}^{\mathbb{T}^k}$ является $\mathbb{T}^k$-жестким на многообразии $\mathbb{C}P^n$ с действием (3.4.6). В Примере 3.4.8 приводится действие $\widetilde{\rho}$ окружности $\mathbb{S}^1$ на $\mathbb{C}P^3$, такое, что $\mathrm{Bc}^{\mathbb{S}^1}(\mathbb{C}P^3, \widetilde{\rho}) = \frac{15}{2} a_3 t^2 + O(t^5)$. Откуда $\mathrm{Bc}^{\mathbb{S}^1}(\mathbb{C}P^3, \widetilde{\rho}) \neq 0$, если $a_3 \neq 0$. При $a_3 = 0$ род Bc совпадает с родом Кричевера, и в этом случае $\mathrm{Bc}^{\mathbb{S}^1}(\mathbb{C}P^3, \widetilde{\rho}) = 0$. Это согласуется с классическим результатом Хирцебруха [HBJ92, Section 4.6, Proposition].

Хорошо известен естественный вопрос о классификации n-значных моноидов и групп порядка 3 с точностью до изоморфизма. В статье [БВЕП96] введено понятие инволютивных n-значных групп (у нас они называются ★-инволютивными, см. Определение 4.1.17). Показано, что их можно отождествить с комбинаторными алгебрами и построена некоторая серия (4.1.22) ★-инволютивных групп на трёх точках. Классификация всех косетных n- значных групп порядка 3 была завершена в работах [Пон24; GPV25] на основе классификации всех (однозначных) конечных групп перестановок ранга 3 (см. список литературы там же).

Мы вводим понятие нереверсивной n-значной группы (Определение 4.1.12). Оказывается, что в существующей литературе до настоящего времени явные конструкции нереверсивных групп были неизвестны. Как заметил В. М. Бухштабер, в работе [BB12, с. 246] продемонстрирован некорректный пример нереверсивной двузначной группы. Автором была найдена серия нереверсивных n-значных групп порядка 3 для всех $n \geqslant 3$ (Пример 4.1.15).

Одним из основных результатов данной диссертации является полная классификация n- значных моноидов и групп порядка 3 (см. Теорему 4.1.4), а также ее важные следствия, возникающие из сопоставления с результатами работы [GPV25]. Это приводит к ответам на вопросы о соотношении известных в настоящее время разных классов n-значных групп. Следствие 4.1.7 дает

классический результат [Pin14; OEI00] о классификации однозначных моноидов порядка 3, согласно которому имеется ровно 7 моноидов порядка 3 с точностью до изоморфизма. Следствие 4.1.9 показывает, что имеется лишь две серии n-значных групп того же порядка. Согласно Следствию 4.1.10, каждый некоммутативный n-значный моноид порядка 3 изоморфен одному из двух некоммутативных однозначных моноидов с таблицами умножения:

$$\begin{array}{ll} 1*1=1, & 1*1=1, \\ 1*2=1, & 1*2=2, \\ 2*1=2, & 2*1=1, \\ 2*2=2. & 2*2=2. \end{array} \tag{0.0.8}$$

По Следствию 4.1.16 имеется лишь одно семейство нереверсивных n-значных групп порядка 3. В Примере 4.1.15 в явном виде представлено семейство нереверсивных групп $\mathbb{X}_n$ порядка 3. В Следствии 4.1.20 завершена классификация всех $\bigstar$-инволютивных групп порядка 3, начатая в работе [GPV25].

Таким образом, из результатов настоящей работы получается правая стрелка в следующей диаграмме всевозможных строгих вложений n-значных групп любых порядков:

$$\begin{array}{ccccc} \text{коммутативные} & & & & \\ \text{инволютивные} & \hookrightarrow & \bigstar\text{-инволютивные} & \hookrightarrow & \text{реверсивные} \\ & & \uparrow & & \\ & & \text{косетные} & & \end{array} \tag{0.0.9}$$

В работе В. М. Бухштабера и А. П. Веселова [BV96] было введено определение интегрируемости многозначных динамик в терминах представлений n-значных групп и построен важный пример интегрируемой динамики. В последующей работе А. А. Гайфуллина и П. В. Ягодовского [ГЯ07] указаны условия, когда n-значная динамика задается представлением циклической n-значной группы, т. е. является интегрируемой. Важной характеристикой динамики дискретного времени является ее функция роста. Как уже отмечалось, в работе М. А. Чиркова [Чир24] исследована функция роста n-значной динамики группы $\mathbb{G}_n(\mathbb{C})$.

Мы получаем точные и асимптотические формулы для функций роста n-значных косетных групп

$$\mathbb{G}_{\varphi_s}\left(\langle a_1, \ldots, a_s \mid a_1^2 = \ldots = a_s^2 = 1\rangle\right) \quad \text{и} \quad \mathbb{G}_{\psi_m}(\langle a, b \mid a^m = b^m = 1\rangle),$$

где φ_s и ψ_m — автоморфизмы, циклически переставляющие образующие копредставлений групп в каждом случае (Предложения 4.2.9 и 4.2.15). Данная проблема удивительным образом оказывается связанной с n-боначчиевыми числами. Мы используем результат работы [DD14], чтобы получить асимптотику функции роста.

Группы

$$\langle a_1, \ldots, a_s \mid a_1^2 = \ldots = a_s^2 = 1\rangle \quad \text{и} \quad \langle a, b \mid a^m = b^m = 1\rangle$$

являются примерами циклически представленных групп. Еще одним известным примером циклически представленных групп являются группы Фибоначчи. В статье [БВ24] введен широкий класс циклических n-значных групп, возникающих косетной конструкцией из групп с циклическим представлением (см. [БВ24, Определение 1.8]) и автоморфизма циклической перестановки образующих. В той же работе построено действие циклических n-значных групп этого класса на $\mathbb{R}^3$ с пространством орбит, гомеоморфным $\mathbb{S}^3$. Показано, что проекции $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{S}^3$ на пространство орбит связаны коммутативными диаграммами с циклически разветвленными вдоль гиперболического узла накрытиями сферы $\mathbb{S}^3$ трехмерными компактными гиперболическими многообразиями.

Для n-значных групп имеется естественное определение декартова произведения (см. Определение 4.3.1). Рассматривая левое действие группы $\mathbb{G}_n^m(\mathbb{C})$ на группе $\mathbb{G}_n(\mathbb{C})$, мы приходим к динамической интерпретации многочленов $p_n(z; x_1, \ldots, x_m)$ в Теореме 4.3.10.

Структура диссертации. Глава 1 посвящена результатам об n-значных n-алгебраических группах и основана на статье [БК26] и препринтах [ВК25a; ВК25b]. Более точно, в Разделе 1.1 приводятся основные понятия общей теории n-значных групп. В Разделе 1.2 приводятся основные конструкции, примеры и свойства алгебраических n-значных моноидов и групп. Содержание Раздела 1.3 посвящено результатам по n-значным законам, соответствующим

кубическим кривым. Раздел 1.4 посвящен симметрическим n-алгебраическим n-значным группам и их классификациям при $n = 2$ и 3. В Разделе 1.5 мы напоминаем необходимые конструкции из линейной алгебры. В Разделе 1.6 приводятся детерминантные формы многозначных законов умножения $p_n(z; x, y)$ и $p_{n,m}(z; \boldsymbol{x})$ при помощи сумм Кронекера сопровождающих матриц Фробениуса. В Разделе 1.7 устанавливается связь многозначных законов умножения $p_n(z; x, y)$ с классическими матрицами Вендта и приводится результат о делимости коэффициентов разности $p_n(z; x, y) - (z + x + y)^n$ n-значных законов умножения (закона $p_n(z; x, y)$ и диагонального закона $(z + x + y)^n$) на n^4 при простых $n \geq 5$.

Глава 2 посвящена результатам о связи алгебраических n- значных моноидов с проективной двойственностью и гиперповерхностями Ферма. В главу вошли результаты статьи [БК26]. В Разделе 2.1 показывается, что при проективной двойственности кривая Ферма $\{x^n + y^n = z^n\}$ переходит в кривую $\{p_{n-1}(z^n; x^n, y^n) = 0\}$, а также что структура алгебраической n-значной косетной группы $\mathbb{G}_n(\mathbb{C})$ продолжается (лишь) до структуры алгебраического n-значного моноида $\mathbb{M}_n(\mathbb{C}P^1)$ на $\mathbb{C}P^1$. В этом же разделе показывается, что композиция проективной двойственности с последующим преобразованием Мёбиуса задает сдвиг в семействе многозначных алгебраических структур. В Разделе 2.2 освещается связь законов $p_n(z; x, y)$ и дискриминантов расширений полей. Раздел 2.3 посвящен предварительным сведениям о геометрии и топологии гиперповерхностей Ферма. В Разделе 2.4 приводятся результаты по теории кобордизмов гиперповерхностей Ферма в контексте проблемы Милнора–Хирцебруха. Более подробно, в Разделе 2.4.1 получены результаты о сравнении классов кобордизмов $[M_d^2]$ с классами, возникающими из классификационной теоремы Фридмана при использовании наивного равенства $[M_1 \# M_2] = [M_1] + [M_2]$. В Разделе 2.4.2 мы приводим общую формулу, выражающую классы гиперповерхностей Ферма в кольце Ω_U через классы тета-дивизоров в терминах комбинаторики ассоциаэдров.

В Главе 3 вводится и исследуется род Бухштабера и строится сопутствующая ему обобщенная теория когомологий. В данную главу вошли результаты статьи [Kor26]. В Разделе 3.1 мы напоминаем основы теории двузначных формальных групп. В Разделе 3.2 мы вводим род и формальную группу Бухштабера и исследуем их свойства целочисленности. В Разделе 3.3 строится обобщен-

ная теория когомологий, соответствующая роду Бухштабера. В Разделе 3.4 рассматривается эквивариантный род Бухштабера $\mathrm{Bc}^{\mathbb{T}^k}$ для касательно стабильно комплексных $\mathbb{T}^k$-многообразий.

Глава 4 посвящена классификации n-значных моноидов и групп порядка 3, а также вопросам роста n-значных динамик. Данная глава основана на результатах статей [Kor24; Kor26] и препринта [BK25a]. В Разделе 4.1 приводится классификация n-значных моноидов и групп порядка 3 и ее важные следствия. В Разделе 4.2 мы получаем точные и асимптотические формулы для функций роста классов n-значных циклических косетных групп. Раздел 4.3 посвящен динамическим свойствам группы $\mathbb{G}_n^m(\mathbb{C})$.

Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения и списка литературы из 105 наименований.

Цели и задачи работы. Цель диссертации — развить теорию алгебраических n-значных групп и моноидов и получить ее приложения в задачах алгебраической топологии, алгебраической геометрии, теории чисел и математической физики. Это привело к следующим задачам:

1. Классифицировать симметрические n-алгебраические n-значные группы при $n = 2$ и 3.

2. Классифицировать и представить явные формулы двух-, трех-, четырех- и шестизначных общих законов сложения на $\mathbb{C}P^1$, определяемых эллиптическими кривыми и их автоморфизмами.

3. Описать алгебраические двузначные структуры на $\mathbb{C}P^1$ в случае вырожденных кубик.

4. Получить матричные формулы для известных законов сложения $p_n(z; x, y)$ и найти их приложения.

5. Установить и обосновать связь между семейством $\{\mathbb{G}_n(\mathbb{C}P^1)\}$ алгебраических n-значных косетных моноидов на $\mathbb{C}P^1$, гиперповерхностями Ферма и проективной двойственностью.

6. Описать классы комплексных кобордизмов гиперповерхностей Ферма в терминах классов тета-дивизоров Θ_n общих главно поляризованных абелевых многообразий.

7. Найти явный пример формальной группы, отличной от формальной группы Бухштабера–Кричевера, конструкция квадрата модуля которой дает семейство многочленов Бухштабера.

8. Классифицировать n-значные моноиды и группы порядка 3.

9. Получить результаты об n-значных динамиках, определяемых косетными конструкциями известных серий групп с циклическим представлением.

Основные результаты диссертации.

1. **Теорема 2.1.11** [БК26]**.** Структура алгебраической n-значной косетной группы $\mathbb{G}_n(\mathbb{C})$ продолжается (лишь) до структуры алгебраического n-значного косетного моноида $\mathbb{M}_n(\mathbb{C}P^1)$ на $\mathbb{C}P^1$. При этом $\infty * x = x * \infty = [\infty, \infty, \dots, \infty]$ для любого $x \in \mathbb{C}P^1 \backslash \{\infty\}$ и значение $\infty * \infty$ не определено.

2. **Теорема 2.1.14** [БК26]**.** При проективной двойственности кривая

$$X_n = \{\, p_n(z; x, y) = 0 \,\} \subset \mathbb{C}P^2, \ (n \geq 2)$$

переходит в кривую

$$X_n^\vee = \{\, (uvw)^{n-1} p_{n-1}(1/w; 1/u, 1/v) = 0 \,\} \subset (\mathbb{C}P^2)^*.$$

Композиция двойственности $X_n \mapsto X_n^\vee$ с последующим преобразованием Мёбиуса $(u, v, w) \mapsto (1/u, 1/v, 1/w)$ задает операцию сдвига

$$\mathbb{M}_n(\mathbb{C}P^1) \mapsto \mathbb{M}_{n-1}(\mathbb{C}P^1)$$

в семействе алгебраических n-значных моноидов.

3. **Теорема 3.2.1** [Kor26]**.**

(i) Пусть

$$u := I(x) = \int_0^{\sqrt{x}} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1+a_1t^2+a_2t^4+a_3t^6}}, \qquad (0.0.10)$$
$$g_2 = 4\left(\frac{a_1^2}{3} - a_2\right), \qquad g_3 = 4\left(\frac{a_1a_2}{3} - \frac{2a_1^3}{27} - a_3\right).$$

Тогда

$$x(u) = \frac{1}{\wp(u; g_2, g_3) - a_1/3}.$$

(Если $g_2^3 - 27g_3^2 = 0$, то функция $\wp(u; g_2, g_3) = -\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}u^2}\log\sigma(u; g_2, g_3)$ соответствует вырождению σ-функции Вейерштрасса).

(ii) Логарифм и экспонента формальной двузначной группы $\mathbb{G}_{\boldsymbol{a}}$ с двузначным законом (0.0.1) задаются следующими формальными рядами над алгеброй $\mathbb{Q}[a_1, a_2, a_3]$:

$$B(x) = I^2(x) = \left(\int_0^{\sqrt{x}} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1+a_1t^2+a_2t^4+a_3t^6}}\right)^2,$$
$$B^{-1}(x) = \frac{1}{\wp(\sqrt{x}; g_2, g_3) - a_1/3}.$$

(iii) Пусть $Q(t) := 1 - a_1t^2 + a_2t^4 - a_3t^6$. Тогда закон $F_{\text{Bc}}(u, v)$, его экспонента $f_{\text{Bc}}(u)$ и его логарифм $g_{\text{Bc}}(u)$ имеют вид:

$$F_{\text{Bc}}(u, v) = \left[\left(\frac{u\sqrt{Q(v)} - v\sqrt{Q(u)}}{u^2 - v^2}\right)^2 + a_3u^2v^2\right]^{-1/2}, \qquad (0.0.11)$$

$$f_{\text{Bc}}(u) = \frac{1}{\sqrt{\wp(u; g_2, -g_3) + \frac{a_1}{3}}}, \qquad g_{\text{Bc}}(u) = \int_0^u \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1 - a_1t^2 + a_2t^4 - a_3t^6}}.$$

(iv) Формальная группа $F_{\text{Bc}}(u, v)$ универсальна в классе всех однозначных формальных групп (над $\mathbb{Q}$-алгебрами без делителей нуля) с условием $\overline{u} = -u$, для которых конструкция квадрата модуля даёт двузначную формальную группу $\mathbb{G}_{\boldsymbol{a}}$ с двузначным законом (0.0.1).

(v) Пересечение классов $\mathcal{F}(u,v)$ (см. (0.0.2)) и $F_{\mathrm{Bc}}(u,v)$ совпадает с родом Ошанина. Это характеризуется условиями $\lambda_1(u)\equiv 1$ для $\mathcal{F}(u,v)$ и $a_3=0$ для $F_{\mathrm{Bc}}(u,v)$.

(vi) Формальная группа $F_{\mathrm{Bc}}(u,v)$ соответствует роду Хирцебруха

$$\mathrm{Bc}:\Omega_{\mathrm{U}}\to\mathbb{Z}\left[\frac{1}{2},a_1,a_2,a_3\right],$$

который мы называем родом Бухштабера, где $\deg a_i=-4i,\ i=1,\dots,3$.

4. **Теорема 3.2.4** [Kor26]. Значения $\mathrm{Bc}(\Theta_n)$ принадлежат кольцу $\mathbb{Z}[a_1,a_2,\,a_3]$, где Θ_n обозначает тета-дивизор общего главно поляризованного абелева многообразия.

5. **Теорема 4.1.4** [Kor26]. Пусть $X=\{e,x_1,x_2\}$ и

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}^{\circledast 2}=\begin{pmatrix}x_1*x_1\\x_1*x_2\\x_2*x_1\\x_2*x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_0&a_1&a_2\\b_0&b_1&b_2\\d_0&d_1&d_2\\c_0&c_1&c_2\end{pmatrix}\mathfrak{X}=B\,\mathfrak{X}\,. \tag{0.0.12}$$

Тогда каждый n-значный моноид на множестве X представляется одной из следующих матриц $B=B_j$ при условии, что дробные выражения являются целыми неотрицательными числами:

$$B_1=\begin{pmatrix}a_0&n-a_0&0\\0&0&n\\0&0&n\\c_0&\frac{c_0n}{a_0}&n-c_0-\frac{c_0n}{a_0}\end{pmatrix},$$

$$B_2=\begin{pmatrix}a_0&a_1&n-a_0-a_1\\b_0&b_1&n-b_0-b_1\\b_0&b_1&n-b_0-b_1\\\frac{b_0(n-b_0-b_1)+a_0b_1-a_1b_0}{n-a_0-a_1}&\frac{(b_0+b_1)(n-b_1)}{n-a_0-a_1}&\frac{(n-b_0-b_1)^2+n(b_1-a_0-a_1)+a_1b_0-a_0b_1}{n-a_0-a_1}\end{pmatrix},$$

$$B_3 = \begin{pmatrix} 0 & n & 0 \\ 0 & n & 0 \\ 0 & n & 0 \\ c_0 & c_1 & n-c_0-c_1 \end{pmatrix},\ B_4 = \begin{pmatrix} 0 & n & 0 \\ 0 & 0 & n \\ 0 & 0 & n \\ 0 & c_1 & n-c_1 \end{pmatrix},$$

$$B_5 = \begin{pmatrix} 0 & n & 0 \\ 0 & n & 0 \\ 0 & 0 & n \\ 0 & 0 & n \end{pmatrix},\ B_6 = \begin{pmatrix} 0 & n & 0 \\ 0 & 0 & n \\ 0 & n & 0 \\ 0 & 0 & n \end{pmatrix}.$$

Два моноида, соответствующие сериям B_i и B_j (i и j необязательно различны) изоморфны тогда и только тогда, когда матрица B_i пропорциональна матрице B_j, либо матрице $\varphi(B_j)$, где $\varphi : X \to X$ — изоморфизм моноидов, для которого $\varphi(x_1) = x_2$. Каждая матрица B_j с целыми неотрицательными элементами задает некоторый n-значный моноид порядка 3.

Положения, выносимые на защиту.

1. Описаны структуры двузначных алгебраических моноидов на $\mathbb{C}P^1$ в случае вырожденных кубик.

2. Установлена связь теории алгебраических n-значных моноидов и групп на $\mathbb{C}P^1$ с теорией дискриминантов и проективной двойственности.

3. В аппарате алгебраической топологии введен новый род Хирцебруха Bc. В явном виде представлена соответствующая формальная группа $F_{\mathrm{Bc}}(u, v)$ над кольцом $\mathbb{Z}\left[\frac{1}{2}, a_1, a_2, a_3\right]$. Показано, что формальная группа $F_{\mathrm{Bc}}(u, v)$ универсальна в классе всех однозначных формальных групп (над $\mathbb{Q}$-алгебрами без делителей нуля) с условием $\overline{u} = -u$, для которых конструкция квадрата модуля даёт двузначную формальную группу $\mathbb{G}_{\boldsymbol{a}}$ с двузначным законом (0.0.1).

4. Получен результат по классической топологической проблеме о целочисленных родах Хирцебруха. Род Bc задается рядом над кольцом $\mathbb{Q}[a_1, a_2, a_3]$, а на любом стабильно комплексном многообразии род Bc принимает значения в кольце $\mathbb{Z}\left[\frac{1}{2}, a_1, a_2, a_3\right]$. Показано, что род Bc на тета-дивизорах общих главно поляризованных абелевых многообразий принимает значения

в кольце $\mathbb{Z}[a_1, a_2, a_3]$, а на комплексных проективных пространствах — в кольце $\mathbb{Z}\left[\frac{1}{2}, a_1, a_2, a_3\right]$.

5. Получена классификация n-значных моноидов и групп, завершающая исследования ряда авторов по проблеме n-значных групп порядка 3.

Научная новизна. Все результаты, выносимые на защиту, являются новыми. Все результаты диссертации, опубликованные в совместных работах, принадлежат автору.

Методы исследования. В работе используются методы теории n-значных групп, теории n-значных формальных групп, теории характеристических классов векторных расслоений, теории комплексных многообразий, теории расширений полей.

Теоретическая и практическая ценность работы. Работа носит теоретический характер. Результаты диссертации могут найти применение в алгебраической топологии, алгебраической геометрии, алгебраической теории чисел, теории групп и динамических системах.

Соответствие паспорту научной специальности. Тематика диссертации соответствует паспорту научной специальности 1.1.3 «Геометрия и топология». В работе рассматриваются геометрические свойства эллиптических кривых в рамках теории n-значных групп, структуры двузначных формальных групп из теории характеристических классов векторных расслоений, структуры обобщенных теорий когомологий, а также конструкции теории n-значных динамик. Это соответствует предметной области по следующим направлениям исследований: алгебраическая геометрия (топологические аспекты), алгебраическая топология, топология многообразий, геометрия и топология действий групп, а также геометрия и топология в теоретической и математической физике.

Достоверность результатов и апробация работы. Результаты работы снабжены строгими доказательствами. Основные результаты диссертации представлены на следующих научных конференциях и семинарах.

Доклады на конференциях:

1. «Род Бухштабера и формальные группы», конференция «Алгебраическая топология, действия групп и комбинаторика», 12 мая 2026 г., Международный математический центр «Сириус», ФТ «Сириус», Россия.

2. «n-значные группы, суммы Кронекера и матрицы Вендта», V конференция математических центров России, 15 августа 2025 г., Сибирский федеральный университет, г. Красноярск, Россия.

3. «Dynamics and multivalued groups», конференция «Молодежный забег МЦМУ МИАН», 13 марта 2023 г., Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, Москва, Россия.

Доклады на семинарах:

1. «Род Бухштабера и формальные группы», семинар «Торическая топология, комбинаторика и теория гомотопий», совместный семинар лаборатории топологии и сложных сетей факультета математики и лаборатории алгебраической топологии и ее приложений факультета компьютерных наук НИУ ВШЭ, НМУ, 4 мая 2026 г., Москва, Россия.

2. «Гиперповерхности Ферма, проективная двойственность и алгебраические n-значные моноиды», семинар «Алгебраическая топология и ее приложения. Семинар им. М. М. Постникова», механико-математический факультет МГУ им. М. В. Ломоносова, 17 декабря 2025 г., Москва, Россия.

3. «Дискретные и алгебраические n-значные группы», научно- исследовательский семинар по дискретной геометрии и геометрии чисел, механико- математический факультет МГУ им. М. В. Ломоносова, 3 декабря 2025 г., Москва, Россия.

4. «n-значные алгебраические моноиды, кубики и дискриминанты», семинар лаборатории алгебраической топологии и ее приложений факультета компьютерных наук, НИУ ВШЭ, 21 ноября 2025 г., Москва, Россия.

5. «n-значные группы, суммы Кронекера и матрицы Вендта» (совместный доклад с В. М. Бухштабером), семинар отдела геометрии и топологии МИАН

и кафедры высшей геометрии и топологии механико-математического факультета МГУ «Геометрия, топология и математическая физика» (семинар С. П. Новикова), 20 мая 2025 г., Москва, Россия.

Публикации по теме диссертации. Основные результаты диссертации опубликованы в трех работах автора (первая из которых в соавторстве) в рецензируемых научных журналах: [БК26; Kop26; Kor26]. В работе [БК26] автору диссертации принадлежит решающая роль в полученных результатах.

Благодарности. Автор выражает искреннюю благодарность своему дорогому научному руководителю Виктору Матвеевичу Бухштаберу за постановки задач, ценные советы, полезные обсуждения и замечания. Автор благодарит Владимира Николаевича Рубцова, Александра Александровича Гайфуллина и Федора Юрьевича Попеленского за полезные обсуждения и внимание к работе. Автор сердечно благодарит своих любимых родителей, Елену Анатольевну Корневу и Игоря Михайловича Корнева за теплоту и постоянную поддержку. Автор выражает благодарность всем своим друзьям за поддержку и замечательно проведенное вместе время.

Глава 1
Симметрические n-алгебраические n-значные группы

1.1 Основные понятия теории n-значных групп

Дадим в данном разделе некоторые определения и примеры, следуя [Buc06].

Определение 1.1.1. *n-значным умножением* на множестве X называется отображение

$$\mu : X \times X \to \mathrm{Sym}^n(X) \,:\, \mu(x,y) = x * y,$$

где $\mathrm{Sym}^n(X) := X^n/\Sigma_n$ — n-я симметрическая степень множества X (т.е. множество, состоящее из мультимножеств $[z_1,\ldots,z_n]$), удовлетворяющее условию ассоциативности: n^2-мультимножества

$$[x * w \mid w \in y * z],$$
$$[w * z \mid w \in x * y]$$

совпадают. Множество X с n-значным умножением μ называется *n-значным моноидом*, если существует элемент $e \in X$, для которого $e*x = x*e = [x,x,\ldots,x]$ для любого $x \in X$. n-значный моноид X называется *n-значной группой*, если имеется отображение $\mathrm{inv}\colon X \to X$ со свойствами

$$e \in \mathrm{inv}(x) * x,\ e \in x * \mathrm{inv}(x)$$

для любого $x \in X$.

Пример 1.1.2. Всякая 1-значная группа G является обычной группой.

Пример 1.1.3. На множестве $\mathbb{C}$ комплексных чисел имеется структура n-значной группы $\mathbb{G}_n(\mathbb{C})$. Рассмотрим операцию $* : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathrm{Sym}^n(\mathbb{C})$, сопоставляющую каждым двум комплексным числам x и y мультимножество

$$x * y = [(\sqrt[n]{x} + \varepsilon^r \sqrt[n]{y})^n \mid r = 1, \ldots, n] \tag{1.1.4}$$

из n комплексных чисел, где ε — какой-нибудь первообразный корень степени n из единицы и под $\sqrt[n]{\cdot}$ понимается некоторая фиксированная ветвь корня. Операция $*$, единица 0 и обратный $\mathrm{inv}(x) = (-1)^n x$ доставляют структуру n-значной группы на множестве комплексных чисел $\mathbb{C}$.

В §1.4 будут рассмотрены примеры n-алгебраических n-значных групп. За множеством других примеров отсылаем читателя к списку цитированной литературы.

Определение 1.1.5. n-значная группа (моноид) на множестве X называется *коммутативной*, если $x_1 * x_2 = x_2 * x_1$ для всех $x_1, x_2 \in X$.

Определение 1.1.6. Отображение $f : X \to Y$ между n-значными группами называется *гомоморфизмом*, если

- $f(e_X) = e_Y$.
- $f(\mathrm{inv}_X(x)) = \mathrm{inv}_Y(f(x))$ для любого $x \in X$.
- $\mu_Y(f(x), f(y)) = (f)^n \mu_X(x, y)$ для любых $x, y \in X$.

  Т.е. следующая диаграмма коммутативна:

$$\begin{array}{ccc} X \times X & \xrightarrow{\mu_X} & \mathrm{Sym}^n(X) \\ {\scriptstyle f \times f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{Sym}^n(f)} \\ Y \times Y & \longrightarrow & \mathrm{Sym}^n(Y) \end{array}$$

  Биективный гомоморфизм n-значных групп называется *n-изоморфизмом*.

Таким образом, класс n-значных групп образует категорию $n\mathscr{G}\mathrm{p}$.

Имеется способ построения n-значных групп [Buc06], при котором для данной (1-значной) группы G с умножением μ_0, единицей e_G, и обратным $\mathrm{inv}_G(u) = u^{-1}$, и для данной конечной подгруппы H группы автоморфизмов $\mathrm{Aut}(G)$,

рассматривается множество орбит $X := G/H$ группы G по действию группы H с проекцией $\pi : G \to X$ и n-значным умножением

$$\mu : X \times X \to \mathrm{Sym}^n(X),$$

по формуле

$$\mu(x, y) = [\pi(\mu_0(u, h(v))) \mid h \in H] \tag{1.1.7}$$

где $u \in \pi^{-1}(x)$ и $v \in \pi^{-1}(y)$.

Обратим внимание на то, что неизоморфные пары (G_1, H_1) и (G_2, H_2) могут давать изоморфные n-значные группы [BR97, Proposition 3.2].

Предложение 1.1.8 (Косет-конструкция, [Buc06])**.** *Произведение μ из* (1.1.7) *определяет n-значное умножение на пространстве орбит $X = G/H$ с единицей $e_X = \pi(e_G)$ и обратным $\mathrm{inv}_X(x) = \pi(\mathrm{inv}_G(u))$, где $u \in \pi^{-1}(x)$.*

Определение 1.1.9. Для каждой группы G и подгруппы H порядка n группы $\mathrm{Aut}(G)$ назовем n-значную группу на множестве орбит G/H из Предложения 1.1.8 *косетной группой* или *косет-конструкцией*.

Отметим, что из аксиоматики n-значного умножения не следует единственность отображения обратного элемента. Но в случае косет-конструкции единственность обратного имеет место.

Определение 1.1.10. *n-значной динамикой T* на пространстве X называется отображение $T : X \to \mathrm{Sym}^n(X)$.

Можно представлять себе X как некоторое пространство состояний. Тогда n-значная динамика T определяет возможные состояния $T(x) = [x_1, \ldots, x_n]$ в момент времени $t + 1$ как функцию состояния элемента x в момент времени t.

Определение 1.1.11. *Действием n-значной группы G на пространстве X* называется отображение

$$\circ : G \times X \to \mathrm{Sym}^n(X),\ g \circ x = [x_1, \ldots, x_n],$$

такое, что

- для любых элементов g_1, $g_2 \in G$ и любого $x \in X$ следующие n^2- мультимножества совпадают:

$$g_1 * (g_2 \circ x) = [g_1 \circ x_1, ..., g_1 \circ x_n]$$

и

$$(g_1 * g_2) \circ x = [h_1 \circ x, ..., h_n \circ x],$$

где $g_2 \circ x = [x_1, ..., x_n]$ и $g_1 * g_2 = [h_1, ..., h_n]$,

- $e \circ x = [x, ..., x]$ для любого $x \in X$.

Пример 1.1.12. Всякая n-значная группа G действует на себе левыми сдвигами как и в случае однозначных групп. Как показано в недавней работе [Pos25], имеется сильно обратимая непрерывная динамика на $\mathbb{C}$, не задающаяся непрерывным действием никакой двузначной группы.

В [BV96] сформулировано условие интегрируемости n-значной динамики на пространстве X в терминах представления некоторой n-значной группы G на X. В работе [ГЯ07] получен достаточный признак интегрируемости многозначной динамики при помощи многозначной группы.

1.2 Алгебраические n-значные моноиды и группы

Для формулировки результатов данной работы напомним и введем некоторые определения и конструкции.

Определение 1.2.1. *Алгебраическим n-значным моноидом* называется алгебраическое многообразие X с ассоциативным n-значным умножением, определенным рациональным морфизмом $X \times X \to \mathrm{Sym}^n(X)$ с нейтральным элементом (единицей) $e \in X$, т.е. существуют $x * e$, $e * x$ и имеют место равенства: $x * e = e * x = [x, x, ..., x]$ при любом $x \in X$. *Алгебраической n-значной группой* называется алгебраический n-значный моноид на X с рациональным морфизмом обращения $\mathrm{inv} : X \to X$, для которого если существует $\mathrm{inv}(x)$, то выполнены условия: существуют $x * \mathrm{inv}(x)$, $\mathrm{inv}(x) * x$, и $e \in x * \mathrm{inv}(x)$, $e \in \mathrm{inv}(x) * x$.

Алгебраический n-значный моноид (или группа) на X называется *регулярным*, если n-значное умножение $X \times X \to \mathrm{Sym}^n(X)$ определено на всем многообразии $X \times X$ (и отображение inv определено всюду на X в случае группы).

Пример 1.2.2. На $\mathbb{C}P^1 = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ имеется структура 1-значного коммутативного алгебраического моноида Адамара $M_{\mathrm{mult}}(\mathbb{C}P^1)$ с нейтральным элементом $1 = [1 : 1]$ и умножением

$$(z_1 : z_0) \cdot (w_1 : w_0) = (z_1 w_1 : z_0 w_0),$$

определенным на $(\mathrm{Sym}^2 \mathbb{C}P^1) \setminus \{[0, \infty]\}$. Элемент $\infty = (1 : 0)$ является поглощающим в этом моноиде, т.е. $z * \infty = \infty$ для каждого $z \in \mathbb{C}P^1 \setminus \{0\}$. Элементы из $\mathbb{C}P^1 \setminus \{0, \infty\}$ и только они имеют обратный $\mathrm{inv}(z_1 : z_0) = (z_0 : z_1)$.

Пример 1.2.3. На $\mathbb{C}P^1 = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ также имеется структура $M_{\mathrm{cusp}}(\mathbb{C}P^1)$ 1- значного алгебраического коммутативного моноида с нейтральным элементом 0 и умножением

$$(z_1 : z_0) \cdot (w_1 : w_0) = (z_1 w_0 + z_0 w_1 : z_0 w_0),$$

определенным на $(\mathrm{Sym}^2 \mathbb{C}P^1) \setminus \{[\infty, \infty]\}$. Элементы из $\mathbb{C}P^1 \setminus \{\infty\}$ и только они имеют обратный $\mathrm{inv}(z_1 : z_0) = (-z_1 : z_0)$.

Определение 1.2.4. Два алгебраических (аналитических, топологических) n-значных моноида (группы) X и Y называются *изоморфными*, если существует изоморфизм (гомеоморфизм) $\varphi : X \to Y$, индуцирующий коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} X \times X & \longrightarrow & \mathrm{Sym}^n(X) \\ \cong \downarrow & & \downarrow \cong \\ Y \times Y & \longrightarrow & \mathrm{Sym}^n(Y) \end{array} \qquad (1.2.5)$$

При этом нейтральный элемент переходит в нейтральный (и отображение обратного в отображение обратного в случае групп).

Пример 1.2.6. Алгебраические 1-значные моноиды $M_{\mathrm{mult}}(\mathbb{C}P^1)$ и $M_{\mathrm{cusp}}(\mathbb{C}P^1)$ не изоморфны, поскольку в $M_{\mathrm{mult}}(\mathbb{C}P^1)$ имеются элементы конечного порядка.

Пример 1.2.7. Рассмотрим дискретную косетную группу из [Buc06, Section 4] на множестве $\mathbb{Z}_+$ целых неотрицательных чисел с единицей 0 и умножением

$$x_1 * x_2 = [x_1 + x_2, |x_1 - x_2|].$$

Сравним ее с косетной подгруппой $\mathbb{G}_2(\mathrm{Sqr}(\mathbb{Z})) \subset \mathbb{G}_2(\mathbb{C})$ (где $\mathrm{Sqr}(\mathbb{Z})$ обозначает множество квадратов целых чисел), которая имеет единицу 0 и умножение

$$y_1 * y_2 = [(\sqrt{y_1} + \sqrt{y_2})^2, (\sqrt{y_1} - \sqrt{y_2})^2]$$

для всех неотрицательных целых y_1 и y_2. Отображение $x \mapsto x^2$ возведения в квадрат является биекцией между соответствующими пространствами орбит и делает квадрат (1.2.5) коммутативным. Поэтому эти 2-значные группы изоморфны.

Определение 1.2.8. *Симметрический n-алгебраический n- значный моноид* (*группа*) *на* $\mathbb{C}$ — это алгебраический n-значный моноид (группа) $\mathbb{G}_{\mathbb{C}}(f(z;x,y))$, с (частично определенным) умножением

$$x * y = [z \mid f(z;x,y) = 0],$$

где многочлен $f(z;(-1)^n x,(-1)^n y)$ является симметрическим и имеет степень по каждой переменной, не превосходящую n.

Замечание. В данном определении не конкретизируется отображение inv и нейтральный элемент.

Пример 1.2.9. Пусть

$$\mathcal{B}_{\boldsymbol{a}}(z;x,y) = (x+y+z-a_2xyz)^2 - 4(1+a_3xyz)(xy+yz+xz+a_1xyz) \quad (1.2.10)$$

— многочлен Бухштабера. Или в элементарных симметрических функциях:

$$\mathcal{B}_{\boldsymbol{a}}(z;x,y) = e_1^2 - 4e_2 - 4a_1e_3 - 2a_2e_1e_3 - 4a_3e_2e_3 + (a_2^2 - 4a_1a_3)e_3^2.$$

Многочлены $\mathcal{B}_{\boldsymbol{a}}(z;x,y)$ задают на $\mathbb{C}$ структуру универсальной алгебраической

двузначной группы $\mathbb{G}_{\mathbb{C}}(\mathcal{B}_{\boldsymbol{a}})$ для любого $\boldsymbol{a} \in \mathbb{C}^3$ с умножением

$$x * y = [z \mid \mathcal{B}_{\boldsymbol{a}}(z; x, y) = 0],$$

нейтральным элементом 0 и отображением $\mathrm{inv}(x) = x$ [БВ19, Теорема 6.3]. Ниже нами будет получен данный результат методами компьютерной алгебры (см. Теорему 1.4.22 настоящей статьи).

Определение 1.2.11. Пусть M — однозначный моноид, H — некоторая подгруппа порядка n группы $\mathrm{Aut}(M)$ автоморфизмов. Назовем *косетным* n- значным моноидом $\mathbb{M}(H)$ результат применения конструкции из [Buc06, Theorem 1] к M и H.

Предложение 1.2.12. *Определение косетного моноида корректно.*

Доказательство. Пусть $\pi : M \to X = M/H$ — проекция на пространство орбит. Пусть $\pi(m_1) = x_1$ и $\pi(m_2) = x_2$. Тогда умножение устроено следующим образом:

$$\begin{aligned} x_1 * x_2 &= [\pi(\varphi(m_1) \cdot \psi(m_2)) \mid \varphi, \psi \in H] \\ &= [\pi\varphi(m_1 \cdot \varphi^{-1}\psi(m_2)) \mid \varphi, \psi \in H] \\ &= [\pi(m_1 \cdot \zeta(m_2)) \mid \zeta \in H]. \end{aligned}$$

Для ассоциативности имеем с одной стороны,

$$\begin{aligned} (x_1 * x_2) * x_3 &= [\pi(m_1 \cdot \varphi(m_2)) * x_3 \mid \varphi \in H] \\ &= [\pi(m_1 \cdot \varphi(m_2) \cdot \psi(m_3)) \mid \varphi, \psi \in H]. \end{aligned}$$

И с другой,

$$\begin{aligned} x_1 * (x_2 * x_3) &= [x_1 * \pi(m_2 \cdot \varphi(m_3)) \mid \varphi \in H] \\ &= [\pi(m_1 \cdot \psi(m_2 \cdot \varphi(m_3))) \mid \varphi, \psi \in H] \\ &= [\pi(m_1 \cdot \psi(m_2) \cdot \psi(\varphi(m_3))) \mid \varphi, \psi \in H] \end{aligned} .$$

Единицей является класс eH:

$$x * eH = eH * x = [m \cdot \varphi(e) \mid \varphi \in H] = [m, \ldots, m].$$

□

Пример 1.2.13 (Двузначный моноид Чебышева)**.** Рассмотрим на $M_{\mathrm{mult}}(\mathbb{C}P^1)$ (Пример 1.2.2) инволюцию $\tau : z \mapsto 1/z$ для каждого $z \in \mathbb{C}P^1$. Точки пространства орбит относительно инволюции τ представляются слоями разветвленного 2-листного накрытия

$$\begin{aligned} \pi : \mathbb{C}P^1 &\to \mathbb{C}P^1 \\ z &\mapsto \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right) \end{aligned} \tag{1.2.14}$$

с точками ветвления ± 1. Соответствующий косетный моноид $\mathbb{M}_{\mathrm{mult}}(\mathbb{C}P^1) := M_{\mathrm{mult}}(\mathbb{C}P^1)_{\langle\tau\rangle}$ имеет единицу 1 и умножение

$$x * y = \left[xy \pm \sqrt{(x^2-1)(y^2-1)}\right], \tag{1.2.15}$$

определенное на $(\mathrm{Sym}^2 \mathbb{C}P^1)\backslash\{[\infty,\infty]\}$. Описанная структура 2-значного алгебраического моноида не продолжается до структуры 2-значной алгебраической группы. Случай мультипликативного тора и автоморфизма $z \mapsto 1/z$ был рассмотрен в [Buc06, Section 7, Example 3]. Закон сложения задается корнями по z многочлена

$$P(z; x, y) = z^2 - 2xyz + x^2 + y^2 - 1.$$

В однородных координатах умножение $\mathbb{C}P^1 \times \mathbb{C}P^1 \to \mathrm{Sym}^2(\mathbb{C}P^1) \cong \mathbb{C}P^2$ записывается следующим образом:

$$(x_1 : x_0) * (y_1 : y_0) = (x_1^2 y_0^2 + y_1^2 x_0^2 - x_0^2 y_0^2 : -2x_1 y_1 x_0 y_0 : x_0^2 y_0^2).$$

При $x = \cos\alpha$, $y = \cos\beta$ умножение (1.2.15) принимает вид формул сложения для косинуса. Рассмотрим 2-значный подмоноид $\mathbb{T} = \mathbb{T}(\mathbb{C})$ моноида $\mathbb{M}_{\mathrm{mult}}(\mathbb{C}P^1)$, порожденный возведением в целые неотрицательные степени элемента $\cos\alpha$. Пусть $T_s = T_s(\cos\alpha) = \cos s\alpha$ — классические многочлены Чебышева первого рода ($s \geqslant 0$). Тогда

$$T_s * T_k = [T_{s+k}, T_{|s-k|}].$$

Алгебраический двузначный моноид $\mathbb{T}$ наделяется структурой косетной алгебраической двузначной инволютивной группы (т.е. отображение обратного определено однозначно и имеет вид: $\mathrm{inv}(x) = x$). Группа $\mathbb{T}$ изоморфна $\mathbb{G}_2(\mathbb{C})$ (см. Пример 1.2.7). По этой причине $\mathbb{M}_{\mathrm{mult}}(\mathbb{C}P^1)$ мы будем называть *двузначным моноидом Чебышева*.

Пример 1.2.16. Пусть

$$p_n(z;x,y)=\prod_{r,s=1}^{n}(\sqrt[n]{z}+\varepsilon^r\sqrt[n]{x}+\varepsilon^s\sqrt[n]{y}) \tag{1.2.17}$$

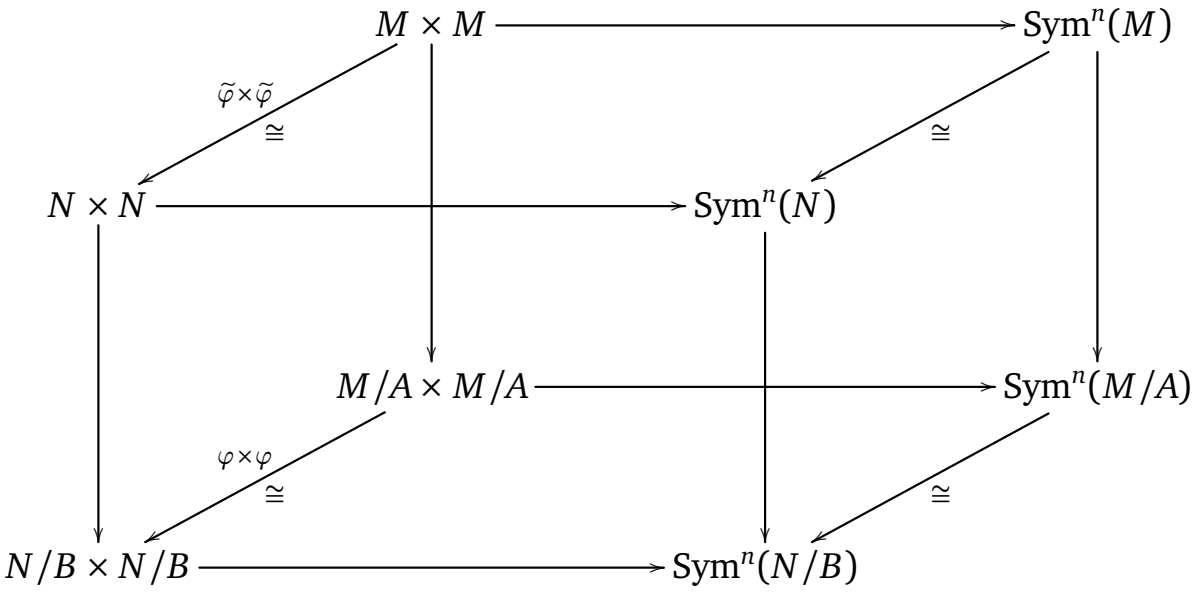
где ε — какой-нибудь первообразный корень n-й степени из единицы, а $\sqrt[n]{-}$ обозначает какую-нибудь комплексную ветвь корня (см. примеры явных видов многочленов в формулах (1.6.2)). Тогда многочлен

$$p_n(z;(-1)^n x,(-1)^n y)$$

задает коммутативную алгебраическую n-значную группу $\mathbb{G}_n(\mathbb{C})$ на $\mathbb{C}$ из Примера 1.1.3. Группа $\mathbb{G}_n(\mathbb{C})$ получается косетной конструкцией $\mathbb{G}_n(\mathbb{C})=\mathbb{C}_{\langle\varphi\rangle}$ из аддитивной группы $\mathbb{C}$ комплексных чисел и ее автоморфизма $\varphi: z\mapsto\varepsilon z$ порядка n.

