# Отзыв

официального оппонента Корикова Дмитрия Владимировича на диссертацию
Казакова Антона Александровича
«ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ СЕТИ И ПОЛОЖИТЕЛЬНЫЕ ГРАССМАНИАНЫ»
представленную на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук
по специальности 1.1.3 – «Геометрия и топология»

Диссертационная работа А.А. Казакова посвящена изучению специального класса планарных электрических сетей (так называемых циркулярных сетей) посредством комбинаторной теории Постникова положительных грассманианов.

Основным (на взгляд оппонента) результатом диссертации является решение обратной задачи Кальдерона о восстановлении циркулярной электрической сети по её матрице отклика, определяющей токи, текущие через граничные вершины в ответ на приложенные к ним электрические потенциалы. Именно, диссертантом предложен новый, нерекурсивный, алгоритм решения это задачи, суть которого кратко можно описать следующим образом. С помощью специальной перестройки (трюка Темперли) из исходного графа $\mathcal{E}(G,\omega)$ и двойственного к нему получается взвешенный граф $\mathcal{N}(\mathcal{E}^\tau,\tilde{\omega})$, называемый моделью Лама. С этим графом ассоциируется точка $\mathbf{x}$ в положительном грассманиане, плюккеровы координаты которой есть производящие функциям димеров графа $\mathcal{N}(\mathcal{E}^\tau,\tilde{\omega})$. С другой стороны, благодаря сохраняющей веса биекции между димерами на $\mathcal{N}(\mathcal{E}^\tau,\tilde{\omega})$ и остовными рощами на исходном графе $\mathcal{E}(G,\omega)$, можно найти производящие функции последних (явные формулы получены диссертантом в Лемме 3.1). Ключевой элемент алгоритма – это выведенные диссертантом (см. Теоремы 3.4 и 3.8) формулы, определяющие элемент грассманиана $\mathbf{x}$ по матрице отклика путем задания базиса в нем, сводя тем самым дело к определению (минимальной) циркулярной электрической сети по производящим функциям её рощ. Наконец, диссертантом предложен метод определения как перестановок страд $G$ (Теорема 4.3), так и весов $\omega$ (Предложение 4.1 и Лемма 4.2) по вышеуказанным производящим функциям. Тем самым удается восстановить как топологию сети (с точностью до преобразований "звезда-треугольник"), так и проводимости её ребер.

С помощью вышеописанной методики также получен новый вывод формулы для изменения матрицы отклика при удалении мостов и спайков, который играет ключевое значение в рекурсивных алгоритмах решения обратной задачи, новый вывод формул Кениона-Вильсона для отношений производящих функций рощ, а также транзитивность действия группы Лама на множество циркулярных электрических сетей (вложенных в положительный грассманиан). Кроме того, в работе представлены результаты о геометрической структуре лагранжевого грассманиана посредством теории электрических сетей. В частности, показано, что каждой циркулярной электрической сети можно сопоставить точку положительной части лагранжева грассманиана, описана конструкция лагранжевой конкордантности, связывающая геометрические свойства этого вложения с комбинаторикой производящих функций рощ, получен новый способ вложения Чепури-Джорджа-Шпейера.

Диссертация состоит из введения и пяти глав и введения.

**В первой главе** приводятся необходимые сведения из теории электрических сетей. Особое внимание уделяется подробному изложению свойств циркулярных электрических сетей, которые в дальнейшем изучаются с помощью теории Постникова положительных грассманианов.

**Во второй главе** приводятся излагаются основные факты теории положительных грассманианов. Ключевой результат этой теории состоит в том, что каждой точке положительного грассманиана можно сопоставить специальный граф — модель Лама (или эквивалентные ей модель Постникова или модель потоков), производящие функции димеров которой задают плюккеровы координаты исходной точки. Данный результат представлен в терминах прямой и обратной задач для грассманианов. Для каждой модели Лама описан способ получения матрицы, задающей точку грассманиана (прямая задача). По каждой точке грассманиана предлагается явный алгоритм построения модели Лама (обратная задача). Этот подход является ключевым для изучения электрических сетей с помощью положительных грассманианов

**В третей главе** строятся явные вложения пространства электрических сетей в положительную часть $Gr(n-1,2n)$ с помощью их матриц отклика и эффективных сопротивлений. Этот результат получен путем решения прямой задачи для модели Лама на трюке Темперли, построенной по электрической сети. Полученное явное вложение также позволяет построить вложение электрических сетей в положительную часть лагранжева грассманиана $LG(n-1,2n-2)$.

