МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования

“Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова”

На правах рукописи



Казаков Антон Александрович

Электрические сети и положительные Грассманианы

Специальность 1.1.3 Геометрия и топология

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук

Ярославль — 2026

Работа выполнена в Региональном научно-образовательном математическом центре Ярославского государственного университета им. П.Г. Демидова.

Научный руководитель — Талалаев Дмитрий Вальеривич, доктор физико-математических наук, доцент ФГБОУ ВО «Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова» (специальность — 01.01.04).

Официальный оппонент —– Кориков Дмитрий Владимирович, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник Лаборатории математических проблем волновой теории Федерального государственного бюджетного учреждения науки Санкт-Петербургское отделение Математического института им. В. А. Стеклова Российской академии наук (специальность — 01.01.03).

Официальный оппонент — Тюрин Николай Андреевич, доктор физико-математических наук, начальник сектора Лаборатории теоретической физики им. Н.Н. Боголюбова Международной межправительственной организации Объединенный институт ядерных исследований (специальность 01.01.06).

Ведущая организация: Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского».

Защита состоится 28 мая 2026 г. на заседании диссертационного совета 24.1.167.03 при Математическом институте им. В.А. Стеклова Российской академии наук по адресу: 119333 г. Москва, ул. Губкина, д. 8.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Математического института им. В. А. Стеклова и на сайте МИАН: https://mi-ras.ru/dis/ref26/kazakov/dis.pdf.

Автореферат разослан « » 03. 2026 г.

Учёный секретарь
диссертационного совета
24.1.167.03 при МИАН,
д.ф.-м.н. профессор РАН _____ Д. В. Осипов

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы исследования. Настоящая диссертация посвящена теории электрических сетей, которая берет свое начало в середине 19-го – начале 20-го века с работ Кирхгофа, Максвелла, Кеннелли, Нортона и многих других физиков и инженеров.

Определение 0.1. ***Электрической сетью*** $\mathcal{E}(G, \omega)$ *мы будем называть пару* (G, ω), *где* $G(V, E)$ *— произвольный граф, во множестве вершин которого выделено подмножество* $V_B = \{v_1 \dots v_n\} \subset V$ *граничных вершин; и* ω *— функция проводимостей ребер* $\omega : E \to \mathbb{R}_{>0}$. *Через* ω_{vw} *будем обозначать вес ребра с концами* $v, w \in V$.

Циркулярной *электрической сетью мы будем называть планарную электрическую сеть, вложенную в диск так, что все ее граничные вершины лежат на границе диска и занумерованы от* 1 *до* n *по часовой стрелке.*

Для каждой электрической сети можно определить ее ***матрицу отклика****, которая связывает граничные напряжения и граничные токи, и* ***матрицу эффективных сопротивлений****.*

С математической точки зрения теория электрических сетей является источником большого количества крайне нетривиальных комбинаторных и геометрических результатов и структур, активно изучаемых в настоящее время специалистами из самых разных областей современной математики. Перечислим несколько направлений исследований, где теория электрических сетей играет центральную роль и которые непосредственно связаны с нашей работой:

- Исторически, анализ уравнений Кирхгофа во многом обусловил появление современной теории матроидов, одними из первых предметов изучения и полной классификации которой стали циклические матроиды и матроиды

разрезов, непосредственно связанные с так называемым методом контурных токов [50].

- Методы теории электрических сетей используются для простого доказательства теоремы Пойи в теории случайных блужданий [14], [51]. Это доказательство основано на свойстве Рэлея неубывания эффективных сопротивлений [53]. Отметим также, что свойство Рэлея дало начало целому направлению, находящемуся на пересечении теорий матроидов и стабильных полиномов [3], [9], [43], [54].

- Электрические сети являются ключевым инструментом для эффективного численного решения задачи Кальдерона. [2], [46].

- Специалистами в области химии было получено, что эффективные сопротивления задают метрику на вершинах любой электрической сети [39]. Этот факт нашел свое применение при анализе жесткости органических молекул, см. [39], [56]. С математической точки зрения метрические свойства электрических сетей также крайне интересны, например, квадратный корень из эффективных сопротивлений — есть Евклидова метрика, то есть по каждой электрической сети можно построить симплекс, длины ребер которого равны корням из эффективных сопротивлений. Углы этого симплекса определяются матрицей отклика [11]. Метрика эффективных сопротивлений включается в большое семейство метрик, встречающихся в различных комбинаторных и оптимизационных задачах [7], [27]. Наконец, отметим, что для циркулярных электрических сетей метрика эффективных сопротивлений обладает свойством Калмансона [12], что нашло свои приложения в теории филогенетических сетей, см. [1], [15], [16], [24].

- Классическая теорема Кирхгофа связывает теорию электрических сетей с

задачами перечисления остовных деревьев, производящая функция которых может быть посчитана с помощью специального полинома Татта, являющегося в свою очередь электрическим пределом статистических сумм моделей Поттса, см. [52]. Это наблюдение позволяет связывать различные физические модели с электрическими сетями, см. [17], [55]. В частности, с помощью теоремы Кирхгофа было установлено, что абелевы модели песка эквивалентны электрическим сетям, см. [13], [29], [44].

- Уже упомянутая связь электрических сетей с полиномами Татта нашла свое продолжение в теории узлов, см. [23], [32].

- Комбинаторные методы, пришедшие из теории электрических сетей, существенно используются при анализе критических явлений в теории димерных моделей статистической физики, см. [31], [34], [35], [37], [48].