Введем определения изоморфизмов в категории косетных алгебраических (топологических) n-значных моноидов.

Определение 1.2.18. Пусть M и N являются 1-значными алгебраическими (топологическими) моноидами, $A\subset\mathrm{Aut}(M)$ и $B\subset\mathrm{Aut}(N)$ — конечные подгруппы порядка n. Скажем, что два косетных моноида M_A и N_B *косетно изоморфны*, если существуют изоморфизмы $\widetilde{\varphi}: M\to N$ и $\varphi: M/A\to N/B$, делающие коммутативной следующую диаграмму:



(1.2.19)

При этом все стрелки, соединяющие переднюю и заднюю грани параллелепипеда, должны быть изоморфизмами.

Пример 1.2.20. Как отмечено в [BR97, Proposition 3.2], имеется пример двух изоморфных 2-значных косетных групп G_{1H_1} и G_{2H_2}, которые косетно не изоморфны. А именно, рассмотрим бесконечную диэдральную группу $G_1 = \langle a, b \mid a^2 = b^2 = e\rangle$ и группу $H_1 = \langle\sigma\rangle \subset \mathrm{Aut}(G_1)$, порожденную инволюцией $\sigma : a \mapsto b$. Положим $G_2 = \mathbb{Z}$ и $H_2 = \langle\iota\rangle \subset \mathrm{Aut}(G_2)$ — группа, порожденная инволюцией $\iota : x \mapsto -x$. Тогда 2-значные группы G_{1H_1} и G_{2H_2} изоморфны 2-значной группе $\mathbb{G}_2(\mathrm{Sqr}(\mathbb{Z}))$ из Примера 1.2.7, но G_{1H_1} и G_{2H_2} косетно не изоморфны, поскольку G_1 некоммутативна, а G_2 коммутативна.

Напомним также следующее

Определение 1.2.21. Коммутативная n-значная группа G называется *инволютивной*, если

$$\mathrm{inv}(x) = x$$

для каждого $x \in G$ и отображение inv определено однозначно.

Пример 1.2.22. Группа $\mathbb{G}_{\mathbb{C}}(\mathcal{B}_{\boldsymbol{a}})$ из Примера 1.2.9 инволютивна (единственность отображения inv следует из косетности группы $\mathbb{G}_{\mathbb{C}}(\mathcal{B}_{\boldsymbol{a}})$, см. Раздел 1.3.1.1).

Определение 1.2.23. Назовем элемент w из n-значного моноида M *итерирующим*, если для любого $m \in M$ каждое из мультимножеств $w{*}m$ и $m{*}w$ содержит элемент u (зависящий, вообще говоря, от m) с кратностью не меньшей 2. При $n = 2$ будем называть итерирующий элемент w *удваивающим* элементом.

Напомним (см. [Buc06, Lemma 1]), что n-диагональной конструкцией (или кратко, n-диагональю) 1-значного моноида (группы) G, называется n-значный моноид (группа) $\mathrm{diag}(G)$, в котором $g_1 * g_2 = [g_1g_2, \ldots, g_1g_2]$ для любых $g_1, g_2 \in G$. Аналогично определяется n-диагональ $\mathrm{diag}_n(G)$ для любого m-значного моноида (группы) G, которая является mn-значным моноидом (группой).

Предложение 1.2.24. *Множество $\mathbb{W}$ удваивающих элементов 2-значного моноида (соответственно, группы) $\mathbb{M}$ образует диагональный 2-значный подмоноид (соответственно, подгруппу).*

Доказательство. Обозначим через $\mathbb{W}$ подмножество множества $\mathbb{M}$, состоящее из удваивающих элементов. Пусть $w_1, w_2 \in \mathbb{W}$ и $w_1 * w_2 = [w_3, w_3]$ для некоторого $w_3 \in \mathbb{M}$. Пусть $m \in \mathbb{M}$ — произвольный элемент. Имеем

$$\begin{aligned}[m * w_3, m * w_3] &= m * (w_1 * w_2) \\ &= (m * w_1) * w_2.\end{aligned}$$

Следовательно, $w_3 \in \mathbb{W}$, поскольку мультимножество $(m * w_1) * w_2$ является некоторой 4-кратной точкой (случай $w_3 * m$ рассматривается аналогично). Рассмотрим на множестве $\mathbb{W}$ операцию

$$\begin{aligned}\mathbb{W} \times \mathbb{W} &\to \mathbb{W} \\ w_1 \cdot w_2 &= w_3.\end{aligned} \tag{1.2.25}$$

Легко видеть, что 2-значный подмоноид $\mathbb{W} \subset \mathbb{M}$ является 2-диагональю от 1-значного моноида $\mathbb{W}$ с операцией (1.2.25).

Пусть теперь $\mathbb{M}$ — двузначная группа и $x \in \mathbb{W}$ — удваивающий элемент. Покажем, что $\mathrm{inv}(x)$ тоже удваивающий. Для любого $y \in \mathbb{M}$:

$$x * (\mathrm{inv}(x) * y) = (x * \mathrm{inv}(x)) * y = [e, e] * y = [y, y, y, y]. \tag{1.2.26}$$

Пусть $\mathrm{inv}(x) * y = [a, b]$ для некоторых $a, b \in \mathbb{M}$. Тогда из (1.2.26) следует, что

$$x * a = x * b = [y, y]. \tag{1.2.27}$$

Домножим равенство (1.2.27) слева на $\mathrm{inv}(x)$:

$$(\mathrm{inv}(x) * x) * a = (\mathrm{inv}(x) * x) * b. \tag{1.2.28}$$

Поскольку $\mathrm{inv}(x) * x = [e, e]$, то из (1.2.28) следует, что $a = b$. Следовательно, $\mathrm{inv}(x) \in \mathbb{W}$

□

Определение 1.2.29. Назовем моноидом (группой) *удваивающих точек* 1- значный моноид (группу) из доказательства Предложения 1.2.24.

Ясно, что при изоморфизмах 2-значных моноидов (групп) 1-значные моноиды (группы) удваивающих точек сохраняются.

Пример 1.2.30. Косетный 2-значный алгебраический моноид Чебышева из Примера 1.2.13 имеет ровно 2 удваивающих элемента в точках ветвления (1 и -1) разветвленного 2-листного накрытия (1.2.14). Действительно, пусть y — итерирующий элемент. Можно считать, что $y \neq \infty$, поскольку $\infty * \infty$ не определено в $\mathbb{M}_{\text{mult}}(\mathbb{C}P^1)$, и, следовательно, ∞ не может являться удваивающим элементом. Тогда многочлен

$$P_{\text{mult}}(z; x, y) = z^2 - 2xyz + x^2 + y^2 - 1$$

имеет кратный корень по z для любого x, т.е.

$$\text{disc}_z(P_{\text{mult}}(z; x, y)) = 4\left(x^2 - 1\right)\left(y^2 - 1\right) = 0. \tag{1.2.31}$$

Откуда $y \in \{\pm 1\}$. Получающаяся 1-значная группа удваивающих точек изоморфна $\mathbb{Z}/2$.

1.3 Кубики и n-значные косетные законы сложения

В данном разделе описаны полиномы, задающие все возможные (с точностью до изоморфизма) косетные законы сложения в алгебраических n- значных моноидах и группах на $\mathbb{C}P^1$, моделируемые при помощи кубик. Введем и напомним некоторые определения и конструкции.

Пусть

$$\delta_{\boldsymbol{a}} = \text{disc}_t(t^3 + a_1 t^2 + a_2 t + a_3)$$

— дискриминант относительно переменной t. Тогда имеем:

$$\delta_{\boldsymbol{a}} = -4a_3a_1^3 + a_2^2a_1^2 + 18a_2a_3a_1 - 4a_2^3 - 27a_3^2. \tag{1.3.1}$$

Пусть $\mathcal{E}$ — неприводимая кубика над полем $\mathbb{C}$. Как хорошо известно (см, например, [FW69, Exercise 5-24]), $\mathcal{E}$ изоморфна кубике, задаваемой в $\mathbb{C}P^2$ с координатами $(\zeta : \eta : \xi)$ в карте $\{\xi = 1\}$ уравнением

$$\mathcal{E} = \{\eta^2 = \zeta^3 + a_1\zeta^2 + a_2\zeta + a_3\}. \tag{1.3.2}$$

Кубика как абелево многообразие над полем $\mathbb{C}$ допускает только автоморфизмы порядков 2, 3, 4 и 6 [Хар81, Следствие 4.7]. Мы последовательно рассмотрим случаи неприводимой неособой и особой кубики $\mathcal{E}$ и возникающие структуры 2-, 3-, 4- и 6-значных групп и моноидов.

1.3.1 Случай эллиптической кривой

Пусть точка $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, a_3)$ не лежит в сингулярном множестве $\{\delta_{\boldsymbol{a}} = 0\}$. Пусть комплексные параметры α, g_2 и g_3 таковы, что относительно них кривая $\mathcal{E}$ переписывается в виде:

$$\eta^2 = (\zeta + \alpha)^3 - \frac{g_2}{4}(\zeta + \alpha) - \frac{g_3}{4},$$

$$\begin{cases} a_1 = & 3\alpha, \\ a_2 = & 3\alpha^2 - g_2/4, \\ a_3 = & \alpha^3 - g_2\alpha/4 - g_3/4. \end{cases} \tag{1.3.3}$$

Напомним, что закон сложения

$$(\zeta_1, \eta_1) \oplus (\zeta_2, \eta_2) = (\zeta_3, \eta_3)$$

на ней задается равенствами (для различных точек кривой $\mathcal{E}$):

$$\begin{cases} \zeta_3 = -\zeta_1 - \zeta_2 - 3\alpha + \left(\dfrac{\eta_1 - \eta_2}{\zeta_1 - \zeta_2}\right)^2, \\ \eta_3 = (\zeta_1 - \zeta_3)\dfrac{\eta_1 - \eta_2}{\zeta_1 - \zeta_2} - \eta_1. \end{cases} \tag{1.3.4}$$

В случае совпадения складываемых точек равенство (1.3.4) стоит понимать в смысле предельного перехода при $\zeta_2 \to \zeta_1$.

1.3.1.1 2-значные структуры на $\mathbb{C}P^1$

Имеется разветвленное двулистное накрытие

$$\begin{aligned} \pi_2 : \mathcal{E} &\to \mathbb{C}P^1 \\ (\zeta, \eta) &\mapsto \zeta, \\ \infty &\mapsto \infty, \end{aligned} \tag{1.3.5}$$

со следующими четырьмя точками ветвления (каждая имеет второй порядок): ∞ и $(\zeta_k, 0)$, $k = 1, 2, 3$, где ζ_k — корни многочлена $\zeta^3 + a_1\zeta^2 + a_2\zeta + a_3$. Слои отображения π_2 находятся в биективном соответствии с точками пространства орбит $\mathcal{E}/\langle\sigma\rangle$ относительно инволюции

$$\begin{aligned} \sigma : (\zeta, \eta) &\mapsto (\zeta, -\eta), \\ \infty &\mapsto \infty. \end{aligned}$$

Воспользуемся косет-конструкцией [Buc06, Theorem 1] для инволюции σ на группе точек эллиптической кривой. Получим структуру $\mathcal{E}_{\langle\sigma\rangle}$ косетной алгебраической 2-значной группы на $\mathbb{C}P^1$ с нейтральным элементом в точке ∞:

$$\zeta_1 * \zeta_2 = \left[-\zeta_1 - \zeta_2 - 3\alpha + \left(\frac{\eta_1 \pm \eta_2}{\zeta_1 - \zeta_2} \right)^2 \right]. \tag{1.3.6}$$

Предложение 1.3.7. *Значения выражения* (1.3.6) *являются корнями следующего квадратного многочлена $D(z; \zeta_1, \zeta_2)$ относительно переменной z:*

$$D(z; \zeta_1, \zeta_2) = \Theta_0(\zeta_1, \zeta_2)z^2 + \Theta_1(\zeta_1, \zeta_2)z + \Theta_2(\zeta_1, \zeta_2), \tag{1.3.8}$$

где

$$\Theta_0 = 16(\zeta_1 - \zeta_2)^2,$$

$$\Theta_1 = 8\big(2g_3 + g_2(\zeta_1 + \zeta_2 + 2\alpha) - 4\big(\zeta_1\zeta_2(\zeta_1 + \zeta_2) + 6\zeta_1\zeta_2\alpha + 3(\zeta_1 + \zeta_2)\alpha^2 + 2\alpha^3\big)\big),$$

$$\begin{aligned} \Theta_2 = (g_2 + 4\zeta_1\zeta_2)^2 + 16g_2(\zeta_1 + \zeta_2)\alpha + 24\big(g_2 - 4\zeta_1\zeta_2\big)\alpha^2 \\ - 64(\zeta_1 + \zeta_2)\alpha^3 - 48\alpha^4 + 16g_3(\zeta_1 + \zeta_2 + 3\alpha). \end{aligned}$$

Доказательство. Прямое вычисление по формулам Виета в любой системе

компьютерной алгебры (например, в `Wolfram Mathematica`). □

В работе [BGR26] введен обобщенный многочлен Концевича

$$D_{\boldsymbol{a}}(z;x,y)=\operatorname{disc}_t\bigl(t^3+a_1t^2+a_2t+a_3-(t-x)(t-y)(t-z)\bigr),$$

где disc_t обозначает дискриминант относительно переменной t, и показано, что $D_{\boldsymbol{a}}(z;x,y)=D(-z;-x,-y)$, где $D(z;x,y)$ — многочлен из Предложения 1.3.7.

Как мы уже отмечали во Введении, пункт **(i)** следующей теоремы был получен в [BGR26, Theorem 4.7]. Мы приводим его новое доказательство при помощи Предложения 1.3.7, которое, в свою очередь, было получено нами методами компьютерной алгебры без использования теории эллиптических функций. Пункт **(ii)** является новым.

Теорема 1.3.9.

(i) *При $\delta_{\boldsymbol{a}}\neq 0$ алгебраическая 2-значная группа $\mathbb{G}_{\mathbb{C}P^1}(D_{\boldsymbol{a}})\cong\mathbb{G}_{\mathbb{C}P^1}(\mathcal{B}_{\boldsymbol{a}})$ с единицей ∞ является инволютивной регулярной косетной 2-значной группой $\mathcal{E}_{\langle\sigma\rangle}$ для группы точек эллиптической кривой*

$$\mathcal{E}=\{\eta^2=\zeta^3+a_1\zeta^2+a_2\zeta+a_3\} \tag{1.3.10}$$

относительно инволюции $\sigma:(\zeta,\eta)\mapsto(\zeta,-\eta)$, $\infty\mapsto\infty$. В однородных координатах группа $\mathbb{G}_{\mathbb{C}P^1}(\mathcal{B}_{\boldsymbol{a}})$ на $\mathbb{C}P^1$ имеет единицу $(0:1)$ и умножение

$$\begin{gathered}\mu_{\boldsymbol{a}}:\mathbb{C}P^1\times\mathbb{C}P^1\to\mathbb{C}P^2\\ (x_1:x_0)*(y_1:y_0)=(u_2:u_1:u_0)\end{gathered} \tag{1.3.11}$$

$$\begin{aligned}u_2&=(x_1y_0-x_0y_1)^2,\\ -\frac{1}{2}u_1&=x_1x_0\bigl(2a_1y_1y_0+a_2y_1^2+y_0^2\bigr)+x_1^2y_1(a_2y_0+2a_3y_1)+x_0^2y_0y_1,\\ u_0&=x_1^2y_1\bigl(a_2^2y_1-4a_3(a_1y_1+y_0)\bigr)-2x_0x_1y_1(a_2y_0+2a_3y_1)+x_0^2y_0^2.\end{aligned}$$

(ii) *Класс косетного изоморфизма косетной алгебраической 2-значной группы $\mathbb{G}_{\mathbb{C}P^1}(\mathcal{B}_{\boldsymbol{a}})$ полностью характеризуется j-инвариантом эллиптической*

кривой (1.3.10)

$$j(\boldsymbol{a}) \;=\; 6912\,\frac{(3a_2-a_1^2)^3}{4(3a_2-a_1^2)^3+(27a_3-9a_1a_2+2a_1^3)^2}.$$

.

Доказательство. **(i)** Выразим переменные α, g_2 и g_3 из системы (1.3.3). Подставим их в формулы из Предложения 1.3.7. С учетом изоморфизма

$$\varphi : \mathrm{Sym}^2(\mathbb{C}P^1) \to \mathbb{C}P^2$$
$$[(u_1 : u_0),(v_1 : v_0)] \mapsto (u_1v_1 : u_1v_0+u_0v_1 : u_0v_0)$$

получим выражение в однородных координатах для закона $\nu_{\boldsymbol{a}}$, задаваемого многочленом Концевича $D_{\boldsymbol{a}}(-z;-x,-y)$. Из равенства

$$\mathcal{B}_{\boldsymbol{a}}(z;x,y) = (xyz)^2 D_{\boldsymbol{a}}(-1/z;-1/x,-1/y)$$

следует, что при преобразовании Мебиуса

$$x \mapsto 1/x,\; y \mapsto 1/y,\; z \mapsto 1/z$$

получаются формулы сложения $\mu_{\boldsymbol{a}} : \mathbb{C}P^1 \times \mathbb{C}P^1 \to \mathbb{C}P^2$ в однородных координатах с единицей 0.

Покажем, что $\mathrm{inv}(\infty) = \infty$ в $\mathbb{G}_{\mathbb{C}P^1}(B_{\boldsymbol{a}})$ при $|a_2|^2+|a_3|^2 \neq 0$. Имеем в $\mathbb{G}_{\mathbb{C}P^1}(B_{\boldsymbol{a}})$:

$$(1:0)*(y_1:y_0) = (y_0 : -2(2a_3y_1^2+a_2y_0y_1) : a_2^2y_1^2-4a_1a_3y_1^2-4a_3y_0y_1).$$

Чтобы произведение $(x_1 : x_0)*(y_1 : y_0) = \varphi^{-1}(u_2 : u_1 : u_0)$ содержало точку $(0 : 1)$, необходимо и достаточно выполнение условия $u_2 = 0$. Отсюда следует, что $y_0 = 0$. Поэтому

$$(1:0)*(1:0) = (0 : -4a_3 : a_2^2-4a_1a_3).$$

Следовательно, $\mathrm{inv}(\infty)$ существует (и равен ∞) тогда и только тогда, когда $|a_2|^2+|a_3|^2 \neq 0$.

(ii) Изоморфизм 2-значных групп вида $\mathbb{G}_{\mathbb{C}P^1}(D_{\boldsymbol{a}})$ состоит из автоморфизма $\mathbb{C}P^1$ и изоморфизма ψ абелевых многообразий $\mathcal{E}_1 \to \mathcal{E}_2$ (см. Определение 1.2.18). Как хорошо известно [Хар81, Лемма 4.9], каждый морфизм ψ эллиптических кривых, сохраняющий отмеченные точки — нейтральные элементы, является гомоморфизмом групп. Теперь утверждение следует из того, что класс изоморфизма эллиптической кривой полностью характеризуется ее j-инвариантом [Хар81, Теорема 4.1].

□

Теорема 1.3.12. *Пусть $\mathcal{E} = \{\eta^2 = f(\zeta)\}$ — эллиптическая кривая, где*

$$f(\zeta) = \zeta^3 + a_1\zeta^2 + a_2\zeta + a_3.$$

Тогда справедливы следующие утверждения:

(i) *Удваивающими элементами 2-значной группы $\mathbb{G}_{\mathbb{C}P^1}(\mathcal{B}_{\boldsymbol{a}}(z; x, y))$ являются точка 0 и точки вида $1/w$, где w пробегает множество корней многочлена $f(\zeta)$.*

(ii) *1-значная группа удваивающих точек 2-значной группы $\mathbb{G}_{\mathbb{C}P^1}(\mathcal{B}_{\boldsymbol{a}})$ изоморфна четверной группе Клейна $\mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/2$.*

Доказательство. **(i)** Чтобы найти все удваивающие элементы для 2- значной группы $\mathbb{G}_{\mathbb{C}P^1}(\mathcal{B}_{\boldsymbol{a}}(z; x, y))$, рассуждаем как в Примере 1.2.13 и получаем

$$\begin{aligned}&\operatorname{disc}_z\big(\mathcal{B}_{\boldsymbol{a}}(z; x, y)\big) = \\ &= 16xy(a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + 1)(a_3y^3 + a_2y^2 + a_1y + 1) = 0\end{aligned} \tag{1.3.13}$$

для любого $x \in \mathbb{C}$ и фиксированного $y \in \mathbb{C}$. Из (1.3.13) следует, что точка $y = 0$, и точки $1/y$, для которых $f(1/y) = 0$ являются удваивающими. Проверим, в каком случае точка ∞ является удваивающей. Имеем для дискриминанта $\operatorname{disc}_{z_1}\big((x_0y_0z_0)^2\,\mathcal{B}_{\boldsymbol{a}}(z_1/z_0; x_1/x_0, y_1/y_0)\big)$ при $(y_1 : y_0) = \infty = (1 : 0)$:

$$16a_3x_1(x_0^3 + a_1x_0^2x_1 + a_2x_0x_1^2 + a_3x_1^3). \tag{1.3.14}$$

Выражение (1.3.14) зануляется при всех $x = (x_1 : x_0)$ тогда и только тогда, когда $a_3 = 0$. Следовательно, точка ∞ — итерирующая $\iff a_3 = 0$.

(ii) Из доказательства пункта **(i)** следует, что порядок группы $\mathbb{W}$ удваивающих точек равен 4. Поскольку группа $\mathbb{G}_{\mathbb{C}P^1}(\mathcal{B}_{\boldsymbol{a}})$ инволютивна, каждый ненулевой элемент $\mathbb{W}$ имеет порядок 2. Следовательно, $\mathbb{W} \cong \mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/2$.

□

Из классификации [БВ19, Теорема 6.3] симметрических 2-алгебраических 2-значных групп на $\mathbb{C}$ (см. Определение 1.2.8 и Пример 1.2.9) следует, что каждая 2-алгебраическая 2-значная группа на $\mathbb{C}$ задается многочленом $\mathcal{B}_{\boldsymbol{a}}(z; x, y)$ для некоторого $\boldsymbol{a}$, дискриминант которого допускает разделение переменных

$$\operatorname{disc}_z\big(\mathcal{B}_{\boldsymbol{a}}(z; x, y)\big) = 16\, x^4 f(1/x) \cdot y^4 f(1/y),$$

см. формулу (1.3.13).

Отметим, что первое важное приложение формулы (1.3.13) было получено Драговичем в работе [Dra10], (см. также [DK14]), на основе открытия замечательной связи уравнения ассоциативности 2-значной группы на $\mathbb{C}$ с методом интегрирования волчка Ковалевской.

Свойство разделения переменных при факторизации дискриминанта перестает выполняться для n-значных законов $p_n(z; x, y)$ (Пример 1.2.16) уже при $n = 3$. Например,

$$\operatorname{disc}_z(p_3(z; x, y)) = -3^9 x^2 (x - y)^2 y^2.$$

1.3.1.2 3-значные структуры на $\mathbb{C}P^1$

Существует единственный класс проективной эквивалентности эллиптических кривых, группы автоморфизмов которых содержат элементы третьего порядка (в этом случае j-инвариант равен 0). Для каждого комплексного числа $c \neq 0$ эквиангармоническая кубика

$$\mathcal{E} = \{\eta^2 = \zeta^3 + c\}$$

принадлежит этому классу [Dol12, Theorem 3.1.3]. Введем функцию наклона

$$m = m((\zeta_1, \eta_1), (\zeta_2, \eta_2)) = \frac{\eta_1 - \eta_2}{\zeta_1 - \zeta_2}.$$

Тогда закон сложения точек (ζ_1, η_1) и (ζ_2, η_2) на эллиптической кривой $\mathcal{E}$ примет вид:

$$\begin{cases} \zeta_3 = -\zeta_1 - \zeta_2 + m^2, \\ \eta_3 = m(\zeta_1 - \zeta_3) - \eta_1. \end{cases}$$

Кривая $\mathcal{E}$ допускает автоморфизм

$$\begin{aligned} \varphi_3 : (\zeta, \eta) &\mapsto (\varepsilon\zeta, \eta) \\ \infty &\mapsto \infty \end{aligned}$$

порядка 3 как абелево многообразие, где $\varepsilon = e^{2\pi i/3}$. Действительно,

$$\begin{aligned} \varphi_3(\zeta_1, \eta_1) \oplus \varphi_3(\zeta_2, \eta_2) &= \left(-\varepsilon\zeta_1 - \varepsilon\zeta_2 + \left(\frac{\eta_1 - \eta_2}{\varepsilon\zeta_1 - \varepsilon\zeta_2} \right)^2, \frac{\eta_1 - \eta_2}{\varepsilon\zeta_1 - \varepsilon\zeta_2}(\varepsilon\zeta_1 - \varepsilon\zeta_3) - \eta_1 \right) \\ &= \varphi_3(\zeta_3, \eta_3) \end{aligned}$$

Орбита $\{(\zeta, \eta),\ (\varepsilon\zeta, \eta), (\varepsilon^2\zeta, \eta)\}$ автоморфизма φ_3 биективно соответствует значению η. Имеем разветвленное 3-листное накрытие

$$\begin{aligned} \pi_3 : \mathcal{E} &\to \mathbb{C}P^1 \\ (\zeta, \eta) &\mapsto \eta, \\ \infty &\mapsto \infty. \end{aligned}$$

у которого база отождествляется с пространством орбит $\mathcal{E}/\langle\varphi_3\rangle$. Точками ветвления для π_3 служат три точки третьего порядка: $(0, \pm\sqrt{c})$ и ∞.

Запишем 3-значный закон:

$$\begin{aligned} \eta_1 * \eta_2 &= [\ \pi_3\big((\zeta_1, \eta_1) \oplus (\varepsilon^k\zeta_2, \eta_2)\big) \mid k = 0, 1, 2\ ] \\ &= \Big[\ m_k\Big(2\sqrt[3]{\eta_1^2 - c} + \varepsilon^k \sqrt[3]{\eta_2^2 - c} - m_k^2\Big) - \eta_1\ \Big], \end{aligned} \tag{1.3.15}$$

где для каждого $k = 0, 1, 2$ имеем

$$m_k = \frac{\eta_1 - \eta_2}{\sqrt[3]{\eta_1^2 - c} - \varepsilon^k \sqrt[3]{\eta_2^2 - c}}.$$

Теорема 1.3.16. *На $\mathbb{C}P^1$ для каждого ненулевого $c \in \mathbb{C}$ существует структура (называемая нами эквиангармонической) коммутативной регулярной алгебраической 3-значной косетной группы $\mathbb{G}_{3,c}(\mathbb{C}P^1)$ с нейтральным элементом 0, отображением обратного $\mathrm{inv}(x) = -x$ и умножением, задаваемым многочленом $p_{3,c}(z; -x, -y)$, где*

$$p_{3,c}(z; x, y) = \sigma_1^3 - 27\sigma_3 + 18c\sigma_1^2\sigma_3 - 54c\sigma_2\sigma_3 - 27c^2\sigma_2^2\sigma_3 + 81c^2\sigma_1\sigma_3^2,$$

— симметрический многочлен и σ_k обозначает k-ую элементарную симметрическую функцию от x, y, z. Все такие 3-значные группы косетно изоморфны.

Доказательство. Прямым вычислением в системе компьютерной алгебры при помощи формул Виета показывается, что многочлен $(xyz)^3 p_{3,c}(1/z; -1/x, -1/y)$ имеет своими корнями элементы мультимножества (1.3.15). Регулярность 3-значного умножения устанавливается аналогично как в доказательстве Теоремы 1.3.9. □

В Разделе 1.4 настоящей работы классифицируются все симметрические 3- алгебраические 3-значные группы на $\mathbb{C}$ с нейтральным элементом в 0. Показано, что имеются только две серии таких групп: группы $\mathbb{G}_{3,c}(\mathbb{C}P^1)$ и диагональ от формальной группы G, где группа G задается родом Хирцебруха, сопоставляющим ориентированному многообразию его сигнатуру.

Предложение 1.3.17. *Множество $\{0, \pm 1/\sqrt{c}\}$ итерирующих элементов 3- значной группы $\mathbb{G}_{3,c}(\mathbb{C}P^1)$ является (как 3-значная подгруппа) диагональной конструкцией от 1-значной группы, изоморфной $\mathbb{Z}/3$.*

Доказательство. Пусть y — итерирующий элемент в $\mathbb{G}_{3,c}(\mathbb{C}P^1)$ и $y \neq \infty$. Тогда для любого $x \in \mathbb{C}$ имеем равенство нулю дискриминанта многочлена $p_{3,c}(z; x, y)$:

$$-3^9 x^2 y^2 \left(cx^2 - 1\right)^2 \left(cy^2 - 1\right)^2 (x - y)^2 \left(9c^2x^2y^2 - cx^2 + 8cxy - cy^2 + 1\right)^2 = 0.$$

Откуда видно, что элементы $0, \pm 1/\sqrt{c}$ являются итерирующими.

Пусть теперь $y = \infty = (1 : 0)$. Имеем для дискриминанта однородного многочлена $p_{3,c}((z_1 : z_0); (-x_1 : x_0), (1 : 0))$ выражение:

$$-19683\, c^4 x_0^2 x_1^2 \left(-x_0^2 + c x_1^2\right)^2 \left(-x_0^2 + 9c x_1^2\right)^2,$$

которое не равно тождественно нулю при $c \neq 0$. Следовательно, ∞ не является итерирующим элементом.

Пусть $w = 1/\sqrt{c}$. Имеем следующую таблицу умножения:

$$w * w = [-w, -w, -w], \quad (-w) * (-w) = [w, w, w],$$
$$-w * w = w * (-w) = [0, 0, 0].$$

Откуда видно, что итерирующие элементы наделяются структурой группы, изоморфной группе $\mathrm{diag}(\mathbb{Z}/3)$. □

1.3.1.3 4-значные структуры на $\mathbb{C}P^1$

Существует единственный класс проективной эквивалентности неособых кубик с группой автоморфизмов, изоморфной $\mathbb{Z}/4$ (в этом случае j-инвариант равен 1728). Данному классу принадлежат [Dol12, Theorem 3.1.3] гармонические кубики

$$\mathcal{E} = \{\eta^2 = \zeta^3 + b\zeta\}.$$

Рассмотрим отображение

$$\varphi_4 : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$$
$$(\zeta, \eta) \mapsto (-\zeta, i\eta)$$
$$\infty \mapsto \infty.$$

Легко видеть, что φ_4 — автоморфизм абелева многообразия $\mathcal{E}$. Пространство орбит $\mathcal{E}/\langle\varphi_4\rangle$ отождествляется со слоями проекции

$$\begin{aligned}\pi_4 : \mathcal{E} &\to \mathbb{C}P^1,\\ (\zeta,\eta) &\mapsto \zeta^2,\\ \infty &\mapsto \infty.\end{aligned}$$

Точками ветвления для π_4 служат две точки четвертого порядка $(0,0)$ и ∞, а также две точки второго порядка $(\pm\sqrt{-b},0)$.

Пусть $x=\zeta_1^2$, $y=\zeta_2^2$ — точки из $\mathbb{C}P^1$ для некоторых $\zeta_1,\zeta_2\in\mathbb{C}P^1$. Запишем 4-значный закон сложения:

$$\begin{aligned}x*y &= \left[\ \pi_4\big((\zeta_1,\eta_1)\oplus\varphi_4^r(\zeta_2,\eta_2)\big)\mid r=0,\dots,3\ \right]\\ &= \left[\left(-\sqrt{x}-(-1)^\ell\sqrt{y}+m_{\ell,k}^2\right)^2 \;\middle|\; k,\ell=0,1\right],\end{aligned}\tag{1.3.18}$$

где

$$m_{\ell,k}=\frac{\sqrt{\sqrt{x^3}+b\sqrt{x}}-(-1)^k\cdot\sqrt{(-1)^\ell\left(\sqrt{y^3}+b\sqrt{y}\right)}}{\sqrt{x}-(-1)^\ell\sqrt{y}}.$$

Теорема 1.3.19. *На $\mathbb{C}P^1$ для каждого ненулевого $b\in\mathbb{C}$ существует структура (называемая нами гармонической) коммутативной инволютивной регулярной алгебраической 4-значной косетной группы $\mathbb{G}_{4,b}(\mathbb{C}P^1)$ с нейтральным элементом 0 и умножением, задаваемым симметрическим многочленом*

$$\begin{aligned}p_{4,b}(z;x,y) = {}&\sigma_1^4-8\,\sigma_1^2\sigma_2+16\,\sigma_2^2-128\,\sigma_1\sigma_3\\ &-112\,b\,\sigma_1^2\sigma_3-4\,b^2\sigma_1^3\sigma_3-64\,b\,\sigma_2\sigma_3-112\,b^2\sigma_1\sigma_2\sigma_3-64\,b^2\sigma_3^2\\ &-288\,b^3\sigma_1\sigma_3^2+6\,b^4\sigma_1^2\sigma_3^2-136\,b^4\sigma_2\sigma_3^2-112\,b^5\sigma_3^3-4\,b^6\sigma_1\sigma_3^3+b^8\sigma_3^4\end{aligned}$$

где σ_k обозначает k-ую элементарную симметрическую функцию от x,y,z. Все такие 4-значные группы косетно изоморфны.

Доказательство. Прямым вычислением в системе компьютерной алгебры при помощи формул Виета показывается, что многочлен $(xyz)^4 p_{4,b}(1/z;1/x,1/y)$ имеет своими корнями элементы мультимножества (1.3.18). Регулярность 4-значного умножения устанавливается аналогично как в доказательстве Теоремы 1.3.9. □

Предложение 1.3.20. *Итерирующие элементы 4-значной группы $\mathbb{G}_{4,b}(\mathbb{C}P^1)$ образуют множество $\{0,-1/b,\infty\}$, которое является 4-значной подгруппой с нейтральным элементом 0 и таблицей умножения*

$$\infty * \infty = [0,0,0,0], \quad \infty * \left(-\frac{1}{b}\right) = \left[-\frac{1}{b},-\frac{1}{b},-\frac{1}{b},-\frac{1}{b}\right],$$
$$\left(-\frac{1}{b}\right) * \left(-\frac{1}{b}\right) = [0,0,\infty,\infty].$$

Эта подгруппа изоморфна группе $\mathrm{diag}_2((\mathbb{Z}/4)/\sigma)$*, где* diag_2 *обозначает двукратную диагональ и* $(\mathbb{Z}/4)/\sigma$ *— двузначная косетная группа, построенная по аддитивной группе* $\mathbb{Z}/4$ *и инволюции* $\sigma : a \mapsto -a$ *для всех* $a \in \mathbb{Z}/4$.

Доказательство. Пусть y — итерирующий элемент в $\mathbb{G}_{4,b}(\mathbb{C}P^1)$ и $y \neq \infty$. Тогда для любого $x \in \mathbb{C}$ имеем равенство нулю дискриминанта многочлена $p_{4,b}(z;x,y)$:

$$x^3y^3(bx+1)^2(by+1)^2(x-y)^2\left(b^2xy-1\right)^2\left(b^2x^2+4b^2xy+2bx+1\right)^2$$
$$\left(b^2x^2y+2bxy+4x+y\right)^2\left(4b^2xy+b^2y^2+2by+1\right)^2\cdot$$
$$\left(b^2xy^2+2bxy+x+4y\right)^2=0.$$

Значит, элементы множества $\{0,-1/b\}$ являются итерирующими элементами группы $\mathbb{G}_{4,b}(\mathbb{C}P^1)$.

Рассмотрим случай $y = \infty = (1:0)$. Имеем равенство в однородных координатах:

$$p_{4,b}((z_1:z_0);(x_1:x_0),(1:0)) = (-x_0z_0+b^2x_1z_1)^4.$$

Откуда следует, что точка ∞ является итерирующей. Явный вид таблицы умножения для множества $\{0,-1/b,\infty\}$ итерирующих элементов получается прямыми вычислениями. Изоморфизм с 4-значной группой $\mathrm{diag}_2((\mathbb{Z}/4)_\sigma)$ устанавливается при помощи биекции: $0 \mapsto 0$, $(-1/b) \mapsto 1$ и $\infty \mapsto 2$. □

Замечание 1.3.21. Обратим внимание, что в работе [Kop26] представлена полная классификация n-значных моноидов и групп третьего порядка.

1.3.1.4 6-значные структуры на $\mathbb{C}P^1$

Существует единственный класс проективной эквивалентности неособых кубик (с j-инвариантом, равным 0), группы автоморфизмов которых изоморфны $\mathbb{Z}/6$. Для каждого комплексного числа $c \neq 0$ эквиангармоническая кубика

$$\mathcal{E} = \{\eta^2 = \zeta^3 + c\}$$

принадлежит этому классу [Dol12, Theorem 3.1.3]. Рассмотрим отображение ($\varepsilon = e^{2\pi i/3}$)

$$\begin{aligned} \varphi_6 : \mathcal{E} &\to \mathcal{E} \\ (\zeta, \eta) &\mapsto (\varepsilon\zeta, -\eta), \\ \infty &\mapsto \infty. \end{aligned}$$

Легко видеть, что φ_6 — автоморфизм абелева многообразия $\mathcal{E}$. Точки пространства орбит $\mathcal{E}/\langle\varphi_6\rangle$ отождествляются со слоями проекции

$$\begin{aligned} \pi_6 : \mathcal{E} &\to \mathbb{C}P^1 \\ (\zeta, \eta) &\mapsto \eta^2, \\ \infty &\mapsto \infty. \end{aligned}$$

Точками ветвления для π_6 служат две точки третьего порядка $(0, \pm\sqrt{c})$, три точки второго порядка $(\varepsilon^k \sqrt[3]{-c}, 0)$, $k = 1, 2, 3$ и точка шестого порядка ∞.

Пусть $x = \eta_1^2$, $y = \eta_2^2$ — точки из $\mathbb{C}P^1$ для некоторых $\eta_1, \eta_2 \in \mathbb{C}P^1$. Запишем 6-значный закон сложения:

$$\begin{aligned} x * y &= [\pi_6((\zeta_1, \eta_1) \oplus \varphi_6^r(\zeta_2, \eta_2)) \mid r = 0, \dots, 5] \\ &= \left[\left(m_{\ell,k}\left(2\sqrt[3]{x-c} + \varepsilon^k \sqrt[3]{y-c} - m_{\ell,k}^2\right) - \sqrt{x}\right)^2 \mid\ k = 0, 1, 2; \ell = 0, 1\right], \end{aligned} \tag{1.3.22}$$

где

$$m_{\ell,k} = \frac{\sqrt{x} - (-1)^\ell \sqrt{y}}{\sqrt[3]{x-c} - \varepsilon^k \cdot \sqrt[3]{y-c}}.$$

Теорема 1.3.23. *На $\mathbb{C}P^1$ для каждого ненулевого $c \in \mathbb{C}$ существует структура (называемая нами эквиангармонической) коммутативной инволютивной регулярной 6-значной алгебраической косетной группы $\mathbb{G}_{6,c}(\mathbb{C}P^1)$ с нейтральным*

элементом 0 *и умножением, задаваемым симметрическим многочленом*

$$\begin{aligned}
p_{6,c}(z;x,y) = {} & \sigma_1^6 - 2^2\cdot 3\,\sigma_1^4\sigma_2 + 2^4\cdot 3\,\sigma_1^2\sigma_2^2 - 2^6\sigma_2^3 - 2\cdot 3^4\cdot 17\,\sigma_1^3\sigma_3 \\
& - 2^3\cdot 3^4\cdot 19\,\sigma_1\sigma_2\sigma_3 + 3^3\cdot 19^3\sigma_3^2 \\
& - 2^5\cdot 3^2\cdot 11\,c\,\sigma_1^4\sigma_3 - 2^2\cdot 3^3\cdot 5\,c^2\sigma_1^5\sigma_3 - 2^4\cdot 3^2\cdot 211\,c\,\sigma_1^2\sigma_2\sigma_3 \\
& - 2^2\cdot 3^3\cdot 197\,c^2\sigma_1^3\sigma_2\sigma_3 - 2^3\cdot 3^5 c^3\sigma_1^4\sigma_2\sigma_3 - 2^6\cdot 3^2\cdot 5^2 c\,\sigma_2^2\sigma_3 \\
& - 2^4\cdot 3^3\cdot 107\,c^2\sigma_1\sigma_2^2\sigma_3 - 2^4\cdot 3^7 c^3\sigma_1^2\sigma_2^2\sigma_3 - 2\cdot 3^6 c^4\sigma_1^3\sigma_2^2\sigma_3 \\
& - 2^6\cdot 3^5 c^3\sigma_2^3\sigma_3 - 2^3\cdot 3^7 c^4\sigma_1\sigma_2^3\sigma_3 + 2^4\cdot 3^3\cdot 7^2\cdot 19\,c\,\sigma_1\sigma_3^2 \\
& + 2^2\cdot 3^3\cdot 47\cdot 53\,c^2\sigma_1^2\sigma_3^2 + 2^3\cdot 3^5\cdot 61\,c^3\sigma_1^3\sigma_3^2 + 2\cdot 3^7\cdot 17\,c^4\sigma_1^4\sigma_3^2 \\
& + 2^2\cdot 3^4\cdot 701\,c^2\sigma_2\sigma_3^2 + 2^3\cdot 3^6\cdot 7\cdot 13\,c^3\sigma_1\sigma_2\sigma_3^2 + 2^{10}\cdot 3^6 c^4\sigma_1^2\sigma_2\sigma_3^2 \\
& + 2^4\cdot 3^8\cdot 5\,c^5\sigma_1^3\sigma_2\sigma_3^2 + 2\cdot 3^7\cdot 5\cdot 17\,c^4\sigma_2^2\sigma_3^2 + 2^5\cdot 3^8\cdot 7\,c^5\sigma_1\sigma_2^2\sigma_3^2 \\
& + 2^2\cdot 3^9\cdot 17\,c^6\sigma_1^2\sigma_2^2\sigma_3^2 + 2^2\cdot 3^9\cdot 11\,c^6\sigma_2^3\sigma_3^2 + 2^3\cdot 3^{11} c^7\sigma_1\sigma_2^3\sigma_3^2 \\
& + 3^{12} c^8\sigma_2^4\sigma_3^2 - 2^3\cdot 3^{12} c^3\sigma_3^3 - 2\cdot 3^9\cdot 5\cdot 47\,c^4\sigma_1\sigma_3^3 \\
& - 2^4\cdot 3^9\cdot 17\,c^5\sigma_1^2\sigma_3^3 - 2^2\cdot 3^9\cdot 5\,c^6\sigma_1^3\sigma_3^3 - 2^6\cdot 3^{11} c^5\sigma_2\sigma_3^3 \\
& - 2^2\cdot 3^{10}\cdot 5\cdot 11\,c^6\sigma_1\sigma_2\sigma_3^3 - 2^3\cdot 3^{11} c^7\sigma_1^2\sigma_2\sigma_3^3 - 2^3\cdot 3^{11}\cdot 5\,c^7\sigma_2^2\sigma_3^3 \\
& - 2\cdot 3^{12} c^8\sigma_1\sigma_2^2\sigma_3^3 - 2^3\cdot 3^{12} c^6\sigma_3^4 - 2^3\cdot 3^{12} c^7\sigma_1\sigma_3^4 \\
& + 3^{12} c^8\sigma_1^2\sigma_3^4 - 2^2\cdot 3^{13} c^8\sigma_2\sigma_3^4,
\end{aligned}$$

где σ_k *— k-я элементарная симметрическая функция. Все такие* 6*-значные группы косетно изоморфны.*

Доказательство. Прямым вычислением в системе компьютерной алгебры при помощи формул Виета показывается, что многочлен $(xyz)^6 p_{6,c}(1/z;-1/x,-1/y)$ имеет своими корнями элементы мультимножества (1.3.22). Регулярность 6-значного умножения устанавливается аналогично как в доказательстве Теоремы 1.3.9. □

Предложение 1.3.24. *Множество* $\{0,-1/c,\infty\}$ *итерирующих элементов* 6*-значной группы* $\mathbb{G}_{6,c}(\mathbb{C}P^1)$ *не является никакой* 6*-значной подгруппой* (*и даже подмоноидом*).

Доказательство. Пусть y — итерирующий элемент в $\mathbb{G}_{6,c}(\mathbb{C}P^1)$, $y\neq\infty$. Тогда для любого $x\in\mathbb{C}$ имеем равенство нулю дискриминанта многочлена

$p_{6,c}(z;x,y)$:

$$2^{12}3^{18}x^5y^5(cx+1)^4(cy+1)^4(x-y)^4\cdot \\ \left(27c^2x^3+81c^2x^2y+54cx^2+18cxy+27x+y\right)^4\ldots=0.$$

Откуда видно, что элементы 0 и $(-1/c)$ являются итерирующими.

Пусть $y=\infty=(1:0)$. Тогда $\operatorname{disc}_{z_1}((x_0y_0z_0)^6p_{6,c}(z_1/z_0;x_1/x_0,y_1/y_0))\equiv 0$. Следовательно, ∞ — итерирующий элемент.

Значение многочлена $(x_0y_0z_0)^6p_{6,c}(z_1/z_0;x_1/x_0,y_1/y_0)$ при $x=(1:0)$ и $y=(-1/c:1)$ равно $(z_0+9cz_1)^6$. Следовательно, множество итерирующих элементов не замкнуто относительно 6-значного умножения. □

1.3.2 Случай особой кубики

Теперь перейдем к рассмотрению особых кубик.

