Санкт-Петербургское отделение Математического института
им. В. А. Стеклова РАН

На правах рукописи

Басков Игорь Сергеевич

Когомологии де Рама мягких функциональных алгебр

Специальность 1.1.3 —
«Геометрия и топология»

Диссертация на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
кандидат ф.-м. наук
Подкорытов Семён Сергеевич

Санкт-Петербург — 2026

Оглавление

Стр.

Введение 5

Глава 1. Предварительные сведения 16
1.1 Гиперкогомологии 16
1.1.1 Построение групп гиперкогомологий 16
1.1.2 Внешнее cup-произведение 17
1.1.3 Внутреннее cup-произведение и его свойства 18
1.2 Алгебраические множества 20
1.2.1 Вещественный спектр 20
1.2.2 Пучки сингулярных коцепей 21
1.2.3 Липшицева локальная стягиваемость алгебраических множеств 23
1.3 Алгебраические формы де Рама 24
1.4 Комбинаторные симплициальные комплексы 26

Глава 2. Отображение $\Lambda_{\mathcal{F}}$ и первое расщепление 27
2.1 Глобальные сечения пучка ${}^{+}\Omega^{n}_{\mathcal{F}|k}$ 27
2.2 Построение и естественность отображения $\Lambda_{\mathcal{F}} : \mathbb{H}^{*}(X,\underline{k}_{X}[0]) \to \mathrm{H}^{*}(\Omega^{\bullet}_{\mathcal{F}(X)|k})$ 29
2.3 Расщепление для алгебры гладких функций 30
2.3.1 Канонический изоморфизм Θ 30
2.3.2 Морфизмы π и $\underline{\pi}$ 31
2.3.3 Первая теорема о расщеплении 31

Глава 3. Отображение $\Psi_{A} : \mathrm{H}^{*}(\Omega^{\bullet}_{A|\mathbb{R}}) \to \mathbb{H}^{*}(X,\underline{\mathbb{R}}_{X}[0])$ и теорема о расщеплении 33
3.1 Симплициальная dg-алгебра бемольных коцепей 33
3.1.1 Построение симплициальной dg-алгебры $\Omega^{\bullet}_{\flat}(\Delta^{-})$ 33
3.1.2 Свойства симплициальной dg-алгебры $\Omega^{\bullet}_{\flat}(\Delta^{-})$ 36
3.2 Построение отображения Ψ_{A} 38
3.2.1 Пулбэк алгебраической формы 38

Стр.

3.2.2 Отображение $\xi_B : \Omega^\bullet_{B|\mathbb{R}} \to \mathrm{S}^\bullet_{\mathrm{Lip}}(\mathrm{spec}_{\mathbb{R}} B)$ . . . 40
3.2.3 Отображение $\Phi_B : \mathrm{H}^*(\Omega^\bullet_{B|\mathbb{R}}) \to \mathbb{H}^*(\mathrm{spec}_{\mathbb{R}} B, \underline{\mathbb{R}}_{\mathrm{spec}_{\mathbb{R}} B}[0])$ . . . 41
3.2.4 Отображение $\Psi_A : \mathrm{H}^*(\Omega^\bullet_{A|\mathbb{R}}) \to \mathbb{H}^*(X, \underline{\mathbb{R}}_X[0])$ . . . 41
3.3 Идентификация отображения $\Psi_{C^\infty(M)}$ . . . 42
3.3.1 Отображение $\xi^{\mathrm{sm}}_B : \Omega^\bullet_{B|\mathbb{R}} \to \mathrm{S}^\bullet_{\mathrm{sm}}(\mathrm{spec}_{\mathbb{R}} B)$ . . . 42
3.3.2 Сравнение отображений ξ_B и ξ^{sm}_B . . . 44
3.3.3 Морфизмы $\varkappa$ и $\underline{\varkappa}$ . . . 45
3.3.4 Идентификация отображения Ψ_B . . . 46
3.3.5 Идентификация отображения $\Psi_{C^\infty(M)}$ . . . 49
3.4 Основная теорема о расщеплении . . . 49

Глава 4. Мультипликативность отображений $\Lambda_{\mathcal{F}}$ и Ψ_A . . . 52
4.1 Техники симплициальной алгебры . . . 52
4.1.1 Симплициальная dg-алгебра $\mathbb{R}[0]_{\mathrm{const}}$ . . . 53
4.1.2 Симплициальная dg-алгебра $\mathrm{C}^\bullet$ . . . 54
4.2 Умножение в $\mathbb{H}^*(X, {}^+\Omega^\bullet_{\mathcal{F}|k})$ . . . 54
4.3 Мультипликативность отображения $\Lambda_{\mathcal{F}}$ . . . 55
4.4 Отображение Ψ_A мультипликативно . . . 55
4.4.1 Симплициальная dg-алгебра $\Omega^\bullet_\flat$ . . . 56
4.4.2 Мультипликативность отображения $\mathrm{H}^*(\xi_B)$ . . . 56
4.4.3 Мультипликативность отображения Ψ_A . . . 59

Глава 5. Кусочно-полиномиальные функции . . . 61
5.1 Полиэдры и прямолинейные отображения . . . 61
5.2 Отображения $\Lambda_{\mathrm{PPol}_K}$ и $\Psi_{\mathrm{PPol}_K(|K|)|\mathbb{R}}$ . . . 63

Глава 6. Полиномиальные функции . . . 67
6.1 dg-алгебра полиномиальных дифференциальных форм Сулливана 67
6.2 Алгебраические формы де Рама на комбинаторном симплициальном комплексе . . . 69
6.3 Квазиизоморфизм $P : \Omega^\bullet_{A^0(X)} \to A^\bullet(X)$ . . . 72
6.4 Отображение $\Psi_{A^0(X)}$ . . . 74
6.4.1 Канонический изоморфизм $\Pi : \mathrm{H}^*(A^\bullet(X)) \to \mathbb{H}^*(|X|, \underline{\mathbb{R}}_{|X|}[0])$ . . . 74

Стр.

6.4.2 Идентификация отображения $\Psi_{A^0(X)}$ 75

6.4.3 Отображение $\Psi_{A^0(X)}$ является изоморфизмом 77

Глава 7. Расщепление для произвольной алгебры функций . . . 78

7.1 Пространство $\mathrm{H}^0(\Omega^\bullet_{A|k})$ для алгебры функций A 78

7.2 Отображения Λ and Ψ не являются изоморфизмами в общем случае 80

Введение

Актуальность темы. Данная диссертация посвящена исследованию когомологий де Рама алгебр, возникающих как алгебры функций на топологических пространствах. Теория дифференциальных форм де Рама коммутативной алгебры A возникает естественным образом при переносе классических идей исчисления дифференциальных форм в контекст коммутативной алгебры.

Известна аналогия между геометрией и коммутативной алгеброй. Основной реализацией данной аналогии является конструкция, которая пространству (топологическому пространству, гладкому многообразию, алгебраическому многообразию) ставит в соответствие подходящую алгебру функций (непрерывных, гладких, регулярных). В пользу полноты этой аналогии свидетельствует теорема Гельфанда — Колмогорова (см. [4]), которая утверждает, что компактное хаусдорфово пространство X можно восстановить из $\mathbb{R}$-алгебры непрерывных вещественнозначных функций на этом пространстве. Для гладких многообразий выполнено похожее утверждение: гладкое многообразие M однозначно определяется $\mathbb{R}$-алгеброй гладких вещественнозначных функций на M (см. [5, глава 7]). В алгебраической геометрии центральным методом является рассмотрение аффинных алгебраических многообразий через алгебры регулярных функций.

