ОТЗЫВ

официального оппонента Алексея Геннадьевича Горинова о диссертации Игоря Сергеевича Баскова "Когомологии де Рама мягких функциональных алгебр", представленной на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 1.1.3 — "Геометрия и топология"

Контекст. Пусть есть гомоморфизм $R \to A$ коммутативных колец с единицей. Из коммутативной алгебры известна конструкция A-модуля кэлеровых дифференциалов $\Omega_{A/R}$. Существует R-линейное дифференцирование $d : A \to \Omega_{A/R}$, из которого получаются все R-линейные дифференцирования $A \to M$, где M — A-модуль, путем компонирования с гомоморфизмами A-модулей $\Omega_{A/R} \to M$. Беря внешнюю алгебру $\Omega_{A/R}$ (над A), мы получаем градуированную коммутативную дифференциальную алгебру $\Omega^\bullet_{A/R}$ над R.

Если $R = \mathbb{C}$, а A — алгебра функций на неособом аффинном комплексном многообразии X, то алгебра $\Omega^\bullet_{A/R}$ изоморфна алгебре регулярных дифференциальных форм на X, которая, согласно Гротендику, считает сингулярные когомологии $H^\bullet(X;\mathbb{C})$. Возникает естественный вопрос: а как можно интерпретировать $\Omega^\bullet_{A/R}$ в случае, если R — по-прежнему поле, а A — какая-нибудь коммутативная алгебра функций, но не обязательно алгебро-геометрического происхождения? Диссертация И. С. Баскова посвящена изучению этого вопроса.

Основные результаты. Обозначим через $\underline{R}_Y$ постоянный пучок на пространстве Y со слоем, равным коммутативному кольцу R. Пусть k — поле, $\mathcal{F}$ — мягкий пучок k-алгебр на компактном хаусдорфовом пространстве X. Автор строит в главе 2 отображение

$$\Lambda_{\mathcal{F}} : H^\bullet(X;\underline{k}_X) \to H^\bullet(\Omega^\bullet_{\mathcal{F}(X)/k}),$$

где $\mathcal{F}(X)$ — алгебра глобальных сечений $\mathcal{F}$. Кроме того, если X — произвольное пространство, а $A \subset C(X)$ — $\mathbb{R}$-подалгебра алгебры $C(X)$ непрерывных функций $X \to \mathbb{R}$, автор строит в главе 3 отображение

$$\Psi_A : H^\bullet(\Omega^\bullet_{A/\mathbb{R}}) \to H^\bullet(X;\underline{\mathbb{R}}_X).$$

Оба эти отображения являются отображениями колец (глава 4). Если X — компактное хаусдорфово пространство, а $\mathcal{F} \subset \underline{C}(X)$ — мягкий подпучок $\mathbb{R}$-алгебр пучка $\underline{C}(X)$ непрерывных функций на X, то композиция $\Psi_{\mathcal{F}(X)} \circ \Lambda_{\mathcal{F}}$ — тождественное отображение $H^\bullet(X;\underline{\mathbb{R}}_X)$ (Теорема 40). Таким образом, в этом случае алгебра $H^\bullet(\Omega^\bullet_{\mathcal{F}(X)/\mathbb{R}})$ распадается в прямую сумму подалгебры, изоморфной $H^\bullet(X;\mathbb{R})$, и некоторого идеала.

Иногда отображения $\Psi_{\mathcal{F}(X)}$ и $\Lambda_{\mathcal{F}}$ оказываются взаимно обратными изоморфизмами. Так происходит, например, когда X — компактный полиэдр, а пучок $\mathcal{F}$ есть пучок функций $f : X \to \mathbb{R}$, таких что есть подразбиение X (свое для каждой f), на котором f кусочно полиномиально (глава 5). Если не брать подразбиения, то у нас останется только отображение Ψ, которое все равно будет изоморфизмом (глава 6). Это противоречит одному утверждению из статьи 2002 года Франсиско Гомеса. Автор показывает в § 6.3, что это утверждение неверно.

Если X — гладкое многообразие, то есть естественное отображение

$$\pi : \Omega^\bullet_{C^\infty(X)/\mathbb{R}} \to \Omega^\bullet(X),$$

где справа стоит алгебра дифференциальных форм на X (§ 2.3.2). Оказывается, что если X компактно, то изоморфизм де Рама $H^\bullet(\Omega^\bullet(X)) \cong H^\bullet(X;\mathbb{R})$ позволяет отождествить $\Psi_{C^\infty(X)}$ и $H^\bullet(\pi)$ (Теорема 36).

Отображение $H^\bullet(\pi)$ сюръективно во всех градуировках. Это утверждение в диссертации не выводится из Теоремы 40 и отождествления из предыдущего абзаца, а получается как следствие Теоремы 13, которая в свою очередь используется в доказательстве Теоремы 40. Так или иначе, сюръективность $H^\bullet(\pi)$ обобщает результат Франсиско Гомеса, доказанный в 1992 для четных градуировок с использованием совершенно других соображений.

Наконец, в главе 7 автор приводит примеры, показывающие, что отображение Ψ_A, соответственно, $\Lambda_{\mathcal{F}}$ не обязано быть инъективным, соответственно сюръективным.

Комментарии и пожелания. Работа производит хорошее впечатление и содержит несколько неожиданных результатов. Вот несколько замечаний. В главе 6 не всегда можно понять, какие утверждения делаются для общих полей, а какие для $\mathbb{R}$. В любом случае, было бы интересно обобщить результаты глав 5 и 6 на случай произвольного поля характеристики 0 (или хотя бы на подполя $\mathbb{R}$). Также было бы интересно распространить эти результаты на произвольные полиэдры (необязательно компактные).

Аналогично, Теорема 40 сформулирована для компактных хаусдорфовых пространств. Это условие выглядит слишком обременительным. Возможно, эту теорему не очень сложно будет обобщить на какой-нибудь более широкий класс интересных пространств, например, на локально конечные полиэдры или на необязательно компактные топологические многообразия.

Работа хорошо и внятно написана. Есть некоторое (небольшое) количество опечаток.

Все это замечания не умаляют ценности работы.

Выводы. Работа выполнена на высоком профессиональном уровне. Результаты работы являются новыми и развивают алгебраическую топологию и теорию пучков. Эти результаты опубликованы в хороших журналах и были неоднократно рассказаны их автором на семинарах в Санкт-Петербурге и в Москве.

Считаю, что диссертационная работа “Когомологии де Рама мягких функциональных алгебр” соответствует всем требованиям, предъявляемым к диссертациям на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук, а ее автор, И. С. Басков, заслуживает присуждения ему этой степени.

11 мая 2026

Доцент факультета математики НИУ ВШЭ
А. Г. Горинов, docteur de mathématiques (PhD)
email: agorinov@hse.ru,gorinov@mccme.ru

Подпись заверяю
11.05.2026
Специалист по кадровому делопроизводству
Кислинская П.А