МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования

“Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова”

На правах рукописи

Казаков Антон Александрович

# Электрические сети и положительные Грассманианы

Специальность 1.1.3 Геометрия и топология

Диссертация
на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук
Талалаев Д.В.

Ярославль — 2026

# Оглавление

**Введение** **4**

0.1 Основные положения, выносимые на защиту: . . . . . 13

0.2 Структура диссертации . . . . . 18

**1 Предварительные сведения: теория электрических сетей** **22**

1.1 Матрица отклика . . . . . 24

1.2 Циркулярные электрические сети . . . . . 26

1.3 Комбинаторика путей, деревьев и рощ на графах . . . . . 32

1.4 Матрица эффективных сопротивлений . . . . . 34

1.5 Задача черного ящика и электроимпедансная томография . . . . . 38

1.6 Топологическая задача черного ящика и теория филогенетических сетей . . . . . 41

1.7 Приклеивание мостов и спайков . . . . . 43

**2 Предварительные сведения: положительные Грассманианы и теория Постникова** **47**

2.1 Модели Лама . . . . . 47

2.2 Модели потоков . . . . . 50

2.3 Модели Постникова . . . . . 54

2.4 Задачи черного ящика в теории Постникова . . . . . 58

**3 Основные результаты: электрические сети и положительные Грассманианы** **66**

3.1 Обобщенный трюк Темперли . . . . . 66

3.2 Вложение Лама и комбинаторика рощ . . . . . 70

3.3 Параметризация образа вложения Лама с помощью матриц отклика 75

3.4 Двойственность и действие циклической группы . . . . . 81

3.5 Параметризация образа вложения Лама с помощью матриц эффективных сопртивлений . . . . . 84

3.6 Действие электрической группы как приклейка мостов и спайков . 86

3.7 Лагранжева специализация вложения Лама . . . . . 92

3.8 Комбинаторика рощ и Лагранжев Грассманиан . . . . . 97

**4 Основные результаты: решения задач черного ящика 104**

4.1 Восстановление проводимостей и твист . . . . . 104

4.2 Восстановление проводимостей с помощью весов специальных остовных рощ . . . . . 113

4.3 Восстановление топологии электрической сети . . . . . 116

**5 Заключение: приложения 119**

5.1 Теоремы Кениона-Вильсона в моделях двойных димеров . . . . . 119

5.2 Свойства метрики эффективных сопротивлений . . . . . 120

5.3 Вывод формул изменения матрицы отклика при приклеивании мостов и спайков . . . . . 123

5.4 Вложение Чепури-Джорджа-Шпейера . . . . . 124

**Литература 131**

# Введение

**Актуальность темы.** Настоящая диссертация посвящена теории электрических сетей, которая берет свое начало в середине 19-го – начале 20-го века с работ Кирхгофа, Максвелла, Кеннелли, Нортона и многих других физиков и инженеров.

**Определение 0.1.**

***Электрической сетью*** $\mathcal{E}(G,\omega)$ *мы будем называть пару* $(G,\omega)$, *где* $G(V,E)$ *— произвольный граф, во множестве вершин которого выделено подмножество* $V_B = \{v_1 \dots v_n\} \subset V$ *граничных вершин; и* $\omega$ *— функция проводимостей ребер* $\omega : E \to \mathbb{R}_{>0}$. *Через* $\omega_{vw}$ *будем обозначать вес ребра с концами* $v, w \in V$.

***Циркулярной*** *электрической сетью мы будем называть планарную электрическую сеть, вложенную в диск так, что все ее граничные вершины лежат на границе диска и занумерованы от* 1 *до* $n$ *по часовой стрелке.*

*Для каждой электрической сети можно определить ее* ***матрицу отклика****, которая связывает граничные напряжения и граничные токи, и* ***матрицу эффективных сопротивлений****, являющуюся псевдообратной к первой, см. Главу 1.*

С математической точки зрения теория электрических сетей является источником большого количества крайне нетривиальных комбинаторных и геометрических результатов и структур, активно изучаемых в настоящее время специалистами из самых разных областей современной математики. Перечислим несколько как классических, так и появившихся совсем недавно направлений

исследований, в которых теория электрических сетей занимает центральное место:

- Исторически, анализ уравнений Кирхгофа (1.1) во многом обусловил появление современной теории матроидов, одними из первых предметов изучения и полной классификации которой стали циклические матроиды и матроиды разрезов, непосредственно связанные с так называемым методом контурных токов [57].

- Методы теории электрических сетей используются для простого доказательства теоремы Пойи в теории случайных блужданий [18], [58]. Это доказательство основано на свойстве Рэлея неубывания эффективных сопротивлений [64]. Отметим также, что свойство Рэлея дало начало целому направлению, находящемуся на пересечении теорий матроидов и стабильных полиномов [5], [13], [49], [65].

- Электрические сети используются для эффективного численного решения задачи Кальдерона [4], [52].

- Аналог уравнений Кирхгофа можно встретить при расчете химических реакций, что стало основанием для применения преобразования Крона, матриц отклика и других «электрических» методов при анализе некоторых химических и биологических процессов. В настоящее время эта область активно развивается, и ей посвящено большое количество работ, см. [2], [9].

- Специалистами в области химии также было получено, что эффективные сопротивления задают метрику на вершинах любой электрической сети [44]. Этот факт нашел свое применение при анализе жесткости органических молекул, см. [44], [67]. С математической точки зрения метрические свойства электрических сетей также крайне интересны, например, квадратный ко-

рень из эффективных сопротивлений — есть Евклидова метрика, то есть по каждой электрической сети можно построить симплекс, длины ребер которого равны корням из эффективных сопротивлений. Углы этого симплекса определяются матрицей отклика [15]. Метрика эффективных сопротивлений включается в большое семейство метрик, встречающихся в различных комбинаторных и оптимизационных задачах [11], [32]. Наконец, отметим, что для циркулярных электрических сетей метрика эффективных сопротивлений обладает свойством Калмансона [16], что нашло свои приложения в теории филогенетических сетей, см. [3], [19], [20], [29].

- Классическая теорема Кирхгофа связывает теорию электрических сетей с задачами перечисления остовных деревьев, производящая функция которых может быть посчитана с помощью специального полинома Татта, являющегося в свою очередь электрическим пределом статистических сумм моделей Поттса, см. [59]. Это наблюдение позволяет связывать различные физические модели с электрическими сетями, см. [21], [66]. В частности, с помощью теоремы Кирхгофа было установлено, что абелевы модели песка эквивалентны электрическим сетям, см. [17], [34], [50].

- Уже упомянутая связь электрических сетей с полиномами Татта нашла свое продолжение в теории узлов, см. [28], [37].

- Комбинаторные методы, пришедшие из теории электрических сетей, существенно используются при анализе критических явлений в теории димерных моделей статистической физики, см. [36], [39], [40], [42], [54].

Вместе с изложенным выше теория электрических сетей оказывается связанной с фундаментальными вопросами современной геометрии, в частности, с геометрией положительных Грассманианов. Этому вопросу и его связи с

теорией Постникова посвящена в основном данная диссертация, более точно:

1. Построению явных вложений пространства циркулярных электрических сетей в положительные Грассманианы. Эти результаты непосредственно являются продолжением исследований, начатых в работах [31], [46];

2. Изучению комбинаторики производящих рощ (используемых в различных моделях статистической физики) посредством этих вложений. Результаты нашего исследования в данных направлениях непосредственно связаны с работами [19], [20] и [40], [42];

3. Построению эффективных решений задач типа задач черного ящика (дискретной задачи Кальдерона), основанных на результатах теории Постникова. Представленные в работе решения непосредственно могут быть использованы для решения важных практических задач: численного решения задачи Кальдерона и восстановлению топологии сложных сетей, см. [4] и [19], [20];

4. Использованию «электрических» методов для изучения геометрии и комбинаторики Лагранжева и изотропного Грассманианов Результаты исследования в данном направлении непосредственно связаны с работами [24], [46];

Объясним кратко роль в настоящем исследовании теории Постникова. Ее результат состоит в наличии параметризации точек $\mathrm{Gr}_{\geq 0}(k,n)$ с помощью специальных взвешенных планарных графов, которые мы будем называть моделями. Существует три эквивалентных способа их задания: подход Лама, подход Постникова и формализм моделей потоков. Это утверждение позволяет интерпретировать координаты Плюккера точек $X \in \mathrm{Gr}_{\geq 0}(k,n)$ в терминах простых комбинаторных объектов на графах — производящих функций димеров моделей Лама, производящих функций непересекающихся путей или потоков эквивалентных моделей Постникова. Эти производящие функции естественно возникают в самых разных

областях математики: от задачи замощений плитками домино [39], [45], [54] до параметризации полностью положительных матриц [47], [51], динамики пентагонального отображения [25], [27], и изучения свойств алгебр Плюккера [24], [47]. Именно поэтому в этих и многих других задачах часто оказывается эффективной техника теории Постникова — неформально говоря, можно «вкладывать» различные задачи в положительные Грассманианы. В случае циркулярных электрических сетей такое вложение задается с помощью обобщенного трюка Темперли [46], возникшего изначально в теории точно решаемых моделей статистической физики [39], [54] и являющейся ключевой конструкцией для целей нашего исследования:

**Определение 0.2.**

*Обобщенный трюк Темперли — это конструкция, связывающая с каждой электрической сетью $\mathcal{E}(G,\omega)$ модель Лама $N(\mathcal{E}^{\mathcal{T}},w)$. Граф $\mathcal{E}^{\mathcal{T}}$ получается объединением графа $G$ и двойственного ему графа $G^*$. Все вершины графов $G$ и $G^*$ раскрашиваются в черный цвет, а дополнительные вершины, возникающие в точках пересечения ребер $G$ и $G^*$ — в белый; граничные вершины графов $G$ и $G^*$ соединены с граничной окружностью ребрами; каждое ребро, приходящее из ребра $G$, имеет вес, равный проводимости этого ребра, а все дополнительные ребра имеют вес* 1.

Как мы уже отмечали выше, изначально трюк Темперли, как и его обобщенная версия, был разработан для того, чтобы эффективно вычислять производящие функции димеров — существует биекция между димерами $N(\mathcal{E}^{\mathcal{T}},w)$ с фиксированной границей и остовными рощами на $\mathcal{E}(G,\omega)$, производящие функции которых могут быть легко вычислены с помощью теоремы Кирхгофа и ее обобщений. Однако трюк Темперли можно применять и в обратную сторону, то есть выражать производящие функции димеров через производящие функ-

ции рощ. Этот прием позволяет построить вложение электрических сетей в положительную часть Грассманиана $\mathrm{Gr}(n-1,2n)$ :

**Теорема 0.1.** [46]

*Производящие функции димеров $\Delta_I$ модели Лама $N(\mathcal{E}^{\mathcal{T}},w)$, построенной по циркулярной электрической сети $\mathcal{E}(G,\omega)$ с $n$ граничными вершинами задают координаты Плюккера точки Грассманиана $\mathrm{Gr}_{\geq 0}(n-1,2n)\cap\mathbb{P}H$, где $\mathbb{P}H$ подпространство в объемлющем проективном пространстве вложения Плюккера, имеющее комбинаторное определение в терминах элементарных остовных рощ.*

Непосредственно «электрические» свойства описанного выше вложения обусловлены тем, что элементы матрицы отклика (матрицы эффективных сопротивлений) каждой электрической сети могут быть выражены с помощью производящих функций остовных рощ специального вида. То есть точка Грассманиана, заданная моделью Лама $N(\mathcal{E}^{\mathcal{T}},w)$, содержит ту же информацию, что и матрица отклика (матрица эффективных сопротивлений) электрической сети $\mathcal{E}(G,\omega)$:

**Теорема 0.2.** [7]

*Рассмотрим электрическую сеть $\mathcal{E}(G,\omega)$ с $n$ граничными вершинами и ее матрицу отклика $M_R(\mathcal{E})=(x_{ij})$, сконструируем матрицу $\Omega_n(\mathcal{E})$ по правилу:*

$$\Omega_n(\mathcal{E})=\begin{pmatrix} x_{11} & 1 & -x_{12} & 0 & x_{13} & 0 & \dots & (-1)^n \\ -x_{21} & 1 & x_{22} & 1 & -x_{23} & 0 & \dots & 0 \\ x_{31} & 0 & -x_{32} & 1 & x_{33} & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \end{pmatrix},$$

*Тогда пространство вектор-строк матрицы $\Omega_n(\mathcal{E})$ задает точку $\mathrm{Gr}_{\geq 0}(n-1,2n)$. Эта точка совпадает с точкой, задаваемой моделью Лама $N(\mathcal{E}^{\mathcal{T}},w)$.*

**Теорема 0.3.** [6]

*Рассмотрим связную электрическую сеть $\mathcal{E}(G,\omega)$ с $n$ граничными вершинами и ее матрицу эффективных сопротивлений $R(\mathcal{E}) = (R_{ij})$, сконструируем матрицу $\Omega_{n,R}(\mathcal{E})$ по правилу:*

$$\Omega_{n,R}(\mathcal{E}) = \begin{pmatrix} 1 & m_{11} & 1 & -m_{12} & 0 & m_{13} & 0 & \dots \\ 0 & -m_{21} & 1 & m_{22} & 1 & -m_{23} & 0 & \dots \\ 0 & m_{31} & 0 & -m_{32} & 1 & m_{33} & 1 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix},$$

*где $m_{ij} = -\frac{1}{2}(R_{i,j} + R_{i+1,j+1} - R_{i,j+1} - R_{i+1,j})$.*

*Пространство вектор-строк матрицы $\Omega_{n,R}(\mathcal{E})$ задает точку $\mathrm{Gr}_{\geq 0}(n-1, 2n)$. Эта точка совпадает с точкой, задаваемой моделью Лама $N(\mathcal{E}^{\mathcal{T}}, w)$.*

Неотрицательность миноров размера $n-1 \times n-1$ матриц $\Omega_n(\mathcal{E})$ и $\Omega_{n,R}(\mathcal{E})$ и их комбинаторное описание в терминах производящих функций димеров и рощ имеют множество нетривиальных приложений. Перечислим схематически некоторые из них:

- Используя специальные миноры матрицы $\Omega_n(\mathcal{E})$ (или $\Omega_{n,R}(\mathcal{E})$), можно получить компактные выражения для проводимостей каждой минимальной сети $\mathcal{E}$. Иначе говоря, можно эффективно решить задачу черного ящика — восстановить проводимости сети по ее матрице отклика (матрице эффективных сопротивлений), см. [38];

- Неотрицательность специальных миноров размера $n-1 \times n-1$ матрицы $\Omega_{n,R}(\mathcal{E})$ влечет выполнение неравенств Калмансона для метрики эффективных сопротивлений. Элементы $-m_{ij}$ являются коэффициентами разложения метрики эффективных сопротивлений в сумму элементарных псевдометрик разрезов, см. [29].

- Используя комбинаторный смысл миноров $\Omega_n(\mathcal{E})$, можно получить полиномиальные формулы для отношений производящих функций рощ, см. [7];

- Явный вид матрицы $\Omega_n(\mathcal{E})$ позволяет заключить, что каждой электрической сети можно сопоставить точку положительной части Лагранжева Грассманиана $\mathrm{LG}(n-1, 2n-2)$. Это наблюдение позволяет изучать геометрию Лагранжева Грассманиана посредством комбинаторной техники электрических сетей, см. [7].

**Цели и задачи работы.** Настоящая диссертация посвящена изучению свойств электрических сетей, связанных с положительными Грассманианов. Строятся явные вложения пространства циркулярных электрических сетей в положительные части изотропного и Лагранжева Грассманианов. С помощью этих вложений изучаются геометрия Лагранжева Грассманиана и комбинаторика производящих функций рощ. С помощью техники положительных Грассманианов предлагаются новые эффективные методы решения задач черного ящика.

**Объектом исследования** являются циркулярные электрические сети, связанные с ними модели Лама и задаваемые ими положительные Грассманианы, производящие функции остовных рощ и деревьев.

**Предметом исследования** являются комбинаторные и геометрические свойства электрических сетей.

**Методы исследования.** Исследование основано на использовании теории Постникова положительных Грассманианов, применении теории димерных моделей Лама, моделей Постникова и свойств производящих функций остовных рощ.

**Научная новизна исследования и личный вклад.** Все выносимые на защиту конструкции, теоремы — их формулировки и доказательства, получены автором самостоятельно и являются полностью новыми, за исключением следующих случаев:

- Формулировка Теоремы 3.11 об описании множества $\overline{E}_n$ как замыкании орбиты действия группы Лама на пустую электрическую сеть была получена В.Г. Горбуновым, приведенное доказательство — автором диссертации;

- Конструкция вложения пространства циркулярных электрических сетей в Лагранжевый Грассманиан, описанная в Разделе 3.7, была предложена В.Г. Горбуновым (альтернативная конструкция, использующая технику вершинных моделей, была предложена в работе [31]). Приведенные в Разделе 3.7 доказательства теорем были получены автором диссертации. Теорема 3.17 о вложении циркулярных электрических сетей в положительную часть Лагранжева Грассманиана была сформулирована и доказана автором диссертации;

- Теоремы 5.1, 5.2 о полиномиальных формулах для отношений рощ специального вида были сформулированы и доказаны в работе [40], автору диссертации принадлежит новое доказательство этого утверждения;

- Теорема 1.22 о формулах изменения матрицы отклика при приклеивании мостов и спайков была получена в работе [14], автору диссертации принадлежит новое доказательство этого утверждения, описанное в Разделе 5.3;

- Теорема 5.8 об описании образа вложения пространства электрических сетей в положительную часть $\mathrm{Gr}(n+1, 2n)$ была получена в работе [12], автору диссертации принадлежит новое комбинаторное доказательство этого утверждения;

Отметим отдельно, что в работе [6] было сформулировано два независимых подхода к описанию лагранжевой конкордантности — комбинаторное и электрическое. Комбинаторное было получено Л. А. Гутерманом, электрическое, описанное в Разделе 3.8, было полностью самостоятельно получено автором диссертации.

**Теоретическое значение.** Диссертация носит теоретический характер. Работа является продолжением исследований в теории электрических сетей, начатых в [31], [46].

**Практическая значимость.** В работе предлагаются новые эффективные решения задач:

- Восстановления проводимостей электрических сетей по их матрице отклика (или матрице эффективных сопротивлений);
- Восстановления топологии электрических сетей по их матрице отклика (или матрице эффективных сопротивлений).

Последний алгоритм нашел хороший отклик среди специалистов, занимающихся восстановлением топологии филогенетических сетей.

## 0.1 Основные положения, выносимые на защиту:

- Построены явные вложения пространства циркуляных электрических сетей в положительную часть $\mathrm{Gr}(n-1,2n)$ с помощью их матриц отклика и эффективных сопротивлений. Метод получения этих вложений основан на использовании комбинаторики путей моделей Постникова и димеров моделей Лама, ассоциированных с циркулярными электрическими сетями.
- Показано, что каждой циркулярной электрической сети можно сопоставить точку положительной части Лагранжева Грассманиана. Описана конструкция лагранжевой конкордантности, связывающая геометрические свойства этого вложения с комбинаторикой производящих функций рощ;
- Описан новый метод решения задачи черного ящика о восстановлении проводимости циркулярных электрических сетей с помощью техники положительных Грассманианов;

- С помощью полученных вложений получены: новый вывод формулы для изменения матрицы отклика при удалении мостов и спайков; связь действия циклической группы на пространство циркулярных электрических сетей как новый вывод формул Кениона-Вильсона для отношения производящих функций рощ;

- С помощью разработанной техники продемонстрирован принципиально новый способ получения конструкции Чепури-Джорджа-Шпейера вложения пространства электрических сетей в положительную часть $\mathrm{Gr}(n+1, 2n)$.

**Степень достоверности и апробация результатов.** Результаты диссертации были представлены на следующих конференциях и семинарах:

**Конференции:**

**1.** Конференция международных математических центров мирового уровня, «Electrical and Ising networks and dimer models» (Сочи, центр «Сириус», 6 - 13 августа, 2021 год, устный секционный доклад);

**2.** XXIV Международная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых «Ломоносов-2022», «Вложение электрических сетей в положительный грассманиан» (Москва, МГУ, 10 - 22 апреля, 2022 год, устный секционный доклад);

**3.** XXIV Международная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых «Ломоносов-2022», «Вложение электрических сетей в положительный грассманиан» (Москва, МГУ, 10 - 22 апреля, 2022 год, устный секционный доклад);

**4.** Satellite International Conference of Nonlinear Dynamics and Integrability, «Electrical networks and the positive part of Lagrangian Grassmannian» (Ярославль, ЯрГУ, 27 июня - 1 июля, 2022 год, устный секционный доклад);

**5.** Международная конференция «Дни геометрии в Новосибирске-2022»,

«Вложение электрических сетей в положительную часть лагранжева грассманиана» (Новосибирск, НГУ, 29 августа - 2 сентября, 2022 год, устный секционный доклад);

**6.** XXX Международная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых «Ломоносов-2023», «О сюръективности вложения электрических сетей в положительную часть лагранжевого грассманиана» (Москва, МГУ, 10-21 апреля, 2023 год, устный секционный доклад);

**7.** Международная конференция «Динамика в Сибири-2023», «Kenyon-Wilson theorem and the embedding of the electrical networks to the positive part of Lagrangian Grassmannian» (Новосибирск, НГУ, 27 февраля - 4 марта, 2023 года, устный секционный доклад);

**8.** XI International Conference SOLITONS, COLLAPSES AND TURBULENCE: Achievements, Developments and Perspectives, «The black box problem for electrical networks and the geometry of non-negative Grassmannian» (Белград, Сербия, Сербская Академия Наук и Искусств, 1 - 5 июля, 2024 год, устный секционный доклад);

**9.** 4th International Conference on Integrable Systems and Nonlinear Dynamics, «The solution of the black box problem for electrical networks via cluster algebras» (Ярославль, ЯрГУ, 25 - 29 сентября, 2024 год, устный секционный доклад);

**10.** 5th International Conference on Integrable Systems and Nonlinear Dynamics, «Electrical networks and the totally positive symplectic matrices» (Ярославль, ЯрГУ, 7-11 октября, 2024 год, устный секционный доклад);

**11.** Международная конференция «Динамика в Сибири-2024», «The solution of the black box problem for electrical networks by cluster algebras» (Новосибирск, НГУ, 26 февраля - 2 марта, 2024 год, устный секционный доклад);

**12.** Мини-конференция, посвященная юбилею Д.В. Талалаева, «Дискрет-

ная задача Кальдерона и положительные Грассманианы» (Москва, МГУ, 11 марта, 2025 год, устный доклад);

**13.** XXXII Международня конференция студентов, аспирантов и молодых ученых «Ломоносов-2025», «Метрические свойства электрических сетей» (Москва, МГУ, 11 - 25 апреля, 2025 год, устный секционный доклад);

**14.** EUROCOMB'25: European Conference on Combinatorics, Graph Theory and Applications, «Metric Properties of Electrical Networks and The Graph Reconstruction Problems» (Будапешт, Венгрия, 25-29 августа, 2025).

**15.** 6th International Conference on Integrable Systems and Nonlinaer Dynamics, «The Calderon Problem and Metric Properties of Electrical Networks» (Ярославль, ЯрГУ, 21-26 сентября, 2025, устный секционный доклад);

**16.** Integrable Systems and Quantum Theory, «Electrical Networks and the Grove Algebra» (Санкт-Петербург, СПбГУ, 6-11 октября, 2025, устный доклад).

**Семинары:**

**1.** Учебно-научный семинар по геометрии и топологии, «Теория Постникова, положительные грассманианы и электрические сети» (МГУ), 2023 год;

**2.** Integrable systems seminars, «Electrical networks from the Calderon problem to the phylogenetic networks», 2024 год;

**3.** Семинар «Геометрия, топология и теория представлений» (МФТИ), «Электрические сети, кластерные алгебры и положительные грассманианы», 2024 год;

**4.** BIMSA-HSE Joint Seminar on Data Analytics and Topology, «Inverse problems related to electrical networks and the geometry of non-negative Grassmannians», 2025 год;

**5.** Геометрия и группы (МГУ), «Электрические сети: комбинаторика и положительные Грассманианы», 2025 год;

**6.** Семинар лаборатории алгебраической геометрии (ВШЭ), «Циркулярные электрические сети: комбинаторика, положительные Грассманианы, обратные задачи», 2025 год;

**7.** Семинар международной лаборатории кластерной геометрии (ВШЭ), «Комбинаторика и геометрия электрических сетей», 2025 год.

**Публикации:**

Основные выносимые на защиту результаты настоящего исследования изложены в 3 научных публикациях [6], [7], [38], входящих в список ВАК и в международные базы данных Scopus и Web of Science:

**1.** Bychkov B., Gorbounov V., Guterman L., Kazakov A. Symplectic geometry of electrical networks // *Journal of Geometry and Physics*. — 2025. — Т. 207. — С. 105323.

**2.** Bychkov B., Gorbounov V., Kazakov A., Talalaev D. Electrical networks, Lagrangian Grassmannians and symplectic groups // *Moscow Mathematical Journal*. — 2023. — Т. 23, № 2. — С. 133–167.

**3.** Kazakov A. Inverse problems related to electrical networks and the geometry of non-negative Grassmannians // *Physica D: Nonlinear Phenomena*. — 2025. — Т. 483. — С. 134948.

Результаты, связанные с метрическими свойствами электрических сетей (Раздел 4.3 и Раздел 5.2), опубликованы в следующих материалах [29], [30], [69]:

**1.** Gorbounov V., Kazakov A. Electrical networks and data analysis in phylogenetics // *Data Analytics and Topology*. — 2025. — Т. 1, № 1. — С. 33–45.

**2.** Gorbounov V. G., Kazakov A. A. Metric properties of electrical networks and the graph reconstruction problems // *Proceedings of the 13th European Conference on Combinatorics, Graph Theory and Applications EUROCOMB'25*. — 2025. — С. 456–460.

**3.** Казаков А. А. Метрические свойства электрических сетей // Материалы Международного молодежного научного форума «ЛОМОНОСОВ-2025» [Электронный ресурс] / отв. ред. И. А. Алешковский [и др.]. — М. : МАКС Пресс, 2025.

Теорема 3.21 и идеи ее доказательства содержаться в [68], [70]:

**1.** Казаков А. А. О сюръективности вложения электрических сетей в положительную часть лагранжевого грассманиана // Материалы Международного молодежного научного форума «ЛОМОНОСОВ-2023» [Электронный ресурс] / отв. ред. И. А. Алешковский [и др.]. — М. : МАКС Пресс, 2023.

**2.** Казаков А. А. Кластерные алгебры миноров матриц отклика электрических сетей // Материалы докладов V Конференции математических центров России [Электронный ресурс]. — Красноярск : ИВМ СО РАН, 2025. — С. 25–27.

**Благодарности** Автор сердечно благодарит В.Г. Горбунова, Л.А. Гутермана, С. Константину-Ризоса, Д.В. Талалаева за всестороннюю поддержку и исключительно полезные обсуждения. Отдельно автор выражает признательность Л.А. Гутерману за неоценимую помощь при работе над иллюстрациями.

Диссертационная работа выполнена в Региональном научно-образовательном математическом центре Ярославского государственного университета им. П.Г. Демидова при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (Соглашение о предоставлении субсидии из федерального бюджета № 075-02-2025-1636). Основные результаты работы были получены в рамках проекта Российского научного фонда (проект № 20-71-10110).

## 0.2 Структура диссертации

Диссертация состоит из введения, пяти глав и списка литературы. Во **введении** формулируются цели работы, кратко излагаются основные результаты, а также

освещается место этих результатов в современной теории электрических сетей и смежных областях.

**Первая глава** посвящена изложению классической теории циркулярных электрических сетей. Даются определения циркулярных электрических сетей, их матриц отклика и эффективных сопротивлений; описываются основные операции над сетями — электрические преобразования, операции приклеивания мостов и спайков, взятие двойственной сети, удаления и стягивания ребер, приводящих к определению кактусных электрических сетей. Помимо этого приводится результат о полной классификации матриц отклика, комбинаторная интерпретация миноров матриц отклика через производящие функции путей и остовных рощ, приводящих к определению минимальных и достаточно связных сетей. Формулируются задачи черного ящика: задача о восстановлении проводимостей минимальных сетей по их матрице отклика (эффективных сопротивлений); задача о восстановлении топологии минимальных сетей по их матрице отклика (эффективных сопротивлений). Обсуждается важность этих задач в различных прикладных областях.

**Вторая глава** посвящена изложению основ теории Постникова положительных Грассманианов, основной результат которой состоит в наличии параметризации точек положительной части $\mathrm{Gr}(k,n)$ с помощью трех эквивалентных моделей: димерных моделей Лама, моделей потоков и моделей Постникова. Приводятся их полные определения, а также необходимые в дальнейшем наброски доказательств эквивалентности описаний теории Постникова с помощью этих трех типов моделей. Формулируются следующие задачи черного ящика в теории Постникова: задача о восстановлении весов минимальных моделей Лама по координатам Плюккера точки Грассманиана, задающих эти модели; задача о восстановлении топологии минимальных моделей Лама по координатам Плюкке-

ра точек Грассманиана, задающих эти модели. Подробно приводятся алгоритмы решения этих задач, основанных на технике обобщенного камерного анзатца и подсчета перестановки страд соответственно.

**Третья глава** посвящена получению явных вложений циркулярных электрических сетей с помощью их матриц отклика и эффективных сопротивлений в положительную часть изотропного и Лагранжева Грассманианов. Доказывается, что классические операции над электрическими сетями: приклеивания мостов и спайков, взятие двойственной сети, удаление и стягивание ребер — могут быть интерпретированы как действие положительной части группы Лама на положительную часть изотропного Грассманиана, действия циклического сдвига на положительную часть $\mathrm{Gr}(n-1,2n)$ и взятия замыкания соответственно. Вводится понятие лагранжевой конкордантности, с помощью которого описывается образ вложения электрических сетей в положительную часть Лагранжева Грассманиана. Для полноты изложения приводится результат о сюръективности вложения достаточно связных электрических сетей в положительную часть Лагранжева Грассманиана, инвариантного относительно действия сдвига.

**Четвертая глава** посвящена изложению новых алгоритмов решений задач черного ящика. Задача о восстановлении проводимостей решается с помощью техники обобщенного камерного анзатца, примененной к явным вложениям, полученным ранее. Доказывается, что проводимости сетей могут быть восстановлены с помощью весов минимальных рощ. Для замкнутости изложения показывается, что задача о восстановлении топологии сети решается с помощью вычисления перестановки страд по точке Грассманиана, заданной этой сетью.

**Пятая глава** посвящена изложению применений результатов, полученных ранее. Доказывается теорема Кениона-Вильсона, являющаяся далеким обобщением теоремы Кирхгофа о деревьях. С помощью техники, разработанной во

второй главе, комбинаторно выводится вложение Чепури-Джорджа-Шпейера. Выводятся формулы изменения матриц отклика при приклеивании мостов и спайков. Для полноты изложения также приводится полное описание Калмансоновых электрических метрик.

# Глава 1

# Предварительные сведения: теория электрических сетей

**Определение 1.1.**

*Электрической сетью* $\mathcal{E}(G, \omega)$ *мы будем называть граф* $G(V, E)$ *вместе с весами на ребрах — функцией проводимости ребер* $\omega : E(G) \to \mathbb{R}_{>0}$, *такими, что:*

- *Все вершины* $V$ *разделены на множества внутренних* $V_I$ *и граничных вершин* $V_B$;
- *Граничные вершины нумеруются числами от* $1$ *до* $|V_B| := n$, *внутренние вершины нумеруются числами от* $n+1$ *до* $|V|$;
- *Вес* $\omega(v_i v_j) = \omega_{ij}$ *ребра* $v_i v_j$ *означает его проводимость.*

Среди всех электрических сетей мы выделим множество **циркулярных** сетей, которые будут основным объектом нашего изучения.

**Определение 1.2.**

*Циркулярной электрической сетью* $\mathcal{E}(G, \omega)$ *мы будем называть такую сеть, что:*

- *Граф* $G$ *является планарным и вложен в диск* $D$;
- *Все граничные вершины* $V_B$ *лежат на граничной окружности* $\partial D$;

• *Граничные вершины занумерованы по часовой стрелке.*

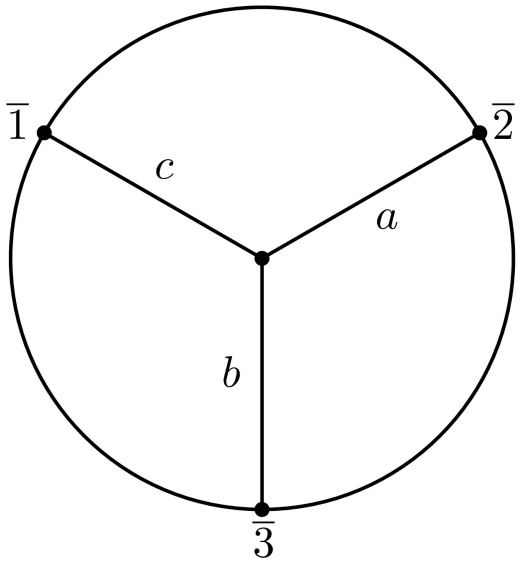



Рис. 1.1: Электрическая сеть звезда

**Замечание 1.1.** *В дальнейшем мы иногда будем дополнительно выделять номера граничных точек, как показано на Рисунке 1.1.*

Рассмотрим электрическую сеть $\mathcal{E}(G,\omega)$ и приложим напряжения $\mathbf{U}: V_B \to \mathbb{R}$ к ее граничным вершинам $V_B$. Тогда, в силу принципа максимума, эти граничные напряжения $\mathbf{U}$ индуцируют единственное гармоническое продолжение $U: V \to \mathbb{R}$, которое можно найти с помощью законов Ома и Кирхгофа:

$$\sum_{j\in V} \omega_{ij}\big(U(i)-U(j)\big)=0,\ \forall i \in V_I. \tag{1.1}$$

Эти гармонические продолжения связаны со многими комбинаторными объектами, описание которых мы начнем с определения матриц отклика и описания их свойств.

## 1.1 Матрица отклика

С каждым набором граничных напряжений $\mathbf{U}$ свяжем протекающие через вершины $V_B$ **граничные токи** $\mathbf{I} = \{I_1, \ldots, I_n\}$, определяемые по формуле:

$$I_k := \sum_{j \in V} \omega_{ij}\big(U(k) - U(j)\big),\ k \in \{1, \ldots, n\}.$$

Первый фундаментальный результат теории электрических сетей заключается в том, что граничные напряжения и токи связаны между собой линейно.

**Теорема 1.1.** [14]

*Рассмотрим электрическую сеть $\mathcal{E}(G, \omega)$ с множеством граничных вершин $V_B$. Тогда граничные токи $\boldsymbol{I}$, индуцированные граничными напряжениями $\boldsymbol{U}$, могут быть вычислены с помощью* ***матрицы отклика*** $M_R(\mathcal{E}) \in Mat_{n\times n}$ *сети* $\mathcal{E}$ :

$$\boldsymbol{I} = M_R(\mathcal{E})\,\boldsymbol{U}.$$

**Определение 1.3.**

*Для произвольной матрицы $T$ определим:*

- $T[I; J]$ — *матрица, состоящая из элементов матрицы $T$, стоящих на пересечении наборов строк $I$ и столбцов $J$. Иногда для той же матрицы мы будем использовать обозначение $T_I^J$.*
- $T(I; J)$ — *матрица, полученная из $T$ вычеркиванием наборов строк $I$ и столбцов $J$.*

**Определение 1.4.**

*Взвешенной матрицей Кирхгофа $K$ графа сети $\mathcal{E}(G, \omega)$ мы будем называть*

*следующую матрицу:*

$$K = (K_{ij}) = \begin{cases} -\omega_{ij}, \text{ если } i \neq j; \\ \sum\limits_{k} \omega_{ik}, \text{ если } i = j. \end{cases}$$

**Теорема 1.2.** [14]

*Взвешенная матрица Кирхгофа сети* $\mathcal{E}(G, \omega)$ *имеет блочный вид:*

$$K = \begin{pmatrix} A & B \\ B^t & D \end{pmatrix},$$

*где* $K[V_I, V_I] = D$ *— подматрица* $K$*, отвечающая номерам внутренних вершин* $V_I$*.*

*Матрица отклика* $M_R(\mathcal{E})$ *сети* $\mathcal{E}$ *может быть вычислена как дополнение по Шуру матрицы* $D$ *в матрице* $K$ *:*

$$M_R(\mathcal{E}) = K/K[V_I; V_I] = A - BD^{-1}B^t.$$

Из Теоремы 1.2 и свойств дополнения по Шуру следует, что:

**Теорема 1.3.** [14]

*Матрица отклика* $M_R(\mathcal{E})$ *сети е:*

- *Симметрична:* $x_{ij} = x_{ji}$;
- *Сумма всех матричных элементов в каждой строке (столбце) равна* 0;
- *Для* $i \neq j$, $x_{ij} \leq 0$.

