Санкт-Петербургское отделение Математического института
им. В. А. Стеклова РАН

На правах рукописи



Басков Игорь Сергеевич

Когомологии де Рама мягких функциональных алгебр

Специальность 1.1.3 —
«Геометрия и топология»

Автореферат
диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Санкт-Петербург — 2026

Работа выполнена в Санкт-Петербургском отделении Математического института им. В. А. Стеклова РАН.

Научный руководитель:
Подкорытов Семён Сергеевич, кандидат физико-математических наук (специальность – 01.01.04), старший научный сотрудник лаборатории геометрии и топологии Федерального государственного бюджетного учреждения науки Санкт-Петербургское отделение Математического института им. В. А. Стеклова Российской академии наук.

Официальные оппоненты:
Жеглов Александр Борисович, доктор физико-математических наук (специальность – 01.01.06), профессор кафедры дифференциальной геометрии и приложений механико-математического факультета Федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова».

Горинов Алексей Геннадьевич, PhD, доцент факультета математики Федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования "Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»".

Ведущая организация:
Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт проблем управления им. В. А. Трапезникова Российской академии наук.

Защита состоится 28 мая 2026 года на заседании диссертационного совета 24.1.167.03 при Математическом институте им. В.А. Стеклова Российской академии наук по адресу: 119991, г. Москва, ул. Губкина, д.8.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Математического института имени В. А. Стеклова РАН и на сайте: `https://mi-ras.ru/dis/ref26/baskov/dis.pdf`.

Автореферат разослан __ марта 2026 года.

Ученый секретарь
диссертационного совета 24.1.167.03,
доктор физ.-матем. наук,
профессор РАН  Д. В. Осипов

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Данная диссертация посвящена исследованию когомологий де Рама алгебр, возникающих как алгебры функций на топологических пространствах. Теория дифференциальных форм де Рама коммутативной алгебры A возникает естественным образом при переносе классических идей исчисления дифференциальных форм в контекст коммутативной алгебры.

Известна аналогия между геометрией и коммутативной алгеброй. Основной реализацией данной аналогии является конструкция, которая пространству (топологическому пространству, гладкому многообразию, алгебраическому многообразию) ставит в соответствие подходящую алгебру функций (непрерывных, гладких, регулярных). В пользу полноты этой аналогии свидетельствует теорема Гельфанда — Колмогорова (см. [4]), которая утверждает, что компактное хаусдорфово пространство X можно восстановить из $\mathbb{R}$-алгебры непрерывных вещественнозначных функций на этом пространстве. Для гладких многообразий выполнено похожее утверждение: гладкое многообразие M однозначно определяется $\mathbb{R}$-алгеброй гладких вещественнозначных функций на M (см. [5, глава 7]). В алгебраической геометрии центральным методом является рассмотрение аффинных алгебраических многообразий через алгебры регулярных функций.

Что может служить алгебраическим аналогом геометрического понятия дифференциальной формы? Для гладкого многообразия M гладкие дифференциальные формы определяются как гладкие сечения внешних степеней кокасательного расслоения многообразия M. Гладкие дифференциальные формы образуют dg-алгебру $\Omega^\bullet(M)$. Похожим образом, для неособого алгебраического многообразия V регулярные дифференциальные формы определяются как регулярные сечения внешних степеней кокасательного расслоения многообразия V. Регулярные дифференциальные формы образуют dg-алгебру $\Omega^\bullet_{\text{рег}}(V)$. Ответом на поставленный вопрос может служить следующее понятие.

Коммутативной ассоциативной k-алгебре A с единицей естественным образом сопоставляется dg-алгебра $\Omega^\bullet_{A|k}$ *алгебраических форм де Рама*, см. параграф 1.3. Элементы A-модуля $\Omega^1_{A|k}$ называются *кэлеровыми дифференциалами*. Данные понятия принадлежат Кэлеру, см. [28], [31]. Дадим описание универсальности A-модуля $\Omega^1_{A|k}$. Дифференцированием k-алгебры A со значениями в A-модуле N называется k-линейное отображение $D : A \to N$, удовлетворяющее

условию Лейбница: $D(ab) = aD(b) + bD(a)$ для любых $a,b \in A$. Все дифференцирования A со значениями в модуле N образуют k-векторное пространство $\mathrm{Der}_k(A,N)$. Тогда A-модуль $\Omega^1_{A|k}$ является местом прибытия универсального дифференцирования $d : A \to \Omega^1_{A|k}$, так что

$$\mathrm{Der}_k(A,N) \cong \mathrm{Hom}_A(\Omega^1_{A|k},N).$$

Как градуированная алгебра, $\Omega^\bullet_{A|k}$ является внешней алгеброй $\bigwedge^\bullet_A \Omega^1_{A|k}$. Дифференциал $d : \Omega^0_{A|k} = A \to \Omega^1_{A|k}$ продолжается единственным образом до дифференциала на $\Omega^\bullet_{A|k}$, который делает ее dg-алгеброй.