Как видно из прямых вычислений в однородных координатах или из Теорем 1.3.36 и 1.3.45 настоящего раздела, предельный случай Теоремы 1.3.9 при $\delta_{\boldsymbol{a}}=0$ принимает вид:

Теорема 1.3.25. *Если $\delta_{\boldsymbol{a}}=0$, то двузначное умножение $\mu_{\boldsymbol{a}}$* (см. (1.3.11)) *определено на $\left(\mathbb{C}P^1\times\mathbb{C}P^1\right)\setminus\{(\xi,\xi)\}$, где*

$$\xi=\begin{cases}\left(9a_3-a_1a_2:2(a_1^2-3a_2)\right), & \text{если } a_1^2-3a_2\neq 0,\\ (-3:a_1), & \text{в противном случае,}\end{cases}$$

— поглощающий элемент, т. е. $z*\xi=\xi*z=[\xi,\xi]$ для любого $z\in\mathbb{C}P^1\setminus\{\xi\}$. В этом случае на $\mathbb{C}P^1$ имеется структура 2-значного алгебраического косетного моноида $\mathbb{M}_{\mathbb{C}P^1}(\mathcal{B}_{\boldsymbol{a}})$. Более того, элемент ∞ имеет обратный $\operatorname{inv}(\infty)=\infty$ тогда и только тогда, когда $|a_2|^2+|a_3|^2\neq 0$. Преобразование Мёбиуса $(x_1:x_0)\mapsto(-x_0:x_1)$ дает изоморфизм $\mathbb{M}_{\mathbb{C}P^1}(\mathcal{B}_{\boldsymbol{a}})\cong\mathbb{M}_{\mathbb{C}P^1}(D_{\boldsymbol{a}})$.

Разберем более подробно нодальный и каспидальный случаи кубики $\mathcal{E}$.

1.3.2.1 Нодальный случай

Пример 1.3.26. Замена переменных $x, y, z \mapsto x+1, y+1, z+1$ показывает, что алгебраический 2-значный моноид $\mathbb{M}_{\text{mult}}(\mathbb{C}P^1)$ из Примера 1.2.13 изоморфен моноиду $\mathbb{G}_{\mathbb{C}P^1}(\mathcal{B}_{\boldsymbol{a}})$ с $a_1 = 1$, $a_2 = a_3 = 0$. Данный моноид соответствует кубике $\{\eta^2 = \zeta^2(\zeta+1)\}$.

Пусть $\boldsymbol{a}$ таково, что многочлен

$$P(\zeta) = \zeta^3 + a_1\zeta^2 + a_2\zeta + a_3 \tag{1.3.27}$$

имеет корень кратности 2. В этом случае уравнение кривой $\mathcal{E}$ принимает вид ($\alpha \neq \beta$):

$$\eta^2 = (\zeta - \alpha)^2(\zeta - \beta). \tag{1.3.28}$$

Зададим на $\mathcal{E}$ параметризацию при помощи углового коэффициента m прямой, проходящей через узел $\mathcal{O} = (\alpha, 0)$:

$$\begin{cases} \zeta = m^2 + \beta, \\ \eta = m\left(m^2 + \beta - \alpha\right). \end{cases}$$

Имеется, как и раньше, разветвленное 2-листное накрытие

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &\to \mathbb{C}P^1 \\ (\zeta(m), \eta(m)) &\mapsto \zeta(m), \\ \infty &\mapsto \infty. \end{aligned}$$

с точками ветвления в точках α, β и ∞.

Лемма 1.3.29. *Пусть $m_1 \oplus m_2 = -m_3$ для точек $m_1, m_2, m_3 \in \mathbb{C}P^1$ кривой $\mathcal{E}$ относительно рассматриваемой параметризации. Тогда*

$$m_3 = \frac{m_1 m_2 - m_+ m_-}{m_1 + m_2}, \tag{1.3.30}$$

где $m_\pm = \pm\sqrt{\alpha - \beta}$ и $[m_1, m_2] \neq [m_+, m_-]$.

Доказательство. Точки $(\zeta_1, \eta_1), (\zeta_2, \eta_2)$ и $(\zeta_3, -\eta_3)$ кривой $\mathcal{E}$ с наклонами $m_j =$

$\eta_j/(\zeta_j-\alpha)$ (где $x_j \neq \alpha$ и $j=1,2,3$), такие, что $m_1 \oplus m_2 = -m_3$, лежат на одной прямой, поэтому

$$\det\begin{pmatrix}\zeta_1 & \eta_1 & 1\\ \zeta_2 & \eta_2 & 1\\ \zeta_3 & \eta_3 & 1\end{pmatrix}=0.$$

Откуда

$$(m_1-m_2)(m_2-m_3)(m_1-m_3)(m_1m_2-m_2m_3-m_1m_3-m_+m_-)=0.$$

Если $m_1 \neq m_2$, то сразу получается требуемое утверждение, поскольку в этом случае точки m_j попарно различны (иначе m_1 или m_2 будет особой). Для случая $m_1=m_2$ значение m_3 дается той же формулой (1.3.30) по непрерывности. □

Предложение 1.3.31. *Преобразование Мебиуса*

$$m \mapsto \frac{m+m_-}{m+m_+} \tag{1.3.32}$$

устанавливает изоморфизм 1*-значных алгебраических моноидов* $\mathcal{E} \cong M_{\mathrm{mult}}(\mathbb{C}P^1)$.

Доказательство. Пусть $m_1 \oplus m_2 = -m_3$. Достаточно доказать тождество

$$\frac{m_1+m_-}{m_1+m_+}\cdot\frac{m_2+m_-}{m_2+m_+}\cdot\frac{-m_3+m_-}{-m_3+m_+}=1. \tag{1.3.33}$$

Рассмотрим многочлен

$$Q(\zeta)=(\zeta+m_1)(\zeta+m_2)(\zeta-m_3).$$

Пусть $a=m_+=-m_-$. По формулам Виета и по Лемме 1.3.29 имеем

$$Q(\zeta)=\zeta^3+(m_1+m_2-m_3)\zeta^2-a^2\zeta-m_1m_2m_3.$$

Видно, что $Q(a)=Q(-a)$, поэтому мы имеем желаемое тождество (1.3.33). □

Пример 1.3.34. Рассмотрим инволюцию ι на моноиде $\mathcal{E}(\mathbb{C})$, такую, что $\iota : m \mapsto -m$ при $m \in \mathbb{C}$ и $\iota(\infty)=\infty$. Тогда пространство орбит $\mathbb{C}P^1/\langle\iota\rangle$ отождествля-

ется с $\mathbb{C}P^1$ при помощи отображения

$$\psi : \mathbb{C}P^1 \to \mathbb{C}P^1$$
$$w \mapsto w^2.$$

Моноиду $\mathbb{C}P^1$ и инволюции ι соответствует косетный 2-значный алгебраический моноид $\mathbb{M}_{\text{node}}(\mathbb{C}P^1) = \mathcal{E}_{\langle\iota\rangle}$ с операцией

$$m_1 * m_2 = \left[\left(\frac{\sqrt{m_1}\sqrt{m_2} \pm a}{\sqrt{m_1} \pm \sqrt{m_2}} \right)^2 \right] \tag{1.3.35}$$

определенной на множестве $\mathrm{Sym}^2(\mathbb{C}P^1)\backslash\{[a,a]\}$, где $a = \alpha - \beta$. Значения $m_1 * m_2$ являются корнями квадратного трехчлена

$$(m_1 - m_2)^2 z^2 - 2\left(a^2(m_1+m_2) - 4a m_1 m_2 + m_1 m_2 (m_1+m_2)\right) z + (a^2 - m_1 m_2)^2.$$

Записывая закон сложения (1.3.35) в исходных координатах (ζ, η) кривой $\mathcal{E}$, получаем алгебраический закон

$$\zeta_1 * \zeta_2 = \left[\left(\frac{\sqrt{\zeta_1 - \beta}\sqrt{\zeta_2 - \beta} \pm (\alpha - \beta)}{\sqrt{\zeta_1 - \beta} \pm \sqrt{\zeta_2 - \beta}} \right)^2 + \beta \right].$$

Значения $\zeta_1 * \zeta_2$ являются корнями (по z) симметрического многочлена Концевича

$$D_{\alpha,\beta}(-z; -\zeta_1, -\zeta_2) = (\zeta_1 \zeta_2 z)^2 B_{\alpha,\beta}(1/z; 1/\zeta_1, 1/\zeta_2),$$

где

$$\begin{aligned} B_{\alpha,\beta}(z; \zeta_1, \zeta_2) = &\left(\left(\alpha^2 \zeta_1 \zeta_2 - 1\right)^2 - 4\alpha\beta\zeta_1\zeta_2(\alpha\zeta_1 - 1)(\alpha\zeta_2 - 1) \right) z^2 \\ &- 2\left(-2\beta\zeta_1\zeta_2(\alpha\zeta_1 - 1)(\alpha\zeta_2 - 1) + \alpha\zeta_1\zeta_2(\alpha(\zeta_1+\zeta_2) - 4) + \zeta_1 + \zeta_2\right) z \\ &+ (\zeta_1 - \zeta_2)^2. \end{aligned}$$

В элементарных симметрических функциях σ_k:

$$\begin{aligned} &B_{\alpha,\beta}(z; \zeta_1, \zeta_2) = \\ &= \sigma_1^2 + \sigma_1\sigma_3\left(-2\alpha^2 - 4\alpha\beta\right) + 4\alpha^2\beta\sigma_2\sigma_3 - 4\sigma_2 + \sigma_3^2\left(\alpha^4 - 4\alpha^3\beta\right) + \sigma_3(8\alpha + 4\beta). \end{aligned}$$

Из формул Виета следует, что многочлен $B_{\alpha,\beta}(z;\zeta_1,\zeta_2)$ совпадает с многочленом Бухштабера $\mathcal{B}_{\boldsymbol{a}}(z;\zeta_1,\zeta_2)$ для

$$\begin{cases} a_1 = -2\alpha - \beta, \\ a_2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta, \\ a_3 = -\alpha^2\beta \end{cases}$$

Иными словами, многочлен $D_{\alpha,\beta}(-z;-\zeta_1,-\zeta_2)$ представляет собой многочлен Концевича $D_{\boldsymbol{a}}(-z;-\zeta_1,-\zeta_2)$ с параметрами, лежащими на особом дивизоре $\{\delta_{\boldsymbol{a}} = 0\}$. Из проективной классификации особых кубик следует, что в нодальном случае (1.3.28) с точностью до изоморфизма имеется лишь один моноид $\mathbb{M}_{\text{node}}(\mathbb{C}P^1)$.

Напомним, что каждая неприводимая нодальная кубика в $\mathbb{C}P^2$ проективно эквивалентна кубике $\eta^2\xi = \zeta^2(\zeta+\xi)$ [FW69, Exercise 5-24]. Сформулируем основной результат данного раздела, вытекающий из всего сказанного:

Теорема 1.3.36. *Пусть α и β — различные комплексные числа, $\mathcal{E}$ — особая кубика, заданная в аффинной карте $\{\xi = 1\} \subset \mathbb{C}P^2$ уравнением*

$$\eta^2 = (\zeta-\alpha)^2(\zeta-\beta).$$

Тогда сложение точек на $\mathcal{E}$ и инволюция

$$\begin{gathered} \sigma : (\zeta,\eta) \mapsto (\zeta,-\eta), \\ \infty \mapsto \infty \end{gathered} \tag{1.3.37}$$

задают единственную (не зависящую от параметров α и β, с точностью до изоморфизма) на $\mathbb{C}P^1$ структуру 2-значного косетного алгебраического моноида $\mathbb{M}_{\text{node}}(\mathbb{C}P^1)$ с нейтральным элементом ∞ и операцией

$$\zeta_1 * \zeta_2 = \left[\left(\frac{\sqrt{\zeta_1-\beta}\sqrt{\zeta_2-\beta} \pm (\alpha-\beta)}{\sqrt{\zeta_1-\beta} \pm \sqrt{\zeta_2-\beta}} \right)^2 + \beta \right],$$

задаваемой многочленом Концевича $D_{\alpha,\beta}(-z;-\zeta_1,-\zeta_2)$ из Примера 1.3.34. Элемент α является поглощающим, т.е. $\zeta * \alpha = \alpha * \zeta = [\alpha,\alpha]$ для любого $\zeta \in \mathbb{C}P^1\backslash\{\alpha\}$. Произведение $\alpha * \alpha$ не определено. Более того, элемент 0 имеет об-

ратный $(\mathrm{inv}(0) = 0, 0 * 0 = [\alpha(1-\alpha/(4\beta)), \infty])$ *тогда и только тогда, когда* $\alpha \neq 0$.

Предложение 1.3.38. *Группа удваивающих точек для* $\mathbb{M}_{\mathrm{node}}(\mathbb{C}P^1)$ *изоморфна* $\mathbb{Z}/2$ *и состоит из двух точек*: ∞ *и* β.

1.3.2.2 Каспидальный случай

Наконец, рассмотрим случай трехкратного нуля

$$\eta^2 = (\zeta - \alpha)^3.$$

Введем параметризацию наклоном прямой $m = \eta/(\zeta - \alpha)$, проходящей через ее касп. Тогда из Леммы 1.3.29 легко следует утверждение:

Лемма 1.3.39. *Закон сложения на кубике* $\mathcal{E} = \{\eta^2 = (\zeta - \alpha)^3\}$ *имеет вид:*

$$m_3 = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}. \tag{1.3.40}$$

Легко получается следующее

Предложение 1.3.41. *Преобразование Мебиуса* $m \mapsto 1/m$ *устанавливает изоморфизм между* 1*-значными алгебраическими моноидами* $\mathcal{E}(\mathbb{C}) \cong M_{\mathrm{cusp}}(\mathbb{C}P^1)$ (*см. Пример* 1.2.3).

Пример 1.3.42. Множество $\mathbb{M}_{\mathrm{node}}(\mathbb{C}P^1)$ из Примера 1.3.34 при $\alpha \to \beta$ принимает вид моноида $\mathbb{M}_{\mathrm{cusp}}(\mathbb{C}P^1)$ с единицей ∞ и умножением

$$\zeta_1 * \zeta_2 = \left[\frac{(\zeta_1 - \alpha)(\zeta_2 - \alpha)}{(\sqrt{\zeta_1 - \alpha} \pm \sqrt{\zeta_2 - \alpha})^2} + \alpha \right]. \tag{1.3.43}$$

Таким образом, косетный моноид $\mathcal{E}_{\langle\sigma\rangle} = \mathbb{M}_{\mathrm{cusp}}(\mathbb{C}P^1)$ на $\mathbb{C}P^1$, построенный по кривой $\mathcal{E}$ и инволюции $\sigma : (x, y) \mapsto (x, -y)$, в данном случае имеет единицу ∞, поглощающий элемент 0 и закон сложения (1.3.43).

Предложение 1.3.44. *Моноиды* $\mathbb{M}_{\mathrm{cusp}}(\mathbb{C}P^1)$ *и* $\mathbb{M}_2(\mathbb{C}P^1)$ *изоморфны.*

Доказательство. Отображение

$$x \mapsto \frac{1}{x-\alpha}$$

задает изоморфизм $\mathbb{M}_{\text{cusp}}(\mathbb{C}P^1) \to \mathbb{M}_2(\mathbb{C}P^1)$. □

Напомним, что каждая неприводимая каспидальная кубика в $\mathbb{C}P^2$ проективно эквивалентна кубике $\{y^2z = x^3\}$ [FW69, Exercise 5-24].

Теорема 1.3.45. *Пусть $\alpha \in \mathbb{C}$ и $\mathcal{E}$ — особая кубика, заданная в аффинной карте $\{z = 1\} \subset \mathbb{C}P^2$ уравнением*

$$y^2 = (x-\alpha)^3.$$

Тогда справедливы следующие утверждения:

(i) *Сложение точек на $\mathcal{E}$ и инволюция (1.3.37) задают на $\mathbb{C}P^1$ единственную (не зависящую от параметра α, с точностью до косетного изоморфизма) структуру 2-значного косетного алгебраического моноида $\mathbb{M}_2(\mathbb{C}P^1)$.*

(ii) *Группа из Теоремы 1.3.16 при $c \to 0$ превращается в моноид $\mathbb{M}_3(\mathbb{C}P^1)$.*

(iii) *Группа из Теоремы 1.3.19 при $b \to 0$ превращается в моноид $\mathbb{M}_4(\mathbb{C}P^1)$.*

(iv) *Группа из Теоремы 1.3.23 при $c \to 0$ превращается в моноид $\mathbb{M}_6(\mathbb{C}P^1)$.*

Предложение 1.3.46. *Группа удваивающих точек для $\mathbb{M}_{\text{cusp}}(\mathbb{C}P^1)$ тривиальна.*

1.4 Симметрические n-алгебраические n-значные группы

Рассмотрим операцию $*$, которая сопоставляет элементам x и y на множестве комплексных чисел $\mathbb{C}$, таким, что $F_0(x,y) \neq 0$, мультимножество $x * y$ корней многочлена относительно переменной z

$$P(z;x,y) = \sum_{k=0}^{n} F_{n-k}(x,y)z^k, \tag{1.4.1}$$

где $F_{n-k}(x,y) \in \mathbb{C}[x,y]$ и

$$F_0(0,0) = 1. \tag{1.4.2}$$

Сформулируем аксиомы из Определения 1.2.1 в этом случае.

Из аксиомы нейтрального элемента 0 следуют равенства

$$P(z;0,y)=F_0(0,y)(z-y)^n,\quad P(z;x,0)=F_0(x,0)(z-x)^n \tag{1.4.3}$$

Аксиома обратного элемента говорит о существовании алгебраического отображения $\mathrm{inv}:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$, такого, что для каждого $x\in\mathbb{C}$

$$F_n(x,\mathrm{inv}(x))=F_n(\mathrm{inv}(x),x)=0. \tag{1.4.4}$$

Обозначим через $z_j=z_j(x,y)$, $j=1,\dots,n$, корни многочлена P. Тогда условие ассоциативности записывается в виде тождественного равенства двух многочленов переменной t:

$$\prod_{j,k=1}^{n}(t-z_j(z_k(x,y),z))=\prod_{j,k=1}^{n}(t-z_j(x,z_k(y,z))). \tag{1.4.5}$$

Обратим внимание на то, что коэффициенты многочленов при степенях переменной t в обеих частях равенства (1.4.5) являются многочленами от x, y и z.

В данном разделе под n-алгебраической n-значной группой на $\mathbb{C}$ будем понимать специализацию Определения 1.2.8, в которой зафиксирован выбор нейтрального элемента и отображения inv:

Определение 1.4.6. Назовем *n-алгебраической n-значной группой с нейтральным элементом в 0* на $\mathbb{C}$ множество $\mathbb{C}$ с частично заданным n-значным умножением

$$\begin{aligned}*:(\mathbb{C}\times\mathbb{C})\backslash\{(x,y)\mid F_0(x,y)=0\}&\longrightarrow \mathrm{Sym}^n(\mathbb{C})\\ (x,y)&\longmapsto [z_1,\dots,z_n]\end{aligned}$$

где z_j — корни многочлена $P(z;x,y)$ (где P — это многочлен (1.4.1)), такого, что каждая из переменных x и y входит в него в степени не выше n, а также этот многочлен удовлетворяет условиям (1.4.2), (1.4.3), (1.4.4) и (1.4.5). Соответствующую группу будем обозначать через $\mathbb{G}(P)$.

Всюду далее под n-алгебраической n-значной группой на $\mathbb{C}$ будем понимать, если не оговорено противное, n-алгебраическую n-значную группу с нейтральным элементом в 0 из Определения 1.4.6.

Легко видеть, что n-алгебраическая n-значная группа является n-значной группой тогда и только тогда, когда $F_0(x,y)\equiv 1$ в (1.4.1).

Пример 1.4.7. Многочлен $z-x-y$ задает регулярную 1-алгебраическую 1-значную группу на $\mathbb{C}$ с обычной суммой в качестве операции.

Пример 1.4.8. Пусть

$$P(z;x,y)=-x-y+z+\alpha xyz,$$

где $\alpha\in\mathbb{C}$. Тогда мы имеем 1-алгебраическую 1-значную коммутативную группу на $\mathbb{C}$ с операцией

$$x*y=\frac{x+y}{1+\alpha xy}.$$

Эта алгебраическая абелева группа изоморфна алгебраической 1-значной группе матриц вида

$$\begin{pmatrix} 1 & x \\ \alpha x & 1 \end{pmatrix}$$

с точностью до умножения на ненулевые комплексные числа, поскольку имеет место равенство:

$$\begin{pmatrix} 1 & x \\ \alpha x & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & y \\ \alpha y & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1+\alpha xy & (x+y) \\ \alpha(x+y) & 1+\alpha xy \end{pmatrix}$$
$$=(1+\alpha xy)\begin{pmatrix} 1 & \frac{x+y}{1+\alpha xy} \\ \alpha\frac{x+y}{1+\alpha xy} & 1 \end{pmatrix}.$$

Определение 1.4.9. n-алгебраическая n-значная группа называется *симметрической*, если многочлен $P(z;(-1)^n x,(-1)^n y)$ является симметрическим по переменным x, y и z.

Предложение 1.4.10. *Пусть $P(z;x,y)$ задает умножение в симметрической n-алгебраической n-значной группе. Тогда верны следующие утверждения:*

(i) $F_0(0,y)\equiv 1$,

(ii) $F_n(x,y)=(x-(-1)^n y)^n$,

(iii) $\mathrm{inv}(x)=(-1)^n x$.

Доказательство. Заметим, что из условий (1.4.2) и (1.4.3) следует, что

$$F_0(0, y) \equiv 1.$$

Дальнейшее очевидно. □

Заметим, что отображение inv в данном случае определено однозначно.

Ясно, что всякая симметрическая n-алгебраическая n-значная группа является коммутативной.

Пример 1.4.11. Для каждого натурального n группа $\mathbb{G}_n(\mathbb{C})$ из Примера 1.1.3 является симметрической n-алгебраической n-значной группой $\mathbb{G}(p_n)$, соответствующей целочисленному многочлену

$$p_n(z; (-1)^n x, (-1)^n y) = \prod_{r=1}^{n} (z - (\sqrt[n]{x} + \varepsilon^r \sqrt[n]{y})^n),$$

где ε — первообразный корень степени n из единицы. Эти многочлены были впервые введены в работе [БН71] в контексте теории n-значных групп. Задача описания структуры коэффициентов многочленов p_n была поставлена в [Buc06]. Там же был приведен явный вид для $p_n(z; x, y)$ при $1 \leqslant n \leqslant 7$. Результаты в этом направлении получены в настоящей работе ниже.

Для каждого натурального n введем многочлен

$$P_n(z; x, y) = \sum_{k=0}^{n} \left(\sum_{i,j=0}^{n} a_{ijk} x^i y^j \right) z^k \tag{1.4.12}$$

с неопределенными коэффициентами со следующей градуировкой:

$$\deg a_{ijk} = 2(n - i - j - k),$$

$$\deg x = \deg y = \deg z = 2.$$

Однородное слагаемое

$$\sum_{i+j+k=n} a_{ijk} x^i y^j z^k \tag{1.4.13}$$

в многочлене (1.4.12) назовем *однородной n-компонентой P_n^{h} полинома P_n*. Коэффициенты a_{ijk} однородной компоненты имеют степень 0.

Нетрудно проверить, что если (1.4.12) задает закон умножения в n- значной алгебраической группе, то его однородная n-компонента также задает некоторый n-значный закон умножения, который в работах [Бух75; Хол81; Хол84] был назван элементарным. В этих работах получена полная классификация элементарных алгебраических n-значных групп при $n \leq 8$. В частности, при $n = 2$ в [Бух75] показано, что имеется ровно два класса, соответствующих многочленам:

$$(z - x - y)^2 \quad \text{и} \quad p_2(z; x, y) = z^2 - 2(x + y)z + (x - y)^2.$$

Если наложить условие симметричности, то при $n = 2$ получается в точности класс элементарных 2-значных алгебраических групп, соответствующих многочлену $p_2(z; x, y)$. Для $n = 3$ в [Хол81, Теорема 4.1] показано, что существует ровно два класса элементарных алгебраических 3-значных групп над $\mathbb{Q}$-алгебрами без делителей нуля, соответствующих многочленам:

$$(z - x - y)^3 \quad \text{и} \quad p_3(z; x, y) = (z - x - y)^3 - 27xyz.$$

Далее, в настоящей работе мы приводим прямое доказательство этого результата.

Определение 1.4.14. *Универсальная симметрическая n-алгебраическая n- значная группа на $\mathbb{C}$ с фиксированной однородной n-компонентой P_n^{h}* задается многочленом (1.4.12) с коэффициентами в кольце

$$\mathbb{C}[a_{ijk} \mid \deg a_{ijk} < 0, i, j, k \in \{0, \ldots, n\}]/\mathscr{J},$$

где $\mathscr{J}$ — идеал, определяемый аксиомами симметрической n-алгебраической n-значной группы.

Нашей целью в данном разделе служит поиск возможных полиномиальных деформаций элементарных симметрических n-значных ($n = 2$ и 3) алгебраических групп, заданных законами $p_2(z; x, y)$ и $p_3(z; x, y)$.

При $n = 2$ из подсчета степеней и алгебраической независимости элементарных симметрических многочленов σ_1, σ_2 и σ_3 градуированных пере-

менных x, y и z следует, что каждый многочлен (1.4.1) можно записать в виде

$$P_2(z;x,y) = \sigma_1^2 - 4\sigma_2 + k_2\sigma_3 + k_8\sigma_3^2 + k_4\sigma_1\sigma_3 + k_6\sigma_2\sigma_3 \tag{1.4.15}$$

для неопределенных градуированных комплексных коэффициентов k_j с $\deg k_j = -j < 0$. Из формулы (1.4.15) следует, что в этом случае однородная компонента

$$P_2^{\mathrm{h}} = \sigma_1^2 - 4\sigma_2.$$

Относительно этой градуировки многочлен P_2 становится однородным по переменным x, y, z и k_j. После раскрытия скобок получаем

$$\begin{aligned} P_2(z;x,y) &= z^2\left(k_8x^2y^2 + k_4xy + k_6x^2y + k_6xy^2 + 1\right) \\ &\quad + z\left(k_2xy + k_4x^2y + k_4xy^2 + k_6x^2y^2 - 2x - 2y\right) \\ &\quad + (x-y)^2 \\ &=: a(x,y)z^2 + b(x,y)z + c(x,y). \end{aligned} \tag{1.4.16}$$

Уравнение ассоциативности для случая $n = 2$ имеет вид:

$$\prod_{i,j=1}^{2}(t - z_{ij}) = \prod_{i,j=1}^{2}(t - \widetilde{z_{ij}}), \tag{1.4.17}$$

где $z_{ij} = z_i(z_j(x,y),z)$ и $\widetilde{z_{ij}} = z_i(x, z_j(y,z))$.

Приравнивая коэффициенты при t^3 в (1.4.17) и используя формулы Виета для корней многочлена P_2 относительно переменной z, получаем условие

$$\frac{b_1}{a_1} + \frac{b_2}{a_2} = \frac{\widetilde{b_1}}{\widetilde{a_1}} + \frac{\widetilde{b_2}}{\widetilde{a_2}}, \tag{1.4.18}$$

где $a_j = a(z_j(x,y),z)$, $b_j = b(z_j(x,y),z)$, $c_j = c(z_j(x,y),z)$, $\widetilde{a_j} = a(x,z_j(y,z))$, $\widetilde{b_j} = b(x,z_j(y,z))$, $\widetilde{c_j} = c(x,z_j(y,z))$, $j = 1,2$. Приводя дроби в (1.4.18) к общему знаменателю, получаем равенство

$$A_1B_2 = A_2B_1, \tag{1.4.19}$$

где

$$A_1 = b_1a_2 + b_2a_1,$$
$$A_2 = \widetilde{b}_1\widetilde{a}_2 + \widetilde{b}_2\widetilde{a}_1,$$
$$B_1 = a_1a_2,$$
$$B_2 = \widetilde{a}_1\widetilde{a}_2.$$

Поскольку пары корней $(z_1(x,y), z_2(x,y))$ и $(z_1(y,z), z_2(y,z))$ входят в многочлены A_1B_2 и A_2B_1 соответственно симметричным образом, то снова применяя формулы Виета, записываем равенство (1.4.19) в терминах коэффициентов многочлена (1.4.16).

Как показывают вычисления при помощи системы компьютерной алгебры `Wolfram Mathematica`, коэффициент при t^3 многочлена $Q = A_1B_2 - A_2B_1$ делится на $4k_8 - k_4^2 + k_6k_2$, причем коэффициент при одночлене x^3yz равен $-6(4k_8 - k_4^2 + k_6k_2)$. Это означает, что параметры универсальной симметрической 2-алгебраической 2-значной группы связаны соотношением

$$4k_8 = k_4^2 - k_6k_2. \tag{1.4.20}$$

Условие на совпадение коэффициентов при t^2 в (1.4.17) превращается в равенство

$$\frac{c_1}{a_1} + \frac{c_2}{a_2} + \frac{b_1b_2}{a_1a_2} = \frac{\widetilde{c}_1}{\widetilde{a}_1} + \frac{\widetilde{c}_2}{\widetilde{a}_2} + \frac{\widetilde{b}_1\widetilde{b}_2}{\widetilde{a}_1\widetilde{a}_2}. \tag{1.4.21}$$

Для коэффициентов при t получается

$$\frac{1}{a_1a_2}(b_2c_1 + b_1c_2) = \frac{1}{\widetilde{a}_1\widetilde{a}_2}(\widetilde{b}_2\widetilde{c}_1 + \widetilde{b}_1\widetilde{c}_2).$$

При t^0 имеем

$$\frac{c_1c_2}{a_1a_2} = \frac{\widetilde{c}_1\widetilde{c}_2}{\widetilde{a}_1\widetilde{a}_2}.$$

Аналогичные вычисления в `Wolfram Mathematica` показывают, что разности коэффициентов при каждом t^j, $j \in \{2,1,0\}$ делятся на $4k_8 - k_4^2 + k_6k_2$.

Таким образом, мы получили следующий классификационный результат:

Теорема 1.4.22. *Универсальная симметрическая 2-алгебраическая 2-значная группа* (1.4.15) *над кольцами без делителей нуля определена над кольцом коэф-*

фициентов

$$\mathbb{Z}[k_2, k_4, k_6, k_8]/(4k_8 - k_4^2 + k_6k_2).$$

В частности, над $\mathbb{Z}\left[\frac{1}{2}\right]$*-алгеброй* K *без делителей нуля семейство многочленов* P_2 *имеет вид:*

$$P_2(z; x, y) = \sigma_1^2 - 4\sigma_2 + k_2\sigma_3 + \frac{k_4^2 - k_6k_2}{4}\sigma_3^2 + k_4\sigma_1\sigma_3 + k_6\sigma_2\sigma_3. \qquad (1.4.23)$$

Таким образом, при $n = 2$ получается 3-параметрическое семейство многочленов P_2.

В работе [Бух75] была получена классификация 2-значных формальных групп, соответствующих многочленам по переменной z вида

$$z^2 - \Theta_1 z + \Theta_2,$$

где $\Theta_1 = \Theta_1(x, y)$ и $\Theta_2 = \Theta_2(x, y)$ — формальные степенные ряды над некоторым коммутативным кольцом K. Если K является $\mathbb{Q}$-алгеброй, то универсальная 2-значная формальная группа определяется над градуированным кольцом $\mathbb{Q}[a_{4n} \mid n \in \mathbb{N}]$.

В работе [Бух90] построена симметрическая 2-алгебраическая 2-значная группа методом косет-конструкции для инволюции порядка 2 на неособой эллиптической кривой в модели Вейерштрасса. При этом при дополнительном условии, гарантирующем неособость эллиптической кривой, был получен закон умножения в терминах корней по z многочлена

$$\mathcal{B}_{\boldsymbol{a}}(z; x, y) = (x + y + z - a_2xyz)^2 - 4(1 + a_3xyz)(xy + yz + xz + a_1xyz),$$

который совпадает с многочленом (1.4.23) при

$$k_2 = -4a_1,\ k_4 = -2a_2,\ k_6 = -4a_3.$$

Отметим, что в работах [Бух90; БВ19] использовалась фундаментальная теорема сложения для эллиптических функций Вейерштрасса. Наш метод использует только понятие универсальной симметрической n-алгебраической n-значной группы.

Опишем теперь все симметрические 3-алгебраические 3-значные груп-

пы.

Общий вид многочленов P_3 следующий:

$$\begin{aligned}&\sigma_1^3 + k_0\sigma_3 + k_6\sigma_3^2 + k_{12}\sigma_3^3 + k_2\sigma_1\sigma_3 + k_4\sigma_2\sigma_3\\&+ \ell_6\sigma_1\sigma_2\sigma_3 + \ell_4\sigma_1^2\sigma_3 + k_8\sigma_2^2\sigma_3 + \ell_8\sigma_3^2\sigma_1 + k_{10}\sigma_3^2\sigma_2,\end{aligned} \tag{1.4.24}$$

где неопределенные коэффициенты градуированы с $\deg(k_i) = -i$, $\deg(\ell_j) = -j$ и каждая из переменных x, y и z имеет степень 2.

Напомним, что однородная n- компонента была определена формулой (1.4.13).

Теорема 1.4.25. *Существуют ровно два класса универсальных симметрических 3-алгебраических 3- значных групп с фиксированными однородными компонентами $P_3^{\mathrm{h}}(z;-x,-y)$. В случае первого класса $k_0 = -27$ и в случае второго $k_0 = 0$. Более детально*:

(i) *Если $k_0 = -27$, имеем для любого $c \in \mathbb{C}$:*

$$P_3(z;-x,-y) = \sigma_1^3 - 27\sigma_3 + 18c\sigma_1^2\sigma_3 - 54c\sigma_2\sigma_3 - 27c^2\sigma_2^2\sigma_3 + 81c^2\sigma_1\sigma_3^2.$$

Соответствующая однородная 3-компонента: $P_3^{\mathrm{h}}(z;-x,-y) = \sigma_1^3 - 27\sigma_3$ (*3-значная группа $\mathbb{G}_3(\mathbb{C})$ из Примера* 1.1.3).

(ii) *Если $k_0 = 0$, имеем для любого $\alpha \in \mathbb{C}$:*

$$P_3(z;-x,-y) = (\sigma_1 + \alpha\sigma_3)^3 .$$

Соответствующая однородная 3-компонента: $P_3^{\mathrm{h}}(z;-x,-y) = \sigma_1^3$. *В этом случае 3-значная группа получается диагональной конструкцией* [Buc06, Lemma 1]

$$G \times G \xrightarrow{\mu} G \xrightarrow{\mathrm{Sym}_3 \circ \mathrm{diag}} \mathrm{Sym}^3(G)$$

из 1-алгебраической 1-значной группы G, заданной многочленом $P_1(z;-x,-y) = \sigma_1 + \alpha\sigma_3$ (см. Пример 1.4.8).

Доказательство. Запишем многочлен (1.4.24) через переменные x, y и z:

$$\begin{aligned}
P_3 &= z^3(k_{12}x^3y^3 + k_{10}x^3y^2 + k_8x^3y + k_{10}x^2y^3 + 2k_8x^2y^2 \\
&\quad + k_8xy^3 + \ell_8x^2y^2 + \ell_6x^2y + \ell_6xy^2 + \ell_4xy + 1) \\
&\quad + z^2(k_{10}x^3y^3 + 2k_8x^3y^2 + 2k_8x^2y^3 + k_6x^2y^2 \\
&\quad + k_4x^2y + k_4xy^2 + k_2xy + \ell_8x^3y^2 + \ell_6x^3y + \ell_8x^2y^3 \\
&\quad + 3\ell_6x^2y^2 + 2\ell_4x^2y + \ell_6xy^3 + 2\ell_4xy^2 + 3x + 3y) \\
&\quad + z(k_8x^3y^3 + k_4x^2y^2 + k_2x^2y + k_2xy^2 + k_0xy + \ell_6x^3y^2 + \ell_4x^3y + \ell_6x^2y^3 \\
&\quad + 2\ell_4x^2y^2 + \ell_4xy^3 + 3x^2 + 6xy + 3y^2) \\
&\quad + (x+y)^3 \\
&=: a(x,y)z^3 + b(x,y)z^2 + c(x,y)z + d(x,y).
\end{aligned}$$

Обозначим через $Q(t)$ многочлен степени 8 по переменной t, полученный как разность левой и правой частей равенства (1.4.5). Также пусть $Q_i(x,y,z)$ обозначает его коэффициент при t^i для каждого $i = 0,\dots,8$.

Из введённой градуировки следует, что при каждом одночлене $x^\alpha y^\beta z^\gamma t^i$ в $Q_i(t)$ содержится однородный многочлен по неопределённым коэффициентам k_i, ℓ_j. Предположим, что $\deg t = 2$. Тогда $Q(t)$ однороден по t, x, y, z, k_i, ℓ_j степени 18.

Чтобы определить необходимые условия на коэффициент k_0, достаточно положить все прочие коэффициенты k_i, ℓ_j в $Q(t)$ равными нулю. Действительно, в этом случае останутся те и только те слагаемые, которые имеют вид $k_0^\alpha x^\beta y^\gamma z^\delta$. Прямое вычисление коэффициента $Q_5(x,y,z) = Q_5(\{k_i\},\{\ell_j\},x,y,z)$ при t^5 в многочлене $Q(t)$ при этих предположениях в `Wolfram Mathematica` показывает, что этот коэффициент содержит множитель $k_0^2(k_0+27)$, т.е. $Q_5(x,y,z) = k_0^2(k_0+27)\widetilde{Q}_5(x,y,z)$ для некоторого ненулевого многочлена $\widetilde{Q}_5(x,y,z)$. Следовательно, k_0 может принимать только два значения: -27 и 0.

Приравнивание нулю соответствующих частных производных при $x = y = z = 0$ у коэффициента при t^8, рассматриваемого как многочлен по x, y и z, даёт следующую систему из семи алгебраических уравнений по неопределённым коэффициентам:

$$\begin{cases} -k_0k_2\ell_4 + k_2\ell_4 + 6k_0\ell_6 + 2k_2k_4 + k_0k_6 - 3k_6 = 0 & \text{при } x^2yz, \\ (k_0+9)\,k_8l_6 = 0 & \text{при } x^6yz, \\ (k_0+27)\,k_8^2 = 0 & \text{при } x^7yz, \\ \begin{aligned} &9k_2^2\ell_6 + 3k_0k_2\ell_4^2 - 6k_2\ell_4^2 - 19k_4k_2\ell_4 + 9k_0k_2\ell_8 - 15k_2\ell_8 \\ &- 3k_0k_6\ell_4 + 33k_6\ell_4 + 10k_0k_4\ell_6 + 84k_4\ell_6 - 91k_0\ell_4\ell_6 \\ &- 2k_4^2k_2 - 42k_0k_8k_2 + 105k_8k_2 - 6k_4k_6 + 45k_0k_{10} \\ &- 45k_{10} + 15\ell_4\ell_6 = 0 \end{aligned} & \text{при } x^3y^2z, \\ \begin{aligned} &k_0k_4\ell_6 + 18k_4\ell_6 - 3k_0\ell_4\ell_6 + k_0k_2k_8 \\ &+ 21k_2k_8 + 3k_0k_{10} - 9k_{10} + 3\ell_4\ell_6 = 0 \end{aligned} & \text{при } x^4yz, \\ -2k_0\ell_6^2 - 4k_0k_8\ell_4 + k_0k_4k_8 + 63k_4k_8 - 6\ell_6^2 = 0 & \text{при } x^5yz, \\ \begin{aligned} &2k_2^2\ell_6 + 2k_2\ell_4^2 - 3k_4k_2\ell_4 - 8k_2\ell_8 + 2k_6\ell_4 \\ &+ 8k_0k_4\ell_6 + 36k_4\ell_6 - 23k_0\ell_4\ell_6 - 18k_0k_8k_2 \\ &+ 38k_8k_2 - k_2k_4^2 + 36k_0k_{10} - 18k_{10} + 6\ell_4\ell_6 = 0 \end{aligned} & \text{при } x^2y^3z. \end{cases} \tag{1.4.26}$$

Ещё два уравнения следуют из свойства градуировки. Положим $k_{12} = 0$ и возьмём редукцию коэффициента при t^8 по модулю идеала, порождённого многочленами x^2R, y^2R, z^2R, xyR, yzR, xzR, где $R = xyz(x-z)$. Это допустимо, так как $\deg Q_8 = 2$. Тогда условия обнуления коэффициентов при x и y дают следующие уравнения:

$$\begin{cases} \begin{aligned} &-k_0k_4\ell_4 - k_4\ell_4 + k_0\ell_4^2 - k_0k_2\ell_6 - 6k_2\ell_6 \\ &- 2k_0\ell_8 + 3k_4^2 + 29k_0k_8 + 3k_8 - 2\ell_4^2 + 6\ell_8 = 0, \end{aligned} \\ \begin{aligned} &-7k_0\ell_4^2 + 7k_4k_0\ell_4 + 3k_2k_0\ell_6 + 18k_0\ell_8 - 2k_2^2\ell_4 \\ &+ 3k_4\ell_4 + 18k_2\ell_6 + 6k_8k_0^2 - 81k_8k_0 - 9k_4^2 - k_2^2k_4 \\ &+ 3k_2k_6 - 9k_8 + 6\ell_4^2 - 18\ell_8 = 0. \end{aligned} \end{cases} \tag{1.4.27}$$

Получаем следующее совместное множество решений систем (1.4.26) и (1.4.27) при $k_0 = -27$, используя $\wedge$ и $\vee$ для обозначения соответственно конъюнкции и дизъюнкции:

1) $k_2 = 0 \wedge k_6 = 0 \wedge k_8 = 0 \wedge k_{10} = 0 \wedge \left(\ell_4 = -\frac{k_4}{3} \vee \ell_4 = k_4\right) \wedge \ell_6 = 0$
$\wedge \ell_8 = \frac{1}{9}\left(k_4^2 - k_4\ell_4\right)$.

2) $k_6 = k_2k_4 \wedge k_8 = 0 \wedge k_{10} = 0 \wedge \ell_4 = k_4 \wedge \ell_6 = 0 \wedge \ell_8 = 0 \wedge k_2k_4(563k_4 - 36k_2^2) \neq 0.$

3) $k_2 = 0 \wedge k_4 = 0 \wedge k_6 = 0 \wedge k_8 = 0 \wedge k_{10} = 0 \wedge \ell_4 = 0 \wedge \ell_6 = 0 \wedge \ell_8 = 0.$

4) $k_2 = 0 \wedge k_4 = 0 \wedge k_6 = 0 \wedge k_{10} = 0 \wedge k_8 \neq 0 \wedge \ell_4 = 0 \wedge \ell_6 = 0 \wedge \ell_8 = 13k_8.$

5) $k_2 = 0 \wedge k_6 = 0 \wedge k_{10} = 0 \wedge k_8 \neq 0 \wedge \ell_4 = -\frac{k_4}{3} \wedge \ell_6 = 0 \wedge \ell_8 = -3k_8 \wedge k_4 \neq 0.$

6) $k_2 = 0 \wedge k_6 = 0 \wedge k_{10} = 0 \wedge k_8 \neq 0 \wedge \ell_4 = -\frac{k_4}{3} \wedge \ell_6 = 0 \wedge \ell_8 = \frac{1}{9}\left(-k_4\ell_4 + k_4^2 + 117k_8\right) \wedge k_4 \neq 0$

7) $k_4 = 0 \wedge k_6 = 0 \wedge k_8 = 0 \wedge k_{10} = 0 \wedge \ell_4 = 0 \wedge \ell_6 = 0 \wedge \ell_8 = 0 \wedge k_2 \neq 0.$

8) $k_2k_4 \neq 0 \wedge k_6 = k_2k_4 \wedge k_8 = 0 \wedge k_6 \neq 0 \wedge k_{10} = 0 \wedge \ell_4 = k_4 \wedge \ell_6 = 0 \wedge \ell_8 = 0.$

9) $k_4 = \frac{36k_2^2}{563} \wedge k_2 \neq 0 \wedge k_6 = \frac{36k_2^3}{563} \wedge k_6 \neq 0 \wedge k_8 = 0 \wedge k_{10} = 0 \wedge \ell_4 = \frac{36k_2^2}{563} \wedge \ell_6 = 0 \wedge \ell_8 = 0.$

Рассмотрим случай **1)**. Если $\ell_4 = -k_4/3$, то вычисление коэффициента при x^4yz в многочлене $Q_7(x, y, z)$ даёт обращение в нуль коэффициента k_4. Если же $\ell_4 = k_4$, вычисление коэффициента при x^4yz также даёт обращение в нуль k_4. Следовательно, случай **1)** сводится к случаю **3)**.

Рассмотрим случай **2)**. Вычисление коэффициентов при x^2yz и x^3yz в многочлене $Q_7(x, y, z)$ приводит к системе

$$\begin{cases} k_2^2 - 81\ell_4 = 0, \\ k_2\ell_4 = 0, \end{cases}$$

из которой следует, что $k_2 = \ell_4 = 0$, так что этот случай исключается.

Рассмотрим **3)**. Подставляя эти значения параметров в многочлен $Q_8(t)$, получаем, что $k_{12} = 0$. Этот случай содержится в модификации случая **5)** при $c = 0$ (тот же аргумент остаётся в силе), см. ниже.

Рассмотрим случай **4)**. Вычисление коэффициента при x^4yz в многочлене $Q_7(x, y, z)$ даёт обращение в нуль k_8, что исключает этот случай.