Вместе с изложенным выше теория электрических сетей оказывается связанной с фундаментальными вопросами современной геометрии, в частности, с геометрией положительных Грассманианов. Этому вопросу и его связи с теорией Постникова посвящена в основном данная диссертация, более точно:

1. Построению явных вложений пространства циркулярных электрических сетей в положительные Грассманианы. Эти результаты непосредственно являются продолжением исследований, начатых в работах [26], [41];

2. Изучению комбинаторики производящих рощ (используемых в различных моделях статистической физики) посредством этих вложений. Результаты нашего исследования в данных направлениях непосредственно связаны с работами [15], [16] и [35], [37];

3. Построению эффективных решений задач типа задач черного ящика (дискретной задачи Кальдерона), основанных на результатах теории Постникова.

Представленные в работе решения непосредственно могут быть использованы для решения важных практических задач: численного решения задачи Кальдерона и восстановлению топологии сложных сетей, см. [2] и [15], [16];

4. Использованию «электрических» методов для изучения геометрии и комбинаторики Лагранжева и изотропного Грассманианов. Результаты исследования в данном направлении непосредственно связаны с работами [19], [41];

Объясним кратко роль в настоящем исследовании теории Постникова. Ее результат состоит в наличии параметризации точек $\mathrm{Gr}_{\geq 0}(k,n)$ с помощью специальных взвешенных планарных графов, которые мы будем называть моделями. Существует три эквивалентных способа их задания: подход Лама, подход Постникова и формализм моделей потоков. Это утверждение позволяет интерпретировать координаты Плюккера точек $X \in \mathrm{Gr}_{\geq 0}(k,n)$ в терминах простых комбинаторных объектов на графах — производящих функций димеров моделей Лама, производящих функций непересекающихся путей или потоков эквивалентных моделей Постникова. Эти производящие функции естественно возникают в самых разных областях математики: от задачи замощений плитками домино [34], [40], [48] до параметризации полностью положительных матриц [42], [45], динамики пентагонального отображения [20], [22], и изучения свойств алгебр Плюккера [19], [42]. Именно поэтому в этих и многих других задачах часто оказывается эффективной техника теории Постникова — неформально говоря, можно «вкладывать» различные задачи в положительные Грассманианы. В случае циркулярных электрических сетей такое вложение задается с помощью обобщенного трюка Темперли [41], возникшего изначально в теории точно решаемых моделей статистической физики [34], [48] и являющейся ключевой конструкцией для целей нашего исследования:

Определение 0.2. *Обобщенный трюк Темперли — это конструкция, связыва-*

ющая с каждой электрической сетью $\mathcal{E}(G,\omega)$ *модель Лама* $N(\mathcal{E}^{\mathcal{T}},w)$. *Граф* $\mathcal{E}^{\mathcal{T}}$ *получается объединением графа* G *и двойственного ему графа* G^*. *Все вершины графов* G *и* G^* *раскрашиваются в черный цвет, а дополнительные вершины, возникающие в точках пересечения ребер* G *и* G^* *— в белый; граничные вершины графов* G *и* G^* *соединены с граничной окружностью ребрами; каждое ребро, приходящее из ребра* G, *имеет вес, равный проводимости этого ребра, а все дополнительные ребра имеют вес* 1.

Как мы уже отмечали выше, изначально трюк Темперли, как и его обобщенная версия, был разработан для того, чтобы эффективно вычислять производящие функции димеров — существует биекция между димерами $N(\mathcal{E}^{\mathcal{T}},w)$ с фиксированной границей и остовными рощами на $\mathcal{E}(G,\omega)$, производящие функции которых могут быть легко вычислены с помощью теоремы Кирхгофа и ее обобщений. Однако трюк Темперли можно применять и в обратную сторону, то есть выражать производящие функции димеров через производящие функции рощ. Этот прием позволяет построить вложение электрических сетей в положительную часть Грассманиана $\mathrm{Gr}(n-1,2n)$:

Теорема 1. [41] *Производящие функции димеров* Δ_I *модели Лама* $N(\mathcal{E}^{\mathcal{T}},w)$, *построенной по циркулярной электрической сети* $\mathcal{E}(G,\omega)$ *с* n *граничными вершинами задают координаты Плюккера точки Грассманиана* $\mathrm{Gr}_{\geq 0}(n-1,2n)\cap\mathbb{P}H$, *где* $\mathbb{P}H$ *подпространство в объемлющем проективном пространстве вложения Плюккера, имеющее комбинаторное определение в терминах элементарных остовных рощ.*

Непосредственно «электрические» свойства описанного выше вложения обусловлены тем, что элементы матрицы отклика (матрицы эффективных сопротивлений) каждой электрической сети могут быть выражены с помощью производящих функций остовных рощ специального вида. То есть точка Грас-

сманиана, заданная моделью Лама $N(\mathcal{E}^{\mathcal{T}}, w)$, содержит ту же информацию, что и матрица отклика (матрица эффективных сопротивлений) электрической сети $\mathcal{E}(G, \omega)$:

Теорема 2. [5] *Рассмотрим электрическую сеть $\mathcal{E}(G, \omega)$ с n граничными вершинами и ее матрицу отклика $M_R(\mathcal{E}) = (x_{ij})$, сконструируем матрицу $\Omega_n(\mathcal{E})$ по правилу:*

$$\Omega_n(\mathcal{E}) = \begin{pmatrix} x_{11} & 1 & -x_{12} & 0 & x_{13} & 0 & \dots & (-1)^n \\ -x_{21} & 1 & x_{22} & 1 & -x_{23} & 0 & \dots & 0 \\ x_{31} & 0 & -x_{32} & 1 & x_{33} & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \end{pmatrix},$$

Тогда пространство вектор-строк матрицы $\Omega_n(\mathcal{E})$ задает точку $\mathrm{Gr}_{\geq 0}(n-1, 2n)$. Эта точка совпадает с точкой, задаваемой моделью Лама $N(\mathcal{E}^{\mathcal{T}}, w)$.