В пользу того, что dg-алгебра $\Omega^\bullet_{A|k}$ может выступать в роли алгебраического аналога dg-алгебры (классических) дифференциальных форм говорит следующий факт: для k-алгебры $A = k[V]$ регулярных функций на неособом аффинном алгебраическом многообразии V справедливо равенство $\Omega^\bullet_{\mathrm{per}}(V) = \Omega^\bullet_{A|k}$, см. [7, глава III, §5].

Что происходит для гладкого многообразия? Для гладкого многообразия M размерности ≥ 1 dg-алгебра $\Omega^\bullet_{C^\infty(M)|\mathbb{R}}$ существенно отличается от dg-алгебры $\Omega^\bullet(M)$. Например, в dg-алгебре $\Omega^\bullet_{C^\infty(\mathbb{R})|\mathbb{R}}$ равенство $df(t) = f'(t)dt$ выполняется тогда и только тогда, когда $f(t)$ является алгебраической функцией от t (см. [34, следствие из Proposition 1]). Более того, в 1990 году Франсиско Гомес показал, что если размерность гладкого многообразия M не меньше 1, то любое множество образующих $C^\infty(M)$-модуля $\Omega^1_{C^\infty(M)|\mathbb{R}}$ имеет мощность не меньше континуума (см. [18, Corollary 15]), в то время как модуль $\Omega^1(M)$ конечнопорожден для компактного M.

Для гладкого многообразия M верно равенство

$$\Omega^1(M) = \big(\mathrm{Der}_{\mathbb{R}}(C^\infty(M),C^\infty(M))\big)^* = \big(\Omega^1_{C^\infty(M)|\mathbb{R}}\big)^{**}$$

(через N^* для A-модуля N обозначен двойственный модуль $\mathrm{Hom}_A(N,A)$). Равенство следует из того, что $\mathrm{Der}_{\mathbb{R}}(C^\infty(M),C^\infty(M))$ есть пространство гладких векторных полей на M. Таким образом, конструкция, которая k-алгебре A ставит в соответствие A-модуль $\big(\mathrm{Der}_k(A,A)\big)^* = \big(\Omega^1_{A|k}\big)^{**}$, может также выступать в роли алгебраического аналога модуля дифференциальных 1-форм. Однако, модуль $\big(\Omega^1_{A|k}\big)^{**}$ может быть равен нулю в интересных случаях. Например, для топологического пространства X имеем

$$\big(\Omega^1_{C(X)|\mathbb{R}}\big)^* = \mathrm{Der}_{\mathbb{R}}(C(X),C(X)) = 0$$

(у алгебры непрерывных функций не существует ненулевых дифференцирований со значениями в ней самой). Для нас случай алгебры непрерывных функций будет важен, поэтому данную конструкцию мы не рассматриваем.

Естественно более глубоко исследовать dg-алгебру $\Omega^\bullet_{A|k}$ в случае, когда алгебра A — это алгебра гладких функций на гладком многообразии M или другая алгебра функций. Наиболее значимыми примерами для нас являются:

1. алгебра $C(X)$ непрерывных функций на компактном хаусдорфовом пространстве X,
2. алгебра $C^\infty(M)$ гладких функций на гладком многообразии M (возможно, с краем),
3. алгебра $\mathrm{PPol}_K(|K|)$ кусочно-полиномиальных функций на полиэдре K,
4. алгебра $A^0(X)$ полиномиальных функций на комбинаторном симплициальном комплексе X.

Согласно теореме сравнения де Рама, для гладкого многообразия M имеем изоморфизм

$$\mathrm{H}^*(\Omega^\bullet(M)) \cong \mathrm{H}^*(M,\mathbb{R}).$$

Поэтому естественно исследовать, как когомологии dg-алгебры $\Omega^\bullet_{A|\mathbb{R}}$ для алгебры функций A на пространстве X связаны с когомологиями пространства X. Для $\mathbb{C}$-алгебры регулярных функций A на неособом аффинном многообразии V над $\mathbb{C}$ когомологии dg-алгебры $\Omega^\bullet_{A|\mathbb{C}} = \Omega^\bullet_{\mathrm{per}}(V)$ были вычислены Гротендиком в [23]. Гротендик доказал, что они изоморфны сингулярным когомологиям $\mathrm{H}^*(V,\mathbb{C})$.