**Теорема 1.4.** [14]

*Матрица* $M$ *является матрицей отклика некоторой электрической сети* $\mathcal{E}$ *тогда и только тогда, когда* $M$ *удовлетворяет всем свойствам Теоремы 1.3.*

## 1.2 Циркулярные электрические сети

В этом разделе мы сосредоточимся на изложении теории циркулярных электрических сетей.

Будем называть **электрическими преобразованиями** следующие 5 локальных преобразований, изображенные на Рисунке 1.2.

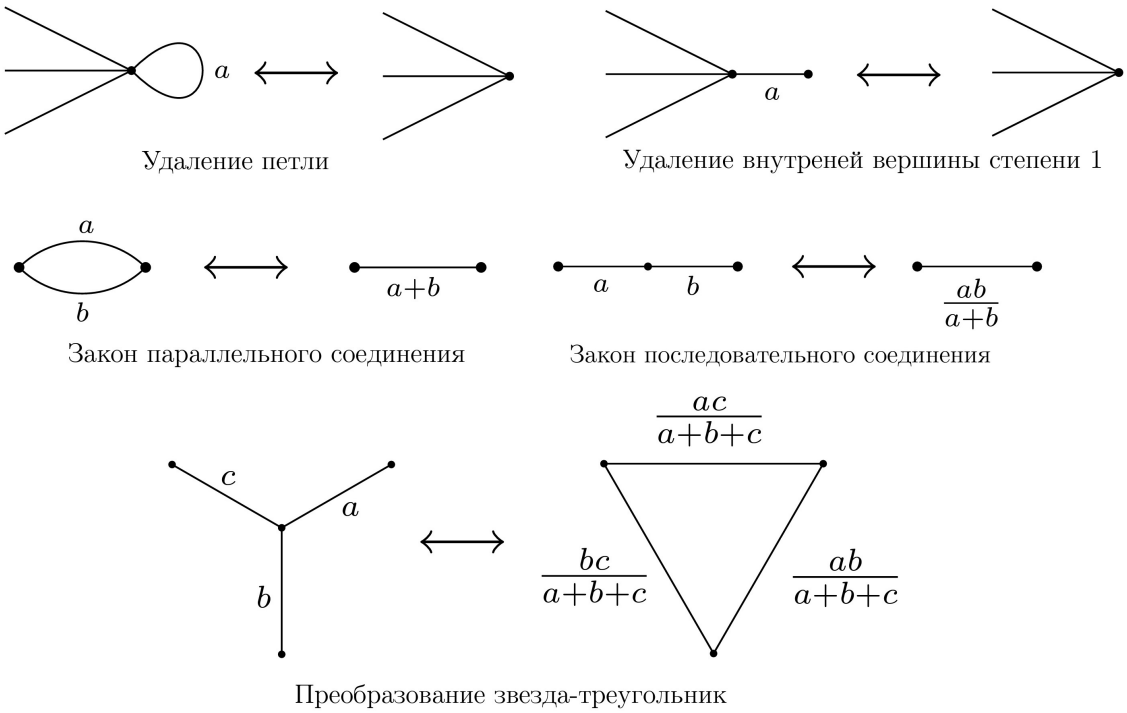



Рис. 1.2: Электрические преобразования

Через $E_n$ мы будем обозначать множество классов эквивалентности циркулярных электрических сетей с $n$ граничными вершинами, где эквивалентными считаются сети, полученные друг из друга применением электрических преобразований. Эквивалентные сети с точки зрения их электрических свойств неразличимы.

**Теорема 1.5.** [14], [41]

*Электрические преобразования сохраняют матрицу отклика. Верно и обратное — любые две циркулярные электрические сети с одинаковой матрицей отклика*

*эквивалентны.*

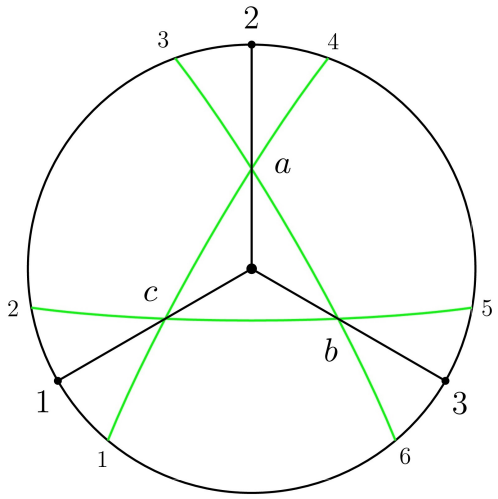



Рис. 1.3: Электрическая сеть звезда и ее медианный граф, задающий перестановку $\tau(\mathcal{E}) = (14)(25)(36)$

**Определение 1.5.**

***Медианный граф*** *графа $G$ циркулярной сети $\mathcal{E}(G, \omega) \in E_n$ — это граф $G_M$, внутренние вершины которого расположены в серединах ребер $G$ и две внутренние вершины соединены ребром, если ребра исходного графа $G$, на которых лежат данные вершины, являются смежными. Граничные вершины $G_M$ определяются как пересечение продолжений ребер медианного графа с граничной окружностью.*

*Так как внутренние вершины медианного графа 4-х валентны, мы можем определить* ***страды*** *медианного графа как пути, проходящие через каждую вершину прямо. Страды естественно задают перестановку $\tau(\mathcal{E})$ на множестве точек $\{1, \ldots, 2n\}$.*

**Определение 1.6.**

*Циркулярная электрическая сеть называется* ***минимальной****, если страды ее медианного графа не имеют самопересечений; любые две страды пересекаются*

*не более чем в одной точке; и медианный граф не имеет петель и линз, см. Рисунок 1.3 и Рисунок 1.4.*

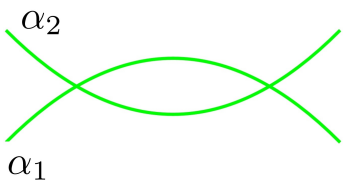



Рис. 1.4: Линза, образованная страдами $\alpha_1$ и $\alpha_2$

**Определение 1.7.**

*Пусть* $P = \{p_1, \ldots, p_k\}$, $Q = \{q_1, \ldots, q_k\}$ *два непересекающихся набора индексов одинакового размера, тогда пара* $(P, Q)$ *называется* ***циркулярной****, если все точки* $\{p_1, \ldots, p_k, q_1, \ldots, q_k\}$ *лежат на дуге граничной окружности и* $p_1 < p_2 < \cdots < p_k < q_k < \cdots < q_2 < q_1$ *в смысле линейного порядка, индуцированного углами дуг, отсчитываемыми против часовой стрелки от* $p_1$*. Соответствующий минор* $\det\big(M[P;Q]\big)$ *матрицы отклика* $M_R(\mathcal{E})$ *называется циркулярным.*

Следующая теорема полностью характеризует матрицы отклика циркулярных электрических сетей.

**Теорема 1.6.** [14], [41]

*Матрица* $M \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R})$ *является матрицей отклика некоторой циркулярной электрической сети из* $E_n$ *тогда и только тогда, когда*

- $M$ *симметрична;*
- *Сумма элементов в любой строке* $M$ *равна* $0$*;*
- $M$ ***циркулярно неотрицательная*** *матрица, то есть для любой циркулярной пары* $(P;Q)$, $|P| = |Q| = k$ *верно, что*

$$(-1)^k \det M[P;Q] \geq 0.$$

**Пример 1.1.** *Рассмотрим матрицу*

$$M = \begin{pmatrix} 131 & -66 & -12 & -53 \\ -66 & 76 & -8 & -2 \\ -12 & -8 & 24 & -4 \\ -53 & -2 & -4 & 59 \end{pmatrix}$$

*и циркулярные пары* $(2,3;1,4)$ *и* $(1,2;4,3)$, *тогда мы имеем следующие положительные циркулярные миноры:*

$$\det M[2,3;1,4] = \begin{vmatrix} -66 & -2 \\ -12 & -4 \end{vmatrix}, \ \det M[1,2;4,3] = \begin{vmatrix} -53 & -12 \\ -2 & -8 \end{vmatrix}.$$

Среди всех циркулярных электрических сетей естественно выделить подмножество сетей «общего положения»: циркулярную сеть мы будем называть **достаточно связной**, если все циркулярные миноры ее матрицы отклика строго циркулярно положительны. Условие достаточной связности легко интерпретировать геометрически.

**Определение 1.8.**

*Пусть* $P = \{p_1, \ldots, p_k\}$, $Q = \{q_1, \ldots, q_k\}$ — *два набора граничных вершин циркулярной электрической сети* $\mathcal{E}(G, \omega) \in E_n$. *Будем говорить, что* $P$ *и* $Q$ ***связны***, *если существует такая перестановка* $\tau$ *индексов* $1, \ldots, k$ *и набор непересекающихся простых путей* $\alpha_i$, *идущих из* $p_i$ *в* $q_{\tau(i)}$ *и не проходящих через другие граничные вершины.*

**Теорема 1.7.** [14], [41]

*Циркулярная пара* $(P;Q)$ *связна тогда и только тогда, когда соответствующий циркулярный минор* $\det\big(M_R(\mathcal{E})[P;Q]\big)$ *матрицы отклика сети* $\mathcal{E}(G,\omega)$ *строго циркулярно положителен.*

Таким образом, электрическая сеть является достаточно связной, если

любая циркулярная пара $(P;Q) = (p_1, \ldots, p_k; q_1, \ldots, q_k)$, составленная из граничных вершин, связна.

**Определение 1.9.**

*Минимальная достаточно связная циркулярная электрическая сеть называется* ***критической****.*

**Теорема 1.8.** [14], [41]

- *Любая циркулярная электрическая сеть эквивалентна минимальной.*
- *Любая минимальная сеть $\mathcal{E}(\Gamma, \omega) \in E_n$ имеет не более чем $\frac{n(n-1)}{2}$ ребер.*
- *Любая достаточно связная циркулярная электрическая сеть эквивалентна некоторой критической сети.*
- *Если две минимальные электрические сети $e_1, e_2 \in E_n$ эквивалентны, то $e_1$ можно перевести в $e_2$, используя только преобразования звезда-треугольник. Таким образом, любые две минимальные электрические сети имеют одинаковое количество ребер.*

На практике особенно важна следующая теорема, позволяющая сводить доказательства многих утверждения к случаю критических электрических сетей.

**Теорема 1.9.** [41]

*Любая циркулярная электрическая сеть эквивалентна некоторой сети, получаемой из любой данной критической сети удалением и стягиванием некоторых ее ребер.*

Естественно также рассматривать циркулярные электрические сети с нулевыми и бесконечными проводимостями. В соответствии с законом Кирхгофа ребро с нулевой проводимостью можно удалить, а ребро с бесконечной проводимостью — стянуть. Циркулярную электрическую сеть $\mathcal{E}(G, \omega) \in E_n$ с

расширенной функцией проводимости $\omega : E(G) \to \mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{+\infty\}$ мы будем называть **кактусной**. Удобно также думать про каждую кактусную электрическую сеть с $n$ граничными вершинами, как про совокупность обычных циркулярных электрических сетей (с количеством граничных вершин возможно меньшим $n$), склеенных между собой по некоторым их граничным вершинам, см. Рисунок 1.5.

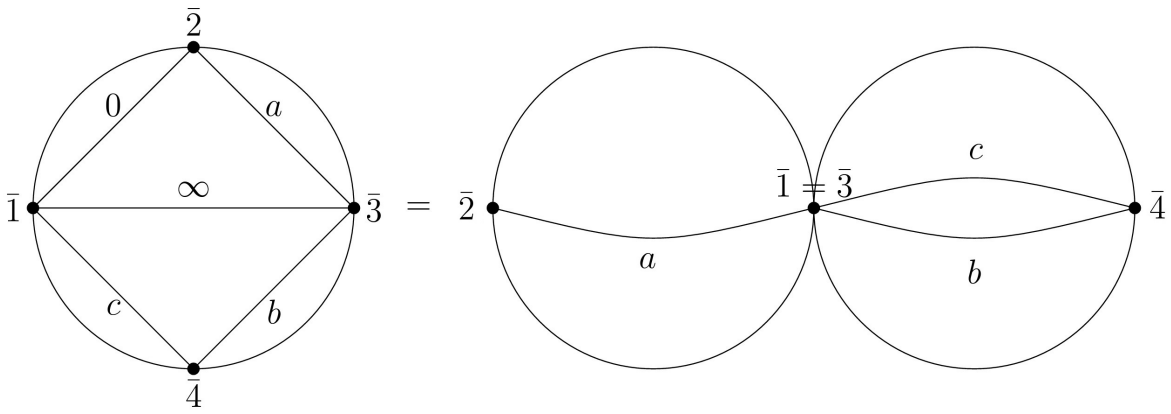



Рис. 1.5: Кактусная электрическая сеть

Множество классов эквивалентности всех кактусных электрических сетей с $n$ граничными вершинами по модулю электрических преобразований мы будем обозначать через $\overline{E}_n$. В силу сказанного выше кактусные электрические сети наследуют все свойства обычных электрических сетей. В частности верен следующий аналог Теоремы 1.9.

**Теорема 1.10.** [46]

*Любая кактусная электрическая сеть эквивалентна некоторой сети, получаемой из любой данной критической сети удалением и стягиванием некоторых ее ребер. Таким образом, множество кактусных электрических сетей $\overline{E}_n$ является компактификацией $E_n$.*

## 1.3 Комбинаторика путей, деревьев и рощ на графах

Этот раздел будет посвящен изложению некоторых необходимых в дальнейшем результатов, обобщающих классическую теорему Кирхгофа о деревьях:

**Теорема 1.11.** [43], [64]

*Количество остовных деревьев графа $G$ может быть вычислено как произвольное алгебраическое дополнение невзвешенной (вес каждого ребра $G$ равен 1) матрицы Кирхгофа $K(G)$.*

Оказывается, что и остальные миноры матрицы Кирхгофа, а также матрицы отклика могут быть выражены через производящие функции остовных рощ, которые понадобятся нам в дальнейшем.

**Определение 1.10.**

*Остовной рощей $F$ на графе $G$ сети $\mathcal{E}(G,\omega)$ назовем ациклический, не обязательно связный подграф $G$, такой, что $V(F) = V(G)$. Весом рощи $wt(F)$ будем называть произведение весов всех ее ребер.*

**Теорема 1.12.** [64]

*Рассмотрим произвольную электрическую сеть $\mathcal{E}(G,\omega)$ и два подмножества ее вершин $R = \{r_1 < r_2 < \cdots < r_k\}$ и $S = \{s_1 < s_2 < \cdots < s_k\}$ одинаковой мощности $|R| = |S| = k$, тогда для минора $\det\big(K(R;S)\big)$ верна следующая формула:*

$$\det\big(K(R;S)\big) = \prod_{i}^{k}(-1)^{r_i}\prod_{i}^{k}(-1)^{s_i}\sum_{F}\epsilon(F,R,S)wt(F),$$

*где каждая остовная роща $F$ содержит ровно $k$ компонент связности, каждая из которых содержит ровно одну точку $r_i \in R$ и ровно одну точку из $s_{i'} \in Q$ и $\epsilon(F,R,S)$ — знак перестановки $\sigma \in S_k : \sigma(i) = i'$, определяемой рощей $F$.*

В силу Теоремы 1.2 и свойств дополнения по Шуру мы можем придать минорам матрицы отклика следующий комбинаторный смысл.

**Теорема 1.13.** [14]

*Рассмотрим произвольную электрическую сеть $\mathcal{E}(G,\omega)$ на связном графе $G$ с множеством внутренних вершин $V_I$. Пусть $P=\{p_1,\dots,p_k\}$, $Q=\{q_1,\dots,q_k\}$ — два набора граничных вершин сети $\mathcal{E}$. Обозначим за $C(P,Q)$ — множество всех наборов $\alpha=(\alpha_1,\dots,\alpha_k)$, состоящих из непересекающихся путей, связывающих в смысле Определения 1.8 вершины $P$ с $Q$. Тогда выполняется следующая формула:*

$$\det\big(M[P;Q]\big)=\frac{(-1)^k\sum\limits_{\alpha\in C(P,Q)}\operatorname{sgn}\big(\tau_\alpha\big)\det\big(K[J_\alpha;J_\alpha]\big)\prod\limits_{\alpha_i\in\alpha}wt(\alpha_i)}{\det\big(K[V_I;V_I]\big)},$$

*где $wt(\alpha_i)$ — произведение весов всех ребер пути $\alpha_i$, и $\det\big(K[J_\alpha;J_\alpha]\big)$ — минор $K$, отвечающий номерам тех внутренних вершин $J_\alpha$, которые не являются вершинами ни одного из путей $\alpha_i\in\alpha$.*

*В частности, если $C(P,Q)=\emptyset$, то $\det\big(M[P;Q]\big)=0$.*

Теорема 1.13 играет ключевую роль в теории циркулярных электрических сетей. В частности, из нее следует Теорема 1.7 и последнее условие Теоремы 1.6, см. [14]. Также, используя Теорему 1.13, можно получить выражения для миноров матрицы отклика через производящие функции остовных рощ.

**Теорема 1.14.** [41]

*Пусть $O=\{o_1,\dots,o_l\}$, $R=\{r_1,\dots,r_k\}$, $S=\{s_1,\dots,s_k\}$, $T=\{t_1,\dots,t_m\}$ — разбиение на четыре множества (некоторые из которых могут быть пустыми) граничных вершин произвольной электрической сети $\mathcal{E}(G,\omega)$, причем*

$|R| = |S| = k$. *Тогда верна следующая формула:*

$$(-1)^{|S\cup T|} \det M_{S\cup T}^{R\cup T} = (-1)^{|T|} \sum_{\rho} (-1)^{\rho} \frac{L^t[{}^{s_{\rho(1)}}_{r_1}| \cdots |{}^{s_{\rho(k)}}_{r_k}|o_1| \cdots |o_l]}{L_{unc}}, \qquad (1.2)$$

*где* $\det\big(M_R(\mathcal{E})[S\cup T; R\cup T]\big) := \det M_{S\cup T}^{R\cup T}$*; и* $L_{unc}$ *— сумма весов всех остовных рощ, состоящих из* $n$ *компонент связности, таких, что каждая компонента связности содержит ровно одну граничную точку; и* $L^t[{}^{s_{\rho(1)}}_{r_1}| \cdots |{}^{s_{\rho(k)}}_{r_k}|o_1| \cdots |o_l]$ *— сумма весов всех остовных рощ на графе* $G_T$*, получаемый из* $G$ *объявлением всех вершин из* $T$ *внутренними, таких, что:*

- *Каждая роща имеет* $k + l$ *компонент связности;*
- *В каждой компоненте связности содержится либо ровно одна точка* $o_i$*, либо ровно две вершины* $r_i, s_{\rho(i)}$*.*

Используя Теорему 1.14, можно получить компактную формулу для элементов матриц отклика циркулярных сетей.

**Теорема 1.15.** [40]
*Рассмотрим циркулярную электрическую сеть* $\mathcal{E}(G, \omega) \in E_n$*, тогда для внедиагональных элементов ее матрицы отклика* $M$ *выполнено*

$$x_{ij} = -\frac{L_{ij}}{L_{unc}},$$

*где* $L_{unc}$ *и* $L_{ij}$ *— суммы весов рощ из Определения 3.4.*

Теорема 1.15 на самом деле является проявлением намного более общего факта, который мы подробно обсудим в Разделе 5.1.

## 1.4 Матрица эффективных сопротивлений

В этом разделе мы опишем еще одну характеристику электрических сетей — матрицу эффективных сопротивлений. Помимо естественной физической ин-

терпретации, эффективные сопротивления важны тем, что задают метрику на множестве вершин электрической сети (см. [44]), к свойствам которой мы вернемся в Разделе 1.6.

**Определение 1.11.**

*Рассмотрим связную электрическую сеть $\mathcal{E}(G,\omega)$. Выберем две ее вершины $n$ и $m$ и построим новую электрическую сеть $\mathcal{E}_{nm}(G,\omega)$, полученную из $\mathcal{E}(G,\omega)$ объявлением вершин $n$ и $m$ — граничными, а остальных — внутренними.*

*Применим к граничным вершинам $\mathcal{E}_{nm}(G,\omega)$ такие граничные напряжения $\boldsymbol{U}=(U_n,U_m)$, что они индуцируют граничные токи, равные $\boldsymbol{I}=(1,-1)$. Тогда **эффективное сопротивление** между вершинами $n$ и $m$ определяется следующим образом:*

$$R_{nm}=|U_n-U_m|.$$

*Учитывая, что* $\operatorname{rank}\big(M_R(\mathcal{E}_{nm})\big)=1$*, мы получаем, что $R_{nm}$ существует и не зависит от выбора граничных напряжений $\boldsymbol{U}$, индуцирующих единичные граничные токи $\boldsymbol{I}$. Используя те же рассуждения, мы также получаем, что $R_{nm}=R_{mn}$.*

Эффективные сопротивления между граничными вершинами сети могут быть вычислены с помощью ее матрицы отклика, путем нахождения псевдообратной.

**Лемма 1.1.** [40]

*Рассмотрим связную электрическую сеть $\mathcal{E}(G,\omega)$ с $n$ граничными вершинами. Приложим к ним такой набор граничных потенциалов $\boldsymbol{U}=(U_1,\dots,U_n)$, чтобы через две граничные вершины $i$ и $j$ протекал единичный ток $I$. Другими словами, найдем такие потенциалы $U$, чтобы*

$$M_R(\mathcal{E})U=-e_i+e_j, \tag{1.3}$$

*где* $e_k,\ k \in \{1, \ldots, n\}$ *— стандартный базис* $\mathbb{R}^n$.

*Тогда эффективное сопротивление* $R_{ij}$ *между вершинами* $i$ *и* $j$ *равно разности потенциалов* $|U_i - U_j|$*, приложенных к вершинам* $i$ *и* $j$.

*Доказательство.* Действительно, если граничные напряжения $\mathbf{U}$ удовлетворяют (1.3), то мы можем считать, что все вершины, кроме $i$ и $j$, являются внутренними. Поэтому $|U_i - U_j|$ задает ту же самую величину, что и в Определении 1.11. □

Матрицу $R_n(\mathcal{E}) = (R_{ij})$ мы будем называть **матрицей эффективных сопротивлений**, где $R_{ii}$ полагаются равными нулю. Для матричных элементов $R_{ij}$ имеется аналог Теоремы 1.15.

Как мы скоро объясним в Разделе 1.5, матрица отклика — это дискретный аналог оператора из задачи с граничными данными Дирихле в задачу с граничными данными Неймана. Неформально говоря, матрицу эффективных сопротивлений можно понимать как дискретный аналог оператора из задачи с граничными данными Неймана в задачу с граничными данными Дирихле, что раскрывают следующие две теоремы.

**Теорема 1.16.** [40]

*Пусть связная циркулярная электрическая сеть* $\mathcal{E}(G, \omega) \in E_n$. *Обозначим через* $M'_R(\mathcal{E})$ *матрицу, полученную из* $M_R(\mathcal{E})$ *удалением последней строки и последнего столбца, тогда справедливо следующее:*

- $M'_R(\mathcal{E})$ *— обратима;*
- *Для ее матричных элементов верна формула*

$$M'_R(\mathcal{E})^{-1}_{ij} = \begin{cases} R_{in}, \text{ если } i = j \\ \frac{1}{2}(R_{in} + R_{jn} - R_{ij}), \text{ если } i \neq j. \end{cases}$$

**Определение 1.12.**

*С каждой сетью $\mathcal{E}(G,\omega) \in E_n$ свяжем двойственную к ней сеть — $\mathcal{E}^*(G^*,\omega^*) \in E_n$ по следующему правилу (см. Рисунок 1.6):*

- *Граф $G^*$ — двойственный к $G$;*
- *Для каждых двух соответствующих ребер $f \in E(G)$ и $f^* \in E(G^*)$ их проводимости связаны по формуле $\omega(f)\omega^*(f^*) = 1$.*

*Нумерация граничных вершин сети $\mathcal{E}^*(G^*,\omega^*) \in E_n$ естественно определяется тем, что первая граничная вершина $\mathcal{E}^*$ лежит между первой и второй граничными вершинами $\mathcal{E}$.*

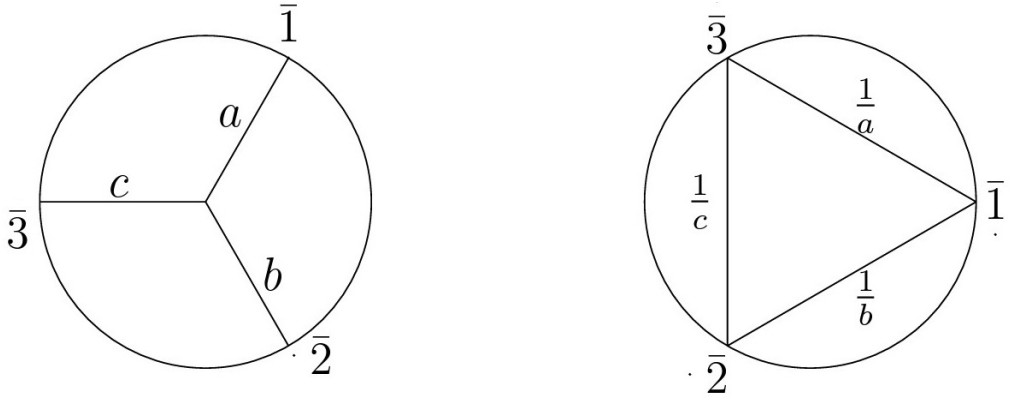



Рис. 1.6: Сеть звезда и двойственная сеть треугольник

**Замечание 1.2.**

*Последнее определение можно естественным образом продолжить и на кактусные сети. Действительно, для этого достаточно положить, что если $\omega(f) = 0$, то $\omega^*(f^*) = \infty$, и наоборот. Это соглашение имеет следующую комбинаторную интерпретацию: удаление ребра $f$ графа $G$ — это стягивание соответствующего ребра $f^*$ графа $G^*$, и наоборот. Другими словами, если кактусную сеть $\mathcal{E}$ можно получить из сети $\mathcal{E}'$, стремя проводимость реб-*

*ра $f$, к нулю (или бесконечности), то $\mathcal{E}^*$ можно получить из $(\mathcal{E}')^*$, стремя проводимость соответствующего ребра $f^*$.*

**Теорема 1.17.** [40]

*Рассмотрим связную сеть $\mathcal{E}(G,\omega) \in E_n$ и двойственную к ней сеть $\mathcal{E}^*(G^*,\omega^*) \in E_n$, тогда матрицы $R(\mathcal{E})$ и $M_R(\mathcal{E}^*) = (x^*_{ij})$ связаны между собой следующим образом:*

$$x^*_{ij} = -\frac{1}{2}(R_{i,j} + R_{i+1,j+1} - R_{i,j+1} - R_{i+1,j}).$$

Для полноты изложения, отметим, что для вычисления эффективных сопротивлений имеется следующая комбинаторная формула Кирхгофа.

**Теорема 1.18.** [43], [64]

*Рассмотрим связную электрическую сеть $\mathcal{E}(G,\omega)$, тогда для эффективного сопротивления $R_{n,m}$ верна следующая формула:*

$$R_{nm} = \frac{T(G/nm)}{T(G)},$$

*где $T(G)$ — производящая функция остовных деревьев на графе $G$, а $T(G/nm)$ — производящая функция остовных рощ на графе $G$, каждая из которых состоит ровно из двух компонент и содержит ровно одну вершину из $n$ и $m$.*

## 1.5 Задача черного ящика и электроимпедансная томография

Одной из основных проблем теории электрических сетей, определившей в целом все ее развитие, является **задача черного ящика**.

**Задача 1.**

*Рассмотрим циркулярную электрическую сеть $\mathcal{E}(G,\omega)$ на известном графе $G$. По известной матрице отклика $M_R(\mathcal{E})$ (матрицу эффективных сопротивлений $R(\mathcal{E})$) сети $\mathcal{E}$ требуется найти проводимости $\omega$.*

**Теорема 1.19.** [14]

*Если циркулярная электрическая сеть $\mathcal{E}(G,\omega)$ минимальна, то решение задачи черного ящика существует и единственно.*

Отметим, что все доказательства Теоремы 1.19 конструктивны и представляют собой практические алгоритмы решения Задачи 1. Выделим несколько основных из них:

- Рекурсивный алгоритм разбора сети в композицию мостов и спайков [14], [47];
- Решение Задачи 1 для специальных классов критических сетей [14], [42];
- Сведение Задачи 1 к задаче черного ящика в теории Постникова, см. Главу 4.

Задача черного ящика занимает центральное место в теории электрических сетей в связи с ее исключительной практической важностью. А именно, одним из приложений отыскания быстрых и численно устойчивых алгоритмов решений Задачи 1 является способ нахождения приближенных решений **проблемы Кальдерона** [62], [63], частным важным случаем которой является обратная задача электроимпедансной томографии в круге [1].

**Задача 2.** [4], [63]

*В каждой точке $x$ непрерывно проводящей среды в замкнутом круге $D$ имеются положительная ограниченная функция проводимости $\sigma(x) : D \to \mathbb{R}_{>0}$ и электрический потенциал $u(x) : D \to \mathbb{R}$, которые связаны между собой следующим эллиптическим дифференциальным уравнением второго порядка:*

$$div(\sigma(x)\nabla u(x)) = 0,\ \forall x \in int\ D, \tag{1.4}$$

*с граничными данными Дирихле — известным потенциалом $V(x) : \partial D \to \mathbb{R}$, приложенным к границе $D$:*

$$u(x)_{|\partial D} = V(x),\ \forall x \in \partial D.$$

*Потенциал $V(x)$ определяет граничные данные Неймана — протекающие через границу диска $D$ токи $I_V(x) : \partial D \to \mathbb{R}$, индуцированные $V(x)$:*

$$I_V(x) = (n, \sigma(x)\nabla u(x)_{|\partial D}),$$

*где $n$ — единичный вектор внешней нормали к $\partial D$, и $(\cdot, \cdot)$ — стандартное скалярное произведение.*

*Пусть для каждого граничного потенциала $V(x)$ известны индуцированные им граничные токи $I_V(x)$. Формально это значит, что задан оператор $\Lambda^{DtN}$, переводящий граничные данные Дирихле в граничные данные Неймана:*

$$\Lambda^{DtN} V(x) = I_V(x).$$

**Задача 3.**

*Обратная задача электроимпедансной томографии в круге $D$ состоит в том, чтобы, зная оператор $\Lambda^{DtN}$, восстановить функцию проводимости $\sigma(x)$.*

Уравнение (1.4) является непрерывным аналогом закона Кирхгофа, а оператор $\Lambda^{DtN}$ можно интерпретировать как непрерывную версию матрицы отклика электрической сети. Поэтому численное решение Задачи 2 может быть получено сведением исходной непрерывной задачи к Задаче 1. Мы схематически опишем такой подход к Задаче 2, следуя [4]:

- На граничной окружности $D$ отмечают $n$ точек, которые становятся граничными точками некоторой критической сети $\mathcal{E}$, вид которой выбирается специальным образом;
- По оператору $\Lambda^{DtN}$ строится матрица отклика $M_R(\mathcal{E})$ сети $\mathcal{E}$;
- С помощью рекурсивного алгоритма из Раздела 1.7 решается Задача 1 для $\mathcal{E}$;
- По проводимостям сети $\mathcal{E}$ приближенно находится функция $\sigma(x)$.

## 1.6 Топологическая задача черного ящика и теория филогенетических сетей

Наряду с Задачей 1 важное место в теории электрических сетей занимает **топологическая задача черного ящика**.

**Задача 4.**

*Рассмотрим минимальную циркулярную сеть $\mathcal{E}(G,\omega) \in E_n$ на неизвестном графе $G$. По известной матрице отклика (или матрицу эффективных сопротивлений) сети $\mathcal{E}$ требуется найти с точностью до электрических преобразований граф $G$ сети $\mathcal{E}$.*

**Теорема 1.20.** [14], [41]

*С точностью до преобразований звезда-треугольник топология каждой минимальной сети однозначно задается ее перестановкой страд $\tau$.*

Все доказательства Теоремы 1.19 так же, как и в случае задачи черного ящика, представляют собой практические алгоритмы решения Задачи 4, состоящие в вычислении перестановки страд, см. [14] и Главу 4.

Помимо мотивации непосредственно внутри теории электрических сетей быстрые способы решения Задачи 4 нашли свое применение в теории филогенетических сетей [35]

**Определение 1.13.**

*Филогенетическая сеть $F(G,\omega)$ представляет собой граф $G$, ребра которого снабжены положительными весами $\omega : E \to \mathbb{R}_{>0}$, обозначающими расстояния между объектами в вершинах. Некоторые вершины $F(G,\omega)$ объявляются терминальными (граничными) и занумерованы от 1 до $n$.*

Основная задача теории филогенетических сетей состоит в том, чтобы

восстановить ее топологию по данным расстояний между терминальными вершинами.

**Задача 5.**

*Рассмотрим филогенетическую сеть $F(G,\omega)$ на неизвестном графе $G$, который требуется восстановить по известной матрице расстояний $D(G)$, элементы которой равны минимальным расстояниям между терминальными вершинами:*

$$D(G)_{ij} = min_{p:i\to j} wt(p),$$

*где минимум берется по всем путям $p$ из терминальной вершины $i$ в терминальную вершину $j$ и $wt(p) = \sum_{e\in p} \omega(e)$.*

В случае филогенетических деревьев (и некоторых других классов филогенетических сетей, см. [19], [20]) Задача 5 в точности является частным случаем Задачи 4, что следует из следующего результата, который открывает возможность применения «электрических» методов в теории филогенетических сетей, см. [19], [20], [29].

**Определение 1.14.**

*Филогенетическая сеть $F(T,\omega)$ называется филогенетическим деревом, если граф $T$ является деревом и выполняется следующее:*

- *Терминальные вершины совпадают с множеством висячих вершин графа $T$;*
- *В $F$ нет вершин степени 2.*

**Предложение 1.1.**

*Филогенетическое дерево $F(T,\omega)$ однозначно задается по своей матрице $D(T)$, см. [33]. Рассмотрим циркулярную электрическую сеть $\mathcal{E}(T,\frac{1}{\omega})$, все граничные вершины которой совпадают с терминальными вершинами сети $F(T,\omega)$.*

*Тогда $D(T)$ совпадает с матрицей эффективных сопротивлений $M_R(\mathcal{E})$ сети $T$, см. [19]. Более того, $\mathcal{E}(T, \frac{1}{\omega})$ — минимальная электрическая сеть, см. [29].*

В силу Теоремы 1.20 топология филогенетического дерева $F(T, \omega)$ определяется перестановкой страд $\tau(\mathcal{E})$ сети $\mathcal{E}(T, \frac{1}{\omega})$, которая может быть эффективно вычислена с помощью общей теории положительных Грассманианов, см. Главу 4.

## 1.7 Приклеивание мостов и спайков

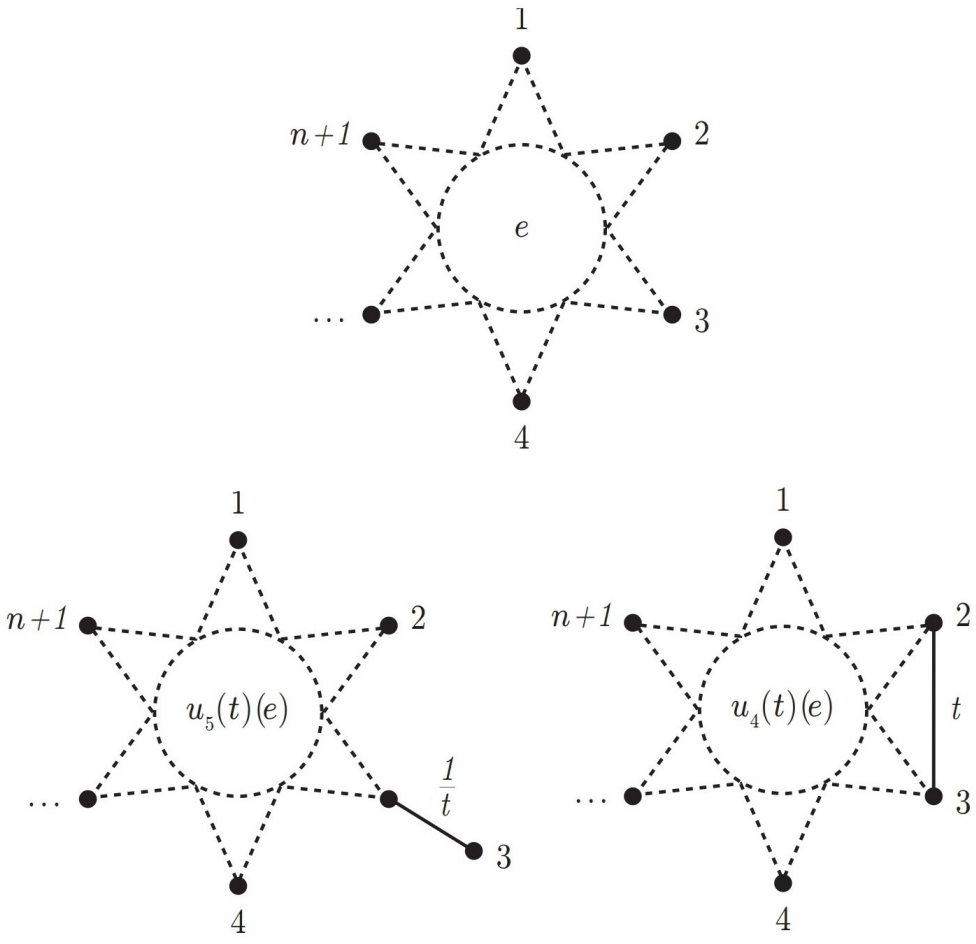



Рис. 1.7: Приклеивания моста и спайка

В этом разделе мы определим операции приклеивания моста и спайка (см. Рисунок 1.7), которые оказываются ключевыми во многих построениях, связанных

с электрическими сетями. В частности, эти операции понадобятся для доказательства теоремы о вложении электрических сетей в положительную часть Лагранжева Грассманиана, см. Теорему 3.17.

