ОТЗЫВ

официального оппонента о диссертации **А.А. Казакова**
"Электрические сети и положительные Грассманианы",
представленной на соискание ученой степени кандидата физико - математических наук по специальности 1.1.3 – геометрия и топология

Представленная диссертационная работа Антона Александровича Казакова посвящена самым современным аспектам теории электрических сетей. Основы теории электрических сетей были заложены начиная с середины позапрошлого века в работах физиков и инженеров, занимавшихся электричеством и связанными практическими вопросами применения электрических цепей. Одним из главных задельщиков теории электрических сетей выступил Г.Кирхгоф, сформулировавший один из главных физических законов, которому подлежит теория эектрических сетей. Будучи прекрасным знатоком математики, Г. Кирхгоф обладал в то же время редким умением плодотворно прилагать эти знания к труднейшим вопросам математической физики, в области которой преимущественно работал. Уже первые его работы о распространении электричества по пластинкам послужили исходным пунктом для множества работ других учёных. Целый ряд последующих работ по электричеству был посвящён вопросам о распределении электричества в проводниках, о разряде конденсаторов, о течении электричества по подводным кабелям и т. д.; особенно важна работа об индукции токов, содержащая описание способа определения электрического сопротивления проводников в абсолютной мере, и два больших мемуара об индуктированном магнетизме.

По самому своему определению электрическая сеть есть объект из положительного мира: произвольный граф задает некоторую электрическую сеть, если назначить на нем поднабор вершин, считающихся граничными, и каждому ребру сопоставить положительное число, понимаемое как проводимость соответствующего ребра. В диссертации рассматриваются циркулярные электрические сети, выделяемые из общего множества условиями планарности самого графа и тем, что граничные вершины могут быть последовательно размещены на границе диска, в которой по первому свойству сам граф может быть вложен. Такой электрической сети сопоставляются алгебраические объекты — матрица отклика и матрица эффективных сопротивлений. Как у всякого класса объектов естественно ввести группу преобразований электрической сети, из которых наиболее важными выступают преобразования "звезда - треугольник"; и как для каждого класса объектов естественно возникает задача восстановления исходного объекта по алгебраическим данным, характеризующим этот объект.

Основой диссертационной работы является конструкция сопоставления циркулярной элетрической сети некоторой точки в положительной части вещественного грассманиана. Такое соответствие, на самом деле оказывающееся вложением, строится достаточно хитрым образом: обобщенный трюк Темперли сопоставляет циркулярной электрической сети модель Лама, которая естественным образом вкладывается в положительный грассманиан (однако естественность не означает простоту — соответствующие координаты Плюккера задаются набором производящих функций димеров модели). Как уже было известно из работ других авторов, по точке положительного грассманиана модель Лама восстанавливается почти однозначно — с

точностью до преобразований Постникова.

В работах диссертанта прежде всего существенно упрощается связь электрических цепей и положительных грассманианов, а именно для произвольной циркулярной электрической сети с n граничными вершинами предъявлен явный способ построения соответствующей точки положительного грассманиана $Gr_{R_+}(n-1,2n)$ как по матрице отклика, так и по матрице эффективных сопротивлений, причем ответ совпадает с тем, который дает теория Лама и трюк Темперли. Далее, теория кластерных многообразий предполагает решение задачи о некоторых исчерпывающих наборах координат Плюккера, которых достаточно для описания соотвествующего многообразия при вложении в грассманиан. Подобную задачу решает диссертант, находя для матриц отклика и эффективных сопротивлений специальные миноры, играющие роль исчерпывающих для вложений минимальных электрических сетей. Это позволяет решить задачу черного ящика для данного класса электрических цепей — восстановить проводимости по ее матрице отклика или матрице эффективных сопротивлений.

Еще одним результатом диссертанта являются вычисления в теории метрик на графах: матрица эффективных сопротивлений обладает свойствами, необходимыми для представления этой матрицы как метрики на графе (неравенства Калмансона); и тогда, восстановив матрицу эффективных сопротивлений, оказывается возможным найти явно коэффициенты разложения соответствующей метрики эффективных сопротивлений в сумму элементарных псевдометрик разрезов. Далее, используя комбинаторный смысл миноров матрицы отклика, автором были получены формулы для отношений производящих функций рощ, что может быть использвано в моделях статистической физики.

Наконец, автору принадлежит замечательное уточнение базовой конструкции вложения в грассманиан. А именно, оказывается, что по матрице отклика каждой цикрулярной электрической сети может быть сопоставлена точка лагранжева грассманиана $LG(n-1,2n-2)$. Невольно вспоминается одно из любимых изречений В.И. Арнольда о том, что каждая область математики со временем непременно симплектизируется. Непосредственная польза этого результата — состоящая в привлечении к исследованиям геометрии лагранжева грассманиана комбинаторной техники электрических сетей — очевидно со временем будет существенно расширена.