Рассмотрим алгебру $C^\infty(M)$ для гладкого многообразия M. Существует канонический морфизм dg-алгебр $\pi : \Omega^\bullet_{C^\infty(M)|\mathbb{R}} \to \Omega^\bullet(M)$, см. §2.3. Морфизм π является тождественным в нулевой степени, но почти никогда не является изоморфизмом в положительных степенях, как следует из сказанного ранее. Но не является ли изоморфизмом отображение

$$\mathrm{H}^*(\pi) : \mathrm{H}^*(\Omega^\bullet_{C^\infty(M)|\mathbb{R}}) \to \mathrm{H}^*(\Omega^\bullet(M))?$$

Изучение когомологий dg-алгебры $\Omega^\bullet_{C^\infty(M)|\mathbb{R}}$ для гладкого многообразия M началось с работы Говарда Осборна в 1969 году. В этой работе он показал, что первые когомологии $\mathrm{H}^1(\Omega^\bullet_{C^\infty(\mathbb{R})|\mathbb{R}})$ нетривиальны. Точнее, Осборн доказал, что 1-форма $\frac{dt}{1+t^2} \in \Omega^1_{C^\infty(\mathbb{R})|\mathbb{R}}$ является замкнутой, но не точной. Таким образом, отображение $\mathrm{H}^*(\pi)$ в данном случае не изоморфизм. Позже, в 1990 году, Франсиско Гомес вычислил пространство $\mathrm{H}^0(\Omega^\bullet_{C^\infty(M)|\mathbb{R}})$, см. [18].

В 1992 году Гомес установил ([19]), что для любого гладкого многообразия M морфизм dg-алгебр $\pi : \Omega^\bullet_{C^\infty(M)|\mathbb{R}} \to \Omega^\bullet(M)$ индуцирует сюръекцию на когомологиях в четных степенях. Для доказательства он использовал тот факт, что любой четномерный когомологический класс в $\mathrm{H}^*(\Omega^\bullet(M))$ является характеристическим классом некоторого комплексного векторного расслоения над M и предложил явный алгебраический прообраз для такого класса. Однако вопрос о когомологиях в нечетных степенях оставался открытым. Также не было изучено поведение когомологий де Рама для более общих алгебр функций, таких как алгебры непрерывных функций.

Ещё один важный вопрос заключается в следующем: если задано пространство X, можно ли найти алгебру функций A на X такую, чтобы когомологии dg-алгебры $\Omega^\bullet_{A|\mathbb{R}}$ были изоморфны когомологиям пространства X (как градуированные $\mathbb{R}$-алгебры)? Вопрос в этом направлении был сформулирован в работе [19]. Для полиэдра X естественным кандидатом на такую алгебру является $\mathrm{PPol}(X)$ — алгебра кусочно-полиномиальных функций на полиэдре X.

Другой возможный кандидат — алгебра $A^0(X)$, состоящая из *полиномиальных* функций на X. В 1976 году Кан и Миллер в работе [29] доказали, что гомотопический тип полиэдра X можно полностью восстановить из $\mathbb{R}$-алгебры $A^0(X)$. Позже было показано, что сама структура полиэдра X также полностью определяется алгеброй $A^0(X)$ (см. работы Савельева [6] и Гомеса [20]). С полиэдром X связана dg-алгебра $A^\bullet(X)$ полиномиальных дифференциальных форм Сулливана. Существует естественный морфизм $P : \Omega^\bullet_{A^0(X)|\mathbb{R}} \to A^\bullet(X)$. Кан и Миллер доказали, что P является сюръективным, а также описали его ядро [29]. Однако оставался открытым вопрос, является ли морфизм P квазиизоморфизмом. В работе [20] ошибочно утверждается, что когомологии dg-алгебры $\Omega^\bullet_{A^0(X)|\mathbb{R}}$ и dg-алгебры $A^\bullet(X)$ неизоморфны.

Остаётся открытым вопрос, поставленный в [19], построения алгебры функций A на пространстве X, такой что когомологии dg-алгебры $\Omega^\bullet_{A|\mathbb{R}}$ изоморфны когомологиям X, а K-группа $K_0(A)$ изоморфна K-группе $KO(X)$. Мы предполагаем, что для полиэдра X такой алгеброй является алгебра $\mathrm{PPol}(X)$.

Другим подходом является рассмотрение топологических алгебр. Используя проективное тензорное произведение, можно определить dg-алгебру $\tilde{\Omega}^\bullet_{\mathcal{A}|\mathbb{C}}$ для алгебры Фреше $\mathcal{A}$ над полем $\mathbb{C}$ (обозначенную как $\Omega^\bullet_{\mathrm{ab}}\mathcal{A}$ в [21, §8]). Эта dg-алгебра является топологическим аналогом dg-алгебры де Рама.

Рассмотрим алгебру Фреше $\mathcal{A} = C^\infty(M,\mathbb{C})$ для компактного гладкого

многообразия M. dg-алгебра $\tilde{\Omega}^{\bullet}_{\mathcal{A}|\mathbb{C}}$ изоморфна dg-алгебре $\Omega^{\bullet}(M,\mathbb{C})$, см. [21, Proposition 8.1].