**Определение 1.15.**

*Пусть $v_i$ и $v_{i+1}$ — две соседние граничные вершины электрической сети $\mathcal{E} \in E_n$. Добавление нового ребра $v_iv_{i+1}$ с проводимостью $t = \omega(v_iv_{i+1})$ мы будем называть приклеиванием* ***моста*** *между вершинами $v_i$ и $v_{i+1}$. Электрическую сеть, получаемую из $\mathcal{E}$ приклеиванием моста, мы будем обозначать $u_{2i}(t)(\mathcal{E})$.*

**Определение 1.16.**

*Пусть $p_i$ граничная вершина электрической сети $\mathcal{E} \in E_n$. Рассмотрим электрическую сеть $u_{2i-1}(t)(\mathcal{E})$, получаемую из $\mathcal{E}$ добавлением нового ребра $v_i'v_i$ с проводимостью $\frac{1}{t} = \omega(v_i'v_i)$, соединяющего новую граничную вершину $v_i'$ со старой граничной вершиной $v_i$, которая после добавления ребра $v_i'v_i$ становится внутренней. В этом случае добавление нового ребра мы будем называть приклеиванием* ***спайка*** *к вершине $i$.*

Будем говорить, что из электрической сети $\mathcal{E} \in E_n$ можно удалить мост (стянуть спайк), если существует некоторая сеть $\mathcal{E}' \in E_n$ и $k \in \{1, \ldots, n\}$, что $\mathcal{E} = u_{2k}(t)(\mathcal{E}')$ ($\mathcal{E} = u_{2k-1}(t)(\mathcal{E}')$ соответственно).

**Теорема 1.21.** [14], [46]

*В каждой минимальной связной электрической сети $\mathcal{E} \in E_n$ имеется хотя бы одно ребро, которое является мостом или спайком (на самом деле, таких ребер найдется по крайней мере три). Номера граничных вершин, являющихся концами искомого ребра, а также его проводимость можно определить по матрице отклика сети $\mathcal{E}$.*

Теорема 1.21 позволяет предложить рекурсивный метод [14] решения

Задачи 1 для минимальных сетей. Опуская некоторые технические детали, данный метод состоит в том, чтобы шаг за шагом разбирать сеть:

- У минимальной сети $\mathcal{E}$ находим с помощью ее матрицы отклика $M_R(\mathcal{E})$ ребро $e$, которое является мостом или спайком;
- Вычисляем с помощью матрицы $M_R(\mathcal{E})$ проводимость ребра $\mathcal{E}$;
- Удаляя или стягивая ребро $e$, получаем новую минимальную сеть $\mathcal{E}'$;
- Находим матрицу отклика $M_R(\mathcal{E}')$;
- Если $\mathcal{E}'$ не содержит компонент связности, состоящих из одной граничной точки, то повторяем предыдущие шаги с этой сетью. Если $\mathcal{E}'$ содержит такую компоненту, то удаляем ее и повторяем описанные выше шаги для полученной таким образом сети $\mathcal{E}''$, матрица отклика которой получается из матрицы отклика сети $\mathcal{E}'$ удалением нулевой строки и столбца (вообще говоря, матрица отклика каждой связной компоненты является соответствующей подматрицей матрицы отклика всей сети).

Матрица отклика при каждом удалении моста или спайка на 4-м шаге описанного выше алгоритма пересчитывается с помощью следующих формул, доказательство которых мы приведем в Разделе 5.3.

**Теорема 1.22.** [14]
*Матрицы отклика $M_R(\mathcal{E}')$ и $M_R(\mathcal{E})$ электрических сетей $\mathcal{E}$ и $\mathcal{E}' = u_{2k}(t)(\mathcal{E})$ связаны следующим образом:*

$$x'_{ij} = x_{ij} + (\delta_{ik} - \delta_{(i+1)k})(\delta_{jk} - \delta_{(j+1)k})t, \tag{1.5}$$

*где $\delta_{ij}$ — стандартный символ Кронекера.*

*Аналогично, матрицы отклика* $M_R(\mathcal{E})$ *и* $M_R(\mathcal{E}')$ *электрических сетей* $\mathcal{E}$ *и* $\mathcal{E}' = u_{2k-1}(t)(\mathcal{E})$ *связаны между формулой:*

$$x'_{ij} = x_{ij} - \frac{t x_{ik} x_{kj}}{t x_{kk} + 1}. \tag{1.6}$$

# Глава 2

# Предварительные сведения: положительные Грассманианы и теория Постникова

## 2.1 Модели Лама

В этой главе мы опишем основные комбинаторные результаты теории положительных Грассманианов, которые будут далее активно использоваться при изучении циркулярных электрических сетей.

**Определение 2.1.**
*Множество* $\mathrm{Gr}(k,n)_{\geq 0} = \{X \in \mathrm{Gr}(k,n) : \Delta_I(X) \geq 0\}$ *всех точек Грассманиана* $\mathrm{Gr}(k,n)$*, все координаты Плюккера которых имеют один знак, мы будем называть* ***положительным Грассманианом****.*

Один из ключевых результатов теории положительных Грассманианов заключается в том, что каждая точка $X \in \mathrm{Gr}(k,n)_{\geq 0}$ параметризуется специальными циркулярными графами с положительными весами на ребрах — моделями димеров Лама или эквивалентными им моделями потоков и Постникова. Мы начнем с изложения теории Постникова на языке моделей Лама.

**Определение 2.2.**
***Моделью Лама*** $N(\Gamma, w)$ *мы будем называть вложенный в диск граф* $\Gamma(V,E)$

*вместе с набором весов на ребрах — функцией* $w : E \to \mathbb{R}_{>0}$, *которые удовлетворяют следующим условиям:*

- *Вершины, лежащие на границе диска, занумерованы по часовой стрелке;*
- *Валентность каждой вершины на границе диска равна* 1 *и вес ребер, инцидентных им, равен* 1*;*
- *Все вершины* $V$ *покрашены либо в черный, либо в белый цвет, причем каждое ребро соединяет вершины разного цвета.*

**Определение 2.3.**

*Рассмотрим модель Лама* $N(\Gamma, w)$, *подмножество* $\Pi$ *ребер графа* $\Gamma$ *мы будем называть* ***димером****, если оно удовлетворяет следующим условиям:*

- *Различные ребра из* $\Pi$ *не имеют общих точек;*
- *Все внутренние вершины графа* $\Gamma$ *покрыты ребрами из* $\Pi$.

*Весом* $wt(\Pi)$ *димера* $\Pi$ *мы будем называть произведение весов всех ребер, принадлежащих ему.*

**Пример 2.1.**

*Вес димера* $\Pi$ *на Рисунке 2.1 равен* $wt(\Pi) = ab$. *Здесь и далее мы часто не будем подписывать веса ребер, если они равны* 1.

С каждым димером $\Pi$ модели $N(\Gamma, w)$ свяжем число Лама $k_\Pi(\Gamma)$ по следующей формуле:

$$k_\Pi(\Gamma) = d_1(\Pi) + d_2(\Pi),$$

где $d_1(\Pi)$ — количество черных граничных вершин, покрытых $\Pi$, $d_2(\Pi)$ — количество белых граничных вершин, не покрытых $\Pi$.

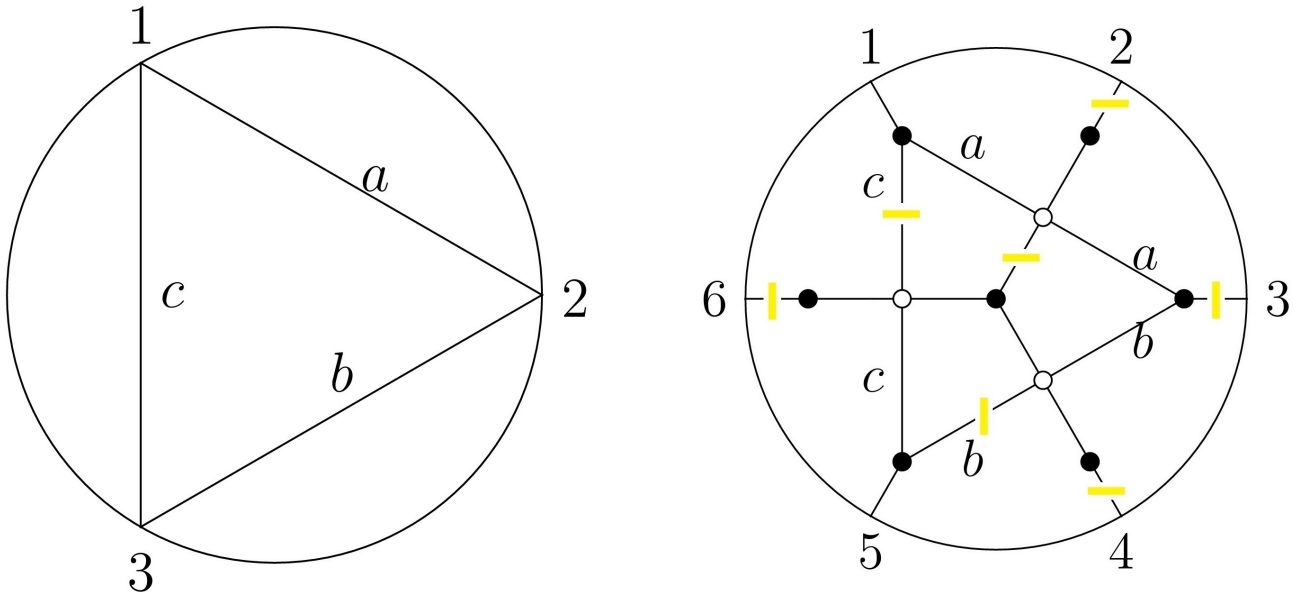



Рис. 2.1: Модель Лама и димер Π, который не покрывает белые граничные вершины 1 и 5

**Теорема 2.1.** [47]

*Число Лама* $k_\Pi(\Gamma)$ *не зависит от димера* Π. *Более того, верно, что* $k_\Pi(\Gamma) = k(\Gamma)$, *см. Формулу* (2.1).

*Доказательство.* Рассмотрим модель Лама $N(\Gamma, w)$ и димер Π. Используя биекцию из Предложения 2.2, построим также совершенную ориентацию $O(\Pi)$. Тогда легко видеть, что число Лама $k_\Pi(\Gamma) = d_1 + d_2$ равно сумме количества черных истоков $O(\Pi)$, покрытых Π, и белых истоков $O(\Pi)$, не покрытых Π. То есть $k_\Pi(\Gamma) = V_{su}(\Gamma)$, из формулы (2.2) мы получаем, что $V_{su}(\Gamma) = k(\Gamma)$. □

**Определение 2.4.**

*Рассмотрим модель Лама* $N(\Gamma, w)$ *с* $n$ *граничными вершинами, тогда для каждого подмножества* $I$ *мощности* $|I| = k(\Gamma)$ *граничных вершин можно определить производящую функцию* $\Delta_I^d$ *по формуле:*

$$\Delta_I^d = \sum_{\Pi(I)} wt(\Pi),$$

*где суммирование идет по всем димерам* $\Pi(I)$ *с границей* $I$*, то есть по таким димерам, что для каждого из них черные (белые) граничные вершины из* $I$ *являются покрытыми (не являются покрытыми).*

**Теорема 2.2.** [47]

*Рассмотрим модель Лама* $N(\Gamma, w)$*, тогда множество всех производящих функций* $\Delta_I^d$ *определяют координаты Плюккера точки* $X(N) \in \mathrm{Gr}_{\geq 0}(k(\Gamma), n)$*, то есть* $\Delta_I^d$ *удовлетворяют соотношениям Плюккера и все неотрицательны.*

## 2.2 Модели потоков

**Определение 2.5.**

***Моделью потоков*** $N(\Gamma, w, O)$ *будем называть модель Лама* $N(\Gamma, w)$ *вместе с* ***совершенной реберной ориентацией*** $O$ *графа* $\Gamma$*:*

- *Из любой черной вершины, которая не является граничной, исходит только одно ребро;*
- *В любую белую вершину, которая не является граничной, входит только одно ребро.*

**Определение 2.6.**

*Рассмотрим модель потоков* $N(\Gamma, w, O)$*, будем называть* ***потоком*** $F$ *подмножество ребер графа* $\Gamma$*, такое, что для каждой вершины* $v \in V(\Gamma)$*, не являющейся граничной, количество входящих в нее ребер равно количеству исходящих. Весом потока* $wt(F)$ *будем называть произведение весов всех его ребер.*

Непосредственно из определения потоков следует, что:

**Предложение 2.1.**

*Любой поток является объединением путей, соединяющих граничные вершины, и циклов.*

Граничную вершину $N(\Gamma, w, O)$ мы будем называть истоком (стоком), если инцидентное ей ребро выходит из нее (входит в нее). Множество всех стоков (истоков) мы будем обозначать как $V_{si}(\Gamma)$ (как $V_{su}(\Gamma)$).

С каждым потоком $F$ модели $N(\Gamma, w, O)$ свяжем его число Постникова $k_P(F)$, как сумму количества не покрытых $F$ истоков и покрытых $F$ стоков.

**Теорема 2.3.** [47], [53]

*Рассмотрим модель потоков $N(\Gamma, w, O)$ с $n$ граничными вершинами, тогда число Постникова $k_P(F)$ не зависит от $F$ и может быть вычислено по формуле:*

$$k_P(F) = k(\Gamma) = \frac{1}{2}\left(n + \sum_{v \in black}(deg(v) - 2) + \sum_{v \in white}(2 - deg(v))\right), \qquad (2.1)$$

*где суммирования ведутся по всем черным и белым внутренним вершинам* $\Gamma$.

*Доказательство.* Сопоставим каждой паре «внутренняя вершина-инцидентное ей ребро» $(v, e)$ число 1, если ребро $e$ входит в вершину $v$, и $-1$ в противном случае.

Так как ребра соединяют вершины разного цвета и ориентация $O$ — совершенная, легко видеть, что сумма всех расставленных 1 и сумма всех расставленных $-1$ с одной стороны равна:

$$\sum 1 + \sum -1 = |V_{si}(\Gamma)| - |V_{su}(\Gamma)|.$$

С другой стороны эта же сумма равна:

$$\sum 1 + \sum -1 = \sum_{-v \in black} (deg(v) + 2) + \sum_{v \in white} (deg(v) - 2).$$

Учитывая, что $|V_{si}(\Gamma)| + |V_{su}(\Gamma)| = n$, мы получаем, что

$$|V_{su}(\Gamma)| = k(\Gamma) = \frac{1}{2}\left(n + \sum_{v \in black} (deg(v) - 2) + \sum_{v \in white} (2 - deg(v))\right). \qquad (2.2)$$

Теперь рассмотрим произвольный поток $F$, пусть он покрывает $l$ истоков. Тогда этот поток покрывает $l$ стоков и не покрывает $|V_{su}(\Gamma)| - l = k_P(\Gamma) - l$ истоков. Значит, сумма количества не покрытых $F$ истоков и покрытых $F$ стоков равна $k_P(\Gamma)$.

□

**Определение 2.7.**

*Рассмотрим модель потоков $N(\Gamma, w, O)$ с $n$ граничными вершинами, тогда для каждого подмножества $I : |I| = k(\Gamma)$ множества граничных вершин можно определить производящую функцию $\Delta_I^f$ по формуле:*

$$\Delta_I^f = \sum_{F|I} wt(F),$$

*где суммирование идет по весам всех таких потоков, что для каждого из них истоки, принадлежащие $I$, не покрыты (то есть инцидентное истоку ребро не входит в поток $F$), а стоки, принадлежащие $I$, покрыты (то есть инцидентное стоку ребро входит в поток $F$).*

**Теорема 2.4.** [47], [53]

*Рассмотрим модель потоков $N(\Gamma, w, O)$, тогда множество всех производящих функций $\Delta_I^f$ определяет координаты Плюккера точки*

$$X(N, O) \in \mathrm{Gr}_{\geq 0}(k(\Gamma), n).$$

*Доказательство.* Доказательство этого утверждения можно найти в Замечании 2.1. □

**Предложение 2.2.** [47]

*Для каждой модели Лама $N(\Gamma, w)$ существует естественная биекция между множеством совершенных ориентаций и множеством димеров на ней: рассмотрим какой-нибудь димер $\Pi$, построим по нему совершенную ориентацию $O(\Pi)$ следующим образом:*

- *Если $e \notin \Pi$, установим ориентацию $e$ от белой вершины к черной;*
- *Если $e \in \Pi$, установим ориентацию $e$ от черной вершины к белой.*

Таким образом, с каждой моделью Лама $N(\Gamma, w)$ и моделью потоков $N(\Gamma, w, O)$ мы можем связать точки $\mathrm{Gr}_{\geq 0}(k(\Gamma), n)$. Оказывается, что при некоторых условиях эти точки совпадают.

**Теорема 2.5.** [47]

*Рассмотрим модель Лама $N(\Gamma, w)$ и модель потоков $N(\Gamma, w', O)$. Причем наборы весов $w'$ и $w$ отличаются друг от друга следующим образом:*

- *Для любого ориентированного ребра $e \in E$ модели $N(\Gamma, w', O)$, ведущего от белой к черной вершине, его вес совпадает с весом того же ребра модели $N(\Gamma, w)$;*
- *Для любого ориентированного ребра $e \in E$ модели $N(\Gamma, w', O)$, ведущего от черной к белой вершине, его вес равен обратному весу того же ребра модели $N(\Gamma, w)$.*

*Тогда для координат Плюккера точек $X(N)$ и $X(N, O)$ верна формула:*

$$\Delta_I^f = \frac{\Delta_I^d}{wt(\Pi_0)},$$

*где* $wt(\Pi_0)$ *— вес димера, который отвечает совершенной ориентации* $O$*, см. Предложение 2.2.*

**Замечание 2.1.**

*Из равенства* $\Delta_I^f = \frac{\Delta_I^d}{wt(\Pi_0)}$ *и Теоремы 2.2 сразу же следует утверждение Теоремы 2.4.*

## 2.3 Модели Постникова

**Определение 2.8.**

***Моделью Постникова*** $PN(\Gamma, w, O)$ *мы будем называть вложенный в диск граф* $\Gamma$ *вместе с реберной ориентацией* $O$ *и функцией* $\omega : E \to \mathbb{R}$*, которые удовлетворяют следующим условиям:*

- *Вершины, лежащие на границе диска, занумерованы по часовой стрелке;*
- *Валентность каждой граничной вершины равна* 1*; вес ребер, инцидентных граничным вершинам, равен* 1*.*

Рассмотрим модель Постникова $PN(\Gamma, w, O)$ с $k$ истоками и $n-k$ стоками, занумеруем по порядку по часовой стрелке ее истоки $I = \{i_1, \ldots, i_k\}$. Будем обозначать через $M_{i_r j}$ сумму весов ориентированных путей из истока $i_r$ в сток $j$, которая определяется следующим образом:

$$M_{i_r j} = \sum_{p: i_r \to j} (-1)^{wind(p)} wt(p),$$

здесь $wt(p)$ — произведение весов всех ребер, принадлежащих $p$, а $wind(p)$ — индекс кручения пути $p$, который равен суммарному количеству полных оборотов пути $p$ со знаком, если считать, что повороты против часовой стрелки положительны, а по часовой — отрицательны.

**Определение 2.9.**

*Определим* ***расширенную матрицу граничных измерений*** $A$ *размера* $k \times n$ *модели Постникова* $PN(\Gamma, w, O)$ *с* $k$ *истоками и* $n-k$ *стоками следующим образом:*

- *Подматрица, отвечающая номерам столбцов, совпадающим с номерами истоков, является единичной;*
- *Остальные элементы задаются по формуле* $a_{rj} = (-1)^s M_{i_r j}$, *где* $s$ *— количество элементов из* $I$ *строго между истоком* $i_r$ *и стоком* $j$.

*Исходя из комбинаторного смысла элементов матрицы* $A$, *мы также будем использовать обозначения* $a_{i_r \to j} := a_{rj}$.

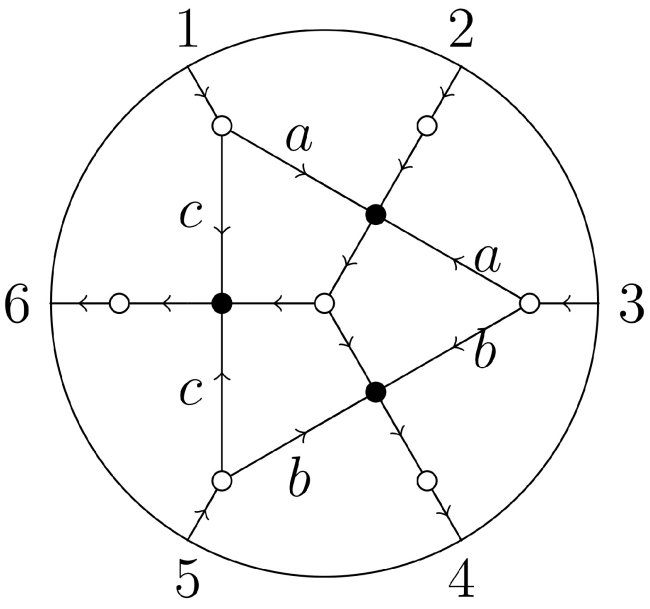



Рис. 2.2: Модель Постникова

**Пример 2.2.**

*Рассмотрим модель Постникова на Рисунке 2.2, тогда ее расширенная мат-*

*рица граничных измерений имеет вид:*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & a & 0 & -(a+c) \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & b+a & 0 & -a \\ 0 & 0 & 0 & b & 1 & c \end{pmatrix},$$

*например,* $a_{44} = a_{5\to 4} = (-1)^0 b$.

**Теорема 2.6.** [53]

*Рассмотрим модель Постникова* $PN(\Gamma, w, O)$ *с* $k$ *истоками и* $n-k$ *стоками, тогда все максимальные миноры* $\Delta_I(A)$ *ее расширенной матрицы отклика* $A$ *неотрицательны. Другими словами, матрица* $A$ *задает точку* $X(PN) \in \mathrm{Gr}_{\geq 0}(k, n)$.

Заметим, что пока мы не требовали, чтобы граф $\Gamma$ обладал свойствами из Определения 2.2. Однако простыми преобразованиями, сохраняющими расширенную матрицу отклика, любой вложенный в диск граф $\Gamma$ с положительными весами на ребрах можно перевести в некоторый двудольный двухкрашенный граф из Определения 2.2, см. [53]. Поэтому, не уточняя этого каждый раз, в дальнейшем мы будем работать только с моделями Постникова, удовлетворяющими условиям из Теоремы 2.7. Более того, при дополнительных условиях на модель Постникова $PN(\Gamma, w, O)$ можно «забыть» об ориентации.

**Теорема 2.7.** [53]

*Рассмотрим две модели Постникова* $PN_1(\Gamma, w_1, O_1)$ *и* $PN_2(\Gamma, w_2, O_2)$ *такие, что:*

- *Все вершины* $V$ *покрашены либо в черный цвет, либо в белый, каждое ребро соединяет вершины разного цвета;*
- *Ориентации* $O_1$ *и* $O_2$ *являются совершенными;*

- *Для любого ребра $e \in \Gamma$ его вес $W_1(e)$ в первой модели равен весу $W_2(e)$ во второй модели, если его ориентации в первой и во второй моделях совпадают;*

- *Для любого ребра $e \in \Gamma$ его веса $W_1(e)$ и $W_2(e)$ в первой и во второй модели связаны отношением $w_1(e)w_2(e) = 1$, если его ориентации в первой и во второй моделях противоположны.*

*Тогда для максимальных миноров $A_1$ и $A_2$ расширенных матриц отклика первой и второй моделей верно следующее тождество:*

$$\Delta_J(A_2) = \frac{\Delta_J(A_1)}{\Delta_{I_2}(A_1)},$$

*где $I_2$ — множество индексов истоков второй модели.*

Для моделей Постникова $PN(\Gamma, w, O)$, удовлетворяющих условиям Теоремы 2.7, согласно формуле (2.2) количество истоков равно $k(\Gamma)$. Поэтому естественно спросить, как связаны между собой точки $\mathrm{Gr}_{\geq 0}(k(\Gamma), n)$, ассоциированные с моделью Постникова $PN(\Gamma, w, O)$ и моделью Лама $N(\Gamma, w)$.

**Теорема 2.8.** [61]
*Рассмотрим модель Постникова $PN(\Gamma, w, O)$ с множеством истоков $I$, также рассмотрим ее расширенную матрицу граничных измерений $A$. Для ее миноров верна следующая формула:*

$$\Delta_J(A) = \frac{\sum\limits_F wt(F)}{\sum\limits_C wt(C)},$$

*где сумма в числителе берется по всем потокам, пути которых соединяют множество истоков $I$ со множеством $J$ (другими словами, потоки из первой суммы покрывают все стоки, принадлежащие $J$, и не покрывают истоки,*

*принадлежащие $J$); сумма в знаменателе берется по всем потокам, пути которых не соединяют никакие вершины на границе.*

Из Теоремы 2.8 мы можем получить следующее следствие.

**Теорема 2.9.** [53]

*Рассмотрим модель Лама $N(\Gamma, w)$. Пусть $O(I)$ — совершенная ориентация ребер $\Gamma$ с множеством истоков $I$. Рассмотрим также модель Постникова $PN(\Gamma, w', O(I))$. Тогда верно, что точки $\mathrm{Gr}_{\geq 0}(k(\Gamma), n)$, ассоциированные с моделями $N(\Gamma, w)$ и $PN(\Gamma, w', O(I))$, совпадают.*

*Доказательство.* Действительно, используя Теорему 2.5, мы можем написать следующую цепочку равенств:

$$\Delta_J(A) = \frac{\sum\limits_F wt(F)}{\sum\limits_C wt(C)} = \frac{\Delta_J^f}{\sum\limits_C wt(C)} = \frac{\Delta_J^d}{wt(\Pi_0)\sum\limits_C wt(C)},$$

где $wt(\Pi_0)$ — вес димерной конфигурации, отвечающей совершенной ориентации $O(I)$, см. Предложение 2.2. Таким образом, модели $N(\Gamma, w)$, $PN(\Gamma, w', O(I))$ задают одну и ту же точку $\mathrm{Gr}_{\geq 0}(k(\Gamma), n)$. □

## 2.4 Задачи черного ящика в теории Постникова

Один из основополагающих результатов теории положительных Грассманианов заключается в том, что Теорема 2.2 (эквивалентно Теоремы 2.4 и 2.6) обратима.

**Определение 2.10.**

*Рассмотрим модель Лама $N(\Gamma, w)$, тогда определим ее* ***ориентированный медианный граф*** *$\Gamma_M$ следующим образом:*

- *Граничные вершины $\Gamma_M$ совпадают с граничными вершинами $N(\Gamma, w)$;*

- *Внутренние вершины* $\Gamma_M$ *являются серединами ребер, соединяющих внутренние вершины* $\Gamma$.

*Две вершины* $\Gamma_M$ *соединены ребром, если ребра* $\Gamma$ *смежны. Ребра* $\Gamma_M$ *ориентированы следующим образом:*

- *По часовой стрелке вокруг каждой внутренней белой вершины* $\Gamma$*;*
- *Против часовой стрелки вокруг каждой внутренней черной вершины* $\Gamma$.

*Поскольку все внутренние вершины* $\Gamma_M$ 4*-х валентны, мы можем определить* ***страды*** *на* $\Gamma_M$ *как ориентированные пути, проходящие прямо через каждый перекресток, см. Рисунок 2.3.*

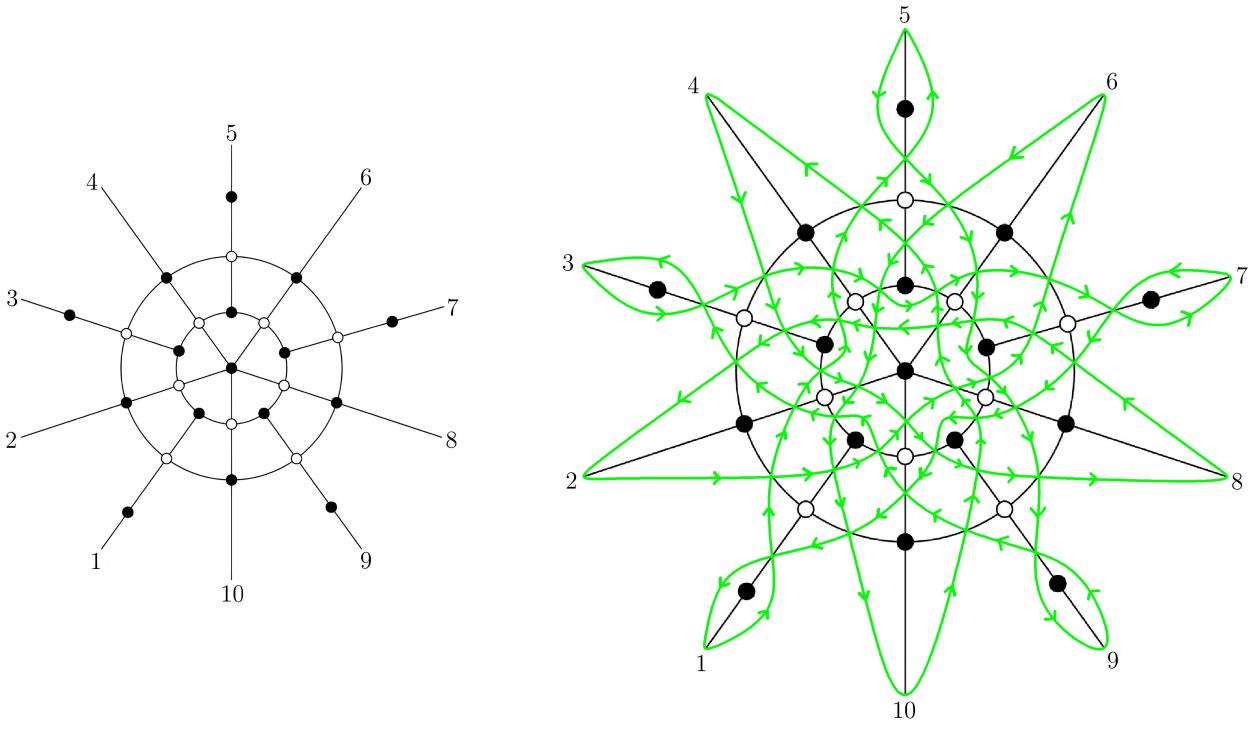



Рис. 2.3: Модель Лама и ее ориентированный медианный граф

**Определение 2.11.**

*Модель Лама* $N(\Gamma, w)$ *называется* ***минимальной****, если выполняется следующее:*

- *Каждая страда не пересекает сама себя;*
- *В $\Gamma_M$ нет петель, кроме петель, прикрепленных к изолированным граничным вершинам;*
- *Страды не формируют запрещенные ориентированные линзы, см. Рисунок 2.4.*

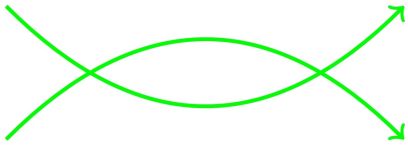


Рис. 2.4: Запрещенная ориентированная линза

**Теорема 2.10.** [47], [53]

*Для любой точки $X \in \mathrm{Gr}_{\geq 0}(k,n)$ существует единственная с точностью до преобразований Постникова (см. [53]) и калибровок (см. Рисунок 2.5), минимальная модель Лама $N(\Gamma, w)$, такая, что $X(N) = X$.*

*Рассмотрим минимальную модель Лама $N(\Gamma, w)$ на известном графе $\Gamma$, ассоциированную с точкой $X \in \mathrm{Gr}_{\geq 0}(k,n)$. Тогда функция весов $w$ однозначно с точностью до калибровочных преобразований (см. Рисунок 2.5) восстанавливается по координатам Плюкера $X$.*

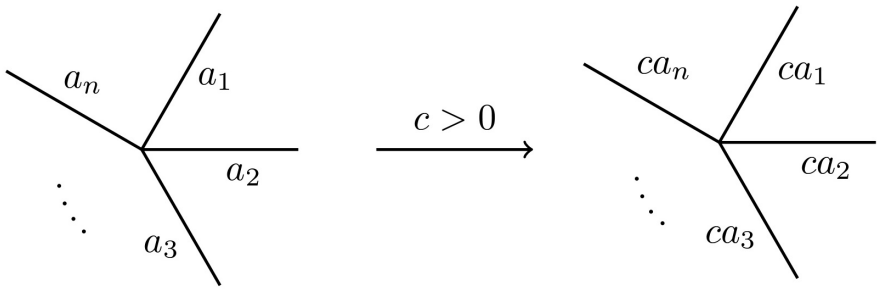



Рис. 2.5: Калибровка во внутренней вершине модели Лама

Вторую часть Теоремы 2.10 можно понимать как результат о существовании решения следующей задачи черного ящика в теории Постникова.

**Задача 6.**

*Рассмотрим точку* $X \in \mathrm{Gr}_{\geq 0}(k,n)$*, пусть нам известен граф минимальной модели Лама* $N(\Gamma, w)$ *такой, что* $X = X(N)$*. Необходимо найти веса ребер графа модели Лама, зная координаты Плюккера точки* $X$*.*

Подобно положению дел в теории электрических сетей, все доказательства Теоремы 2.10 представляют собой практические алгоритмы для решения Задачи 6. Мы упомянем некоторые из них:

- Рекурсивное разложение модели Лама в композиции мостов и леденцов [47];
- Решения Задачи 6 для специальных моделей на Le-диаграммах [53], [61];
- Решение Задачи 6 с помощью обобщенного камерного анзаца [51].

Мы подробно опишем последний подход, поскольку он будет очень важен для наших будущих целей.

**Теорема 2.11.** [51], [56]

*Рассмотрим минимальную модель Лама* $N(\Gamma, \omega)$ *с* $n$ *граничными вершинами. Пометим каждую его грань* $F$ *набором чисел* $I(F) \subset \{1, \dots, n\}$*,* $|I| = k(\Gamma)$ *по следующему правилу: если грань* $F$ *лежит слева от ориентированной страды, выходящей из истока с номером* $i$*, то* $i \in I(F)$*. Это правило маркировки граней определено корректно, см. Рисунок 2.6.*

**Определение 2.12.** [51]

*Рассмотрим матрицу* $A \in \mathrm{Mat}_{k\times m}$*, обозначим через* $A_i$*,* $i \in \{1, \dots, m\}$ *ее столбцы. Определим* ***твист*** $\tau(A) \in \mathrm{Mat}_{k\times m}$ *от матрицы* $A$ *следующим образом:*

$$\begin{cases} (\tau(A)_i, A_i) = 1, \text{ если } i = j \\ (\tau(A)_i, A_j) = 0, \text{ если } A_j \notin span(A_i, A_{i+1}, \dots, A_{j-1}), \end{cases}$$

*где* $\tau(A)_i, i \in \{1, \ldots, m\}$ *— столбцы матрицы* $\tau(A)$*;* $(\cdot, \cdot)$ *— стандартное скалярное произведение; а операция* $+$ *в индексах берется по модулю* $m$*.*

**Теорема 2.12.** [51]

*Рассмотрим минимальную модель Лама* $N(\Gamma, w)$ *на известном графе* $\Gamma$*, ассоциированную с точкой* $X \in \mathrm{Gr}_{\geq 0}(k, m)$*, определяемой матрицей* $A$*. Тогда веса* $w$ *модели Лама можно найти, используя следующий алгоритм:*

- *Помечаем каждую грань* $F$ *графа* $\Gamma$ *набором чисел* $I(F)$ *по правилу из Теоремы 2.11;*
- *Вычисляем матрицу* $\tau(A)$*;*
- *Наконец, находим веса* $w$ *в соответствии со следующим правилом:*
  - *Если ребро* $e$ *соединяет две внутренние вершины, то:*

$$w(e) = \frac{1}{\Delta_{I(F_1)}\big(\tau(A)\big)\Delta_{I(F_2)}\big(\tau(A)\big)}, \tag{2.3}$$

    *где ребро* $e$ *общее для граней* $F_1$ *и* $F_2$*;*
  - *Если ребро* $e$ *соединяет внутреннюю вершину с внешней, то:*

$$w(e) = \frac{1}{\Delta_{I(F)}\big(\tau(A)\big)}, \tag{2.4}$$

    *где грань* $F$ *—*
    - *Ближайшая против часовой стрелки к* $e$*, если* $e$ *соединяет внутреннюю вершину с белой граничной вершиной;*
    - *Ближайшая по часовой стрелки к* $e$*, если* $e$ *соединяет внутреннюю вершину с черной граничной вершиной.*

**Замечание 2.2.**

*В дальнейшем нам понадобится общая идея доказательства Теоремы 2.12, которую мы опишем, следуя [51].*

*Каждая грань $F$ минимальной модели Лама $N(\Gamma, w)$ однозначно определяет* ***минимальный*** *(в смысле некоторого частичного порядка на множестве всех димеров с фиксированной границей) димер $\Pi_F$, граница которого может быть вычислена по правилу из Теоремы 2.11, т. е. $\Pi_F \in \Pi\big(I(F)\big)$. Используя веса $\mathrm{wt}(\Pi_F)$ этих димеров, мы можем с точностью до калибровочных преобразований восстановить веса ребер $w$ по следующему правилу:*

- *Если ребро $e$ соединяет две внутренние вершины, то:*

$$\omega(e) = \mathrm{wt}(\Pi_{F_1})\mathrm{wt}(\Pi_{F_2}),$$

- *Если ребро $e$ соединяет внутреннюю вершину с внешней, то:*

$$\omega(e) = \mathrm{wt}(\Pi_F),$$

*где $F_1, F_2, F$ определены как в Теореме 2.12.*

*Остается только доказать, что справедливо следующее тождество:*

$$\Delta_{I(F)}\big(\tau(A)\big)\mathrm{wt}(\Pi_F) = 1.$$

Первую часть Теоремы 2.10 можно интерпретировать как утверждение о существовании решения топологической задачи черного ящика в теории Постникова.