Что может служить алгебраическим аналогом геометрического понятия дифференциальной формы? Для гладкого многообразия M гладкие дифференциальные формы определяются как гладкие сечения внешних степеней кокасательного расслоения многообразия M. Гладкие дифференциальные формы образуют dg-алгебру $\Omega^\bullet(M)$. Похожим образом, для неособого алгебраического многообразия V регулярные дифференциальные формы определяются как регулярные сечения внешних степеней кокасательного расслоения многообразия V. Регулярные дифференциальные формы образуют dg-алгебру $\Omega^\bullet_{\text{рег}}(V)$. Ответом на поставленный вопрос может служить следующее понятие.

Коммутативной ассоциативной k-алгебре A с единицей естественным образом сопоставляется dg-алгебра $\Omega^\bullet_{A|k}$ *алгебраических форм де Рама*, см. параграф 1.3. Элементы A-модуля $\Omega^1_{A|k}$ называются *кэлеровыми дифференциалами*. Данные понятия принадлежат Кэлеру, см. [28], [31]. Дадим описание универсальности A-модуля $\Omega^1_{A|k}$. Дифференцированием k-алгебры A со значениями в

A-модуле N называется k-линейное отображение $D : A \to N$, удовлетворяющее условию Лейбница: $D(ab) = aD(b) + bD(a)$ для любых $a,b \in A$. Все дифференцирования A со значениями в модуле N образуют k-векторное пространство $\mathrm{Der}_k(A,N)$. Тогда A-модуль $\Omega^1_{A|k}$ является местом прибытия универсального дифференцирования $d : A \to \Omega^1_{A|k}$, так что

$$\mathrm{Der}_k(A,N) \cong \mathrm{Hom}_A(\Omega^1_{A|k},N).$$

Как градуированная алгебра, $\Omega^\bullet_{A|k}$ является внешней алгеброй $\bigwedge^\bullet_A \Omega^1_{A|k}$. Дифференциал $d : \Omega^0_{A|k} = A \to \Omega^1_{A|k}$ продолжается единственным образом до дифференциала на $\Omega^\bullet_{A|k}$, который делает ее dg-алгеброй.

В пользу того, что dg-алгебра $\Omega^\bullet_{A|k}$ может выступать в роли алгебраического аналога dg-алгебры (классических) дифференциальных форм говорит следующий факт: для k-алгебры $A = k[V]$ регулярных функций на неособом аффинном алгебраическом многообразии V справедливо равенство $\Omega^\bullet_{\mathrm{per}}(V) = \Omega^\bullet_{A|k}$, см. [7, глава III, §5].

Что происходит для гладкого многообразия? Для гладкого многообразия M размерности $\geqslant 1$ dg-алгебра $\Omega^\bullet_{C^\infty(M)|\mathbb{R}}$ существенно отличается от dg-алгебры $\Omega^\bullet(M)$. Например, в dg-алгебре $\Omega^\bullet_{C^\infty(\mathbb{R})|\mathbb{R}}$ равенство $df(t) = f'(t)dt$ выполняется тогда и только тогда, когда $f(t)$ является алгебраической функцией от t (см. [34, следствие из Proposition 1]). Более того, в 1990 году Франсиско Гомес показал, что если размерность гладкого многообразия M не меньше 1, то любое множество образующих $C^\infty(M)$-модуля $\Omega^1_{C^\infty(M)|\mathbb{R}}$ имеет мощность не меньше континуума (см. [18, Corollary 15]), в то время как модуль $\Omega^1(M)$ конечнопорожден для компактного M.

Для гладкого многообразия M верно равенство

$$\Omega^1(M) = \big(\mathrm{Der}_{\mathbb{R}}(C^\infty(M),C^\infty(M))\big)^* = \big(\Omega^1_{C^\infty(M)|\mathbb{R}}\big)^{**}$$

(через N^* для A-модуля N обозначен двойственный модуль $\mathrm{Hom}_A(N,A)$). Равенство следует из того, что $\mathrm{Der}_{\mathbb{R}}(C^\infty(M),C^\infty(M))$ есть пространство гладких векторных полей на M. Таким образом, конструкция, которая k-алгебре A ставит в соответствие A-модуль $\big(\mathrm{Der}_k(A,A)\big)^* = \big(\Omega^1_{A|k}\big)^{**}$, может также выступать в роли алгебраического аналога модуля дифференциальных 1-форм. Однако, модуль $\big(\Omega^1_{A|k}\big)^{**}$ может быть равен нулю в интересных случаях. Например, для топологического пространства X имеем

$$\big(\Omega^1_{C(X)|\mathbb{R}}\big)^* = \mathrm{Der}_{\mathbb{R}}(C(X),C(X)) = 0$$

(у алгебры непрерывных функций не существует ненулевых дифференцирований со значениями в ней самой). Для нас случай алгебры непрерывных функций будет важен, поэтому данную конструкцию мы не рассматриваем.

Естественно более глубоко исследовать dg-алгебру $\Omega^\bullet_{A|k}$ в случае, когда алгебра A — это алгебра гладких функций на гладком многообразии M или другая алгебра функций. Наиболее значимыми примерами для нас являются:

1. алгебра $C(X)$ непрерывных функций на компактном хаусдорфовом пространстве X,
2. алгебра $C^\infty(M)$ гладких функций на гладком многообразии M (возможно, с краем),
3. алгебра $\mathrm{PPol}_K(|K|)$ кусочно-полиномиальных функций на полиэдре K,
4. алгебра $A^0(X)$ полиномиальных функций на комбинаторном симплициальном комплексе X.

Согласно теореме сравнения де Рама, для гладкого многообразия M имеем изоморфизм

$$\mathrm{H}^*(\Omega^\bullet(M)) \cong \mathrm{H}^*(M,\mathbb{R}).$$

Поэтому естественно исследовать, как когомологии dg-алгебры $\Omega^\bullet_{A|\mathbb{R}}$ для алгебры функций A на пространстве X связаны с когомологиями пространства X. Для $\mathbb{C}$-алгебры регулярных функций A на неособом аффинном многообразии V над $\mathbb{C}$ когомологии dg-алгебры $\Omega^\bullet_{A|\mathbb{C}} = \Omega^\bullet_{\mathrm{per}}(V)$ были вычислены Гротендиком в [23]. Гротендик доказал, что они изоморфны сингулярным когомологиям $\mathrm{H}^*(V,\mathbb{C})$.