Рассмотрим банахову алгебру $\mathcal{A} = C(X,\mathbb{C})$ для компактного хаусдорфова пространства X. Тогда $\tilde{\Omega}^{n}_{\mathcal{A}|\mathbb{C}} = 0$ для $n \geq 1$. Чтобы это увидеть, сначала отметим, что по [27, §8] или [13, Remark 47, d], непрерывные когомологии Хохшильда $\mathrm{HH}^n(\mathcal{A},\mathcal{A}^*)$ равны нулю для положительных n. Затем, по [27, Corollary 1.3] непрерывные гомологии Хохшильда банаховой алгебры $\mathcal{A}$ равны нулю в положительных степенях, в частности, $\mathrm{HH}_1(\mathcal{A}) = 0$. По [21, page 346] имеем $\mathrm{HH}_1(\mathcal{A}) \cong \tilde{\Omega}^{1}_{\mathcal{A}|\mathbb{C}}$. Следовательно, по построению пространства $\tilde{\Omega}^{n}_{\mathcal{A}|\mathbb{C}}$ оно равно нулю для $n \geq 1$.

Одной из областей применения данных вопросов является некоммутативная дифференциальная геометрия, где необходимо рассматривать формы де Рама на алгебрах, обобщающих алгебры функций.

Таким образом, при изучении пространства X некоторого типа и алгебры A функций на нём ключевым вопросом является исследование связи когомологий dg-алгебры $\Omega^{\bullet}_{A|k}$ с когомологиями пространства X.

Структура диссертации и основные результаты. Основные результаты диссертации заключаются в построении связи между когомологиями dg-алгебры $\Omega^{\bullet}_{A|k}$ алгебры функций на пространстве X и когомологиями пространства X.

Для мягкого пучка k-алгебр $\mathcal{F}$ на компактном хаусдорфовом пространстве X мы строим (см. параграф 2.2) линейное отображение

$$\Lambda_{\mathcal{F}} : \mathbb{H}^*(X,\underline{k}_X[0]) \to \mathrm{H}^*(\Omega^{\bullet}_{\mathcal{F}(X)|k}).$$

Здесь область определения — это когомологии пространства X с коэффициентами в постоянном пучке $\underline{k}_X$. Это отображение естественно относительно морфизмов k-окольцованных пространств (предложение 12). Алгебры вида $\mathcal{F}(X)$ мы называем *мягкими алгебрами*. Мы, в основном, интересуемся случаем $k = \mathbb{R}$. Мы доказываем следующую теорему.

Теорема 13 (пункт 2.3)**.** *Для пучка гладких функций C^{∞}_{M} на гладком многообразии M следующая диаграмма коммутативна:*

$$\mathbb{H}^*(M,\underline{\mathbb{R}}_M[0]) \xrightarrow[\Lambda_{C^{\infty}_{M}}]{} \mathrm{H}^*(\Omega^{\bullet}_{C^{\infty}(M)|\mathbb{R}}) \xrightarrow[\mathrm{H}^*(\pi)]{} \mathrm{H}^*(\Omega^{\bullet}(M)),$$

где Θ — канонический изоморфизм.

В частности, отображение

$$\mathrm{H}^n(\pi) : \mathrm{H}^n(\Omega^\bullet_{C^\infty(M)|\mathbb{R}}) \to \mathrm{H}^n(\Omega^\bullet(M))$$

сюръективно для $n \geq 0$.

Этот результат является обобщением работы Гомеса 1992 года. В [19] он доказывает, что естественная проекция

$$\mathrm{H}^n(\pi) : \mathrm{H}^n(\Omega^\bullet_{C^\infty(M)}) \to \mathrm{H}^n(\Omega^\bullet(M))$$

является сюръекцией для четных n. Заметим, что наш подход кардинально отличается от подхода Гомеса.

Далее, для произвольных пространства X и подалгебры $i : A \hookrightarrow C(X)$ (*функциональной алгебры*), мы строим линейное отображение (см. параграф 3.2)

$$\Psi_A : \mathrm{H}^*(\Omega^\bullet_{A|\mathbb{R}}) \to \mathbb{H}^*(X, \underline{\mathbb{R}}_X[0]).$$

Наша конструкция Ψ_A опирается на липшицеву локальную стягиваемость алгебраических множеств (теорема 4), доказанную Шарцером ([38, Theorem 4.18]). Это отображение естественно относительно непрерывных отображений
пространств, накрытых гомоморфизмом алгебр (см. предложение 26); в частности, $\Psi_A = \Psi_{C(X)} \circ \Omega_i$.

Для пространства X обозначим через C_X пучок алгебр непрерывных функций на пространстве X. Мы называем *мягкой функциональной алгеброй* алгебру глобальных сечений мягкого подпучка алгебр $\mathcal{F} \hookrightarrow C_X$. Одним из основных наших результатов является теорема о расщеплении для мягких функциональных алгебр.