**В четвертой главе** предлагается новый алгоритм решения дискретной задачи Кальдерона. Этот алгоритм строится на основе решения обратной задачи для точек грассманиана, построенных в предыдущей главе. Он является нерекурсивным и регулярным, и позволяет восстановить проводимости сети с помощью рациональных выражений от миноров матрицы отклика (эффективных сопротивлений). Также приводится комбинаторная интерпретация этих выражений в терминах производящих функций остовных рощ специального вида.

**В пятой главе** рассматриваются некоторые приложения полученных результатов. Главными из них в контексте решения задачи Кальдерона на графах являются следующие: приводится вывод формул изменения матрицы отклика при приклеивании моста и спайка, что позволяет дать более регулярное описание классического рекурсивного алгоритма решения дискретной задачи Кальдерона, изложенного в работе Curtis, E. B., & Morrow, J. A. (2000). Inverse problems for electrical networks (Vol. 13). World Scientific; дается интерпретация задачи Кальдерона в духе метрической задачи Hakimi–Yau о восстановлении графа по значениям геодезических расстояний между его граничными вершинами.

Все выносимые Казаковым на защиту положения являются новыми, математически достоверны, обладают высокой теоретической и прикладной ценностью и вносят существенный вклад как в теорию обратных задач на графах, так и в теорию положительных грассманианов. Представленные в диссертации результаты были доложены на нескольких международных конференциях и опубликованы в 3 статьях, индексируемых в базах Web of Science и Scopus. К работе имеется несколько замечаний редакционного и уточняющего характера.

1. Для задачи Кальдерона на графе более употребителен термин “обратная задача” нежели “задача черного ящика”.

2. При чтении работы было замечено несколько опечаток. Именно, во фразе “каждое ребро, приходящее из ребра $G$” в Определении 0.2 следует заменить “приходящее” на “происходящее”, на Стр. 8 в строке -5 – “Грассманианов” на “грассманианами”, на стр. 10 в строке -2 – “за исклюением” на “за исключением”.

3. В отдельных местах текста имеет место непоследовательность изложения. Именно, величина $wt(\cdot)$ первый раз встречается в Теореме 1.12, а определяется только

в Теореме 1.13. Аналогично, суммы $L_{unc}$ и $L_{ij}$ из Теоремы 1.15 впервые вводятся лишь в третьей главе. Определение совершенной ориентации в доказательстве Теоремы 2.1 дано на следующей странице.

4. Относительно какой топологии выполняется компактификация $E_n$ в Теореме 1.10?

5. Поскольку в Теореме 2.10 намеренно опущено описание преобразований Постникова, было бы уместным и весьма полезным для читателя привести комментарий о том, каким преобразования на исходном графе $\mathcal{E}(G;\omega)$ соответствуют преобразованиям Постникова его модели Лама.

6. По-видимому, из полученных диссертантом явных формул вытекает устойчивость решений исследуемой задачи Кальдерона. Поскольку изучение устойчивости является очень важной (и одной из самых сложных) частью теории обратных задач, было бы крайне полезно привести соответствующий результат об устойчивости топологии (минимальной) сети $\mathcal{E}(G;\omega)$ относительно малых возмущений матрицы отклика (равно как и о непрерывной зависимости весов его ребер от матрицы отклика) в отдельном следствии.

Эти замечания никоим образом не снижают ценность полученных в диссертации результатов и не затрудняют её понимание.

Диссертационная работа удовлетворяет всем требованиям «Положение о присуждении ученых степеней», утвержденного Постановлением Правительства РФ №842 от 24 сентября 2013 года, предъявляемым к диссертациям на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук. Казаков Антон Александрович заслуживает присуждения ему степени кандидата физико-математических наук по специальности 1.1.3 – «Геометрия и топология».

**Официальный оппонент:**
Старший научный сотрудник Лаборатории математических проблем волновой теории Федерального государственного бюджетного учреждения науки Санкт-Петербургское отделение Математического института им. В. А. Стеклова Российской академии наук, кандидат физико-математических наук (специальность — 01.01.03)
**Кориков Дмитрий Владимирович**

/Д.В. Кориков/

Адрес: Санкт-Петербург, 191023, наб. р. Фонтанки 27
Телефон: +7 981 765 7342 , e-mail: thecakeisalie@list.ru
Дата: 22 апреля 2026

Подпись руки Корикова Дмитрия Владимировича заверяю главный специалист Скрипка Т.Ю.
22.04.2026