Теорема 3. [4] *Рассмотрим связную электрическую сеть $\mathcal{E}(G, \omega)$ с n граничными вершинами и ее матрицу эффективных сопротивлений $R(\mathcal{E}) = (R_{ij})$, сконструируем матрицу $\Omega_{n,R}(\mathcal{E})$ по правилу:*

$$\Omega_{n,R}(\mathcal{E}) = \begin{pmatrix} 1 & m_{11} & 1 & -m_{12} & 0 & m_{13} & 0 & \dots \\ 0 & -m_{21} & 1 & m_{22} & 1 & -m_{23} & 0 & \dots \\ 0 & m_{31} & 0 & -m_{32} & 1 & m_{33} & 1 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix},$$

где $m_{ij} = -\frac{1}{2}(R_{i,j} + R_{i+1,j+1} - R_{i,j+1} - R_{i+1,j})$.

Пространство вектор-строк матрицы $\Omega_{n,R}(\mathcal{E})$ задает точку $\mathrm{Gr}_{\geq 0}(n-1, 2n)$. Эта точка совпадает с точкой, задаваемой моделью Лама $N(\mathcal{E}^{\mathcal{T}}, w)$.

Неотрицательность миноров размера $n-1 \times n-1$ матриц $\Omega_n(\mathcal{E})$ и $\Omega_{n,R}(\mathcal{E})$ и их комбинаторное описание в терминах производящих функций димеров и

рощ имеют множество нетривиальных приложений. Перечислим схематически некоторые из них:

- Используя специальные миноры матрицы $\Omega_n(\mathcal{E})$ (или $\Omega_{n,R}(\mathcal{E})$), можно получить компактные выражения для проводимостей каждой минимальной сети $\mathcal{E}$. Иначе говоря, можно эффективно решить задачу черного ящика — восстановить проводимости сети по ее матрице отклика (матрице эффективных сопротивлений), см. [33];

- Неотрицательность специальных миноров размера $n-1 \times n-1$ матрицы $\Omega_{n,R}(\mathcal{E})$ влечет выполнение неравенств Калмансона для метрики эффективных сопротивлений. Элементы $-m_{ij}$ являются коэффициентами разложения метрики эффективных сопротивлений в сумму элементарных псевдометрик разрезов, см. [24].

- Используя комбинаторный смысл миноров $\Omega_n(\mathcal{E})$, можно получить полиномиальные формулы для отношений производящих функций рощ, см. [5];

- Явный вид матрицы $\Omega_n(\mathcal{E})$ позволяет заключить, что каждой электрической сети можно сопоставить точку положительной части Лагранжева Грассманиана $\mathrm{LG}(n-1, 2n-2)$. Это наблюдение позволяет изучать геометрию Лагранжева Грассманиана посредством комбинаторной техники электрических сетей, см. [5].

Цели и задачи работы. Настоящая диссертация посвящена изучению свойств электрических сетей, связанных с положительными Грассманианов. Строятся явные вложения пространства циркулярных электрических сетей в положительные части изотропного и Лагранжева Грассманианов. С помощью этих вложений изучаются геометрия Лагранжева Грассманиана и комбинаторика производящих функций рощ. С помощью техники положительных Грассманианов предлагаются

новые эффективные методы решения задач черного ящика.

Объектом исследования являются циркулярные электрические сети, связанные с ними модели Лама и задаваемые ими положительные Грассманианы, производящие функции остовных рощ и деревьев.

Предметом исследования являются комбинаторные и геометрические свойства электрических сетей.

Методы исследования. Исследование основано на использовании теории Постникова положительных Грассманианов, применении теории димерных моделей Лама, моделей Постникова и свойств производящих функций остовных рощ.

Научная новизна исследования и личный вклад. Все результаты исследования получены лично автором диссератации за исключением:

- Формулировка Теоремы 3.11 об описании множества $\overline{E}_n$ как замыкания орбиты действия группы Лама на пустую электрическую сеть была получена В.Г. Горбуновым, приведенное доказательство — автором диссертации;
- Конструкция вложения пространства циркулярных электрических сетей в Лагранжевый Грассманиан, описанная в Разделе 3.7, была предложена В.Г. Горбуновым. Приведенные в Разделе 3.7 доказательства теорем были получены соискателем. Теорема о вложении циркулярных электрических сетей в положительную часть Лагранжевого Грассманиана (Теорема 3.17) была сформулирована и доказана соискателем;
- В Главе 5 в качестве приложений демонстрируются (за исключением раздела 5.2) принципиально новые доказательства и выводы результатов, полученных ранее другими исследователями.

Отметим отдельно, что в работе [4] было сформулировано два независимых подхода к описанию лагранжевой конкордантности — комбинаторное и электрическое. Комбинаторное было получено Л. А. Гутерманом, электрическое,

описанное в Разделе 3.8, было полностью самостоятельно получено автором диссертации.

Теоретическое значение. Диссертация носит теоретический характер. Работа является продолжением исследований в теории электрических сетей, начатых в [26], [41].

Практическая значимость. В работе предлагаются новые эффективные решения задач:

- Восстановления проводимостей электрических сетей по их матрице отклика (или матрице эффективных сопротивлений);
- Восстановления топологии электрических сетей по их матрице отклика (или матрице эффективных сопротивлений).

Последний алгоритм нашел хороший отклик среди специалистов, занимающихся восстановлением топологии филогенетических сетей.