Теорема 40 (параграф 3.4)**.** *Для компактного хаусдорфова пространства X и мягкого подпучка алгебр $\mathcal{F} \hookrightarrow C_X$ следующая диаграмма коммутативна:*

$$\begin{array}{ccc} & \mathrm{H}^*(\Omega^\bullet_{\mathcal{F}(X)|\mathbb{R}}) & \\ {\scriptstyle \Lambda_{\mathcal{F}}} \nearrow & & \searrow {\scriptstyle \Psi_{\mathcal{F}(X)}} \\ \mathbb{H}^*(X, \underline{\mathbb{R}}_X[0]) & \xrightarrow{\quad\mathrm{id}\quad} & \mathbb{H}^*(X, \underline{\mathbb{R}}_X[0]). \end{array}$$

Таким образом, группы $\mathbb{H}^*(X, \underline{\mathbb{R}}_X[0])$ канонически отщепляются от групп $\mathrm{H}^*(\Omega^\bullet_{\mathcal{F}(X)})$ прямым слагаемым.

Возникает вопрос, как естественное отображение $\Psi_{C^\infty(M)}$ связано с отображением $\mathrm{H}^*(\pi)$. Мы доказываем следующую теорему.

Теорема 36 (пункт 3.3). *Следующая диаграмма коммутативна:*

$$\mathrm{H}^*(\Omega^\bullet_{C^\infty(M)|\mathbb{R}}) \xrightarrow[\mathrm{H}^*(\pi)]{} \mathrm{H}^*(\Omega^\bullet(M)) \xleftarrow[\Theta]{} \mathbb{H}^*(M,\underline{\mathbb{R}}_M[0]), \qquad \Psi_{C^\infty(M)} : \mathrm{H}^*(\Omega^\bullet_{C^\infty(M)|\mathbb{R}}) \to \mathbb{H}^*(M,\underline{\mathbb{R}}_M[0])$$

Мы доказываем, что отображения $\Lambda_{\mathcal{F}}$ и Ψ_A являются мультипликативными.

Теорема 46 (параграф 4.3). *Для мягкого пучка k-алгебр $\mathcal{F}$ на компактном хаусдорфовом пространстве X отображение*

$$\Lambda_{\mathcal{F}} : \mathbb{H}^*(X,\underline{k}_X[0]) \to \mathrm{H}^*(\Omega^\bullet_{\mathcal{F}(X)|k})$$

является мультипликативным.

Теорема 51 (пункт 4.4). *Пусть X — топологическое пространство, $A \subset C(X)$ — подалгебра алгебры непрерывных вещественнозначных функций на X. Тогда отображение*

$$\Psi_A : \mathrm{H}^*(\Omega^\bullet_{A|\mathbb{R}}) \to \mathbb{H}^*(X,\underline{\mathbb{R}}_X[0])$$

является мультипликативным.

Для пучка кусочно-полиномиальных функций PPol_K на полиэдре K мы доказываем, что отображения $\Lambda_{\mathrm{PPol}_K}$ и $\Psi_{\mathrm{PPol}_K(|K|)}$ являются изоморфизмами.

Теорема 62 (параграф 5.2). *Отображения*

$$\Lambda_{\mathrm{PPol}_K} : \mathbb{H}^*(|K|,\underline{\mathbb{R}}_{|K|}[0]) \to \mathrm{H}^*(\Omega^\bullet_{\mathrm{PPol}_K(|K|)|\mathbb{R}})$$

и

$$\Psi_{\mathrm{PPol}_K(|K|)} : \mathrm{H}^*(\Omega^\bullet_{\mathrm{PPol}_K(|K|)|\mathbb{R}}) \to \mathbb{H}^*(|K|,\underline{\mathbb{R}}_{|K|}[0])$$

являются изоморфизмами.

В [41, § 7] Сулливан вводит dg-алгебру $A^\bullet(X)$ *полиномиальных форм* на комбинаторном симплициальном комплексе X. Алгебра $A^0(X)$ элементов нулевой степени dg-алгебры $A^\bullet(X)$ является алгеброй *полиномиальных функций* на X. Когомологии dg-алгебры $A^\bullet(X)$ изоморфны $\mathbb{H}^*(|X|,\underline{k}_{|X|}[0])$. Возникает

вопрос, какие естественные dg-алгебры слабо эквивалентны $A^\bullet(X)$. Одним из таких кандидатов является dg-алгебра $\Omega^\bullet_{A^0(X)}$. Имеется естественный морфизм комплексов

$$P : \Omega^\bullet_{A^0(X)} \to A^\bullet(X)$$

и мы доказываем следующую теорему.

Теорема 72 (параграф 6.3)**.** *Естественное отображение*

$$P : \Omega^\bullet_{A^0(X)} \to A^\bullet(X)$$

является квазиизоморфизмом.

Заметим, что к алгебре $A^0(X)$ не применима теорема Гротендика, так как спектр алгебры $A^0(X)$ не является гладким алгебраическим многообразием, см. [8]. В работе [29] авторы доказывают, что морфизм P сюръективен и дают описание его ядра. В работах [15] и [40, Appendix G(i)] дается другое описание ядра. В [20, Example 3.8] Гомес устанавливает, что морфизм P *не* является квазиизоморфизмом, что противоречит нашей теореме. Нам удалось исправить ошибочное вычисление Гомеса в замечании 6.3. Как приложение данной теоремы мы доказываем следующее предложение.