Рассмотрим случай **5)**. Вычисление коэффициента при x^3y^2z в многочлене $Q_7(t)$ даёт обращение в нуль выражения $k_4^2 + 108k_8$. Следовательно, для

каждого $c \in \mathbb{C}$ получаем

$$\begin{cases} k_0 = -27, \\ k_2 = 0, \\ k_4 = -54c, \\ k_6 = 0, \\ k_8 = -27c^2, \\ k_{10} = 0, \\ \ell_4 = 18c, \\ \ell_6 = 0, \\ \ell_8 = 81c^2. \end{cases} \tag{1.4.28}$$

Из коэффициента при x^5y^2z в многочлене $Q_7(t)$ получаем из (1.4.28)

$$37k_4^3 + 3996k_8k_4 + 7938k_{12} = 0.$$

Значит, $k_{12} = 0$.

Рассмотрим случай **6)**. Вычисление коэффициента при x^3y^2z в многочлене $Q_7(t)$ даёт обращение в нуль выражения $k_4^2 + 108k_8$. Следовательно, снова получаем случай, задаваемый системой уравнений (1.4.28). Из коэффициента при x^5y^2z в многочлене $Q_7(t)$ получаем из (1.4.28)

$$3173k_4^3 + 342684k_8k_4 + 71442k_{12} = 0.$$

Значит, $k_{12} = 0$. Итак, этот случай совпадает со случаем **5)**.

Случаи **7)** и **8)** исключаются по той же причине, что и случай **2)**.

Рассмотрим случай **9)**. Коэффициент при x^2yz в многочлене $Q_7(t)$ даёт $k_2^2 = 0$. Следовательно, этот случай исключается, поскольку $k_2 \neq 0$.

Таким образом, при $k_0 = -27$ остаются возможными случаи **3)** и **5)**, удовлетворяющие необходимым условиям для 3-значных алгебраических групп.

Теперь рассмотрим общее множество решений систем (1.4.26) и (1.4.27) при $k_0 = 0$:

1) $k_2 = 0 \wedge k_6 = 0 \wedge k_8 = 0 \wedge k_{10} = 0 \wedge \ell_6 = 0 \wedge \ell_8 = \frac{1}{6}\left(k_4\ell_4 - 3k_4^2 + 2\ell_4^2\right)$.

2) $k_2 = 0 \wedge k_4 = 0 \wedge k_6 = 0 \wedge k_8 = 0 \wedge k_{10} = 0 \wedge \ell_6 = 0 \wedge \ell_8 = \ell_4^2/3$.

3) $k_6 = k_2k_4 \wedge k_8 = 0 \wedge k_{10} = 0 \wedge \ell_4 = k_4 \wedge \ell_6 = 0 \wedge \ell_8 = 0$.

Рассмотрим случай **1)**. Вычисление коэффициентов при x^4yz и x^2y^3z в многочлене $Q_7(t)$ приводит к системе

$$\begin{cases} -5k_4\ell_4 + k_4^2 - 10\ell_4^2 + 30\ell_8 = 0, \\ -37k_4\ell_4 + 12k_4^2 - 74\ell_4^2 + 222\ell_8 = 0, \end{cases}$$

которая имеет решение $k_4 = 0 \wedge \ell_8 = \ell_4^2/3$. Вычисление коэффициента при x^5y^2z даёт

$$-27k_4\ell_4^2 + k_4^2\ell_4 + 18k_4\ell_8 + 63k_{12} - 42\ell_4^3 + 119\ell_8\ell_4 = 0.$$

Подстановка $k_4 = 0 \wedge \ell_8 = \ell_4^2/3$ приводит к уравнению $k_{12} = \ell_4^3/27$. Итак,

$$\begin{cases} k_0 = 0, \\ k_2 = 0, \\ k_4 = 0, \\ k_6 = 0, \\ k_8 = 0, \\ k_{10} = 0, \\ k_{12} = \ell_4^3/27, \\ \ell_6 = 0, \\ \ell_8 = \ell_4^2/3. \end{cases}$$

Случай **2)** содержится в случае **1)**.

Рассмотрим случай **3)**. Вычисление коэффициентов при x^2yz и x^3y^2z в многочлене $Q_7(t)$ даёт равенства $k_2 = 0$ и $k_4(10k_2^2 + 33k_4) = 0$. Отсюда $k_2 = k_4 = 0$, и мы приходим к случаю **1)**.

Таким образом, при $k_0 = 0$ единственно возможным остаётся случай **1)**.

Тем самым, мы получили необходимые условия на коэффициенты универсального закона. Теперь докажем, что они также достаточны.

Для $k_0 = 0$ получаем многочлен

$$\left(\sigma_1 + \frac{\ell_4}{3}\sigma_3\right)^3,$$

который задаёт диагональный закон 1-значной группы из Примера 1.4.8.

Случай $k_0 = -27$ вытекает из Теоремы 1.3.16.

□

1.5 Кронекеровы суммы и сопровождающие матрицы Фробениуса

Напомним следующее важное для дальнейшего определение (см., например, [HJ91, Definition 4.4.4]).

Определение 1.5.1. Пусть A и B — произвольные квадратные матрицы над полем $\mathbb{C}$ порядков m и n соответственно. *Кронекеровой суммой* $A \boxplus B$ матриц A и B называется $(mn \times mn)$-матрица

$$A \boxplus B = A \otimes I_n + I_m \otimes B.$$

Отметим, что понятие суммы Кронекера, как оказалось, не является столь широко представленным в стандартных курсах линейной алгебры, как произведение Кронекера (тензорное произведение матриц). Отметим, что имеется множество приложений данного понятия в различных фундаментальных и прикладных отраслях науки, включая теорию дифференциальных уравнений, квантовые вычисления, машинное обучение, робототехнику и др. Например, суммы Кронекера дают критерий существования и единственности решения матричного уравнения вида $AX + XB = C$ [HJ91, Theorem 4.4.6]: используется тот факт, что это уравнение переписывается в виде $(B^T \boxplus A)\operatorname{vec} X = \operatorname{vec} C$, где $\operatorname{vec}(\cdot)$ обозначает операцию векторизации матрицы. Подобное уравнение возникает при исследовании устойчивости линейных систем дифференциальных уравнений $\dot{x} = Ax$ с постоянными коэффициентами на глобальную асимптотическую устойчивость в смысле Ляпунова [Ган66, Часть II, Глава XVI, §5,

Теорема 3, Теорема 3'].

Важным для настоящей работы является следующий факт [Sté00] для многочленов, составленных из тензорных произведений. Более современное изложение см. в книге [LT85].

Предложение 1.5.2 (Section 12.2, Theorem 1 в [LT85]). *Для комплексных матриц $A \in \mathbb{C}^{m\times m}$ и $B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ и комплексного многочлена $p(x,y) = \sum_{j,k=0}^{\ell} c_{jk} x^j y^k$ рассмотрим матрицу*

$$p(A,B) = \sum_{j,k=0}^{\ell} c_{jk} A^j \otimes B^k.$$

Пусть $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ — собственные значения матрицы A и $\mu_1, \ldots, \mu_n$ — собственные значения матрицы B. Тогда собственные значения матрицы $p(A,B)$ являются mn числами $p(\lambda_r, \mu_s)$, где $r = 1, \ldots, m$ и $s = 1, \ldots, n$.

Доказательство Предложения 1.5.2 получается из рассмотрения жордановых нормальных форм матриц A и B.

Для $p(x,y) = x + y$ получаем:

Предложение 1.5.3 (Section 12.2, Corollary 2 в [LT85]). *Пусть A и B — произвольные квадратные матрицы над полем $\mathbb{C}$ порядков m и n соответственно. Пусть $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ и $\mu_1, \ldots, \mu_n$ — собственные значения с кратностями для матриц A и B. Тогда mn-мультимножество $[\lambda_j + \mu_k]$ всевозможных сумм суть множество собственных значений матрицы $A \boxplus B$.*

Напомним следующее

Определение 1.5.4. Пусть $f(t) = t^n + a_{n-1}t^{n-1} + \ldots + a_0 \in \mathbb{C}[t]$.*Фробенусовой сопровождающей матрицей* $F(a_{n-1}, \ldots, a_0)$ многочлена $f(t)$ называется матрица

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -a_2 \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}. \tag{1.5.5}$$

Аналогичным образом определяется *блочная сопровождающая матрица Фробениуса* многочлена $f(t) = t^m + A_{m-1}t^{m-1} + \ldots + A_0 \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})[t]$.

Из Предложения 1.5.3 сразу следует

Предложение 1.5.6. *Пусть* $f(t) = t^m + a_{m-1}t^{m-1} + \ldots + a_0$ *и* $g(t) = t^n + b_{n-1}t^{n-1} + \ldots + b_0$ *многочлены из кольца* $\mathbb{C}[t]$ *с мультимножествами корней* $[\lambda_j]$ *и* $[\mu_k]$ *соответственно. Тогда характеристический многочлен*

$$\chi(F(a_{m-1}, \ldots, a_0) \boxplus F(b_{n-1}, \ldots, b_0); t) = \det(t \cdot I - F(a_{m-1}, \ldots, a_0) \boxplus F(b_{n-1}, \ldots, b_0))$$

по переменной t *суммы Кронекера их сопровождающих матриц Фробениуса от переменной* t *имеет своими корнями всевозможные* mn *сумм вида* $\lambda_j + \mu_k$.

Операция подстановки многочлена в многочлен естественно возникает в задачах, связанных с уравнением Янга–Бакстера [Кри81], многозначной дискретной динамикой [Bec91] и гомоморфизмами n-значных групп. Приведем выражение композиции $g(f)$ многочленов f и g в терминах их сопровождающих матриц Фробениуса C_f и C_g.

Предложение 1.5.7 [Car22]**.** *Пусть* $f(t) = t^m + a_{m-1}t^{m-1} + \ldots + a_0$ *и* $g(t) = t^n + b_{n-1}t^{n-1} + \ldots + b_0$ *— многочлены из кольца* $\Bbbk[t]$ *над полем* $\Bbbk$. *Тогда имеет место равенство*

$$g(f)(t) = \det(t \cdot I_{mn} - C_g \circ C_f),$$

где

$$C_g \circ C_f = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_0 I_n + C_g \\ I_n & 0 & \cdots & 0 & -a_1 I_n \\ 0 & I_n & \cdots & 0 & -a_2 I_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & I_n & -a_{m-1} I_n \end{pmatrix} \tag{1.5.8}$$

— блочная сопровождающая матрица Фробениуса матричного многочлена

$$q(t) = f(t) I_n - C_g$$

и I_s *обозначает единичную* $(s \times s)$*-матрицу.*

Приведем наше доказательство. Оно основано на следующей полезной лемме, частный случай которой приводится в препринте [Mel17, Lemma 2.1]. Эта же лемма нам еще пригодится несколько позже.

Лемма 1.5.9. *Пусть M_i, N_j (где $1 \le i \le m$, $1 \le j \le m-1$) — матрицы размера $n \times n$ над полем $\Bbbk$. Тогда для любого целого $m \ge 1$ (при $m = 1$ мы полагаем $A = M_1$) определитель блочной матрицы*

$$A = \begin{pmatrix} M_1 & M_2 & M_3 & \cdots & \cdots & M_m \\ -I & N_1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & -I & N_2 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & -I & \ddots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -I & N_{m-1} \end{pmatrix}$$

равен определителю матрицы

$$M_1 \prod_{j=1}^{m-1} N_j + M_2 \prod_{j=2}^{m-1} N_j + \ldots + M_{m-1} N_{m-1} + M_m.$$

Доказательство. Положим для $r = 1, \ldots, m$

$$P_r = M_1 N_1 \cdots N_{r-1} + M_2 N_2 \cdots N_{r-1} + \cdots + M_r,$$

где предполагается $P_1 = M_1$.

Рассмотрим верхнетреугольную блочную матрицу

$$U = \begin{pmatrix} I & N_1 & N_1 N_2 & \cdots & N_1 N_2 \cdots N_{m-1} \\ 0 & I & N_2 & \cdots & N_2 N_3 \cdots N_{m-1} \\ 0 & 0 & I & \cdots & N_3 N_4 \cdots N_{m-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & I \end{pmatrix}.$$

У этой матрицы на диагонали стоят единичные блоки, поэтому $\det U = 1$.

Вычислим произведение AU.

Для первой блочной строки получаем

$$(M_1, \ldots, M_m)\, U = (P_1, P_2, \ldots, P_m).$$

Для $(r+1)$-й блочной строки, где $r = 1, \ldots, m-1$ в матрице A ненулевыми являются только два блока, а именно $-I$ в столбце r и N_r в столбце $r+1$.

Поэтому

$$(AU)_{r+1,s} = -U_{r,s} + N_r\, U_{r+1,s}.$$

Если $s < r$, то оба слагаемых равны нулю. Если $s = r$, то

$$(AU)_{r+1,r} = -U_{r,r} + N_r U_{r+1,r} = -I.$$

Если $s > r$, то

$$U_{r,s} = N_r N_{r+1} \cdots N_{s-1}, \qquad U_{r+1,s} = N_{r+1} \cdots N_{s-1},$$

и потому

$$(AU)_{r+1,s} = -N_r N_{r+1} \cdots N_{s-1} + N_r(N_{r+1} \cdots N_{s-1}) = 0.$$

Следовательно,

$$AU = \begin{pmatrix} P_1 & P_2 & \cdots & P_{m-1} & P_m \\ -I & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -I & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & -I & 0 \end{pmatrix}.$$

Так как $\det U = 1$, имеем $\det AU = \det A$.

Теперь переставим блочные столбцы циклически, перенеся последний блочный столбец на первое место. Получим матрицу

$$C = \begin{pmatrix} P_m & P_1 & P_2 & \cdots & P_{m-1} \\ 0 & -I & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & -I & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -I \end{pmatrix}.$$

Это блочно верхнетреугольная матрица, следовательно

$$\det(C) = \det(P_m)\det(-I)^{m-1} = (-1)^{n(m-1)}\det(P_m).$$

С другой стороны, после такого преобразования столбцов определитель из-

менился в точности в $(-1)^{n(m-1)}$, т.е. $\det AU = (-1)^{n(m-1)} \det C$. Следовательно, $\det A = \det P_m$. Что и требовалось доказать. □

Докажем Предложение 1.5.7.

Доказательство. Заметим, что определитель любой (неблочной) матрицы не меняется при отражении относительно побочной диагонали. Согласно статье [KSW99, Theorem 1] определитель блочной матрицы с попарно коммутирующими квадратными блоками естественным образом выражается в терминах блоков: он совпадает с определителем ее блочного определителя. Из этих двух фактов следует, что определитель любой блочной матрицы W с попарно коммутирующими блоками не изменится при отражении всех ее блоков относительно побочной диагонали матрицы W. В частности, определитель матрицы (1.5.8) не изменится при отражении всех ее блоков относительно ее побочной диагонали.

Следовательно, мы имеем равенство:

$$h(t) := \det(tI_{mn} - C_g \circ C_f) = \begin{vmatrix} (t+a_{m-1})I_n & a_{m-2}I_n & \cdots & a_1 I_n & a_0 I_n - C_g \\ -I_n & tI_n & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -I_n & \cdots & tI_n & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -I_n & tI_n \end{vmatrix}.$$

По Лемме 1.5.9 получаем:

$$h(t) = \det(f(t)I_n - C_g). \tag{1.5.10}$$

По свойству сопровождающих матриц Фробениуса (см., например, [Пра16, Глава 3, Раздел 16.2])

$$\det(xI_n - C_g) = g(x)$$

в кольце $\Bbbk[x]$. Подставляя $x = f(t)$, имеем:

$$h(t) = g(f(t)) = \det(f(t)I_n - C_g).$$

Что и требовалось доказать. □

1.6 Группы $\mathbb{G}_n(\mathbb{C})$ и суммы Кронекера

В данном разделе мы приводим в Предложении 1.6.3 новый подход к конструкции n-значной группы $\mathbb{G}_n(\mathbb{C})$ на основе понятия суммы Кронекера матриц. В Теореме 1.6.6 представлены однородные симметрические многочлены $p_n(z; x_1, ..., x_m)$ с целыми коэффициентами, которые описывают итерации n-значного умножения в группе $\mathbb{G}_n(\mathbb{C})$.

Из общей косет-конструкции в Предложении 1.1.8 следует, что с каждой конечной подгруппой G порядка n группы автоморфизмов аддитивной группы $(\mathbb{R}^n, +)$ вещественных чисел связана n-значная группа $\mathbb{R}^n(G)$. Если не накладывать условия непрерывности автоморфизмов, то структура группы G может быть довольно причудливой: например, можно задать G при помощи базисов Гамеля. Если рассматривать только непрерывные автоморфизмы $(\mathbb{R}^n, +)$, то G является конечной подгруппой группы $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$.

В данной работе нас интересуют в первую очередь n-значные группы на аддитивной группе $(\mathbb{C}, +)$ комплексных чисел, которые задаются голоморфными в некоторой области $U \subset \mathbb{C}$ функциями. В работе [Бух75] получена классификация всех двузначных групп (необязательно косетных), закон умножения в которых задаётся рядами с коэффициентами в любой алгебре над полем характеристики 0.

Напомним, что в центре внимания настоящей работы находится семейство многочленов $p_n(z; x, y)$, введенное в работе [БН71]:

$$p_n(z; x, y) = \prod_{w \in \mathrm{inv}(x) * \mathrm{inv}(y)} (z - w), \tag{1.6.1}$$

где w пробегает элементы n-мультимножества $\mathrm{inv}(x) * \mathrm{inv}(y)$ в смысле операции $*$ на n-значной группе $\mathbb{G}_n(\mathbb{C})$ (см. Пример 1.1.3).

Приведем явные виды многочленов $p_n(z; x, y)$ при $n \leqslant 7$ в базисе элемен-

тарных симметрических функций σ_j:

$$\begin{aligned}
p_1 &= \sigma_1,\\
p_2 &= \sigma_1^2 - 2^2\sigma_2,\\
p_3 &= \sigma_1^3 - 3^3\sigma_3,\\
p_4 &= \sigma_1^4 - 2^3\sigma_1^2\sigma_2 + 2^4\sigma_2^2 - 2^7\sigma_1\sigma_3,\\
p_5 &= \sigma_1^5 - 5^4\sigma_1^2\sigma_3 + 5^5\sigma_2\sigma_3,\\
p_6 &= \sigma_1^6 - 2^2\cdot 3\sigma_1^4\sigma_2 - 2\cdot 3^4\cdot 17\sigma_1^3\sigma_3 + 2^4\cdot 3\sigma_1^2\sigma_2^2\\
&\quad - 2^3\cdot 3^4\cdot 19\sigma_1\sigma_2\sigma_3 - 2^6\sigma_2^3 + 3^3\cdot 19^3\sigma_3^2,\\
p_7 &= \sigma_1^7 - 7^4\sigma_3(5\sigma_1^4 - 2\cdot 7^2\sigma_1^2\sigma_2 - 7^4\sigma_1\sigma_3 + 7^3\sigma_2^2).
\end{aligned} \tag{1.6.2}$$

Предложение 1.6.3. *Для каждого натурального n верны следующие утверждения:*

(i) *Многочлен $p_n(z;x,y)$ из (1.6.1) симметричен по переменным x, y и z.*

(ii) *Для всех комплексных x, y и z имеется равенство*

$$p_n(z^n;x,y) = \chi(F(\underbrace{0,\dots,0,(-1)^{n+1}x}_{n}) \boxplus F(\underbrace{0,\dots,0,(-1)^{n+1}y}_{n});z).$$

(iii) *Многочлен $p_n(z;x,y)$ является однородным многочленом переменных x, y и z степени n с целыми коэффициентами.*

Доказательство. Разложив на n линейных множителей каждый сомножитель в выражении (1.6.1), получим

$$p_n(z;x,y) = \prod_{r,s=1} (\sqrt[n]{z} + \varepsilon^r\sqrt[n]{x} + \varepsilon^s\sqrt[n]{y}), \tag{1.6.4}$$

где ε — (любой) первообразный корень n-й степени из единицы.

(i) Напомним, что мы для определенности работаем с ветвью корня $\sqrt[n]{z}$ в области $\mathbb{C}\setminus(-\infty,0]$, заданную условием $\sqrt[n]{1}=1$. Из равенства (1.6.4) вид-

но, что выражение $p_n(z;x,y)$ симметрично. Действительно,

$$\begin{aligned} p_n(x;z,y) &= \prod_{r,s=1}^{n} (\sqrt[n]{x} - \varepsilon^r \sqrt[n]{(-1)^n z} - \varepsilon^s \sqrt[n]{(-1)^n y}) \\ &= \prod_{r,s=1}^{n} (\sqrt[n]{x} + \varepsilon^r \sqrt[n]{z} + \varepsilon^s \sqrt[n]{y}) \\ &= \left(\varepsilon \cdot \ldots \cdot \varepsilon^{n-1}\right)^{-n} \prod_{r,s=1}^{n} \varepsilon^r (\sqrt[n]{z} + \varepsilon^{-r} \sqrt[n]{x} + \varepsilon^{s-r} \sqrt[n]{y}) \\ &= \prod_{r,s=1}^{n} (\sqrt[n]{z} + \varepsilon^r \sqrt[n]{x} + \varepsilon^s \sqrt[n]{y}) \\ &= p_n(z;x,y), \end{aligned}$$

где второе равенство следует из того, что $(-\varepsilon^s \sqrt[n]{(-1)^n x})^n = x$, т. е. для любого n выражение $-\varepsilon^s \sqrt[n]{(-1)^n x}$ пробегает все корни многочлена $t^n - x$ при $s = 1, \ldots, n$.

(ii) Заметим, что из равенства (1.6.4) также следует, что выражение $p_n(z;x,y)$ имеет своими корнями все суммы вида $x_j + y_k$, где $\{x_j\}$ и $\{y_k\}$ — множества корней многочленов $z^n + (-1)^{n+1}x$ и $z^n + (-1)^{n+1}y$. Тогда из Предложения 1.5.6 вытекает, что

$$p_n(z^n;x,y) = \chi(F(\underbrace{0,\ldots,0,(-1)^{n+1}x}_{n}) \boxplus F(\underbrace{0,\ldots,0,(-1)^{n+1}y}_{n});z).$$

(iii) Утверждение сразу следует из пункта (ii) и того, что собственные значения матрицы A^n суть n-ые степени собственных значений матрицы A.

□

Таким образом, результат n-значного умножения (1.1.3) можно задать новым способом как мультимножество корней характеристического многочлена матрицы

$$F(\underbrace{0,\ldots,0,(-1)^{n+1}x}_{n}) \boxplus F(\underbrace{0,\ldots,0,(-1)^{n+1}y}_{n}),$$

являющейся суммой Кронекера сопровождающих матриц Фробениуса, соот-

ветствующих многочленам $t^n - x$ и $t^n - y$.

Предложение 1.6.3 естественно обобщается. Для этого введем многочлены

$$p_n(z; x_1, ..., x_m) = \prod_{s_1,...,s_m=1}^{n} (\sqrt[n]{z} + \varepsilon^{s_1} \sqrt[n]{x_1} + ... + \varepsilon^{s_m} \sqrt[n]{x_m}). \tag{1.6.5}$$

Теорема 1.6.6. *Верны следующие утверждения:*

(i) *Многочлены $p_n(z; x_1, ..., x_m)$ симметричны по всем переменным.*

(ii) *Для всех комплексных z, x_1, ..., x_m имеется равенство*

$$p_n(z^n; x_1, ..., x_m) = \chi(F(\underbrace{0, ..., 0, (-1)^{n+1} x_1}_{n}) \boxplus ... \boxplus F(\underbrace{0, ..., 0, (-1)^{n+1} x_m}_{n}); z).$$

(iii) *Многочлены $p_n(z; x_1, ..., x_m)$ являются однородными многочленами от переменных z, x_1, ..., x_m степени n^{m-1} с целыми коэффициентами.*

Доказательство. Аналогично доказательству Предложения 1.6.3. □

1.7 Группы $\mathbb{G}_n$ и матрицы Вендта

В данном разделе устанавливается связь многочленов $p_n(z; x, y)$ с детерминантом матрицы Вендта, который известен в теории чисел в контексте большой теоремы Ферма.

Напомним следующие три определения (см. [Ган66; Баб86]).

Определение 1.7.1. *Матрицей Теплица* $\mathrm{Toep}(a_{n-1}, ..., a_1, a_0, a_{-1}, ..., a_{-(n-1)})$ называется $(n \times n)$-матрица

$$\begin{pmatrix} a_0 & a_{-1} & a_{-2} & \dots & a_{-(n-2)} & a_{-(n-1)} \\ a_1 & a_0 & a_{-1} & a_{-2} & \ddots & a_{-(n-2)} \\ a_2 & a_1 & a_0 & a_{-1} & \ddots & \vdots \\ \ddots & a_2 & a_1 & a_0 & \ddots & a_{-2} \\ a_{n-2} & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & a_{-1} \\ a_{n-1} & a_{n-2} & \dots & a_2 & a_1 & a_0 \end{pmatrix}.$$

Определение 1.7.2. Матрица Теплица $\mathrm{Toep}(a_{n-1},\dots,a_1,a_0,a_{-1},\dots,a_{-(n-1)})$ называется *циркулянтом*, если $a_j = a_{j-n}$ для каждого $j = 1,\dots,n-1$. Обозначение: $\mathrm{Circ}(a_0,\dots,a_{n-1})$.

Определение 1.7.3. Рассмотрим циркулянт $\mathrm{Circ}(a_0,\dots,a_{n-1})$. Умножим все его элементы, стоящие выше диагонали на переменную θ. Полученная матрица Теплица

$$\mathrm{Circ}_\theta(a_0,\dots,a_{n-1}) = \begin{pmatrix} a_0 & \theta a_1 & \theta a_2 & \cdots & \theta a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_0 & \theta a_1 & \ddots & \vdots \\ a_{n-2} & a_{n-1} & a_0 & \ddots & \theta a_2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \theta a_1 \\ a_1 & \cdots & a_{n-2} & a_{n-1} & a_0 \end{pmatrix}$$

и транспонированная к ней матрица называются *θ-циркулянтами*.

Матрицы Теплица и θ-циркулянты естественно возникают в контексте *сопутствующего кольца* унитарного многочлена $f(x)$. Это кольцо является подкольцом кольца матриц, порожденным всеми матрицами $g(C_f)$, где g пробегает множество всех многочленов из $R[x]$ для коммутативного кольца R с единицей и C_f — сопровождающая матрица Фробениуса (см. Определение 1.5.4). Обзор литературы на этот счет можно найти в работе [MMC25].

Анализируя структуру кронекеровых сумм сопровождающих матриц Фробениуса, получаем следующий результат:

Теорема 1.7.4. *Многочлен $p_n(z;x,y)$, участвующий в задании n-значного умножения в Примере 1.2.16, является детерминантом y-циркулянта размера $n \times n$:*

$$\mathrm{Circ}_y\left(w^n + (-1)^{n+1}x + y, \binom{n}{1}w, \dots, \binom{n}{n-1}w^{n-1}\right), \tag{1.7.5}$$

где $w^n = z$.

Доказательство. Воспользуемся пунктом (ii) Предложения 1.6.3. Заметим, что матрица

$$C = wI - F(\underbrace{0,\dots,0,(-1)^{n+1}x}_{n}) \boxplus F(\underbrace{0,\dots,0,(-1)^{n+1}y}_{n})$$

представляет собой блочную $(n\times n)$-матрицу вида

$$\begin{pmatrix} A & 0 & 0 & \cdots & (-1)^{n+1}xI \\ -I & A & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -I & A & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -I & A \end{pmatrix}, \tag{1.7.6}$$

где

$$A = wI - F(\underbrace{0,\ldots,0}_{n},(-1)^{n+1}y). \tag{1.7.7}$$

Тогда по Лемме 1.5.9 определитель матрицы (1.7.6) равен $\det(A^n+(-1)^{n+1}xI)$. Расписывая бином Ньютона $A^n = (wI-F)^n$, получаем матрицу Теплица, отличающуюся от матрицы (1.7.5) тем, что каждая нечетная диагональ (отсчитывание производится от главной диагонали, имеющей номер 0) взята со знаком минус. Определитель такой матрицы равен определителю матрицы (1.7.5). Действительно, это следует из того общего простого факта, что в каждом произведении $\operatorname{sgn}(\sigma)a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)}\ldots a_{n\sigma(n)}$ из выражения для детерминанта $\det(a_{ij})$ матрицы (a_{ij}) число тех множителей $a_{j\sigma(j)}$, для которых $j+\sigma(j)$ нечетно, является четным числом, поскольку сумма $\sum\limits_{j=1}^{n}(j+\sigma(j)) = n(n+1)$ четна. □

Пример 1.7.8. Пользуясь Теоремой 1.7.4, выпишем выражения для $p_n = p_n(z;x,y)$ через определители $(n\times n)$-матриц для $n=2,3$ и 4. В каждом случае $w^n = z$.

$$p_2 = \begin{vmatrix} w^2-x+y & 2wy \\ 2w & w^2-x+y \end{vmatrix}, \quad p_3 = \begin{vmatrix} w^3+x+y & 3yw & 3yw^2 \\ 3w^2 & w^3+x+y & 3yw \\ 3w & 3w^2 & w^3+x+y \end{vmatrix},$$

$$p_4 = \begin{vmatrix} w^4-x+y & 4yw & 6yw^2 & 4yw^3 \\ 4w^3 & w^4-x+y & 4yw & 6yw^2 \\ 6w^2 & 4w^3 & w^4-x+y & 4yw \\ 4w & 6w^2 & 4w^3 & w^4-x+y \end{vmatrix}.$$

Отметим, что несмотря на то, что для каждого $n>1$ матрица (1.7.5) несимметричная, ее определитель — симметрический многочлен $p_n(z;x,y)$.

Теорема 1.7.9. *При простых $n \geqslant 5$ многочлен*

$$p_n(z; x, y) - (x + y + z)^n$$

делится на n^4xyz.

Доказательство. Из симметричности рассматриваемых многочленов (Предложение 1.6.3) сразу следует делимость на xyz.

Для доказательства делимости на n^4 воспользуемся Теоремой 1.7.4. По определению детерминанта в сумме

$$\sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sgn}(\pi) a_{1\pi(1)} \dots a_{n\pi(n)}, \tag{1.7.10}$$

где (a_{ij}) — матрица (1.7.5), каждое слагаемое, в котором присутствует хотя бы четыре внедиагональных элемента, делится на n^4, поскольку $\binom{n}{k}$ делится на n для каждого $k = 1, \dots, n-1$ и простого n.

Рассмотрим теперь все слагаемые в (1.7.10), такие, что каждое из них содержит ровно три внедиагональных элемента матрицы (a_{ij}). Каждое такое слагаемое пропорционально (с положительным коэффициентом пропорциональности из кольца $\mathbb{Z}$) либо моному $\sigma_1^{n-3} y^2 z$ (первый тип), либо моному $\sigma_1^{n-3} y z^2$ (второй тип), где $\sigma_1 = x + y + z$. Прямое вычисление показывает, что после суммирования всех мономов первого типа получается следующий коэффициент при $\sigma_1^{n-3} y^2 z$:

$$\sum_{\substack{a+b+c=n \\ a,b,c \geq 1}} a \binom{n}{a} \binom{n}{b} \binom{n}{c}. \tag{1.7.11}$$

В силу симметрии по a, b, c выражение (1.7.11) равно выражению

$$\frac{n}{3} \sum_{\substack{a+b+c=n \\ a,b,c \geq 1}} \binom{n}{a} \binom{n}{b} \binom{n}{c}. \tag{1.7.12}$$

Выражение (1.7.12) при простых $n \geqslant 5$ делится на n^4. Случай мономов второго типа аналогичен.

Осталось рассмотреть сумму всех слагаемых в (1.7.10), таких, что каждое из них содержит ровно два внедиагональных элемента матрицы (a_{ij}). Каждое такое слагаемое пропорционально (с отрицательным коэффициентом про-

порциональности из кольца $\mathbb{Z}$) моному $\sigma_1^{n-2}yz$. Данная сумма равна выражению

$$-\sigma_1^{n-2}yz\cdot\sum_{k=1}^{n-1}k\binom{n}{k}^2. \tag{1.7.13}$$

Имеем равенство:

$$\sum_{k=1}^{n-1}k\binom{n}{k}^2=\sum_{\substack{a+b=n\\a,b\geq 1}}a\binom{n}{a}\binom{n}{b}=\frac{n}{2}\sum_{\substack{a+b=n\\a,b\geq 1}}\binom{n}{a}\binom{n}{b}. \tag{1.7.14}$$

Правая часть формулы (1.7.14) переписывается при помощи приравнивания коэффициентов при x^n в тождестве $(1+x)^n(1+x)^n=(1+x)^{2n}$ и дает равенство:

$$\sum_{k=0}^{n-1}k\binom{n}{k}^2=n\left(\binom{2n-1}{n-1}-1\right). \tag{1.7.15}$$

По теореме Вольстенхольма [Wol62] разность

$$\binom{2n-1}{n-1}-1$$

делится на n^3 для простых $n\geqslant 5$, поэтому (1.7.15) делится на n^4. Доказательство Теоремы 1.7.9 завершено. □

Результат Теоремы 1.7.9 нельзя усилить, поскольку

$$p_5(z;x,y)=\sigma_1^5-5^4\sigma_1^2\sigma_3+5^5\sigma_2\sigma_3,$$

где, как обычно, σ_i, $i=1,2,3$ — элементарные симметрические многочлены от переменных x, y и z.

Мы видим, что в доказательстве Теоремы 1.7.9 естественно потребовался факт о делимости разности $\binom{2n-1}{n-1}-1$ на n^3. В этом контексте напомним, что простым числом Вольстенхольма называется простое число n, для которого $\binom{2n-1}{n-1}-1$ делится на n^4 [Wei]. В настоящее время известны только два простых числа Вольстенхольма: 16 843 и 2 124 679. Следующее простое число Вольстенхольма, если оно существует, обязательно больше 10^{11}.

Пример 1.7.16. Как отмечено во Введении, компьютерный эксперимент показывает, что в разложениях коэффициентов многочленов $p_n(z;x,y)$ на про-

стые в базисе элементарных симметрических многочленов возникают простые числа, существенно большие, чем n уже при $n \leqslant 20$. Для иллюстрации приведем явный вид многочлена $p_{18}(z; x, y)$ в базисе элементарных симметрических многочленов σ_1, σ_2 и σ_3. Например, запись $(5, 0, 1) \to -2^8 3^1 67^1$ означает, что коэффициент при $\sigma_1^5 \sigma_3$ равен $-2^8 \cdot 3 \cdot 67$.

$(18, 0, 0) \to 1$

$(16, 1, 0) \to -2^2 3^2$

$(15, 0, 1) \to -2^1 3^5 43^1 293^1 13339^1$

$(14, 2, 0) \to 2^6 3^2$

$(13, 1, 1) \to -2^1 3^5 39079^1 30478663^1$

$(12, 3, 0) \to -2^8 3^1 7^1$

$(12, 0, 2) \to 3^4 167^1 58369^1 1702940402507^1$

$(11, 2, 1) \to -2^2 3^6 57769225879741^1$

$(10, 4, 0) \to 2^9 3^2 7^1$

$(10, 1, 2) \to -2^2 3^5 7^1 97^1 36913^1 180317^1 3375001057^1$

$(9, 3, 1) \to -2^1 3^5 23^1 144589^1 5245247209^1$

$(9, 0, 3) \to -2^1 3^8 5^1 12713^1 76919^1 37764598382689403^1$

$(8, 5, 0) \to -2^{11} 3^2 7^1$

$(8, 2, 2) \to 3^5 67589^1 6265409413034952103 51^1$

$(7, 4, 1) \to -2^5 3^5 11^1 13^1 102997724923217^1$

$(7, 1, 3) \to -2^1 3^8 13^1 124035886813^1 4531959359617576 43^1$

$(6, 6, 0) \to 2^{14} 3^1 7^1$

$(6, 3, 2) \to -2^1 3^4 13^3 1087^1 1879^1 2833^1 528719679255133^1$

$(6, 0, 4) \to 2^1 3^7 5^1 13^1 113^1 86137^1 215724736933^1 207036951417917^1$

$(5, 5, 1) \to -2^6 3^6 10168829241424199^1$

$(5, 2, 3) \to -2^1 3^9 5^1 367^1 739^1 466897^1 1103367329725671 20113^1$

$(4, 7, 0) \to -2^{16} 3^2$

$(4,4,2) \to 2^1 3^5 97^1 683^1 875241448225705706391329^1$

$(4,1,4) \to -2^1 3^8 11^1 179^1 13499^1 19801^1 67601^1 99257^1 1129433^1 1123012127^1$

$(3,6,1) \to -2^9 3^5 11^1 414927770423911^1$

$(3,3,3) \to -2^2 3^8 107137^1 308872954678391573732558940 19^1$

$(3,0,5) \to -2^2 3^{11} 17443^1 310401506239 1^1 8390307506252132076 89^1$

$(2,8,0) \to 2^{16} 3^2$

$(2,5,2) \to -2^2 3^5 41^1 569161591662570125828691816 7^1$

$(2,2,4) \to 3^8 7^2 137^1 141017479^1 2779127063107^1 131095595871761^1$

$(1,7,1) \to -2^9 3^5 721117^1 1512997111^1$

$(1,4,3) \to -2^1 3^8 5^1 199^1 520747^1 2094293950849^1 19804297603859^1$

$(1,1,5) \to -2^1 3^{11} 5^1 23^1 109^1 163^1 271^1 2269^1 5779^1 58049^1 29515996813312468 37^1$

$(0,9,0) \to -2^{18}$

$(0,6,2) \to 3^4 10837^1 8379438461^1 73146705440157233^1$

$(0,3,4) \to -2^1 3^7 11^1 443^1 105199^1 9893951^1 115291956551^1 41494691270 33^1$

$(0,0,6) \to 3^9 109^3 163^3 271^3 2269^3 5779^3$

Метод доказательства Теоремы 1.7.4 можно итерировать для выражения многочлена $p_n(z; x_1, \ldots, x_m)$, $m > 2$ через определитель матрицы порядка n^{m-1}.

Теорема 1.7.17. *Верны следующие утверждения:*

(i) *Имеется равенство*

$$A = wI - F(0, \ldots, 0, (-1)^{n+1} x_2) \boxplus \cdots \boxplus F(0, \ldots, 0, (-1)^{n+1} x_m), \qquad w^n = z.$$

(ii) *Все знаки «минус» у внедиагональных элементов в матрице*

$$B = A^n + (-1)^{n+1} x_1 I$$

можно заменить на знаки «плюс» — от этого определитель не изменится.

(iii) *Матрица B симметрична относительно побочной диагонали.*

(iv) *При* $x_2 = \ldots = x_m = z = 1$ *и* $x_1 = (-1)^n$ *получается матрица* $W_{m,n}$*, элементами которой служат нули и мультиномиальные коэффициенты в многочлене* $(z + x_2 + \ldots + x_m)^n$*. Матрица* $W_{m,n}$ *ортосимметрична, т. е. симметрична относительно главной и побочной диагоналей.*

Пример 1.7.18. Выпишем многочлен $p_2(z; x, y, u)$ для $n = 2$ (как обычно, $w^n = z$):

$$\begin{vmatrix} u+w^2-x+y & 2uw & 2wy & 2uy \\ 2w & u+w^2-x+y & 2y & 2wy \\ 2w & 2u & u+w^2-x+y & 2uw \\ 2 & 2w & 2w & u+w^2-x+y \end{vmatrix}.$$

Пример 1.7.19. Запишем несколько многочленов $p_n = p_n(z; x_1, \ldots, x_m)$ при $m = 3$ через элементарные симметрические функции σ_k, $k = 1, \ldots, 4$.

$$\begin{aligned} &p_1 = \sigma_1, \\ &p_2 = \sigma_1^4 - 2^3\sigma_1^2\sigma_2 + 2^4\sigma_2^2 - 2^6\sigma_4, \\ &p_3 = \sigma_1^9 - 3^4\sigma_1^6\sigma_3 + 3^7\sigma_1^3\sigma_3^2 - 3^9\sigma_3^3 + 2\cdot 3^7\sigma_1^5\sigma_4 - 3^9\sigma_1^3\sigma_2\sigma_4 + 3^{10}\sigma_1^2\sigma_3\sigma_4. \end{aligned}$$

Пример 1.7.20. То же при $m = 4$:

$$\begin{aligned} &p_1 = \sigma_1, \\ &p_2 = \sigma_1^8 - 2^4\sigma_1^6\sigma_2 + 2^5\cdot 3\sigma_1^4\sigma_2^2 - 2^8\sigma_1^2\sigma_2^3 + 2^8\sigma_2^4 - 2^7\sigma_1^4\sigma_4 + 2^{10}\sigma_1^2\sigma_2\sigma_4 - 2^{11}\sigma_2^2\sigma_4 \\ &\quad + 2^{12}\sigma_4^2 - 2^{11}\sigma_1^3\sigma_5 + 2^{13}\sigma_1\sigma_2\sigma_5 - 2^{14}\sigma_3\sigma_5. \end{aligned}$$

Из Теоремы 1.7.4 также вытекает следующая связь с важным классом детерминантов в теории чисел.

Определение 1.7.21. *Матрицей Вендта* W_n называется циркулянт

$$\begin{pmatrix} 1 & \binom{n}{1} & \binom{n}{2} & \cdots & \binom{n}{n-1} \\ \binom{n}{n-1} & 1 & \binom{n}{1} & \cdots & \binom{n}{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \binom{n}{1} & \binom{n}{2} & \binom{n}{3} & \cdots & 1 \end{pmatrix}. \tag{1.7.22}$$

Обратим внимание на то, что матрица (1.7.22) симметрична относительно главной и побочной диагоналей. Такие матрицы названы в [Wen94] *ортосимметричными*.

Таким образом, мы получили (x,y,z)-параметрическое семейство матриц, которое в случае $x=(-1)^n$, $y=z=1$ совпадает с матрицей W_n.

Все сказанное выше мотивирует следующее

Определение 1.7.23. Назовем *матрицей Вендта* $W_n(z;x,y)$ матрицу (1.7.5).

Подход Вендта (1894) к большой теореме Ферма на основе его детерминанта связан с решением сравнений вида

$$x^p+y^p+z^p\equiv 0 \pmod q$$

для различных нечетных простых p и q [Wen94]. Современное изложение результатов этой работы можно найти в [Rib99].

Предложение 1.7.24 [Wen94]**.** *Пусть p — нечетное простое число и $q=2kp+1$ — простое при некотором $k\geqslant 1$. Тогда существуют целые x,y,z, не делящиеся на q, такие, что $x^p+y^p+z^p\equiv 0 \pmod q$ тогда и только тогда, когда q является делителем* $\det W_{2k}$.

Основная идея доказательства Предложения 1.7.24 состоит в том, что детерминант матрицы Вендта W_n выражается [Rib99, Chapter IV, **(2a)**] через результант $\operatorname{res}_t(\cdot,\cdot)$ многочленов $(1+t)^n-t^n$ и t^n-1 по переменной t. Это является частным проявлением следующего хорошо известного факта [Rib99, Chapter IV, Lemma 2.1]:

$$\det \operatorname{Circ}(a_0,\ldots,a_{n-1})=\operatorname{res}_t(a_0+\ldots+a_{n-1}t^{n-1},t^n-1). \tag{1.7.25}$$

Для многочленов $p_n(z;x,y)$ получаем аналог этого результата:

Предложение 1.7.26. *Имеется равенство*

$$p_n(z;x,y)=(-1)^n\operatorname{res}_t(Q(t),t^n-1),$$

где

$$Q(t)=z-(u+vt)^n \quad u^n=(-1)^nx, \quad v^n=(-1)^ny.$$

Доказательство. Напомним, что результант двух многочленов есть произведение значений одного многочлена в корнях другого. Из формулы (1.6.1) получается требуемое утверждение. □

При $x = (-1)^n$, $y = z = 1$, выбирая $u = 1$ и $v = -1$, из Предложения 1.7.26 и формулы получаем:

$$\det W_n = p_n(1; (-1)^n, 1) = (-1)^n \operatorname{res}_t\big(1-(1-t)^n,\ t^n-1\big).$$

Основной результат данного раздела — новая формулировка Теоремы 1.7.4:

Теорема 1.7.27. *Для каждого целого $n \geqslant 1$ многочлен $p_n(z; x, y)$ представляет собой детерминант матрицы Вендта $W_n(z; x, y)$.*

В завершение данного раздела покажем, что многочлены $p_n(z; x_1, \ldots, x_m)$ неприводимы над $\mathbb{C}$.

Теорема 1.7.28. *Пусть $x_1, \ldots, x_m$ — алгебраически независимые переменные и $n_1, \ldots, n_m$ — натуральные числа. Тогда многочлен*

$$q(\{n_i\}, \{x_j\}; z) = \chi(F(\underbrace{0, \ldots, 0, -x_1}_{n_1}) \boxplus \ldots \boxplus F(\underbrace{0, \ldots, 0, -x_m}_{n_m}); z) \tag{1.7.29}$$

переменных $z, x_1, \ldots, x_m$ неприводим над полем $\mathbb{C}$, где $F(\underbrace{0, \ldots, 0, -x_j}_{n_j})$ — сопровождающая матрица Фробениуса (1.5.5) многочлена $t^{n_j} - x_j$.

Доказательство. Введем следующее алгебраическое расширение $K : L$ поля $L = \mathbb{C}(x_1, \ldots, x_m)$ и элемент θ:

$$K = L(\alpha_1, \ldots, \alpha_m), \qquad \alpha_j^{n_j} = x_j, \qquad \theta = \alpha_1 + \cdots + \alpha_m.$$

Сначала покажем, что $[K : L] = n_1 \ldots n_m$.

Пусть $K_{j-1} := L(\alpha_1, \ldots, \alpha_{j-1})$ для каждого $j = 1, \ldots, m$. Т.к. $x_i = \alpha_i^{n_i}$ при $i < j$, то $K_{j-1} = \mathbb{C}(\alpha_1, \ldots, \alpha_{j-1}, x_j, \ldots, x_m)$. Из алгебраической независимости элементов $\alpha_1, \ldots, \alpha_{j-1}, x_j, \ldots, x_m$ следует, что $R_{j-1} := \mathbb{C}[\alpha_1, \ldots, \alpha_{j-1}, x_j, \ldots, x_m]$ — полиномиальное кольцо.