Рассмотрим алгебру $C^\infty(M)$ для гладкого многообразия M. Существует канонический морфизм dg-алгебр $\pi : \Omega^\bullet_{C^\infty(M)|\mathbb{R}} \to \Omega^\bullet(M)$, см. §2.3.2. Морфизм π является тождественным в нулевой степени, но почти никогда не является изоморфизмом в положительных степенях, как следует из сказанного ранее. Но не является ли изоморфизмом отображение

$$\mathrm{H}^*(\pi) : \mathrm{H}^*(\Omega^\bullet_{C^\infty(M)|\mathbb{R}}) \to \mathrm{H}^*(\Omega^\bullet(M))?$$

Изучение когомологий dg-алгебры $\Omega^\bullet_{C^\infty(M)|\mathbb{R}}$ для гладкого многообразия M началось с работы Говарда Осборна в 1969 году. В этой работе он показал, что первые когомологии $\mathrm{H}^1(\Omega^\bullet_{C^\infty(\mathbb{R})|\mathbb{R}})$ нетривиальны. Точнее, Осборн доказал, что 1-форма $\frac{dt}{1+t^2} \in \Omega^1_{C^\infty(\mathbb{R})|\mathbb{R}}$ является замкнутой, но не точной. Таким образом, отображение $\mathrm{H}^*(\pi)$ в данном случае не изоморфизм. Позже, в 1990 году, Франсиско Гомес вычислил пространство $\mathrm{H}^0(\Omega^\bullet_{C^\infty(M)|\mathbb{R}})$, см. [18].

В 1992 году Гомес установил ([19]), что для любого гладкого многообразия M морфизм dg-алгебр $\pi : \Omega^\bullet_{C^\infty(M)|\mathbb{R}} \to \Omega^\bullet(M)$ индуцирует сюръекцию на когомологиях в четных степенях. Для доказательства он использовал тот факт, что любой четномерный когомологический класс в $\mathrm{H}^*(\Omega^\bullet(M))$ является характеристическим классом некоторого комплексного векторного расслоения над M и предложил явный алгебраический прообраз для такого класса. Однако вопрос о когомологиях в нечетных степенях оставался открытым. Также не было изучено поведение когомологий де Рама для более общих алгебр функций, таких как алгебры непрерывных функций.

Ещё один важный вопрос заключается в следующем: если задано пространство X, можно ли найти алгебру функций A на X такую, чтобы когомологии dg-алгебры $\Omega^\bullet_{A|\mathbb{R}}$ были изоморфны когомологиям пространства X (как градуированные $\mathbb{R}$-алгебры)? Вопрос в этом направлении был сформулирован в работе [19]. Для полиэдра X естественным кандидатом на такую алгебру является $\mathrm{PPol}(X)$ — алгебра кусочно-полиномиальных функций на полиэдре X.

Другой возможный кандидат — алгебра $A^0(X)$, состоящая из *полиномиальных* функций на X. В 1976 году Кан и Миллер в работе [29] доказали, что гомотопический тип полиэдра X можно полностью восстановить из $\mathbb{R}$-алгебры $A^0(X)$. Позже было показано, что сама структура полиэдра X также полностью определяется алгеброй $A^0(X)$ (см. работы Савельева [6] и Гомеса [20]). С полиэдром X связана dg-алгебра $A^\bullet(X)$ полиномиальных дифференциальных форм Сулливана. Существует естественный морфизм $P : \Omega^\bullet_{A^0(X)|\mathbb{R}} \to A^\bullet(X)$. Кан и Миллер доказали, что P является сюръективным, а также описали его ядро [29]. Однако оставался открытым вопрос, является ли морфизм P квазиизоморфизмом. В работе [20] ошибочно утверждается, что когомологии dg-алгебры $\Omega^\bullet_{A^0(X)|\mathbb{R}}$ и dg-алгебры $A^\bullet(X)$ неизоморфны.

Остаётся открытым вопрос, поставленный в [19], построения алгебры функций A на пространстве X, такой что когомологии dg-алгебры $\Omega^\bullet_{A|\mathbb{R}}$ изоморфны когомологиям X, а K-группа $K_0(A)$ изоморфна K-группе $KO(X)$. Мы предполагаем, что для полиэдра X такой алгеброй является алгебра $\mathrm{PPol}(X)$.

Другим подходом является рассмотрение топологических алгебр. Используя проективное тензорное произведение, можно определить dg-алгебру $\tilde{\Omega}^\bullet_{\mathcal{A}|\mathbb{C}}$ для алгебры Фреше $\mathcal{A}$ над полем $\mathbb{C}$ (обозначенную как $\Omega^\bullet_{\mathrm{ab}}\mathcal{A}$ в [21, §8]). Эта dg-алгебра является топологическим аналогом dg-алгебры де Рама.

Рассмотрим алгебру Фреше $\mathcal{A} = C^\infty(M,\mathbb{C})$ для компактного гладкого многообразия M. dg-алгебра $\tilde{\Omega}^\bullet_{\mathcal{A}|\mathbb{C}}$ изоморфна dg-алгебре $\Omega^\bullet(M,\mathbb{C})$, см. [21, Proposition 8.1].

Рассмотрим банахову алгебру $\mathcal{A} = C(X,\mathbb{C})$ для компактного хаусдорфова пространства X. Тогда $\tilde{\Omega}^n_{\mathcal{A}|\mathbb{C}} = 0$ для $n \geqslant 1$. Чтобы это увидеть, сначала отметим, что по [27, §8] или [13, Remark 47, d], непрерывные когомологии Хохшильда $\mathrm{HH}^n(\mathcal{A},\mathcal{A}^*)$ равны нулю для положительных n. Затем, по [27, Corollary 1.3] непрерывные гомологии Хохшильда банаховой алгебры $\mathcal{A}$ равны нулю в положительных степенях, в частности, $\mathrm{HH}_1(\mathcal{A}) = 0$. По [21, page 346] имеем $\mathrm{HH}_1(\mathcal{A}) \cong \tilde{\Omega}^1_{\mathcal{A}|\mathbb{C}}$. Следовательно, по построению пространства $\tilde{\Omega}^n_{\mathcal{A}|\mathbb{C}}$ оно равно нулю для $n \geqslant 1$.

Одной из областей применения данных вопросов является некоммутативная дифференциальная геометрия, где необходимо рассматривать формы де Рама на алгебрах, обобщающих алгебры функций.

Таким образом, при изучении пространства X некоторого типа и алгебры A функций на нём ключевым вопросом является исследование связи когомологий dg-алгебры $\Omega^\bullet_{A|k}$ с когомологиями пространства X.

Структура диссертации и основные результаты. Основные результаты диссертации заключаются в построении связи между когомологиями dg-алгебры $\Omega^\bullet_{A|k}$ алгебры функций на пространстве X и когомологиями пространства X.

Для мягкого пучка k-алгебр $\mathcal{F}$ на компактном хаусдорфовом пространстве X мы строим (см. параграф 2.2) линейное отображение

$$\Lambda_{\mathcal{F}} : \mathbb{H}^*(X,\underline{k}_X[0]) \to \mathrm{H}^*(\Omega^\bullet_{\mathcal{F}(X)|k}).$$

Здесь область определения — это когомологии пространства X с коэффициентами в постоянном пучке $\underline{k}_X$. Это отображение естественно относительно морфизмов k-окольцованных пространств (предложение 12). Алгебры вида $\mathcal{F}(X)$ мы называем *мягкими алгебрами*. Мы, в основном, интересуемся случаем $k = \mathbb{R}$. Мы доказываем следующую теорему.