Предложение 75 (пункт 6.4)**.** *Отображение*

$$\Psi_{A^0(X)} : \mathrm{H}^*(\Omega^\bullet_{A^0(X)|\mathbb{R}}) \to \mathbb{H}^*(|X|, \underline{\mathbb{R}}_{|X|}[0])$$

является изоморфзимом.

У нас нет отображения Λ, так как алгебра $A^0(X)$ не является мягкой.

В параграфе 7.1 мы описываем, как отображения $\Lambda_{\mathcal{F}}$ и $\Psi_{\mathcal{F}(X)}$ действуют на когомологиях степени 0. Более точно, мы доказываем следующие результаты.

Предложение 81 (параграф 7.1)**.** *Для мягкого подпучка алгебр $\mathcal{F} \hookrightarrow C_X$ на компактном хаусдорфовом пространстве X отображение $\Lambda_{\mathcal{F}} : \mathbb{H}^0(X, \underline{\mathbb{R}}[0]) \to \mathrm{H}^0(\Omega^\bullet_{\mathcal{F}(X)|\mathbb{R}})$ является изоморфизмом.*

Следствие 82 (пункт 7.1)**.** *Для мягкого подпучка алгебр $\mathcal{F} \hookrightarrow C_X$ на компактном хаусдорфовом пространстве X отображение*

$$\Psi_{\mathcal{F}(X)} : \mathrm{H}^0(\Omega^\bullet_{\mathcal{F}(X)|\mathbb{R}}) \to \mathbb{H}^0(X, \underline{\mathbb{R}}[0])$$

является изоморфизмом.

Группа $\mathrm{H}^0(\Omega^\bullet_A)$ для произвольной алгебры функций A над полем характеристики 0 была вычислена Гомесом в [18]. Связанный результат — это [34, Proposition 5] (обратите внимание, что рассматриваемые там когомологии, в общем случае, отличаются от наших).

Для высших групп когомологий мы доказываем следующие результаты.

Теорема 88 (параграф 7.2)**.** *Пусть X — топологическое пространство и $\varphi \in C(X)$ принимает бесконечное число различных значений. Рассмотрим подалгебру $A \subset C(X)$ такую, что $e^{\lambda\varphi} \in A$ для всех $\lambda \in \mathbb{R}$. Тогда для каждого $n \geq 1$ $\mathrm{H}^n(\Omega^\bullet_{A|\mathbb{R}}) \neq 0$. Более того, отображение*

$$\Psi_A : \mathrm{H}^n(\Omega^\bullet_{A|R}) \to \mathbb{H}^n(X, \underline{\mathbb{R}}_X[0])$$

не является инъективным.

Следствие 89 (параграф 7.2)**.** *Пусть X — компактное хаусдорфово пространство и $\mathcal{F}$ — мягкий подпучок пучка C_X такой, что $\mathcal{F}(X)$ удовлетворяет условиям, наложенным на алгебру A в теореме 88. Тогда отображение*

$$\Lambda_{\mathcal{F}} : \mathbb{H}^n(X, \underline{\mathbb{R}}_X[0]) \to \mathrm{H}^n(\Omega^\bullet_{\mathcal{F}|\mathbb{R}})$$

не является сюръективным.

В частности, для бесконечного компактного хаусдорфова пространства X отображения $\Lambda_{C_X} : \mathbb{H}^n(X, \underline{\mathbb{R}}_X[0]) \to \mathrm{H}^n(\Omega^\bullet_{C(X)|\mathbb{R}})$ и $\Psi_{C(X)} : \mathrm{H}^n(\Omega^\bullet_{C(X)|\mathbb{R}}) \to \mathbb{H}^n(X, \underline{\mathbb{R}}_X[0])$ не являются изоморфизмами для $n > 0$. Это же верно для алгебры гладких функций на гладком многообразии, см. параграф 7.2.

Наши результаты отвечают вопрос, поставленный в статье [19]: «что можно сказать об алгебраических когомологиях де Рама алгебры непрерывных функций?»

Научная новизна. В диссертационной работе автором получены следующие новые результаты:

1. Построено естественное отображение

$$\Lambda_{\mathcal{F}} : \mathbb{H}^*(X, \underline{k}[0]) \to \mathrm{H}^*(\Omega^\bullet_{\mathcal{F}(X)|k}),$$

где $\mathcal{F}$ — мягкий пучок k-алгебр на компактном хаусдорфовом пространстве X.

