Отзыв научного руководителя
о кандидатской диссертации И. С. Баскова
«Когомологии де Рама мягких функциональных алгебр»

Классические когомологии де Рама гладкого многообразия M определяются как когомологии dg-алгебры $\Omega^\bullet(M)$ гладких дифференциальных форм. Они изоморфны обычным когомологиям $H^\bullet(M;\mathbb{R})$ (теорема де Рама). У этого понятия есть алгебро-геометрический аналог: алгебраические когомологии де Рама аффинного гладкого алгебраического многообразия V определяются как когомологии dg-алгебры алгебраических дифференциальных форм на V. В случае многообразия над полем $\mathbb{C}$ алгебраические когомологии де Рама изоморфны обычным когомологиям $H^\bullet(V;\mathbb{C})$ (теорема Гротендика).

Коммутативная алгебра A над полем k канонически отображается в свою универсальную dg-алгебру $\Omega^\bullet_{A|k}$, когомологии которой называются когомологиями де Рама алгебры A. Такое название принято из-за того, что для алгебры $k[V]$ регулярных функций на аффинном гладком алгебраическом многообразии V над k универсальная dg-алгебра $\Omega^\bullet_{k[V]|k}$ совпадает с dg-алгеброй алгебраических дифференциальных форм на V и, следовательно, когомологии де Рама совпадают с алгебраическими когомологиями де Рама многообразия V.

Для алгебры $C^\infty(M)$ гладких $\mathbb{R}$-значных функций на гладком многообразии M универсальное свойство dg-алгебры $\Omega^\bullet_{C^\infty(M)|\mathbb{R}}$ даёт канонический морфизм dg-алгебр

$$\pi : \Omega^\bullet_{C^\infty(M)|\mathbb{R}} \to \Omega^\bullet(M),$$

который индуцирует гомоморфизм $H^\bullet(\pi)$ когомологий де Рама алгебры $C^\infty(M)$ в когомологии де Рама многообразия M, изоморфные обычным когомологиям $H^\bullet(M;\mathbb{R})$. Первый результат диссертации — сюръективность гомоморфизма $H^\bullet(\pi)$ в случае компактного M. Это неудивительное утверждение; сюръективность в чётных степенях доказал Ф. Гомес (1992). Для доказательства Басков строит встречный гомоморфизм

$$\Lambda : H^\bullet(M;\mathbb{R}) \to H^\bullet(\Omega^\bullet_{C^\infty(M)|\mathbb{R}})$$

и показывает, что он обратен справа к $H^\bullet(\pi)$. На мой взгляд, существование *канонического* встречного гомоморфизма неожиданно. Басков строит гомоморфизм Λ не только для алгебры $C^\infty(M)$, а для широкого класса

алгебр, называемых им *мягкими*. А именно, для произвольного поля k и мягкого пучка $\mathcal{F}$ k-алгебр над компактным хаусдорфовым пространством X рассмотрим алгебру $\mathcal{F}(X)$ глобальных сечений пучка $\mathcal{F}$. Басков строит кольцевой гомоморфизм

$$\Lambda : H^\bullet(X;k) \to H^\bullet(\Omega^\bullet_{\mathcal{F}(X)|k}),$$

где $H^\bullet(X;k)$ нужно понимать как когомологии пространства X с коэффициентами в постоянном пучке со стеблем k.

Другой результат диссертации — продолжение гомоморфизма $H^\bullet(\pi)$ на когомологии де Рама алгебры $C(M)$ непрерывных $\mathbb{R}$-значных функций. Для произвольного пространства X Басков строит кольцевой гомоморфизм

$$\Psi : H^\bullet(\Omega^\bullet_{C(X)|\mathbb{R}}) \to H^\bullet(X;\mathbb{R}).$$

Гомоморфизм Ψ продолжает гомоморфизм $H^\bullet(\pi)$ в случае гладкого многообразия и служит обратным слева к гомоморфизму Λ для алгебры $\mathcal{F}(X)$ глобальных сечений мягкого подпучка $\mathcal{F}$ алгебр в пучке непрерывных функций на компактном хаусдорфовом пространстве X (*мягкой функциональной алгебры*). Построение гомоморфизма Ψ опирается на теорему Л. Шарпера (2011) о локальной липшицевой стягиваемости алгебраического множества и использует теорию бемольных форм Уитни.

Басков доказывает, что Λ и Ψ — взаимно обратные изоморфизмы в случае алгебры кусочно-полиномиальных функций на полиэдре. Для алгебры полиномиальных функций $\mathrm{Pol}(K)$ на симплициальном комплексе K (т. е. функций, полиномиальных на каждом симплексе) гомоморфизм Ψ также изоморфизм. Таким образом, когомологии $H^\bullet(\Omega^\bullet_{\mathrm{Pol}(K)|\mathbb{R}})$ изоморфны обычным когомологиям $H^\bullet(K;\mathbb{R})$. Это утверждение вытекало бы из вышеупомянутой теоремы Гротендика, если бы она была применима к особым многообразиям. В литературе есть ошибочный контрпример к этому утверждению (Ф. Гомес, 2002).

Басков доказывает, что гомоморфизмы Λ и Ψ в степени 0 — изоморфизмы при самых широких предположениях, а в положительных степенях — не изоморфизмы при условии, что алгебра содержит достаточно много алгебраически независимых обратимых элементов. Например, для гладкого многообразия $M = [0,1]$ пространства $H^q(\Omega^\bullet_{C^\infty(M)|\mathbb{R}})$ ненулевые при всех $q > 0$. Это было известно для $q = 1$ (Х. Осборн, 1969).

Итак, в диссертации описана связь когомологий де Рама мягких функциональных и родственных алгебр с когомологиями пизлежащего пространства. Это решение важной задачи алгебраической топологии. Результаты диссертации доказаны и новы. Основные результаты диссертации опубликованы в трёх статьях. По материалу диссертации Басков также сделал доклады на семинарах и конференции. Диссертация написана им самостоятельно и отвечает остальным критериям Положения о присуждении учёных степеней.

Подкорытов Семён Сергеевич

старший научный сотрудник

Санкт-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН

191023, Санкт-Петербург,
наб. р. Фонтанки 27

ssp@pdmi.ras.ru

19 декабря 2025

Подпись руки Подкорытова С. С.

УДОСТОВЕРЯЮ
Помощник директора
по кадрам ПОМИ РАН В.Э. Владимирова
«19» 12 2025 г.