«УТВЕРЖДАЮ»
Проректор ННГУ по науке и инновациям,
кандидат физико-математических наук

_____ М. Ю. Грязнов

«12» _____ 2026 г.

ОТЗЫВ ВЕДУЩЕЙ ОРГАНИЗАЦИИ

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
«Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им.
Н. И. Лобачевского» о диссертационной работе
Казакова Антона Александровича
«ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ СЕТИ И ПОЛОЖИТЕЛЬНЫЕ ГРАССМАНИАНЫ»
представленной на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук по
специальности 1.1.3 — «Геометрия и топология»

Диссертация А.А. Казакова посвящена исследованию циркулярных электрических сетей. Ключевым подходом работы является систематическое использование комбинаторных формул, выражающих эффективные сопротивления, элементы матрицы отклика и другие электрические характеристики через суммы по комбинаторным подструктурам графа – остовным деревьям, рощам, путям, димерам. Парадигма сведения изучения электрических сетей к перечислению подграфов специального вида восходит еще к работе «On the solution of the equations obtained from the investigation of the linear distribution of galvaniccurrents» Г. Кирхгофа. В дальнейшем этот подход был развит в таких работах как: Р. Ботт, Р. Даффин «Impedance Synthesis without Use of Transformers»; Л. Робишо, М. Буаверт, Ж. Робер «Graphes de fluence: Applications à l'électrotechnique et à l'électronique. Calculateurs analogiques et digitaux»; С. Сешу, М. Рид «Linear graphs and electrical networks», в которых было показано, что комбинаторные формулы позволяют решать задачи синтеза и характеризации в теории электрических сетей. Отдельно стоит упомянуть работу С.П. Чана «Introductory topological analysis of electrical networks», в которой этот подход был изложен в общем контексте линейных систем.

Следуя работе Т. Лама «Electroid varieties and a compactification of the space of electrical networks», с каждой (циркулярной) электрической сетью можно связать набор однородных

координат – весов остовных рощ, которые можно организовать в координаты Плюккера точки положительного грассманиана $Gr_{n-1\geq 0}(n-1,2n)$. При этом координаты Плюккера оказываются производящими функциями димеров модели Лама, которые биективно соответствуют производящим функциям рощ исходной сети. Соискатель с помощью теории Постникова доказывает, что полученная таким образом точка$Gr_{n-1\geq 0}(n-1,2n)$может быть задана с помощью матрицы отклика (или эффективных сопротивлений) исходной электрической сети.

Тем самым топологические формулы становятся мостом между электрическими данными и геометрией грассманианов. С помощью этой связи соискатель предлагает новый явный метод решения задачи черного ящика, изучает геометрию лагранжева и изотропного грассманианов, приводит новые доказательства различных важных комбинаторных утверждений.

• Первая глава носит вводный характер. В ней даются определения циркулярной электрической сети, ее основных характеристик: матрицы отклика, матрицы эффективных сопротивлений, базовых операций над сетями, которые позже получат интерпретацию на языке грассманианов. В этой главе подчеркивается, что эффективные сопротивления допускают выражение через суммы по остовным деревьям (классическая топологическая формула Кирхгофа), а элементы матрицы отклика – через более сложные производящие функции рощ. Эти комбинаторные представления в дальнейшем становятся фундаментом для всех построений.

• Вторая глава содержит изложение теории Постникова положительных грассманианов. Центральный факт: каждой точке $Gr_{r\geq 0}(k,n)$ можно сопоставить модель Лама – взвешенный планарный граф, производящие функции димеров или потоков которого равны плюккеровым координатам исходной точки. Эта глава закладывает алгоритмический и комбинаторный аппарат, который затем будет применён к электрическим сетям.

• Третья глава – ключевая во всей диссертации. В ней с помощью обобщённого трюка Темперли строится явное вложение пространства циркулярных электрических сетей в положительную часть грассманиана $Gr_{n-1\geq 0}(n-1,2n)$. Соискатель доказывает две фундаментальные теоремы: по матрице отклика и по матрице эффективных сопротивлений строятся матрицы, строки которых задают искомую точку грассманиана. Далее показано, что операции приклеивания мостов и спайков задают действие группы Лама. На этой основе строится вложение в положительную часть лагранжева грассманиана $LG_{\geq 0}(n-1,2n-2)$ и вводится понятие лагранжевой конкордантности. Ценность последнего вложения заключается в том, что с его помощью можно изучать геометрию лагранжева грассманиана и представления симплектической группы, что получило свое развитие, например, в работах:

• Gao, Y., Lam, T., Xu, Z. (2025). Electrical networks and the grove algebra. Canadian journal of mathematics, 77(2), 631-664;

• Hopkins, S., Kim, J., Pfannerer, S. Cyclic Sieving for Staircase Plane Partitions via Crystals and Electrical Networks.