Доказано (см. теорему 13), что для пучка гладких функций C^∞_M на гладком многообразии M следующая диаграмма коммутативна:

$$\mathbb{H}^*(M,\underline{\mathbb{R}}_M[0]) \xrightarrow[\Lambda_{C^\infty_M}]{} \mathrm{H}^*(\Omega^\bullet_{C^\infty(M)|\mathbb{R}}) \xrightarrow[\mathrm{H}^*(\pi)]{} \mathrm{H}^*(\Omega^\bullet(M)),$$

где Θ — канонический изоморфизм.

2. Для произвольной подалгебры A алгебры непрерывных функций $C(X)$ построено естественное отображение

$$\Psi_A : \mathrm{H}^*(\Omega^\bullet_{A|\mathbb{R}}) \to \mathbb{H}^*(X,\underline{\mathbb{R}}_X[0]).$$

3. Доказано, что композиция

$$\Psi_{\mathcal{F}(X)} \circ \Lambda_{\mathcal{F}} : \mathbb{H}^*(X,\underline{\mathbb{R}}[0]) \to \mathrm{H}^*(\Omega^\bullet_{\mathcal{F}(X)|\mathbb{R}}) \to \mathbb{H}^*(X,\underline{\mathbb{R}}[0])$$

является тождественным отображением.

4. Доказано, что отображения $\Lambda_{\mathcal{F}}$ и Ψ_A являются мультипликативными.
5. Доказано, что отображения $\Lambda_{\mathrm{PPol}_K}$ и $\Psi_{\mathrm{PPol}_K(|K|)}$ являются изоморфизмами, где PPol — пучок кусочно-полиномиальных функций на полиэдре K.
6. Доказано, что отображение $\Psi_{A^0(X)}$ является изоморфизмом для алгебры полиномиальных функций $A^0(X)$ на комбинаторном симплициальном комплексе X.
7. Представлены достаточные условия, при которых отображения $\Lambda_{\mathcal{F}}$ и Ψ_A не являются изоморфизмами.

Практическая значимость. Работа носит теоретический характер. Её результаты могут быть использованы для дальнейшего изучения мягких функциональных алгебр.

Методы исследования. Мы используем понятия и методы алгебраической топологии: когомологии пучков, технику симплициальных объектов, полиномиальные дифференциальные формы Сулливана. Используются методы кусочно-линейной топологии и геометрической теории интегрирования Уитни, один результат геометрии особенностей, конструкции коммутативной алгебры.

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы, см. [1], [2], и [3].

Апробация работы. По результатам диссертационной работы были сделаны следующие доклады.

1. Семинар «Деформационное квантование и квантовые группы», 2024.
2. Семинар «Некоммутативная геометрия и топология», 2024.
3. Семинар отдела геометрии и топологии МИАН «Геометрия, топология и математическая физика» (семинар С. П. Новикова), 2024.
4. Третья конференция математических центров, Майкоп, 2023.
5. Студенческий семинар по маломерной топологии, Санкт-Петербург, 2022.
6. Петербургский топологический семинар им. В. А. Рохлина, Санкт-Петербург, 2021.
7. Петербургский геометрический семинар им. А. Д. Александрова, Санкт-Петербург, 2021.

Публикации автора по теме диссертации

[1] Baskov, Igor. — «The de Rham cohomology of soft function algebras». — *New York Journal of Mathematics* 29 (2023), с. 1302—1340.

[2] Басков, И.С. — «Когомологии де Рама алгебры полиномиальных функций на симплициальном комплексе». — *Чебышевский сборник* 24 (2023), с. 203—212.

[3] Басков, И.С. — «Расщепление когомологий де Рама мягкой функциональной алгебры мультипликативно». — *Зап. научн. сем. ПОМИ* 543 (2025), с. 30—42.

Список литературы

[4] Гельфанд, И. М. и Колмогоров, А. Н. — «О кольцах непрерывных функций на топологических пространствах». — *Доклады Академии Наук СССР* Т. XXII, № 1. (1939), с. 11—15.

[5] Неструев, Джет. — *Гладкие многообразия и наблюдаемые.* — Москва: МЦНМО, 2000.

[6] Савельев, И. В. — «Симплициальные комплексы и линейчатые многообразия». — *Матем. заметки* 50:1 (1991).

[7] Шафаревич, И. Р. — *Основы алгебраической геометрии.* — Наука, 1988.

[8] Arapura, Donu и Kang, Su-Jeong. — «Kähler–de Rham cohomology and Chern classes». — *Communications in Algebra* 39.4 (2011), с. 1153—1167.

[9] Billera, Louis J. — «The algebra of continuous piecewise polynomials». — *Adv. Math.* 76.2 (1989), с. 170—183.

[10] Bott, Raoul и Tu, Loring W. — *Differential forms in algebraic topology.* — Т. 82. — Springer, 1982.

[11] Bredon, Glen E. — *Sheaf theory.* — Second edition. — New York: Springer-Verlag, 1997.

[12] Chen, Kuo Tsai. — «Iterated integrals, fundamental groups and covering spaces». — *Trans. Amer. Math. Soc.* 206 (1975), с. 83—98.