**Задача 7.**

*Рассмотрим точку $X \in \mathrm{Gr}_{\geq 0}(k, n)$. Необходимо с точностью до преобразований Постникова найти модель Лама $N(\Gamma, w)$ такую, что $X = X(N)$.*

Для наших дальнейших целей, мы опишем решение Задачи 7 для связных моделей Лама.

**Определение 2.13.**

*Рассмотрим минимальную связную модель Лама* $N(\Gamma, w)$*, тогда ее медианный граф* $\Gamma_M$ *естественно определяет перестановку страд* $g(N)(i) = j$*, если страда, выходящая из граничной вершины* $i$*, заканчивается в граничной вершине* $j$*.*

**Теорема 2.13.** [47]

*Топология минимальной модели Лама* $N(\Gamma, w)$ *однозначно с точностью до преобразований Постникова определяется ее перестановкой* $g(N)$*.*

*Пусть пространство строк матрицы* $A$ *задает точку* $X(N) \in \mathrm{Gr}(k, n)$*. Обозначим за* $A_i$ *столбцы этой матрицы и определим перестановку столбцов* $g(X)$ *следующим образом:* $g(A)(i) = j$*, если* $j$ *— минимальное число такое, что* $A_i \in \mathrm{span}(A_{i+1}, \ldots, A_j)$*, где все индексы берутся по модулю* $n$*. Перестановка* $g(A)$ *однозначно определяет перестановку* $g(N)$*:*

$$g(N) = g(A) \mod n.$$

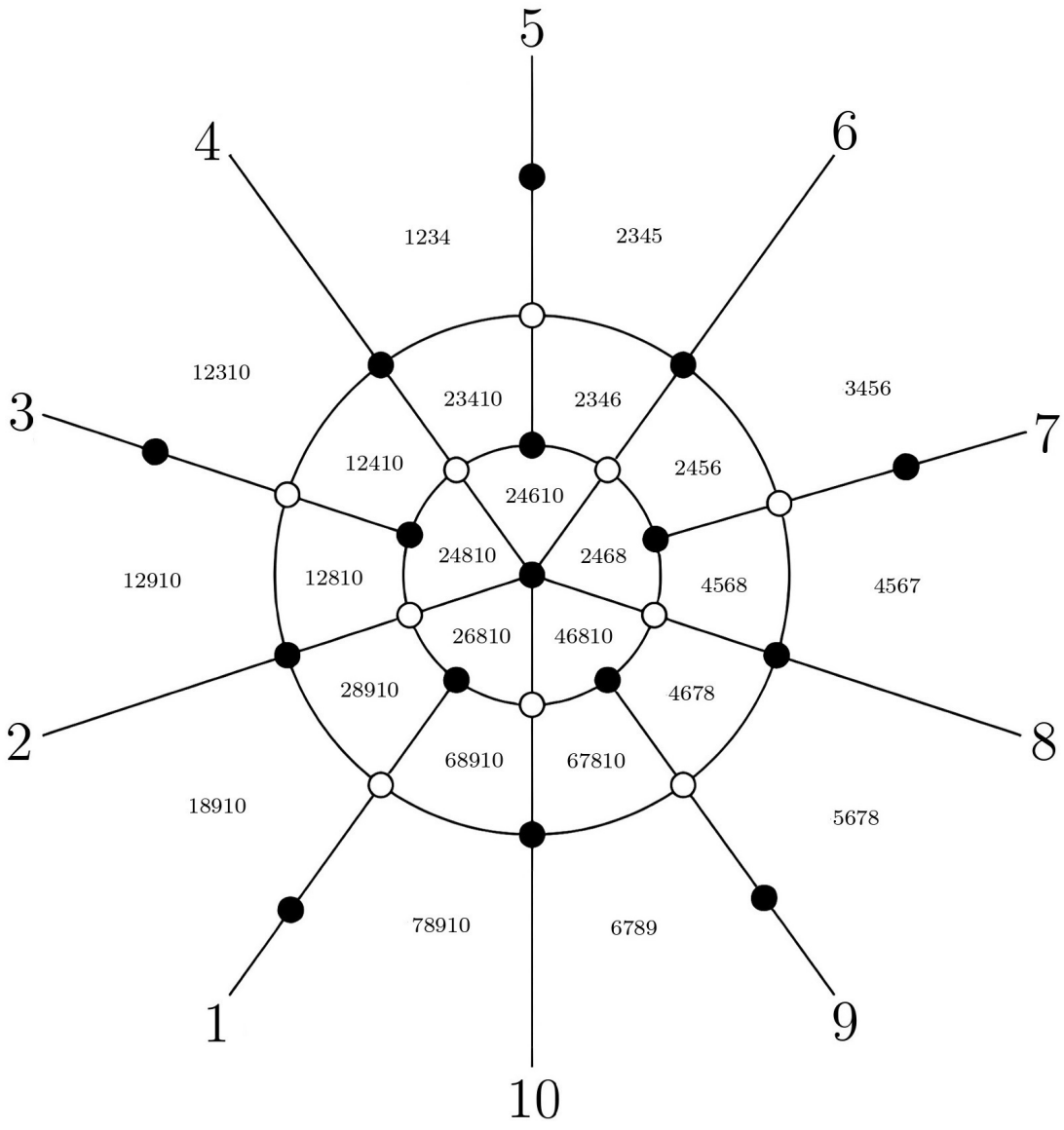



Рис. 2.6: Пример маркировки граней

# Глава 3

# Основные результаты: электрические сети и положительные Грассманианы

В силу симметричности и вырожденности матриц отклика электрические сети можно естественно вложить в Лагранжев Грассманиан, см. [6] и [55]. Более тонкий факт, который и станет предметом нашего ближайшего изучения, состоит в том, что существует вложения $\overline{E}_n$ в положительную часть изотропного и Лагранжева Грассманианов.

## 3.1 Обобщенный трюк Темперли

Основным инструментом для установления связи теории циркулярных электрических сетей с положительными Грассманианами является обобщенный трюк Темперли, который позволяет перейти от работы с производящими функциями рощ к работе с производящими функциями димеров:

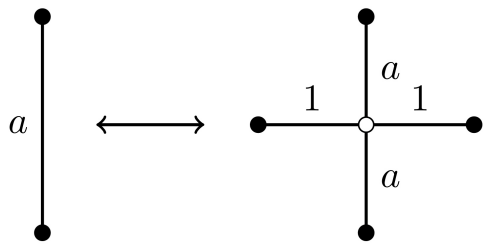



Рис. 3.1: К Определению 3.1

**Определение 3.1.**

*Для каждой сети $\mathcal{E}(G,\omega) \in E_n$ построим ассоциированную с ней модель Лама $N(\mathcal{E}^{\mathcal{T}}, w)$ по следующему правилу:*

- *Граничные вершины $N(\mathcal{E}^{\mathcal{T}}, w)$:*
  - *Если $G$ имеет граничные вершины $\{\bar{1}, \bar{2}, \ldots, \bar{n}\}$, то граф $\mathcal{E}^{\mathcal{T}}$ будет иметь граничные вершины $\{1, 2, \ldots, 2n\}$;*
  - *Каждая граничная вершина $\bar{i}$ отождествляется с $2i-1$, и каждая граничная вершина $2i$ в $\mathcal{E}^{\mathcal{T}}$ лежит между $\bar{i}$ и $\bar{i}+\bar{1}$;*
  - *Граничные вершины с индексами $2i$ отождествляются с вершинами $\tilde{i}$.*
- *Внутренние вершины $N(\mathcal{E}^{\mathcal{T}}, w)$*
  - *Все граничные вершины $\mathcal{E}^{\mathcal{T}}$ покрашены в белый цвет;*
  - *Все исходные вершины $b_v$ сети $\mathcal{E}(G,\omega)$ объявляются внутренними и покрашены в черный цвет;*
  - *В центре каждой внутренней грани $F$ графа $G$ поместим черную вершину $b_F$;*
  - *Для каждого исходного ребра $\mathcal{E}(G,\omega)$ поместим белую внутреннюю вершину $w_e$ в его середину, см. Рисунок 3.1.*
- *Ребра $N(\mathcal{E}^{\mathcal{T}}, w)$ и их веса $w$ определим следующим образом:*
  - *Если $b_v$ нарисована на месте исходной вершины ребра сети $\mathcal{E}(G,\omega)$, то $b_v$ и $w_e$ соединяются ребром, и вес этого ребра равен весу ребра $e$ сети $\mathcal{E}(G,\omega)$;*
  - *Если исходное ребро сети $e$ граничит с гранью $F$, то $w_e$ соединяется с $b_F$ ребром с весом 1,*

– *Граничная вершина* $b_i$ *сети* $\mathcal{E}(G,\omega)$ *соединяется ребром с весом* 1 *с граничной вершиной* $2i-1$ *в* $\mathcal{E}^{\mathcal{T}}$;

– *Четные граничные вершины* $2i$ *в* $\mathcal{E}^{\mathcal{T}}$ *соединяются ребром с весом* 1 *с* $w_F$ — *центром грани* $F$, *к которой они прилегают.*

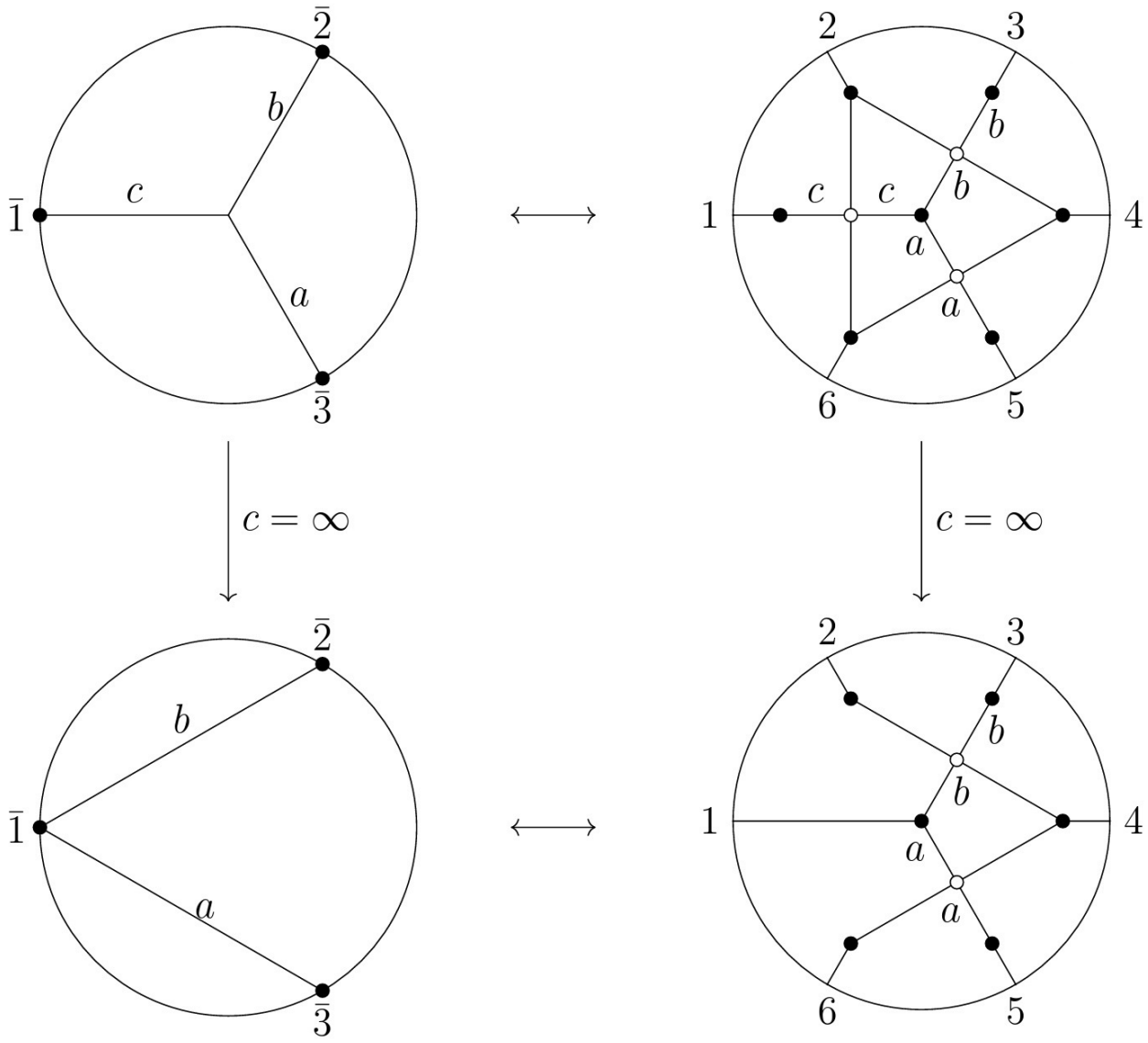



Рис. 3.2: Электрические сети и связанные с ними модели Лама

**Теорема 3.1.** [46]

*Рассмотрим сеть* $\mathcal{E}(G,\omega) \in E_n$ *и модель Лама* $N(\mathcal{E}^{\mathcal{T}}, w)$, *построенную по сети с помощью обобщенного трюка Темперли, тогда для каждого* $I \subset \{1,\dots,2n\}$,

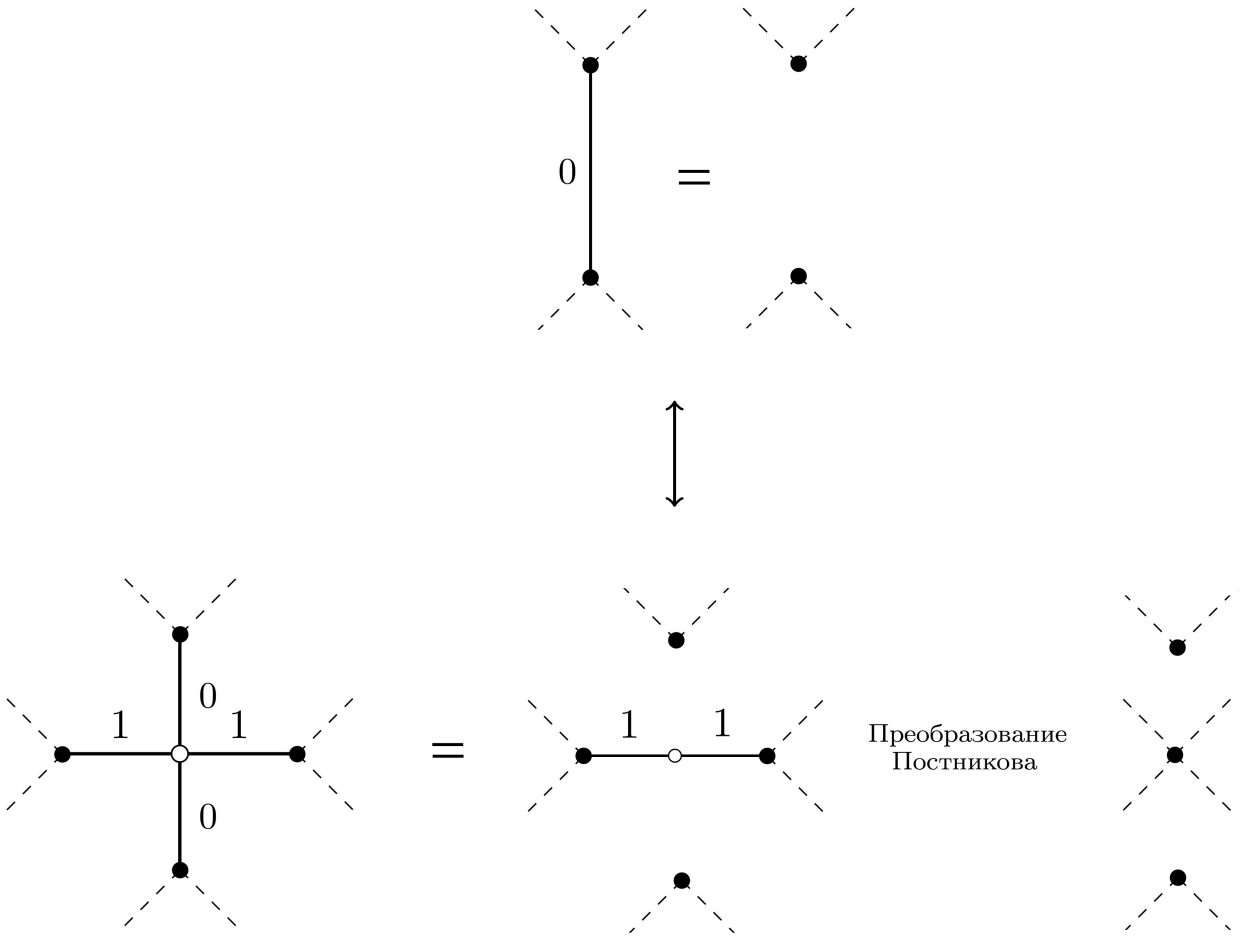



Рис. 3.3: Удаление ребра

$|I| = n - 1$ *существует естественная сохраняющая веса биекция* $\mathcal{F}_I$ *между димерами* $\Pi(I)$ *на* $N(\mathcal{E}^{\mathcal{T}}, w)$ *и соответствующими им остовными рощами на* $G$.

На самом деле несложно определить обобщенный трюк Темперли и для кактусных сетей. Для этого надо воспользоваться тем, что любая кактусная сеть получается из обычной удалением или стягиванием некоторых ее ребер, см. Рисунок 3.2, Рисунок 3.3 и Рисунок 3.4. Нетрудно проверить, что Теорема 3.1 продолжается и на кактусные сети.

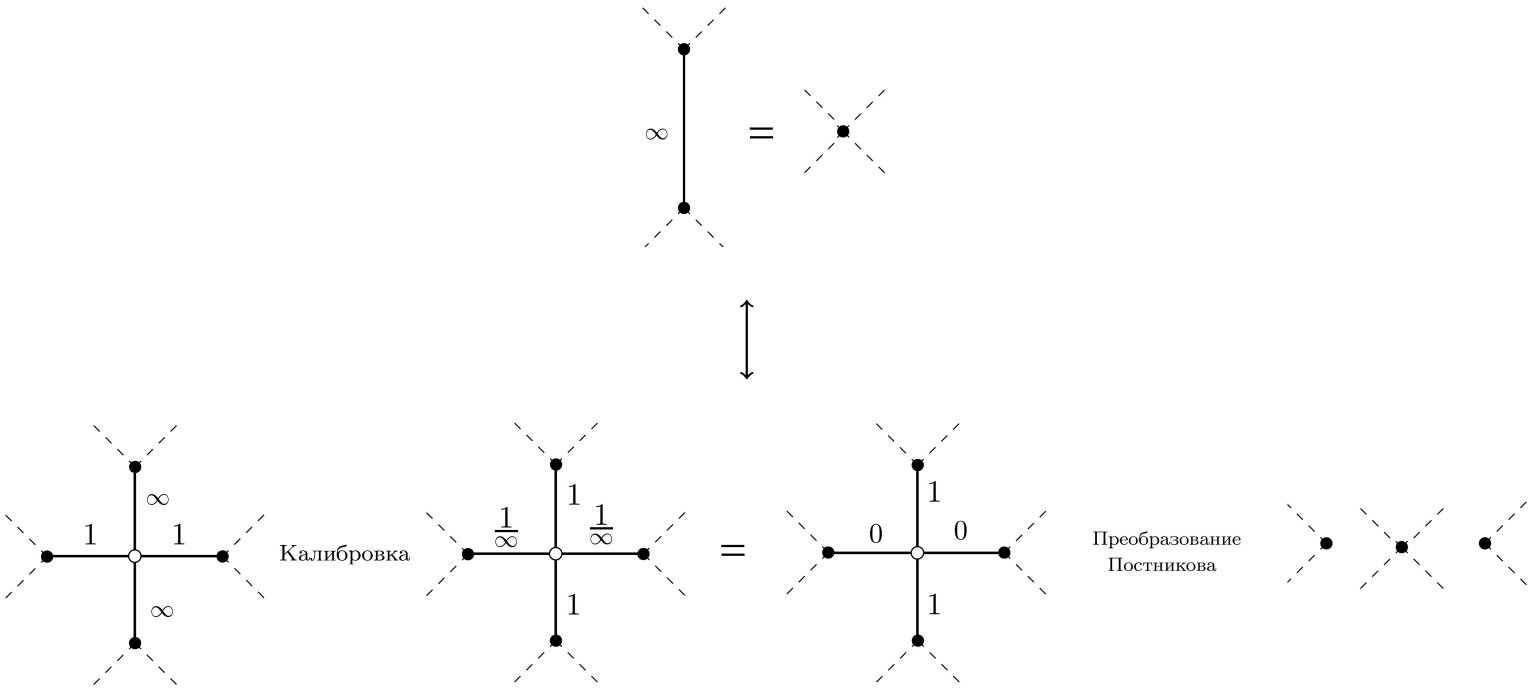



Рис. 3.4: Стягивание ребра

## 3.2 Вложение Лама и комбинаторика рощ

Анализируя биекцию из Теоремы 3.1, можно получить выражение производящих функций димеров на $N(\mathcal{E}^{\mathcal{T}}, w)$ в виде линейных комбинаций производящих функций остовных рощ на $G$, что позволяет построить вложение $\overline{E}_n$ в $\mathrm{Gr}_{\geq 0}(n-1, 2n)$, к описанию которого мы и переходим.

**Определение 3.2.**

*Граничное разбиение $\sigma(F)$ остовной рощи $F$ сети $\mathcal{E}(G, \omega)$ — это разбиение множества граничных вершин $\{\bar{1}, \bar{2}, \ldots, \bar{n}\}$, которое показывает, какие из них лежат в одной компоненте связности рощи $F$. Так как мы работаем с вложенными в диск планарными графами $G$, $\sigma(F)$ должно быть* ***nc-разбиением****, то есть непересекающимся разбиением.*

Мы будем записывать $nc$-разбиение следующим образом: $\sigma = (\bar{a}\bar{b}\bar{c}\bar{d}\bar{e}|\bar{f}\bar{g}|\bar{h})$. Каждое $nc$-разбиение $\sigma$ множества $\{\bar{1}, \bar{2}, \ldots, \bar{n}\}$ имеет естественное дуальное $nc$-разбиение $\widetilde{\sigma}$ множества $\{\tilde{1}, \tilde{2}, \ldots, \tilde{n}\}$, где точка с индексом $\tilde{i}$ лежит на окружности

между точками с индексами $\bar{i}$ и $\overline{i+1}$. Например, разбиение $\sigma = (\bar{1}, \bar{4}, \bar{6}|\bar{2}, \bar{3}|\bar{5})$ имеет дуальное *nc*-разбиение $\widetilde{\sigma} = (\tilde{1}, \tilde{3}|\tilde{2}|\tilde{4}, \tilde{5}|\tilde{6})$, см. Рисунок 3.5. Также нам будет удобно записывать разбиения $\sigma$ и $\widetilde{\sigma}$ вместе $(\sigma, \widetilde{\sigma})$ как одно *nc*-разбиение множества $\{1, \ldots, 2n\}$, отождествляя $\bar{i}$ с $2i-1$ и $\tilde{i}$ с $2i$.

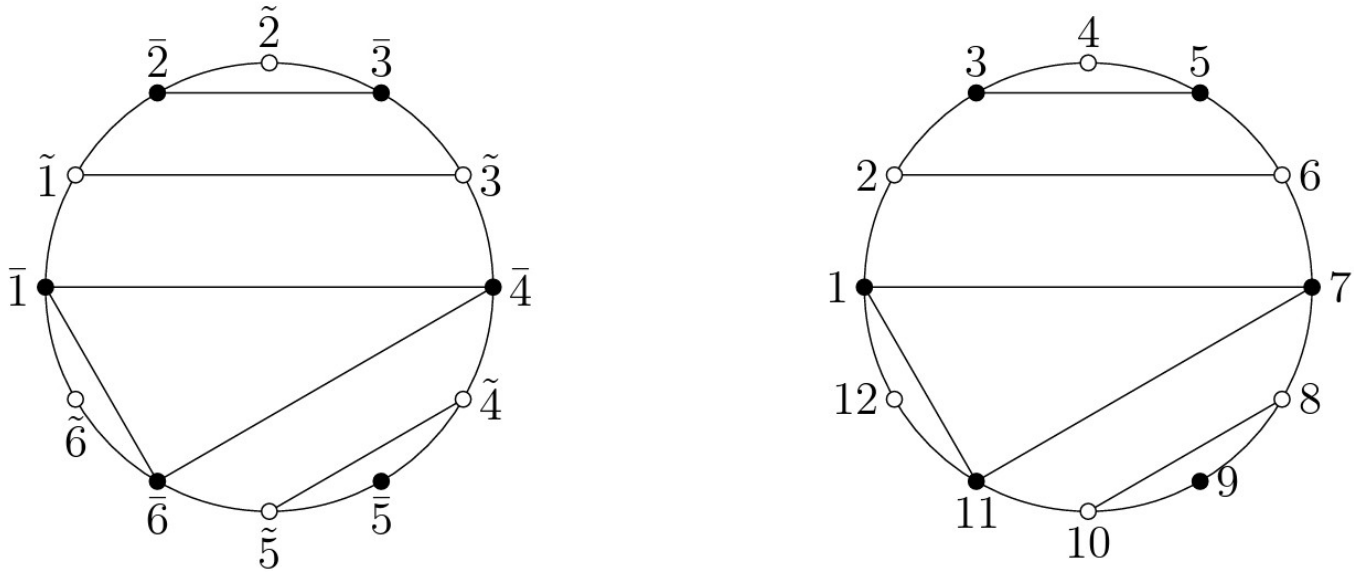



Рис. 3.5: Разбиение $\sigma = (\bar{1}, \bar{4}, \bar{6}|\bar{2}, \bar{3}|\bar{5})$ и двойственное к нему $\widetilde{\sigma} = (\widetilde{1}, \widetilde{3}|\widetilde{2}|\widetilde{4}, \widetilde{5}|\widetilde{6})$

**Определение 3.3.**

*Рассмотрим электрическую сеть $\mathcal{E}(G, \omega) \in \overline{E}_n$. Для каждого nc-разбиения $\sigma$ определим ее производящую функцию следующим образом:*

$$L_\sigma = \sum_{F|\sigma(F)=\sigma} wt(F),$$

*где суммирование ведется по всем таким рощам, что:*

- *Каждая роща $F$ имеет границу, определяемую nc-разбиением $\sigma$;*
- *Все компоненты связности каждой рощи $F$ содержат хотя бы одну граничную вершину сети $\mathcal{E}$.*

**Определение 3.4.**

*В частности, нам особенно понадобятся следующие nc-разбиения, для которых*

*мы введем специальные обозначения:*

- $L_{инс} := L_{*|*|*\ldots}$ — *производящая функция лесов с максимальным количеством компонент связности;*
- $L_{ij} := L_{i,j|*|*\ldots}$ — *производящая функция лесов, в которых граничные вершины $i$ и $j$ лежат в одной компоненте связности, а все остальные граничные вершины лежат в разных компонентах связности;*
- $L := L_{12\ldots n}$ — *производящая функция остовных деревьев.*

*Также введем обозначение* $L_{kk} := \sum_{i \neq k} L_{ik}$.

**Определение 3.5.**

*Мы будем называть $(n-1)$-элементное подмножество $I \subset \{1, \ldots, 2n\}$ конкордантным с nc-разбиением $\sigma$, если каждая компонента $(\sigma, \tilde{\sigma})$ разбиения содержит ровно один элемент не из $I$, см. Рисунок 3.6.*

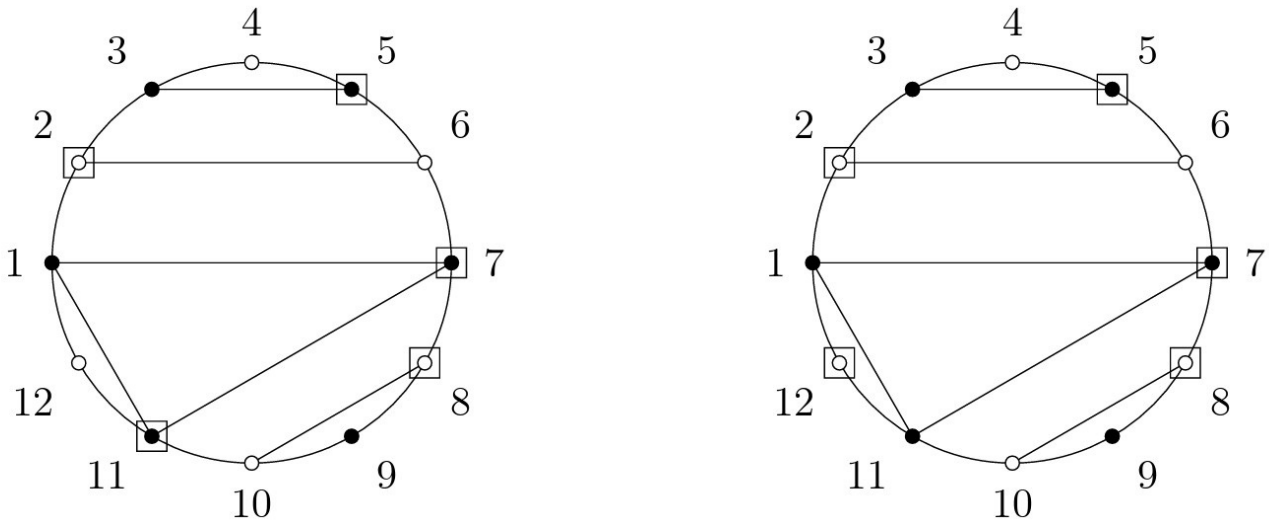



Рис. 3.6: Разбиение $\sigma = (\overline{1}, \overline{4}, \overline{6}|\overline{2}, \overline{3}|\overline{5})$ конкордантно с $(2, 5, 7, 8, 11)$ и не конкордантно с $(2, 5, 7, 8, 12)$

**Теорема 3.2.** [46]

*Рассмотрим электрическую сеть $\mathcal{E}(G, \omega) \in \overline{E}_n$ и ассоциированную с ней модель*

*Лама $N(\mathcal{E}^{\mathcal{T}}, w)$. Тогда выполняется следующее тождество:*

$$\Delta_I^d = \sum_{(\sigma, I)} L_\sigma,$$

*где суммирование идет по всем пс-разбиениям $\sigma$, конкордантным с $I$.*

**Пример 3.1.**

*Для сети звезда, изображенной на Рисунке 1.6, верно*

$$L_{1|2|3} = a + b + c,\ L_{123} = abc,\ L_{12|3} = ab,\ L_{13|2} = ac,\ L_{23|1} = cb;$$

$$\Delta_{12} = \Delta_{45} = ac,\ \Delta_{23} = \Delta_{56} = bc,\ \Delta_{34} = \Delta_{16} = ab,\ \Delta_{13} = \Delta_{35} = \Delta_{15} = abc,$$

$$\Delta_{24} = \Delta_{46} = \Delta_{26} = a + b + c,\ \Delta_{14} = ac + ab,\ \Delta_{25} = ca + cb,\ \Delta_{36} = ba + bc.$$

*Для кактусной электрической сети на Рисунке 1.5, например, выполнено:*

$$L_{1|234} = 0, L_{13|24} = 0, L_{13|2|4} = 1, L_{134|2} = c + b.$$

Теорема 3.2 позволяет явно по каждой сети $\mathcal{E}(G, \omega) \in \overline{E}_n$ построить ассоциированную с ней точку $X(\mathcal{E}) \in \mathrm{Gr}_{\geq 0}(n-1, 2n)$.

**Теорема 3.3.** [46]
*Отображение $X : \overline{E}_n \to Gr_{\geq 0}(n-1, 2n)$ является вложением, которое мы в дальнейшем будем называть* ***вложением Лама****. Образ достаточно связных сетей при вложении Лама лежит в $Gr_{>0}(n-1, 2n)$.*

Теперь, используя понятие конкордантности, введенное в Определении 3.5, мы получим связь между производящими функциями $L_{unc}, L, L_{ij}, L_{kk}$ и координатами Плюккера модели Лама $N(\mathcal{E}^{\mathcal{T}}, w)$, которая понадобится нам в дальнейшем.

**Лемма 3.1.** [7]

*Рассмотрим электрическую сеть* $\mathcal{E}(G,\omega) \in E_n$ *и ассоциированную с ней сеть* $N(\mathcal{E}^{\mathcal{T}}, w)$*, для координат Плюккера последней верны следующие тождества:*

- $L_{unc} = \Delta^d_S$, *где* $S, |S| = n-1$ — *любой набор четных индексов;*
- $L = \Delta^d_T$, *где* $T, |T| = n-1$ — *любой набор нечетных индексов;*
- $L_{ij} = \Delta^d_{(2i-1)J}$, *где* $J, |J| = n-2$ — *набор всех четных индексов кроме двух ближайших к* $2j-1$*;*
- $L_{kk} = \Delta^d_{(2k-1)K}$, *где* $K, |K| = n-2$ — *набор всех четных индексов кроме двух ближайших к* $2k-1$.

*Доказательство.*

**1.** Рассмотрим $nc$-разбиения $\sigma = (\bar{1}|\bar{2}|\dots|\bar{n})$, дуальное к нему разбиение имеет вид $\tilde{\sigma} = (\tilde{1}\tilde{2}\dots\tilde{n})$. Также рассмотрим произвольное множество $S$ ($|S| = n-1$) из четных индексов. Легко видеть, что $(\sigma, \tilde{\sigma})$ конкордантно с множеством $S$ и нет других $\sigma$, конкордантных с $S$.

**2.** Доказательство полностью аналогично доказательству пункта **1.**

**3.** Рассмотрим $nc$-разбиение $\sigma = (\bar{i}\bar{j}|*|\dots|*)$ и его дуальное разбиение, которое имеет вид $\tilde{\sigma} = (\tilde{A} - \tilde{j_1}|\tilde{B} - \tilde{j_2})$, где $\tilde{j_1}$ и $\tilde{j_2}$ — две ближайшие точки к $\bar{j}$ и $\tilde{A}, \tilde{B}$ — некоторые подмножества $(\widetilde{12}\dots\widetilde{n})$. Легко видеть, что $\sigma$ конкордантно с множеством $(2i-1) \cup J$, где $J$ — множество, состоящее из всех четных индексов, кроме двух ближайших к $2j-1$ и $|J| = n-2$.

Предположим, что существует другое $\sigma$, конкордантное с множеством $\{2i-1\} \cup J$, тогда $\sigma$ должно иметь вид $\sigma = (\bar{i}\bar{k}|*|\dots|*)$ $(k \neq j)$, а дуальное к нему должно иметь вид $\widetilde{\sigma} = (\widetilde{A'}|\widetilde{B'})$, где $\widetilde{A'}, \widetilde{B'}$ — некоторые подмножества $(\widetilde{12}\dots\widetilde{n})$. Тогда хотя бы одна из двух ближайших граничных вершин к $2j-1$ должна принадлежать $J$, потому что либо $\widetilde{A'}$, либо $\widetilde{B'}$ содержат обе точки $\widetilde{j}_1$ и $\widetilde{j}_2$, поэтому мы получаем противоречие и $L_{ij} = \Delta^d_{\{2i-1\}\cup J}$.

**4.** Легко видеть, что каждое $nc$-разбиение $\sigma = (\bar{k}\bar{i}|*|\ldots|*)$ конкордантно с множеством $(2k-1) \cup K$, где $K$ — множество, состоящее из всех четных индексов, кроме двух ближайших к $2k-1$ и $|K| = n-2$.