• Четвертая глава посвящена решению обратной задачи Кальдерона. Соискатель предлагает новый нерекурсивный алгоритм, который по матрице отклика (или эффективных сопротивлений) восстанавливает проводимости и топологию сети. Алгоритм использует описанное ранее вложение в грассманиан и технику твиста. Ключевой момент: проводимости выражаются через миноры матрицы (эффективных сопротивлений) отклика – то есть через комбинаторные формулы, связанные с производящими функциями остовных рощ. Отдельно приводится метод восстановления топологии электрической сети по точке грассманиана, построенной в предыдущей главе. Эти методы являются нерекурсивными и, вероятно, более устойчивыми. Также важно отметить, что соискатель приводит замкнутые формулы для восстановления проводимостей для важного на практике класса электрических сетей, описанных в работах Л. Борча, В. Друскина, Ф. Васкеса «Electrical impedance tomography with resistor networks»; Э. Кертиса, Дж. Морроу «Inverse problems for electrical networks».

• В пятой главе соискатель демонстрирует приложения полученных результатов. В частности: даётся новый вывод формул Кениона–Вильсона для отношений производящих функций рощ – прямое следствие комбинаторных формул, развитых ранее; получен новый вывод формул преобразований матрицы отклика при приклеивании моста и спайка; представлен новый способ построения вложения Чепури–Джорджа–Шпейера; комбинаторные формулы связываются с метрическими свойствами электрических сетей.

Все выносимые Казаковым А.А. на защиту положения обладают высокой новизной, теоретической и прикладной ценностью и вносят существенный вклад как в теорию электрических сетей, так и в комбинаторную теорию положительных грассманианов. Представленные в диссертации результаты были доложены на нескольких международных конференциях и опубликованы в 3 статьях, индексируемых в Web of Science и Scopus. К работе имеется несколько замечаний:

• Явно твист от матриц в случае старшей электрической клетки не был выписан. Хотя сделать это не является очень сложной задачей. В последующих публикациях нужно обязательно выписать явный вид твиста и изучить его связь с моделями Изинга.

• Соискатель пишет такие слова как «Грассманианов, Лагранжев» с большой буквы, что не является общепринятым.

Эти замечания, однако, не влияют на ценность полученных в диссертации результатов и не мешают чтению и пониманию работы.

Диссертационное исследование прошло апробацию на научных семинарах и конференциях, а основные результаты своевременно и в достаточном объеме опубликованы в ведущих научных журналах. Автореферат в полной мере отражает содержание диссертации. Полученные результаты будут полезны в исследованиях, связанных с численными методами решения задачи Кальдерона, и исследованиях, связанных с изучением структур сложных сетей, в том числе возникающих в прикладных задачах, ведущихся в Санкт-Петербургском отделении Математического института им. В. А. Стеклова РАН (ПОМИ РАН), Национальном исследовательском университете «Высшая школа экономики», Московском физико-

техническом институте. Результаты диссертационной работы могут также использоваться при чтении специальных курсов по теории Постникова положительных грассманианов и ее практических применений для студентов, магистрантов и аспирантов математических, а также физических и инженерных специальностей.

Диссертационное исследование соответствует п. 1 «Выпуклая, дискретная и комбинаторная геометрия»; п. 10 «Маломерная топология, включая теорию узлов»; п. 19 «Геометрия и топология в теоретической и математической физике» паспорта научной специальности 1.1.3. «Геометрия и топология».

Оценивая диссертационную работу в целом, можно утверждать, что она представляет собой законченный научный труд и по своему содержанию, результатам и оформлению соответствует всем требованиям «Положения о присуждении ученых степеней», утвержденного Постановлением Правительства РФ №842 от 24 сентября 2013 года, предъявляемым к диссертациям на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук, а ее автор, Казаков Антон Александрович, заслуживает присуждения ему степени кандидата физико-математических наук по специальности 1.1.3 – «Геометрия и топология».

Отзыв обсужден и одобрен на расширенном заседании кафедры алгебры, геометрии и дискретной математики института информационных технологий, математики и механики Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского, протокол № 7 от 7 мая 2026 г.

Присутствовали на заседании15 человек, из них 13 докторов и кандидатов физико-математических наук.

Результаты голосования: «за» – 15, «против» – 0, «воздержалось» – 0.

Директор института информационных технологий,
математики и механики,
заведующий кафедрой алгебры, геометрии и дискретной математики,
доктор физико-математических наук, доцент

Золотых Николай Юрьевич

ПОДПИСЬ УДОСТОВЕРЯЮ
ЗАМ. НАЧАЛЬНИКА УПРАВЛЕНИЯ КАДРОВ
ННГУ ИМ. Н.И. ЛОБАЧЕВСКОГО
Управление кадров № 5
Т.А. СУББОТИНА