Покажем, что для каждого $j = 1, ..., m$ многочлен $P_j(t) = t^{n_j} - x_j$ в кольце $\mathrm{Frac}(R_{j-1})[t] = K_{j-1}[t]$ является неприводимым по признаку Эйзенштейна (см. [Лен68, Глава V, §7]). Для этого заметим, что кольцо R_{j-1} — факториальное кольцо и x_j — простой элемент в нем. Элемент x_j, очевидно, не делит старший коэффициент многочлена $P_j(t)$, но делит все его остальные коэффициенты. В то же время, x_j^2 не делит свободный член многочлена $P_j(t)$, поскольку R_{j-1} — область целостности. Итак, по признаку Эйзенштейна многочлен $P_j(t)$ неприводим и поэтому $[K_j : K_{j-1}] = n_j$.

Из теоремы о башне расширений следует, что $[K : L] = n_1 ... n_m$. Следовательно, мономы $\alpha_1^{s_1} \cdots \alpha_m^{s_m}$, где $0 \le s_j < n_j$, образуют базис расширения K над полем L.

Теперь покажем, что элемент θ примитивен.

Для каждого набора корней из единиц $(\zeta_1, \ldots, \zeta_m)$, $\zeta_j^{n_j} = 1$ существует автоморфизм сопряжения σ_ζ поля K над полем L, заданный по формуле:

$$\sigma_\zeta(\theta) = \zeta_1\alpha_1 + \cdots + \zeta_m\alpha_m.$$

Эти автоморфизмы сопряжения σ_ζ попарно различны. Действительно, если бы $\sigma_\zeta(\theta) = \sigma_\eta(\theta)$ для некоторых различных ζ и η, то $\sum_{j=1}^m (\zeta_j - \eta_j)\alpha_j = 0$. Но тогда существовало бы такое j_0, что α_{j_0} алгебраичен над $\mathbb{C}(x_1, \ldots, \widehat{x_{j_0}}, \ldots, x_m)$. Отсюда бы следовало, что элемент $x_{j_0} = \alpha_{j_0}^{n_{j_0}}$ алгебраичен над $\mathbb{C}(x_1, \ldots, \widehat{x_{j_0}}, \ldots, x_m)$ в противоречии с алгебраической независимостью элементов $x_1, ..., x_m$. Итак, автоморфизмы сопряжения σ_ζ попарно различны.

Из вышесказанного следует, что элемент $\theta \in K$ имеет по крайней мере $n_1 ... n_m$ попарно различных сопряженных элементов $\sigma_\zeta(\theta)$. Поскольку $[K : L] = n_1 ... n_m$, то $L(\theta) = K$, т.е. θ — примитивный элемент расширения $K : L$.

Оператор умножения на θ на L-векторном пространстве K, в базисе

$$\{\alpha_1^{s_1} \cdots \alpha_m^{s_m} \mid 0 \le s_j < n_j\}$$

имеет матрицу

$$F(0, \ldots, 0, x_1) \boxplus \cdots \boxplus F(0, \ldots, 0, x_m).$$

Следовательно, его характеристический многочлен в точности равен $q(\{n_i\}, \{x_j\}; z)$. Но поскольку $K = L(\theta)$, тот же оператор в базисе $1, \theta, \ldots, \theta^{n_1 \cdots n_m - 1}$ задается сопровождающей матрицей Фробениуса минимального многочлена

элемента θ над L. Отсюда $q(\{n_i\},\{x_j\};z) = m_{\theta,L}(z)$ и, следовательно, многочлен q неприводим над L.

Наконец, поскольку многочлен q относительно z имеет коэффициент 1 при старшем члене, любое его нетривиальное разложение в кольце $\mathbb{C}[x_1,\dots,x_m, z]$ оставалось бы нетривиальным и в кольце $L[z]$, что невозможно. Следовательно, q неприводим и в $\mathbb{C}[x_1,\dots,x_m,z]$.

□

Следствие 1.7.30. *Многочлены $p_n(z;x_1,\dots,x_m)$ переменных $z,x_1,\dots,x_m$ неприводимы над $\mathbb{C}$ для всех натуральных n.*

Доказательство. Из Теоремы 1.7.28 получаем, что многочлен $p_n(z^n;x_1,\dots,x_m)$ переменной z неприводим над $\mathbb{C}$. Отсюда сразу следует неприводимость многочлена $p_n(z;x_1,\dots,x_m)$ над $\mathbb{C}$. □

Глава 2

Алгебраические n-значные моноиды, проективная двойственность и гиперповерхности Ферма

2.1 Проективная двойственность и семейство моноидов $\mathbb{M}_n(\mathbb{C}P^1)$

Рассмотрим кривую

$$X_n = \{\, p_n(z; x, y) = 0 \,\} \subset \mathbb{C}P^2,$$

где $p_n(z; x, y)$ — многочлен (1.6.1).

Предложение 2.1.1. *Проективно двойственная кривая к X_n имеет вид*

$$X_n^\vee = \{\, P_{n-1}(w; u, v) = 0 \,\} \subset (\mathbb{C}P^2)^*,$$

где

$$P_{n-1}(w; u, v) = (uvw)^{n-1}\, p_{n-1}(w^{-1}; u^{-1}, v^{-1}).$$

Доказательство. Нетрудно проверить, что кривая $X_n \subset \mathbb{C}P^2$ допускает следующую рациональную параметризацию:

$$(x, y, z) = \big((-s-t)^n,\ (-t)^n,\ s^n\big). \tag{2.1.2}$$

Карта $\{w = 1\}$, двойственная к $\{z = 1\}$ в $(\mathbb{C}P^2)^*$, состоит из прямых $\{ux + vy + 1 = 0\}$, каждая из которых задаётся парой (u, v). По определению проективной двойственности (см., например, [GKZ94, Chapter 1, Section 1, Subsection B]), для любой кривой $X = (x(t), y(t))$ в карте $z = 1$ её каустика $X^\vee$ в карте

$w = 1$ имеет параметрическое представление $(u(t), v(t))$ такое, что уравнение касательной к X в точке $(x(t), y(t))$ имеет вид

$$u(t)x + v(t)y + 1 = 0. \tag{2.1.3}$$

Следовательно,

$$(u(t), v(t)) = \left(\frac{y'(t)}{R(t)}, \frac{-x'(t)}{R(t)}\right), \tag{2.1.4}$$
$$R(t) = x'(t)\,y(t) - x(t)\,y'(t).$$

Подставляя (2.1.2) в (2.1.4), получаем в карте $\{w = 1\}$ параметрическое уравнение для $X_n^\vee$:

$$(u, v) = \left((-1-t)^{1-n},\ t^{1-n}\right). \tag{2.1.5}$$

Поскольку при нечётных n множества значений многозначных функций $u^{\frac{1}{1-n}}$ и $-u^{\frac{1}{1-n}}$ совпадают, а при чётных n имеем $(-u)^{\frac{1}{1-n}} = -u^{\frac{1}{1-n}}$ (для подходящей ветви корня), исключение t из (2.1.5) даёт

$$u^{\frac{1}{1-n}} + v^{\frac{1}{1-n}} = (-1)^{n-1}. \tag{2.1.6}$$

Положим $m = n - 1$. Рассмотрим алгебраический элемент

$$\theta_1 = \left(u^{-\frac{1}{m}} + v^{-\frac{1}{m}}\right)^{-m}$$

в расширении

$$\mathbb{Q}(u, v) \subset \mathbb{Q}(\sqrt[m]{u}, \sqrt[m]{v}).$$

Тогда минимальный многочлен элемента θ_1 равен $(uvw)^m\, p_m(w^{-1}; u^{-1}, v^{-1})$, поскольку минимальным многочленом элемента

$$\theta_2 = \left(u^{\frac{1}{m}} + v^{\frac{1}{m}}\right)^m$$

служит многочлен $p_m(w; u, v)$ согласно Следствию 1.7.30. Поскольку (2.1.6) задаёт кривую $X^\vee$ в карте $\{w = 1\}$, получаем искомый X_n-дискриминант:

$$\Delta_{X_n} = (uvw)^m\, p_m(w^{-1}; u^{-1}, v^{-1}).$$

□

Пример 2.1.7. Для X_2 имеем

$$(u,v)=\left(-\frac{1}{1+t},\ \frac{1}{t}\right) \quad \text{или} \quad \frac{1}{u}+\frac{1}{v}=-1.$$

Взяв проективное замыкание (гомогенизацию), получаем, что $X^\vee$ задаётся уравнением

$$P_1 = uvw\,p_1(w^{-1};u^{-1},v^{-1}) = (u+v)w+uv=0.$$

Пример 2.1.8. Для X_3:

$$(u,v)=\left(\frac{1}{(1+t)^2},\ \frac{1}{t^2}\right) \quad \text{или} \quad \frac{1}{\sqrt{u}}+\frac{1}{\sqrt{v}}=1.$$

Кривая $X_3^\vee$ задаётся уравнением

$$P_2 = (uvw)^2\,p_2(w^{-1};u^{-1},v^{-1}) = (uv-w(u+v))^2-4uvw^2=0,$$

то есть

$$P_2=(uv)^2+(vw)^2+(uw)^2-2u^2vw-2uv^2w-2uvw^2.$$

В [GKZ94, Chapter 1, Example 2.3] для семейства кривых Ферма (при целых $n\geq 2$)

$$F_n=\{x^n+y^n=z^n\} \tag{2.1.9}$$

показано, что для данного n двойственная кривая (в карте $\{w=1\}$) задаётся уравнением

$$F_n^\vee=\left\{u^{\frac{n}{n-1}}+v^{\frac{n}{n-1}}=1\right\}.$$

Для $n=3$ получается явный вид:

$$u^6+v^6+w^6-2u^3v^3-2u^3w^3-2v^3w^3=0.$$

Из доказательства Предложения 2.1.1 получаем:

Теорема 2.1.10. *Пусть F_n — кривая Ферма (2.1.9), $n\geq 2$. Тогда двойственная к ней кривая задаётся уравнением $\{F_n^\vee(u,v,w)=0\}$, где*

$$F_n^\vee(u,v,w)=p_{n-1}(w^n;u^n,v^n).$$

Теперь покажем, что проективная двойственность между X_n и $X_n^\vee$ задаёт оператор сдвига в некотором семействе n-значных алгебраических моноидов $\mathbb{M}_n(\mathbb{C}P^1)$.

Теорема 2.1.11. *Структура алгебраической n-значной косетной группы $\mathbb{G}_n(\mathbb{C})$ продолжается (лишь) до структуры алгебраического n-значного косетного моноида $\mathbb{M}_n(\mathbb{C}P^1)$ на $\mathbb{C}P^1$. При этом $\infty * x = x * \infty = [\infty, \infty, \dots, \infty]$ для любого $x \in \mathbb{C}P^1 \setminus \{\infty\}$ и значение $\infty * \infty$ не определено.*

Доказательство. Покажем, что в однородных координатах умножение $* : \mathbb{C}P^1 \times \mathbb{C}P^1 \longrightarrow \mathbb{C}P^n$ задаётся формулой

$$(x_1 : x_0) * (y_1 : y_0) = (b_n : b_1 : \ldots : b_0), \tag{2.1.12}$$

где $b_j = b_j(x, y)$ — коэффициент при $z_1^{n-j} z_0^{\,j}$ в однородном многочлене

$$(x_0 y_0 z_0)^n \; p_n\!\left(\frac{z_1}{z_0};\; (-1)^n \frac{x_1}{x_0},\; (-1)^n \frac{y_1}{y_0}\right)$$

и $(x_1 : x_0)$, $(y_1 : y_0)$ не равны одновременно $(1 : 0)$.

Рассмотрим n-значный закон $p_n(z; (-1)^n x, (-1)^n y)$ на $\mathbb{C}$ как выражение искомого закона на $\mathbb{C}P^1$ в карте $z = 1$:

$$\mu : \; \mathbb{C}P^1 \times \mathbb{C}P^1 \to \mathrm{Sym}^n(\mathbb{C}P^1)$$
$$(x, y) = ((x_1 : x_0), (y_1 : y_0)) \mapsto [(w_1 : 1), \dots, (w_n : 1)],$$

где $w_1, \dots, w_n$ — корни по переменной z многочлена $p(z; x, y)$. Отождествим $\mathrm{Sym}^n(\mathbb{C}P^1)$ с $\mathbb{C}P^n$ посредством изоморфизма

$$\varphi : \; \mathrm{Sym}^n(\mathbb{C}P^1) \longrightarrow \mathbb{C}P^n \cong G(1, n, 2) \tag{2.1.13}$$
$$\boldsymbol{u} = [(u_{11} : u_{10}), \dots, (u_{n1} : u_{n0})] \longmapsto \big(z_1 u_{10} - z_0 u_{11}\big) \cdots \big(z_1 u_{n0} - z_0 u_{n1}\big) = \varphi(\boldsymbol{u})(z_1 : z_0),$$

при котором точка $\boldsymbol{u}$ симметрической степени переходит в однородную форму $\varphi(\boldsymbol{u})(z_1 : z_0)$, произведение n линейных форм

$$\ell_j(z_1 : z_0) = z_1 u_{j1} - z_0 u_{j0},$$

то есть в точку многообразия Чжоу $G(1, n, 2)$. Тогда по формулам Виета ком-

позиция $\varphi \circ \mu$ даёт искомый закон (2.1.12).

Легко видеть, что

$$b_n = (x_1 y_0 + (-1)^{n+1} x_0 y_1)^n,$$

каждый b_j делится на $(x_0 y_0)^j$ при $j = 1, \dots, n$, и $b_0 = (x_0 y_0)^n$. Следовательно, умножение (2.1.12) определено для всех пар $(x, y) \in \mathbb{C}P^1 \times \mathbb{C}P^1$, кроме $(\infty, \infty) = ((1:0),(1:0))$. Кроме того, элемент ∞ не обратим.

Ассоциативность полученной операции очевидна. □

Теорема 2.1.14. *При проективной двойственности кривая X_n $(n \geq 2)$ переходит в*

$$X_n^\vee = \{ (uvw)^{n-1} p_{n-1}(1/w; 1/u, 1/v) = 0 \} \subset (\mathbb{C}P^2)^*.$$

Композиция двойственности $X_n \mapsto X_n^\vee$ с последующим преобразованием Мёбиуса $(u, v, w) \mapsto (1/u, 1/v, 1/w)$ определяет операцию сдвига $\mathbb{M}_n(\mathbb{C}P^1) \mapsto \mathbb{M}_{n-1}(\mathbb{C}P^1)$ в семействе алгебраических n-значных моноидов.

Доказательство. Следует из Предложения 2.1.1. □

Следующий факт впервые был получен в [GRS26, Теорема 2.3]. Мы приводим ещё одно доказательство с использованием теории проективной двойственности, которое проясняет природу этого результата.

Предложение 2.1.15 [GRS26]**.** *Дискриминант $\operatorname{disc}_t(P)$ многочлена*

$$P(t) = (z t^{n-1} + y)(1+t)^{n-1} + (-1)^{n-1} x t^{n-1}$$

по переменной t, являющийся многочленом степени $4n-6$, связан с $p_n(z; x, y)$ соотношением

$$(-1)^n (n-1)^{2n-2} (xyz)^{n-2} p_n(z; x, y) = \operatorname{disc}_t(P)$$

для каждого $n \geq 2$.

Доказательство. Рассмотрим кривую $X_n^\vee$. Мы уже знаем, что она параметризуется формулой (2.1.5). Тогда, по определению $X_n^\vee$-дискриминанта, кривая $X_n^{\vee\vee}$ является неприводимой компонентой дискриминанта многочлена, полученного ограничением прямой (2.1.3) на $X_n^\vee$, т.е. в карте $\{w = 1\}$ кривая $X_n^{\vee\vee}$

является дискриминантом по t уравнения

$$\frac{1}{(-1-t)^{n-1}}\cdot x+\frac{1}{t^{n-1}}\cdot y+1=0. \tag{2.1.16}$$

Взяв проективное замыкание многочлена в левой части (2.1.16), получаем $p_n(z;x,y)$ с точностью до постоянного множителя. Легко видеть, что если $xyz=0$, то при $n\geq 2$ многочлен $P(t)$ имеет кратный корень, следовательно, $\operatorname{disc}_t(P)=0$. Это означает, что $\operatorname{disc}_t(P)$ делится на некоторую степень монома xyz. По [GRS26, Теорема 2.2], $\operatorname{disc}_t(P)$ не имеет других сингулярных компонент. Теперь требуемое утверждение следует из сравнения степеней. □

В связи с многомерными ядрами Бесселя

$$K_N(x_1,\dots,x_m\mid z)=\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{j_1+\cdots+j_m=r}\binom{r}{j_1,\dots,j_m}^N\frac{x_1^{j_1}\cdots x_m^{j_m}}{z^r},$$

в [GRS26] рассматривается итерированный аналог многочленов $p_n(z;x,y)$:

$$p_{n,m}(z;\boldsymbol{x})=\prod_{k_1,\dots,k_m=1}^{n}\left(\sqrt[n]{z}+\varepsilon^{k_1}\sqrt[n]{x_1}+\cdots+\varepsilon^{k_m}\sqrt[n]{x_m}\right). \tag{2.1.17}$$

Многочлен $p_{n,m}(z;\boldsymbol{x})$ определяет m-арную n^{m-1}-значную алгебраическую операцию

$$\mu(x_1,\dots,x_m)=[z\mid p_{n,m}(z;\boldsymbol{x})=0].$$

Обозначим через $\mathcal{O}_{n,m}(\mathbb{C}P^1)$ многообразие $\mathbb{C}P^1$ с операцией μ.

Пусть

$$X_{n,m}=\{p_{n,m}=0\}$$

— гиперповерхность в $\mathbb{C}P^m$. Для целых $n\geq 2$ и $m\geq 2$ положим

$$P_{n,m}=(u_1\cdots u_m w)^{n-1}\,p_{n-1,m}(w^{-1};u_1^{-1},\dots,u_m^{-1}).$$

Тем же методом, что и в Теореме 2.1.14, получаем следующее.

Теорема 2.1.18. *Композиция двойственности ($m\geq 2$, $n\geq 2$)*

$$X_{n,m}\mapsto X_{n,m}^{\vee}=\{P_{n,m}=0\}\subset(\mathbb{C}P^m)^*$$

с последующим преобразованием Мёбиуса

$$(u_1, \dots, u_m, w) \mapsto (1/u_1, \dots, 1/u_m, 1/w)$$

определяет операцию сдвига

$$\mathcal{O}_{n,m}(\mathbb{C}P^1) \mapsto \mathcal{O}_{n-1,m}(\mathbb{C}P^1)$$

в семействе m-арных n^{m-1}-значных алгебраических структур $\mathcal{O}_{n,m}(\mathbb{C}P^1)$.

Этот результат проясняет утверждение [GRS26, Теорема 3.2], касающееся связи между многочленом $p_{n,m}(z; \boldsymbol{x})$ и дискриминантом однородного многочлена

$$P(\boldsymbol{u}) = (u_1 \cdots u_m)^{n-1} \left(z + (-1)^n \left(\sum_{j=1}^{m} u_j \right)^{n-1} \cdot \sum_{j=1}^{m} \frac{x_j}{u_j^{n-1}} \right),$$

взятым по переменным $u_1, \dots, u_m$ в смысле [GKZ94, Глава 13].

Наблюдение из Теоремы 2.1.10 имеет итерированный аналог.

Теорема 2.1.19. *Пусть $F_{n,m}$ — гиперповерхность Ферма*

$$F_{n,m} = \{x_1^n + x_2^n + \dots + x_m^n = z^n\}$$

в $\mathbb{C}P^m$ с координатами $x_1, \dots, x_m, z$. Двойственная гиперповерхность задаётся уравнением

$$F_{n,m}^{\vee} = \{p_{n-1,m}(w^n; u_1^n, \dots, u_m^n) = 0\} \tag{2.1.20}$$

в $(\mathbb{C}P^m)^*$ с двойственными координатами $u_1, \dots, u_m, w$, где $p_{n,m}$ обозначает многочлен (2.1.17).

В [GKZ94, Пример 4.16] было замечено, что двойственная гиперповерхность может быть задана уравнением

$$u_1^{\frac{n}{n-1}} + \dots + u_m^{\frac{n}{n-1}} = z^{\frac{n}{n-1}}$$

и что это иррациональное уравнение можно заменить полиномиальным уравнением степени $n(n-1)^{m-1}$. Теорема 2.1.19 проясняет это наблюдение, давая конкретную реализацию (2.1.20) полиномиального уравнения.

Гиперповерхности Ферма играют важную роль в различных задачах алгебраической топологии и алгебраической геометрии. Их топология изучалась в различных работах. Например, каждая гиперповерхность Ферма $F_{2,m}$ диффеоморфна однородному пространству (грассманиану) $\mathrm{SO}(m+1)/(\mathrm{SO}(2)\times \mathrm{SO}(m-1))$ ориентированных плоскостей в $\mathbb{R}^{m+1}$ [KH81, Глава XI, Пример 10.6].

2.2 Законы $p_n(z;x,y)$ и дискриминанты расширений полей

Для формулировки следующего Предложения нам нужно определение, впервые введённое Дедекиндом для алгебраических числовых полей [Dir71, с. 429]. Мы приводим общую версию, следуя [Sut16, Лекция 12, Определение 12.5]:

Определение 2.2.1. Пусть R — коммутативное кольцо с единицей, и пусть $R \subset S$ — конечное расширение, такое что S является свободным R-модулем. Для любых элементов $e_1,\dots,e_n \in S$ их *дискриминант* определяется формулой

$$\Delta(e_1,\dots,e_n) = \det\bigl(\mathrm{Tr}_{S/R}(e_i e_j)\bigr)_{ij},$$

где $\mathrm{Tr}(-)$ обозначает след R-линейного отображения $S \to S$, задаваемого умножением на $e_i e_j$.

В интересующем нас случае Определение 2.2.1 сводится к классическому определению дискриминанта многочлена.

Лемма 2.2.2 (Лекция 12, Предложение 12.6 [Sut16])**.** *Пусть $K \subset L$ — конечное сепарабельное расширение степени n, пусть Ω — нормальное замыкание L (над K), и пусть $\sigma_1,\dots,\sigma_n$ — различные вложения $L \hookrightarrow \Omega$ над K. Тогда:*

(i) *Для любых элементов $e_1,\dots,e_n \in L$ имеем*

$$\Delta(e_1,\dots,e_n) = \det(\sigma_i(e_j))_{ij}^2.$$

(ii) *Для любого $x \in L$ имеем*

$$\Delta(1, x, \dots, x^{n-1}) = \prod_{i<j} \big(\sigma_i(x) - \sigma_j(x)\big)^2.$$

При замене базиса $\boldsymbol{e}' = \boldsymbol{e}C$, $C \in \mathrm{Mat}_K(n)$, дискриминант изменяется по формуле

$$\Delta_{L/K}(\boldsymbol{e}') = \det(C)^2 \, \Delta_{L/K}(\boldsymbol{e}).$$

В случае, когда K является полем частных области Дедекинда A, L/K — конечное сепарабельное расширение, а B — целое замыкание A в L, это позволяет определить дискриминант $\Delta_{L/K}$ расширения L/K как дробный идеал, порождённый множеством

$$\{\Delta(\boldsymbol{e}) \mid \boldsymbol{e} \text{ является } A\text{-базисом } A\text{-модуля } B\}.$$

В нашем случае кольцо $\mathbb{Q}[x, y]$ не является кольцом Дедекинда.

Предложение 2.2.3. *Для каждого целого $n \geq 2$ дискриминант многочлена $p_n(z; x, y)$ по переменной z совпадает с дискриминантом $\Delta(1, \theta, \dots, \theta^{n-1})$ для расширения $\mathbb{Q}(x, y) \subset \mathbb{Q}(\theta)$, где $\theta = (\sqrt[n]{x} + \sqrt[n]{y})^n$.*

Доказательство. Действительно, как уже отмечалось, $p_n(z; x, y)$ является минимальным многочленом элемента $\theta = (\sqrt[n]{x} + \sqrt[n]{y})^n$, см. Теорему 1.7.28 и Следствие 1.7.30. □

2.3 Предварительные сведения о топологических свойствах гиперповерхностей Ферма M_d^n

В данном разделе и далее мы поменяем обозначения на M_d^n для гиперповерхностей Ферма ($d, n \geq 1$):

$$\begin{aligned} M_d^n &= \{F_d^n = 0\} \\ &= \{z_0^d + \dots + z_{n+1}^d = 0\} \subset \mathbb{C}P^{n+1} =: \mathbb{P}^{n+1}. \end{aligned}$$

Пример 2.3.1. Гиперповерхности Ферма имеют следующие хорошо известные представители:

$$
\begin{aligned}
&M_1^n \cong \mathbb{P}^n, && n \geq 1,\\
&M_d^1 \text{ является кривой рода } (d-1)(d-2)/2, && d \geq 1,\\
&M_2^n \cong \mathrm{SO}(n+2)/\big(\mathrm{SO}(2)\times \mathrm{SO}(n)\big), && n \geq 1,\\
&M_2^2 \cong \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1,\\
&M_2^4 \cong \mathrm{Gr}_{\mathbb{C}}(2,4),\\
&M_4^2 \cong \text{K3-поверхность}
\end{aligned}
$$

где символом $\cong$ обозначена диффеоморфность, $\mathrm{SO}(n)$ — группа вещественных ортогональных матриц $n\times n$, $\mathrm{Gr}_{\mathbb{C}}(2,4)$ — комплексный грассманиан двумерных плоскостей в $\mathbb{C}^4$.

Гиперповерхность Ферма является гладким неприводимым проективным многообразием. Другими словами, многообразие M_d^n — полное пересечение, состоящее из одного уравнения.

Напомним, что *полным пересечением* называется многообразие $X_n(\boldsymbol{d}) \subset \mathbb{C}P^{n+k}$, являющееся трансверсальным пересечением k комплексных гиперповерхностей мультистепени $\boldsymbol{d} = \{d_1, \ldots, d_k\}$.

Согласно наблюдению Тома, диффеоморфный тип $X_n(\boldsymbol{d})$ зависит только от мультистепени $\boldsymbol{d}$ [CN25].

Топология полных пересечений активно изучается и по сей день. В недавней работе [CN25] была получена классификация полных четырехмерных пересечений с точностью до диффеоморфизма и, тем самым, доказана гипотеза Салливана в комплексной размерности 4.

Пусть $N = \binom{n+d+1}{d} - 1$. Полная линейная система $\left|\mathscr{O}_{\mathbb{P}^{n+1}}(d)\right|$ задаёт вложение Веронезе степени d:

$$
\begin{aligned}
\nu_d :\ \mathbb{P}^{n+1} &\hookrightarrow \mathbb{P}\Big(\big(\mathrm{H}^0(\mathbb{P}^{n+1}, \mathscr{O}_{\mathbb{P}^{n+1}}(d))\big)^*\Big) \cong \mathbb{P}^N\\
(z_0 : \cdots : z_{n+1}) &\longmapsto \big(Y_{d,\ldots,0} : \cdots : Y_{0,\ldots,d}\big)
\end{aligned}
$$

$$Y_{d_0,\dots,d_{n+1}} = z_0^{d_0}\cdots z_{n+1}^{d_{n+1}}, \qquad d_0+d_1+\cdots+d_{n+1}=d.$$

Таким образом, имеем:

$$M_d^n = \nu_d(\mathbb{P}^{n+1}) \cap H_{F_d^n},$$

где $H_{F_d^n}$ обозначает гиперплоскость

$$H_{F_d^n} = \Big\{ [Y] \in \mathbb{P}^N \;\Big|\; \sum_{j=0}^{n+1} Y_{0,\dots,0,\underbrace{d}_{j},0,\dots,0} = 0 \Big\}.$$

Используя точную последовательность для нормального расслоения $\mathcal{N}_{X\hookrightarrow\mathbb{P}^{n+1}}$

$$0 \longrightarrow \mathcal{T}_X \longrightarrow \mathcal{T}_{\mathbb{P}^{n+1}}|_X \longrightarrow \mathcal{N}_{X\hookrightarrow\mathbb{P}^{n+1}} \longrightarrow 0 \tag{2.3.2}$$

и последовательность Эйлера

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{n+1}} \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{n+1}}(1)^{\oplus n+2} \longrightarrow \mathcal{T}_{\mathbb{P}^{n+1}} \longrightarrow 0 \tag{2.3.3}$$

(при этом $\mathcal{N}_{X\hookrightarrow\mathbb{P}^{n+1}} \cong \mathcal{O}_X(d)$), получаем (см. также [Dim92, гл. 5, § 3, упр. 3.7(i)]):

Предложение 2.3.4. *Для любой гладкой комплексной гиперповерхности X степени d в $\mathbb{P}^{n+1}$ имеет место формула*

$$\chi(X) = n+2+\frac{(1-d)^{n+2}-1}{d}.$$

Напомним следующий классический результат:

Теорема 2.3.5 (Теорема Лефшеца о гиперплоском сечении, [Мил65, Теорема 7.3, Следствие 7.4], [Voi03, Theorem 1.23])**.** *Пусть $X \subset \mathbb{P}^N$ — гладкое n-мерное комплексное проективное алгебраическое многообразие, пусть Y — гиперплоское сечение многообразия X и пусть $i\colon Y \hookrightarrow X$ — вложение.*

Тогда индуцированные отображения

$$\mathrm{H}_k(Y,\mathbb{Z}) \xrightarrow{i_*} \mathrm{H}_k(X,\mathbb{Z}), \qquad \mathrm{H}^k(X,\mathbb{Z}) \xrightarrow{i^*} \mathrm{H}^k(Y,\mathbb{Z}),$$

$$\pi_k(Y,y_0) \xrightarrow{i_*} \pi_k(X,i(y_0)).$$

являются изоморфизмами при $k < n-1$. При $k = n-1$ имеются точные после-

довательности:

$$\mathrm{H}_{n-1}(Y,\mathbb{Z}) \xrightarrow{i_*} \mathrm{H}_{n-1}(X,\mathbb{Z}) \longrightarrow 0,$$

$$0 \longrightarrow \mathrm{H}^{n-1}(X,\mathbb{Z}) \xrightarrow{i^*} \mathrm{H}^{n-1}(Y,\mathbb{Z}),$$

$$\pi_{n-1}(Y,y_0) \xrightarrow{i_*} \pi_{n-1}(X,x_0) \longrightarrow 0.$$

Следствие 2.3.6. *Для гомологий, когомологий и чисел Бетти имеют место формулы:*

$$\mathrm{H}_k(M_d^n,\mathbb{Z}) \cong \mathrm{H}^k(M_d^n,\mathbb{Z}) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}, & k \text{ чётно, } k \neq n, \text{ и } 0 \leq k \leq 2n, \\ 0, & k \text{ нечётно,} \\ \mathbb{Z}^{\,b_n(d)}, & k = n. \end{cases}$$

$$b_n(d) = \begin{cases} \chi(M_d^n) - n = 2 + \dfrac{(1-d)^{n+2}-1}{d}, & n \text{ чётно,} \\ n+1-\chi(M_d^n) = \dfrac{1-(1-d)^{n+2}}{d} - 1, & n \text{ нечётно.} \end{cases}$$

Следствие 2.3.7. *Пусть $d \geq 2$, $n \geq 3$. Тогда*

$$\pi_k(M_d^n) \cong \begin{cases} 0, & k = 1,\ n \geq 3, \\ \mathbb{Z}, & k = 2,\ n \geq 3, \\ 0, & 3 \leq k \leq n-1,\ n \geq 4. \end{cases}$$

Напомним, что многообразие M_d^1 — кривая рода $(d-1)(d-2)/2$. Кроме того, $M_1^n = \mathbb{C}P^{n-1}$. Случаи поверхностей M_d^2 и трёхмерных многообразий M_d^3 будут рассмотрены далее.

Пусть $i\colon M_d^n \hookrightarrow \mathbb{P}^{n+1}$, $h = i^* c_1\big(\mathscr{O}_{\mathbb{P}^{n+1}}(1)\big)$, $u = [M_d^n] \in \mathrm{H}^{2n}(M_d^n,\mathbb{Z})$, и Q — форма пересечений на $\mathrm{H}^n(M_d^n)$.

Тогда при $n \geq 2$

$$\mathrm{H}^2(M_d^n,\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}h.$$

Определим группу

$$\mathrm{H}^n(M_d^n)_{\mathrm{van}} = \mathrm{Ker}\Big(L\colon\ \mathrm{H}^n(M_d^n,\mathbb{Z}) \xrightarrow{\smile h} \mathrm{H}^{n+2}(M_d^n,\mathbb{Z})\Big).$$

При нечётном n имеем $\mathrm{H}^{n+2}(M^n_d) = 0$, поэтому $\mathrm{H}^n(M^n_d) \cong \mathrm{H}^n(M^n_d)_{\mathrm{van}}$.

При чётном n имеем разложение:

$$\mathrm{H}^n(M^n_d) \cong \mathbb{Z}\, h^{n/2} \oplus \mathrm{H}^n(M^n_d)_{\mathrm{van}}.$$

Предложение 2.3.8. *В обозначениях выше умножение в кольце* $\mathrm{H}^*(M^n_d, \mathbb{Z})$ *устроено следующим образом:*

$$\begin{cases} h^k \smile h^\ell = h^{k+\ell}, & \text{для всех } 0 \le k, \ell, k+\ell \le n, \\ h^n = d\, u, & \\ h^k = 0, & \text{для всех } k > n, \\ h \smile \alpha = 0, & \text{для всех } \alpha \in \mathrm{H}^n(M^n_d)_{\mathrm{van}}, \\ \alpha \smile \beta = Q(\alpha, \beta)\, u, & \text{для всех } \alpha, \beta \in \mathrm{H}^n(M^n_d)_{\mathrm{van}}. \end{cases}$$

2.4 Проблема Милнора–Хирцебруха и многообразия M^n_d

2.4.1 Классы $[M^2_d]$ и $[M^3_d]$ комплексных кобордизмов

Из классификации Фридмана топологических четырехмерных многообразий с точностью до гомеоморфизма [Sco05] получается следующий результат:

Предложение 2.4.1. Если d нечётно, *то многообразие* M^2_d *гомеоморфно с сохранением ориентации многообразию*

$$(\mathbb{C}P^2)^{\#m} \# (\overline{\mathbb{C}P}^2)^{\#n}, \qquad m = \frac{1}{3}\big(d^3 - 6d^2 + 11d - 3\big), \qquad n = \frac{1}{3}(d-1)\big(2d^2 - 4d + 3\big).$$

Если d чётно, *то* M^2_d *является спинорным многообразием и гомеоморфно с сохранением ориентации многообразию*

$$(\mathrm{K3})^{\#m} \# (\mathbb{C}P^1 \times \mathbb{C}P^1)^{\#n}, \qquad m = \frac{1}{48} d(d^2 - 4), \qquad n = \frac{1}{48}(d-4)\big(13d^2 - 44d + 12\big).$$

Доказательство. По Следствиям 2.3.7 и 2.3.6 мы знаем, что $\pi_1(M_d^2) = 0$ и $\mathrm{H}^2(M_d^2;\mathbb{Z})$ свободна, поэтому форма пересечений $Q_{M_d^2}$ унимодулярна.

Любая односвязная комплексная поверхность гомеоморфна либо

$$(\mathbb{C}P^2)^{\#m} \# (\overline{\mathbb{C}P}^2)^{\#n}, \quad \text{либо} \quad (\text{К3})^{\#m} \# (\mathbb{C}P^1 \times \mathbb{C}P^1)^{\#n},$$

см. [Sco05, Chapter 7, Section, 7.5].

Из точных последовательностей (2.3.2) и (2.3.3), а также из мультипликативности полного числа Черна имеем:

$$c(TM_d^2) = \frac{(1+H)^4}{1+dH}, \quad H = c_1(\mathscr{O}_{M_d^2}(1)).$$

Откуда

$$c_1(TM_d^2) = (4-d)H, \qquad c_2(TM_d^2) = (d^2-4d+6)H^2.$$

Так как $\int_{M_d^2} H^2 = d$, то

$$e(M_d^2) = \int\limits_{M_d^2} c_2 = d(d^2-4d+6) = d^3-4d^2+6d.$$

По формуле Хирцебруха о сигнатуре $\sigma(M_d^2)$ для комплексной поверхности:

$$\sigma(M_d^2) = \frac{1}{3}\int\limits_{M_d^2}\left(c_1^2-2c_2\right) = \frac{d(4-d^2)}{3}.$$

Из равенств

$$\chi(M_d^2) = b_2(M_d^2)+2, \quad b_2^{\pm}(M_d^2) = \frac{b_2(M_d^2)\pm\sigma(M_d^2)}{2},$$

где $\chi(M)$ — эйлерова характеристика, $b_2^{\pm}$ — размерности положительных и отрицательных подпространств в $\mathrm{H}^2(M_d^2,\mathbb{Q})$ относительно формы пересечений, получаем:

$$b_2^+(M_d^2) = \frac{1}{3}(d^3-6d^2+11d-3), \qquad b_2^-(M_d^2) = \frac{1}{3}(d-1)(2d^2-4d+3).$$

При нечётном d имеем $w_2(M^2_d) \equiv c_1(TM^2_d) = (4-d)H \equiv H \pmod 2 \neq 0$, значит $Q_{M^2_d}$ нечётна. Нечётная унимодулярная неопределённая форма над $\mathbb{Z}$ диагонализуема и эквивалентна $\langle 1\rangle^{\oplus m} \oplus \langle -1\rangle^{\oplus n}$. По теореме Фридмана получаем, что M^2_d гомеоморфно многообразию $(\mathbb{C}P^2)^{\#m} \# (\overline{\mathbb{C}P}^2)^{\#n}$, где $m = b_2^+(M^2_d)$ и $n = b_2^-(M^2_d)$.

Пусть d чётно. Тогда

$$w_2(M^2_d) \equiv c_1(TM^2_d) = (4-d)H \equiv 0 \pmod 2,$$

то есть M^2_d является spin-многообразием, и форма пересечений $Q_{M^2_d}$ чётна.

По классификации Фридмана чётных унимодулярных форм получаем, что M^2_d ориентированно гомеоморфно связной сумме

$$(\mathrm{K3})^{\#m} \# (\mathbb{C}P^1 \times \mathbb{C}P^1)^{\#n}, \qquad n = \frac{b_2(M^2_d) - 22m}{2},$$

поскольку $Q_{K3} \cong 2(-E_8) \oplus 3\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\sigma(K3) = -16$, $b_2(K3) = 22$, и $Q_{S^2\times S^2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. □

Напомним, что многообразие M^n_d является гиперплоским сечением d-ой тензорной степени $\eta^{\otimes d}$ хопфовского расслоения $\eta \to \mathbb{C}P^{n+1}$.

Введем производящий ряд

$$\Phi_d(u) = d \cdot u + \sum_{n\geqslant 1} [M^n_d] u^{n+1}$$

классов комплексных кобордизмов гладких алгебраических многообразий M^n_d, $d = 1, 2, \ldots$

В [Бух70] получена формула ряда $\Phi_d(u) \in \mathrm{U}^2(\mathbb{C}P^\infty) \cong \Omega_{\mathrm{U}}[[u]]$,

$$\Phi_d(u) = \left(1 + \sum_{n\geqslant 1} [\mathbb{C}P^n] u^n\right) [u]_d, \tag{2.4.2}$$

где $[u]_d = c_1^{\mathrm{U}}(\eta^{\otimes d})$ — первый класс Черна в U-теории тензорной степени расслоения $\eta \to \mathbb{C}P^\infty$ и $c_1^{\mathrm{U}}(\eta) = u$.

Рассмотрим

$$F(u,v)=u+v+\sum_{i,j}\alpha_{ij}u^iv^j=c_1^{\mathrm{U}}(\eta_1\otimes\eta_2)\in \mathrm{U}^2(\mathbb{C}P^\infty\times\mathbb{C}P^\infty)$$

формальную группу геометрических кобордизмов в U-теории [Нов67]. Логарифм $g(u)$ формальной группы $F(u,v)$ задается рядом

$$g(u)=u+\sum_n[\mathbb{C}P^n]\frac{u^{n+1}}{n+1},$$

который называется рядом Мищенко, см. [Нов67].

Тогда

$$[u]_d=f(d\cdot g(u)),$$

где

$$f(t)=g^{-1}(t)=t-\frac{A}{2}t^2+\Big(\frac{A^2}{2}-\frac{B}{3}\Big)t^3+\Big(-\frac{5A^3}{8}+\frac{5AB}{6}-\frac{C}{4}\Big)t^4+\cdots.$$

— экспонента формальной группы $F(u,v)$, и $A=[\mathbb{C}P^1]$, $B=[\mathbb{C}P^2]$, $C=[\mathbb{C}P^3]$.

Подставляя ряд $d\cdot g(u)$ в ряд $g^{-1}(t)$, получаем:

$$\begin{aligned}[u]_d=&\,d\,u+\frac{d-d^2}{2}Au^2\\&+\left(\frac{d^3-d^2}{2}A^2+\frac{d-d^3}{3}B\right)u^3\\&+\left(-\frac{d^2(d-1)(5d-1)}{8}A^3+\frac{d^2(d-1)(5d+2)}{6}AB+\frac{d-d^4}{4}C\right)u^4+O(u^5).\end{aligned}\tag{2.4.3}$$

Подставляя (2.4.3) в (2.4.2) и беря коэффициент при u^3, получаем следующий результат:

Предложение 2.4.4. *Для каждого $d\geq 1$ в Ω_{U} имеет место равенство:*

$$[M_d^2]=\frac{d(d-1)^2}{2}[\mathbb{C}P^1]^2+\frac{d(4-d^2)}{3}[\mathbb{C}P^2].\tag{2.4.5}$$

Отсюда видно, что при естественном гомоморфизме

$$\Omega_{\mathrm{U}}^{-4}\longrightarrow\Omega_{\mathrm{SO}}^{-4}$$

имеем следующее отображение классов:

$$[M^2_d]_{\Omega_U} \longmapsto \frac{d(4-d^2)}{3}[\mathbb{C}P^2]_{\Omega_{SO}}.$$

Итак, в Ω_U в обозначениях Предложения 2.4.1 получаем следующее тождество:

$$[M^2_d] = \begin{cases} (m-n)[\mathbb{C}P^2] + \dfrac{d(d-1)^2}{2}[\mathbb{C}P^1]^2, & \text{если } d \text{ нечётно,} \\ m[\text{K3}] + n[\mathbb{C}P^1]^2 - \dfrac{(d-4)(d-2)(7d-6)}{48}[\mathbb{C}P^1]^2, & \text{если } d \text{ чётно.} \end{cases}$$

Слагаемые $(m-n)[\mathbb{C}P^2]$ и $m[\text{K3}] + n[\mathbb{C}P^1]^2$ соответствуют «наивному» случаю склейки комплексных структур по связной сумме:

$$[M_1 \# M_2] = [M_1] + [M_2].$$

Слагаемые $\frac{d(d-1)^2}{2}[\mathbb{C}P^1]^2$ и $\left(-\frac{(d-4)(d-2)(7d-6)}{48}[\mathbb{C}P^1]^2\right)$ описывают расхождения, обусловленные комплексной структурой поверхности M^2_d.

В работе [BV24, формула (6)] была получена формула, согласно которой каждое стабильно комплексное многообразие M^{2n} единственным образом представляется в кольце $\Omega_U \otimes \mathbb{Q}$ в виде многочлена по неособым неприводимым алгебраическим многообразиям Θ_j (комплексной размерности j) — тета-дивизорам общего главно поляризованного абелева многообразия $\mathcal{A}^{j+1}$:

$$[M^{2n}] = \sum_{\lambda \vdash n} c_\lambda(\nu M^{2n}) \frac{[\Theta_\lambda]}{(\lambda+1)!},$$

где $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_k)$, $\lambda \vdash n$ — разбиение числа n, $(\lambda+1)! = (\lambda_1+1)!\ldots(\lambda_k+1)!$, $\Theta_\lambda = \Theta_{\lambda_1} \times \ldots \times \Theta_{\lambda_k}$ и $c_\lambda(\nu M^{2n})$ — симметрическое мономиальное характеристическое число стабильного нормального расслоения νM^{2n} многообразия M^{2n}.

В недавней работе была получена общая формула [BV26, формула (4)] для разложения комплексных проективных пространств по тета-дивизорам. Используя это разложение, получаем

$$[\mathbb{C}P^1] = -[\Theta_1], \quad [\mathbb{C}P^2] = \frac{3[\Theta_1]^2 - [\Theta_2]}{2}. \tag{2.4.6}$$

Подставляя формулы (2.4.6) в (2.4.5), имеем:

Предложение 2.4.7.

$$[M_d^2] = d \cdot \left(\frac{d^2-4}{6} [\Theta_2] \; + \; \frac{5-2d}{2} [\Theta_1]^2 \right).$$

Пример 2.4.8.

$$[M_4^2] = 2 \cdot \big(4[\Theta_2] - 3[\Theta_1]^2\big),$$

$$2[M_5^2] = 5 \cdot \big(7[\Theta_2] - 5[\Theta_1]^2\big),$$

$$2[M_7^2] = 21 \cdot \big(5[\Theta_2] - 3[\Theta_1]^2\big).$$

Теперь перейдем к рассмотрению случая классов $[M_d^3]$. Подставляя (2.4.3) в (2.4.2) и беря коэффициент при u^4, получаем

Предложение 2.4.9. *Пусть* $A = [\mathbb{C}P^1]$, $B = [\mathbb{C}P^2]$ *и* $C = [\mathbb{C}P^3]$ *в* Ω_{U}^{-6}. *Тогда*

$$24[M_d^3] = -d\Big(15d(d-1)^2A^3 - 20(d-1)^2(d+1)AB - 6(5-d^3)C\Big).$$

Замечание 2.4.10. Заметим, что по критерию Новикова $[\mathbb{C}P^1]$ и $[\mathbb{C}P^2]$ являются, а $[\mathbb{C}P^3]$ не является мультипликативным образующим кольца Ω_{U}.