[13] Connes, Alain. — «Noncommutative differential geometry». — *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* 62 (1985), с. 41—144.

[14] Félix, Yves, Halperin, Stephen и Thomas, Jean-Claude. — *Rational homotopy theory.* — New York: Springer, 2001.

[15] Felix, Yves, Jessup, Barry и Parent, Paul-Eugène. — «The combinatorial model for the Sullivan functor on simplicial sets». — *Journal of Pure and Applied Algebra* 213.2 (2009), с. 231—240.

[16] Gersten, S. M. — «Homotopy theory of rings». — *J. Algebra* 19 (1971), с. 396—415.

[17] Godement, Roger. — *Topologie algébrique et théorie des faisceaux.* — Paris: Hermann, 1958.

[18] Gómez, Francisco. — «The number of generators of the algebra of Kähler differentials». — *Demonstratio Math.* 23 (1990), с. 375—383.

[19] Gómez, Francisco. — «Algebraic characteristic classes for idempotent matrices». — *Publ. Mat.* 36.2A (1992), с. 601—608.

[20] Gómez, Francisco. — «Simplicial types and polynomial algebras». — *Archivum Mathematicum* 38 (2002), с. 27—36.

[21] Gracia-Bondía, José M., Várilly, Joseph C. и Figueroa, Héctor. — *Elements of noncommutative geometry.* — Boston, MA: Birkhäuser Boston, Inc., 2001.

[22] Griffiths, Phillip и Morgan, John. — *Rational homotopy theory and differential forms.* — Birkhäuser, 1981.

[23] Grothendieck, Alexander. — «On the de Rham cohomology of algebraic varieties». — *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* 29 (1966), с. 95—103.

[24] Hardt, Robert, Lambrechts, Pascal, Turchin, Victor и Volić, Ismar. — «Real homotopy theory of semi-algebraic sets». — *Algebr. Geom. Topol.* 11, 5 (2011), с. 2477—2545.

[25] Heinonen, Juha. — *Lectures on Lipschitz analysis.* — 100. — University of Jyväskylä, 2005.

[26] Hirsch, Morris W. — «Smooth regular neighborhoods». — *Ann. of Math. (2)* 76 (1962), с. 524—530.

[27] Johnson, Barry Edward. — *Cohomology in Banach algebras.* — T. 127. — Memoirs of the American Mathematical Society. — Providence, RI: American Mathematical Society, 1972.

[28] Kähler, Erich. — «Algebra und Differentialrechnung». — *Bericht über die Mathematikertagung* (1953).

[29] Kan, Daniel M. и Miller, Edward Y. — «Sullivan's de Rham complex is definable in terms of its 0-forms». — *Proceedings of the American Mathematical Society* 57.2 (1976), с. 337—339.

[30] Kunz, Ernst. — *Kähler differentials*. — Braunschweig: Friedr. Vieweg & Sohn, 1986.

[31] Kunz, Ernst. — «Why "Kähler" Differentials?» — *Erich Kähler. Mathematische Werke/Mathematical works* (2011), с. 848—853.

[32] Lehmann, Daniel. — *Théorie homotopique des formes différentielles (d'aprés D. Sullivan)*. — Т. 45. — 1990.

[33] Matsumura, Hideyuki. — *Commutative ring theory*. — Second edition. — Cambridge: Cambridge University Press, 1989.

[34] Osborn, Howard. — «Derivations of commutative algebras». — *Illinois J. Math.* 13 (1969), с. 137—144.

[35] Peters, Chris A. M. и Steenbrink, Joseph H. M. — *Mixed Hodge structures*. — Berlin: Springer-Verlag, 2008.

[36] Quillen, Daniel. — *Homotopical algebra*. — Lecture Notes in Mathematics. — Cham: Springer, 1967.

[37] Rourke, C. P. и Sanderson, B. J. — *Introduction to piecewise-linear topology*. — Berlin: Springer-Verlag, 1972.

[38] Shartser, Leonid. — «De Rham theory and semialgebraic geometry». — (2011).

[39] Stacks. — *Tag 01F7*. — https://stacks.math.columbia.edu/tag/01F7.

[40] Sullivan, Dennis. — «Differential forms and the topology of manifolds». — *Manifolds Tokyo* (1973), с. 37—49.

[41] Sullivan, Dennis. — «Infinitesimal computations in topology». — *Publications Mathématiques de l'IHÉS* 47 (1977), с. 269—331.

[42] Voisin, Claire. — *Hodge Theory and Complex Algebraic Geometry I*. — Cambridge University Press, 2002.

[43] Wedhorn, Torsten. — *Manifolds, Sheaves, and Cohomology*. — Wiesbaden: Springer Spektrum, 2016.

[44] Whitney, Hassler. — *Geometric integration theory.* — Princeton, NJ: Princeton University Press, 1957.

Подписано в печать 26.02.2026.
Тираж 62 экз.

Отпечатано типографии (название, адрес)