Теорема 13 (пункт 2.3.3). *Для пучка гладких функций C^∞_M на гладком многообразии M следующая диаграмма коммутативна:*

$$\mathbb{H}^*(M,\underline{\mathbb{R}}_M[0]) \xrightarrow[\Lambda_{C^\infty_M}]{} \mathrm{H}^*(\Omega^\bullet_{C^\infty(M)|\mathbb{R}}) \xrightarrow[\mathrm{H}^*(\pi)]{} \mathrm{H}^*(\Omega^\bullet(M)),$$

$$\mathbb{H}^*(M,\underline{\mathbb{R}}_M[0]) \xrightarrow{\qquad\Theta\qquad} \mathrm{H}^*(\Omega^\bullet(M)),$$

где Θ — *канонический изоморфизм.*

В частности, отображение

$$\mathrm{H}^n(\pi) : \mathrm{H}^n(\Omega^\bullet_{C^\infty(M)|\mathbb{R}}) \to \mathrm{H}^n(\Omega^\bullet(M))$$

сюръективно для $n \geqslant 0$.

Этот результат является обобщением работы Гомеса 1992 года. В [19] он доказывает, что естественная проекция

$$\mathrm{H}^n(\pi) : \mathrm{H}^n(\Omega^\bullet_{C^\infty(M)}) \to \mathrm{H}^n(\Omega^\bullet(M))$$

является сюръекцией для четных n. Заметим, что наш подход кардинально отличается от подхода Гомеса.

Далее, для произвольных пространства X и подалгебры $i : A \hookrightarrow C(X)$ (*функциональной алгебры*), мы строим линейное отображение (см. параграф 3.2)

$$\Psi_A : \mathrm{H}^*(\Omega^\bullet_{A|\mathbb{R}}) \to \mathbb{H}^*(X, \underline{\mathbb{R}}_X[0]).$$

Наша конструкция Ψ_A опирается на липшицеву локальную стягиваемость алгебраических множеств (теорема 4), доказанную Шарцером ([38, Theorem 4.18]). Это отображение естественно относительно непрерывных отображений пространств, накрытых гомоморфизмом алгебр (см. предложение 26); в частности, $\Psi_A = \Psi_{C(X)} \circ \Omega_i$.

Для пространства X обозначим через C_X пучок алгебр непрерывных функций на пространстве X. Мы называем *мягкой функциональной алгеброй* алгебру глобальных сечений мягкого подпучка алгебр $\mathcal{F} \hookrightarrow C_X$. Одним из основных наших результатов является теорема о расщеплении для мягких функциональных алгебр.

Теорема 40 (параграф 3.4)**.** *Для компактного хаусдорфова пространства* X *и мягкого подпучка алгебр* $\mathcal{F} \hookrightarrow C_X$ *следующая диаграмма коммутативна:*

$$\begin{array}{ccc} & \mathrm{H}^*(\Omega^\bullet_{\mathcal{F}(X)|\mathbb{R}}) & \\ {\scriptstyle \Lambda_{\mathcal{F}}}\nearrow & & \searrow{\scriptstyle \Psi_{\mathcal{F}(X)}} \\ \mathbb{H}^*(X, \underline{\mathbb{R}}_X[0]) & \xrightarrow{\quad\mathrm{id}\quad} & \mathbb{H}^*(X, \underline{\mathbb{R}}_X[0]). \end{array}$$

Таким образом, группы $\mathbb{H}^*(X,\underline{\mathbb{R}}_X[0])$ канонически отщепляются от групп $\mathrm{H}^*(\Omega^\bullet_{\mathcal{F}(X)})$ прямым слагаемым.

Возникает вопрос, как естественное отображение $\Psi_{C^\infty(M)}$ связано с отображением $\mathrm{H}^*(\pi)$. Мы доказываем следующую теорему.

Теорема 36 (пункт 3.3.5). *Следующая диаграмма коммутативна:*

$$\mathrm{H}^*(\Omega^\bullet_{C^\infty(M)|\mathbb{R}}) \xrightarrow[\mathrm{H}^*(\pi)]{} \mathrm{H}^*(\Omega^\bullet(M)) \xleftarrow[\Theta]{} \mathbb{H}^*(M,\underline{\mathbb{R}}_M[0]),$$

с дугой $\Psi_{C^\infty(M)}$ из $\mathrm{H}^*(\Omega^\bullet_{C^\infty(M)|\mathbb{R}})$ в $\mathbb{H}^*(M,\underline{\mathbb{R}}_M[0])$.

Мы доказываем, что отображения $\Lambda_{\mathcal{F}}$ и Ψ_A являются мультипликативными.

Теорема 46 (параграф 4.3). *Для мягкого пучка k-алгебр $\mathcal{F}$ на компактном хаусдорфовом пространстве X отображение*

$$\Lambda_{\mathcal{F}} : \mathbb{H}^*(X,\underline{k}_X[0]) \to \mathrm{H}^*(\Omega^\bullet_{\mathcal{F}(X)|k})$$

является мультипликативным.

Теорема 51 (пункт 4.4.3). *Пусть X — топологическое пространство, $A \subset C(X)$ — подалгебра алгебры непрерывных вещественнозначных функций на X. Тогда отображение*

$$\Psi_A : \mathrm{H}^*(\Omega^\bullet_{A|\mathbb{R}}) \to \mathbb{H}^*(X,\underline{\mathbb{R}}_X[0])$$

является мультипликативным.

Для пучка кусочно-полиномиальных функций PPol_K на полиэдре K мы доказываем, что отображения $\Lambda_{\mathrm{PPol}_K}$ и $\Psi_{\mathrm{PPol}_K(|K|)}$ являются изоморфизмами.

Теорема 62 (параграф 5.2). *Отображения*

$$\Lambda_{\mathrm{PPol}_K} : \mathbb{H}^*(|K|,\underline{\mathbb{R}}_{|K|}[0]) \to \mathrm{H}^*(\Omega^\bullet_{\mathrm{PPol}_K(|K|)|\mathbb{R}})$$

и

$$\Psi_{\mathrm{PPol}_K(|K|)} : \mathrm{H}^*(\Omega^\bullet_{\mathrm{PPol}_K(|K|)|\mathbb{R}}) \to \mathbb{H}^*(|K|,\underline{\mathbb{R}}_{|K|}[0])$$

являются изоморфизмами.

В [41, § 7] Сулливан вводит dg-алгебру $A^\bullet(X)$ *полиномиальных форм* на комбинаторном симплициальном комплексе X. Алгебра $A^0(X)$ элементов нулевой степени dg-алгебры $A^\bullet(X)$ является алгеброй *полиномиальных функций* на X. Когомологии dg-алгебры $A^\bullet(X)$ изоморфны $\mathbb{H}^*(|X|,\underline{k}_{|X|}[0])$. Возникает вопрос, какие естественные dg-алгебры слабо эквивалентны $A^\bullet(X)$. Одним из таких кандидатов является dg-алгебра $\Omega^\bullet_{A^0(X)}$. Имеется естественный морфизм комплексов

$$P : \Omega^\bullet_{A^0(X)} \to A^\bullet(X)$$

и мы доказываем следующую теорему.

Теорема 72 (параграф 6.3)**.** *Естественное отображение*

$$P : \Omega^\bullet_{A^0(X)} \to A^\bullet(X)$$

является квазиизоморфизмом.

Заметим, что к алгебре $A^0(X)$ не применима теорема Гротендика, так как спектр алгебры $A^0(X)$ не является гладким алгебраическим многообразием, см. [8]. В работе [29] авторы доказывают, что морфизм P сюръективен и дают описание его ядра. В работах [15] и [40, Appendix G(i)] дается другое описание ядра. В [20, Example 3.8] Гомес устанавливает, что морфизм P *не* является квазиизоморфизмом, что противоречит нашей теореме. Нам удалось исправить ошибочное вычисление Гомеса в замечании 6.3. Как приложение данной теоремы мы доказываем следующее предложение.