Основные положения, выносимые на защиту:

- Построены явные вложения пространства циркуляных электрических сетей в положительную часть $\mathrm{Gr}(n-1,2n)$ с помощью их матриц отклика и эффективных сопротивлений. Метод получения этих вложений основан на использовании комбинаторики путей моделей Постникова и димеров моделей Лама, ассоциированных с циркулярными электрическими сетями.
- Показано, что каждой циркулярной электрической сети можно сопоставить точку положительной части Лагранжева Грассманиана. Описана конструкция лагранжевой конкордантности, связывающая геометрические свойства этого вложения с комбинаторикой производящих функций рощ;
- Описан новый метод решения задачи черного ящика о восстановлении проводимости циркулярных электрических сетей с помощью техники положительных

Грассманианов;

- С помощью полученных вложений получены: новый вывод формулы для изменения матрицы отклика при удалении мостов и спайков; связь действия циклической группы на пространство циркулярных электрических сетей как новый вывод формул Кениона-Вильсона для отношения производящих функций рощ;

- С помощью разработанной техники продемонстрирован принципиально новый способ получения конструкции Чепури-Джорджа-Шпейера вложения пространства электрических сетей в положительную часть $\mathrm{Gr}(n+1, 2n)$.

Степень достоверности и апробация результатов. Результаты диссертации были представлены на следующих конференциях и семинарах:

Конференции:

1. Конференция международных математических центров мирового уровня, «Electrical and Ising networks and dimer models» (Сочи, центр «Сириус», 6 - 13 августа, 2021 год, устный секционный доклад);

2. XXIV Международная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых «Ломоносов-2022», «Вложение электрических сетей в положительный грассманиан» (Москва, МГУ, 10 - 22 апреля, 2022 год, устный секционный доклад);

3. XXIV Международная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых «Ломоносов-2022», «Вложение электрических сетей в положительный грассманиан» (Москва, МГУ, 10 - 22 апреля, 2022 год, устный секционный доклад);

4. Satellite International Conference of Nonlinear Dynamics and Integrability, «Electrical networks and the positive part of Lagrangian Grassmannian» (Ярославль, ЯрГУ, 27 июня - 1 июля, 2022 год, устный секционный доклад);

5. Международная конференция «Дни геометрии в Новосибирске-2022», «Вложение электрических сетей в положительную часть лагранжева грассманиана» (Новосибирск, НГУ, 29 августа - 2 сентября, 2022 год, устный секционный доклад);

6. XXX Международная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых «Ломоносов-2023», «О сюръективности вложения электрических сетей в положительную часть лагранжевого грассманиана» (Москва, МГУ, 10-21 апреля, 2023 год, устный секционный доклад);

7. Международная конференция «Динамика в Сибири-2023», «Kenyon-Wilson theorem and the embedding of the electrical networks to the positive part of Lagrangian Grassmannian» (Новосибирск, НГУ, 27 февраля - 4 марта, 2023 года, устный секционный доклад);

8. XI International Conference SOLITONS, COLLAPSES AND TURBULENCE: Achievements, Developments and Perspectives, «The black box problem for electrical networks and the geometry of non-negative Grassmannian» (Белград, Сербия, Сербская Академия Наук и Искусств, 1 - 5 июля, 2024 год, устный секционный доклад);

9. 4th International Conference on Integrable Systems and Nonlinear Dynamics, «The solution of the black box problem for electrical networks via cluster algebras» (Ярославль, ЯрГУ, 25 - 29 сентября, 2024 год, устный секционный доклад);

10. 5th International Conference on Integrable Systems and Nonlinear Dynamics, «Electrical networks and the totally positive symplectic matrices» (Ярославль, ЯрГУ, 7-11 октября, 2024 год, устный секционный доклад);

11. Международная конференция «Динамика в Сибири-2024», «The solution of the black box problem for electrical networks by cluster algebras» (Новосибирск, НГУ, 26 февраля - 2 марта, 2024 год, устный секционный доклад);

12. Мини-конференция, посвященная юбилею Д.В. Талалаева, «Дискретная задача Кальдерона и положительные Грассманианы» (Москва, МГУ, 11 марта, 2025 год, устный доклад);

13. XXXII Международня конференция студентов, аспирантов и молодых ученых «Ломоносов-2025», «Метрические свойства электрических сетей» (Москва, МГУ, 11 - 25 апреля, 2025 год, устный секционный доклад);

14. EUROCOMB'25: European Conference on Combinatorics, Graph Theory and Applications, «Metric Properties of Electrical Networks and The Graph Reconstruction Problems» (Будапешт, Венгрия, 25-29 августа, 2025).

15. 6th International Conference on Integrable Systems and Nonlinaer Dynamics, «The Calderon Problem and Metric Properties of Electrical Networks» (Ярославль, ЯрГУ, 21-26 сентября, 2025, устный секционный доклад);

16. Integrable Systems and Quantum Theory, «Electrical Networks and the Grove Algebra» (Санкт-Петербург, СПбГУ, 6-11 октября, 2025, устный доклад).

Семинары:

1. Учебно-научный семинар по геометрии и топологии, «Теория Постникова, положительные грассманианы и электрические сети» (МГУ), 2023 год;

2. Integrable systems seminars, «Electrical networks from the Calderon problem to the phylogenetic networks», 2024 год;

3. Семинар «Геометрия, топология и теория представлений» (МФТИ), «Электрические сети, кластерные алгебры и положительные грассманианы», 2024 год;

4. BIMSA-HSE Joint Seminar on Data Analytics and Topology, «Inverse problems related to electrical networks and the geometry of non-negative Grassmannians», 2025 год;

5. Геометрия и группы (МГУ), «Электрические сети: комбинаторика и

положительные Грассманианы», 2025 год;

6. Семинар лаборатории алгебраической геометрии (ВШЭ), «Циркулярные электрические сети: комбинаторика, положительные Грассманианы, обратные задачи», 2025 год;

7. Семинар международной лаборатории кластерной геометрии (ВШЭ), «Комбинаторика и геометрия электрических сетей», 2025 год.