Чтобы завершить доказательство, остается только заметить, что любое $\sigma$, которое может быть конкордантно с $(2k-1) \cup K$, должно иметь форму $\sigma = (\bar{k}\bar{i}|*|\ldots|*)$ $(k \neq i)$. Таким образом, мы уже перечислили все такие $\sigma$, которые конкордантны с множеством $(2k-1) \cup K$. □

**Пример 3.2.**

*Например, для электрической сети с* 5 *граничными вершинами верно:* $L_{13} = \Delta^d_{128(10)}, L_{11} = \Delta^d_{1468}$.

**Пример 3.3.**

*Для любого* $J \subset \{1, \ldots, 2n\}$, $|J| = n-1$, *содержащего только четные индексы, имеем* $\Delta^d_J = L_{unc}$, *в частности* $\Delta^d_{246\ldots 2n-2} = L_{unc}$.

*Для любого* $J \subset \{1, \ldots, 2n\}$, $|J| = n-1$, *содержащего только нечетные индексы, имеем* $\Delta^d_J = L_{123\ldots n}$, *в частности* $\Delta^d_{135\ldots 2n-3} = L$.

## 3.3 Параметризация образа вложения Лама с помощью матриц отклика

В этом разделе мы изложим один из основных результатов нашей работы — получим явную параметризацию вложения Лама с помощью матриц отклика электрических сетей.

**Теорема 3.4.** [7]

*Рассмотрим электрическую сеть* $\mathcal{E}(G, \omega) \in E_n$ *и ее матрицу отклика* $M_R(\mathcal{E})$,

*сконструируем из ее элементов* $x_{ij}$ *матрицу* $\Omega_n(\mathcal{E})$ *по правилу:*

$$\Omega_n(\mathcal{E}) = \begin{pmatrix} x_{11} & 1 & -x_{12} & 0 & x_{13} & 0 & \dots & (-1)^n \\ -x_{21} & 1 & x_{22} & 1 & -x_{23} & 0 & \dots & 0 \\ x_{31} & 0 & -x_{32} & 1 & x_{33} & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \end{pmatrix}, \tag{3.1}$$

*Тогда пространство вектор-строк матрицы* $\Omega_n(\mathcal{E})$ *задает точку* $\mathrm{Gr}_{\geq 0}(n-1, 2n)$, *причем эта точка совпадает с точкой* $X(\mathcal{E})$, *задаваемой вложением Лама.*

**Пример 3.4.**

*Для сети* $\mathcal{E}(G, \omega) \in E_4$ *матрица будет иметь следующий вид:*

$$\Omega_4(\mathcal{E}) = \begin{pmatrix} x_{11} & 1 & -x_{12} & 0 & x_{13} & 0 & -x_{14} & 1 \\ -x_{21} & 1 & x_{22} & 1 & -x_{23} & 0 & x_{24} & 0 \\ x_{31} & 0 & -x_{32} & 1 & x_{33} & 1 & -x_{34} & 0 \\ -x_{41} & 0 & x_{42} & 0 & -x_{43} & 1 & x_{44} & 1 \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим электрическую сеть $\mathcal{E}(G, \omega) \in E_n$ и ассоциированную с ней модель Лама $N(\mathcal{E}^{\mathcal{T}}, w)$ с $2n$ граничными вершинами. Введем на $N(\mathcal{E}^{\mathcal{T}}, w)$ совершенную ориентацию $O$ со множеством истоков $I, |I| = n-1$, все индексы которых четные. Заметим, что всегда существует хотя бы одна такая совершенная ориентация, действительно, по Лемме 3.1:

$$\Delta_I^d = \sum_{\Pi \in \Pi(I)} \mathrm{wt}(\Pi) = L_{unc} \neq 0,$$

поэтому по Предложению 2.2 для каждого $\Pi \in \Pi(I)$ существует совершенная ориентация $O_\Pi(I)$.

Нашей ближайшей целью будет нахождение связи координат Плюккера моделей $N(\mathcal{E}^{\mathcal{T}}, w', O)$, $N(\mathcal{E}^{\mathcal{T}}, w)$ и модели Постникова $PN(\mathcal{E}^{\mathcal{T}}, w', O)$.

**Теорема 3.5.** [7]

*Рассмотрим электрическую сеть $\mathcal{E}(G,\omega) \in E_n$ и ассоциированную с ней модель Лама $N(\mathcal{E}^{\mathcal{T}}, w)$. Пусть $O(I)$ — совершенная ориентация с множеством истоков $I, |I| = n-1$, которые все помечены четными индексами. Рассмотрим, наконец, модель Постникова $PN(\mathcal{E}^{\mathcal{T}}, \omega', O(I))$, тогда для миноров ее расширенной матрицы граничных измерений $A$ выполняется следующее тождество:*

$$\Delta_J(A) = \frac{\Delta_J^d}{L_{unc}}.$$

*Доказательство.* Действительно, используя Теоремы 2.5 и 2.8, мы можем написать следующую цепочку равенств:

$$\Delta_J(A) = \frac{\sum\limits_F wt(F)}{\sum\limits_C wt(C)} = \frac{\Delta_J^f}{\sum\limits_C wt(C)} = \frac{\Delta_J^d}{wt(\Pi_0)\sum\limits_C wt(C)},$$

где $wt(\Pi_0)$ — вес димера, отвечающего совершенной ориентации $O(I)$. Заметим, что непосредственно из определения 2.8 следует, что $\Delta_I(A) = 1$, с другой стороны:

$$\Delta_I(A) = \frac{\sum\limits_F wt(F)}{\sum\limits_C wt(C)} = \frac{\Delta_I^f}{\sum\limits_C wt(C)} = \frac{\Delta_I^d}{wt(\Pi_0)\sum\limits_C wt(C)}.$$

Откуда мы получаем, что $\Delta_I^d = wt(\Pi_0)\sum\limits_C wt(C)$. Для завершения доказательства нам остается только воспользоваться Леммой 3.1, из которой мы получаем равенство

$$L_{unc} = \Delta_I^d = wt(\Pi_0)\sum_C wt(C).$$

□

Теперь все готово для того, чтобы получить конструкцию вложения в положительную часть Грассманиана электрических сетей с помощью их матриц отклика. Рассмотрим электрическую сеть $\mathcal{E}(G,\omega) \in E_n$ на $n$ вершинах

и произвольное $k \in \{1, \ldots, n\}$. Пусть $I_k$ — множество всех четных индексов из $\{2, \ldots, 2n\}$, кроме четного индекса, ближайшего к $2k-1$ против часовой стрелки. Обозначим его $j_k$ (напомним, что $|I_k| = n-1$). Обозначим через $j^k$ четный индекс, ближайший к $2k-1$ по часовой стрелке. Для нашей сети $\mathcal{E}(G, \omega)$ и ассоциированной с ней моделью Лама $N(\mathcal{E}^{\mathcal{T}}, w)$, построим модель Постникова $PN(\mathcal{E}^{\mathcal{T}}, w', O_k)$, где $O_k$ — совершенная ориентация с множеством истоков $I_k$. Пусть $A_k$ — расширенная матрица граничных измерений $PN(\mathcal{E}^{\mathcal{T}}, w', O_k)$.

**Теорема 3.6.** [7]

*Обозначим через $a_{j^k \to m}$ элемент матрицы $A_k$, который соответствует сумме весов потоков из $j^k$ в $m$. Тогда имеет место следующее:*

***1.*** $a_{j^k \to m} = (-1)^{s+1} x_{k\frac{m+1}{2}}$ *для любого стока с нечетным индексом* $m \neq 2k-1$, *где* $s$ — *количество элементов в* $I_k$, *расположенных строго между истоком, обозначенным* $j^k$, *и стоком, помеченного индексом* $m$;

***2.*** $a_{j^k \to m} = x_{kk}$ *для стока, помеченного индексом* $m = 2k-1$;

***3.*** $a_{j^k \to m} = (-1)^s$ *для стока, помеченного индексом* $m = j_k$, *где* $s$ — *количество элементов в* $I_k$, *расположенных между истоком, помеченным как* $j^k$ *и стоком, помеченным индексом* $j_k$;

***4.*** $a_{j^k \to j^k} = 1$;

***5.*** $a_{j^k \to m} = 0$ *для истока, помеченного индексом* $m \neq j^k$.

**Пример 3.5.** *Для электрической сети на Рисунке 3.7 верно:*

$$L_{1|2|3} = 1,\ L_{12|3} = a,\ L_{13|2} = c,\ L_{23|1} = b;$$

$$a_{21} = a + c,\ a_{22} = 1,\ a_{23} = a,\ a_{24} = 0,\ a_{25} = -c,\ a_{26} = -1;$$

$$x_{12} = \frac{-L_{12|3}}{L_{1|2|3}} = -a,\ x_{13} = \frac{-L_{13|2}}{L_{1|2|3}} = -c.$$

*Доказательство.*

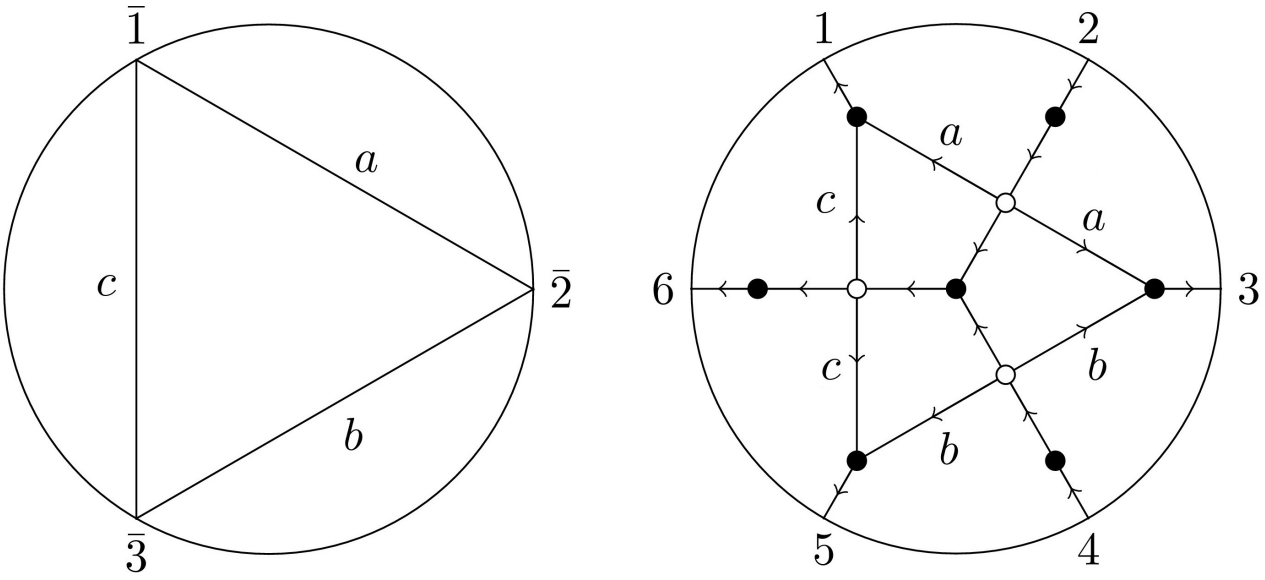



Рис. 3.7: К Примеру 3.5

**1.** Из Определения 2.9 мы получаем, что

$$\Delta_{\{m\}\cup I_k-\{j^k\}}(A_k) = (-1)^s a_{j^k\to m}.$$

С другой стороны, в силу Теоремы 3.5 мы получаем что:

$$\Delta_{\{m\}\cup I_k-\{j^k\}}(A_k) = \frac{\Delta^d_{\{m\}\cup I_k-\{j^k\}}}{L_{unc}}.$$

Наконец, используя, Лемму 3.1 и Теорему 1.15, мы получаем:

$$\frac{\Delta^d_{\{m\}\cup I_k-\{j^k\}}}{L_{unc}} = \frac{L_{\frac{m+1}{2}k}}{L_{unc}} = -x_{\frac{m+1}{2}k} = -x_{k\frac{m+1}{2}}.$$

**2.** Из Определения 2.9

$$\Delta_{\{m\}\cup I_k-\{j^k\}}(A_k) = a_{j^k\to m}.$$

С другой стороны, в силу Теоремы 2.9 мы получаем, что

$$\Delta_{\{m\}\cup I_k-\{j^k\}}(A_k) = \frac{\Delta^d_{\{m\}\cup I_k-\{j^k\}}}{L_{unc}}.$$

Наконец, используя Лемму 3.1 и Теорему 1.15, мы получаем:

$$\frac{\Delta^d_{\{m\}\cup I_k-\{j^k\}}}{L_{unc}} = \frac{L_{kk}}{L_{unc}} = x_{kk}.$$

**3.** Из Определения 2.9

$$\Delta_{\{m\}\cup I_k-\{j^k\}}(A_k) = (-1)^s a_{j^k\to m}.$$

С другой стороны, Теорема 2.9 влечет, что

$$\Delta_{\{m\}\cup I_k-\{j^k\}}(A_k) = \frac{\Delta^d_{\{m\}\cup I_k-\{j^k\}}}{L_{unc}}.$$

Наконец, используя Лемму 3.1, мы получаем:

$$\frac{\Delta^d_{\{m\}\cup I_k-\{j^k\}}}{L_{unc}} = \frac{L_{unc}}{L_{unc}} = 1.$$

**4.** Это утверждение сразу следует из Определения 2.9, поскольку $m = j^k$ является истоком

**5.** Это утверждение сразу следует из Определения 2.9, поскольку $m \neq j^k$ является истоком. □

Обозначим за $v_k$ вектор-строку матрицы $A_k$, отвечающей сумме весов всех путей из $j(k)$ в $m$. Рассмотрим все такие векторы для каждого $k$ и организуем их в матрицу, которая будет иметь вид:

$$\Omega_n(\mathcal{E}) = \begin{pmatrix} x_{11} & 1 & -x_{12} & 0 & x_{13} & 0 & \dots & (-1)^n \\ -x_{21} & 1 & x_{22} & 1 & -x_{23} & 0 & \dots & 0 \\ x_{31} & 0 & -x_{32} & 1 & x_{33} & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \end{pmatrix} \tag{3.2}$$

Для завершения доказательства Теоремы 3.4, остается только заметить, что по Теореме 2.7 все векторы-строки матрицы $\Omega_n(\mathcal{E})$ принадлежат одному и

тому же подпространству, определяемому расширенной матрицей граничных измерений $A_k$ (для любого $k$). Более того, в силу Следствия 2.9 это подпространство определяет ту же точку в $Gr(n-1, 2n)$, что и точка, заданная моделью Лама $N(\mathcal{E}^{\mathcal{T}}, w)$, и по Теореме 3.2 эта точка принадлежит $\mathrm{Gr}_{\geq 0}(n-1, 2n)$.

**Следствие 3.1.** [7]

*Обозначим за $\Omega'_n(\mathcal{E})$ матрицу, получаемую удалением последней строки матрицы $\Omega_n(\mathcal{E})$. Тогда пространство вектор-строк $\Omega'_n(\mathcal{E})$ задает ту же самую точку $\mathrm{Gr}_{\geq 0}(n-1, 2n)$, что и пространство вектор-строк $\Omega_n(\mathcal{E})$. Более того верно, что:*

$$\Delta_I\big(\Omega'_n(\mathcal{E})\big) = \frac{\Delta_I^d}{L_{unc}}.$$

## 3.4 Двойственность и действие циклической группы

В этом разделе мы опишем действие циклической группы на $\overline{E}_n$ и свяжем его с операцией взятия двойственной сети.

**Определение 3.6.** [47]

*Определим циклический оператор $\chi_{k,m}$, действующий на Грассманиан $\mathrm{Gr}(k, m)$ как*

$$\chi_{k,m} : (v_1, v_2, \ldots, v_m) \to ((-1)^{k-1} v_m, v_1, \ldots, v_{m-1}),$$

*где $v_i$ для $i \in \{1, \ldots, m\}$ — столбцы матрицы, представляющей точку $\mathrm{Gr}(k, m)$.*

**Лемма 3.2.** [47]

*Циклический оператор $\chi_{k,m}$ действует на $\mathrm{Gr}_{\geq 0}(k, m)$.*

*Доказательство.* Рассмотрим точку $X \in \mathrm{Gr}_{\geq 0}(k, m)$ и пусть $\Delta_I(X)$ — ее координаты Плюккера. Тогда легко проверить, что для координат Плюккера точки $\chi_{k,m}(X)$ верно равенство:

$$\Delta_I(X) = \Delta_{sh(I) \bmod m}\big(\chi_{k,m}(X)\big), \tag{3.3}$$

где, если $I = i_1 i_2 \dots i_k$, то $sh(I) = (i_1 + 1 \bmod m)(i_2 + 1 \bmod m) \dots (i_k + 1 \bmod m)$. □

Непосредственно из формулы (3.3) мы получаем следующее наблюдение.

**Лемма 3.3.** [47]

*Если модель Лама $N$ задает точку $X \in \mathrm{Gr}_{\geq 0}(k, m)$, то модель Лама $N'$, получаемая из $N$ циклическим сдвигом по часовой стрелке на 1 номеров ее граничных вершин, задает точку $\chi_{k,m}(X)$.*

Используя Теорему 3.3, можно получить также, что оператор $\chi_{n-1,2n}$ действует на $\overline{E}_n$. Причем имеется простое описание этого действия на языке только электрических сетей.

**Теорема 3.7.** [6]

*Рассмотрим $\mathcal{E} \in \overline{E}_n$ и двойственную к ней сеть $\mathcal{E}^* \in \overline{E}_n$. Пусть $X(\mathcal{E}), X(\mathcal{E}^*)$ точки $\mathrm{Gr}_{\geq 0}(n-1, 2n)$, заданные вложением Лама. Тогда верно, что*

$$X(\mathcal{E}^*) = X(\mathcal{E}) s^{-1},$$

*где $s$ — матрица оператора $\chi_{n-1,2n}$ в стандартном базисе, которая имеет следующий вид:*

$$s = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ (-1)^n & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

*Доказательство.* Предположим сначала, что $\mathcal{E} \in E_n$. Так как действие $s^{-1}$

сдвигает координаты Плюккера точки $X(\mathcal{E})$ на 1 :

$$\Delta_{i_1 \ldots i_{n+1}}\big(X(\mathcal{E})\big) = \Delta_{(i_1-1 \ mod \ 2n)\ldots(i_{n-1}-1 \ mod \ 2n)}\big(X(\mathcal{E})s^{-1}\big),$$

мы получаем, что точка $X(\mathcal{E})s^{-1} \in \mathrm{Gr}_{\geq 0}(n-1, 2n)$ задается моделью Лама $s^{-1}N$, которая получается из $N(\mathcal{E}^{\mathcal{T}}, w)$ сдвигом нумерации ее граничных вершин против часовой стрелки на 1, как это показано на Рисунке 3.8.

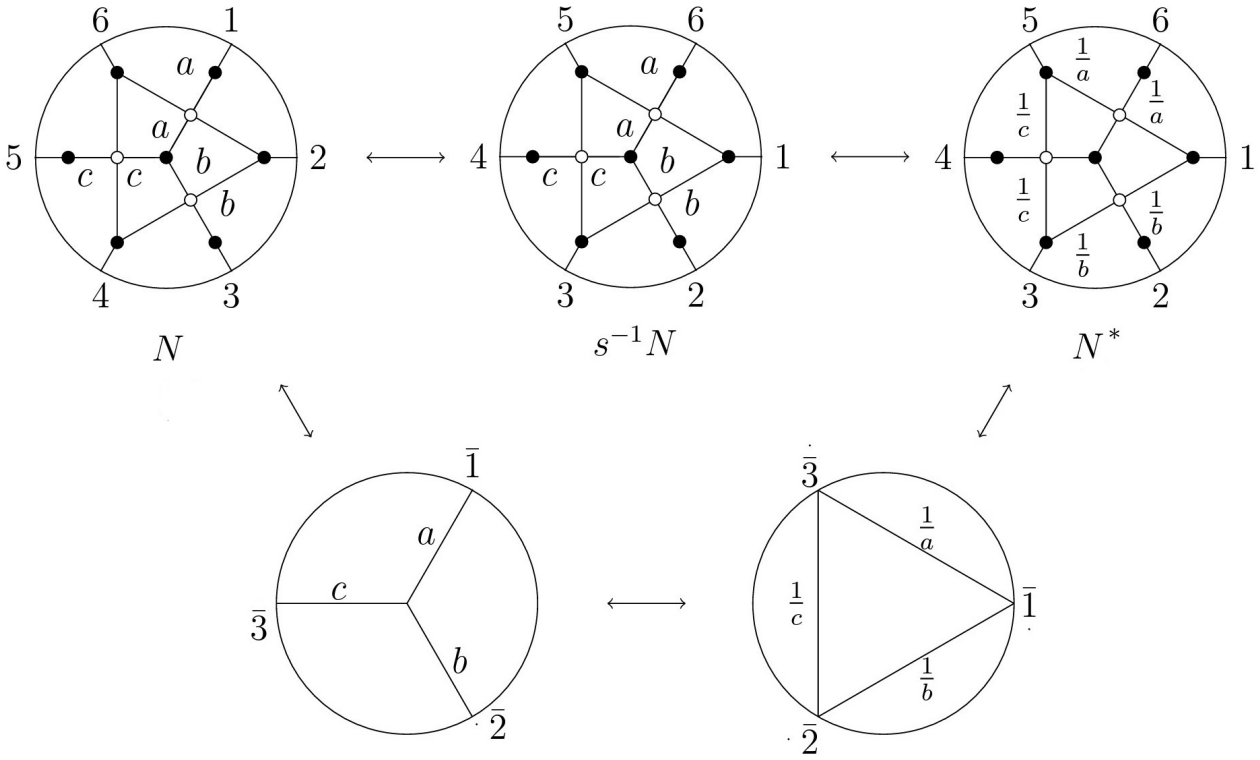



Рис. 3.8: Двойственность как действие циклического сдвига

Применим теперь калибровочные преобразования в каждой черной вершине степени 4 модели $s^{-1}N$ (как показано на Рисунке 3.9), чтобы получить модель Лама $N^*$. Поскольку калибровочные преобразования не меняют точку Грассманиана, мы получаем, что $X(\mathcal{E})s^{-1}$ задается моделью Лама $N^*$. С другой стороны, легко видеть, что $N^* = N(\mathcal{E}^{*\mathcal{T}}, w^*)$.

Для завершения доказательства достаточно воспользоваться соображениями непрерывности, из которых следует, что теорема справедлива и для

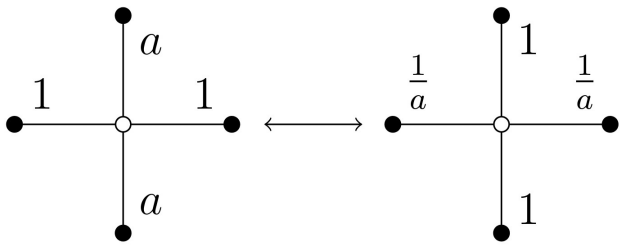



Рис. 3.9: Калибровка в черных вершинах

кактусных сетей $\mathcal{E}, \mathcal{E}^* \in \overline{E}_n$. □

## 3.5 Параметризация образа вложения Лама с помощью матриц эффективных сопртивлений

В этом разделе мы изложим еще один из основных результатов нашей работы — продемонстрируем явную параметризацию образа вложения Лама с помощью матриц эффективных сопротивлений.

**Определение 3.7.**

*Рассмотрим связную кактусную электрическую сеть $\mathcal{E}(G, \omega) \in \overline{E}_n$ и ее матрицу эффективных сопротивлений $R(\mathcal{E})$. Определим ассоциированную с $\mathcal{E}$ точку* $\mathrm{Gr}(n-1, 2n)$ *как пространство строк матрицы:*

$$\Omega_{n,R}(\mathcal{E}) = \begin{pmatrix} 1 & m_{11} & 1 & -m_{12} & 0 & m_{13} & 0 & \dots \\ 0 & -m_{21} & 1 & m_{22} & 1 & -m_{23} & 0 & \dots \\ 0 & m_{31} & 0 & -m_{32} & 1 & m_{33} & 1 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}, \tag{3.4}$$

*где $m_{ij} = -\frac{1}{2}(R_{i,j} + R_{i+1,j+1} - R_{i,j+1} - R_{i+1,j})$ и $R_{ij} = 0$, если $i$ и $j$ склеены вместе на границе $\mathcal{E}$.*

**Пример 3.6.**

*Для сети* $e(G,\omega) \in E_4$ *матрица* $\Omega_{4,R}(e)$ *имеет вид:*

$$\Omega_{4,R}(e) = \begin{pmatrix} 1 & m_{11} & 1 & -m_{12} & 0 & m_{13} & 0 & -m_{14} \\ 0 & -m_{21} & 1 & m_{22} & 1 & -m_{23} & 0 & m_{24} \\ 0 & m_{31} & 0 & -m_{32} & 1 & m_{33} & 1 & -m_{34} \\ 1 & -m_{41} & 0 & m_{42} & 0 & -m_{43} & 1 & m_{44} \end{pmatrix}.$$

**Теорема 3.8.** [6]

*Пространство строк матрицы* $\Omega_{n,R}(\mathcal{E})$ *определяет ту же точку* $\mathrm{Gr}_{\geq 0}(n-1,2n)$*, что и точка* $X(\mathcal{E})$*, задаваемая вложением Лама. При этом выполняется следующее:*

$$\Delta_I\big(\Omega'_{n,R}(\mathcal{E})\big) = \frac{\Delta_I^d}{L},$$

*где* $\Omega'_{n,R}(\mathcal{E})$ *— матрица, получаемая из* $\Omega_{n,R}(\mathcal{E})$ *удалением последней строки.*

*Доказательство.* Предположим сначала, что $\mathcal{E} \in E_n$ — связная сеть. Тогда согласно Теореме 3.7, матрицы $\Omega_n(\mathcal{E}^*)s$ и $\Omega_n(\mathcal{E})$ определяют одну и ту же точку $\mathrm{Gr}_{\geq 0}(n-1,2n)$. Заметим, что

$$\Omega_n(\mathcal{E}^*)s = \begin{pmatrix} 1 & m_{11} & 1 & -m_{12} & 0 & m_{13} & 0 & \dots \\ 0 & -m_{21} & 1 & m_{22} & 1 & -m_{23} & 0 & \dots \\ 0 & m_{31} & 0 & -m_{32} & 1 & m_{33} & 1 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix},$$

где $x^*_{ij}$ — элементы матрицы отклика $M_R(\mathcal{E}^*)$. С другой стороны, в силу Теоремы 1.17:

$$x^*_{ij} = -\frac{1}{2}(R_{i,j} + R_{i+1,j+1} - R_{i,j+1} - R_{i+1,j}).$$

Поэтому мы получаем, что

$$\Omega_{n,R}(\mathcal{E}) = \Omega_n(\mathcal{E}^*)s. \tag{3.5}$$

Заметим также, что в силу Теоремы 3.4 $\operatorname{rank}\big(\Omega_n(\mathcal{E}^*)\big) = n-1$ (альтернированная сумма строк $\Omega_n(\mathcal{E})$ равна нулю). Поэтому, используя равенство (3.5), мы заключаем, что те же свойства выполняются и для $\Omega_{n,R}(\mathcal{E})$. Таким образом, пространства вектор-строк матриц $\Omega_{n,R}(\mathcal{E})$ и $\Omega'_{n,R}(\mathcal{E})$ совпадают. Для завершения доказательства утверждения для связных сетей остается только заметить, что $\Delta_{135\ldots 2n-3}\big(\Omega'_n(\mathcal{E}^*)s^{-1}\big) = 1$ и $\Delta^d_{135\ldots 2n-3} = L$, см. Лемму 3.1.

Для доказательства теоремы для связных кактусных сетей достаточно воспользоваться соображениями непрерывности. □

**Замечание 3.1.**

*Отметим, что для связных сетей Теорему 3.8 можно получить другим способом. А именно, если рассмотреть точку*

$$\big(M'_R(\mathcal{E})\big)^{-1}\Omega'_n(\mathcal{E}).$$

*Это рассуждение, несмотря на некоторую его вычислительную сложность, оказывается применимым и для несвязных сетей, что позволяет явно задать образ при вложении Лама для любой сети, см. [6].*

## 3.6 Действие электрической группы как приклейка мостов и спайков

Операции приклеивания моста и спайка, определенные в Разделе 1.7, задают действие положительной части **группы Лама** $\mathcal{E}l_{2n}$ на $\overline{E}_n$, к описанию которого мы и переходим в этом разделе.

**Определение 3.8.**

*Невырожденную матрицу $M \in \mathrm{Mat}_{n\times n}$ мы будем называть* ***полностью положительной****, если все ее миноры неотрицательны.*

Используя теорему Коши-Бине, легко проверить, что множество $M_m^+$, состоящее из всех полностью положительных матриц, образует полугруппу. Аналогично проверяется, что если $X \in \mathrm{Gr}_{\geq 0}(k,m)$, то для любой полностью положительной матрицы $M \in \mathrm{Mat}_{m\times m}$ точка $XM$ также принадлежит $Gr_{\geq 0}(k,m)$. Таким образом, полугруппа $M_m^+$ действует на $Gr_{\geq 0}(k,m)$. Это действие может быть интерпретировано как операция склейки моделей Лама, отвечающих $X$ и $M$. Мы не будем описывать эту операцию в полной мере и изложим только ту часть общей теории, которая понадобится нам для изучения электрических сетей.

**Определение 3.9.**

*Определим элементарные матрицы $x_i(t)$ и $y_i(t)$ размера $2n \times 2n$ следующим образом:*

- *Для $i \in \{1,\dots,2n-1\}$ обозначим через $x_i(t)$ верхнетреугольную матрицу с единицами на главной диагонали и только одним ненулевым элементом $(x_i)_{i,i+1} = t$ вне диагонали;*
- *Для $i \in \{1,\dots,2n-1\}$ обозначим через $y_i(t)$ нижнетреугольную матрицу с единицами на главной диагонали и только одним ненулевым элементом $(y_i)_{i+1,i} = t$ вне диагонали;*
- *Для $i = 2n$ определим $x_n(t) = sx_1(t)s^{-1}$ и $y_n(t) = sy_1(t)s^{-1}$, где $s$ — матрица оператора циклического сдвига из Раздела 3.4.*

Используя еще раз теорему Коши-Бине, легко проверить, что полугруппа, порожденная произведением всех $\{x_i(t), y_i(t)\}$ для всевозможных $t > 0$, действует на $\mathrm{Gr}_{\geq 0}(n-1,2n)$. Следующая теорема раскрывает геометрический смысл этого действия, см. Рисунок 3.10.

**Теорема 3.9.** [47]

*Пусть $N$ — модель Лама, задающая точку $X(N) \in \mathrm{Gr}_{\geq 0}(n-1, 2n)$. Рассмотрим новую модель Лама $N'$, полученную из $N$ добавлением черно-белого моста веса $t > 0$ в окрестности граничных вершин с номерами $i$ и $i+1$. Тогда верно следующее равенство точек Грассманиана:*

$$X(N') = X(N)x_i(t),$$

*где $X(N')$ — точка, задаваемая моделью $X(N')$.*

*Если же $N'$ получается из $N$ добавлением бело-черного моста веса $t > 0$ в окрестности граничных вершин с номерами $i$ и $i+1$, то выполняется*

$$X(N') = X(N)y_i(t).$$

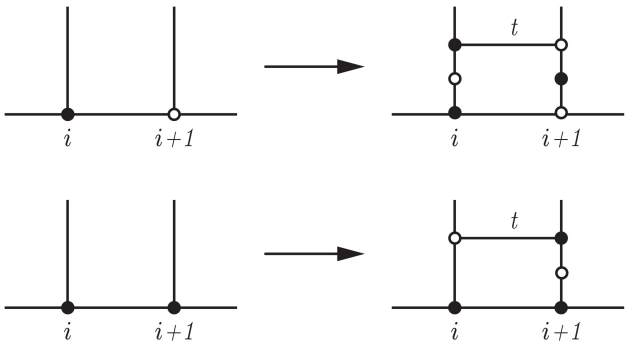



Рис. 3.10: Пример приклеивания черно-белого и бело-черного моста в окрестности граничных вершин $i$ и $i+1$

Согласно классической Теореме Левнера-Уитни множество, порожденное произведением всех матриц $\{x_i(t), y_i(t), \mathrm{diag}(t_1, \ldots, t_{2n})\}$, где $i \in \{1, \ldots, 2n-1\}$ и $t, t_j$ пробегают всевозможные положительные числа, порождает полугруппу $M_{2n}^+$. Можно проверить, что действие $\mathrm{diag}(t_1, \ldots, t_{2n})$ на $\mathrm{Gr}_{\geq 0}(n-1, 2n)$ можно интерпретировать как калибровки в граничных вершинах моделей Лама. Таким образом, это утверждение и Теорема 3.9 показывают, как преобразуются модели

Лама при действии $M_{2n}^{+}$. Можно усилить это наблюдение и получить связь этого действия с операциями приклейки мостов и спайков.

**Определение 3.10.**

*Группу, порожденную всеми матрицами $u_i(t)$, где $t$ — произвольный параметр и $i = \{1, \ldots, 2n\}$, мы будем называть* ***группой Лама*** $\mathcal{E}l_{2n}$.

*Положительную часть группы Лама определим как полугруппу, порожденную всеми $u_i(t) = x_i(t)y_{i-1}(t)$ с положительными параметрами.*

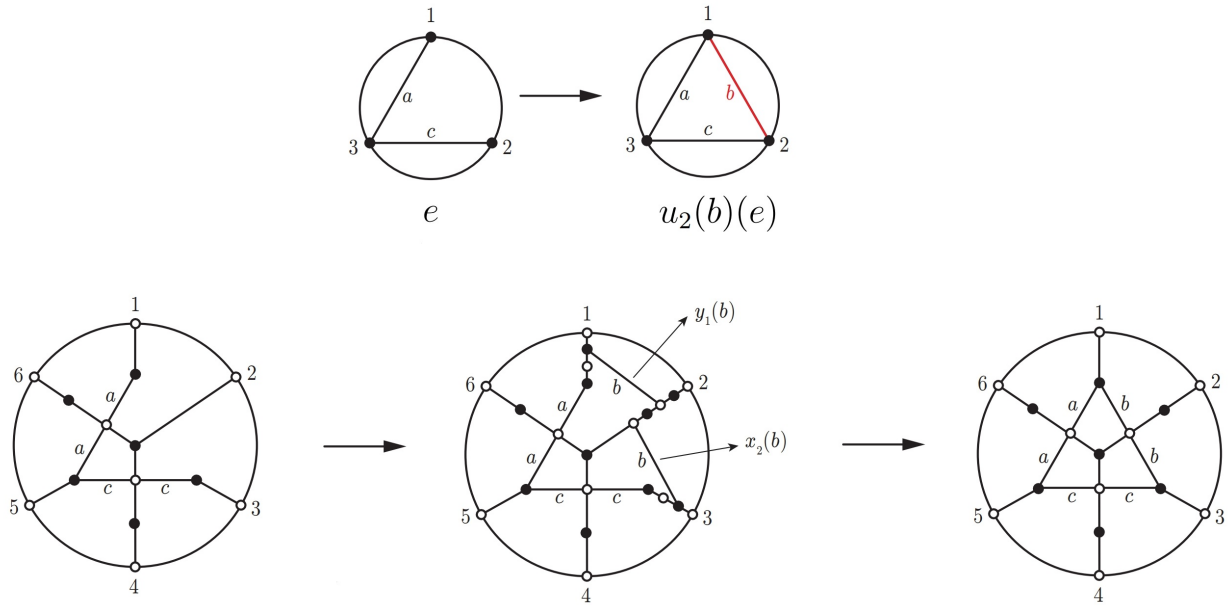



Рис. 3.11: Приклейка моста как действие группы Лама

**Теорема 3.10.** [7], [46]

*Рассмотрим сеть $\mathcal{E} \in \overline{E}_n$ и связанную с ней точку $X(\mathcal{E})$, заданную вложением Лама. Для любого $t > 0$ верны следующие равенства:*

- $X\big(u_k(t)(\mathcal{E})\big) = X(\mathcal{E})u_k(t), \forall k \equiv 0 \mod 2, k \in \{1 \ldots 2n\}$,
- $X\big(u_k(t)(\mathcal{E})\big) = X(\mathcal{E})u_k(\frac{1}{t}), \forall k \equiv 1 \mod 2, k \in \{1 \ldots 2n\}$.