Предложение 75 (пункт 6.4.3)**.** *Отображение*

$$\Psi_{A^0(X)} : \mathrm{H}^*(\Omega^\bullet_{A^0(X)|\mathbb{R}}) \to \mathbb{H}^*(|X|,\underline{\mathbb{R}}_{|X|}[0])$$

является изоморфзимом.

У нас нет отображения Λ, так как алгебра $A^0(X)$ не является мягкой.

В параграфе 7.1 мы описываем, как отображения $\Lambda_{\mathcal{F}}$ и $\Psi_{\mathcal{F}(X)}$ действуют на когомологиях степени 0. Более точно, мы доказываем следующие результаты.

Предложение 81 (параграф 7.1)**.** *Для мягкого подпучка алгебр $\mathcal{F} \hookrightarrow C_X$ на компактном хаусдорфовом пространстве X отображение $\Lambda_{\mathcal{F}} : \mathbb{H}^0(X,\underline{\mathbb{R}}[0]) \to \mathrm{H}^0(\Omega^\bullet_{\mathcal{F}(X)|\mathbb{R}})$ является изоморфизмом.*

Следствие 82 (пункт 7.1). *Для мягкого подпучка алгебр $\mathcal{F} \hookrightarrow C_X$ на компактном хаусдорфовом пространстве X отображение*

$$\Psi_{\mathcal{F}(X)} : \mathrm{H}^0(\Omega^\bullet_{\mathcal{F}(X)|\mathbb{R}}) \to \mathbb{H}^0(X, \underline{\mathbb{R}}[0])$$

является изоморфизмом.

Группа $\mathrm{H}^0(\Omega^\bullet_A)$ для произвольной алгебры функций A над полем характеристики 0 была вычислена Гомесом в [18]. Связанный результат — это [34, Proposition 5] (обратите внимание, что рассматриваемые там когомологии, в общем случае, отличаются от наших).

Для высших групп когомологий мы доказываем следующие результаты.

Теорема 88 (параграф 7.2). *Пусть X — топологическое пространство и $\varphi \in C(X)$ принимает бесконечное число различных значений. Рассмотрим подалгебру $A \subset C(X)$ такую, что $e^{\lambda\varphi} \in A$ для всех $\lambda \in \mathbb{R}$. Тогда для каждого $n \geqslant 1$ $\mathrm{H}^n(\Omega^\bullet_{A|\mathbb{R}}) \neq 0$. Более того, отображение*

$$\Psi_A : \mathrm{H}^n(\Omega^\bullet_{A|R}) \to \mathbb{H}^n(X, \underline{\mathbb{R}}_X[0])$$

не является инъективным.

Следствие 89 (параграф 7.2). *Пусть X — компактное хаусдорфово пространство и $\mathcal{F}$ — мягкий подпучок пучка C_X такой, что $\mathcal{F}(X)$ удовлетворяет условиям, наложенным на алгебру A в теореме 88. Тогда отображение*

$$\Lambda_{\mathcal{F}} : \mathbb{H}^n(X, \underline{\mathbb{R}}_X[0]) \to \mathrm{H}^n(\Omega^\bullet_{\mathcal{F}|\mathbb{R}})$$

не является сюръективным.

В частности, для бесконечного компактного хаусдорфова пространства X отображения $\Lambda_{C_X} : \mathbb{H}^n(X, \underline{\mathbb{R}}_X[0]) \to \mathrm{H}^n(\Omega^\bullet_{C(X)|\mathbb{R}})$ и $\Psi_{C(X)} : \mathrm{H}^n(\Omega^\bullet_{C(X)|\mathbb{R}}) \to \mathbb{H}^n(X, \underline{\mathbb{R}}_X[0])$ не являются изоморфизмами для $n > 0$. Это же верно для алгебры гладких функций на гладком многообразии, см. параграф 7.2.

Наши результаты отвечают вопрос, поставленный в статье [19]: «что можно сказать об алгебраических когомологиях де Рама алгебры непрерывных функций?»

Научная новизна. В диссертационной работе автором получены следующие новые результаты:

1. Построено естественное отображение

$$\Lambda_{\mathcal{F}} : \mathbb{H}^*(X,\underline{k}[0]) \to \mathrm{H}^*(\Omega^\bullet_{\mathcal{F}(X)|k}),$$

где $\mathcal{F}$ — мягкий пучок k-алгебр на компактном хаусдорфовом пространстве X.

Доказано (см. теорему 13), что для пучка гладких функций C^∞_M на гладком многообразии M следующая диаграмма коммутативна:

$$\mathbb{H}^*(M,\underline{\mathbb{R}}_M[0]) \xrightarrow[\Lambda_{C^\infty_M}]{} \mathrm{H}^*(\Omega^\bullet_{C^\infty(M)|\mathbb{R}}) \xrightarrow[\mathrm{H}^*(\pi)]{} \mathrm{H}^*(\Omega^\bullet(M)),$$

где Θ — канонический изоморфизм.

2. Для произвольной подалгебры A алгебры непрерывных функций $C(X)$ построено естественное отображение

$$\Psi_A : \mathrm{H}^*(\Omega^\bullet_{A|\mathbb{R}}) \to \mathbb{H}^*(X,\underline{\mathbb{R}}_X[0]).$$

3. Доказано, что композиция

$$\Psi_{\mathcal{F}(X)} \circ \Lambda_{\mathcal{F}} : \mathbb{H}^*(X,\underline{\mathbb{R}}[0]) \to \mathrm{H}^*(\Omega^\bullet_{\mathcal{F}(X)|\mathbb{R}}) \to \mathbb{H}^*(X,\underline{\mathbb{R}}[0])$$

является тождественным отображением.

4. Доказано, что отображения $\Lambda_{\mathcal{F}}$ и Ψ_A являются мультипликативными.
5. Доказано, что отображения $\Lambda_{\mathrm{PPol}_K}$ и $\Psi_{\mathrm{PPol}_K(|K|)}$ являются изоморфизмами, где PPol — пучок кусочно-полиномиальных функций на полиэдре K.
6. Доказано, что отображение $\Psi_{A^0(X)}$ является изоморфизмом для алгебры полиномиальных функций $A^0(X)$ на комбинаторном симплициальном комплексе X.
7. Представлены достаточные условия, при которых отображения $\Lambda_{\mathcal{F}}$ и Ψ_A не являются изоморфизмами.

Практическая значимость. Работа носит теоретический характер. Её результаты могут быть использованы для дальнейшего изучения мягких функциональных алгебр.

Методы исследования. Мы используем понятия и методы алгебраической топологии: когомологии пучков, технику симплициальных объектов, полиномиальные дифференциальные формы Сулливана. Используются методы

кусочно-линейной топологии и геометрической теории интегрирования Уитни, один результат геометрии особенностей, конструкции коммутативной алгебры.

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы, см. [1], [2], и [3].

Апробация работы. По результатам диссертационной работы были сделаны следующие доклады.