Пример 2.4.11.

$$[M_1^3] = [\mathbb{C}P^3],$$

$$2[M_2^3] = -5A^3 + 10AB - 3C,$$

$$[M_5^3] = -50\,(5A^3 - 8AB + 3C).$$

Предложение 2.4.12.

$$[M_d^3] = d \cdot \left(\frac{d^3-5}{24} [\Theta_3] - \frac{5(d+3)(d-2)}{12} [\Theta_2 \times \Theta_1] + \frac{5(3d-7)}{8} [\Theta_1]^3 \right),$$

где Θ_j *— тета-дивизор общего главно поляризованного абелева многообразия* $\mathcal{A}^{j+1}$, *рассматриваемый как комплексное многообразие вещественной размерности* $2j$.

Пример 2.4.13.

$$[M_5^3] = 25 \cdot \big([\Theta_3] - 2[\Theta_2 \times \Theta_1] + [\Theta_1]^3\big),$$

$$12[M_7^3] = 7 \cdot \big(169[\Theta_3] - 250[\Theta_2 \times \Theta_1] + 105[\Theta_1]^3\big),$$

$$4[M_{11}^3] = 11 \cdot \big(221[\Theta_3] - 210[\Theta_2 \times \Theta_1] + 65[\Theta_1]^3\big).$$

2.4.2 Представление $[M_d^n]$ через тета-дивизоры

Кратко напомним необходимые нам понятия из теории характеристических классов векторных расслоений (см. [BV26] и список литературы там). Пусть E — комплексное векторное расслоение ранга r над компактным комплексным многообразием M комплексной размерности n. Обозначим через u_1, $\ldots$, u_r его корни Черна:

$$c(E) = \prod_{i=1}^{r} (1 + u_i).$$

Введем формальный ряд $A(x) = \sum_{i \geq 1} a_i x^i$. Пусть

$$C(E; a) = \prod_{i=1}^{r} (1 + A(u_i)) = \sum_{|\lambda| \leq n} c_\lambda(E) a^\lambda$$

— универсальный мономиальный характеристический класс или, эквивалентно, производящая функция многих переменных $a^\lambda = \prod\limits_{i \geq 1} a_i^{\lambda_i}$ мономиальных симметрических классов Черна $c_\lambda(E)$.

Из формулы Уитни [MC79] следует, что если $E = E_1 \oplus E_2$ для комплексных расслоений E_1 и E_2, то

$$C(E; a) = C(E_1; a) C(E_2; a).$$

Обозначим через $s_\lambda(E)$ характеристическое число $\langle c_\lambda(E), [M] \rangle$. Введем

ряд (многочлен)

$$P_E(a) = \langle C(E;a), [M] \rangle = \sum_{\lambda \vdash n} s_\lambda(E) a^\lambda. \tag{2.4.14}$$

Рассмотрим в качестве E стабильное нормальное расслоение νM гиперповерхности Ферма M_d^n.

Пусть $H = \mathscr{O}(1)|_{M_d^n}$ и $x = c_1(H)$. Из точной последовательности Эйлера (2.3.3) для $\mathbb{C}P^{n+1}$ имеем изоморфизм

$$\mathscr{T}\mathbb{C}P^{n+1} \oplus \mathbf{1}_{\mathbb{C}} \cong H^{\oplus(n+2)}. \tag{2.4.15}$$

Точная последовательность нормального расслоения (2.3.2) гиперповерхности M_d^n в $\mathbb{C}P^{n+1}$ дает изоморфизм

$$\mathscr{T}M_d^n \oplus H^{\otimes d} \cong \mathscr{T}\mathbb{C}P^{n+1}|_{M_d^n}. \tag{2.4.16}$$

Изоморфизмы (2.4.15) и (2.4.16) и формула Уитни дают:

$$C(\nu M_d^n; a) = \frac{C(H^{\otimes d}; a)}{C(H;a)^{n+2}} = \frac{1 + A(dx)}{(1+A(x))^{n+2}}.$$

Имеется равенство $\langle x^n, [M_d^n] \rangle = d$. Тогда получаем

$$P_{\nu M_d^n}(a) = d \cdot [x^n] \left(\frac{1 + A(dx)}{(1+A(x))^{n+2}} \right). \tag{2.4.17}$$

Напомним известный результат [Sta23, Theorem 5.4.2]:

Теорема 2.4.18 ([Sta23], Формула обращения Лагранжа)**.** *Пусть*

$$F(x) = a_1 x + a_2 x^2 + \cdots \in xK[[x]],$$

где $a_1 \neq 0$ и K — произвольное поле. Пусть $F^{\langle -1 \rangle}(x)$ — формальный ряд, функционально обратный к ряду $F(x)$. Тогда

$$n[x^n]\big(F^{\langle -1 \rangle}(x)\big)^k = k[x^{n-k}]\left(\frac{x}{F(x)}\right)^n = k[x^{-k}]F(x)^{-n} \tag{2.4.19}$$

для любых целых k и n.

В частности, при $k = 1$ получается формула для функционального обра-

щения ряда $F(x)$.

Суммируя формулу обращения Лагранжа по мономам, получается

Следствие 2.4.20 ([Sta23], Формула Лагранжа–Бюрмана)**.** *Для любого ряда Лорана $H(x) \in K((x))$ в обозначениях предыдущей теоремы верна формула:*

$$n\,[x^n]H\big(F^{\langle -1\rangle}(x)\big) = [x^{n-1}]H'(x)\left(\frac{x}{F(x)}\right)^n.$$

Из формулы обращения Лагранжа следует, что коэффициенты функционально обратного ряда

$$F^{\langle -1\rangle}(x) = x + \sum_{n\geq 1} L_n(a_1, \ldots, a_n)x^{n+1}$$

выражаются многочленами $L_n(a_1, \ldots, a_n)$ с целыми коэффициентами.

В работе [BV26] получено топологическое доказательство формулы обращения Лагранжа при помощи двойного подсчета нормальных характеристических чисел комплексных проективных пространств $\mathbb{C}P^n$.

Пример 2.4.21. Приведем явный вид первых четырех многочленов обращения Лагранжа:

$$\begin{aligned} L_1 &= -a_1, \\ L_2 &= -a_2 + 2a_1^2, \\ L_3 &= -a_3 + 5a_1a_2 - 5a_1^3, \\ L_4 &= -a_4 + 6a_1a_3 + 3a_2^2 - 21a_1^2a_2 + 14a_1^4 \end{aligned}$$

Хорошо известно [Lod05; AA23], что коэффициенты многочленов L_n обращения Лагранжа связаны с числом граней $(n-1)$-мерного ассоциаэдра. Например, формула для L_4 считает грани ассоциаэдра $\mathfrak{a}_4$: 1 трехмерный ассоциаэдр $\mathfrak{a}_4$, 6 пятиугольников $\mathfrak{a}_3 \times \mathfrak{a}_1$, 3 квадрата $\mathfrak{a}_2 \times \mathfrak{a}_2$, 21 отрезок $\mathfrak{a}_2 \times \mathfrak{a}_1 \times \mathfrak{a}_1$ и 14 точек $\mathfrak{a}_1 \times \mathfrak{a}_1 \times \mathfrak{a}_1 \times \mathfrak{a}_1$. Знак при каждом мономе q в многочлене L_n равен $(-1)^{\deg q}$, где $\deg q$ — степень монома q.

Теорема 2.4.22. *Пусть дано разбиение $\lambda \vdash n$ натурального числа n. Обозначим через m_i кратность вхождения i в λ, $\sum\limits_{i\geq 1} i m_i = n$ и через k — сумму всех кратностей $\sum\limits_{i\geq 1} m_i$, т.е. длину разбиения λ. Тогда*

$$[a^\lambda]P_{\nu M_d^n}(a) = (-1)^k d \cdot \mathrm{Assoc}_\lambda \cdot W_{\lambda,d},$$

где $P_{\nu M^n_d}$ *обозначает* (2.4.14) *при* $E = \nu M^n_d$ (*стабильно нормальное расслоение многообразия* M^n_d)*,*

$$\mathrm{Assoc}_\lambda = \frac{(n+k)!}{(n+1)!\prod\limits_{i\geq 1} m_i!}$$

— число граней ассоциаэдра $\mathfrak{a}_n$ *вида* $\mathfrak{a}_\lambda = \mathfrak{a}_{\lambda_1} \times \cdots \times \mathfrak{a}_{\lambda_k}$, $\mathfrak{a}_{\lambda_s}$ *обозначает* $(\lambda_s - 1)$*-мерный ассоциаэдр, и, наконец,*

$$W_{\lambda,d} = n + k + 1 - \sum_{i\geq 1} m_i d^i$$

— весовая функция.

Доказательство. Разложим дробь (2.4.17) в ряд:

$$(1 + A(dx)) \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \binom{n+m+1}{m} A(x)^m.$$

Члены степени k по переменным a_i возникают из двух слагаемых:

$$1 \cdot (-1)^k \binom{n+k+1}{k} A(x)^k \quad \text{и} \quad A(dx) \cdot (-1)^{k-1} \binom{n+k}{k-1} A(x)^{k-1}.$$

Коэффициент при мономе $a^\lambda x^n$ в $A(x)^k = \left(\sum_{i\geqslant 1} a_i x^i\right)^k$ равен числу различных перестановок частей разбиения λ, т. е. $\frac{k!}{\prod_i m_i!}$.

Аналогично, коэффициент при $a^\lambda x^n$ в $A(dx)A(x)^{k-1}$ равен $\frac{(k-1)!}{\prod_i m_i!} \sum_{j=1}^k d^{\lambda_j}$.

Складывая эти коэффициенты при $a^\lambda x^n$ и вынося общий множитель $\frac{(-1)^k}{\prod_i m_i!}$, получаем:

$$[a^\lambda] P_{\nu M^n_d} = d \cdot \frac{(-1)^k}{\prod_i m_i!} \left[\frac{(n+k+1)!}{(n+1)!\,k!}\, k! - \frac{(n+k)!}{(n+1)!\,(k-1)!}\,(k-1)! \sum_{j=1}^k d^{\lambda_j} \right].$$

После упрощения это дает

$$[a^\lambda] P_{\nu M^n_d} = (-1)^k d \cdot \left(\frac{(n+k)!}{(n+1)! \prod_i m_i!} \right) \left(n + k + 1 - \sum_{j=1}^k d^{\lambda_j} \right).$$

Тем самым из формулы для числа граней ассоциаэдра [DR01, Theorem 2.3.3]

получаем нужную формулу:

$$[a^{\lambda}]P_{\nu M_d^n} = (-1)^k d \cdot \mathrm{Assoc}_{\lambda} \cdot W_{\lambda,d}.$$

□

Из нашего результата (Теоремы 2.4.22) при $d = 1$ получаем

Следствие 2.4.23 [BV26]. *Для $M_1^n = \mathbb{C}P^n$ имеем равенство:*

$$P_{\nu \mathbb{C}P^n}(a) = (n+1)L_n(a),$$

где $L_n(a)$ — многочлен обращения Лагранжа.

Справедлива следующая явная формула разложения элементов $[M_d^n]$ через элементы $[\Theta_\lambda]$ в кольце $\Omega_{\mathrm{U}} \otimes \mathbb{Q}$:

Следствие 2.4.24. *Гиперповерхность Ферма M_d^n в кольце $\Omega_{\mathrm{U}} \otimes \mathbb{Q}$ имеет следующее представление в терминах классов $[\Theta_i]$ тета-дивизоров (в обозначениях Теоремы 2.4.22) :*

$$[M_d^n] = \sum_{\lambda \vdash n} (-1)^k d \cdot \mathrm{Assoc}_{\lambda} \cdot W_{\lambda,d} \frac{[\Theta_\lambda]}{(\lambda+1)!}.$$

Глава 3
Двузначная формальная группа в комплексных кобордизмах

3.1 Конструкция квадрата модуля

В [БН71] были введены конструкция квадрата модуля и соответствующая двузначная формальная группа в кольце комплексных кобордизмов Ω_U. Общая теория двузначных формальных групп была развита в [Бух75].

Пусть $\zeta_1 = \mathrm{pr}_1^*(\zeta)$ и $\zeta_2 = \mathrm{pr}_2^*(\zeta)$ — кватернионные линейные расслоения, где ζ — универсальное кватернионное линейное расслоение над $\mathbb{H}P^\infty$, а $\mathrm{pr}_j : \mathbb{H}P^\infty \times \mathbb{H}P^\infty \to \mathbb{H}P^\infty$ — две проекции на декартовы множители. Вложение $\mathbb{S}^1 \hookrightarrow \mathrm{Sp}(1)$ мультипликативной группы окружности $\mathbb{S}^1$ в группу единичных кватернионов $\mathrm{Sp}(1)$ индуцирует отображение

$$\iota : \mathbb{C}P^\infty \to \mathbb{H}P^\infty \tag{3.1.1}$$

между их классифицирующими пространствами. Обратный образ расслоения ζ_j $(j = 1, 2)$ при отображении ι раскладывается в сумму $\eta_j \oplus \overline{\eta}_j$, где η_j — универсальное комплексное линейное расслоение. Имеем следующую декартову диаграмму:

$$\begin{array}{ccc} (\eta_1 \oplus \overline{\eta}_1) \otimes_{\mathbb{C}} (\eta_2 \oplus \overline{\eta}_2) & \longrightarrow & \zeta_1 \otimes_{\mathbb{C}} \zeta_2 \\ \downarrow & \lrcorner & \downarrow \\ \mathbb{C}P^\infty \times \mathbb{C}P^\infty & \xrightarrow{\iota \times \iota} & \mathbb{H}P^\infty \times \mathbb{H}P^\infty \end{array}$$

Имеется изоморфизм комплексных векторных расслоений:

$$(\eta_1 \oplus \overline{\eta}_1) \otimes_{\mathbb{C}} (\eta_2 \oplus \overline{\eta}_2) \cong (\eta_1\eta_2 \oplus \overline{\eta}_1\overline{\eta}_2) \oplus (\eta_1\overline{\eta}_2 \oplus \overline{\eta}_1\eta_2).$$

Заметим, что расслоения $\xi_1 := \eta_1\eta_2 \oplus \overline{\eta}_1\overline{\eta}_2$ и $\xi_2 := \eta_1\overline{\eta}_2 \oplus \overline{\eta}_1\eta_2$ допускают

кватернионные структуры.

Пусть $\mathrm{Pic}(M)$ — группа Пикара классов изоморфизма $[\xi]$ комплексных линейных расслоений над комплексным многообразием M. Рассмотрим инволюцию $\sigma : [\xi] \mapsto [\overline{\xi}]$. Далее, будем писать ξ вместо $[\xi]$. Точки соответствующего пространства орбит $X := \mathrm{Pic}(M)/\sigma$ отождествляются с неупорядоченными парами $[\xi, \overline{\xi}]$. Получаем двузначную косетную группу (см. Определение 1.1.9) с умножением

$$[\xi, \overline{\xi}] * [\eta, \overline{\eta}] = [[\xi\eta, \overline{\xi}\,\overline{\eta}], [\xi\overline{\eta}, \overline{\xi}\eta]]$$

и нейтральным элементом $[\mathbf{1}_{\mathbb{C}}, \mathbf{1}_{\mathbb{C}}]$, где $\mathbf{1}_{\mathbb{C}}$ обозначает класс тривиального комплексного линейного расслоения.

Заметим, что $\zeta_1 \otimes_{\mathbb{C}} \zeta_2$ не может допускать кватернионную структуру (упражнение по теории представлений). Но расслоение $\zeta_1 \otimes_{\mathbb{C}} \zeta_2 \otimes_{\mathbb{C}} \zeta_3$ над пространством $\mathbb{H}P^\infty \times \mathbb{H}P^\infty \times \mathbb{H}P^\infty$ такую структуру допускает. Естественный изоморфизм

$$(\zeta_1 \otimes_{\mathbb{C}} \zeta_2) \otimes_{\mathbb{C}} \zeta_3 \cong \zeta_1 \otimes_{\mathbb{C}} (\zeta_2 \otimes_{\mathbb{C}} \zeta_3)$$

эквивалентен ассоциативности двузначной операции $*$.

Эта двузначная группа является геометрической реализацией более общей конструкции:

Предложение 3.1.2. *Пусть G — абелева группа, а $\sigma : g \mapsto -g$ — инволюция. Обозначим через X пространство орбит G/σ с точками $[g, -g]$. Тогда на X имеется структура инволютивной коммутативной двузначной косетной группы с операцией*

$$[g, -g] * [h, -h] = [[g + h, -g - h], [g - h, -g + h]]$$

с нейтральным элементом $[e, e]$, где e — единица.

Доказательство. Это непосредственно следует из косетной конструкции. □

Определение 3.1.3. Двузначная группа, рассмотренная в Предложении 3.1.2, называется *конструкцией квадрата модуля* для абелевой группы G.

Конструкция квадрата модуля имеет следующий инфинитезимальный аналог. Пусть $F(u, v)$ — коммутативная формальная группа над алгеброй A с логарифмом $g(u)$ и экспонентой $f(u)$ (они определены над $A \otimes \mathbb{Q}$). Пусть $x = u\overline{u}$,

$y = v\overline{v}$. Тогда, по определению, *двузначная формальная группа* $\mathbb{G}_F$ задаётся законом

$$x * y = [F(u,v)F(\overline{u},\overline{v}), F(u,\overline{v})F(\overline{u},v)], \tag{3.1.4}$$

с нейтральным элементом $x = 0$ и обратным элементом $\mathrm{inv}(x) = x$.

Определим следующие формальные ряды:

$$\begin{aligned} z_1 &= F(u,v)F(\overline{u},\overline{v}), \qquad & z_2 &= F(u,\overline{v})F(\overline{u},v) \\ \Psi_1 &= z_1 + z_2, & \Psi_2 &= z_1 z_2. \end{aligned} \tag{3.1.5}$$

Можно проверить, что эти ряды принадлежат кольцу $A[[x,y]]$, то есть $\Psi_1 = \Psi_1(x,y)$ и $\Psi_2 = \Psi_2(x,y)$, см. [БН71, Лемма 2.21]. Следовательно, получаем следующее

Предложение 3.1.6. *Двузначная формальная группа $\mathbb{G}_F$ определяется корнями z_1, z_2 квадратного многочлена над кольцом $A[[x,y]]$ (обозначения см. в (3.1.5)):*

$$z^2 - \Psi_1(x,y)z + \Psi_2(x,y) = 0, \ x * y \ = [z_1, z_2]. \tag{3.1.7}$$

Общее определение многозначной формальной группы было дано в статье [Бух75, Раздел 1].

Определение 3.1.8. В обозначениях (3.1.5) ряд

$$B(x) = g(u)g(\overline{u}) = -g(u)^2 \tag{3.1.9}$$

называется *логарифмом* двузначной формальной группы $\mathbb{G}_F$ с умножением (3.1.4).

Ряд $B(x)$ в [БН71] был назван логарифмом по следующей причине:

Предложение 3.1.10. *В обозначениях (3.1.5) и (3.1.9):*

$$z_{1,2} = B^{-1}\left(\left(\sqrt{B(x)} \pm \sqrt{B(y)}\right)^2\right).$$

Доказательство. Имеем

$$B^{-1}((\sqrt{B(x)} \pm \sqrt{B(y)})^2) = B^{-1}(-(g(u) \pm g(v))^2).$$

Достаточно проверить, что

$$B(z_{1,2}) = -(g(u) \pm g(v))^2.$$

Рассмотрим случай z_1 (случай z_2 полностью аналогичен). Имеем

$$B(z_1) = B(V\overline{V}) = -g(V)^2 = -(g\,g^{-1}(g(u)+g(v)))^2 = -(g(u)+g(v))^2,$$

где $V = g^{-1}(g(u)+g(v))$. Что и требовалось. □

Определение логарифма 2-значной формальной группы имеется также и у любой 2-значной формальной группы (см., например, [Buc06, Section 16]).

Напомним топологические приложения группы $\mathbb{G}_F$, развитые в [БН71]. Рассмотрим формальную группу $F(u,v) = F_{\mathrm{U}}(u,v)$ геометрических комплексных кобордизмов над кольцом $\Omega_{\mathrm{U}} = \mathrm{U}^*(\mathrm{pt})$ с логарифмом $g(u) = g_{\mathrm{U}}(u)$ и экспонентой $f(u) = f_{\mathrm{U}}(u)$ (см. [Нов67, Приложение 1]).

Введём классы $z_1, z_2 \in \mathrm{U}^4(\mathbb{C}P^\infty \times \mathbb{C}P^\infty)$ как классы Черна в U-теории:

$$\begin{aligned} z_1 &:= c_2^{\mathrm{U}}(\eta_1\eta_2 \oplus \overline{\eta}_1\overline{\eta}_2) = c_1^{\mathrm{U}}(\eta_1\eta_2)c_1^{\mathrm{U}}(\overline{\eta}_1\overline{\eta}_2) = F_{\mathrm{U}}(u,v)F_{\mathrm{U}}(\overline{u},\overline{v}),\\ z_2 &:= c_2^{\mathrm{U}}(\eta_1\overline{\eta}_2 \oplus \overline{\eta}_1\eta_2) = c_1^{\mathrm{U}}(\eta_1\overline{\eta}_2)c_1^{\mathrm{U}}(\overline{\eta}_1\eta_2) = F_{\mathrm{U}}(u,\overline{v})F_{\mathrm{U}}(\overline{u},v), \end{aligned}$$

где $u = c_1^{\mathrm{U}}(\eta_1)$, $v = c_1^{\mathrm{U}}(\eta_2)$, $\overline{u} = c_1^{\mathrm{U}}(\overline{\eta}_1)$, $\overline{v} = c_1^{\mathrm{U}}(\overline{\eta}_2)$.

Пусть

$$x = \iota^* p_1^{\mathrm{Sp}}(\zeta_1) = u\overline{u} \qquad \text{и} \qquad y = \iota^* p_1^{\mathrm{Sp}}(\zeta_2) = v\overline{v} \in \mathrm{Sp}^4(\mathbb{C}P^\infty),$$

где $p_1^{\mathrm{Sp}}(\zeta_j) \in \mathrm{Sp}^4(\mathbb{H}P^\infty)$ обозначает класс Бореля в Sp-теории, а ι — отображение (3.1.1). Определим ряды:

$$\begin{aligned} \Psi_1 &:= p_1^{\mathrm{Sp}}(\iota^*(\zeta_1 \otimes_{\mathbb{C}} \zeta_2)) = z_1 + z_2,\\ \Psi_2 &:= p_2^{\mathrm{Sp}}(\iota^*(\zeta_1 \otimes_{\mathbb{C}} \zeta_2)) = z_1 z_2. \end{aligned}$$

Пусть z — образующая $\mathrm{H}^4(\mathbb{H}P^\infty, \mathbb{Z})$ такая, что $\iota^* z = -t^2$, где t — образующая $H^2(\mathbb{C}P^\infty, \mathbb{Z})$. Пусть ζ — универсальное кватернионное расслоение над $\mathbb{H}P^\infty$, а η — универсальное комплексное расслоение над $\mathbb{C}P^\infty$. Как мы уже знаем, $x = \iota^* c_2^{\mathrm{U}}(\zeta) = c_1^{\mathrm{U}}(\eta)c_1^{\mathrm{U}}(\overline{\eta}) = u\overline{u}$. Тогда, согласно [БН71, с. 95], $\mathrm{ch}_{\mathrm{U}}(g(u)) =$

t и $\mathrm{ch}_{\mathrm{U}}(B(x)) = -t^2 = \iota^* z$, где $\mathrm{ch}_{\mathrm{U}}(x)$ — характер Черна–Дольда

$$\mathrm{ch}_{\mathrm{U}} : \mathrm{U}^*(\mathbb{H}P^\infty) \to \mathrm{H}^*(\mathbb{H}P^\infty, \Omega_{\mathrm{U}} \otimes \mathbb{Q}) \cong \Omega_{\mathrm{U}} \otimes \mathbb{Q}[z],$$

который был введён в [Бух70]. Таким образом, обратный степенной ряд $B^{-1}(z)$, называемый *экспонентой*, совпадает с характером Черна:

$$B^{-1}(c_2^{\mathrm{U}}(\zeta)) = \mathrm{ch}_{\mathrm{U}}(z) \in \mathrm{H}^*(\mathbb{H}P^\infty, \Omega_{\mathrm{U}} \otimes \mathbb{Q}).$$

Все двузначные формальные группы вида (3.1.7) были классифицированы Бухштабером в [Бух75]. Напомним один из основных результатов этой статьи (в эквивалентной переформулировке в наших обозначениях):

Теорема 3.1.11 [Бух75, Теорема 6.4]**.** *Пусть*

$$x * y = [z \mid z^2 - \Psi_1(x,y)z + \Psi_2(x,y) = 0] \tag{3.1.12}$$

— произвольная двузначная формальная группа $\mathbb{G}(R)$ в формальных степенных рядах над произвольной $\mathbb{Q}$-алгеброй R. Пусть $B(x)$ — её логарифм. Тогда $B(x)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{1}{2}\varphi_1(x)B'(x) + \frac{1}{8}\varphi_2(x)B''(x) = 1$$

с начальным условием $B(0) = 0$, где

$$\varphi_1(x) = \left.\frac{\partial \Psi_1(x,y)}{\partial y}\right|_{y=0}, \quad \varphi_2(x) = \left.\frac{\partial \sigma(x,y)}{\partial y}\right|_{y=0}, \quad \sigma(x,y) = \Psi_1^2 - 4\Psi_2.$$

Если $\mathbb{G}(R)$ относится к первому типу, то есть $\Psi_2(x,y) \equiv (x-y)^2 \mod \deg 3$, то ряд $B(x)$ задаёт сильный изоморфизм этой двузначной формальной группы с элементарной двузначной формальной группой, определяемой многочленом

$$z^2 - 2(x+y)z + (x-y)^2.$$

Более того, для логарифма $\mathbb{G}(R)$ *имеем:*

$$B(x)=\left(\int_0^{\sqrt{x}}\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{\varphi(t^2)}}\right)^2,\quad \varphi_2(x)=8\int_0^x\varphi_1(t),\mathrm{d}t, \tag{3.1.13}$$

где $\varphi(t)=\varphi_2(t)/(16t)$ *и* $\varphi(0)=1$.

3.2 Род Бухштабера

Центральным результатом этого раздела является следующая

Теорема 3.2.1.

(i) *Пусть*

$$\begin{gathered}u:=I(x)=\int_0^{\sqrt{x}}\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1+a_1t^2+a_2t^4+a_3t^6}},\\ g_2=4\left(\frac{a_1^2}{3}-a_2\right),\qquad g_3=4\left(\frac{a_1a_2}{3}-\frac{2a_1^3}{27}-a_3\right).\end{gathered} \tag{3.2.2}$$

Тогда

$$x(u)=\frac{1}{\wp(u;g_2,g_3)-a_1/3}.$$

(*Если* $g_2^3-27g_3^2=0$, *то функция* $\wp(u;g_2,g_3)=-\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}u^2}\log\sigma(u;g_2,g_3)$ *соответствует вырождению* σ*-функции Вейерштрасса*).

(ii) *Логарифм и экспонента формальной двузначной группы* $\mathbb{G}_a$ *с двузначным законом* (0.0.1) *задаются следующими формальными рядами над алгеброй* $\mathbb{Q}[a_1,a_2,a_3]$:

$$B(x)=I^2(x)=\left(\int_0^{\sqrt{x}}\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1+a_1t^2+a_2t^4+a_3t^6}}\right)^2,$$

$$B^{-1}(x) = \frac{1}{\wp(\sqrt{x}; g_2, g_3) - a_1/3}.$$

(iii) *Пусть* $Q(t) := 1 - a_1 t^2 + a_2 t^4 - a_3 t^6$. *Тогда закон* $F_{\mathrm{Bc}}(u, v)$, *его экспонента* $f_{\mathrm{Bc}}(u)$ *и его логарифм* $g_{\mathrm{Bc}}(u)$ *имеют вид:*

$$F_{\mathrm{Bc}}(u, v) = \left[\left(\frac{u\sqrt{Q(v)} - v\sqrt{Q(u)}}{u^2 - v^2} \right)^2 + a_3 u^2 v^2 \right]^{-1/2},$$

$$f_{\mathrm{Bc}}(u) = \frac{1}{\sqrt{\wp(u; g_2, -g_3) + \frac{a_1}{3}}}, \qquad g_{\mathrm{Bc}}(u) = \int_0^u \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1 - a_1 t^2 + a_2 t^4 - a_3 t^6}}.$$

(iv) *Формальная группа* $F_{\mathrm{Bc}}(u, v)$ *универсальна в классе всех однозначных формальных групп (над* $\mathbb{Q}$*-алгебрами без делителей нуля) с условием* $\overline{u} = -u$, *для которых конструкция квадрата модуля даёт двузначную формальную группу* $\mathbb{G}_a$ *с двузначным законом* (0.0.1).

(v) *Пересечение классов* $\mathcal{F}(u, v)$ *и* $F_{\mathrm{Bc}}(u, v)$ *совпадает с родом Ошанина. Это характеризуется условиями* $\lambda_1(u) \equiv 1$ *для* $\mathcal{F}(u, v)$ *и* $a_3 = 0$ *для* $F_{\mathrm{Bc}}(u, v)$.

(vi) *Формальная группа* $F_{\mathrm{Bc}}(u, v)$ *соответствует роду Хирцебруха*

$$\mathrm{Bc} : \Omega_{\mathrm{U}} \to \mathbb{Z}\left[\frac{1}{2}, a_1, a_2, a_3\right],$$

который мы называем родом Бухштабера, где $\deg a_i = -4i,\ i = 1, \ldots, 3$.

Доказательство. **(i)** получается последовательностью замен

$$u = t^2 \to u = \frac{1}{v} \to v = w - \frac{a_1}{3}$$

в интеграле $I(x)$.

(ii) следует из первой части Теоремы 6.4 из [Бух75] и из **(i)**. Более конкретно,

перепишем двузначный закон (0.0.1) в виде (3.1.12), где

$$\Psi_1(x,y)=\frac{2x+2y+4a_1xy+2a_2x^2y+2a_2xy^2+4a_3x^2y^2}{1-2a_2xy-4a_3x^2y-4a_3xy^2+a_2^2x^2y^2-4a_1a_3x^2y^2},$$
$$\Psi_2(x,y)=\frac{x^2-2xy+y^2}{1-2a_2xy-4a_3x^2y-4a_3xy^2+a_2^2x^2y^2-4a_1a_3x^2y^2}.$$

Непосредственные вычисления дают

$$\varphi_1=2(1+2a_1x+3a_2x^2+4a_3x^3),\qquad \varphi_2(x)=16x(1+a_1x+a_2x^2+a_3x^3).$$

Искомая формула для $B(x)$ следует из формулы (3.1.13).

(iii) Согласно конструкции квадрата модуля (см. раздел 3.1),

$$B(x)=g(u)g(\overline{u})=-g(u)^2,$$

где $x=u\overline{u}$, а $g(u)$ — логарифм некоторой формальной группы $F(u,v)$. Предположим, что $\overline{u}=-u$, или, что эквивалентно, $g(-u)=-g(u)$. Тогда $u=\sqrt{-x}$. Из этого и пункта **(i)** следует, что

$$g(u)=\int_0^u Q(t)^{-1/2}\mathrm{d}t,$$

где $Q(t):=1-a_1t^2+a_2t^4-a_3t^6$. Применение пункта **(i)** к случаю $u:=I(w^2)$ даёт экспоненту $w(u)=f_{\mathrm{Bc}}(u)$.

Теперь выведем закон $F_{\mathrm{Bc}}(u,v)$. Пусть $\tilde{\wp}(z):=\wp(z;g_2,-g_3)$, $u=f_{\mathrm{Bc}}(z)$, $v=f_{\mathrm{Bc}}(w)$. Тогда

$$\tilde{\wp}(z)=\frac{1}{u^2}-\frac{a_1}{3},\qquad \tilde{\wp}'(z)=-\frac{2\sqrt{Q(u)}}{u^3}.$$

Подставляя эти формулы в закон сложения

$$\tilde{\wp}(z+w)=-\tilde{\wp}(z)-\tilde{\wp}(w)+\frac{1}{4}\left(\frac{\tilde{\wp}'(z)-\tilde{\wp}'(w)}{\tilde{\wp}(z)-\tilde{\wp}(w)}\right)^2$$

и проводя прямые вычисления, получаем закон $F_{\mathrm{Bc}}(u,v)$.

(iv) следует из предыдущих пунктов.

(v) Предположим, что $F_{\text{Bc}}(u,v) = \mathcal{F}(u,v)$ для некоторых рядов λ_1, λ_2. Поскольку f_{Bc} — нечётная функция, необходимо, чтобы

$$f_{\text{Kr}}(u) = \frac{e^{\alpha u}}{\Phi(u,z)}$$

была нечётной. Следовательно,

$$V := \frac{\sigma(z-u)}{\sigma(z+u)} e^{2(\zeta(z)-\alpha)u} \equiv 1.$$

Из

$$\left.\frac{\partial \log V}{\partial u}\right|_{u=0} = 0 \qquad \text{и} \qquad \left.\frac{\partial^3 \log V}{\partial u^3}\right|_{u=0} = 0$$

получаем $\alpha = 0$ и $\wp'(z) = 0$. Известно (см., например, [Кри80]), что

$$\Phi(u,z)\Phi(-u,z) = \wp(z) - \wp(u).$$

Следовательно, из условия нечётности получаем:

$$f_{\text{Kr}}^2(u) = \frac{1}{\Phi^2(u,z)} = \frac{1}{\wp(u)-\wp(z)}.$$

Пусть

$$\wp'(u)^2 = 4(\wp(u)-e_1)(\wp(u)-e_2)(\wp(u)-e_3).$$

Тогда из

$$f'_{\text{Kr}}(u)^2 = \left(1+(e_1-e_2)f_{\text{Kr}}(u)^2\right)\left(1+(e_1-e_3)f_{\text{Kr}}(u)^2\right)$$

и

$$f'_{\text{Bc}}(u)^2 = 1 - a_1 f_{\text{Bc}}(u)^2 + a_2 f_{\text{Bc}}(u)^4 - a_3 f_{\text{Bc}}(u)^6$$

получаем $a_3 = 0$.

(vi) Следует из пункта **(iii)**.

□

В [BV24] было установлено, что экспонента универсальной формальной

группы комплексных кобордизмов задаётся рядом

$$f_{\mathrm{U}}(u) = u + \sum_{n\geq 1} [\Theta_n] \frac{u^{n+1}}{(n+1)!},$$

где $[\Theta_n]$ обозначает класс кобордизма гладкого тета-дивизора (комплексной размерности n) на общем главно поляризованном абелевом многообразии $\mathcal{A}^{n+1}$.

Хорошо известно, что $\Omega_{\mathrm{U}} \otimes \mathbb{Q} \cong \mathbb{Q}[[\mathbb{C}P^1], [\mathbb{C}P^2], \dots, [\mathbb{C}P^n], \dots]$, см. [Нов62]. В [BV26, формула (4)] было установлено следующее тождество в $\Omega_{\mathrm{U}} \otimes \mathbb{Q}$:

$$[\mathbb{C}P^n] = (n+1) L_n(\tau_1, \dots, \tau_n), \quad \tau_k = \frac{[\Theta_k]}{(k+1)!},$$

где L_n обозначает многочлен обращения Лагранжа. Из данного факта и [BV24, Lemma 3.3] следует, что

$$\Omega_{\mathrm{U}} \otimes \mathbb{Q} \cong \mathbb{Q}[[\Theta_1], \dots, [\Theta_n], \dots].$$

Кольцо $\mathbb{Z}[[\Theta_1], \dots, [\Theta_n], \dots]$ является собственным подкольцом Ω_{U}. По известному результату Милнора и Новикова [Mil60; Нов60] кольцо Ω_U является кольцом многочленов

$$\mathbb{Z}[a_1, \dots, a_n, \dots]$$

с одним образующим a_n в каждой размерности $2n$, где $n \geqslant 1$. Проблема нахождения хороших геометрических представителей для образующих a_n остаётся открытой.

Из универсальности экспоненты f_{U} получаем тождество:

$$f_{\mathrm{Bc}}(u) = u + \sum_{n\geq 1} \mathrm{Bc}(\Theta_n) \frac{u^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Из нечётности $f_{\mathrm{Bc}}(u)$ следует, что

$$\mathrm{Bc}(\Theta_{2n+1}) = 0 \qquad \text{для всех } n \geq 0.$$

Имеем:

$$\mathrm{Bc}(\Theta_2) = -a_1, \quad \mathrm{Bc}(\Theta_4) = a_1^2 + 12a_2, \quad \mathrm{Bc}(\Theta_6) = -a_1^3 - 132a_1a_2 - 360a_3. \quad (3.2.3)$$

Заметим, что первые три ненулевых значения $\mathrm{Bc}(\Theta_n)$ лежат в кольце $\mathbb{Z}[a_1, a_2, a_3]$. Это не случайность.

Теорема 3.2.4. *Значения* $\mathrm{Bc}(\Theta_n)$ *принадлежат кольцу* $\mathbb{Z}[a_1, a_2, a_3]$.

Доказательство. Для краткости положим $f := f_{\mathrm{Bc}}$. Из Теоремы 3.2.1, пункт **(iii)**, мы знаем, что

$$f'(x) = \sqrt{1 - a_1 f(x)^2 + a_2 f(x)^4 - a_3 f(x)^6}. \tag{3.2.5}$$

Возведение в квадрат и дифференцирование (3.2.5) даёт:

$$f'' = -a_1 f + 2a_2 f^3 - 3a_3 f^5, \quad \text{где } f(0) = 0,\ f'(0) = 1. \tag{3.2.6}$$

Обозначим $b_n = \mathrm{Bc}(\Theta_{2n})$, $n > 0$ и $b_0 = 1$. Тогда имеем:

$$f(x) = \sum_{n \geq 0} b_n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}. \tag{3.2.7}$$

Используя (3.2.6) и (3.2.7), сравнение коэффициентов даёт

$$\begin{aligned} b_{n+1} = &-a_1 b_n \\ &+ 2a_2 \sum_{i+j+k=n-1} \binom{2n+1}{2i+1, 2j+1, 2k+1} b_i b_j b_k \\ &- 3a_3 \sum_{i_1+\cdots+i_5=n-2} \binom{2n+1}{2i_1+1, \ldots, 2i_5+1} \prod_{r=1}^{5} b_{i_r}, \end{aligned}$$

$n \geq 2$.

Следовательно, $b_n \in \mathbb{Z}[a_1, a_2, a_3]$. □

Теперь вычислим значения рода Бухштабера на $\mathbb{C}P^n$. Применяя род к логарифму Мищенко для формальной группы $F_{\mathrm{U}}(u, v)$, получаем:

$$g_{\mathrm{Bc}}(u) = \sum_{n \geq 0} \mathrm{Bc}(\mathbb{C}P^n) \frac{u^{n+1}}{n+1}.$$

Следовательно,

$$\mathrm{Bc}(\mathbb{C}P^{2n+1}) = 0 \qquad \text{для всех } n \geq 0.$$

Получаем:

$$\mathrm{Bc}(\mathbb{C}P^2)=\frac{a_1}{2},\quad \mathrm{Bc}(\mathbb{C}P^4)=\frac{3a_1^2-4a_2}{8},\quad \mathrm{Bc}(\mathbb{C}P^6)=\frac{5a_1^3-12a_1a_2+8a_3}{16}. \tag{3.2.8}$$

Напомним, что род Кричевера соответствует формальной группе с экспонентой (0.0.6), задаваемой функцией Бейкера–Ахиезера $\Phi(x,z)$. Этот род зависит от 4 параметров:

$$b_1=\alpha,\quad b_2=\wp(z),\quad b_3=\wp'(z),\quad \text{и}\quad b_4=g_2.$$

Как было доказано в [Бух90], любая формальная группа вида (0.0.2) имеет f_{Kr} в качестве своей экспоненты.

Род Кричевера $\mathrm{Kr}:\Omega_{\mathrm{U}}\to A$, где A — кольцо коэффициентов рядов λ_1, λ_2 из (0.0.2), является изоморфизмом градуированных абелевых групп в вещественных размерностях меньше 10 [BPR10, Corollary 6.11].

Существует класс $K\in\Omega_U^{-12}$, на котором род Кричевера после тензорирования с $\mathbb{Q}$ обращается в нуль, тогда как род Бухштабера остаётся ненулевым даже при $a_1=a_2=0$. Согласно (3.2.3), степень 12 минимальна для существования такого класса.

Предложение 3.2.9.

(i) *Пусть* $\Theta_n:=[\Theta_n]$ *обозначает класс в* $\Omega_{\mathrm{U}}^{-2n}$ *тета-дивизора комплексной размерности* n *общего главно поляризованного абелева многообразия. Введём элемент* $K\in\Omega_{\mathrm{U}}^{-12}$:

$$\begin{aligned}K=\Theta_6+9\Theta_1^6-15\Theta_1^4\Theta_2-3\Theta_1^3\Theta_3-13\Theta_1^2\Theta_2^2+3\Theta_1^2\Theta_4\\+29\Theta_1\Theta_2\Theta_3+10\Theta_2^3-11\Theta_2\Theta_4-10\Theta_3^2.\end{aligned} \tag{3.2.10}$$

Тогда $\mathrm{Bc}(K)=-360a_3$ *в* $\mathbb{Z}[a_1,a_2,a_3]$ *и* $\mathrm{Kr}(K)=0$ *в* $A\otimes\mathbb{Q}\cong\mathbb{Q}[\alpha,\wp(z),\wp'(z),g_2]$, *где* A *— кольцо коэффициентов рядов* λ_1, λ_2 *из* (0.0.2).

(ii) $\mathbb{Q}$*-векторное пространство*

$$\mathrm{Ker}(\mathrm{Kr}:\Omega_{\mathrm{U}}^{-12}\otimes\mathbb{Q}\to\mathbb{Q}[\alpha,\wp(z),\wp'(z),g_2])$$

двумерно и порождается K и

$$L = \Theta_5\Theta_1 - 3\Theta_4\Theta_1^2 - 11\Theta_3\Theta_2\Theta_1 + 12\Theta_3\Theta_1^3 + 22\Theta_2^2\Theta_1^2 - 30\Theta_2\Theta_1^4 + 9\Theta_1^6.$$

Доказательство. **(i)** Пусть $u = \wp(z)$ и $v = \wp'(z)$. Из разложения $f_{\mathrm{Kr}}(u)$ получаем:

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Kr}(\Theta_1) = 2\alpha,\\
&\mathrm{Kr}(\Theta_2) = 3(\alpha^2 + u),\\
&\mathrm{Kr}(\Theta_3) = 4(\alpha^3 + 3\alpha u - v),\\
&\mathrm{Kr}(\Theta_4) = 5\alpha^4 + 30\alpha^2 u - 20\alpha v + 45u^2 - 3g_2,\\
&\mathrm{Kr}(\Theta_5) = 6\alpha^5 + 60\alpha^3 u - 60\alpha^2 v + 270\alpha u^2 - 18\alpha g_2 - 132uv,\\
&\mathrm{Kr}(\Theta_6) = 7\alpha^6 - 63\alpha^2 g_2 + 105\alpha^4 u - 99g_2 u + 945\alpha^2 u^2\\
&\qquad + 1215u^3 - 140\alpha^3 v - 924\alpha uv + 160v^2.
\end{aligned}$$

Комбинируя это с предыдущими вычислениями (3.2.3), находим: $\mathrm{Bc}(K) = -360a_3$ и $\mathrm{Kr}(K) = 90\big(4u^3 - g_2u - g_3 - v^2\big) = 0$.

(ii) Этот пункт следует из прямых вычислений.

□

Напомним, что род Виттена [Wit88] соответствует формальной группе с экспонентой $f_{\mathrm{Wt}}(u) = \sigma(u; g_2, g_3)$, задаваемой σ-функцией Вейерштрасса. Положим $a_1 = 0$ и сравним экспоненты Бухштабера $f_{\mathrm{Bc}}(u) = \frac{1}{\sqrt{\wp(u;g_2,-g_3)}}$ и Виттена $f_{\mathrm{Wt}}(u) = \sigma(u; g_2, g_3)$:

$$\begin{aligned}
f_{\mathrm{Bc}}(u) &= u - 3g_2\frac{u^5}{5!} + 90g_3\frac{u^7}{7!} + 189g_2^2\frac{u^9}{9!} - 43740g_2g_3\frac{u^{11}}{11!} + \big(-68\,607g_2^3 + 2\,673\,000g_3^2\big)\frac{u^{13}}{13!} + \dots\\
f_{\mathrm{Wt}}(u) &= u - \widetilde{g}_2\frac{u^5}{5!} - \widetilde{g}_3\frac{u^7}{7!} - 9\widetilde{g}_2^2\frac{u^9}{9!} - 6\widetilde{g}_2\widetilde{g}_3\frac{u^{11}}{11!} + \big(69\widetilde{g}_2^3 - 6\widetilde{g}_3^2\big)\frac{u^{13}}{13!} + \dots
\end{aligned} \tag{3.2.11}$$

где $\widetilde{g_2} = \frac{g_2}{2}$ и $\widetilde{g}_3 = 6g_3$.

Напомним, что формальный степенной ряд $u + \sum\limits_{n\geq 1} c_n\frac{u^{n+1}}{(n+1)!}$, где $c_n \in R$, называется *рядом Гурвица* над кольцом R.

Известно (см., например, [БЛ05]), что $f_{\mathrm{Wt}}(z)$ является рядом Гурвица над кольцом $\mathbb{Z}\big[\frac{g_2}{2}, 2g_3\big]$. В [Bun17] Бункова высказала гипотезу, что $f_{\mathrm{Wt}}(z) = \sigma(z; g_2, g_3)$ является рядом Гурвица над кольцом $\mathbb{Z}\big[\frac{g_2}{2}, 6g_3\big]$.