*Эти формулы задают действие положительной части группы Лама $\mathcal{E}l_{2n}$ на $\overline{E}_n$.*

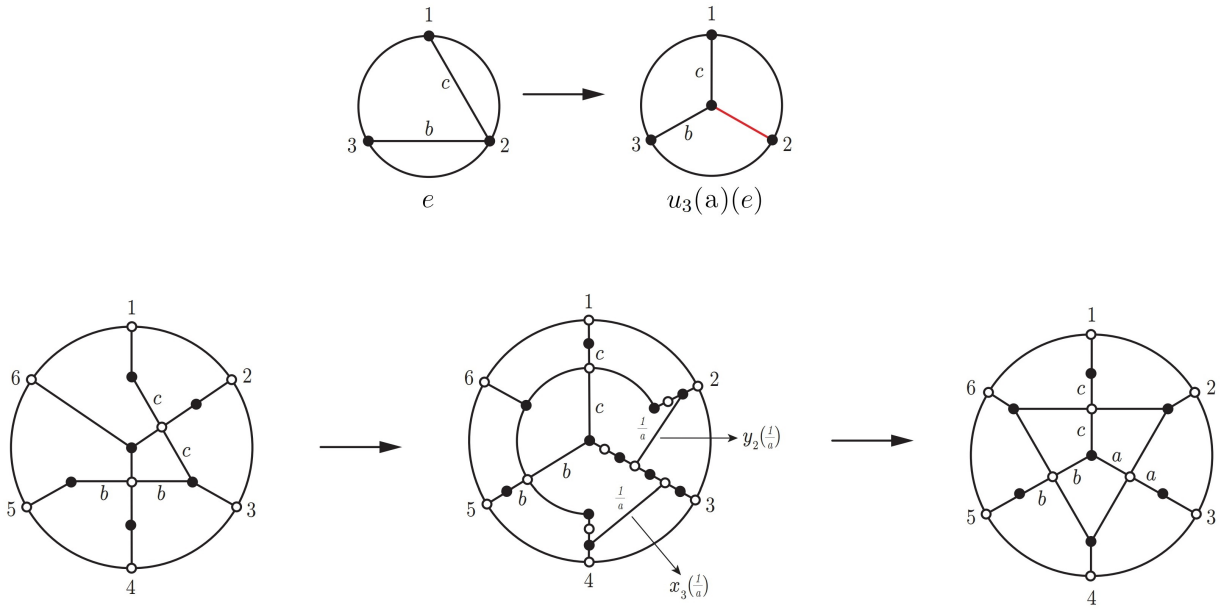



Рис. 3.12: Приклейка спайка как действие группы Лама

*Доказательство.* Доказательство непосредственно следует из Теоремы 3.9, определения обобщенного трюка Темперли и применения преобразований Постникова и калибровок, см. Рисунок 3.11 и Рисунок 3.12. □

Последнее утверждение позволяет эффективно описать образ вложения Лама.

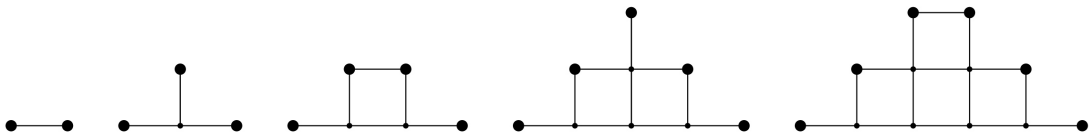


Рис. 3.13: Стандартные электрические сети с граничными вершинами, выделенными жирным шрифтом

**Теорема 3.11.** [6]

*Множество* $\overline{E}_n$ *совпадает с замыканием орбиты действия группы Лама на пустую электрическую сеть* $\mathcal{E}(\varnothing) \in E_n$.

*Доказательство.* Действительно, рассмотрим стандартную сеть с $n$ граничными вершинами. Легко проверить (см. Рисунок 3.14), что стандартная сеть (см. Рисунок 3.13) получается из пустой сети приклейкой мостов и спайков. С другой стороны, известно, что стандартные сети достаточно связные [14]. Значит, в силу Теоремы 1.8 любая сеть эквивалентна некоторой сети, получаемой из стандартной удалением или стягиванием некоторых ее ребер – таким образом, любая сеть лежит в замыкании орбиты действия группы Лама на пустую электрическую сеть. □

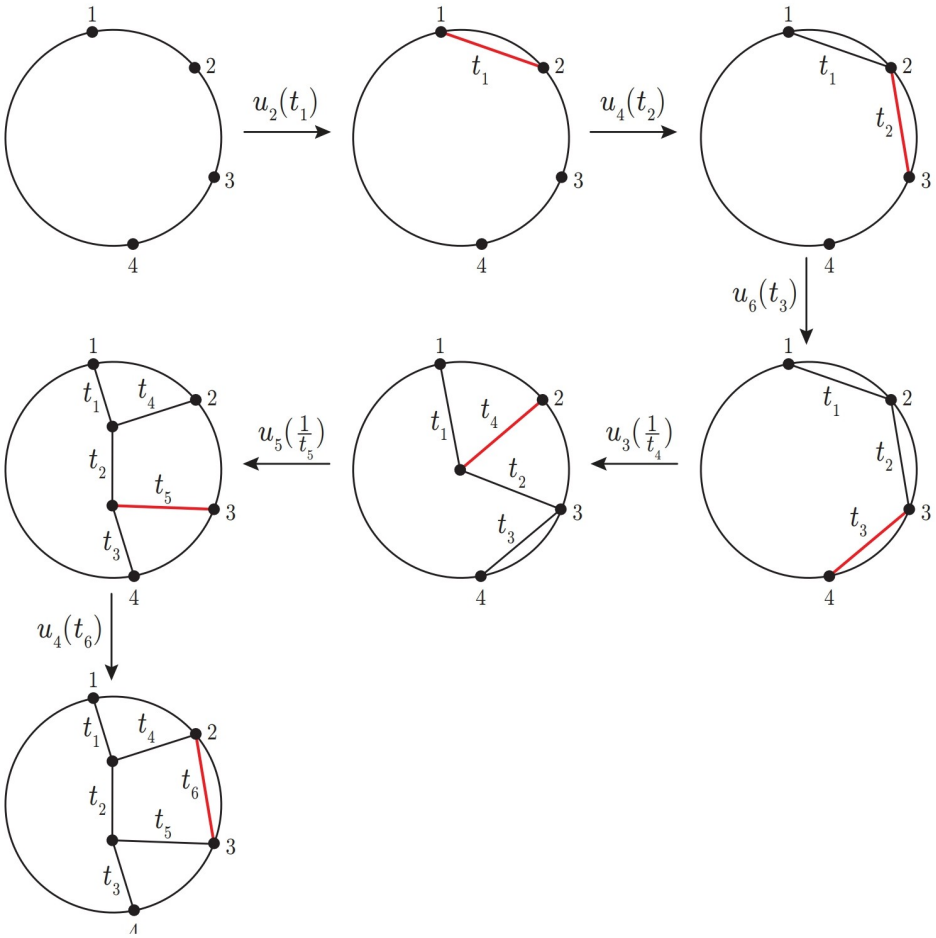



Рис. 3.14: Набор стандартной сети с 4 граничными вершинами из пустой сети

## 3.7 Лагранжева специализация вложения Лама

В этом разделе мы опишем вложение $\overline{E}_n$ в положительную часть Лагранжева Грассманиана.

**Определение 3.11.**

*Определим пространство конкордантности $H$ как пространство, образованное векторами конкордантности $v_\sigma$, где для каждого $\sigma \in \mathcal{NC}_n$ $v_\sigma = (a_{I\sigma}), I \in \binom{2n}{n-1}$.*

Можно проверить, что все векторы $v_\sigma$ линейно независимы и поэтому $\dim H = Cat_n$, где $Cat_n$ — $n$-ое число Каталана. Используя определение пространства $H$, Теорему 3.2 можно переписать следующим образом.

**Теорема 3.12.** [46]

*Образ вложения Лама лежит в $\mathrm{Gr}_{\geq 0}(n-1,2n) \cap \mathbb{P}H$, где $\mathbb{P}H$ — проективизация пространства $H$. Таким образом, для любой сети $\mathcal{E} \in \overline{E}_n$ и заданной вложением Лама точки $X(\mathcal{E})$ :*

$$X(\mathcal{E}) = \sum_{\sigma \in \mathcal{NC}_n} L_\sigma v_\sigma.$$

**Пример 3.7.**

*Так как каждый вектор $v_\sigma$ по построению имеет ровно $I \in \binom{2n}{n-1}$ координат, то ему можно сопоставить элемент из $\bigwedge^{n-1} \mathbb{R}^{2n}$, занумеровав его координаты лексикографически и отождествив $a_{I\sigma}$ с $a_{I\sigma} \bigwedge_{i \in I} e_i$. Например, для $v_{12|3} = (0,0,1,0,1,0,0,0,0,1,0,1,0,0,0) = e_1 \wedge e_4 + e_1 \wedge e_6 + e_3 \wedge e_4 + e_3 \wedge e_6$, где векторы $e_i$ — стандартный базис пространства $\mathbb{R}^6$.*

Верен даже более сильный результат.

**Теорема 3.13.** [46]

*Образ вложения Лама совпадает с $Gr_{\geq 0}(n-1,2n) \cap \mathbb{P}H$.*

**Определение 3.12.**

*Определим* $(2n-2)$*-мерное подпространство* $V \subset \mathbb{R}^{2n}$ *следующими условиями:*

$$V := \{v \in \mathbb{R}^{2n} | \sum_{i=1}^{n} (-1)^i v_{2i} = 0, \sum_{i=1}^{n} (-1)^i v_{2i-1} = 0\}.$$

Выберем в подпространстве $V$ базис:

$$v_1 = (1,0,1,0,\ldots,0,0,0),\ v_2 = (0,1,0,1,\ldots,0,0,0),\ldots,$$
$$v_{2n-2} = (0,0,0,0,\ldots,1,0,1). \quad (3.6)$$

Используя Теорему 1.3, нетрудно заметить, что каждая вектор-строка матрицы $\Omega'_n(\mathcal{E})$ принадлежит пространству $V$. Поэтому мы можем разложить строки матрицы $\Omega'_n(\mathcal{E})$ по базису (3.6), чтобы получить матрицу $\widetilde{\Omega}_n(\mathcal{E})$.

**Лемма 3.4.** [7]

*Для матриц* $\widetilde{\Omega}_n(\mathcal{E})$ *и* $\Omega'_n(\mathcal{E})$ *верно, что*

$$\widetilde{\Omega}_n(\mathcal{E})B_n = \Omega'_n(\mathcal{E}),\ \widetilde{\Omega}_n(\mathcal{E}) = \Omega'_n(\mathcal{E})B_n^{-1},$$

*где* $B_n$ *— матрица, чьи строки образованы векторами* $v_i$*, и* $B_n^{-1}$ *имеет следующий вид:*

$$B_n^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & \ldots & (-1)^{n+1} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \ldots & (-1)^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}.$$

*Доказательство.* Непосредственно следует из прямых вычислений и того, что

вектор-строки $\Omega'_n(\mathcal{E})$ лежат в $V$. □

**Пример 3.8.**

*Для $\mathcal{E}(G,\omega) \in E_4$ матрица $\widetilde{\Omega}_4(\mathcal{E})$ имеет вид:*

$$\widetilde{\Omega}_4(\mathcal{E}) = \begin{pmatrix} -x_{21} & 1 & -x_{23}-x_{24} & 0 & x_{24} & 0 \\ x_{31} & 0 & -x_{31}-x_{32} & 1 & -x_{34} & 0 \\ -x_{41} & 0 & x_{41}+x_{42} & 0 & -x_{41}-x_{42}-x_{43} & 1 \end{pmatrix}.$$

**Теорема 3.14.** [7]

*Рассмотрим электрическую сеть $\mathcal{E}(G,\omega) \in E_n$ и ассоциированную с ней матрицу $\tilde{\Omega}_n(\mathcal{E})$. Тогда матрица $\tilde{\Omega}_n(\mathcal{E})$ задает точку Лагранжева Грассманиана $\mathrm{LG}(n-1,V)$ относительно симплектической невырожденной формы*

$$\Lambda_{2n-2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \end{pmatrix}.$$

*Другими словами, выполняется равенство*

$$\widetilde{\Omega}_n(\mathcal{E})\Lambda_{2n-2}\widetilde{\Omega}_n(\mathcal{E})^t = 0.$$

*Доказательство.* Доказательство получается прямыми вычислениями, см. [7]. □

**Следствие 3.2.** [7]

*Образ вложения Лама лежит в положительной части изотропного Грассманиана относительно вырожденной формы $B_n^{-1}\Lambda_{2n-2}\left(B_n^{-1}\right)^t$.*

*Доказательство.* Доказательство получается прямыми вычислениями из Теоремы 3.14. □

Используя соображения непрерывности, можно обобщить Лемму 3.4 и Теорему 3.14 на все сети $\overline{E}_n$.

**Теорема 3.15.** [7]

*Рассмотрим электрическую сеть* $\mathcal{E} \in \overline{E}_n$ *и точку* $X(\mathcal{E})$, *заданную вложением Лама. Тогда* $X(\mathcal{E}) \in \bigwedge^{2n-2} V$ *и точка* $\widetilde{X}(\mathcal{E}) := X(\mathcal{E})B_n^{-1} \in \mathrm{LG}(n-1, V)$.

Теорема 3.15 задает вложение $\overline{E}_n$ в $LG(n-1, V)$, на самом деле образ этого вложения лежит в положительной части $\mathrm{LG}_{\geq 0}(n-1, V) := LG(n-1, V) \cap Gr_{\geq 0}(n-1, V)$. Для доказательства этого утверждения нам потребуется изучить действие группы Лама на $\mathrm{LG}_{\geq 0}(n-1, V)$.

**Теорема 3.16.** [7]

*Пространство* $V$ *инвариантно при действии на него справа операторами* $U_i(t)$ *с матрицами* $u_i(t)$, *записанными в стандартном базисе. Обозначим через* $u_i|_V(t)$ *матрицы этих операторов* $U_i(t)$ *в базисе* (3.6), *тогда выполняется:*

- *Все* $u_i|_V(t)$ *являются симплектическими матрицами в следующем смысле:* $u_i|_V(t)\Lambda_{2n-2}\big(u_i|_V(t)\big)^t = \Lambda_{2n-2}$;
- *Группа с множеством образующих* $\{u_i|_V(t)\}$ *задает группу изоморфную симплектической группе* $Sp_{2n-2}$.

*Доказательство.* Первое утверждение теоремы следует из явного вида матриц $u_i|_V(t)$ :

$$u_i|_V(t) = B_n u_i(t) B_n^{-1} :$$

$$
\begin{aligned}
u_1(t)|_V &= (s|_V)^2(u_3(t)|_V)(s|_V)^{-2}, \\
u_2(t)|_V &= y_1(t), \\
u_i(t)|_V &= x_{i-2}(t)y_{i-1}(t),\ 3 \le i \le 2n-2, \\
u_{2n-1}(t)|_V &= x_{2n-3}(t); \\
u_{2n}(t)|_V &= (s|_V)^2(u_2(t)|_V)(s|_V)^{-2}.
\end{aligned} \tag{3.7}
$$

где $x_i, y_i$ матрицы размера $2n-2 \times 2n-2$ из Определения 3.9, и $s|_V$ имеют вид:

$$
s|_V = B_n s B_n^{-1} = \begin{pmatrix}
0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \\
(-1)^n & 0 & (-1)^{n+1} & 0 & \dots & 0 & 1 & 0
\end{pmatrix}. \tag{3.8}
$$

Вторая часть теоремы следует из того, что множество $\{u_i|_V\}$ содержит достаточное количество независимых трансвекций. □

Из Формул (3.7) следует, что матрицы $u_i|_V, \forall i \in \{2, \dots, 2n-2\}$ являются полностью положительными матрицами. Это наблюдение позволяет доказать основную теорему данного раздела.

**Теорема 3.17.** [7]
*Для каждой сети $\mathcal{E} \in \overline{E}_n$ точка $\widetilde{X}(\mathcal{E})$ лежит в $\mathrm{LG}_{\ge 0}(n-1, V)$.*

*Доказательство.* Действительно, прямыми вычислениями можно проверить, что для пустой сети $\widetilde{X}\big(\mathcal{E}(\emptyset)\big) = e_2 \wedge e_4 \wedge \dots \wedge e_{2n-2} \in \mathrm{LG}_{\ge 0}(n-1, V)$. Теперь рассмотрим стандартную сеть $\mathcal{E}_{st} \in E_n$, как было отмечено в доказательстве Теоремы 3.11, можно набрать из пустой сети $\mathcal{E}(\emptyset)$ приклеиванием к ней мостов

и спайков. Таким образом, в силу Теоремы 3.10 мы имеем:

$$X(\mathcal{E}_{st}) = X\big(\mathcal{E}(\emptyset)\big) \prod_i u_i(t_i),$$

более того, нетрудно заметить (см. Рисунок 3.14), что можно считать $\forall i \in \{2, \dots, 2n-1\}$. Значит,

$$\widetilde{X}\big(\mathcal{E}_{st}\big) = \widetilde{X}\big(\mathcal{E}(\emptyset)\big) \prod_i u_i(t_i)|_V,$$

из чего следует, что $\widetilde{X}\big(\mathcal{E}_{st}\big) \in \mathrm{LG}_{\geq 0}(n-1, V)$.

Остается только воспользоваться соображениями непрерывности из доказательства Теоремы 3.11, чтобы продолжить утверждение на все множество $\overline{E}_n$. □

## 3.8 Комбинаторика рощ и Лагранжев Грассманиан

Нашей ближайшей целью будет изучение геометрических свойств пространства $H$, которое мы завершим доказательством комбинаторного описания вложения $\overline{E}_n$ в $LG_{\geq 0}(n-1, V)$.

**Лемма 3.5.** [22]

*Для кососимметрической формы $\eta$ (необязательно невырожденной) рассмотрим линейный оператор:*

$$Q_\eta : \bigwedge^k \mathbb{R}^{2n} \to \bigwedge^{k-2} \mathbb{R}^{2n}, \tag{3.9}$$

*заданный формой*

$$Q_\eta(x_1 \wedge x_2 \cdots \wedge x_k) = \sum_{i<j} (-1)^{i+j-1} \eta(x_i, x_j) x_1 \wedge \cdots \wedge \hat{x}_i \wedge \cdots \wedge \hat{x}_j \wedge \cdots \wedge x_k.$$

*Тогда* ***изотропный Грассманиан***

$$IG^{\eta}(k,2n) := \{X \in \mathrm{Gr}(k,2n) | X\eta X^t = 0\}$$

*относительно формы* $\eta$ *совпадает с* $\mathrm{Gr}(k,2n) \cap \mathbb{P}(\ker Q_\eta)$*, где* $\mathbb{P}(\ker Q_\eta)$ *— проективизация ядра оператора* $Q_\eta$*.*

**Теорема 3.18.** [7]

- $H$ *— подпространство пространства* $\bigwedge^{2n-2} V$*.*
- $H$ *как подпространство в* $\bigwedge^{2n-2} V$ *есть в точности ядро оператора* $Q_{\Lambda_{2n-2}}$*.*

*Доказательство.* Для *nc*-разбиения рассмотрим пустую кактусную сеть $P(\sigma) \in \overline{E}_n$, получаемой из пустой сети $\mathcal{E}(\emptyset)$ склеиванием ее граничных вершин согласно разбиению $\sigma$. Непосредственно из определения вложения Лама нетрудно проверить, что для точки $X(P(\sigma)) = v_\sigma$. Таким образом, в силу Теоремы 3.15 мы получаем, что $v_\sigma \in \bigwedge^{2n-2} V$ и, значит, $v_\sigma|_V := \widetilde{X}(P(\sigma)) \in \mathrm{LG}(n-1, V)$.

Из последнего равенства, используя Лемму 3.5, мы получаем, что $v_\sigma|_V \in \ker Q_{\Lambda_{2n-2}}$. Таким образом, $H$ как подпространство в $\bigwedge^{2n-2} V$ лежит в ядре оператора $Q_{\Lambda_{2n-2}}$. С другой стороны $\dim \ker Q_{\Lambda_{2n-2}} = Cat_n = \dim H$ (см. [46]), что и завершает доказательство теоремы. □

Как следствие Теоремы 3.18 мы получаем, что $\forall \mathcal{E} \in \overline{E}_n$ верно:

$$\widetilde{X}(\mathcal{E}) = \sum_{\sigma \in \mathcal{NC}_n} L_\sigma v_\sigma|_V.$$

**Лемма 3.6.** [6]

*Рассмотрим пустую кактусную сеть* $P(\sigma) \in \overline{E}_n$ *заданную nc-разбиением* $\sigma = (\overline{B}_1, \overline{B}_2, \ldots, \overline{B}_k)$*, где* $\overline{B}_i = \{\overline{j}_1, \ldots, \overline{j}_{k_i}\}$ *— i-ая компонента связности* $\sigma$ *мощности* $|\overline{B}_i| = \overline{k}_i$*. И пусть* $\widetilde{\sigma} = (\widetilde{B}_1, \widetilde{B}_2, \ldots, \widetilde{B}_l)$ *двойственное nc-разбиение*

*к* $\sigma$, *где* $\widetilde{B}_i = \{\widetilde{j}_1, \ldots, \widetilde{j}_{k_i}\}$ — *i-ая компонента связности* $\widetilde{\sigma}$ *мощности* $|\widetilde{B}_i| = \widetilde{k}_i$. *Тогда верно следующее:*

$$X(P(\sigma)) = \bigsqcup_{\overline{B}_i=\{\overline{j}_1,\ldots,\overline{j}_{k_i}\}\in\sigma:\ |\overline{B}_i|>1} \{v_{\overline{j}_1\overline{j}_2}, v_{\overline{j}_2\overline{j}_3}, \ldots, v_{\overline{j}_{k_i-1}\overline{j}_{k_i}}\} \bigsqcup \bigsqcup_{\widetilde{B}_i=\{\widetilde{j}_1,\ldots,\widetilde{j}_{k_i}\}\in\widetilde{\sigma}:\ |\widetilde{B}_i|>1} \{v_{\widetilde{j}_1\widetilde{j}_2}, v_{\widetilde{j}_2\widetilde{j}_3}, \ldots, v_{\widetilde{j}_{k_i-1}\widetilde{j}_{k_i}}\},$$

$$v_{\overline{j}_l\overline{j}_{l+1}} = (0, 0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0, (-1)^{\mathrm{sgn}(\overline{j}_{l+1})}, 0, \ldots, 0),$$

*где первый ненулевой элемент находится на* $(2\overline{j}_l - 1)$*-й позиции, а второй — на* $(2\overline{j}_{l+1} - 1)$*-й позиции, и* $\mathrm{sgn}(\overline{j}_{l+1})$ *определен однозначно из условия, что вектор* $v_{\overline{j}_l\overline{j}_{l+1}} \in V$;

$$v_{\widetilde{j}_l\widetilde{j}_{l+1}} = (0, 0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0, (-1)^{\mathrm{sgn}(\widetilde{j}_{l+1})}, 0, \ldots, 0),$$

*где первый ненулевой элемент находится на* $2\widetilde{j}_l$*-й позиции, а второй — на* $2\widetilde{j}_{l+1}$*-й позиции, и* $\mathrm{sgn}(\widetilde{j}_{l+1})$ *определен однозначно из условия, что* $v_{\widetilde{j}_l\widetilde{j}_{l+1}} \in V$.

*Доказательство.* Мы опускаем доказательство этой леммы: оно следует из Теоремы 1.12 путем довольно трудоемких, но прямых вычислений предела (3.4) при $R_{ij} \to \infty$. □

Ограничивая все векторы, образующие $X(P(\sigma))$, на $V$ прямыми вычислениями, можно получить следующий результат.

**Теорема 3.19.** [6]

*Все коэффициенты в разложении* $v_\sigma|_V$ *по стандартному базису равны* 1.

Таким образом, комбинаторные свойства пространства $\mathrm{span}(v_\sigma|_V)$ очень похожи на свойства пространства $H$. Например, плюккеровы координаты точки $\widetilde{X}(\mathcal{E})$ также можно выразить в виде линейных комбинаций производящих

функций рощ.

**Теорема 3.20.** [6]

*Рассмотрим сеть* $\mathcal{E}(\Gamma,\omega) \in \overline{E}_n$ *и ассоциированную с ней точку* $\widetilde{X}(\mathcal{E}) \in \mathrm{LG}_{\geq 0}(n-1,V)$. *Тогда верно следующее:*

$$\Delta_I = \sum_{(I,\mathrm{Lext}(\sigma))} L_\sigma,$$

*где сумма берется по всем таким* $\sigma$, *что* $I \subset \{1,\dots,2n-2\}$, $|I| = n-1$ ***лагранжево конкордантно*** *с* $\sigma$.

Мы приведем полное определение лагранжевой конкордантности. Несмотря на некоторую громоздкость, это определение естественно и может быть выведено из комбинаторики путей Каталана и правильных скобочных последовательностей, связанных с $nc$-разбиениями, см. [46].

**Определение 3.13.** [6]

*Рассмотрим nc-разбиение* $\sigma$ *и двойственное к нему nc-разбиение* $\widetilde{\sigma}$.

- *Пусть* $\overline{B}_i$ — *компонента* $\sigma$, *содержащая по крайне мере две вершины* $\overline{B}_i = \{(\bar{i}_1,\bar{i}_2,\dots,\bar{i}_k) \in \sigma |\ k > 1\}$, *то* ***расширение*** $\mathrm{ext}(\overline{B}_i)$ — *это следующая последовательность индексов:*

$$\mathrm{ext}(\overline{B}_j) = (\mathrm{ext}(\bar{i}_1\bar{i}_2), \mathrm{ext}(\bar{i}_2\bar{i}_3), \dots, \mathrm{ext}(\bar{i}_{k-1}\bar{i}_k)),$$

  *где* $\mathrm{ext}(\bar{i}_l\bar{i}_{l+1}) = (2i_l-1, 2i_l+1, 2i_l+3, \dots, 2i_{l+1}-3)$;

- *Пусть* $\widetilde{B}_j = \{(\widetilde{i}_1,\widetilde{i}_2,\dots,\widetilde{i}_k) \in \widetilde{\sigma} |\ k > 1\}$ — *компонента* $\widetilde{\sigma}$, *содержащая по крайне мере две вершины, то* ***расширение*** $\mathrm{ext}(\overline{B}_j)$ — *это следующая последовательность индексов:*

$$\mathrm{ext}(\widetilde{B}_j) = (\mathrm{ext}(\widetilde{i}_1\widetilde{i}_2), \mathrm{ext}(\widetilde{i}_2\widetilde{i}_3), \dots, \mathrm{ext}(\widetilde{i}_{k-1}\widetilde{i}_k)),$$

*где* $\mathrm{ext}(\widetilde{i_l}\widetilde{i_{l+1}}) = (2i_l, 2i_l+2, 2i_l+4, \ldots, 2i_{l+1}-2)$.

- *Компонента* $\overline{B}_{j_2} \in \sigma$ ***обертывает*** $\overline{B}_{j_1} \in \sigma$, *если существует такое* $(\bar{i}_{l-1}\bar{i}_l) \in \overline{B}_{j_2}$, *что* $\overline{B}_{j_1} \subset \mathrm{ext}(\bar{i}_{l-1}\bar{i}_l)$. *Если* $\overline{B}_{j_2}$ *обертывает* $\overline{B}_{j_1}$, *мы будем писать* $\overline{B}_{j_1} \in \mathrm{env}(\overline{B}_{j_2})$. *Аналогично определяется понятие «обертывает» для компонент разбиения* $\widetilde{\sigma}$.

**Определение 3.14.** [6]

*Определим лагранжево расширение компоненты*

$$\overline{B_j} = \{(\bar{i}_1, \bar{i}_2, \ldots, \bar{i}_k) \in \sigma |\ k > 1\}$$

*пс-разбиения* $\sigma$ *размера* $k > 1$ *следующим образом:*

$$\mathrm{Lext}(\overline{B}_j) = \mathrm{ext}(\overline{B}_j) \setminus \bigcup_{\overline{B}_l \in \mathrm{env}(\overline{B}_j)} \mathrm{ext}(\overline{B}_l).$$

$\mathrm{Lext}(\widetilde{B}_k)$ *определяется аналогино.*

*Для пс-разбиения* $\sigma$ *определим его* ***лагранжево расширение*** *следующим образом:*

$$\mathrm{Lext}(\sigma) = \bigsqcup_{\overline{B}_k \in \sigma:\ |\overline{B}_k|>1} \mathrm{Lext}(\overline{B}_k) \bigsqcup_{\widetilde{B}_k \in \widetilde{\sigma}:\ |\widetilde{B}_k|>1} \mathrm{Lext}(\widetilde{B}_k).$$

**Определение 3.15.** [6]

*Будем говорить, что* $I \subset \{1, \ldots, 2n-2\}$, $I = |n-1|$ ***лагранжево конкордантно*** *с* $\sigma$, *если* $I$ *пересекается с каждой компонентой* $\mathrm{Lext}(\sigma)$ *по множеству мощности* 1.

**Пример 3.9.**

*Рассмотрим пс-разбиение* $\sigma = (\bar{1}|\bar{2}, \bar{5}, \bar{8}|\bar{3}|\bar{4}|\bar{6}, \bar{7})$ *как показано на Рисунке 3.15. Тогда верно, что:*

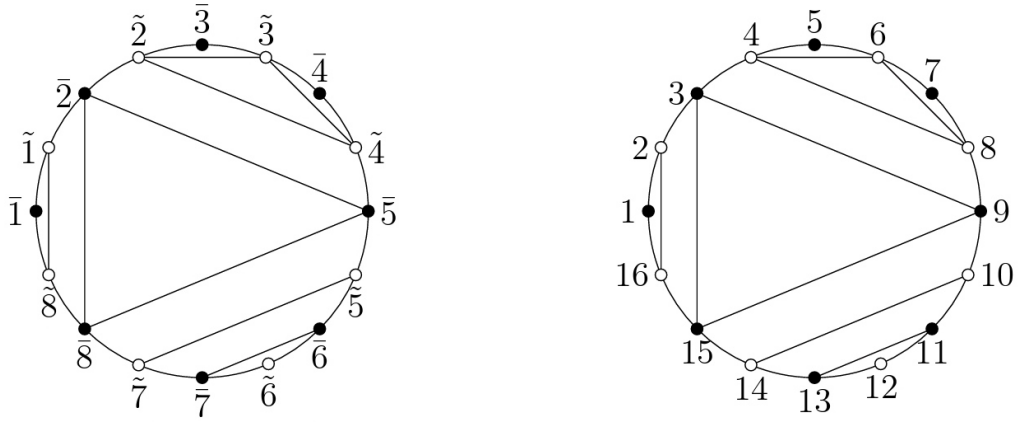



Рис. 3.15: *nc*-разбиение $\sigma = (\bar{1}|\bar{2}, \bar{5}, \bar{8}|\bar{3}|\bar{4}|\bar{6}, \bar{7})$

• $ext(\overline{B}_1) = ((3,5,7),(9,11,13))$ *and* $ext(\overline{B}_2) = (11)$. *Заметим, что* $\overline{B}_2 \in env(\overline{B}_1)$. *Поэтому*

$$Lext(\overline{B}_1) = ((3,5,7) - ext(\overline{B}_2), (9,11,13) - ext(\overline{B}_2)) = ((3,5,7),(9,13)).$$

• $ext(\widetilde{B}_1) = (2,4,6,8,10,12)$, $ext(\widetilde{B}_2) = (4,6)$ *и* $ext(\widetilde{B}_3) = (10,12)$. *Заметим, что* $\widetilde{B}_2, \widetilde{B}_3 \in env(\widetilde{B}_1)$.

*Поэтому* $Lext(\widetilde{B}_1) = ext(\widetilde{B_1}) - (ext(\widetilde{B}_2) \cup ext(\widetilde{B}_3)) = (2,8)$, $Lext(\widetilde{B}_2) = (4,6)$ *и* $Lext(\widetilde{B}_3) = (10,12)$.

*Собирая все вместе, получаем, что*

$$Lext(\sigma) = (11)(3,5,7)(9,13)(4)(6)(10,12)(2,8).$$

*Все* $I \subset \{1,\ldots,2n-2\}$, $|I| = n-1$ *лагранжево конкордантны с* $\sigma$ *могут быть получены путем выбора какого-либо одного элемента из каждой скобки.*

Для полноты изложения, приведем результат о сюръективности вложения пространства электрических сетей в положительную часть Лагранжева Грассманиана.

**Определение 3.16.**

*Обозначим за* $\mathrm{LG}^s_{>0}(n-1,V)$ *множество всех точек* $\widetilde{X} \in \mathrm{LG}_{>0}(n-1,V)$,

*таких, что* $\forall k \in \mathbb{Z} : \widetilde{X} s_V^k \in \mathrm{LG}_{>0}(n-1, V)$, *где* $s_V$ *определено как в Теореме 3.16.*

**Теорема 3.21.** [68], [70]

*Образ множества достаточно связных электрических сетей при вложении в* $\mathrm{LG}_{>0}(n-1, V)$ *совпадает с* $\mathrm{LG}^s_{>0}(n-1, V)$.

*Доказательство.* Рассмотрим сначала достаточно связную сеть $\mathcal{E}(G, \omega) \in E_n$, тогда согласно Теореме 3.20 точка $\widetilde{X}(\mathcal{E}) \in \mathrm{LG}_{\geq 0}(n-1, V)$ имеет вид:

$$\widetilde{X}(\mathcal{E}) = \sum_{\sigma} L_\sigma w_{\sigma|_V},$$

где все $L_\sigma > 0$ и все коэффициенты $w_{\sigma|_V}$ равны 1. Значит, $\widetilde{X}(\mathcal{E}) \in \mathrm{LG}_{>0}(n-1, V)$.

С другой стороны, в силу Теоремы 3.7 циклический оператор действует на достаточно связные сети, поэтому для каждой такой сети выполняется $\widetilde{X}(\mathcal{E}) \in \mathrm{LG}^s_{>0}(n-1, V)$.

Кратко опишем идею доказательства сюръективности. Рассмотрим точку $\widetilde{X} \in \mathrm{LG}^s_{>0}(n-1, V)$. Используя понятие лагранжевой конкордантности, удается доказать, что среди положительных координат Плюккера $\widetilde{X}$ можно выбрать некоторый их набор, который в точности совпадает с исчерпывающим набором (критерием положительности, см. [56]) координат Плюккера для точек $\mathrm{Gr}(n-1, 2n) \cap \mathbb{P}H$. Другими словами, положительность координат Плюккера $\widetilde{X}$ влечет положительность координат Плюккера точки $\widetilde{X} B_n \in \mathrm{Gr}(n-1, 2n) \cap \mathbb{P}H$, см. Лемму 3.4. Остается только воспользоваться Теоремой 3.13. □

# Глава 4

# Основные результаты: решения задач черного ящика

В этой главе мы продемонстрируем новые нерекурсивные способы решения задач восстановления топологии и проводимостей электрической сети по ее матрице отклика (эффективных сопротивлений), используя изложенные ранее результаты о вложении циркулярных сетей в $\mathrm{Gr}_{\geq 0}(n-1, 2n)$.

## 4.1 Восстановление проводимостей и твист

В этом разделе мы опишем новый способ решения Задачи 1. Для этого нам понадобится следующий технический результат:

**Теорема 4.1.** [38]
*Предположим, что сеть $\mathcal{E}(G, \omega)$ минимальна и связна, тогда модель Лама $N(\mathcal{E}^{\mathcal{T}}, w)$ также минимальна.*

*Доказательство.* Для доказательства этого утверждения достаточно проверить, что модель Лама $N(\mathcal{E}^{\mathcal{T}}, w)$ удовлетворяет условиям Определения 2.11. Для этого заметим, что страды медианного графа $\Gamma_M$ модели $N(\mathcal{E}^{\mathcal{T}}, w)$ получаются параллельными переносами (см. Рисунок 4.1) страд медианного графа $G_M$ сети $\mathcal{E}(G, \omega)$. Поскольку сеть $\mathcal{E}(G, \omega)$ минимальна, любые две страды $G_M$ пересека-

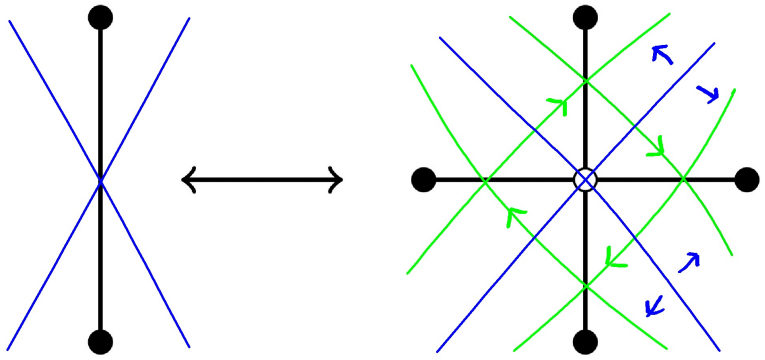


Рис. 4.1: Страды медианных графов $G_M$ и $\Gamma_M$

ются не более одного раза, и ни одна страда не пересекает саму себя. Используя эти два наблюдения, мы сразу заключаем, что:

- Любые две страды $\Gamma_M$ могут пересекаться не более одного раза в середине внутреннего ребра $N(\mathcal{E}^{\mathcal{T}}, w)$;
- Ни одна страда $\Gamma_M$ не пересекает саму себя.