1. Семинар «Деформационное квантование и квантовые группы», 2024.
2. Семинар «Некоммутативная геометрия и топология», 2024.
3. Семинар отдела геометрии и топологии МИАН «Геометрия, топология и математическая физика» (семинар С. П. Новикова), 2024.
4. Третья конференция математических центров, Майкоп, 2023.
5. Студенческий семинар по маломерной топологии, Санкт-Петербург, 2022.
6. Петербургский топологический семинар им. В. А. Рохлина, Санкт-Петербург, 2021.
7. Петербургский геометрический семинар им. А. Д. Александрова, Санкт-Петербург, 2021.

Объем и структура работы. Диссертация состоит из введения и 7 глав.

Полный объём диссертации составляет 89 страниц. Список литературы содержит 44 наименования.

Благодарность.

Автор выражает свою благодарность своему научному руководителю, Подкорытову Семёну Сергеевичу, за неоценимую помощь в работе над диссертацией.

Глава 1. Предварительные сведения

1.1 Гиперкогомологии

1.1.1 Построение групп гиперкогомологий

Под комплексом мы подразумеваем неотрицательный коцепной комплекс. Для пучка $\mathcal{F}$ через $\mathcal{F}[0]$ обозначим комплекс пучков с $\mathcal{F}$ в степени 0 и остальными членами 0. Мы обозначаем через $\underline{k}_X$ постоянный пучок на пространстве X со значениями в поле k. Для любого комплекса пучков векторных пространств (или модулей над кольцом) $\mathcal{F}^\bullet$ существует комплекс $\mathfrak{T}^\bullet$ инъективных пучков и квазиизоморфизм $i : \mathcal{F}^\bullet \to \mathfrak{T}^\bullet$, см. [42, Proposition 8.4]. Мы называем $\mathfrak{T}^\bullet$ *инъективной резольвентой* $\mathcal{F}^\bullet$. Определим *гиперкогомологии* комплекса $\mathcal{F}^\bullet$ как

$$\mathbb{H}^*(X,\mathcal{F}^\bullet) := \mathrm{H}^*(\mathfrak{T}^\bullet(X))$$

для некоторой инъективной резольвенты $\mathcal{F}^\bullet \to \mathfrak{T}^\bullet$. Мы отсылаем читателя к [43, Definition 10.2] для полного определения групп гиперкогомологий.

Пусть $\mathcal{F}^\bullet$ — комплекс пучков на X. Тогда существует гомоморфизм

$$\Upsilon : \mathrm{H}^*(\mathcal{F}^\bullet(X)) \to \mathbb{H}^*(X,\mathcal{F}^\bullet),$$

естественный относительно морфизмов комплексов пучков. Отображение Υ является изоморфизмом в степени 0. Если пучки $\mathcal{F}^n$ ацикличны, то Υ является изоморфизмом, смотри [43, Theorem and Definition 10.4, Proposition 10.8].

Лемма 1. *Рассмотрим комплексы пучков $\mathcal{F}^\bullet$ и $\mathcal{G}^\bullet$ на топологических пространствах X и Y, соответственно. Пусть $\varphi : X \to Y$ — непрерывное отображение и $\gamma : \mathcal{G}^\bullet \to \varphi_*\mathcal{F}^\bullet$ — морфизм комплексов пучков. Тогда существует отображение $\mathbb{H}^*(\varphi,\gamma) : \mathbb{H}^*(Y,\mathcal{G}^\bullet) \to \mathbb{H}^*(X,\mathcal{F}^\bullet)$. Следующая диаграмма коммутативна:*

$$\begin{array}{ccc}
\mathbb{H}^*(X,\mathcal{F}^\bullet) & \xleftarrow{\Upsilon} & \mathrm{H}^*(\mathcal{F}^\bullet(X)) \\
{\scriptstyle \mathbb{H}^*(\varphi,\gamma)}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle \mathrm{H}(\varphi(Y))} \\
\mathbb{H}^*(Y,\mathcal{G}^\bullet) & \xleftarrow[\Upsilon]{} & \mathrm{H}^*(\mathcal{G}^\bullet(Y)).
\end{array}$$

Доказательство. См. [39]. □

Для пучка $\mathcal{F}$ на пространстве X и замкнутого подмножества $Z \subset X$ положим

$$\mathcal{F}(Z) := \varinjlim_{\text{open } U \supset Z} \mathcal{F}(U).$$

Для пучка $\mathcal{F}$ зафиксируем обозначение для отображения сужения $\mathrm{res}_{W,W'} : \mathcal{F}(W) \to \mathcal{F}(W')$ для замкнутых или открытых множеств $W' \subset W$.

Пучок $\mathcal{F}$ называется *мягким*, если для любого замкнутого множества $Z \subset X$ отображение сужения $\mathrm{res}_{X,Z}$ сюръективно. Любой мягкий пучок на компактном хаусдорфовом пространстве ацикличен, см. [43, Proposition 10.17]. Пучок $\mathcal{F}$ называется *вялым*, если для любого открытого $U \subset X$ отображение сужения $\mathcal{F}(X) \to \mathcal{F}(U)$ сюръективно. Вялый пучок ацикличен.

Для предпучка F обозначим за ${}^+F$ пучок, ассоциированный с F. Обозначим за $\mathrm{sh} : F \to {}^+F$ отображение шификации, то есть каноническое отображение из предпучка в ассоциированный пучок.

1.1.2 Внешнее cup-произведение

Для двух комплексов пучков $\mathcal{F}^\bullet$ и $\mathcal{G}^\bullet$ на пространстве X обозначим за $\mathcal{F}^\bullet \otimes \mathcal{G}^\bullet$ их тензорное произведение над k, которое представляет собой комплекс пучков на X, см. [17, Chapitre II, 6.1]. Построим отображение

$$\mathbb{H}^*(X,\mathcal{F}^\bullet) \otimes \mathbb{H}^*(X,\mathcal{G}^\bullet) \to \mathbb{H}^*(X,\mathcal{F}^\bullet \otimes \mathcal{G}^\bullet),$$

называемое *внешним cup-произведением*. Выберем инъективные резольвенты

$$i_1 : \mathcal{F}^\bullet \to \mathfrak{T}^\bullet, \quad i_2 : \mathcal{G}^\bullet \to \mathfrak{J}^\bullet, \quad j : \mathcal{F}^\bullet \otimes \mathcal{G}^\bullet \to \mathfrak{K}^\bullet.$$

Отображение комплексов

$$i_1 \otimes i_2 : \mathcal{F}^\bullet \otimes \mathcal{G}^\bullet \to \mathfrak{T}^\bullet \otimes \mathfrak{J}^\bullet$$

является квазиизоморфизмом, поскольку тензорное произведение пучков векторных пространств над полем является точным функтором. Существует

единственное с точностью до гомотопии отображение комплексов $\beta : \mathfrak{T}^\bullet \otimes \mathfrak{J}^\bullet \to \mathfrak{K}^\bullet$, делающее следующую диаграмму коммутативной с точностью до гомотопии

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}^\bullet \otimes \mathcal{G}^\bullet & \xrightarrow{i_1 \otimes i_2} & \mathfrak{T}^\bullet \otimes \mathfrak{J}^\bullet \\ \Big\downarrow{\scriptstyle j} & \swarrow{\scriptstyle \beta} & \\ \mathfrak{K}^\bullet, & & \end{array}$$

см. [39, Lemma 13.18.6 и Lemma 13.18.7].