Предложение 3.2.12. *При $a_1 = 0$ экспонента $f_{\mathrm{Bc}}(u) = \frac{1}{\sqrt{\wp(u; g_2, -g_3)}}$ рода Бухштабера является рядом Гурвица над кольцом $\mathbb{Z}[g_2, g_3]$.*

Доказательство. Из (3.2.2) имеем $g_2 = -4a_2$, и $g_3 = -4a_3$. Пусть $f(u) = \sum_{n\geq 0} b_n \frac{u^n}{n!}$, $b_0 = 0$, $b_1 = 1$. Рассуждая, как в доказательстве Теоремы 3.2.4, получаем рекуррентное соотношение:

$$b_{n+2} = -\frac{g_2}{2} C_n + \frac{3g_3}{4} D_n, \tag{3.2.13}$$

где $C_n = \sum_{i+j+k=n} \binom{n}{i,j,k} b_i b_j b_k$, $D_n = \sum_{i_1+\cdots+i_5=n} \binom{n}{i_1,\ldots,i_5} \prod_{r=1}^{5} b_{i_r}$.

Из нечётности f мы знаем, что $b_n = 0$ для каждого чётного $n \geq 0$.

Если n нечётно, то каждый мультиномиальный коэффициент в C_n имеет три нечётных индекса i, j, k. По теореме Куммера [DP91, Теорема 1] его 2-адическая нормировка равна числу переносов при сложении в двоичной системе; при сложении трёх нечётных чисел возникает по меньшей мере один перенос, поэтому каждый такой мультиномиальный коэффициент делится на 2. Аналогично, каждый мультиномиальный коэффициент в D_n имеет пять нечётных индексов $i_1, \ldots, i_5$; при сложении пяти нечётных чисел возникает по меньшей мере два переноса, поэтому каждый делится на 4. Следовательно, $C_n \in 2\mathbb{Z}$, $D_n \in 4\mathbb{Z}$. Уравнение (3.2.13) теперь даёт $b_{n+2} \in \mathbb{Z}[g_2, g_3]$. □

3.3 Теория когомологий Бухштабера

В данном разделе мы построим обобщенную теорию когомологий, соответствующую роду Бухштабера.

Всюду в данном разделе обобщенные теории когомологий рассматриваются на категории конечных CW-комплексов.

Теорема 3.3.1. *Существует комплексно ориентируемая мультипликативная теория когомологий* Buc^**, такая, что отображение ориентации* $\mathrm{U}^* \to \mathrm{Buc}^*$ *индуцирует на кольцах коэффициентов гомоморфизм* $\mathrm{U}^*(\mathrm{pt}) \to \mathrm{Buc}^*(\mathrm{pt})$*, совпадающий с родом Бухштабера* $\mathrm{Bc} : \Omega_{\mathrm{U}} \to \mathbb{Z}\left[\frac{1}{2}, a_1, a_2, a_3\right]$.

Доказательство. Будем использовать конструкцию Бааса–Сулливана [Baa73]. Сначала покажем, что существует обобщенная комплексно ориентированная теория когомологий $\mathrm{Buc}^* = \mathrm{U}^{*,\Sigma}\left[\frac{1}{2}\right]$, являющаяся локализованной в двойке теорией комплексных кобордизмов с особенностями. Рассуждая как в [LRS95, Section 3], возьмем множество $\Sigma = \{y_{16}, ..., y_{4n}, ...\}$ в качестве сингулярного множества, где элементы множества $\{y_{4n}\}_{n>3}$ определяются далее через некоторые образующие кольца $\Omega_{\mathrm{U}}\left[\frac{1}{2}\right] = \mathbb{Z}\left[\frac{1}{2}, x_4, x_8, x_{12}, x_{16}, ...\right]$.

Выберем в качестве полиномиальных образующих кольца $\Omega_{\mathrm{U}}\left[\frac{1}{2}\right]$ элементы

$$x_4 = 2[\mathbb{C}P^2], \quad x_8 = -2[\mathbb{C}P^4] + 3[\mathbb{C}P^2]^2,$$
$$x_{12} = 2[\mathbb{C}P^6] - 6[\mathbb{C}P^2][\mathbb{C}P^4] + 4[\mathbb{C}P^2]^3$$

Данный выбор корректен, поскольку по критерию Новикова [Нов60, Следствие 5.4] элементы $[\mathbb{C}P^2]$, $[\mathbb{C}P^4]$ и $[\mathbb{C}P^6]$ являются полиномиальными образующими кольца Ω_{U} и двойка обратима в кольце $\Omega_{\mathrm{U}}\left[\frac{1}{2}\right]$. Заметим, что

$$\mathrm{Bc}(x_4) = a_1, \quad \mathrm{Bc}(x_8) = a_2, \quad \mathrm{Bc}(x_{12}) = a_3.$$

Пусть x_{16}, x_{20}, ... — дополнительный набор мультипликативных образующих. Положим при $n > 3$:

$$y_{4n} = x_{4n} - P_{4n}(x_4, x_8, x_{12}),$$

где $P_{4n}(\alpha, \beta, \gamma)$ — такой многочлен, что $\mathrm{Bc}(x_{4n}) = P_{4n}(a_1, a_2, a_3)$. Тогда $\Omega_{\mathrm{U}}\left[\frac{1}{2}\right] \cong \mathbb{Z}\left[\frac{1}{2}, x_4, x_8, x_{12}, y_{16}, ..., y_{4n}, ...\right]$. Пусть идеал I порожден элементами множества Σ. Тогда существует комплексно ориентируемая теория когомологий $\mathrm{Buc}^*(\cdot)$, такая, что

$$\mathrm{Buc}^*(\mathrm{pt}) \cong \Omega_{\mathrm{U}}\left[\frac{1}{2}\right]/I \to \mathbb{Z}\left[\frac{1}{2}, a_1, a_2, a_3\right].$$

Из результатов Миронова [Мир78] (см. Теорему 4.5 и следующее за ней замечание) следует, что теория Buc^* является мультипликативной.

□

Как и в случае рода Ошанина, ожидать точность по Ландвеберу для теории когомологий $\mathrm{U}^*(\cdot) \otimes_{\Omega_{\mathrm{U}}} \mathbb{Z}\left[\frac{1}{2}, a_1, a_2, a_3\right]$ не приходится. Тем не менее, имеется аналогичный результат после локализации по дискриминанту Δ:

Теорема 3.3.2.

(i) *Пусть* $\Delta = \operatorname{disc}_t(t^3 - a_1 t^2 + a_2 t - a_3)$ *— дискриминант. Тогда теория когомологий*

$$\mathrm{U}^*(\cdot) \otimes_{\Omega_\mathrm{U}} \mathbb{Z}\left[\frac{1}{2}, a_1, a_2, a_3, \Delta^{-1}\right]$$

точна по Ландвеберу.

(ii) *Естественное преобразование*

$$\mathrm{U}^*(\cdot) \otimes_{\Omega_\mathrm{U}} \mathbb{Z}\left[\frac{1}{2}, a_1, a_2, a_3, \Delta^{-1}\right] \to \mathrm{Buc}^*(\cdot)[\Delta^{-1}]$$

является изоморфизмом.

Доказательство. Аналогично доказательству из [LRS95, Section 4.5]. □

3.4 Эквивариантный род Бухштабера и проблема жесткости родов

3.4.0.1 Предварительные сведения

Начнем данный раздел с необходимых определений и фактов из теории универсального торического рода (см. статьи [BPR10] и [BT08] и списки литературы там).

Пусть $\mathbb{T}^k = \mathbb{S}^1 \times \ldots \times \mathbb{S}^1$ обозначает k-мерный тор и X — гладкое компактное многообразие с действием тора $\mathbb{T}^k$. В классе гладких $\mathbb{T}^k$-эквивариантных касательно стабильно комплексных расслоений $E \to X$ со слоем компактное d-мерное многообразие естественно вводится отношение кобордантности (см. [BPR10, Definition 2.1]). Обозначим через $\Omega_{\mathrm{U}:\mathbb{T}^k}$ градуированное кольцо соответствующих классов кобордантности расслоений над X.

В частности, когда $X = \mathrm{pt}$ получаем следующее определение. Пусть M^{2n} — гладкое замкнутое многообразие с гладким действием ρ тора $\mathbb{T}^k$. Набор (M^{2n}, ρ, τ) называется *касательно стабильно комплексным* $\mathbb{T}^k$*-многообразием*,

если существует такое целое $\ell \geq 0$ и комплексное векторное расслоение ξ, что

$$\tau : \mathscr{T}M^{2n} \oplus \mathbb{R}^{2(\ell-n)} \to \xi$$

— изоморфизм вещественных расслоений и композиция

$$r(t)\colon \xi \xrightarrow{\tau^{-1}} \mathscr{T}(M^{2n}) \oplus \mathbb{R}^{2(\ell-n)} \xrightarrow{d\rho(t)\oplus \mathrm{id}} \mathscr{T}(M^{2n}) \oplus \mathbb{R}^{2(\ell-n)} \xrightarrow{\tau} \xi$$

— эндоморфизм комплексного расслоения ξ для каждого $t \in \mathbb{T}^k$.

Для каждого гладкого компактного $\mathbb{T}^k$-многообразия X универсальным торическим родом Φ_X называется композиция морфизмов:

$$\Phi_X : \Omega^*_{\mathrm{U}:\mathbb{T}^k}(X_+) \to \mathrm{U}^*_{\mathbb{T}^k}(X_+) \to \Omega^*_{\mathrm{U}}((\mathrm{E}\mathbb{T}^k \times_{\mathbb{T}^k} X)_+),$$

где X_+ обозначает несвязное объединение $\mathbb{T}^k$-пространства X с точкой pt.

В частности, когда $X = \mathrm{pt}$ (т.е. $X_+ = \mathbb{S}^0$), получается мультипликативный гомоморфизм

$$\Phi : \Omega_{\mathrm{U}:\mathbb{T}^k} \to \Omega_{\mathrm{U}}(\mathbf{B}\mathbb{T}^k_+) \cong \Omega_{\mathrm{U}}[[u_1, \ldots, u_k]],$$

где $u_j = c_1^{\mathrm{U}}(\overline{\eta_j}) \in \mathrm{U}^2(\mathbf{B}\mathbb{T}^k)$ — первый класс Черна в U-теории, $\eta_j = (\mathbf{B}\pi_j)^*(\overline{\eta})$, $\pi_j : \mathbb{T}^k \to \mathbb{S}^1$ — проекция на j-ый множитель и $\eta \to \mathbb{C}P^\infty$ — универсальное комплексное линейное расслоение.

Каждый род Хирцебруха $\mathscr{G} : \Omega_{\mathrm{U}} \to R$ определяет его $\mathbb{T}^k$-*эквивариантное продолжение* $\mathscr{G}^{\mathbb{T}^k}$ как композицию отображений

$$\mathscr{G}^{\mathbb{T}^k} : \Omega_{\mathrm{U}:\mathbb{T}^k} \xrightarrow{\Phi} \Omega_{\mathrm{U}}[[u_1, \ldots, u_k]] \xrightarrow{\mathscr{G}} R[[u_1, \ldots, u_k]]. \tag{3.4.1}$$

Род Хирцебруха $\mathscr{G}$ называется $\mathbb{T}^k$-*жестким* на стабильно комплексном $\mathbb{T}^k$-многообразии, если

$$\mathscr{G}^{\mathbb{T}^k}[M, \rho, \tau] = \mathscr{G}[M, \tau],$$

где через $[M, \rho, \tau] \in \Omega_{\mathrm{U}:\mathbb{T}^k}$ и $[M, \tau] \in \Omega_{\mathrm{U}}$ обозначены соответствующие классы кобордизмов.

Всюду далее будем предполагать, что действие тора $\mathbb{T}^k$ на компактном многообразии M^{2n} имеет лишь изолированные неподвижные точки. Пусть $x \in M^{2n}$ — неподвижная точка действия ρ тора $\mathbb{T}^k$. Определим знак $\mathrm{sign}(x)$ в точке

x следующим образом. Имеем $\operatorname{sign}(x) = +1$, если отображение

$$\mathscr{T}_x M^{2n} \xrightarrow{\mathrm{id}\oplus 0} \mathscr{T}_x(M^{2n}) \oplus \mathbb{R}^{2(\ell-n)} \xrightarrow{\tau_x} \xi_x \cong \mathbb{C}^n \oplus \mathbb{C}^{\ell-n} \xrightarrow{\pi_1} \mathbb{C}^n$$

сохраняет ориентацию, и $\operatorname{sign}(x) = -1$ иначе.

Дифференциал действия в неподвижной точке x индуцирует касательное представление тора $\mathbb{T}^k$ в $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$. Это представление раскладывается в прямую сумму $r_{x,1} \oplus \ldots \oplus r_{x,n}$ одномерных неприводимых. Каждое $r_{x,j}$ имеет вид:

$$r_{x,j}(e^{2\pi i u_1}, \ldots, e^{2\pi i u_k}) = e^{2\pi i \langle w_j(x), \boldsymbol{u}\rangle} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$$

для некоторого $w_j(x) = (w_{j,1}(x), \ldots, w_{j,k}(x)) \in \mathbb{Z}^k$, где $\boldsymbol{u} = (u_1, \ldots, u_k) \in \mathbb{R}^k$ и $\langle w_j(x), \boldsymbol{u}\rangle = \sum\limits_{\ell=1}^{k} w_{j,\ell}(x) u_\ell$. Векторы $w_1(x)$, ..., $w_n(x)$ называются весовыми векторами представления r_x в неподвижной точке x.

Пусть $F := F_{\mathrm{U}}(u, v)$ — формальная группа комплексных кобордизмов. Для целочисленного вектора $\boldsymbol{w} \in \mathbb{Z}^k$ и вектора $\boldsymbol{u}$ формальных переменных той же длины определим $[\boldsymbol{w}](\boldsymbol{u})$ индуктивно:

(i) $[\boldsymbol{w}](\boldsymbol{u}) = [w](u) = F(u, [w-1](u))$, если $k = 1$. При этом $[0](u) = 0$.

(ii) $[\boldsymbol{w}](\boldsymbol{u}) = F_{q=1}^{k}[w_q](u_q) = F\left(F_{q=1}^{k-1}[w_q](u_q), [w_k](u_k)\right)$.

Эквивалентно,

$$[\boldsymbol{w}](\boldsymbol{u}) = c_1^{\mathrm{U}}(\overline{\eta_1}^{w_1(x)} \otimes \ldots \otimes \overline{\eta_k}^{w_k(x)}) \in \Omega_{\mathrm{U}}^{-2}(\mathbf{B}\mathbb{T}^k),$$

где, как и выше, $u_j = c_1^{\mathrm{U}}(\overline{\eta_j}) \in \mathrm{U}^2(\mathbf{B}\mathbb{T}^k)$.

Элементы $\{[w](u) \in \Omega_{\mathrm{U}}[[u]] \mid w \in \mathbb{Z}\}$ кольца дают пример степенной системы. Отметим, что общее определение степенных систем и их приложения в алгебраической топологии впервые рассмотрены в работе [БН71].

Для любого касательно стабильно комплексного многообразия M^{2n} имеет место формула [BPR10, Corollary 4.9]:

$$\Phi[M, \rho, \tau] = \sum_{x \in \mathrm{Fix}(M)} \operatorname{sign}(x) \prod_{j=1}^{n} \frac{1}{[w_j(x)](\boldsymbol{u})} \in \Omega_{\mathrm{U}}[[u_1, \ldots, u_k]]. \qquad (3.4.2)$$

Более того, $\Phi[M, \rho, \tau] = [M^{2n}] + P(\boldsymbol{u})$, где $P(\boldsymbol{u}) \in \Omega_{\mathrm{U}}[[u_1, \ldots, u_k]]$ и $P(\mathbf{0}) = 0$.

Один из подходов работы [BPR10] состоит в использовании гомотопического подхода к определению рода Хирцебруха. Пусть (t^{D}, v) — гомотопический род, состоящий из определяющего спектра D, вычисляющего E (все спектры предполагаются комплексно ориентированными), класса Тома t^{D} и гомотопически коммутативной диаграммы

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{MU} & \xrightarrow{t^{\mathrm{D}}} & \mathrm{D} \\ {\scriptstyle h^{\mathrm{MU}}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle v} \\ \mathrm{H}\wedge\mathrm{MU} & \xrightarrow[s^{\mathrm{E}}]{} & \mathrm{E} \end{array}$$

комплексно ориентированных спектров, где D_* и E_* сконцентрированы в четных размерностях и свободны от кручения, а также $v_* : \mathrm{D}_* \to \mathrm{E}_*$ — мономорфизм.

Каждый комплексно ориентированный спектр E допускает две ориентации $x_1, x_2 \in \mathrm{E}^2(\mathbb{C}P^\infty)$. Эти ориентации связаны друг с другом взаимно обратными степенными рядами с коэффициентами в кольце E_{2j} при $j \geq 1$ и $b_0^{\mathrm{E}} = m_0^{\mathrm{E}} = 1$:

$$x_2 = \sum_{j\geq 0} b_j^{\mathrm{E}} x_1^{j+1}, \quad \text{и} \quad x_1 = \sum_{j\geq 0} m_j^{\mathrm{E}} x_2^{j+1}.$$

Формальная группа $F = F_{(t^{\mathrm{D}},v)}$, ассоциированная с гомотопическим родом, классифицируется гомоморфизмом $t_*^{\mathrm{D}} : \Omega_*^{\mathrm{U}} \to \mathrm{D}_*$ градуированных колец. Экспонента и логарифм этой формальной группы даются рядами $b^{\mathrm{E}}(s_*^{\mathrm{E}} x^{\mathrm{H}})$ и $m^{\mathrm{E}}(v_* x^{\mathrm{D}})$. Таким образом,

$$F(u, v) = b^{\mathrm{E}}(m^{\mathrm{E}}(u) + m^{\mathrm{E}}(v)).$$

Не каждый обыкновенный род Хирцебруха реализуется в виде гомотопического. Однако различия стираются, если коэффициенты экспоненты (или логарифма) формальной группы рассматриваются над некоторой $\mathbb{Q}$-алгеброй.

Согласно [BPR10, Corollary 4.20] для каждого касательно стабильно комплексного многообразия M^{2n} с изолированными неподвижными точками име-

ет место равенство

$$t_*^E\Phi(M) = \sum_{x\in \mathrm{Fix}(M)} \mathrm{sign}(x)\prod_{j=1}^{n}\frac{1}{b^E\big(w_j(x)\cdot \boldsymbol{u}\big)} \in \mathrm{E}^{-2n}(\mathbf{B}\mathbb{T}^k_+). \tag{3.4.3}$$

Из формулы (3.4.3) следует, что для соответствующего эквивариантного продолжения $\mathscr{G}^{\mathbb{T}^k}$ рода Хирцебруха $\mathscr{G}:\Omega_{\mathrm{U}}\to R\otimes\mathbb{Q}$ имеем:

$$\mathscr{G}^{\mathbb{T}^k}(M)(f(u_1),\dots,f(u_k)) = \sum_{x\in \mathrm{Fix}(M)} \mathrm{sign}(x)\prod_{j=1}^{n}\frac{1}{f(w_j(x)\cdot \boldsymbol{u})}. \tag{3.4.4}$$

Формула (3.4.4) дает (см. [BPR10, Proposition 6.15]) необходимое условие жесткости эквивариантного рода $\mathscr{G}^{\mathbb{T}^k}$.

3.4.0.2 Эквиваринтный род Бухштабера

В данном разделе исследуются вопросы жесткости рода Бухштабера, введенного в Разделе 3.2.

Пусть $\mathscr{G}:\Omega_{\mathrm{U}}\to R$ — некоторый род Хирцебруха (т.ч. $R\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q}\neq 0$)[1]. Будем называть род $\mathscr{G}$ *нечетным*, если логарифм $g_{\mathscr{G}}$ (эквивалетно, экспонента $f_{\mathscr{G}}$) соответствующей формальной группы нечетен.

Легко видеть, что род $\mathscr{G}$ нечетный тогда и только тогда, когда $\mathscr{G}\otimes\mathbb{Q}$ пропускается через кольцо $\Omega_{\mathrm{SO}}\otimes\mathbb{Q}$ рационализации ориентированных кобордизмов:

$$\begin{array}{ccc}\Omega_{\mathrm{U}}\otimes\mathbb{Q} & \xrightarrow{\ \mathscr{G}\otimes\mathbb{Q}\ } & R\otimes\mathbb{Q}\\ & \searrow \quad \nearrow_{\exists} & \\ & \Omega_{\mathrm{SO}}\otimes\mathbb{Q} & \end{array} \qquad\Longleftrightarrow\qquad g_{\mathscr{G}}(-u) = -g_{\mathscr{G}}(u).$$

Действительно, если род $\mathscr{G}$ пропускается через кольцо Ω_{SO}, то $\mathscr{G}[\mathbb{C}P^{2k-1}]=0$, поскольку $[\mathbb{C}P^{2k-1}]=0$ в $\Omega^{-4k+2}_{\mathrm{SO}}$ [HBJ92, p. 1]. Поэтому ряд Мищенко $g_{\mathscr{G}}(u)$ нечетный. Обратно, если ряд Мищенко $g_{\mathscr{G}}(u)$ нечетный, то $(\mathscr{G}\otimes\mathbb{Q})(\mathbb{C}P^{2k-1})=0$ и, следовательно, значение рода $\mathscr{G}\otimes\mathbb{Q}$ определяется на элементах вида $[\mathbb{C}P^{2k}]$,

[1] Если не оговорено противное, под $\otimes\mathbb{Q}$ понимается $\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q}$.

$k = 1, 2, \ldots$ В этом случае утверждение следует из изоморфизма $\Omega_{SO} \otimes \mathbb{Q} \cong \mathbb{Q}[[\mathbb{C}P^2], [\mathbb{C}P^4], \ldots, [\mathbb{C}P^{2k}]]$ (см., например, [MC79, Следствие 18.9]).

Предложение 3.4.5. *Пусть $\mathscr{G} : \Omega_U \to R$ — нечетный род, где $R \otimes \mathbb{Q} \neq 0$. Пусть $m_0, \ldots, m_n$ — попарно различные векторы целочисленной решетки $\mathbb{Z}^k$ (где $k \geq 1$), такие, что $m_{n-i} + m_i = m$ для любого $0 \leq i \leq n$ и некоторого фиксированного $m \in \mathbb{Z}^k$. Для каждого целого $n > 0$ рассмотрим многообразие $\mathbb{C}P^n$ с действием ρ тора $\mathbb{T}^k$:*

$$t \cdot [z_0 : \ldots : z_{2n+1}] = [t^{m_0} z_0 : t^{m_1} z_1 \ldots : t^{m_n} z_n], \tag{3.4.6}$$

где $t^{m_i} = t_1^{m_{i_1}} \ldots t_k^{m_{i_k}}$. Пусть n нечетно. Тогда $\mathbb{T}^k$-эквивариантный род $\mathscr{G}^{\mathbb{T}^k}(\mathbb{C}P^n, \rho)$ равен нулю и, следовательно, род $\mathscr{G}^{\mathbb{T}^k}$ является $\mathbb{T}^k$-жестким на многообразии $\mathbb{C}P^n$ с действием (3.4.6).

Доказательство. Условие попарной различности векторов $m_0, \ldots, m_n$ равносильно тому, что неподвижные точки относительно действия тора $\mathbb{T}^k$ выглядят следующим образом:

$$p_i = [0 : \ldots : 1 : \ldots : 0] \in \mathbb{C}P^n, \qquad i = 0, \ldots, n.$$

Веса действия тора в касательном пространстве неподвижной точки x_i образуют множество $\{m_j - m_i : j \neq i\}$. По формуле (3.4.2) Бухштабера–Панова–Рэя для универсального торического рода имеем:

$$\mathscr{G}^{\mathbb{T}^k}(\mathbb{C}P^n) = \sum_{i=0}^{n} A_i(\boldsymbol{u}), \qquad A_i(u) := \prod_{j \neq i} \frac{1}{[m_j - m_i]_{\mathscr{G}}(\boldsymbol{u})}, \tag{3.4.7}$$

где $[-]_{\mathscr{G}}$ обозначает возведение в степень в смысле формальной группы, соответствующей роду $\mathscr{G}$.

Имеем для каждого $0 \leq i \leq n$:

$$\begin{aligned} A_{n-i}(\boldsymbol{u}) &= \prod_{j \neq i} \frac{1}{[\lambda_{n-j} - \lambda_{n-i}]_{\mathrm{Bc}}(\boldsymbol{u})} \\ &= \prod_{j \neq i} \frac{1}{[-(\lambda_j - \lambda_i)]_{\mathrm{Bc}}(\boldsymbol{u})} \\ &= (-1)^n \prod_{j \neq i} \frac{1}{[\lambda_j - \lambda_i]_{\mathrm{Bc}}(\boldsymbol{u})} \\ &= (-1)^n A_i(\boldsymbol{u}). \end{aligned}$$

Нечетность n дает равенство $A_{n-i}(u) = -A_i(u)$ для каждого $0 \le i \le n$. Следовательно, $\mathscr{G}^{\mathbb{T}^k}(\mathbb{C}P^{2n+1}) = 0$.

□

В частности, условиям Предложения 3.4.5 (после рационализации) удовлетворяет род Бухштабера $\mathscr{G} = \mathrm{Bc}$.

Из [BPR10] следует, что род Бухштабера всегда равен нулю на многообразии $\mathbb{C}P^1$. Для $\mathbb{C}P^3$ это уже не так.

Пример 3.4.8. Рассмотрим $\mathbb{C}P^3$ с действием $\widetilde{\rho}$ окружности

$$\lambda \cdot [z_0 : \lambda z_1 : \lambda^2 z_2 : \lambda^4 z_3].$$

Неподвижные точки имеют вид $z_i = 1$, $z_j = 0$ для всех $i = 0, \dots, 3$, $j \ne i$. В неподвижных точках веса касательного представления действия тора:

$$(1,2,4), \quad (-1,1,3), \quad (-2,-1,2), \quad (-4,-3,-2).$$

Из формулы Бухштабера–Панова–Рэя:

$$\mathrm{Bc}^{\mathbb{S}^1}(\mathbb{C}P^3, \widetilde{\rho})(f(t)) = \frac{1}{f(t)f(2t)f(4t)} + \frac{1}{f(-t)f(t)f(3t)} + \frac{1}{f(-2t)f(-t)f(2t)} + \frac{1}{f(-4t)f(-3t)f(-2t)}, \tag{3.4.9}$$

где $f = f_{\mathrm{Bc}}$. Из формул (3.4.9) и

$$f'(t)^2 = 1 - a_1 f(t)^2 + a_2 f(t)^4 - a_3 f(t)^6$$

прямым вычислением получается, что

$$\mathrm{Bc}^{\mathbb{S}^1}(\mathbb{C}P^3, \widetilde{\rho}) = \frac{15}{2} a_3 t^3 + O(t^5). \tag{3.4.10}$$

Из (3.4.10) следует, что $\mathrm{Bc}^{\mathbb{S}^1}(\mathbb{C}P^3, \widetilde{\rho}) \ne 0$, если $a_3 \ne 0$. При $a_3 = 0$ род Bc совпадает с родом Кричевера, и в этом случае $\mathrm{Bc}^{\mathbb{S}^1}(\mathbb{C}P^3, \widetilde{\rho}) = 0$. Это согласуется с классическим результатом Хирцебруха [HBJ92, Section 4.6, Proposition].

Глава 4
Дискретные n-значные группы и динамика

4.1 n-значные моноиды и группы порядка 3

4.1.1 Классификация

Будем говорить, что порядок n-значного моноида X равен k, если $|X| = k$. Всюду далее мы будем отождествлять множество $\mathrm{Sym}^n(X)$ с подмножеством однозначного свободного коммутативного моноида $\mathrm{Free}(X)$, порожденного множеством X. Таким образом, про n-значную группу X мы будем думать, как про n-значный аналог моноидной алгебры.

Рассмотрим множество $X = \{e, x_1, x_2, ..., x_{k-1}\}$ (мы полагаем $x_0 = e$). Предположим, что на X задана структура n-значного моноида. Тогда соответствующую таблицу умножения удобно представить в виде:

$$\mathfrak{x}^{\circledast 2} = A\mathfrak{x},$$

где $\mathfrak{x}$ обозначает вектор-столбец $(e, x_1, x_2, ..., x_{k-1})^T$, A — это $(k^2 \times k)$-матрица, каждая строка которой соответствует кратностям элементов $e, x_1, ..., x_{k-1}$ в произведении $x_i * x_j$, $i, j = 0, ..., k-1$. Причем для каждой строки матрицы A сумма всех элементов равна n. Наконец, $\mathfrak{x}^{\circledast 2} = \mathfrak{x} \circledast \mathfrak{x}$ является произведением Кронекера вектора $\mathfrak{x}$ относительно операции $*$. Например,

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}^{\circledast 2} = \begin{pmatrix} x_1 * x_1 \\ x_1 * x_2 \\ x_2 * x_1 \\ x_2 * x_2 \end{pmatrix}.$$

Условия ассоциативности тогда принимают вид:

$$(\mathfrak{X} \circledast \mathfrak{X}) \circledast \mathfrak{X} = \mathfrak{X} \circledast (\mathfrak{X} \circledast \mathfrak{X}). \tag{4.1.1}$$

Нам потребуется следующее

Определение 4.1.2. n-значный моноид X *изоморфен* n'-значному моноиду X', если существует биекция $\varphi : X \to X'$, сохраняющая единицу $\varphi(e) = e'$, для которой

$$\frac{m^z_{x,y}}{n} = \frac{m^{\varphi(z)}_{\varphi(x),\varphi(y)}}{n'},$$

где $m^z_{x,y}$ обозначает кратность вхождения элемента z в произведение $x * y$.

Напомним [Buc06, Lemma 1], что для любого натурального m по n- значному моноиду G с умножением μ на множестве X можно построить mn-значный моноид G' с умножением μ' на том же множестве при помощи диагонального отображения $\mathrm{diag}_m(x) = mx$:

$$\mu' : X \times X \xrightarrow{\mu} \mathrm{Sym}^n X \xrightarrow{\mathrm{diag}_m} \mathrm{Sym}^{mn} X. \tag{4.1.3}$$

Теперь мы готовы сформулировать один из основных результатов данного раздела:

Теорема 4.1.4. *Пусть* $X = \{e, x_1, x_2\}$ *и*

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}^{\circledast 2} = \begin{pmatrix} x_1 * x_1 \\ x_1 * x_2 \\ x_2 * x_1 \\ x_2 * x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ b_0 & b_1 & b_2 \\ d_0 & d_1 & d_2 \\ c_0 & c_1 & c_2 \end{pmatrix} \mathfrak{X} = B\,\mathfrak{X}. \tag{4.1.5}$$

Тогда каждый n*-значный моноид на множестве* X *представляется одной из следующих матриц* $B = B_j$ *при условии, что дробные выражения являются целыми неотрицательными числами*:

$$B_1 = \begin{pmatrix} a_0 & n - a_0 & 0 \\ 0 & 0 & n \\ 0 & 0 & n \\ c_0 & \frac{c_0 n}{a_0} & n - c_0 - \frac{c_0 n}{a_0} \end{pmatrix},$$

$$B_2 = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & n-a_0-a_1 \\ b_0 & b_1 & n-b_0-b_1 \\ b_0 & b_1 & n-b_0-b_1 \\ \frac{b_0(n-b_0-b_1)+a_0b_1-a_1b_0}{n-a_0-a_1} & \frac{(b_0+b_1)(n-b_1)}{n-a_0-a_1} & \frac{(n-b_0-b_1)^2+n(b_1-a_0-a_1)+a_1b_0-a_0b_1}{n-a_0-a_1} \end{pmatrix},$$

$$B_3 = \begin{pmatrix} 0 & n & 0 \\ 0 & n & 0 \\ 0 & n & 0 \\ c_0 & c_1 & n-c_0-c_1 \end{pmatrix}, \; B_4 = \begin{pmatrix} 0 & n & 0 \\ 0 & 0 & n \\ 0 & 0 & n \\ 0 & c_1 & n-c_1 \end{pmatrix},$$

$$B_5 = \begin{pmatrix} 0 & n & 0 \\ 0 & n & 0 \\ 0 & 0 & n \\ 0 & 0 & n \end{pmatrix}, \; B_6 = \begin{pmatrix} 0 & n & 0 \\ 0 & 0 & n \\ 0 & n & 0 \\ 0 & 0 & n \end{pmatrix}.$$

Два моноида, соответствующие сериям B_i и B_j (i и j необязательно различны) изоморфны тогда и только тогда, когда матрица B_i пропорциональна матрице B_j, либо матрице $\varphi(B_j)$, где $\varphi : X \to X$ — изоморфизм моноидов, для которого $\varphi(x_1) = x_2$. Каждая матрица B_j с целыми неотрицательными элементами задает некоторый n-значный моноид порядка 3.

Доказательство. Условия ассоциативности (4.1.1) выделяют в пространстве параметров $\mathbb{R}^{12}$ алгебраическое множество, задающееся пересечением 81 квадрики. Это множество содержится в множестве решений системы 18 уравнений

$$(x_i * x_j) * x_k = x_i * (x_j * x_k), \tag{4.1.6}$$

где $i, j, k \in \{1, 2\}$ не равны одновременно одному значению. Например, три уравнения из (4.1.6) для условия ассоциативности $(x_1 * x_1) * x_2 = x_1 * (x_1 * x_2)$ выглядят следующим образом:

$$\begin{cases} a_1b_0 - a_0b_1 - b_0b_2 + a_2c_0 & = 0, \\ a_2c_1 - b_1b_2 - nb_0 & = 0, \\ a_1b_2 - a_2b_1 - b_2^2 + a_2c_2 + na_0 & = 0, \end{cases}$$

Решения системы (4.1.6) квадратичных уравнений в вещественных числах вместе с условием $n \neq 0$ и условием равенства сумм элементов в каждой строке числу n (еще 4 линенйных уравнения) в `Wolfram Mathematica` функцией `Reduce` дает список из 26 семейств векторов длины 12. Анализируя этот список и сужая область определения искомых параметров целыми неотрицательными числами, получаем 6 упомянутых в условии Предложения серий. Как легко проверить, условия ассоциативности для кубов $(x_i * x_i) * x_i = x_i * (x_i * x_i)$ и для выражений с единицей выполнены для этих серий: для коммутативных серий это заведомо выполнено, а для двух некоммутативных легко проверяется. Это означает, что системы (4.1.1) и (4.1.6) эквивалентны и мы получаем полный список n-значных моноидов на трех точках.

Утверждения про классы изоморфизма легко следуют из полученных серий и того, что каждый изоморфизм n-значных моноидов на X задается либо тождественным отображением, либо по правилу $\varphi(x_1) = x_2$.

□

4.1.2 Следствия

Прежде всего отметим, что результат Теоремы 4.1.4 согласуется с классификацией однозначных моноидов третьего порядка [Pin14; OEI00]:

Следствие 4.1.7. *Имеются следующие 7 классов изоморфизма однозначных моноидов порядка 3, задаваемые матрицами B_j :*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in B_1, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in B_2, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in B_2,$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in B_4, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in B_4, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in B_5, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in B_6.$$

Для фиксации обозначений напомним [Buc06, Section 2] следующее

Определение 4.1.8. n-значной группой X называется n-значный моноид, снабженный отображением обратного $\mathrm{inv} : X \to X$, т. е. таким отображением, что для любого $x \in X$

$$x * \mathrm{inv}(x) \ni e,\ \mathrm{inv}(x) * x \ni e.$$

Следствие 4.1.9. *Каждая n-значная группа порядка 3 имеет вид, определяемый матрицей B_1 или B_2. Причем в первом случае*

$$a_0 c_0 > 0,$$

а во втором случае

$$b_0 + a_0(b_0(n - b_0 - b_1) + a_0 b_1 - a_1 b_0) > 0.$$

Доказательство. Утверждение следует из рассмотрения первых столбцов матриц B_k классификации n-значных моноидов порядка 3.

□

Следствие 4.1.10. *Каждый коммутативный n-значный моноид порядка 3 принадлежит одной из первых четырех серий. Каждый некоммутативный моноид суть диагональ от одного из двух некоммутативных моноидов* (0.0.8). *В частности, все n-значные группы порядка три коммутативны, и существует только два некоммутативных многозначных моноида с точностью до изоморфизма.*

Отметим, что в работе [ГЯ07, Лемма 10] впервые была установлена коммутативность n-значных групп порядка 3. Там же рассматривался подход к проблеме классификации n-значных групп на пространстве $\mathbb{R}^3$ при помощи техники многообразий алгебр и линейных деформаций групповых n-алгебр. Однако явной классификации всех n-значных групп порядка 3 получено не было.

Вслед за В. М. Бухштабером (устное сообщение) для каждой n-значной группы на множестве X помимо отображения обратного $\mathrm{inv} : X \to X$ определим многозначное отображение $\mathrm{Inv} : X \to \mathcal{P}(X)$.

Определение 4.1.11. Отображение $\mathrm{Inv} : X \to \mathcal{P}(X)$ принимает значение во всех конечных подмножествах множества X. Оно таково, что

$$\mathrm{Inv}(x) = \{y \in X \mid x * y \ni e,\ y * x \ni e\}.$$

Определение 4.1.12. n-значная группа имеет однозначно определенное отображение обратного тогда и только тогда, когда $\mathrm{inv} = \mathrm{Inv}$. Будем называть такие группы *реверсивными*, а в противном случае — *нереверсивными*.

Пример 4.1.13. Ясно, что каждая косетная группа является реверсивной.

В. М. Бухштабером было замечено, что в статье [BB12, с. 246] демонстрируется неверный пример единственной известной до настоящего момента серии нереверсивных двузначных групп. Он является приведением по модулю n двузначной группы из Примера 1.2.7. А именно, рассматривается множество (неотрицательных) остатков $X = \{0, 1, \ldots, n-1\}$ по модулю n с операцией

$$x * y = [x + y \bmod n, |x - y| \bmod n].$$

Множество X с такой операцией не образует 2-значную группу, поскольку нарушается условие ассоциативности:

$$\begin{aligned}(1 * 1) * (n-1) &= [0, 2] * (n-1)\\ &= [n-1, n-1, 1, n-3]\\ &\neq [1, 1, n-1, n-3]\\ &= 1 * [0, n-2]\\ &= 1 * (1 * (n-1))\end{aligned}$$

В связи с этим наблюдением возник вопрос о существовании нереверсивных n-значных групп.

Пример 4.1.14. Легко видеть, что каждая n-значная группа $\mathbb{G}$ на множестве $\{0\}$ из одного элемента есть диагональная конструкция [Buc06, Lemma 1] от тривиальной группы, которая, конечно, является реверсивной. Также реверсивными являются все n-значные группы $\mathbb{G}$ на множестве двух элементов $\{0, 1\}$ с единицей 0: каждая такая n-значная группа задается парой целых неотрицательных чисел (a, b) с $a + b = n$, $a > 0$, поскольку имеется единственное

нетривиальное соотношение $1 * 1 = a \cdot 0 + b \cdot 1$.

Пример 4.1.15. Для каждого $n \geqslant 3$ существует нереверсивная коммутативная циклическая (см. [БВ24, Определение 1.3] или Определение 4.2.4 настоящей диссертации) n-значная группа $\mathbb{X}_n$ на множестве $\{0, 1, 2\}$ из трех элементов (с единицей 0), в которой отображение inv обратного элемента может быть определено четырьмя разными способами: $\mathrm{Inv}(1) = \mathrm{Inv}(2) = \{1, 2\}$. Умножение в этой группе задается следующим образом:

$$\begin{aligned} 1 * 1 &= 0 + (n-1) \cdot 2, \\ 1 * 2 &= 0 + 1 + (n-2) \cdot 2, \\ 2 * 2 &= 0 + 2 \cdot 1 + (n-3) \cdot 2. \end{aligned}$$

Видно, что $\mathbb{X}_n$ принадлежит серии B_2. Группа $\mathbb{X}_n$ нереверсивна, поэтому она некосетная. Впервые примеры (других) некосетных групп были построены в работе [БВЕП96] при помощи техники комбинаторных алгебр и теорем Силова из теории конечных групп.

Следствие 4.1.16. *n-значная группа порядка 3 является нереверсивной тогда и только тогда, когда она принадлежит серии B_2 с*

$$b_0(a_0 + b_0(n - b_0 - b_1) + a_0 b_1 - a_1 b_0) > 0.$$

Приведем здесь [БВЕП96, Определение 1.2], чтобы зафиксировать обозначения.

Определение 4.1.17. n-значная группа $(X, *, \mathrm{inv})$ с операцией $*$ и отображением обратного inv называется ★-*инволютивной*, если отображение обратного $x \mapsto \mathrm{inv}(x)$ является инволюцией, удовлетворяющей условиям:

(i) Для любого $x \in X$ выполнено: $x * y \ni e$ тогда и только тогда, когда $y = \mathrm{inv}(x)$.

(ii) $m(x) = m(\mathrm{inv}(x))$, где $m(x) = m^e_{x,\mathrm{inv}(x)}$ — кратность e в произведении $x * \mathrm{inv}(x)$.

(iii) $\mathrm{inv}(x * y) = \mathrm{inv}(y) * \mathrm{inv}(x)$ для всех $x, y \in X$.

Замечание 4.1.18. В работах [БВЕП96; Buc06; GPV25] ★-инволютивные группы назывались просто инволютивными. Обратим внимание на то, что понятие «инволютивных групп», использованное в настоящей диссертации в предыдущих главах (см. Определение 1.2.21), в коммутативном случае совпадает с понятием «★-инволютивности». Понятие «★-инволютивности» мотивировано C^*-алгебрами из функционального анализа и некоммутативной геометрии. Отметим, что в работе [Buc06] сразу после определения в Разделе 11 приведено необоснованное утверждение о том, что условие **(iii)** следует из условия **(i)**.

Пример 4.1.19. Каждая n-значная косетная группа является ★-инволютивной [БВЕП96, с. 13].

Из условия **(i)** Определения 4.1.17 следует, что каждая ★-инволютивная группа является реверсивной.

Следствие 4.1.20. *Каждая ★-инволютивная n-значная группа имеет своей матрицей B в* (4.1.5) *одну из следующих:*

$$\widetilde{B}_1 = \begin{pmatrix} m(x_1) & a(x_1) & n-m(x_1)-a(x_1) \\ 0 & a(x_1,x_2) & n-a(x_1,x_2) \\ 0 & a(x_1,x_2) & n-a(x_1,x_2) \\ m(x_2) & a(x_2) & n-m(x_2)-a(x_2) \end{pmatrix},$$

либо

$$\widetilde{B}_2 = \begin{pmatrix} 0 & a(x_1) & n-a(x_1) \\ n-2a(x_1) & a(x_1) & a(x_1) \\ n-2a(x_1) & a(x_1) & a(x_1) \\ 0 & n-a(x_1) & a(x_1) \end{pmatrix},$$

где

$$a(x_1,x_2) = r(n-m(x_1)-a(x_1)),$$

$$a(x_2) = r(n-a(x_1,x_2)),$$

$$r = \frac{m(x_2)}{m(x_1)},$$

и $m(x_1)$, $m(x_2)$, $a(x_1)$ — свободные параметры. Каждая матрица $\widetilde{B}_i$ ($i \in \{1,2\}$) с целыми неотрицательными элементами соответствует некоторому n-значному

моноиду порядка 3.

Доказательство. Действительно, согласно [GPV25, Theorem 2.1], каждая ★-инволютивная n-значная группа порядка три может иметь в качестве матрицы B в (4.1.5) матрицу $\widetilde{B}_1$ или $\widetilde{B}_2$. Матрицы $\widetilde{B}_2$ принадлежат серии B_2. Матрица $\widetilde{B}_1$ принадлежит серии B_1 при $m(x_1)+a(x_1)=n$; и принадлежит серии B_2 иначе. □

Замечание 4.1.21. В [GPV25, Theorem 2.1] сформулированы лишь явные необходимые условия (в наших обозначениях) на коэффициенты матрицы $B = (x_i * x_j)_{ij}$, но не утверждается, что соответствующие n-значные группы возникают при всех возможных значениях параметров $m(x_1)$, $m(x_2)$ и $a(x)$.

Как показано в [GPV25, Theorem 1.1], n-значная группа из серии $\widetilde{B}_2$, где $n = 2k+1$, является косетной тогда и только тогда, когда

$$\widetilde{B}_2 = \begin{pmatrix} 0 & k & k+1 \\ 1 & k & k \\ 1 & k & k \\ 0 & k+1 & k \end{pmatrix}, \tag{4.1.22}$$

и $4k+3$ является некоторой степенью простого числа. Классификация косетных групп из серии $\widetilde{B}_1$ связана с классификацией конечных однозначных групп перестановок ранга 3 и теорией строго регулярных графов [GPV25].

В работе [БВГ22] в связи с топографом Конвея было введено понятие инволютивной двузначной группы.

Определение 4.1.23. Реверсивная n-значная группа на множестве X называется *инволютивной*, если $\mathrm{inv}(x) = x$ для каждого $x \in X$.

Ясно, что любая коммутативная инволютивная группа является ★- инволютивной. В статье [БВГ22] была получена полная классификация инволютивных двузначных групп. Отметим, что в этой статье, в Замечании 1.5 была допущена неточность: инволютивность n-значной группы в смысле [БВЕП96] не ограничивается только требованием реверсивности и инволютивности отображения inv, поскольку должны быть выполнены еще два условия (см. **(ii)** и **(iii)** в Определении 4.1.17 настоящей работы). Утверждение там же (в нашей

терминологии) о том, что класс ★-инволютивных групп содержит класс инволютивных групп, вовсе не так очевиден и вытекает из (более поздней) работы [Гай24], в которой показывается, что каждая инволютивная двузначная группа коммутативна. В [БВГ22, prop 4.4] можно найти примеры инволютивных некосетных двузначных групп.