Таким образом, мы получаем, что любые две страды могут пересекаться:

- Ровно один раз в середине внутреннего ребра;
- Ровно один раз в середине внутреннего ребра и ровно один раз в граничной вершине. Поскольку все граничные вершины $N(\mathcal{E}^{\mathcal{T}}, w)$ белые, а середина внутреннего ребра $N(\mathcal{E}^{\mathcal{T}}, w)$ обязательно должна быть соединена с белой внутренней вершиной, несложно проверить, что этот случай не приведет к появлению запрещенной ориентированной линзы, см. Рисунок 2.4;
- Ровно один раз в середине внутреннего ребра и два раза в граничных вершинах. Согласно приведенным рассуждениям, такие пересечения невозможны, так как противоречат правилу ориентации $\Gamma_M$;
- Два раза в граничных вершинах. Этот случай также не приводит к появлению запрещенной ориентированной линзы.

Следовательно, любые две страды $\Gamma_M$ не образуют запрещенной линзы, что и завершает доказательство. □

Комбинируя теперь Теоремы 4.1 и 2.12, мы получаем, что проводимости любой минимальной сети могут быть явно восстановлены по ее матрице отклика.

**Лемма 4.1.** [53]

*Припишем грани $F$ модели $N(\mathcal{E}^{\mathcal{T}}, w)$ вес следующим образом:*

$$O(F) = \frac{\prod\limits_{e \in F,\ e=wb} \omega(e)}{\prod\limits_{e \in F,\ e=bw} \omega(e)},$$

*грань $F$ считается ориентированной по часовой стрелке; в числителе стоит произведение весов ребер, идущих от белых к черным вершинам, в знаменателе — произведение весов ребер от черных к белым вершинам.*

*Вес грани $O(F)$ не зависит от калибровочных преобразований, см. Рисунок 2.5.*

**Лемма 4.2.** [38]

*Рассмотрим минимальную электрическую сеть $\mathcal{E}(G, \omega)$ и ее ребро $e$. Тогда справедливо:*

- *Если ребро $e$ является мостом, то его проводимость может быть найдена по формуле:*

$$\omega(e) = \frac{\Delta_1 \Delta_3}{\Delta_2 \Delta_4} \tag{4.1}$$

*или альтернативно по формуле:*

$$\omega(e) = \frac{\Delta_1}{\Delta_5}; \tag{4.2}$$

- *Если ребро $e$ является спайком, то его проводимость может быть найдена*

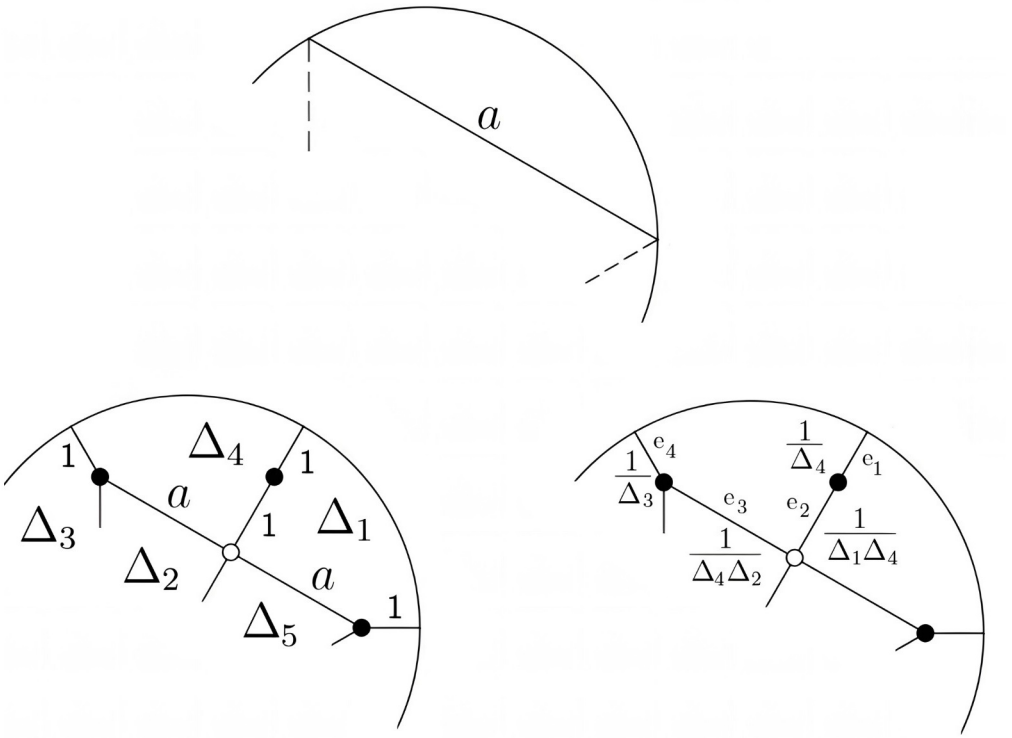



Рис. 4.2: Мост и модель Лама $N(\mathcal{E}^{\mathcal{T}}, w)$ в его окрестности

*по формуле:*

$$\omega(e) = \frac{\Delta_2\Delta_4}{\Delta_1\Delta_3} \tag{4.3}$$

*или альтернативно по формуле:*

$$\omega(e) = \frac{\Delta_5}{\Delta_1}; \tag{4.4}$$

- *Для двух смежных ребер $e_1$ и $e_2$ грани $F$ (см. Рисунок 4.4) отношение их проводимостей равно*

$$\frac{\omega(e_1)}{\omega(e_2)} = \frac{\Delta_2\Delta_4}{\Delta_1\Delta_3}, \tag{4.5}$$

*где $F_i$ — грани, помеченные $\Delta_i$ как показано на Рисунке 4.2, 4.3 и 4.4; и*

$$\Delta_i := \Delta_{I(F_i)}\Big(\tau\left(\Omega'(\mathcal{E})\right)\Big),$$

*где $I(F_i)$ — разметка граней из Теоремы 2.11.*

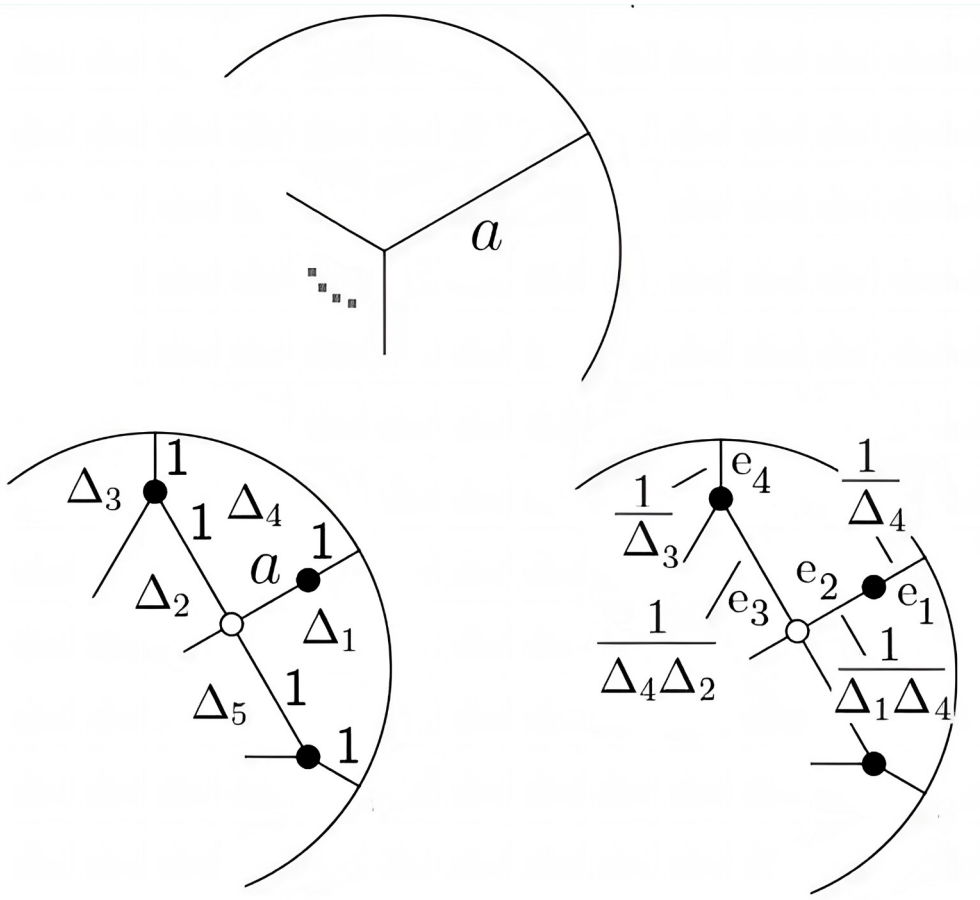



Рис. 4.3: Спайк и модель Лама $N(\mathcal{E}^{\mathcal{T}}, w)$ в его окрестности

*Доказательство.* Докажем формулу (4.1). Рассмотрим грань $F_1$:

$$O(F_1) = \frac{\omega(e_1)\omega(e_3)}{\omega(e_2)\omega(e_4)} = a.$$

Согласно теореме 2.12:

$$O(F_1) = \frac{\omega'(e_1)\omega'(e_3)}{\omega'(e_2)\omega'(e_4)} = \frac{\Delta_1\Delta_3}{\Delta_2\Delta_4},$$

где $\omega' = \omega$ с точностью до калибровок, и

$$\omega'(e_1) = \frac{1}{\Delta_4},\ \omega'(e_2) = \frac{1}{\Delta_1\Delta_4},\ \omega'(e_3) = \frac{1}{\Delta_4\Delta_2},\ \omega'(e_4) = \frac{1}{\Delta_3}.$$

Поскольку $O(F_1)$ не зависит от калибровок, получаем (4.1). Остальные формулы выводятся аналогично. □

Используя Теорему 4.2, мы получаем следующий явный алгоритм решения

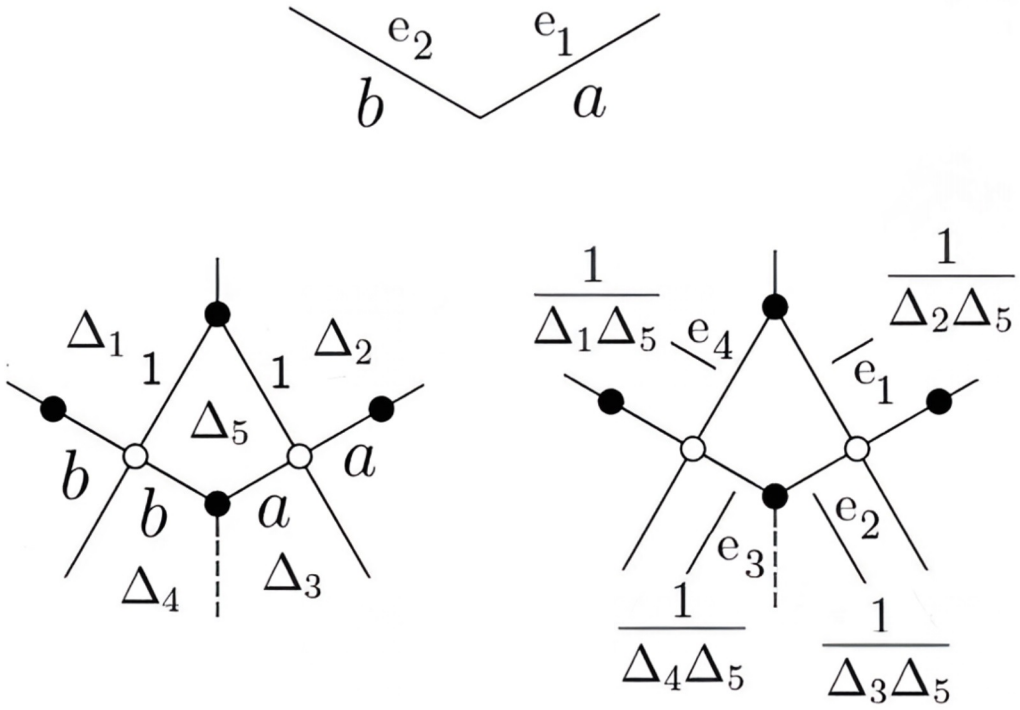



Рис. 4.4: Два смежных ребра и модель Лама $N(\mathcal{E}^{\mathcal{T}}, w)$ в их окрестности

Задачи 1:

**Алгоритм 1.** [38]

- *По известной матрице отклика* $M_R(\mathcal{E})$ *построить матрицу* $\Omega'_n(\mathcal{E})$*;*
- *Вычислить* $\tau\big(\Omega'_n(\mathcal{E})\big)$*;*
- *Пометить каждую грань* $F$ *модели* $N(\mathcal{E}^{\mathcal{T}}, w)$ *минорами* $\Delta_{F(I)}$ *матрицы* $\tau\big(\Omega'_n(\mathcal{E})\big)$*;*
- *Используя формулы* (4.1) – (4.2), (4.3) – (4.4) *и* (4.5)*, восстановить функцию проводимости* $\omega$*.*

*Доказательство.* Корректность алгоритма следует из наличия хотя бы одного моста или спайка в любой минимальной сети (см. [14]). Единственность восстанавливаемой функции проводимостей $\omega$ следует из Теоремы 2.10 и Теоремы 4.1. □

**Алгоритм 2.** [38]

*Ясно также, что можно предложить следующий алгоритм восстановления проводимости минимальной сети по ее матрице эффективных сопротивлений:*

- *По данной матрице эффективных сопротивлений $R(\mathcal{E})$ построить матрицу $\Omega'_{n,R}(\mathcal{E})$;*
- *Вычислить $\tau\big(\Omega'_R(\mathcal{E})\big)$;*
- *Выполнить два последних шага Алгоритма 1.*

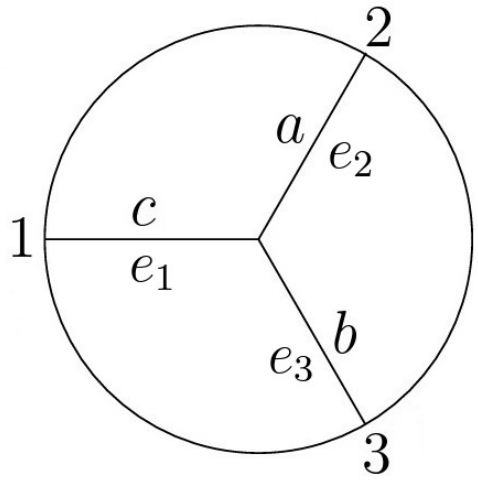



Рис. 4.5: Сеть звезда $\mathcal{E}$

Разберем несколько примеров.

**Пример 4.1.**

*Рассмотрим сеть $\mathcal{E}$, изображенную на Рисунке 4.5, ее матрица отклика имеет вид:*

$$M_R(\mathcal{E}) = \begin{pmatrix} \frac{ca+cb}{a+b+c} & -\frac{ca}{a+b+c} & -\frac{cb}{a+b+c} \\ -\frac{ca}{a+b+c} & \frac{ca+ab}{a+b+c} & -\frac{ab}{a+b+c} \\ -\frac{cb}{a+b+c} & -\frac{ab}{a+b+c} & \frac{cb+ab}{a+b+c} \end{pmatrix}.$$

*Тогда матрицы* $\Omega_3(\mathcal{E})$ *и* $\Omega_3'(\mathcal{E})$ *имеют вид:*

$$\Omega_3(\mathcal{E}) = \begin{pmatrix} \frac{ca+cb}{a+b+c} & 1 & \frac{ca}{a+b+c} & 0 & \frac{-cb}{a+b+c} & -1 \\ \frac{ca}{a+b+c} & 1 & \frac{ca+ab}{a+b+c} & 1 & \frac{ab}{a+b+c} & 0 \\ \frac{-cb}{a+b+c} & 0 & \frac{ab}{a+b+c} & 1 & \frac{cb+ab}{a+b+c} & 1 \end{pmatrix},$$

$$\Omega_3'(\mathcal{E}) = \begin{pmatrix} \frac{ca+cb}{a+b+c} & 1 & \frac{ca}{a+b+c} & 0 & \frac{-cb}{a+b+c} & -1 \\ \frac{ca}{a+b+c} & 1 & \frac{ca+ab}{a+b+c} & 1 & \frac{ab}{a+b+c} & 0 \end{pmatrix}.$$

*Непосредственной проверкой убеждаемся, что все миноры* $2\times 2$ *матрицы* $\Omega_3'(\mathcal{E})$ *не обращаются в ноль, следовательно:*

$$\tau\big(\Omega_3'(\mathcal{E})\big) = \begin{pmatrix} \frac{a+b+c}{bc} & \frac{c+b}{b} & \frac{a+b+c}{ac} & \frac{a}{c} & 0 & -1 \\ -\frac{a+b+c}{bc} & -\frac{c}{b} & 0 & 1 & \frac{a+b+c}{ab} & \frac{a+b}{a} \end{pmatrix}.$$

*Например,* $\tau(A)_6$ *определяется следующими уравнениями:* $(\tau(A)_6, A_6) = 1$ *и* $(\tau(A)_6, A_{6+1 \ mod\ 6}) = (\tau(A)_6, A_1) = 0$ *(поскольку* $A_6 \notin span(A_1)$*).*

*Пометим каждую грань* $N(\mathcal{E}^{\mathcal{T}}, w)$ *по правилу из Теоремы 2.11, см. Рисунок 4.6. Поскольку ребро* $e_1$ *является спайком, его проводимость может быть вычислена по формуле:*

$$\omega(e_1) = \frac{\Delta_{26}}{\Delta_{16}} = \frac{\frac{a+b+c}{a}}{\frac{a+b+c}{ca}} = c$$

*или альтернативно по формуле:*

$$\omega(e_1) = \frac{\Delta_{56}\Delta_{46}}{\Delta_{16}\Delta_{45}} = \frac{\frac{a+b+c}{ab}\frac{a+b+c}{c}}{\frac{a+b+c}{ca}\frac{a+b+c}{cb}} = c.$$

**Пример 4.2.**

*Рассмотрим семейство минимальных достаточно связных электрических сетей* $\mathcal{E}(G_{4m+1}, \omega)$ *(см. [14] и Рисунок 4.7), определенных следующим образом:*

- *Граничные вершины* $G_{4m+1}$ *лежат на окружности радиуса* $m+1$ *с центром*

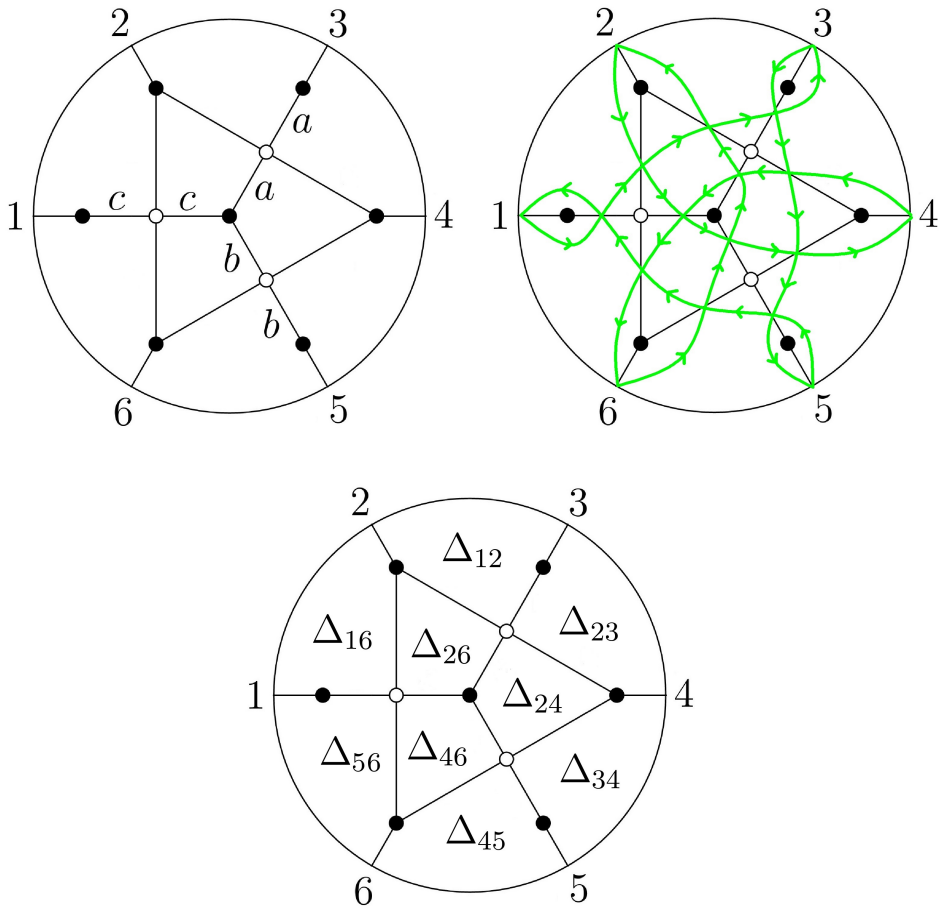



Рис. 4.6: Модель Лам $N(\mathcal{E}^{\mathcal{T}}, w)$ и разметка граней для сети звезда

*в* $(0,0)$*;*

- *Вершины графа* $G_{4m+1}$ *— целочисленные точки* $(i,j)|\ 0 < i \leq m+1,\ 1 \leq j \leq 4m+1$. *Радиальные ребра — отрезки, соединяющие* $(i,j)$ *с* $(i+1,j)$ *для* $0 < i \leq m$. *Концентрические ребра —- дуги, соединяющие* $(i,j)$ *с* $(i,j+1)$ *для* $1 \leq i \leq m$. *Граф* $G_{4m+1}$ *содержит* $2m(4m+1)$ *ребер и* $(m-1)(4m+1)$ *вершин;*

- *Граничные вершины* $G_{4m+1}$ *— точки* $v_j = (m+1, j)$ *для* $j = 1, \ldots, 4m+1$, *где* $v_0 = v_{4m+1}$.

*Значимость этого семейства сетей обусловлена их использованием в численном решении задачи Калдерона, см. [4].*

*Используя структуру сетей* $\mathcal{E}(G_{4m+1}, \omega)$, *можно предложить следую-*

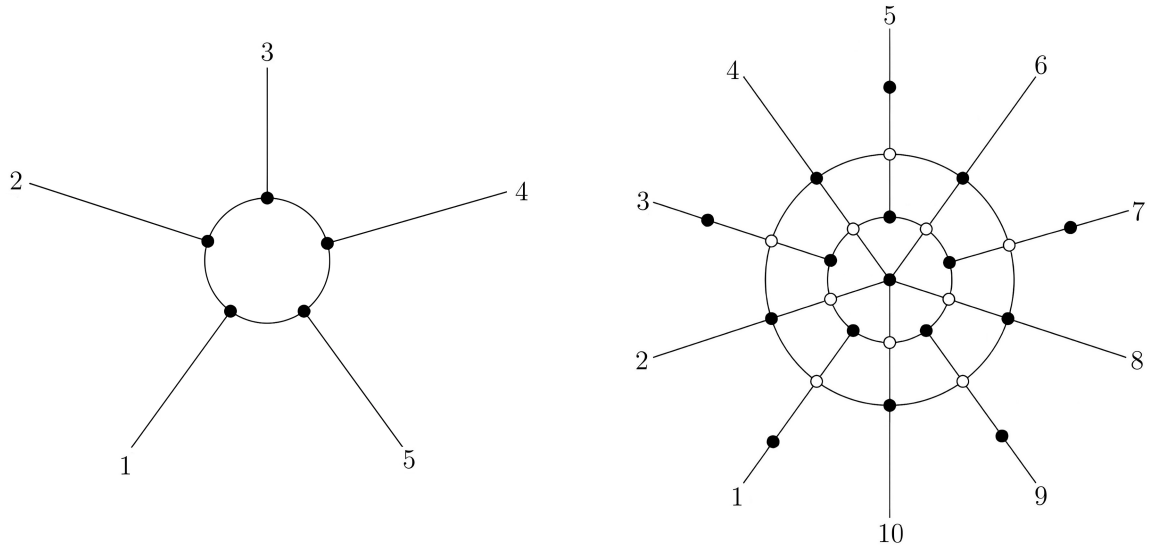



Рис. 4.7: Граф $G_5$ и связанная с ним модель Лам; граничные окружности не изображены

*щий способ решения Задачи 1:*

- *Разметить каждую грань* $N(\mathcal{E}^{\mathcal{T}}, w)$ *по правилу Скотта [56];*
- *Восстановить проводимости спайков;*
- *Используя проводимость спайка и Формулу* (4.5)*, вычислить проводимости остальных ребер в каждой* ***дольке****, см. Рисунок 4.8 и Рисунок 4.9:*

$$a_1 = \frac{\Delta_1\Delta_2}{\Delta'_1\widetilde{\Delta}_1},\ \frac{a_i}{b_i} = \frac{\Delta_{2i-1}\Delta_{2i+1}}{\Delta'_{2i}\widetilde{\Delta}_{2i}},\ \frac{b_i}{a_{i+1}} = \frac{\Delta'_{2i+1}\widetilde{\Delta}_{2i+1}}{\Delta_{2i}\Delta_{2i+2}}.$$

## 4.2 Восстановление проводимостей с помощью весов специальных остовных рощ

В этом разделе мы обсудим некоторые комбинаторные аспекты Алгоритма 1. В частности, мы покажем, что проводимости могут быть восстановлены с помощью весов специальных остовных рощ. Для этого напомним следующий результат:

**Теорема 4.2.** *[46]*

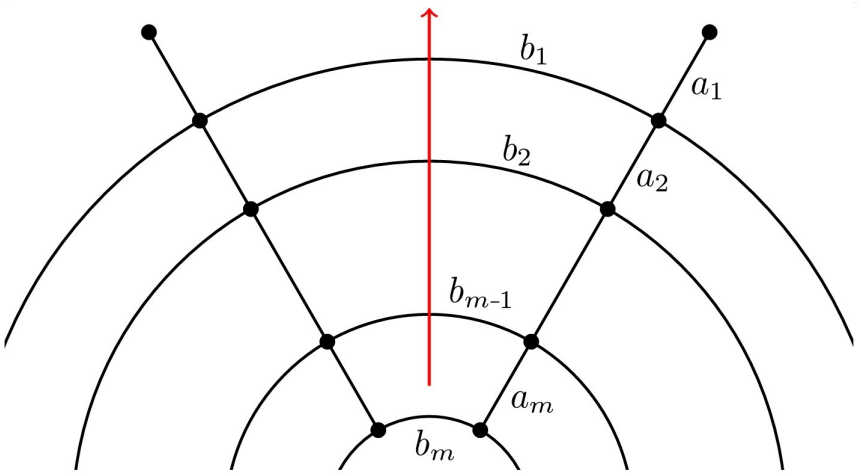



Рис. 4.8: Долька

*Рассмотрим электрическую сеть* $\mathcal{E}(G,\omega)$ *и ассоциированную с ней модель Лама* $N(\mathcal{E}^{\mathcal{T}},w)$. *Тогда для каждого* $I\subset\{1,\dots,n\}$, $|I|=n-1$ *существует естественная сохраняющая вес* ***биекция*** $\mathcal{F}_I$ *между подмножеством димеров* $\Pi\in\Pi(I)$ *на* $N(\mathcal{E})$ *(т.е. подмножеством димеров, которые не покрывают граничные вершины из* $I$, *см. Определение 2.4) и соответствующим подмножеством рощ на* $\mathcal{E}(G,\omega)$, *такая, что* $wt(\Pi)=wt\big(\mathcal{F}_I(\Pi)\big)$.

Теорема 4.2 и Замечание 2.2 также дают дополнительную интерпретацию формул, представленных в Лемме 4.2.

**Предложение 4.1.**

*Рассмотрим минимальную электрическую сеть* $\mathcal{E}(G,\omega)$. *Тогда выполняется следующее равенство координат Плюккера:*

$$\Delta_{I(F)}\Big(\tau\big(\Omega'(\mathcal{E})\big)\Big)=\frac{1}{wt(\mathcal{G}_F)},$$

*где* $\mathcal{G}_F:=\mathcal{F}_I(\Pi_F)$ — ***минимальная*** *роща, соответствующая минимальному димеру* $\Pi_F$, *см. Замечание 2.2.*

**Замечание 4.1.**

*Более того, если грань* $F$ *модели* $N(\mathcal{E}^{\mathcal{T}},w)$ *является граничной, то* $\Pi_F$ — един-

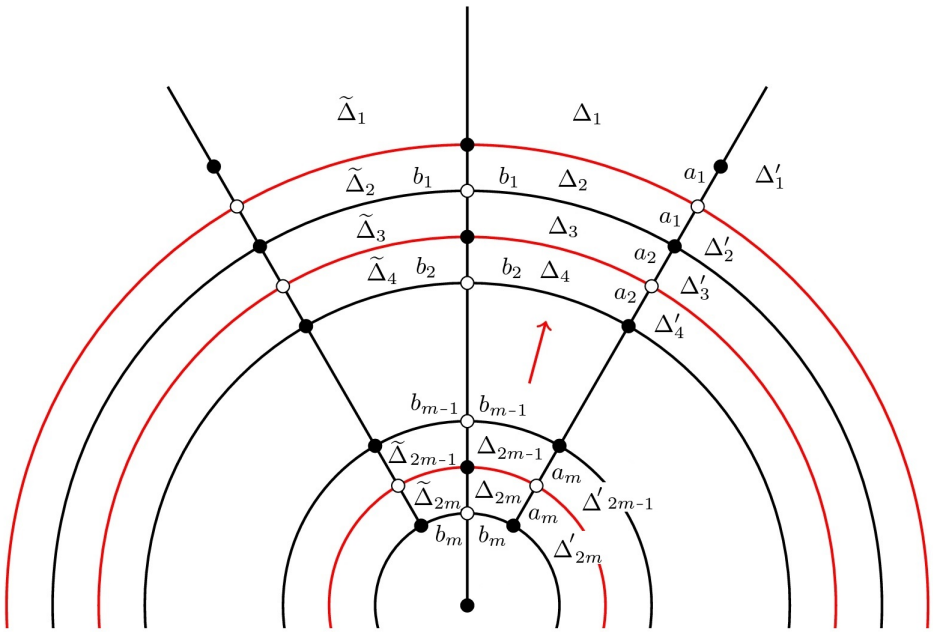



Рис. 4.9: Модель Лама в окрестности дольки

*ственный димер такой, что* $\Pi \in I_F(\Pi)$, *см. [51]. Следовательно, мы получаем следующее равенство координат Плюккера для граничной грани:*

$$\Delta_{I(F)}\big(\Omega'(\mathcal{E})\big) = wt(\mathcal{G}_F). \tag{4.6}$$

**Предложение 4.2.** [38]

*Комбинируя Предложение 4.1 с Леммой 4.2, мы заключаем, что проводимости каждой минимальной электрической сети могут быть восстановлены с помощью отношений весов минимальных рощ.*

**Пример 4.3.**

*Рассмотрим сеть* $\mathcal{E}$, *показанную на Рисунке 4.10. Тогда Формула 4.1 может быть переписана следующим образом:*

$$\omega(e_1) = \frac{\frac{1}{wt(\mathcal{G}_{26})}}{\frac{1}{wt(\mathcal{G}_{16})}} = \frac{\frac{1}{a}}{\frac{1}{ac}} = c.$$

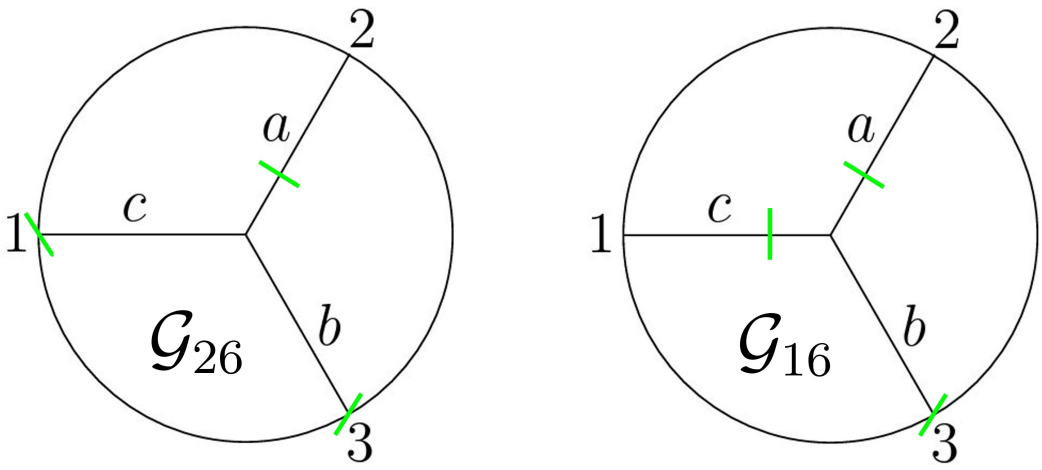



Рис. 4.10: Минимальные рощи, соответствующие граням с метками 26 и 16

## 4.3 Восстановление топологии электрической сети

В этом разделе мы опишем метод решения Задачи 4. В силу Теоремы 1.8 топология минимальной сети с точностью до преобразований звезда-треугольник задается перестановкой ее медианного графа, которую можно вычислить следующим образом:

**Теорема 4.3.** [29], [30], [69]

*Рассмотрим произвольную минимальную электрическую сеть* $\mathcal{E}(G,\omega)$ *и обозначим через* $A_i$ *столбцы матрицы* $\Omega_n(\mathcal{E})$ *(или* $\Omega_{n,R}(\mathcal{E})$*). Определим аффинную перестановку столбцов* $g(\mathcal{E})$ *следующим образом:* $g(\mathcal{E})(i) = j$*, если* $j$ *— минимальное число такое, что* $A_i \in \operatorname{span}(A_{i+1},\dots,A_j)$*, где все индексы берутся по модулю* $2n$*.*

*Перестановка* $g(\mathcal{E})$ *однозначно определяет перестановку страд* $\tau(\mathcal{E})$*:*

$$g(\mathcal{E}) + 1 = \tau(\mathcal{E}) \mod 2n.$$

*Доказательство.* Утверждение следует из Следствия 3.1, Теоремы 3.8 и Предложения 5.17 [46]. □

Основываясь на Теореме 4.3, мы можем предложить следующий алгоритм

[29] решения Задачи 4:

**Алгоритм 3.** [29]

- *По заданной матрице* $M_R(\mathcal{E})$ *(или* $R(\mathcal{E})$*) неизвестной сети* $\mathcal{E}(G,\omega)$ *построим матрицу* $\Omega_n(\mathcal{E})$ *(или* $\Omega_{n,R}(\mathcal{E})$*);*
- *Используя* $\Omega_n(\mathcal{E})$ *(или* $\Omega_{n,R}(\mathcal{E})$*), вычисляем перестановку страд* $\tau(\mathcal{E})$*;*
- *Перестановка* $\tau(\mathcal{E})$ *определяет правило соединения страд (хордовую диаграмму), задающее медианные графы* $G_M$ *всех минимальных сетей эквивалентных* $\mathcal{E}$*;*
- *Восстанавливаем по этому правилу минимальную сеть* $\mathcal{E}'$ *эквивалентную* $\mathcal{E}$*, которую можно построить с помощью процедуры, описанной в [14] или [20].*

Специализируя алгоритм выше, в случае филогенетических деревьев мы также можем получить такой способ [29] их восстановления:

- По заданной матрице $D(G) = M_R(\mathcal{E})$ сети $F(T,\omega) = e(T,\frac{1}{\omega})$ построим матрицу $\Omega_{n,R}(\mathcal{E})$;
- Используя $\Omega_{n,R}(\mathcal{E})$, вычисляем перестановку страд $\tau(\mathcal{E})$, по которой строим какую-нибудь минимальную сеть $\mathcal{E}'$ эквивалентную $\mathcal{E}$;
- Используя преобразования звезда-треугольник, переведем $\mathcal{E}'$ в сеть $\mathcal{E}$.

**Пример 4.4.**

*Рассмотрим матрицу эффективных сопротивлений*

$$R(\mathcal{E}) = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

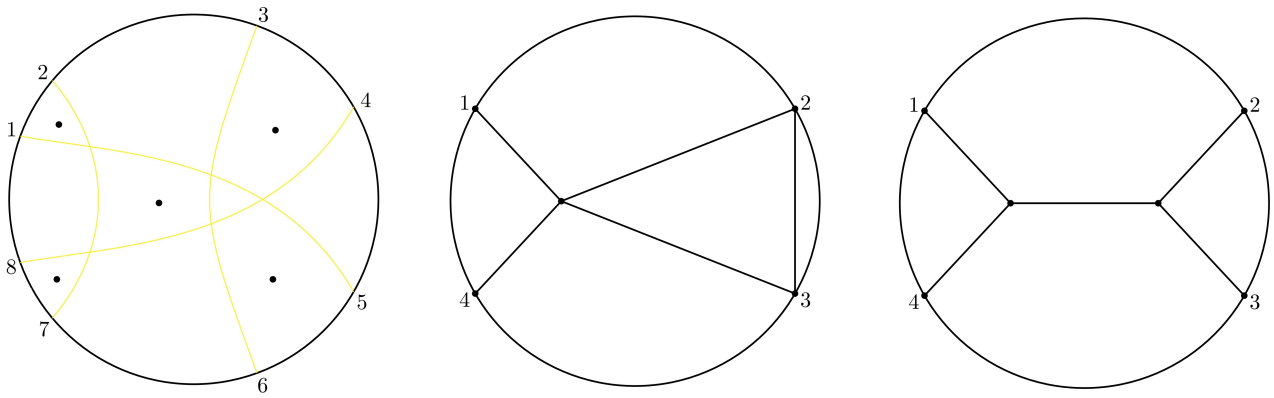



Рис. 4.11: Пример восстановления топологии сети

*Тогда матрица* $\Omega'_{n,R}(\mathcal{E})$ *имеет вид*

$$\Omega'_{n,R}(\mathcal{E}) = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

*Прямыми вычислениями мы получаем, что* $g(\mathcal{E}) = [4\,6\,5\,7\,8\,2\,1\,3]$, *поэтому перестановка страд имеет вид* $\tau(\mathcal{E}) = (15)(27)(36)(48)$. *Эта перестановка определяет минимальную сеть, как показано на Рисунке 4.11, которую можно преобразовать в электрическую сеть на дереве, применив одно преобразование звезда-треугольник.*

# Глава 5

# Заключение: приложения

## 5.1 Теоремы Кениона-Вильсона в моделях двойных димеров

В этом разделе с помощью явной параметризации образа вложения Лама мы укажем простой способ получения нескольких результатов, играющих важную роль в обнаружении критических явлений в модели двойных димеров.