Взяв глобальные сечения над X, получим естественное отображение

$$\beta(X) : (\mathfrak{T}^\bullet \otimes \mathfrak{J}^\bullet)(X) \to \mathfrak{K}^\bullet(X).$$

С другой стороны, имеется естественное отображение

$$\mathfrak{T}^\bullet(X) \otimes \mathfrak{J}^\bullet(X) \to (\mathfrak{T}^\bullet \otimes \mathfrak{J}^\bullet)(X).$$

Композиция этих отображений и взятие когомологий задает естественное отображение

$$\mathbb{H}^*(X,\mathcal{F}^\bullet) \otimes \mathbb{H}^*(X,\mathcal{G}^\bullet) \to \mathbb{H}^*(X,\mathcal{F}^\bullet \otimes \mathcal{G}^\bullet).$$

Это произведение является естественным относительно $\mathcal{F}^\bullet$ и $\mathcal{G}^\bullet$. Более того, оно является естественным относительно троек $(X,\mathcal{F}^\bullet,\mathcal{G}^\bullet)$.

Внешнее cup-произведение совместимо с Υ, т.е. следующая диаграмма коммутативна:

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{H}^*(\mathcal{F}^\bullet(X)) \otimes \mathrm{H}^*(\mathcal{G}^\bullet(X)) & \longrightarrow & \mathrm{H}^*((\mathcal{F}^\bullet \otimes \mathcal{G}^\bullet)(X)) \\ \Big\downarrow{\scriptstyle \Upsilon \otimes \Upsilon} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \Upsilon} \\ \mathbb{H}^*(X,\mathcal{F}^\bullet) \otimes \mathbb{H}^*(X,\mathcal{G}^\bullet) & \xrightarrow{\cup} & \mathbb{H}^*(X,\mathcal{F}^\bullet \otimes \mathcal{G}^\bullet), \end{array} \tag{1.1}$$

где верхнее отображение индуцировано естественным отображением комплексов

$$\mathcal{F}^\bullet(X) \otimes \mathcal{G}^\bullet(X) \to (\mathcal{F}^\bullet \otimes \mathcal{G}^\bullet)(X).$$

1.1.3 Внутреннее cup-произведение и его свойства

Пусть $\mathcal{F}^\bullet$ — комплекс пучков с умножением, т.е. комплекс пучков $\mathcal{F}^\bullet$, снабженный морфизмом комплексов

$$\mathcal{F}^\bullet \otimes \mathcal{F}^\bullet \xrightarrow{\times} \mathcal{F}^\bullet,$$

называемый умножением. В композиции с внешним cup-произведением это умножение порождает произведение

$$\mathbb{H}^*(X,\mathcal{F}^\bullet)\otimes\mathbb{H}^*(X,\mathcal{F}^\bullet)\xrightarrow{\cup}\mathbb{H}^*(X,\mathcal{F}^\bullet),$$

которое мы называем (*внутренним*) *cup-произведением*. Cup-произведение на гиперкогомологиях обладает следующими свойствами.

1. cup-произведение на когомологиях является естественным в следующем смысле. Пусть $\gamma:\mathcal{F}^\bullet\to\mathcal{G}^\bullet$ — морфизм комплексов пучков с умножением, т.е. диаграмма

$$\begin{array}{ccc}\mathcal{F}^\bullet\otimes\mathcal{F}^\bullet & \xrightarrow{\times} & \mathcal{F}^\bullet\\ {\scriptstyle\gamma\otimes\gamma}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\gamma}\\ \mathcal{G}^\bullet\otimes\mathcal{G}^\bullet & \xrightarrow{\times} & \mathcal{G}^\bullet\end{array}$$

коммутативна. Тогда имеем коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc}\mathbb{H}^*(X,\mathcal{F}^\bullet)\otimes\mathbb{H}^*(X,\mathcal{F}^\bullet) & \xrightarrow{\cup} & \mathbb{H}^*(X,\mathcal{F}^\bullet)\\ {\scriptstyle\mathbb{H}^*(\gamma)\otimes\mathbb{H}^*(\gamma)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\mathbb{H}^*(\gamma)}\\ \mathbb{H}^*(X,\mathcal{G}^\bullet)\otimes\mathbb{H}^*(X,\mathcal{G}^\bullet) & \xrightarrow{\cup} & \mathbb{H}^*(X,\mathcal{G}^\bullet).\end{array}$$

2. Рассмотрим пространство X с комплексом пучков с умножением $\mathcal{F}^\bullet$ и пространство Y с комплексом пучков с умножением $\mathcal{G}^\bullet$. Пусть $\varphi:Y\to X$ — непрерывное отображение и $\gamma:\mathcal{F}^\bullet\to\varphi_*\mathcal{G}^\bullet$ — морфизм комплексов пучков с умножением. Тогда следующая диаграмма коммутативна:

$$\begin{array}{ccc}\mathbb{H}^*(X,\mathcal{F}^\bullet)\otimes\mathbb{H}^*(X,\mathcal{F}^\bullet) & \xrightarrow{\cup} & \mathbb{H}^*(X,\mathcal{F}^\bullet)\\ {\scriptstyle\mathbb{H}^*(\gamma)\otimes\mathbb{H}^*(\gamma)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\mathbb{H}^*(\gamma)}\\ \mathbb{H}^*(Y,\mathcal{G}^\bullet)\otimes\mathbb{H}^*(Y,\mathcal{G}^\bullet) & \xrightarrow{\cup} & \mathbb{H}^*(Y,\mathcal{G}^\bullet).\end{array}$$

3. cup-произведение на гиперкогомологиях совместимо с Υ. Более точно, умножение на $\mathcal{F}^\bullet$ индуцирует произведение

$$\mathrm{H}^*(\mathcal{F}^\bullet(X))\otimes\mathrm{H}^*(\mathcal{F}^\bullet(X))\to\mathrm{H}^*(\mathcal{F}^\bullet(X)).$$

Тогда следующая диаграмма коммутативна:

$$\begin{array}{ccc}\mathrm{H}^*(\mathcal{F}^\bullet(X))\otimes\mathrm{H}^*(\mathcal{F}^\bullet(X)) & \longrightarrow & \mathrm{H}^*(\mathcal{F}^\bullet(X))\\ \downarrow{\scriptstyle\Upsilon\otimes\Upsilon} & & \downarrow{\scriptstyle\Upsilon}\\ \mathbb{H}^*(X,\mathcal{F}^\bullet)\otimes\mathbb{H}^*(X,\mathcal{F}^\bullet) & \xrightarrow{\cup} & \mathbb{H}^*(X,\mathcal{F}^\bullet).\end{array}$$

Комплекс пучков $\underline{k}_X[0]$ снабжен умножением

$$\underline{k}_X[0] \otimes \underline{k}_X[0] \to \underline{k}_X[0],\ 1 \otimes 1 \mapsto 1.$$

Cup-произведение

$$\mathbb{H}^*(X,\underline{k}_X[0]) \otimes \mathbb{H}^*(X,\underline{k}_X[0]) \xrightarrow{\cup} \mathbb{H}^*(X,\underline{k}_X[0])$$

совпадает с обычным cup-произведением на когомологиях пучков, см. [42, § 5.3.2].

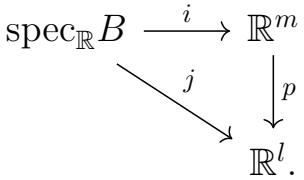
1.2 Алгебраические множества

1.2.1 Вещественный спектр

Алгебраическим множеством в $\mathbb{R}^m$ называется множество решений системы полиномиальных уравнений в $\mathbb{R}^m$.