Следствие 4.1.24. *Группы серии B_1 инволютивны. Группа серии B_2 инволютивна тогда и только тогда, когда $b_0 = 0$.*

Таким образом, получается диаграмма (0.0.9) строгих вложений.

4.2 Двузначные группы и динамика

4.2.1 Предварительные сведения

Напомним, что *n-значной динамикой T* на пространстве (необязательно n- значной группе) X называется отображение $T : X \to \mathrm{Sym}^n(X)$.

Можно представлять себе X как некоторое пространство состояний. Тогда n- значная динамика T определяет возможные состояния $T(x) = [x_1, ..., x_n]$ в момент времени $t+1$ как функцию состояния элемента x в момент времени t.

Пример 4.2.1. Рассмотрим многочлен относительно переменной y:

$$F(x, y) = b_0(x)y^n + b_1(x)y^{n-1} + ... + b_n(x),\ x, y \in \mathbb{C},$$

где $b_i : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ — произвольные функции ($b_0 \neq 0$). Уравнение $F(x, y) = 0$ определяет n-значную динамику

$$T : \mathbb{C} \to \mathrm{Sym}^n(\mathbb{C}),\ x \mapsto [y_1, ..., y_n],$$

где $[y_1, ..., y_n]$ — n-множество корней уравнения $F(x, y) = 0$ относительно y.

Для любой n-значной динамики $T : X \to \mathrm{Sym}^n(X)$ имеется полезная характеристика, измеряющая рост динамики T.

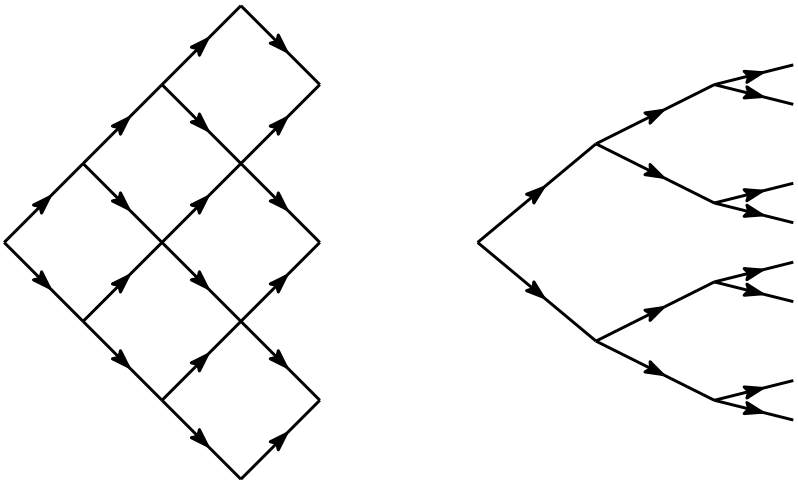


Рис. 4.2.3: Полиномиальный и экспоненциальный рост

Определение 4.2.2. Для любого $x \in X$ и любой n-значной динамики $T : X \to \mathrm{Sym}^n(X)$, *функция роста* $\xi_x : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ сопоставляет числу k количество различных точек в множестве

$$\bigcup_{i=0}^{k} T^i(x) = \{*\} \cup T(x) \cup T^2(x) \cup \ldots \cup T^k(x),$$

где $*$ — отмеченная точка в подлежащем множестве X.

В данном контексте имеется общая проблема характеризации таких n-значных динамик, которые имеют полиномиальный или экспоненциальный рост ξ_x. На Рис. 4.2.3 изображены примеры двух таких 2-значных динамик в виде ориентированных графов: вершины, лежащие на одной вертикали с номером $k = 0, 1, 2, \ldots$ (слева направо), соответствуют точкам мультимножества $T^k(x)$ (где x соответствует самой левой вершине графа — нулевой вертикали, которая совпадает с отмеченной точкой $T^0(x) = * = x$), т. е. точкам, «рожденным в момент времени k». Пара ребер, исходящих из любой вершины, соответствует применению отображения T (рождение новой пары точек). Согласно Определению 4.2.2, слева на Рис. 4.2.3 мы имеем динамику с квадратичной функцией роста $\xi_x(k)$, поскольку число точек в множестве $\bigcup_{i=0}^{k} T^i(x)$, т. е. суммарное количество точек на всех вертикалях от нулевой до k-й включительно, равно $\frac{(k+1)(k+2)}{2}$, $k = 0, 1, 2, \ldots$ Аналогично, справа на Рис. 4.2.3 мы имеем динамику с экспоненциальной функцией роста $\xi_x(k) = 2^{k+1} - 1$, $k = 0, 1, 2, \ldots$

n-значные динамики возникают, например, из действий n-значных групп на пространстве (см. Определение 1.1.11).

Определение 4.2.4 [БВ24]**.** Пусть Y — непустое подмножество в n-значной группе $\mathbb{G}$. Пересечение всех n-значных подгрупп из $\mathbb{G}$, содержащих Y, называется *n-значной подгруппой, порожденной множеством Y*. Порожденная одним элементом $g \in \mathbb{G}$ n-значная подгруппа $\langle g \rangle$ называется *n-значной циклической группой*.

Класс n-значных циклических групп находится в центре внимания данного раздела.

4.2.2 Рост n-значных групп

В данном разделе мы рассмотрим класс таких конечно определенных групп $G = \langle f_1, \ldots, f_n \mid R \rangle$, которые допускают автоморфизм $\varphi \in \mathrm{Aut}(G)$, циклически переставляющий n образующих $f_1, \ldots, f_n$. Пусть $\mathbb{G}_\varphi(G)$ обозначает n-значную группу, возникающую из обычной группы G и автоморфизма $\varphi \in \mathrm{Aut}(G)$. Заметим, что группа $\mathbb{G}_\varphi(G)$ является циклической в смысле определения 4.2.4. Нас интересует функция роста $\xi_g(k)$, ассоциированная с элементом $g = [f_1, \ldots, f_n]$. В данном контексте мы рассматриваем в качестве отмеченной токи из определения 4.2.2 пустое слово Λ, или, что равносильно, единичный элемент группы G. Для краткости мы будем использовать обозначение ξ_k вместо $\xi_g(k)$.

Пример 4.2.5. Рассмотрим конечно определенную группу $G_2 = \langle a, b \mid a^2 = b^2 = e \rangle \cong \mathbb{Z}/2 * \mathbb{Z}/2$ и конечную циклическую подгруппу автоморфизмов, порожденную элементом $\varphi_2 : a \mapsto b$ порядка 2. Легко видеть, что подлежащее множество $X = G_2/\langle \varphi_2 \rangle$ состоит из элементов

$$u_{2n} = [(ab)^n, (ba)^n],$$

$$u_{2n+1} = [b(ab)^n, a(ba)^n]$$

для каждого $n \geqslant 0$, и 2-значное умножение в косетной группе $\mathbb{G}_{\varphi_2}(G_2)$ (даная 2-значная группа приводится в качестве примера в [Buc06]) выглядит так:

$$u_k * u_\ell = [u_{k+\ell}, u_{|k-\ell|}].$$

В данном примере имеем линейный рост $\xi_k(\mathbb{G}_{\varphi_2}(G_2)) = k+1$.

Предложение 4.2.6. *Для группы* $G_3 = \langle a, b \mid a^3 = b^3 = 1\rangle \cong \mathbb{Z}/3 * \mathbb{Z}/3$ *и инволюции* $\varphi_3 : a \mapsto b$ *соответствующая 2-значная группа* $\mathbb{G}_{\varphi_3}(G_3)$ *имеет функцию роста*

$$\xi_k = \mathbb{G}_{\varphi_3}(G_3) = F_{k+3} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k+3} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k+3}\right) - 1.$$

Следовательно, рост экспоненциален: $\xi_k \sim \dfrac{\alpha^{k+3}}{\sqrt{5}}$ *при* $k \to \infty$, *где* $\alpha = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Доказательство. Будем считать количество слов длины k на шаге, при котором вычисляется $[a,b]^k$. На нулевом шаге мы имеем пустое слово соответствующее единице 2-значной группы. На первом шаге получается $[a,b]$, что соответствует одному элементу 2-значной группы. На втором шаге имеем: $[a,b]^2 = [[a^2,b^2],[ab,ba]]$ — два элемента.

На шаге k появятся все слова в нормальной форме группы G_3. Любое такое слово имеет вид (с точностью до автоморфизма)

$$a^{k_1}b^{k_2}a^{k_3}\ldots,$$

где $k_i \in \{1,2\}$. Значит, всего таких слов длины k будет столько, сколькими способами можно разбить число k на слагаемые из множества $\{1,2\}$ с учётом порядка. Обозначим последнее количество через S_k.

От шага k можно перейти к шагу $k-1$, взяв в качестве первого слагаемого 1 — в этом случае остальные слагаемые можно будет набрать S_{k-1} способами, либо 2 — в этом случае будет S_{k-2}. Значит, имеем рекуррентное соотношение

$$S_k = S_{k-1} + S_{k-2}, \quad S_0 = 1,\ S_1 = 1.$$

Напомним, что рекуррентная последовательность

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$$

с начальными условиями

$$F_0 = 0, F_1 = 1,$$

называется *последовательностью Фибоначчи*. Имеется известная формула Бине

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right).$$

В нашем случае

$$S_k = F_{k+1}.$$

По индукции легко доказать, что

$$F_1 + \ldots + F_k = F_{k+2} - 1. \tag{4.2.7}$$

Отсюда

$$\xi_k = S_0 + S_1 + \ldots + S_k = F_{k+3} - 1 = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k+3} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k+3}\right) - 1.$$

□

Предложение 4.2.8. *Для группы* $H_3 = \langle a, b, c \mid a^2 = b^2 = c^2 = 1\rangle \cong \mathbb{Z}/2 * \mathbb{Z}/2 * \mathbb{Z}/2$ *с автоморфизмом* $\psi_3 : a \mapsto b \mapsto c \mapsto a$ *получается* 3*-значная группа с функцией роста* $\xi_k(\mathbb{G}_{\psi_3}(H_3)) = 2^k$. *Следовательно, рост экспоненциален.*

Доказательство. Нормальная форма с точностью до автоморфизма для группы из условия имеет вид, при котором первая буква слова — буква a и одинаковые буквы не стоят рядом. Докажем индукцией, что число S_k различных слов в нормальной форме длины k в мультимножестве $[a, b, c]^k$ равно 2^{k-1}, если $k > 0$ и $S_0 = 1$. При $k = 0$ мы имеем пустое слово. Предположим, что на шаге $k-1$ мы имеем 2^{k-2} различных слов длины $k-1$. Тогда допишем справа к каждому слову длины $k-1$ по одной букве так, чтобы длина нормальной формы слова увеличилась на 1. Это можно сделать двумя способами для одного фиксированного слова. Всего слов длины $k-1$ ровно 2^{k-2}, поэтому слов длины k будет $2 \cdot 2^{k-2} = 2^{k-1}$. Утверждение про ξ_k теперь очевидно следует.

□

Предложение 4.2.9. *Для группы* $H_s = \langle a_1, \ldots, a_s \mid a_1^2 = \ldots = a_s^2 = 1\rangle \cong (\mathbb{Z}/2)^{*s}$ *с автоморфизмом* $\psi_s : a_i \mapsto a_{i+1}$ (*индексы сдвигаются по модулю* s) *получается*

s-значная группа с функцией роста

$$\xi_k(\mathbb{G}_{\psi_s}(H_s)) = \begin{cases} \dfrac{(s-1)^k - 1}{s-2} + 1, & s \geqslant 3 \\ k+1, & s = 2 \end{cases}$$

Следовательно, рост полиномиален (линеен) тогда и только тогда, когда $s = 2$.

Доказательство. Аналогично доказательству Предложения 4.2.8. □

Дадим важные для дальнейшего определение и свойства последовательности n- боначчиевых чисел.

Определение 4.2.10. Последовательность целых чисел $\{F_k^{(n)}\}$ называется *n боначчиевой*, если она удовлетворяет рекуррентному соотношению

$$F_k^{(n)} = F_{k-1}^{(n)} + \ldots + F_{k-n}^{(n)} \tag{4.2.11}$$

и начальным условиям $F_0 = \ldots = F_{n-2} = 0$ и $F_{n-1} = 1$.

Предложение 4.2.12 [DD14]**.** *Явная формула k-го члена последовательности n- боначчи (обобщённая формула Бине) выглядит следующим образом*

$$F_k^{(n)} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i - 1}{(n+1)\lambda_i - 2n} \lambda_i^{k-n+1}, \tag{4.2.13}$$

где $\{\lambda_i \mid 1 \leqslant i \leqslant n\}$ *— множество корней характеристического многочлена* $\chi(\lambda) = \lambda^n - \lambda^{n-1} - \ldots - 1$.

В работе [DD14] формула (4.2.13) получена из основного результата работы [SJ84] о последовательности, удовлетворяющей рекуррентному соотношению (4.2.11), но с другими начальными данными. На форуме [mat08] можно найти прямое доказательство Предложения 4.2.12, опирающееся на теорию линейных рекуррентов.

Из принципа Руше и правила знаков Декарта легко следует, что многочлен

$$\chi(\lambda) = \frac{\lambda^{n+1} - 2\lambda^n + 1}{\lambda - 1}$$

из Предложения 4.2.12 ($\lambda \neq 1$) имеет ровно один положительный корень, больший 1, и $n-1$ комплексных корней внутри единичного круга с центром в нуле на комплексной плоскости. Это означает, что среди слагаемых суммы (4.2.13) имеется ровно одно, модуль которого больше 1. Последний факт также можно увидеть из того, что матрица, задающая соответствующий линейный рекуррент, удовлетворяет теореме Перрона–Фробениуса (см., например, Главу XIII, §2, формулу (37) в [Ган66]) и значит, имеет своим максимальным по модулю собственным значением вещественное число, большее 1. Имеет место следующая

Теорема 4.2.14 [DD14]**.** *Для k-го члена последовательности n-боначчи имеем*

$$F_k^{(n)} = \operatorname{rnd}\left(\frac{r-1}{(n+1)r-2n} r^{k-n+1}\right),$$

где r — положительный корень многочлена $\chi(\lambda) = \lambda^n - \lambda^{n-1} - \ldots - 1$, а $\operatorname{rnd}(x)$ — ближайшее целое число к x.

Применим теперь данный результат в интересующем нас случае.

Предложение 4.2.15. *Для двузначной косетной группы $\mathbb{G}_{\varphi_m}(G_m)$, где $G_m = \langle a, b \mid a^m = b^m = 1\rangle \cong \mathbb{Z}/m * \mathbb{Z}/m$, $\varphi_m : a \mapsto b$ — инволюция на G_m, функция роста $\xi_k(\mathbb{G}_{\varphi_m}(G_m))$ двузначной динамики имеет асимптотику:*

$$\xi_k(\mathbb{G}_{\varphi_m}(G_m)) \sim \frac{r^{k+1}}{mr - 2(m-1)}$$

при $m \geqslant 3$, $k \to \infty$, где r — положительный корень многочлена $\chi(\lambda) = \lambda^{m-1} - \lambda^{m-2} - \ldots - 1$.

Замечание 4.2.16. При $m = 2$ мы имеем 2-значную группу, рассмотренную в Предложении 4.2.9 (при $s = 2$). В этом случае рост ξ_k линеен.

Доказательство. Нормальная форма в данном случае будет иметь вид

$$a^{k_1} b^{k_2} a^{k_3} \ldots,$$

где $k_i \in \{1, 2, \ldots, m-1\}$. Пусть $m \geqslant 3$. Обозначим через S_k число различных слов

длины k в мультимножестве $[a,b]^k$. Будем считать, что

$$S_{-(m-2)} = \ldots = S_{-1} = 0 \text{ и } S_0 = 1.$$

Имеем рекуррентное соотношение

$$S_k = S_{k-1} + S_{k-2} + \ldots + S_{k-m+1}.$$

Данное рекуррентное соотношение вместе с начальными условиями определяют сдвинутую на $m-2$ последовательность $(m-1)$-боначчи

$$S_k^{(m-1)} = F_{k+m-2}^{(m-1)},$$

где $k \geqslant -(m-2)$.

Таким образом, по Теореме 4.2.14

$$S_k = \operatorname{rnd}\left(\frac{r-1}{mr-2(m-1)} r^k\right).$$

Учитывая, что $r > 1$, получаем:

$$\xi_k = S_1 + S_2 + \ldots + S_k \sim \sum_{i=1}^{k} \frac{r-1}{mr-2(m-1)} r^i \sim \frac{r^{k+1}}{mr-2(m-1)}$$

при $k \to \infty$. □

Замечание 4.2.17. Заметим, что последовательные суммы членов линейного рекуррента сами удовлетворяют некоторому линейному рекурренту (см. пункт 4 в [Map50]). В частности, обозначая $\xi_k := F_0^{(n)} + \ldots + F_k^{(n)}$, получаем:

$$\xi_{n+k} = 2\xi_{n+k-1} - \xi_{k-1}. \tag{4.2.18}$$

Для каждого фиксированного n неопределенные коэффициенты в общем виде решения уравнения (4.2.18) являются функциями чисел n-боначчи $F_0^{(n)} = 0, \ldots, F_{n-1}^{(n)} = 1$. Например, при $n = 2$ получается равенство (4.2.7). Для $n = 3$ получается следующее равенство:

$$F_0^{(3)} + F_1^{(3)} + \ldots + F_k^{(3)} = \frac{F_{k+2}^{(3)} + F_k^{(3)} - 1}{2}.$$

Автору неизвестно о существовании замкнутой формы для сумм чисел n-боначчи в общем случае.

4.3 Группы $\mathbb{G}_n^m(\mathbb{C})$

Введем следующее

Определение 4.3.1. Прямым произведением m-значной и n-значной групп G и H с операциями, обозначаемыми через $*$, называется mn-значная группа $G\times H$ с операцией $\star : (G\times H)^2 \to \mathrm{Sym}^{mn}(G\times H)$, для которой

$$(g_1,h_1)\star(g_2,h_2) = [\big((g_1*g_2)_{r_1},(h_1*h_2)_{r_2}\big) \mid r_1 = 1,\dots,m, r_2 = 1,\dots,n],$$

единицей (e_G,e_H) и обратным

$$\mathrm{inv}(g,h) = (\mathrm{inv}(g),\mathrm{inv}(h)).$$

Другими словами, мультимножество $(g_1,h_1)\star(g_2,h_2)$ суть декартово произведение мультимножеств g_1*g_2 и h_1*h_2, а единица и обратный покомпоненты.

Предложение 4.3.2. *Определение 4.3.1 корректно.*

Доказательство. Проверим ассоциативность, остальные аксиомы проверяются аналогично. Сравним первые компоненты векторов мультимножеств $A = (\alpha_1\star\alpha_2)\star\alpha_3$ и $B = \alpha_1\star(\alpha_2\star\alpha_3)$ для $\alpha_i = (g_i,h_i)\in G\times H$. Они представляют собой элементы мультимножества $a = (g_1*g_2)*g_3 = g_1*(g_2*g_3)$. Аналогично, вторые компоненты суть элементы мультимножества $b = (h_1*h_2)*h_3 = h_1*(h_2*h_3)$. Каждое из интересующих мультимножеств A и B тогда является декартовым произведением мультимножеств:

$$A = \big((g_1*g_2)*g_3\big)\times\big((h_1*h_2)*h_3\big),$$
$$B = \big(g_1*(g_2*g_3)\big)\times\big(h_1*(h_2*h_3)\big).$$

□

Пример 4.3.3. Можно рассмотреть декартову степень $\mathbb{G}_n^m(\mathbb{C})$ группы $\mathbb{G}_n(\mathbb{C})$ из Примера 1.1.3. Для натуральных m и n получим следующее n^m-значное групповое умножение на множестве $\mathbb{C}^m$ комплексных векторов размерности m: в мультимножестве $(x_1,\dots,x_m)*(y_1,\dots,y_m)$ содержатся все n^m векторов вида

$$((\sqrt[n]{x_1}+\varepsilon^{r_1}\sqrt[n]{y_1})^n,\dots,(\sqrt[n]{x_m}+\varepsilon^{r_m}\sqrt[n]{y_m})^n),$$

$r_1,\dots,r_m\in\{1,\dots,n\}$. Пара $(\mathbb{C}^m,*)$ вместе с единицей $(0,\dots,0)$ и обратным

$$\mathrm{inv}(x_1,\dots,x_m)=(-1)^n(x_1,\dots,x_m)$$

образуют n^m-значную группу $\mathbb{G}_n^m(\mathbb{C})$.

Предложение 4.3.4. (i) *Декартово произведение двух коммутативных групп является коммутативной группой.*

(ii) *Декартово произведение двух косетных групп* (*см. Определение* 1.1.9) *является косетной группой.*

Доказательство. (i) Очевидно.

(ii) Рассмотрим две косетные группы на множествах орбит G/H_1 и R/H_2 для 1-значных групп G, R и некоторых конечных подгрупп H_1 и H_2 в группах автоморфизмов $\mathrm{Aut}(G)$ и $\mathrm{Aut}(R)$ соответственно. По Определению 4.3.1 декартова произведения групп мы имеем

$$\begin{aligned}&(g_1H_1,r_1H_2)\star(g_2H_1,r_2H_2)=\\&=[\pi_1(g_1\varphi(g_2)),\pi_2(r_1\psi(r_2))\mid\varphi\in H_1,\psi\in H_2].\end{aligned}\tag{4.3.5}$$

С другой стороны, на прямом произведении $G\times R$ однозначных групп естественно действует группа $H_1\times H_2=\{\varphi\times\psi\mid\varphi\in H_1,\psi\in H_2\}$. Получающееся в результате этого действия пространство орбит $G/H_1\times R/H_2$ наделяется структурой косетной группы с умножением (4.3.5).

□

Из данного предложения следует, что группа $\mathbb{G}_n^m(\mathbb{C})$ является коммутативной косетной.

Предложение 4.3.6. *Пусть G — коммутативная n-значная группа, действующая на множестве X. Тогда для каждого натурального m определено следующее левое действие*

$$(g_1, ..., g_m) \circ x = (g_1 * ... * g_m) \circ x$$

декартовой степени G^m n-значной группы G на множестве X, где под $(g_1 * ... * g_m) \circ x$ понимается объединение мультимножеств $g \circ x$ по всем $g \in g_1 * ... * g_m$. (Из ассоциативаности умножения $*$ следует, что мультимножество $g_1 * ... * g_m$ не зависит от порядка расстановки скобок).

Доказательство. Рассмотрим случай $m = 2$, общий случай аналогичен. По определению умножения в прямых произведениях групп

$$((g_1, h_1) \star (g_2, h_2)) \circ x = ((g_1 * g_2) \times (h_1 * h_2)) \circ x. \tag{4.3.7}$$

Из определения действия $\circ$

$$(g_1, h_1) \star ((g_2, h_2) \circ x) = (g_1 * h_1 * g_2 * h_2) \circ x. \tag{4.3.8}$$

Мультимножество (4.3.7) суть

$$(g_1 * g_2) * (h_1 * h_2) \circ x = (g_1 * h_1 * g_2 * h_2) \circ x$$

в силу коммутативности и ассоциативности умножения $*$. □

Из Предложения 4.3.6 для $X = G$ и действия коммутативной группы G на себе левыми сдвигами получается следствие:

Предложение 4.3.9. *Пусть G — коммутативная n-значная группа. Тогда множество G допускает правое действие группы G^n, совместимое с операцией в группе G, то есть*

$$(h_1, \dots, h_n) \circ (g_1 * g_2) = ((h_1, \dots, h_n) \circ g_1) * g_2 = (h_1 * ... * h_n * g_1) * g_2.$$

Из предложения 4.3.9 получается следующая *динамическая интерпретация* многочленов $p_n(z; x_1, \dots, x_m)$:

Теорема 4.3.10. *Орбита единицы* $0 \in \mathbb{G}_n(\mathbb{C})$ (*как мультимножество*) *по действию элемента* $(x_1, \ldots, x_m)$ *группы* $\mathbb{G}_n^m(\mathbb{C})$ *совпадает с* n*-кратным мультимножеством корней по* z *многочлена* $p_n(z; x_1, \ldots, x_m)$.

Заключение

В диссертации развита алгебраическая теория n-значных моноидов и групп и получены ее приложения к задачам алгебраической топологии. Перечислим основные результаты данной диссертации.

1. Описаны структуры двузначных алгебраических моноидов на $\mathbb{C}P^1$ в случае вырожденных кубик.

2. Установлена связь теории алгебраических n-значных моноидов и групп на $\mathbb{C}P^1$ с теорией дискриминантов и проективной двойственности.

3. В аппарате алгебраической топологии введен новый род Хирцебруха Bc. В явном виде представлена соответствующая формальная группа $F_{\mathrm{Bc}}(u,v)$ над кольцом $\mathbb{Z}\left[\frac{1}{2},a_1,a_2,a_3\right]$. Показано, что формальная группа $F_{\mathrm{Bc}}(u,v)$ универсальна в классе всех однозначных формальных групп (над $\mathbb{Q}$-алгебрами без делителей нуля) с условием $\overline{u}=-u$, для которых конструкция квадрата модуля даёт двузначную формальную группу $\mathbb{G}_{\boldsymbol{a}}$ с двузначным законом (0.0.1).

4. Получен результат по классической топологической проблеме о целочисленных родах Хирцебруха. Род Bc задается рядом над кольцом $\mathbb{Q}[a_1,a_2,a_3]$, а на любом стабильно комплексном многообразии род Bc принимает значения в кольце $\mathbb{Z}\left[\frac{1}{2},a_1,a_2,a_3\right]$. Показано, что род Bc на тета-дивизорах общих главно поляризованных абелевых многообразий принимает значения в кольце $\mathbb{Z}[a_1,a_2,a_3]$, а на комплексных проективных пространствах — в кольце $\mathbb{Z}\left[\frac{1}{2},a_1,a_2,a_3\right]$.

5. Получена классификация n-значных моноидов и групп, завершающая исследования ряда авторов по проблеме n-значных групп порядка 3.

Публикации по теме диссертации

[БК26] *Бухштабер В. М.*, *Корнев М. И.* n-значные моноиды на $\mathbb{C}P^1$ и дискриминанты // УМН. — 2026. — Т. 81, 1(487). — С. 207—208.

[Кор26] *Корнев М. И.* О классификации n-значных моноидов и групп порядка 3 // Матем. заметки. — 2026. — Т. 119, № 2. — С. 244—252.

[Kor26] *Kornev M. I.* Buchstaber, Ochanine, Krichever, and Witten genera // Journal of Geometry and Physics. — 2026. — Vol. 226, no. 105855. — 10 p.

Список литературы

[Баб86] *Бабенко К. И.* О тёплицевых и ганкелевых матрицах // УМН. — 1986. — Т. 41, 1(247). — С. 171—178.

[Бух70] *Бухштабер В. М.* Характер Чженя–Дольда в кобордизмах // Матем. сб. — 1970. — Т. 83(125), 4(12). — С. 575—595.

[Бух75] *Бухштабер В. М.* Двузначные формальные группы. Алгебраическая теория и приложения к кобордизмам. I // Изв. АН СССР. Сер. матем. — 1975. — Т. 39, № 5. — С. 1044—1064.

[Бух76] *Бухштабер В. М.* Двузначные формальные группы. Алгебраическая теория и приложения к кобордизмам. II // Изв. АН СССР. Сер. матем. — 1976. — Т. 40, № 2. — С. 289—325.

[Бух78] *Бухштабер В. М.* Топологические приложения теории двузначных формальных групп // Изв. АН СССР. Сер. матем. — 1978. — Т. 42, № 1. — С. 130—184.

[Бух90] *Бухштабер В. М.* Функциональные уравнения, ассоциированные с теоремами сложения для эллиптических функций, и двузначные алгебраические группы // УМН. — 1990. — Т. 45, 3(273). — С. 185—186.

[ББ11] *Бухштабер В. М.*, *Бунькова Е. Ю.* Формальные группы Кричевера // Функц. анализ и его прил. — 2011. — Т. 45, № 2. — С. 23—44.

[БВЕП96] *Бухштабер В. М.*, *Вершик А. М.*, *Евдокимов С. А.*, *Пономаренко И. Н.* Комбинаторные алгебры и многозначные инволютивные группы // Функц. анализ и его прил. — 1996. — Т. 30, № 3. — С. 12—18.

[БВ19] *Бухштабер В. М.*, *Веселов А. П.* Топограф Конвея, $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{Z})$- динамика и двузначные группы // УМН. — 2019. — Т. 74, 3(447). — С. 17—62.

[БВГ22] *Бухштабер В. М.*, *Веселов А. П.*, *Гайфуллин А. А.* Классификация инволютивных коммутативных двузначных групп // УМН. — 2022. — Т. 77, 4(466). — С. 91—172.

[БВ24] *Бухштабер В. М.*, *Веснин А. Ю.* n-значные группы, разветвленные накрытия и трехмерные гиперболические многообразия // Матем. сб. — 2024. — Т. 215, № 11. — С. 3—32.

[БЛ05] *Бухштабер В. М.*, *Лейкин Д. В.* Законы сложения на якобианах плоских алгебраических кривых // Нелинейная динамика : Сборник статей. Т. 251. — Москва : Наука, МАИК «Наука/Интерпериодика», 2005. — С. 54—126. — (Труды МИАН).

[БН71] *Бухштабер В. М.*, *Новиков С. П.* Формальные группы, степенные системы и операторы Адамса // Матем. сб. — 1971. — Т. 84(126), № 1. — С. 81—118.

[БУ15] *Бухштабер В. М.*, *Устинов А. В.* Кольца коэффициентов формальных групп // Матем. сб. — 2015. — Т. 206, № 11. — С. 19—60.

[БХ82] *Бухштабер В. М.*, *Холодов А. Н.* Топологические конструкции, связанные с многозначными формальными группами // Изв. АН СССР. Сер. матем. — 1982. — Т. 46, № 1. — С. 3—27.

[Вер83] *Вершинин В. В.* О кольце симплектических кобордизмов // Тр. МИАН СССР. — 1983. — Т. 154. — С. 49—52.

[Вес91] *Веселов А. П.* Интегрируемые отображения // УМН. — 1991. — Т. 46, 5(281). — С. 3—45.

[Гай24] *Гайфуллин А. А.* Коммутативность инволютивных двузначных групп // УМН. — 2024. — Т. 79, 2(476). — С. 185—186.

[ГЯ07] *Гайфуллин А. А.*, *Ягодовский П. В.* Об интегрируемости m-значных динамик при помощи однопорожденных m-значных групп // УМН. — 2007. — Т. 62, 1(373). — С. 201—202.

[Ган66] *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц. — Москва : Наука, 1966. — 576 с.

[КН81] *Кобаяси Ш.*, *Номидзу К.* Основы дифференциальной геометрии. Т. 2 / под ред. Г. Ф. Лаптев ; пер. Л. В. Сабинин. — Москва : Наука, 1981. — 414 с.

[Кор24] *Корнев М. И.* n-значные косетные группы и динамика // Матем. заметки. — 2024. — Т. 116, № 1. — С. 77—90.

[Кри80] *Кричевер И. М.* Эллиптические решения уравнения Кадомцева- Петвиашвили и интегрируемые системы частиц // Функц. анализ и его прил. — 1980. — Т. 14, № 4. — С. 45—54.

[Кри81] *Кричевер И. М.* Уравнения Бакстера и алгебраическая геометрия // Функц. анализ и его прил. — 1981. — Т. 15, № 2. — С. 22—35.

[Кри90] *Кричевер И. М.* Обобщенные эллиптические роды и функции Бейкера–Ахиезера // Матем. заметки. — 1990. — Т. 47, № 2. — С. 34—45.

[Лен68] *Ленг С.* Алгебра / под ред. А. И. Кострикин ; пер. Е. С. Голод. — Москва : Мир, 1968. — 564 с.

[Мар50] *Маркушевич А. И.* Возвратные последовательности. — Москва, Ленинград : Гостехиздат, 1950. — 48 с. — (Популярные лекции по математике).

[ММС25] *Медных А. Д.*, *Медных И. А.*, *Соколова Г. К.* Сопровождающая матрица суперпозиции полиномов и ее применение к теории узлов // Докл. РАН. Матем., информ., проц. упр. — 2025. — Т. 521, № 1. — С. 72—80.

[Мил65] *Милнор Д.* Теория Морса / пер. В. И. Арнольда. — Москва : Мир, 1965. — 184 с.

[МС79] *Милнор Д.*, *Сташеф Д.* Характеристические классы : с прил. работы Дж. Манкреса «Элементарная дифференциальная топология» / под ред. В. М. Бухштабера ; с предисл. М. М. Постникова ; пер. М. А. Штанько. — Москва : Мир, 1979. — 371 с.

[Мир78] *Миронов О. К.* Умножения в теориях кобордизмов с особенностями и операции Стинрода–Дика // Изв. АН СССР. Сер. матем. — 1978. — Т. 42, № 4. — С. 789—806.

[Нов60] *Новиков С. П.* О некоторых задачах топологии многообразий, связанных с теорией пространств Тома // ДАН СССР. — 1960. — Т. 132, № 5. — С. 1031—1034.

[Нов62] *Новиков С. П.* Гомотопические свойства комплексов Тома // Матем. сб. — 1962. — Т. 57(99), № 4. — С. 407—442.

[Нов67] *Новиков С. П.* Методы алгебраической топологии с точки зрения теории кобордизмов // Изв. АН СССР. Сер. матем. — 1967. — Т. 31, № 4. — С. 855—951.

[Пан96] *Панов Т. Е.* О структуре 2-алгебры Хопфа в когомологиях четырехмерных многообразий // УМН. — 1996. — Т. 51, № 1. — С. 161—162.

[Пон24] *Пономаренко И. Н.* Об одном семействе многозначных групп : Сборник статей. К 80-летию члена-корреспондента РАН Виктора Матвеевича Бухштабера // Топология, геометрия, комбинаторика и математическая физика. Т. 326. — Москва : МИАН, 2024. — С. 311—313. — (Труды МИАН).

[Пра16] *Прасолов В. В.* Задачи и теоремы линейной алгебры. — Москва : МЦНМО, 2016. — 577 с.

[Хар81] *Хартсхорн Р.* Алгебраическая геометрия / пер. В. А. Исковских. — Мир, 1981. — 599 с.

[Хол81] *Холодов А. Н.* Алгебраическая теория многозначных формальных групп // Матем. сб. — 1981. — Т. 114(156), № 2. — С. 299—321.

[Хол84] *Холодов А. Н.* Классификация шестизначных, семизначных и восьмизначных элементарных формальных групп // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех. — 1984. — № 1. — С. 30—33.

[Чир24] *Чирков М. А.* Функция роста n-значной динамики // Матем. заметки. — 2024. — Т. 115, № 3. — С. 458—465.

[AL75] *Adams J. F., Liulevicius A.* Buhstaber's work on two-valued formal groups // Topology. — 1975. — Vol. 14, no. 4. — P. 291–296.

[AA23] *Aguiar M., Ardila F.* Hopf monoids and generalized permutahedra // Memoirs of the AMS. — 2023. — Vol. 289, no. 1437.

[Baa73] *Baas N. A.* On Bordism Theory of Manifolds with Singularities // Math. Scand. — 1973. — Vol. 33. — P. 279–302.

[BB12] *Behravesh H., Borovik A.* A note on multivalued groups // Ricerche di Matematica. — 2012. — Vol. 61. — P. 245–253.

[Buc06] *Buchstaber V. M.* n-valued groups: theory and applications // Mosc. Math. J. — 2006. — Vol. 6, no. 1. — P. 57–84.

[BD18] *Buchstaber V. M.*, *Dragović V.* Two-Valued Groups, Kummer Varieties, and Integrable Billiards // Arnold Mathematical Journal. — 2018. — Vol. 4, no. 1. — P. 27–57.

[BGR26] *Buchstaber V. M.*, *Gaiur I.*, *Rubtsov V.* Algebraic 2-valued group structures on $\mathbb{P}^1$, Kontsevich-type polynomials, and multiplication formulas, I // Izvestiya: Mathematics. — 2026. — Vol. 90, no. 1. — P. 34–69.

[BK25a] *Buchstaber V. M.*, *Kornev M. I.* n-valued groups, Kronecker sums, and Wendt's matrices // arXiv:2505.04296. — 2025.

[BK25b] *Buchstaber V. M.*, *Kornev M. I.* Algebraic n-valued monoids on $\mathbb{C}P^1$, discriminants and projective duality // arXiv:2510.14010. — 2025.

[BPR10] *Buchstaber V. M.*, *Panov T. E.*, *Ray N.* Toric genera // International Mathematics Research Notices. — 2010. — Vol. 2010, no. 16. — P. 3207–3262.

[BR97] *Buchstaber V. M.*, *Rees E. G.* Multivalued groups, their representations and Hopf algebras // Transform. Groups. — 1997. — Vol. 2, no. 4. — P. 325–349.

[BT08] *Buchstaber V. M.*, *Terzić S.* Equivariant complex structures on homogeneous spaces and their cobordism classes // Geometry, Topology, and Mathematical Physics. S. P. Novikov's Seminar: 2006–2007 / ed. by V. M. Buchstaber, I. M. Krichever. — Providence, RI : American Mathematical Society, 2008. — P. 27–58. — (American Mathematical Society Translations Series 2 ; 224).

[BV96] *Buchstaber V. M.*, *Veselov A. P.* Integrable correspondences and algebraic representations of multivalued groups // International Mathematics Research Notices. — 1996. — Vol. 1996, no. 8. — P. 381–400.

[BV24] *Buchstaber V. M.*, *Veselov A. P.* Chern-Dold character in complex cobordisms and theta divisors // Advances in Mathematics. — 2024. — Vol. 449, no. 109720.

[BV26] *Buchstaber V. M.*, *Veselov A. P.* Algebraic topology of the Lagrange inversion // arXiv:2601.06814. — 2026.

[Bun17] *Bunkova E. Y.* Weierstrass sigma-function coefficients divisibility hypothesis // arXiv:1701.00848. — 2017.

[Car22] *Carrillo S. A.* The composition of polynomials is a determinant // The American Mathematical Monthly. — 2022. — Vol. 129, no. 2. — P. 151–165.

[CDFH24] *Coulette D., Déglise F., Fasel J., Hornbostel J.* Formal ternary laws and Buchstaber's 2-groups // Manuscripta Mathematica. — 2024. — Vol. 174. — P. 453–490.

[CN25] *Crowley D., Nagy C.* The smooth classification of 4-dimensional complete intersections // Geometry & Topology. — 2025. — Vol. 29, no. 1. — P. 269–311.

[DR01] *Devadoss S. L., Read R. C.* Cellular structures determined by polygons and trees // Annals of Combinatorics. — 2001. — Vol. 5. — P. 71–98.

[Dim92] *Dimca A.* Singularities and topology of hypersurfaces. — Springer New York, NY, 1992. — 263 p.

[Dir71] *Dirichlet P. L.* Vorlesungen über Zahlentheorie / hrsg. von R. Dedekind. — Umgearbeitete und vermehrte Auflage. — Braunschweig : Friedrich Vieweg und Sohn, 1871.

[DP91] *Dodd F., Peele R.* Some counting problems involving the multinomial expansion // Mathematics Magazine. — 1991. — Vol. 64, no. 2. — P. 115–122.

[Dol12] *Dolgachev I. V.* Classical algebraic geometry: a modern view. — Cambridge University Press, 2012. — 652 p.

[Dra10] *Dragović V.* Generalization and geometrization of the Kowalevski top // Communications in Math. Phys. — 2010. — Vol. 298. — P. 37–64.

[DK14] *Dragović V., Kukić K.* Discriminantly separable polynomials and quadequations // Journal of Geometric Mechanics. — 2014. — Vol. 6, no. 3. — P. 319–333.

[DD14] *Du Z., Dresden G. P.* A simplified binet formula for k-generalized Fibonacci numbers // Journal of Integer Sequences. — 2014. — Vol. 17, no. 4.

[FW69] *Fulton W., Weiss R.* Algebraic curves: an introduction to algebraic geometry. — Addison-Wesley Publishing Company, Inc. The Advanced Book Program, 1969. — 226 p.

[GRS26] *Gaiur I., Rubtsov V., Straten D. van*. Product formulas for the higher Bessel functions // Selecta Mathematica. — 2026. — Vol. 32, no. 12.

[GKZ94] *Gelfand I. M., Kapranov M. M., Zelevinsky A. V.* Discriminants, resultants, and multidimensional determinants. — Birkhäuser Boston, MA, 1994. — 523 p. — (Modern Birkhäuser Classics).

[GPV25] *Guo J., Ponomarenko I., Vasil'ev A. V.* On multivalued groups of order 3 // Science China Mathematics. — 2025. — Vol. 68. — P. 1969–1978.

[Hir58] *Hirzebruch F.* Komplexe Mannigfaltigkeiten. — Camb. Univ. Press, 1958. — S. 119–136.

[HBJ92] *Hirzebruch F., Berger T., Jung R.* Manifolds and modular forms. — Vieweg+Teubner Verlag Wiesbaden, 1992. — (Aspects of Mathematics).

[Hop41] *Hopf H.* Über Die Topologie der Gruppen-Mannigfaltigkeiten und Ihre Verallgemeinerungen // Annals of Mathematics. — 1941. — Jg. 42, Nr. 1. — S. 22–52.

[HJ91] *Horn R. A., Johnson C. R.* Topics in Matrix Analysis. — Cambridge University Press, 1991. — 607 p.

[KSW99] *Kovacs I., Silver D. S., Williams S. G.* Determinants of Commuting- Block Matrices // The American Mathematical Monthly. — 1999. — Vol. 106, no. 10. — P. 950–952.

[LT85] *Lancaster P., Tismenetsky M.* The Theory of Matrices: With Applications. — Elsevier Science, 1985. — 586 p. — (Computer Science and Scientific Computing).

[LRS95] *Landweber P. S., Ravenel D. C., Stong R. E.* Periodic cohomology theories defined by elliptic curves // The Čech Centennial: A Conference on Homotopy Theory. Vol. 181 / ed. by M. Cenkl, H. Miller. — Providence, RI : American Mathematical Society, 1995. — P. 317–337. — (Contemporary Mathematics).

[Lan87] *Lang S.* Elliptic Functions. — Springer-Verlag New York, 1987. — 328 p.

[Lod05] *Loday J.-L.* The multiple faces of the associahedron // Clay Mathematics Institute Publication. — 2005.

[mat08] *mathe*. Forum discussions. — 2008. — URL: https://bbs.emath.ac.cn/thread-667-4-1.html (visited on 07/31/2025).

[Mel17] *Melman A.* Polynomial eigenvalue bounds from companion forms // arXiv:1701.03994. — 2017.

[Mil60] *Milnor J.* On the cobordism ring Ω^* and a complex analogue, part I // American Journ. Math. — 1960. — Vol. 82. — P. 505–521.

[Och87] *Ochanine S.* Sur les genres multiplicatifs définis par des intégrales elliptiques // Topology. — 1987. — T. 26, n° 2. — P. 143-151.

[OEI00] OEIS. — 2000. — URL: http://oeis.org/A058129 (visited on 07/31/2025).

[Pin14] *Pin J.-E.* How many monoids of order three are there? — 2014. — URL: https://math.stackexchange.com/q/806868 (visited on 07/31/2025).

[Pos25] *Posadskiy K. M.* Continuous two-valued discrete-time dynamical systems and actions of two-valued groups // arXiv:2504.02635. — 2025.

[Qui69] *Quillen D.* On the formal group laws of unoriented and complex cobordism theory // Bull. Amer. Math. Soc. — 1969. — Vol. 75, no. 6. — P. 1293–1298.

[Rib99] *Ribenboim P.* Fermat's Last Theorem for Amateurs. — 1st ed. — Springer New York, NY, 1999. — 420 p.

[Sco05] *Scorpan A.* The Wild World of 4-Manifolds. — Providence, R.I. : American Mathematical Society, 2005. — 609 p.

[SJ84] *Spickerman W. R., Joyner R. N.* Binet's formula for the recursive sequence of order k // Fibonacci Quart. — 1984. — Vol. 22, no. 4. — P. 327–331.

[Sta23] *Stanley R.* Enumerative combinatorics. Vol. 2. — 2nd ed. — Cambridge University Press, 2023. — 788 p. — (Cambridge Studies in Advanced Mathematics).

[Sté00] *Stéphanos C.* Sur une extension du calcul des substitutions linéaires // Journal de Mathématiques Pures et Appliquées 5e série. — 1900. — T. 6. — P. 73-128.

[Sut16] *Sutherland A.* An MIT course: Number theory I. — 2016. — URL: https://math.mit.edu/classes/18.785/2016fa/lectures.html (visited on 07/31/2025).

[Voi03] *Voisin C.* Hodge theory and complex algebraic geometry II. — Cambridge University Press, 2003. — 364 p. — (Cambridge Studies in Advanced Mathematics).

[Wei] *Weisstein E. W.* Wolstenholme Prime. — URL: https://mathworld.wolfram.com/WolstenholmePrime.html (visited on 07/31/2025).

[Wen94] *Wendt E.* Arithmetische Studien über den 'letzten' Fermatschen Satz, welcher aussagt, dass die Gleichung $a^n = b^n + c^n$ für $n > 2$; in ganzen Zahlen nicht auflösbar ist // Journal für die reine und angewandte Mathematik. — 1894. — Jg. 113. — S. 335–347.

[WW96] *Whittaker E.*, *Watson G. N.* A course of modern analysis. — 4th ed. Cambridge University Press, 1996. — 608 p.

[Wit88] *Witten E.* The index of the Dirac operator in loop space. In: Landweber, P.S. (eds) Elliptic Curves and Modular Forms in Algebraic Topology. Vol. 1326. — Springer, Berlin, Heidelberg, 1988. — P. 161–181.

[Wol62] *Wolstenholme J.* On certain properties of prime numbers // The Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics. — 1862. — Vol. 5. — P. 35–39.

[Zie23] *Zieschang P.-H.* Hypergroups. — Springer Nature Switzerland AG, 2023. — 406 p.