Публикации:

Основные выносимые на защиту результаты настоящего исследования изложены в 3 научных публикациях [4], [5], [33], входящих в список ВАК и в международные базы данных Scopus и Web of Science:

1. Bychkov B., Gorbounov V., Guterman L., Kazakov A. Symplectic geometry of electrical networks // *Journal of Geometry and Physics*. — 2025. — Т. 207. — С. 105323.

2. Bychkov B., Gorbounov V., Kazakov A., Talalaev D. Electrical networks, Lagrangian Grassmannians and symplectic groups // *Moscow Mathematical Journal*. — 2023. — Т. 23, № 2. — С. 133–167.

3. Kazakov A. Inverse problems related to electrical networks and the geometry of non-negative Grassmannians // *Physica D: Nonlinear Phenomena*. — 2025. — Т. 483. — С. 134948.

Результаты, связанные с метрическими свойствами электрических сетей (Раздел 4.3 и Раздел 5.2), опубликованы в следующих материалах [24], [25], [58]:

1. Gorbounov V., Kazakov A. Electrical networks and data analysis in phylogenetics // *Data Analytics and Topology*. — 2025. — Т. 1, № 1. — С. 33–45.

2. Gorbounov V. G., Kazakov A. A. Metric properties of electrical networks and the graph reconstruction problems // *Proceedings of the 13th European Conference on Combinatorics, Graph Theory and Applications EUROCOMB'25*. — 2025. — С.

456–460.

3. Казаков А. А. Метрические свойства электрических сетей // Материалы Международного молодежного научного форума «ЛОМОНОСОВ-2025» [Электронный ресурс] / отв. ред. И. А. Алешковский [и др.]. — М. : МАКС Пресс, 2025.

Теорема 3.21 о сюръективности вложения электрических сетей в положительную часть Лагранжевого Грассманиана и идеи ее доказательства содержаться в [57], [59]:

1. Казаков А. А. О сюръективности вложения электрических сетей в положительную часть лагранжевого грассманиана // Материалы Международного молодежного научного форума «ЛОМОНОСОВ-2023» [Электронный ресурс] / отв. ред. И. А. Алешковский [и др.]. — М. : МАКС Пресс, 2023.

2. Казаков А. А. Кластерные алгебры миноров матриц отклика электрических сетей // Материалы докладов V Конференции математических центров России [Электронный ресурс]. — Красноярск : ИВМ СО РАН, 2025. — С. 25–27.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Диссертация состоит из введения, пяти глав и списка литературы. Во **введении** формулируются цели работы, кратко излагаются основные результаты, а также освещается место этих результатов в современной теории электрических сетей и смежных областях.

Первая глава посвящена изложению классической теории циркулярных электрических сетей. Даются определения циркулярных электрических сетей, их матриц отклика и эффективных сопротивлений; описываются основные операции над сетями — электрические преобразования, операции приклеивания мостов и спайков, взятие двойственной сети, удаления и стягивания ребер, приво-

дящих к определению кактусных электрических сетей. Помимо этого приводится результат о полной классификации матриц отклика, комбинаторная интерпретация миноров матриц отклика через производящие функции путей и остовных рощ, приводящих к определению минимальных и достаточно связных сетей. Формулируются задачи черного ящика: задача о восстановлении проводимостей минимальных сетей по их матрице отклика (эффективных сопротивлений); задача о восстановлении топологии минимальных сетей по их матрице отклика (эффективных сопротивлений). Обсуждается важность этих задач в различных прикладных областях.

Вторая глава посвящена изложению основ теории Постникова положительных Грассманианов, основной результат которой состоит в наличии параметризации точек положительной части $\mathrm{Gr}(k,n)$ с помощью трех эквивалентных моделей: димерных моделей Лама, моделей потоков и моделей Постникова. Приводятся их полные определения, а также необходимые в дальнейшем наброски доказательств эквивалентности описаний теории Постникова с помощью этих трех типов моделей. Формулируются следующие задачи черного ящика в теории Постникова: задача о восстановлении весов минимальных моделей Лама по координатам Плюккера точки Грассманиана, задающих эти модели; задача о восстановлении топологии минимальных моделей Лама по координатам Плюккера точек Грассманиана, задающих эти модели. Подробно приводятся алгоритмы решения этих задач, основанных на операции твиста τ (обобщенного камерного анзатца) и подсчете перестановки страд соответственно.

Третья глава посвящена получению явных вложений циркулярных электрических сетей в положительные части Грассманианов с использованием их матриц отклика и эффективных сопротивлений.

1. Вначале приводится полное определение трюка Темперли, состоящего в сопо-

ставлении каждой циркулярной электрической сети модели Лама специального вида. Затем обсуждается понятие конкордантности, возникающее из биекции между остовными рощами циркулярной электрической сети и ассоциированной с ней моделью Лама. С помощью понятия конкордантности и теории, описанной в Главе 2, примененной к трюку Темперли, доказывается Теорема 2.

2. Доказывается, что операция взятия двойственной сети может быть интерпретирована как операция циклического сдвига. На основе этого утверждения доказывается Теорема 3.

3. Доказывается, что приклеивание мостов и спайков может быть интерпретировано как действие положительной части группы Лама на положительную часть $\mathrm{Gr}(n-1,2n)$. На основе этого утверждения и Теоремы 2 строится вложение пространства электрических сетей в положительную часть Лагранжева Грассманиана. Вводится понятие лагранжевой конкордантности, с помощью которого описывается образ построенного вложения. Для полноты изложения приводится результат о сюръективности вложения достаточно связных электрических сетей в положительную часть лагранжева Грассманиана, инвариантного относительно действия сдвига.