**Теорема 5.1.** [40]

*Рассмотрим электрическую сеть* $\mathcal{E}(G,\omega) \in E_n$ *и отношения вида:*

$$\frac{L_\sigma}{L_{unc}},$$

*тогда каждое такое отношение может быть выражено как однородный целочисленный полином степени* $n-k(\sigma)$*, где* $k(\sigma)$ *— количество компонент nc-разбиения* $\sigma$*, от переменных* $L_{i;j} := \frac{L_{ij}}{L_{unc}}$.

*Доказательство.* Для доказательства теоремы мы будем использовать следующий результат, который по существу является переформулировкой Предложения 5.19 [46] — для любого *nc*-разбиения $\sigma$ существует набор координат $\Delta^d_{J(\sigma)}$ такой, что выполняется следующее тождество:

$$L_\sigma = \sum_{J(\sigma)} a_{J(\sigma)} \Delta^d_{J(\sigma)}, \tag{5.1}$$

где все $a_{J(\sigma)} \in \mathbb{Z}$. Более того, для каждого $J(\sigma)$ верно следующее: $|J(\sigma)_{odd}| = n - k(\sigma)$, где $|J(\sigma)_{odd}|$ — количество нечетных индексов в $J(\sigma)$.

Теперь, используя Уравнения (5.1) и Следствия 3.1, мы можем записать следующее равенство:

$$\frac{L_\sigma}{L_{unc}} = \sum_{J(\sigma)} \frac{a_{J(\sigma)} \Delta^d_{J(\sigma)}}{L_{unc}} = \sum_{J(\sigma)} a_{J(\sigma)} \Delta_{J(\sigma)}\big(\Omega'_n(\mathcal{E})\big).$$

Заметим, что каждый минор $\Delta_{J(\sigma)}(\Omega'_n(\mathcal{E}))$ является однородным целочисленным полиномом от переменных $x_{ij}$ и, следовательно, согласно Теореме 1.15 является также однородным целочисленным полиномом и от $L_{i;j}$, поскольку $L_{i;j} = -x_{ij}$. Из вида матрицы $\Omega_n(\mathcal{E})$ нетрудно проверить, что степень каждого слагаемого $\Delta_{J(\sigma)}(\Omega'_n(\mathcal{E}))$ равна $|J(\sigma)_{odd}| = n - k(\sigma)$ — количеству столбцов с нечетными индексами в матрице $\Omega'_n(\mathcal{E})$. □

Повторяя рассуждения выше для параметризации с помощью эффективных сопротивлений (см. Теорему 3.8), мы аналогично можем получить следующий результат.

**Теорема 5.2.** [40]

*Рассмотрим электрическую сеть $\mathcal{E}(G, \omega) \in E_n$ и отношения вида:*

$$\frac{L_\sigma}{L},$$

*тогда каждое такое отношение может быть выражено как однородный целочисленный полином степени $k(\sigma) - 1$ от переменных $\frac{1}{2}R_{ij}$.*

## 5.2 Свойства метрики эффективных сопротивлений

Как мы только что показали, параметризации вложения Лама являются истоком явных детерминантных формул для различных важных комбинаторных

объектов. В этом разделе для полноты изложения мы покажем, как, используя параметризацию, заданную в Теореме 3.8, получить, что метрика эффективных сопротивлений обладает свойством Калмансона.

**Замечание 5.1.**

*Напомним, что (см. Раздел 1.4) множество эффективных сопротивлений $R_{ij}$ задает метрику на множестве всех вершин любой связной электрической сети, простое доказательство этого факта изложено в [29].*

Изначально свойство Калмансона для эффективных сопротивлений было установлено в [19] с использованием другой техники. Наш подход можно считать более концептуальным, так как он является прямым продолжением программы, начатой в работе [60], в которой авторы изучают геодезическую метрику на деревьях с помощью теории положительных тропических Грассманианов.

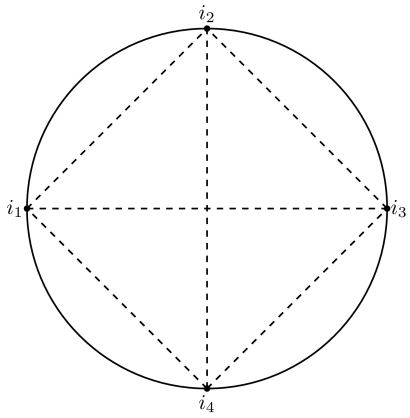



Рис. 5.1: 4-точечное условие Калмансона — сумма длин диагоналей не меньше сумм противоположных сторон

**Теорема 5.3.** [20], [29]

*Пусть $\mathcal{E}(G,\omega) \in E_n$ — связная электрическая сеть и $i_1, i_2, i_3, i_4$ — ее четыре граничные вершины, расположенные, как показано на Рисунке 5.1. Тогда верны следующие* ***неравенства Калмансона****:*

$$R_{i_1 i_3} + R_{i_2 i_4} \geq R_{i_2 i_3} + R_{i_1 i_4}, \tag{5.2}$$

$$R_{i_1i_3} + R_{i_2i_4} \geq R_{i_1i_2} + R_{i_3i_4}. \tag{5.3}$$

*Доказательство.* Рассмотрим электрическую сеть $\mathcal{E}_{i_1i_2i_3i_4},$, получаемую из сети $\mathcal{E}$ путем объявления всех ее вершин, кроме $i_1, i_2, i_3, i_4$ — внутренними. Легко видеть, что сеть $\mathcal{E}_{i_1i_2i_3i_4} \in E_4$ и является связной. Рассмотрим матрицу $\Omega'_{4,R}(\mathcal{E}_{i_1i_2i_3i_4})$, задающую точку $\mathrm{Gr}_{\geq 0}(3,8)$.

Прямыми вычислениями мы получаем, что:

$$\Delta_{567}\big(\Omega'_{n,R}(\mathcal{E}_{i_1i_2i_3i_4})\big) = \frac{1}{2}(R_{i_1i_3} + R_{i_2i_4} - R_{i_1i_2} - R_{i_3i_4}),$$

$$\Delta_{123}\big(\Omega'_{n,R}(\mathcal{E}_{i_1i_2i_3i_4})\big) = \frac{1}{2}(R_{i_1i_3} + R_{i_2i_4} - R_{i_2i_3} - R_{i_1i_4}).$$

В силу положительности всех $\Delta_I\big(\Omega'_{4,R}(e_{i_1i_2i_3i_4})\big)$ мы получаем неравенства Калмансона. □

**Замечание 5.2.**

*Используя соображения непрерывности, точно так же мы получаем, что для каждой связной кактусной сети $\mathcal{E} \in \overline{E}_n$ множество эффективных сопротивлений между ее граничными вершинами задает псевдометрику Калмансона на множестве граничных вершин сети $\mathcal{E}$.*

Используя технику положительных Грассманианов, мы также можем получить полное описание электрических метрик Калмансона.

**Теорема 5.4.** [29], [30], [69]

*Пусть $D = (d_{ij})$ — матрица метрики Калмансона, тогда $D$ — матрица эффективных сопротивлений связной циркулярной электрической сети $\mathcal{E}$ тогда и только тогда, когда матрица $\Omega_D$, построенная из $D$ по формуле* (3.4), *определяет точку $X$ в $\mathrm{Gr}_{\geq 0}(n-1, 2n)$ и координата Плюккера $\Delta_{24\ldots 2n-2}(X)$ не обращается в нуль.*

*Доказательство.* Теорема моментально следует из сюръективности вложения Лама. □

## 5.3 Вывод формул изменения матрицы отклика при приклеивании мостов и спайков

В этом разделе мы дадим новое доказательство Теоремы 1.22, изложенное в [7]. Легко заметить, что Формулу (1.5) достаточно получить только в случае приклеивания моста между 1-ой и 2-ой граничными вершинами, так как другие случаи могут быть разобраны путем циклического сдвига нумерации граничных вершин. Из Теоремы 3.10 матрицы $\Omega_n(\mathcal{E})u_2(t)$ и $\Omega_n(\mathcal{E}')$ задают одну и ту же точку $\mathrm{Gr}_{\geq 0}(n-1,2n)$. Прямым вычислением мы получаем, что:

$$\Omega_n(\mathcal{E})u_2(t) = \begin{pmatrix} x_{11}+t & 1 & -x_{12}+t & 0 & x_{13} & \dots & (-1)^n \\ -x_{21}+t & 1 & t+x_{22} & 1 & -x_{23} & \dots & 0 \\ x_{31} & 0 & -x_{32} & 1 & x_{33} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ (-1)^n x_{n1} & 0 & (-1)^{n+1}x_{n2} & 0 & (-1)^{n+2}x_{n3} & \dots & 1 \end{pmatrix},$$

Умножение на $u_2(t)$ не меняет столбцы матрицы $\Omega_n(\mathcal{E})$ с четными индексами, поэтому мы получаем, что:

$$\Omega_n(\mathcal{E})u_2(t) = \Omega(\mathcal{E}'),$$

что и доказывает Формулу (1.5).

Аналогично, Формулу (1.6) достаточно получить только в случае приклеивания спайка к 2-ой граничной вершине. Точно так же из Теоремы 3.10 мы заключаем, что матрицы $\Omega_n(\mathcal{E}')$ и $\Omega_n(\mathcal{E})u_3(t)$ задают одну и ту же точку

$Gr_{\geq 0}(n-1,2n)$. Прямой проверкой мы получаем, что:

$$Cal_2(t)\Omega_n(\mathcal{E})u_3(t) =$$
$$= \begin{pmatrix} x_{11}-\frac{x_{12}x_{21}}{x_{22}t+1} & 1 & -x_{12}+\frac{x_{12}x_{22}}{x_{22}t+1} & 0 & x_{13}-\frac{x_{12}x_{23}}{x_{22}t+1} & \dots & (-1)^n \\ -x_{21}+\frac{x_{22}x_{21}}{x_{22}t+1} & 1 & x_{22}-\frac{x_{22}x_{22}}{x_{22}t+1} & 1 & -x_{23}+\frac{x_{22}x_{32}}{x_{22}t+1} & \dots & 0 \\ x_{31}-\frac{x_{32}x_{12}}{x_{22}t+1} & 0 & -x_{32}+\frac{x_{32}x_{22}}{x_{22}t+1} & 1 & x_{33}-\frac{x_{32}x_{23}}{x_{22}t+1} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \end{pmatrix},$$

где

$$Cal_2(t) = \begin{pmatrix} 1 & \frac{x_{12}}{1+x_{22}t} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{1+x_{22}t} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{x_{32}}{1+x_{22}t} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{x_{42}}{1+x_{22}t} & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \end{pmatrix}.$$

Так как умножение слева не меняет точку Грассманиана, мы можем написать следующее равенство:

$$Cal_2(t)\Omega_n(\mathcal{E})u_3(t) = \Omega_n(\mathcal{E}'),$$

из которого мы и выводим Формулу (1.6).

## 5.4 Вложение Чепури-Джорджа-Шпейера

В этом разделе, используя разработанную в Главе 3 комбинаторную технику, мы получим вложение $\overline{E}_n$ в положительную часть $\mathrm{Gr}_{\geq 0}(n+1,2n)$, которое было получено другим методом в работе [12] с целью изучения двойственности между электрическими сетями и моделями Изинга.

**Определение 5.1.**

*С каждой сетью $\mathcal{E} \in \overline{E}_n$ свяжем модель Лама $N(\mathcal{E}^{\mathcal{DT}}, w)$ с помощью* ***двой-***

***ственного обобщенного трюка Темперли***, *получаемого из обобщенного трюка Темперли заменой белых (черных) вершин на черные (белые), см. Рисунок 5.2.*

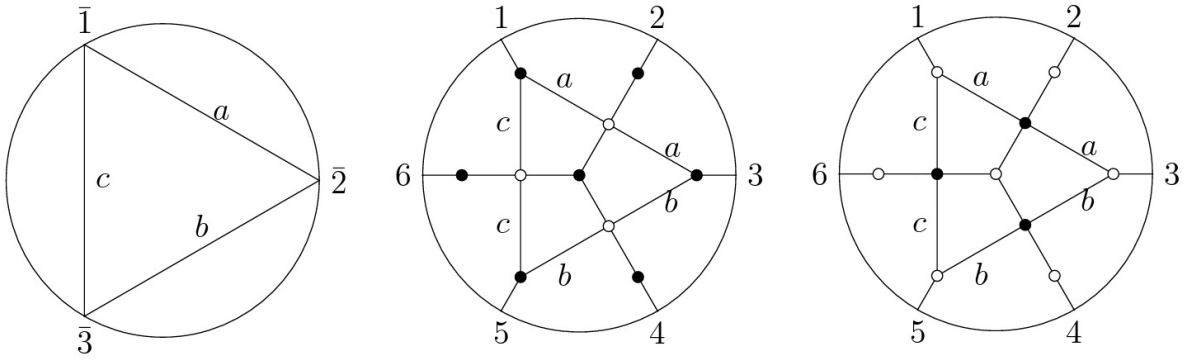



Рис. 5.2: Электрическая сеть и связанные с ней модели Лама $N(\mathcal{E}^{\mathcal{T}}, w)$ и $N(\mathcal{E}^{\mathcal{DT}}, w)$

**Определение 5.2.**

*Назовем $(n+1)$-элементное подмножество $I \subset \{1, \ldots, 2n\}$ ко-конкордантны с пс-разбиением $\sigma$, если $I$ содержит ровно один элемент в каждой части $\sigma$ и в каждой части двойственного разбиения $\tilde{\sigma}$.*

Аналогично случаю с обобщенным трюком Темперли мы имеем следующую теорему.

**Теорема 5.5.** [12]

*Рассмотрим электрическую сеть $\mathcal{E}(G, \omega) \in \overline{E}_n$ и ассоциированную с ней модель Лама $N(\mathcal{E}^{\mathcal{DT}}, w)$. Тогда выполняется следующее тождество:*

$$\Delta_I^d = \sum_{(\sigma, I)} L_\sigma,$$

*где суммирование идет по всем тем пс-разбиениям $\sigma$, которые ко-конкордантны с $I$.*

Теорема 5.5 позволяет по каждой сети $\mathcal{E}(G,\omega) \in \overline{E}_n$ построить ассоциированную с ней точку $X^D(\mathcal{E}) \in \mathrm{Gr}_{\geq 0}(n+1,2n)$.

**Теорема 5.6.** [12]

*Отображение $\overline{E}_n \to Gr_{\geq 0}(n+1,2n)$ является вложением, которое мы в дальнейшем будем называть* ***вложением Чепури-Джорджа-Шпейера****.*

Используя понятие ко-конкордантности, повторяя рассуждения из Леммы 3.1, легко получить связь между производящими функциями $L_{unc}, L_{ij}$, $L_{kk}$ и координатами Плюккера, заданной моделью Лама $N(\mathcal{E}^{\mathcal{DT}}, w)$.

**Лемма 5.1.** [6]

*Рассмотрим электрическую сеть $\mathcal{E}(G,\omega) \in E_n$ и ассоциированную с ней сеть $N(\mathcal{E}^{\mathcal{DT}}, w)$, для координат Плюккера последней верны следующие тождества:*

- $L_{unc} = \Delta^d_{[2n]\setminus R}$, *где $R$ — любой набор четных индексов, такой, что $|R| = n-1$;*
- $L_{ij} := L_{ij|*|*\ldots} = \Delta^d_{[2n]\setminus(\{2i-1\}\cup N)}$, *где $N$ — это множество всех четных индексов, за исключением двух ближайших к $2j-1$ и $|N| = n-2$;*
- $L_{kk} := \sum_{i\neq k} L_{ik} = \Delta^d_{[2n]\setminus(\{2k-1\}\cup T)}$, *где $T$ — множество всех четных индексов, за исключением двух ближайших к $2k-1$ и $|T| = n-2$.*

Для электрической сети $\mathcal{E}(G,\omega) \in E_n$ рассмотрим ассоциированную с ней модель Постникова $PN(\mathcal{E}^{\mathcal{DT}}, w', O_2)$, где $O_2$ — совершенная ориентация с множеством истоков $O_2 = \{1,2,3,5,\ldots,2n-1\}$. Заметим, что совершенная ориентация $O_2$ существует в силу того, что $\Delta^d_{[2n]\setminus R} = L_{unc} \neq 0$. Тогда сеть Постникова $PN(\mathcal{E}^{\mathcal{DT}}, \omega', O_2)$ определяет ту же точку $\mathrm{Gr}_{\geq 0}(n+1,2n)$, что и набор производящих функций $\Delta^d_I$, более явно:

**Теорема 5.7.** [6]

*Для любой электрической сети* $\mathcal{E}(G,\omega) \in E_n$ *выполнено следующее равенство:*

$$\frac{\Delta_I^d}{L_{unc}} = \Delta_I(A),$$

*где* $A$ *— расширенная матрица отклика модели Постникова* $PN(\Gamma,\omega',O_2)$.

*Доказательство.* Доказательство полностью повторяет вывод Теоремы 2.9. □

Теперь мы готовы получить явный вид вложения Чепури-Джорджа-Шпейера с помощью матриц отклика.

**Лемма 5.2.** [6]

*Рассмотрим модель Постникова* $PN(\Gamma,\omega',O_2)$*, тогда строка ее расширенной матрицы отклика* $A$*, соответствующая истоку под номером* 2*, имеет вид:*

$$(0,1,0,-1,0,1,0,-1,\dots).$$

*Доказательство.* Непосредственно из Определения 2.9 получаем:

$$a_{2\to 2} = 1,\ a_{2\to 2k-1} = 0.$$

С другой стороны, для любого $k \neq 1$ мы имеем:

$$\Delta_{\{2k\}\cup O_2\setminus\{2\}}(A) = \frac{\Delta^d_{\{2k\}\cup O_2\setminus\{2\}}}{L_{unc}} = 1,$$

где первое равенство выполняется в силу Теоремы 5.7, а второе — из Леммы 3.1. Более того, из Определения 2.9 мы получаем:

$$\Delta_{\{2k\}\cup O_2\setminus\{2\}}(A) = (-1)^s a_{2\to 2k},$$

где $s$ — число истоков из $O_2$ между истоком под номером 2, и стоком под номером $2k$. Непосредственными вычислениями наконец мы заключаем, что $a_{2\to 2k} = (-1)^{k-1}$. □

**Теорема 5.8.** [12]

*Модель Постникова* $PN(\mathcal{E}^{\mathcal{DT}}, w', O_2)$ *определяет ту же точку* $\mathrm{Gr}_{\geq 0}(n+1, 2n)$, *что и пространство вектор-строк матрицы:*

$$X^D(\mathcal{E}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & S_{11} & 0 & S_{12} & \cdots & 0 & S_{1n} \\ 0 & S_{21} & 1 & S_{22} & \cdots & 0 & S_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & S_{n1} & 0 & S_{n2} & \cdots & 1 & S_{nn} \end{pmatrix} D, \tag{5.4}$$

*где* $D = diag(1, 1, -1, -1, \dots)$ *и* $S_{ij}$ *задаются следующим уравнением:*

$$-M_R(\mathcal{E}) = \begin{pmatrix} S_{1n} - S_{11} & S_{2n} - S_{21} & \cdots & S_{nn} - S_{n1} \\ S_{11} - S_{12} & S_{21} - S_{22} & \cdots & S_{n1} - S_{n2} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ S_{1(n-1)} - S_{1n} & S_{2(n-1)} - S_{2n} & \cdots & S_{n(n-1)} - S_{nn} \end{pmatrix}. \tag{5.5}$$

*Доказательство.* В силу Определения 2.9 и Леммы 5.2 расширенная матрица граничных измерений модели Постникова $PN(\mathcal{E}^{\mathcal{DT}}, w', O_2)$ имеет вид:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & F_{11} & 0 & F_{12} & \cdots & 0 & F_{1n} \\ 0 & 1 & 0 & -1 & \cdots & 0 & (-1)^{n-1} \\ 0 & F_{21} & 1 & F_{22} & \cdots & 0 & F_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & F_{n1} & 0 & F_{n2} & \cdots & 1 & F_{nn} \end{pmatrix},$$

где $F_{ij} = a_{2i-1 \to 2j}$.

Поменяем местами первую и вторую строки $A$, чтобы получить матрицу $A''$. Легко проверить, что для $A''$ имеет место следующее равенство:

$$A'' = D' \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & \dots \\ 1 & F_{11} & 0 & -F_{12} & 0 & F_{13} & \dots \\ 0 & -F_{21} & 1 & F_{22} & 0 & -F_{23} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix} D,$$

где $D' = diag(1, 1, -1, 1, -1, \dots)$.

Поскольку $PN(\mathcal{E}^{\mathcal{DT}}, w', O_2)$ определяет ту же точку $\mathrm{Gr}_{\geq 0}(n+1, 2n)$, что и пространство вектор-строк матрицы $A$, то та же самая точка задается и матрицей $A' = D'A''$.

Заметим, что для любого $I \subset \{1, \dots, 2n\}$

$$\Delta_I(A') = \det(D')\Delta_I(A'') = -\det(D')\Delta_I(A) = (-1)^{\binom{n}{2}+1}\Delta_I(A), \qquad (5.6)$$

где первое равенство выполняется в силу мультипликативности определителя, второе равенство выполняется потому, что перестановка двух строк меняет знак определителя, а третье равенство выполняется потому, что $\det(D') = (-1)^{\binom{n}{2}}$.

Докажем, что $S'_{ij} := (-1)^{i+j}F_{ij}$ удовлетворяет условиям, определяющим $S_{ij}$. Действительно:

$$S'_{kk} - S'_{kk-1} = (-1)^{\binom{n}{2}+1}\Delta_{[2n]\setminus(\{2k-1\}\cup T)}(A') = \Delta_{[2n]\setminus(\{2k-1\}\cup T)}(A) = \\ = \frac{\Delta^d_{[2n]\setminus(\{2k-1\}\cup T)}}{L_{unc}} = \frac{L_{kk}}{L_{unc}} = x_{kk}, \quad (5.7)$$

$$S'_{ij-1} - S'_{ij} = (-1)^{\binom{n}{2}+1}\Delta_{[2n]\setminus(\{2i-1\}\cup N)}(A') = \Delta_{[2n]\setminus(\{2i-1\}\cup N)}(A) = \\ = \frac{\Delta^d_{[2n]\setminus(\{2i-1\}\cup N)}}{L_{unc}} = \frac{L_{ij}}{L_{unc}} = -x_{ij}, \quad (5.8)$$

где множества $N$ и $T$ те же, что и в Лемме 3.1, а все индексы $i, j$ принадлежат множеству $\{1, \dots, n\} \pmod n$, где $0 \pmod n = n$. Первые равенства в (5.7) и (5.8)

выполняются в силу вида $A'$, вторые равенства выполняются в силу формулы (5.6), третьи равенства выполняются в силу Теоремы 5.7, четвертые равенства выполняются в силу Леммы 3.1 и, наконец, последние равенства выполняются в силу Леммы 1.15. □

Объединяя Теоремы 5.7 и 5.8, мы получаем следующее.

**Следствие 5.1.** [6], [12]

*Для каждой электрической сети* $\mathcal{E}(G,\omega) \in E_n$ *двойственный обобщенный трюк Темперли определяет ту же точку в* $\mathrm{Gr}_{\geq 0}(n+1,2n)$*, что и пространство вектор-строк матрицы, заданной уравнением* (5.4).

# Литература


[1] Adler A., Holder D. (Eds.) *Electrical impedance tomography: methods, history and applications*. — CRC Press, 2021. — 295 с.

[2] Avanzini F., Freitas N., Esposito M. Circuit theory for chemical reaction networks // *Physical Review X*. — 2023. — Т. 13, № 2. — С. 021041.

[3] Billera L. J., Holmes S. P., Vogtmann K. Geometry of the space of phylogenetic trees // *Advances in Applied Mathematics*. — 2001. — Т. 27, № 4. — С. 733–767.

[4] Borcea L., Druskin V., Vasquez F. G. Electrical impedance tomography with resistor networks // *Inverse Problems*. — 2008. — Т. 24, № 3. — С. 035013.

[5] Branden P. Polynomials with the half-plane property and matroid theory // *Advances in Mathematics*. — 2007. — Т. 216, № 1. — С. 302–320.

[6] Bychkov B., Gorbounov V., Guterman L., Kazakov A. Symplectic geometry of electrical networks // *Journal of Geometry and Physics*. — 2025. — Т. 207. — С. 105323.

[7] Bychkov B., Gorbounov V., Kazakov A., Talalaev D. Electrical networks, Lagrangian Grassmannians and symplectic groups // *Moscow Mathematical Journal*. — 2023. — Т. 23, № 2. — С. 133–167.

[8] Calderon A. P. On an inverse boundary value problem // *Seminar on Numerical Analysis and its Applications to Continuum Physics*. — Rio de Janeiro, 1980.

[9] Cardelli L., Tribastone M., Tschaikowski M. From electric circuits to chemical networks // *Natural Computing*. — 2020. — Т. 19. — С. 237–248.

[10] Chaiken S. A combinatorial proof of the all minors matrix tree theorem // *SIAM Journal on Algebraic Discrete Methods*. — 1982. — Т. 3, № 3. — С. 319–329.

[11] Chebotarev P. A. A class of graph-geodetic distances generalizing the shortest-path and the resistance distances // *Discrete Applied Mathematics*. — 2011. — Т. 159, № 5. — С. 295–302.

[12] Chepuri S., George T., Speyer D. E. Electrical networks and lagrangian grassmannians // *Annales de l'Institut Henri Poincaré D*. — 2025. — DOI: https://doi.org/10.4171/aihpd/203.

[13] Choe Y., Oxley J., Sokal A., Wagner D. Homogeneous multivariate polynomials with the half-plane property // *Advances in Applied Mathematics*. — 2004. — Т. 32. — С. 88–187.

[14] Curtis E. B., Morrow J. A. *Inverse problems for electrical networks*. — World Scientific, 2000. — 209 с.

[15] Devriendt K. Effective resistance is more than distance: Laplacians, simplices and the Schur complement // *Linear Algebra and its Applications*. — 2022. — Т. 639. — С. 24–49.

[16] Deza M., Laurent M. *Geometry of Cuts and Metrics*. — Springer Berlin, 1997. — 587 с.

[17] Dhar D. The abelian sandpile and related models // *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*. — 1999. — Т. 263, № 1-4. — С. 4–25.

[18] Doyle P., Snell J. *Random walks and electric networks*. — arXiv:math/0001057.

[19] Forcey S., Scalzo D. Phylogenetic networks as circuits with resistance distance // *Frontiers in Genetics*. — 2020. — Т. 11. — С. 586664.

[20] Forcey S. Circular planar electrical networks, split systems, and phylogenetic networks // *SIAM Journal on Applied Algebra and Geometry*. — 2023. — Т. 7, № 1. — С. 49–76.

[21] Fortuin C. M., Kasteleyn P. W. On the random-cluster model: I. Introduction and relation to other models // *Physica*. — 1972. — Т. 57, № 4. — С. 536.

[22] Fulton W., Harris J. *Representation theory: a first course*. — Springer Science and Business Media, 2013. — 551 с.

[23] Galashin P., Pylyavskyy P. Ising model and the positive orthogonal Grassmannian // *Duke Mathematical Journal*. — 2020. — Т. 169, № 10. — С. 1877–1942.

[24] Gao Y., Lam T., Xu Z. Electrical networks and the Grove algebra // *Canadian Journal of Mathematics*. — 2024. — С. 1–34.

[25] Gekhtman M., Shapiro M., Tabachnikov S., Vainshtein A. Integrable cluster dynamics of directed networks and pentagram maps // *Advances in Mathematics*. — 2016. — Т. 300. — С. 390–450.

[26] George T. Inverse problem for electrical networks via twist // *arXiv preprint arXiv:2305.10074*. — 2023.

[27] Glick M. The pentagram map and Y-patterns // *Advances in Mathematics*. — 2011. — Т. 227. — С. 1019–1045.

[28] Goldman J. R., Kauffman L. H. Knots, tangles, and electrical networks // *Advances in Applied Mathematics*. — 1993. — Т. 14, № 3. — С. 267–306.

[29] Gorbounov V., Kazakov A. Electrical networks and data analysis in phylogenetics // *Data Analytics and Topology*. — 2025. — Т. 1, № 1. — С. 33–45.

[30] Gorbounov V. G., Kazakov A. A. Metric properties of electrical networks and the graph reconstruction problems // *Proceedings of the 13th European Conference on Combinatorics, Graph Theory and Applications EUROCOMB'25*. — 2025. — С. 456–460. — URL: https://site.pheedloop.com/event/Eurocomb25/Abstracts (дата обращения: 06.01.2026).

[31] Gorbounov V., Talalaev D. Electrical varieties as vertex integrable statistical models // *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*. — 2020. — Т. 53, № 45. — С. 1–28.

[32] Gyishiani A. D., Gurvich V. A. Metric and ultrametric spaces of resistances // *Russian Mathematical Surveys*. — 1987. — Т. 42, № 6. — С. 235–236.

[33] Hakimi S. L., Yau S. S. Distance matrix of a graph and its realizability // *Quarterly of Applied Mathematics*. — 1965. — Т. 22, № 4. — С. 305–317.

[34] Holroyd A. E., Levine L., Meszaros K., Peres Y., Propp J., Wilson D. B. Chip-firing and rotor-routing on directed graphs // *In and out of equilibrium 2*. — 2008. — С. 331–364.

[35] Huson D. H., Rupp R., Scornavacca C. *Phylogenetic networks: concepts, algorithms and applications*. — Cambridge University Press, 2010. — 384 с.

[36] Jenne H. Combinatorics of the double-dimer model // *Advances in Mathematics*. — 2021. — Т. 392. — С. 107952.

[37] Kauffmann L., Saleur H. An algebraic approach to the planar coloring problem // *Communications in Mathematical Physics*. — 1993. — Т. 152, № 3. — С. 565–590.

[38] Kazakov A. Inverse problems related to electrical networks and the geometry of non-negative Grassmannians // *Physica D: Nonlinear Phenomena*. — 2025. — T. 483. — C. 134948.

[39] Kenyon R. W., Propp J., Wilson D. B. Trees and Matchings // *Electronic Journal of Combinatorics*. — 2000. — T. 7. — Research Paper 25.

[40] Kenyon R., Wilson D. Boundary partitions in trees and dimers // *Transactions of the American Mathematical Society*. — 2011. — T. 363, № 3. — C. 1325–1364.

[41] Kenyon R. W. The Laplacian on planar graphs and graphs on surfaces // *Current Developments in Mathematics*. — 2012. — C. 1–55.

[42] Kenyon R. W., Wilson D. B. The space of circular planar electrical networks // *SIAM Journal on Discrete Mathematics*. — 2017. — T. 31, № 1. — C. 1–28.

[43] Kirchhoff G. On the solution of the equations obtained from the investigation of the linear distribution of galvanic currents // *IRE Transactions on Circuit Theory*. — 1958. — T. 5, № 1. — C. 4–7.

[44] Klein D. J., Randić M. Resistance distance // *Journal of Mathematical Chemistry*. — 1993. — T. 12. — C. 81.

[45] Knuth D. E. Aztec diamonds, checkerboard graphs, and spanning trees // *Journal of Algebraic Combinatorics*. — 1997. — T. 6, № 3. — C. 253–257.

[46] Lam T. Electrical varieties and a compactification of the space of electrical networks // *Advances in Mathematics*. — 2018. — T. 338. — C. 549–600.

[47] Lam T. Totally nonnegative Grassmannian and Grassmann polytopes // *arXiv preprint arXiv:1506.00603*. — 2015.

[48] Lam T., Pylyavskyy P. Electrical networks and Lie theory // *Algebra and Number Theory*. — 2015. — Т. 9, № 6. — С. 1401–1418.

[49] Marcott C. Positroids have the Rayleigh property // *arXiv preprint arXiv:1611.03583*. — 2016.

[50] Merino C. *Matroids, the Tutte polynomial and the chip firing game*: дис. д-ра философии. — University of Oxford, 1999. — 145 с.

[51] Muller G., Speyer D. E. The twist for positroid varieties // *Proceedings of the London Mathematical Society*. — 2017. — Т. 115, № 5. — С. 1014–1071.

[52] Paridis K. *The inverse conductivity problem: Anisotropy, finite elements and resistor networks*: дис. д-ра философии. — The University of Manchester, 2013. — 217 с.

[53] Postnikov A. Total positivity, Grassmannians, and networks // *arXiv preprint arXiv:math/0609764*.

[54] Priezzhev V. B. The dimer problem and Kirchhoff's theorem // *Russian Mathematical Surveys*. — 1985. — Т. 147, № 12. — С. 747–765.

[55] Sabot C. Electrical networks, symplectic reductions, and application to the renormalization map of self-similar lattices // *Proceedings of Symposia in Pure Mathematics*. — 2004. — Т. 72. — С. 155–205.

[56] Scott J. S. Grassmannians and cluster algebras // *Proceedings of the London Mathematical Society*. — 2006. — Т. 92, № 2. — С. 345–380.

[57] Seshu S., Reed M. B. *Linear graphs and electrical networks*. — 1961. — 307 с.

[58] Skopenkov M., Smykalov V., Ustinov A. V. Random walks and electric circuits // *Mathematical Education*. — 2012. — Т. 16. — С. 25–47.

[59] Sokal A. D. The multivariate Tutte polynomial (alias Potts model) for graphs and matroids // *Surveys in Combinatorics*. — 2005. — С. 173–226.

[60] Speyer D., Sturmfels B. The tropical Grassmannian // *Advances in Mathematics*. — 2004. — Т. 190. — С. 145–158.

[61] Talaska K. A formula for Plücker coordinates associated with a planar network // *International Mathematics Research Notices*. — 2008. — Art. ID rnn 081.

[62] Uhlmann G. Commentary on Calderón's paper (29), on an inverse boundary value problem // *Selected Papers of Alberto P. Calderón*. — 2008. — С. 623–636.

[63] Uhlmann G. Electrical impedance tomography and Calderón's problem // *Inverse Problems*. — 2009. — Т. 25, № 12. — С. 123011.

[64] Wagner D. G. *Combinatorics of electrical networks*: учеб. пособие. — University of Waterloo, 2009. — 89 с.

[65] Wagner D. G. Matroid inequalities from electrical network theory // *The Electronic Journal of Combinatorics*. — 2004. — С. A1–A1.

[66] Wu F. Y. The Potts model // *Reviews of Modern Physics*. — 1982. — Т. 54, № 1. — С. 235.

[67] Zhou B., Trinajstić N. On resistance-distance and Kirchhoff index // *Journal of Mathematical Chemistry*. — 2009. — Т. 46. — С. 283–289.

[68] Казаков А. А. О сюръективности вложения электрических сетей в положительную часть лагранжевого грассманиана // Материалы Международного молодежного научного форума «ЛОМОНОСОВ-2023» [Электронный ресурс] / отв. ред. И. А. Алешковский [и др.]. — М. : МАКС Пресс, 2023. — URL: https://lomonosov-msu.ru/archive/Lomonosov_2023/data/section_22_28484.htm (дата обращения: 06.01.2026).

[69] Казаков А. А. Метрические свойства электрических сетей // Материалы Международного молодежного научного форума «ЛОМОНОСОВ-2025» [Электронный ресурс] / отв. ред. И. А. Алешковский [и др.]. — М. : МАКС Пресс, 2025. — URL: https://lomonosov-msu.ru/archive/Lomonosov_2025/data/section_19_38051.htm (дата обращения: 06.01.2026).

[70] Казаков А. А. Кластерные алгебры миноров матриц отклика электрических сетей // Материалы докладов V Конференции математических центров России [Электронный ресурс]. — Красноярск : ИВМ СО РАН, 2025. — С. 25–27. — URL: https://kmc.sfu-kras.ru/conf2025/files/sbornik_2025.pdf (дата обращения: 06.01.2026).