Диссертация объемом 138 страниц состоит из Введения, пяти глав, последняя из которых обозначена как Заключение, и списка литературы.

Глава 1 содержит основные понятия теории электрических сетей: приводится определения циркулярных электрических сетей, соответствующих им матриц отклика и эффективных сопротивлений, описываются стандартные операции — электрические преобразования, операции приклеивания, удаления и стягивания ребер. Наконец формулируется основной ряд задач "черного ящика", решению которых в большой степени диссертация посвящена: задача о восстановлении проводимостей на матрице отклика или матрице эффективных сопротивлений и задача о восстановлении топологии минимальной сети по тем же алгебраическим данным.

Глава 2 содержит основные моменты теории Постникова в свете пара-

метризации элементов положительного грассманиана различными моделями статистического типа: димерными моделями Лама, моеслями потоков и моделями Постникова. Для соответствия подобного рода формулируются собственные задачи "черного ящика", в которых по данным положительного грассманиана восстанавливаются численные или топологические характеристики соответствующей модели Лама. Подробно описываются алгоритмы решения этих задач.

В **Главе 3** явно описаны правила, по которым строится вложения циркулярных электрических сетей в положительную часть изотропного и лагранжева грассманиана в терминах их матриц отклика и эффективных сопротивлений. Показано, как стандартные действия над элетрическими цепями при полученном выше соответствии трансформируются в действия положительной группы Лама, циклического сдвига и взятие замыкания. Описывается образ вложения электрических сетей в положительную часть лагранжева грассманиана, а также доказывается, что вложение сюръективно для достаточно связных электрических сетей если рассмотреть в качестве образа подмножество, инвариантное относительно действия сдвига.

В **четвертой Главе** представлены новые алгоритмы решений задач черного ящика, сформулированных выше. Задача о восстановлении матрицы проводимостей решается в рамках обобщенного камерного анзатца; доказывается, что проводимости сетей могут быть восстановлены в терминах весов минимальных рощ. Задача о восстановлении топологии графа электрической сети решается с помощью перестановки страд по точке грассманиана, заданной этой сетью.

Наконец в **Главе 5**, обозначаемой как Заключение, представлены приложения результатов, полученных в предыдущих главах. Доказывается теорема Кениона - Вильсона, комбинаторно выводится вложение Чепури - Джорджа - Шпейра, а также выводятся формулы изменения матрицы отклика при приклеивании мостов и спайков. Также приводится полное описание электрических метрик, удовлетворяющих уравнению Калмансона.

Диссертация написана на высоком научном уровне. Отдельные опечатки не мешают чтению текста диссертации. Кроме того, диссертация снабжена многими замечаниями, открывающими дальнейшие горизонты для исследований.

Диссертация А.А. Казакова вносит крупный вклад в теорию электрических сетей и математическую физику, и приложимость представленных в ней результатов имеет широкий спектр в разных областях математики. Результаты диссертации содержатся в 3 статьях, опубликованых в ведущих российских и зарубежных математических журналах, индексируемых в базах WoS и Scopus; все результаты многократно представлялись на международных конференциях и семинарах высочайшего уровня. Все результаты являются новыми, получены автором самостоятельно и снабжены подробными доказательствами. Необходимо добавить, что по результатам диссертации также был опубликован обзор "Современная теория электрических сетей: от матричной теоремы о деревьях до теории кластерных многообразий" в журнале Успехи математических наук (т. 81, вып 1 (487)) в 2026 году, не вошедший по формальных причинам в официальный список литературы

диссертанта.

Диссертация соответствует специальности 1.1.3 - геометрия и топология.

Автореферат полно и выпукло отражает содержание диссертации.

По моему глубокому убеждению диссертация А.А. Казакова "Электрически сети и положительные Грассманианы" удовлетворяет всем требованиям ВАК, а ее автор безусловно заслуживает присуждения ему ученой степени кандидата физико - математических наук.

Официальный оппонент,
доктор физико-математических наук
(специальность 01.01.06)
профессор РАН,
начальник сектора ЛТФ ОИЯИ Н.А. Тюрин
28 апреля 2026 г.

ntyurin@theor.jinr.ru; +7(925)8007367; +7(496)2163005
Лаборатория Теоретической Физики им. Н.Н. Боголюбова,
Объединенный Институт Ядерных Исследований (Дубна),
141980, Жолио - Кюри, 6, г. Дубна, Московская область

Подпись Н.А. Тюрина удостоверяю.
Ученый секретарь ЛТФ ОИЯИ А.В. Андреев