Четвертая глава посвящена изложению новых алгоритмов решений задач черного ящика. Задача о восстановлении проводимостей решается с помощью техники обобщенного камерного анзатца, примененной к явным вложениям, полученным ранее, см. Теоремы 2, 3:

Алгоритм 1.

- *По известной матрице отклика $M_R(\mathcal{E})$ (или матрице эффективных сопротивлений $R(\mathcal{E})$) построить матрицу $\Omega'_n(\mathcal{E})$ (или матрицу $\Omega'_{n,R}(\mathcal{E})$);*
- *Вычислить твист $\tau\big(\Omega'_n(\mathcal{E})\big)$ (или $\tau\big(\Omega'_R(\mathcal{E})\big)$);*

- *Пометить каждую грань F модели $N(\mathcal{E}^{\mathcal{T}}, w)$ минорами $\Delta_{F(I)}$ матрицы $\tau\big(\Omega'_n(\mathcal{E})\big)$ (или $\tau\big(\Omega'_R(\mathcal{E})\big)$) по правилу Скотта, см. [49];*

- *Используя специализации общих формул, описанных в Главе 2, восстановить функцию проводимости ω.*

Приводится комбинаторный смысл миноров $\Delta_{F(I)}$, позволяющий доказать, что проводимости минимальных электрических сетей могут быть восстановлены с помощью весов рощ специального вида.

Для замкнутости изложения показывается, что задача о восстановлении топологии сети решается с помощью вычисления перестановки страд по точке Грассманиана, заданной этой сетью:

Алгоритм 2.

- *По заданной матрице $M_R(\mathcal{E})$ (или $R(\mathcal{E})$) неизвестной сети $\mathcal{E}(G, \omega)$ построим матрицу $\Omega_n(\mathcal{E})$ (или $\Omega_{n,R}(\mathcal{E})$);*

- *Используя $\Omega_n(\mathcal{E})$ (или $\Omega_{n,R}(\mathcal{E})$), вычисляем перестановку страд $\tau(\mathcal{E})$;*

- *Перестановка $\tau(\mathcal{E})$ определяет правило соединения страд (хордовую диаграмму), задающее медианные графы G_M всех минимальных сетей, эквивалентных $\mathcal{E}$;*

- *Восстанавливаем по этому правилу минимальную сеть $\mathcal{E}'$, эквивалентную $\mathcal{E}$, которую можно построить с помощью процедуры, описанной в [10] или [16].*

Пятая глава посвящена изложению применений результатов, полученных ранее другими исследователями:

1. С помощью Теорем 2, 3 и понятия конкордантности доказывается теорема Кениона-Вильсона [35], [36] о том, что отношения производящих функций рощ специального вида выражаются как полиномы от элементов матрицы отклика.

2. С помощью техники, разработанной во второй главе, приводится новый вывод вложения Чепури-Джорджа-Шпейера [8] о вложении пространства электрических сетей в положительную часть $\mathrm{Gr}(n+1, 2n)$.

3. С помощью Теоремы 3 выводятся формулы [10] изменения матриц отклика при приклеивании мостов и спайков.

Помимо изложенного выше, с помощью Теоремы 3 для полноты изложения приводится полное описание Калмансоновых электрических метрик.

Благодарности

Автор сердечно благодарит В.Г. Горбунова, Л.А. Гутермана, С. Константину-Ризоса, Д.В. Талалаева за всестороннюю поддержку и исключительно полезные обсуждения. Отдельно автор выражает признательность Л.А. Гутерману за неоценимую помощь при работе над иллюстрациями.

Диссертационная работа выполнена в Региональном научно-образовательном математическом центре Ярославского государственного университета им. П.Г. Демидова при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (Соглашение о предоставлении субсидии из федерального бюджета № 075-02-2025-1636). Основные результаты работы были получены в рамках проекта Российского научного фонда (проект № 20-71-10110).

Публикации автора по теме диссертации

1. Bychkov B., Gorbounov V., Guterman L., Kazakov A. Symplectic geometry of electrical networks // *Journal of Geometry and Physics*. — 2025. — Т. 207. — С. 105323.

2. Bychkov B., Gorbounov V., Kazakov A., Talalaev D. Electrical networks, Lagrangian Grassmannians and symplectic groups // *Moscow Mathematical Journal*. — 2023. — Т. 23, № 2. — С. 133–167.

3. Kazakov A. Inverse problems related to electrical networks and the geometry of non-negative Grassmannians // *Physica D: Nonlinear Phenomena*. — 2025. — Т. 483. — С. 134948.

4. Gorbounov V., Kazakov A. Electrical networks and data analysis in phylogenetics // *Data Analytics and Topology*. — 2025. — Т. 1, № 1. — С. 33–45.

Тезисы конференций

1. Gorbounov V. G., Kazakov A. A. Metric properties of electrical networks and the graph reconstruction problems // *Proceedings of the 13th European Conference on Combinatorics, Graph Theory and Applications EUROCOMB'25*. — 2025. — С. 456–460.

2. Казаков А. А. Метрические свойства электрических сетей // Материалы Международного молодежного научного форума «ЛОМОНОСОВ-2025» [Электронный ресурс] / отв. ред. И. А. Алешковский [и др.]. — М. : МАКС Пресс, 2025.

3. Казаков А. А. О сюръективности вложения электрических сетей в положительную часть лагранжевого грассманиана // Материалы Международного молодежного научного форума «ЛОМОНОСОВ-2023» [Электронный ресурс] / отв. ред. И. А. Алешковский [и др.]. — М. : МАКС Пресс, 2023.

4. Казаков А. А. Кластерные алгебры миноров матриц отклика электрических сетей // Материалы докладов V Конференции математических центров России [Электронный ресурс]. — Красноярск : ИВМ СО РАН, 2025. — С. 25–27.

Литература

[1] Billera L. J., Holmes S. P., Vogtmann K. Geometry of the space of phylogenetic trees // *Advances in Applied Mathematics*. — 2001. — Т. 27, № 4. — С. 733–767.

[2] Borcea L., Druskin V., Vasquez F. G. Electrical impedance tomography with resistor networks // *Inverse Problems*. — 2008. — Т. 24, № 3. — С. 035013.

[3] Branden P. Polynomials with the half-plane property and matroid theory // *Advances in Mathematics*. — 2007. — Т. 216, № 1. — С. 302–320.

[4] Bychkov B., Gorbounov V., Guterman L., Kazakov A. Symplectic geometry of electrical networks // *Journal of Geometry and Physics*. — 2025. — Т. 207. — С. 105323.

[5] Bychkov B., Gorbounov V., Kazakov A., Talalaev D. Electrical networks, Lagrangian Grassmannians and symplectic groups // *Moscow Mathematical Journal*. — 2023. — Т. 23, № 2. — С. 133–167.

[6] Chaiken S. A combinatorial proof of the all minors matrix tree theorem // *SIAM Journal on Algebraic Discrete Methods*. — 1982. — Т. 3, № 3. — С. 319–329.

[7] Chebotarev P. A. A class of graph-geodetic distances generalizing the shortest-path and the resistance distances // *Discrete Applied Mathematics*. — 2011. — Т. 159, № 5. — С. 295–302.

[8] Chepuri S., George T., Speyer D. E. Electrical networks and lagrangian grassmannians // *Annales de l'Institut Henri Poincaré D.* — 2025. — DOI: https://doi.org/10.4171/aihpd/203.

[9] Choe Y., Oxley J., Sokal A., Wagner D. Homogeneous multivariate polynomials with the half-plane property // *Advances in Applied Mathematics.* — 2004. — T. 32. — C. 88–187.

[10] Curtis E. B., Morrow J. A. *Inverse problems for electrical networks.* — World Scientific, 2000. — 209 c.

[11] Devriendt K. Effective resistance is more than distance: Laplacians, simplices and the Schur complement // *Linear Algebra and its Applications.* — 2022. — T. 639. — C. 24–49.

[12] Deza M., Laurent M. *Geometry of Cuts and Metrics.* — Springer Berlin, 1997. — 587 c.

[13] Dhar D. The abelian sandpile and related models // *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications.* — 1999. — T. 263, № 1-4. — C. 4–25.

[14] Doyle P., Snell J. *Random walks and electric networks.* — arXiv:math/0001057.

[15] Forcey S., Scalzo D. Phylogenetic networks as circuits with resistance distance // *Frontiers in Genetics.* — 2020. — T. 11. — C. 586664.

[16] Forcey S. Circular planar electrical networks, split systems, and phylogenetic networks // *SIAM Journal on Applied Algebra and Geometry.* — 2023. — T. 7, № 1. — C. 49–76.

[17] Fortuin C. M., Kasteleyn P. W. On the random-cluster model: I. Introduction and relation to other models // *Physica.* — 1972. — T. 57, № 4. — C. 536.

[18] Galashin P., Pylyavskyy P. Ising model and the positive orthogonal Grassmannian // *Duke Mathematical Journal*. — 2020. — Т. 169, № 10. — С. 1877–1942.

[19] Gao Y., Lam T., Xu Z. Electrical networks and the Grove algebra // *Canadian Journal of Mathematics*. — 2024. — С. 1–34.

[20] Gekhtman M., Shapiro M., Tabachnikov S., Vainshtein A. Integrable cluster dynamics of directed networks and pentagram maps // *Advances in Mathematics*. — 2016. — Т. 300. — С. 390–450.

[21] George T. Inverse problem for electrical networks via twist // *arXiv preprint arXiv:2305.10074*. — 2023.

[22] Glick M. The pentagram map and Y-patterns // *Advances in Mathematics*. — 2011. — Т. 227. — С. 1019–1045.

[23] Goldman J. R., Kauffman L. H. Knots, tangles, and electrical networks // *Advances in Applied Mathematics*. — 1993. — Т. 14, № 3. — С. 267–306.

[24] Gorbounov V., Kazakov A. Electrical networks and data analysis in phylogenetics // *Data Analytics and Topology*. — 2025. — Т. 1, № 1. — С. 33–45.

[25] Gorbounov V. G., Kazakov A. A. Metric properties of electrical networks and the graph reconstruction problems // *Proceedings of the 13th European Conference on Combinatorics, Graph Theory and Applications EUROCOMB'25*. — 2025. — С. 456–460. — URL: https://site.pheedloop.com/event/Eurocomb25/Abstracts (дата обращения: 06.01.2026).

[26] Gorbounov V., Talalaev D. Electrical varieties as vertex integrable statistical models // *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*. — 2020. — Т. 53, № 45. — С. 1–28.

[27] Gyishiani A. D., Gurvich V. A. Metric and ultrametric spaces of resistances // *Russian Mathematical Surveys*. — 1987. — Т. 42, № 6. — С. 235–236.

[28] Hakimi S. L., Yau S. S. Distance matrix of a graph and its realizability // *Quarterly of Applied Mathematics*. — 1965. — Т. 22, № 4. — С. 305–317.

[29] Holroyd A. E., Levine L., Meszaros K., Peres Y., Propp J., Wilson D. B. Chip-firing and rotor-routing on directed graphs // *In and out of equilibrium 2*. — 2008. — С. 331–364.

[30] Huson D. H., Rupp R., Scornavacca C. *Phylogenetic networks: concepts, algorithms and applications*. — Cambridge University Press, 2010. — 384 с.

[31] Jenne H. Combinatorics of the double-dimer model // *Advances in Mathematics*. — 2021. — Т. 392. — С. 107952.

[32] Kauffmann L., Saleur H. An algebraic approach to the planar coloring problem // *Communications in Mathematical Physics*. — 1993. — Т. 152, № 3. — С. 565–590.

[33] Kazakov A. Inverse problems related to electrical networks and the geometry of non-negative Grassmannians // *Physica D: Nonlinear Phenomena*. — 2025. — Т. 483. — С. 134948.

[34] Kenyon R. W., Propp J., Wilson D. B. Trees and Matchings // *Electronic Journal of Combinatorics*. — 2000. — Т. 7. — Research Paper 25.

[35] Kenyon R., Wilson D. Boundary partitions in trees and dimers // *Transactions of the American Mathematical Society*. — 2011. — Т. 363, № 3. — С. 1325–1364.

[36] Kenyon R. W. The Laplacian on planar graphs and graphs on surfaces // *Current Developments in Mathematics*. — 2012. — С. 1–55.

[37] Kenyon R. W., Wilson D. B. The space of circular planar electrical networks // *SIAM Journal on Discrete Mathematics*. — 2017. — Т. 31, № 1. — С. 1–28.

[38] Kirchhoff G. On the solution of the equations obtained from the investigation of the linear distribution of galvanic currents // *IRE Transactions on Circuit Theory*. — 1958. — Т. 5, № 1. — С. 4–7.

[39] Klein D. J., Randić M. Resistance distance // *Journal of Mathematical Chemistry*. — 1993. — Т. 12. — С. 81.

[40] Knuth D. E. Aztec diamonds, checkerboard graphs, and spanning trees // *Journal of Algebraic Combinatorics*. — 1997. — Т. 6, № 3. — С. 253–257.

[41] Lam T. Electrical varieties and a compactification of the space of electrical networks // *Advances in Mathematics*. — 2018. — Т. 338. — С. 549–600.

[42] Lam T. Totally nonnegative Grassmannian and Grassmann polytopes // *arXiv preprint arXiv:1506.00603*. — 2015.

[43] Marcott C. Positroids have the Rayleigh property // *arXiv preprint arXiv:1611.03583*. — 2016.

[44] Merino C. *Matroids, the Tutte polynomial and the chip firing game*: дис. д-ра философии. — University of Oxford, 1999. — 145 с.

[45] Muller G., Speyer D. E. The twist for positroid varieties // *Proceedings of the London Mathematical Society*. — 2017. — Т. 115, № 5. — С. 1014–1071.

[46] Paridis K. *The inverse conductivity problem: Anisotropy, finite elements and resistor networks*: дис. д-ра философии. — The University of Manchester, 2013. — 217 с.

[47] Postnikov A. Total positivity, Grassmannians, and networks // *arXiv preprint arXiv:math/0609764*.

[48] Priezzhev V. B. The dimer problem and Kirchhoff's theorem // *Russian Mathematical Surveys*. — 1985. — Т. 147, № 12. — С. 747–765.

[49] Scott J. S. Grassmannians and cluster algebras // *Proceedings of the London Mathematical Society*. — 2006. — Т. 92, № 2. — С. 345–380.

[50] Seshu S., Reed M. B. *Linear graphs and electrical networks*. — 1961. — 307 с.

[51] Skopenkov M., Smykalov V., Ustinov A. V. Random walks and electric circuits // *Mathematical Education*. — 2012. — Т. 16. — С. 25–47.

[52] Sokal A. D. The multivariate Tutte polynomial (alias Potts model) for graphs and matroids // *Surveys in Combinatorics*. — 2005. — С. 173–226.

[53] Wagner D. G. *Combinatorics of electrical networks*: учеб. пособие. — University of Waterloo, 2009. — 89 с.

[54] Wagner D. G. Matroid inequalities from electrical network theory // *The Electronic Journal of Combinatorics*. — 2004. — С. A1–A1.

[55] Wu F. Y. The Potts model // *Reviews of Modern Physics*. — 1982. — Т. 54, № 1. — С. 235.

[56] Zhou B., Trinajstić N. On resistance-distance and Kirchhoff index // *Journal of Mathematical Chemistry*. — 2009. — Т. 46. — С. 283–289.

[57] Казаков А. А. О сюръективности вложения электрических сетей в положительную часть лагранжевого грассманиана // Материалы Международного молодежного научного форума «ЛОМОНОСОВ-2023» [Электронный ресурс] / отв. ред. И. А. Алешковский [и др.]. — М. : МАКС Пресс,

2023. — URL: https://lomonosov-msu.ru/archive/Lomonosov_2023/data/section_22_28484.htm (дата обращения: 06.01.2026).

[58] Казаков А. А. Метрические свойства электрических сетей // Материалы Международного молодежного научного форума «ЛОМОНОСОВ-2025» [Электронный ресурс] / отв. ред. И. А. Алешковский [и др.]. — М. : МАКС Пресс, 2025. — URL: https://lomonosov-msu.ru/archive/Lomonosov_2025/data/section_19_38051.htm (дата обращения: 06.01.2026).

[59] Казаков А. А. Кластерные алгебры миноров матриц отклика электрических сетей // Материалы докладов V Конференции математических центров России [Электронный ресурс]. — Красноярск : ИВМ СО РАН, 2025. — С. 25–27. — URL: https://kmc.sfu-kras.ru/conf2025/files/sbornik_2025.pdf (дата обращения: 06.01.2026).