Определение. Пусть B — конечно-порожденная $\mathbb{R}$-алгебра. Следуя [5, 3.4], определим *вещественный спектр* $\operatorname{spec}_{\mathbb{R}} B$ алгебры B как множество гомоморфизмов алгебр $\psi : B \to \mathbb{R}$.

Множество порождающих $b_1, \ldots, b_n$ алгебры B задает инъективное отображение $i : \operatorname{spec}_{\mathbb{R}} B \hookrightarrow \mathbb{R}^m$, $i(\psi) := (\psi(b_1), \ldots, \psi(b_n))$. Мы называем такое отображение *выделенным вложением*. Образ выделенного вложения является алгебраическим множеством. Наделим $\operatorname{spec}_{\mathbb{R}} B$ индуцированной топологией при некотором выделенном вложении. Эта топология не зависит от выбора выделенного вложения, так как для двух выделенных вложений $i : \operatorname{spec}_{\mathbb{R}} B \hookrightarrow \mathbb{R}^m$ и $j : \operatorname{spec}_{\mathbb{R}} B \hookrightarrow \mathbb{R}^l$ существует полиномиальное отображение $p : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^l$, такое что следующая диаграмма коммутативна



Так как полиномиальные отображения являются гладкими, мы можем говорить, что отображение в $\operatorname{spec}_{\mathbb{R}} B$ является гладким или локально липшицевым. Следовательно, $\operatorname{spec}_{\mathbb{R}} B$ становится *предгладким пространством* (predifferentiable space), см. [12, §1].

Если $\varphi : B' \to B$ — гомоморфизм конечно-порожденных $\mathbb{R}$-алгебр, то определим $\operatorname{spec}_{\mathbb{R}}\varphi : \operatorname{spec}_{\mathbb{R}} B \to \operatorname{spec}_{\mathbb{R}} B'$, полагая $(\operatorname{spec}_{\mathbb{R}}\varphi)(\psi) := \psi \circ \varphi$. Для $b \in B$ определим функцию $\widehat{b} \in C(\operatorname{spec}_{\mathbb{R}} B)$, полагая $\widehat{b}(\psi) := \psi(b)$. Имеем $\widehat{\varphi(c)} = \widehat{c} \circ (\operatorname{spec}_{\mathbb{R}}\varphi)$ в $C(\operatorname{spec}_{\mathbb{R}} B)$ для $c \in B'$.

Предположим, что B является конечно-порожденной $\mathbb{R}$-подалгеброй алгебры $C(X)$ для некоторого топологического пространства X. Каждой точке $x \in X$ поставим в соответствие гомоморфизм $B \to \mathbb{R}$, $b \mapsto b(x)$. Получаем непрерывное отображение $\Gamma_B : X \to \operatorname{spec}_{\mathbb{R}} B$. Если M — гладкое многообразие и B — конечно-порожденная подалгебра $C^\infty(M)$, то Γ_B является гладким отображением. Для $b \in B$ имеем

$$\widehat{b} \circ \Gamma_B = b. \tag{1.2}$$

Рассмотрим непрерывное отображение пространств $\varphi : X \to Y$. Пусть $B \subset C(X)$ и $B' \subset C(Y)$ — конечно-порожденные подалгебры и $\gamma : B' \to B$ — гомоморфизм, такой что следующая диаграмма коммутативна:

$$\begin{array}{ccc} C(X) & \longleftarrow & B \\ {\scriptstyle \varphi^*}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle \gamma} \\ C(Y) & \longleftarrow & B'. \end{array}$$

Тогда следующая диаграмма коммутативна:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\Gamma_B} & \operatorname{spec}_{\mathbb{R}} B \\ \downarrow{\scriptstyle \varphi} & & \downarrow{\scriptstyle \operatorname{spec}_{\mathbb{R}}\gamma} \\ Y & \xrightarrow{\Gamma_{B'}} & \operatorname{spec}_{\mathbb{R}} B'. \end{array}$$

1.2.2 Пучки сингулярных коцепей

Для топологического пространства X положим за $\mathrm{S}_n(X)$ векторное пространство сингулярных $\mathbb{R}$-цепей в X и за $\mathrm{S}^n(X)$ его двойственное пространство,

пространство сингулярных коцепей. Обозначим за S^n_X предпучки

$$U \mapsto \mathrm{S}^n(U)$$

для $n \geqslant 0$. Данные пространства вместе со стандартным дифференциалом задают комплекс предпучков векторных пространств $\mathrm{S}^\bullet_X$ на X. Для гладкого многообразия M (возможно, с границей) обозначим за $\mathrm{S}_{\mathrm{sm},n}(M)$ пространство гладких сингулярных $\mathbb{R}$-цепей в M и за $\mathrm{S}^n_{\mathrm{sm}}(M)$ его двойственное. Аналогично определим предпучки $\mathrm{S}^n_{\mathrm{sm},M}$ для $n \geqslant 0$. Более общо, комплекс предпучков $\mathrm{S}^\bullet_{\mathrm{sm},Q}$ корректно определен для предгладкого пространства Q и функториален относительно гладких отображений предгладких пространств. В частности, $\mathrm{S}^\bullet_{\mathrm{sm},\mathrm{spec}_{\mathbb{R}}B}$ корректно определено.

Для множества $V \subset \mathbb{R}^m$ обозначим за $\mathrm{S}_{\mathrm{Lip},n}(V)$ векторное пространство сигулярных липшицевых $\mathbb{R}$-цепей в V и за $\mathrm{S}^n_{\mathrm{Lip}}(V)$ его двойственное пространство. Аналогично определим предпучки $\mathrm{S}^n_{\mathrm{Lip},V}$ для $n \geqslant 0$ Комплекс $\mathrm{S}^\bullet_{\mathrm{Lip},\mathrm{spec}_{\mathbb{R}}B}$ корректно определен и функториален относительно гомоморфизмов алгебр.

Пучки ${}^+\mathrm{S}^n_X$ являются вялыми, см. [43, доказательство Theorem 11.13], и, следовательно, ацикличны. Аналогично можно показать, что пучки ${}^+\mathrm{S}^n_{\mathrm{sm},Q}$ и ${}^+\mathrm{S}^n_{\mathrm{Lip},V}$ являются вялыми.

Для комплекса пучков ${}^+\mathrm{S}^\bullet_X$ определим морфизм комплексов пучков, *коаугментацию*, $\varepsilon : \underline{\mathbb{R}}_X[0] \to {}^+\mathrm{S}^\bullet_X$, полагая $\varepsilon(1) := 1$. Для комплексов ${}^+\mathrm{S}^\bullet_{\mathrm{sm},Q}$ и ${}^+\mathrm{S}^\bullet_{\mathrm{Lip},V}$ коаугментацию определим аналогично.

Лемма 2.

1. *Для топологического пространства X морфизм комплексов*

$$\mathrm{sh} : \mathrm{S}^\bullet_X(X) \to {}^+\mathrm{S}^\bullet_X(X)$$

является квазиизоморфизмом.

2. *Для предгладкого пространства Q морфизм комплексов*

$$\mathrm{sh} : \mathrm{S}^\bullet_{\mathrm{sm},Q}(Q) \to {}^+\mathrm{S}^\bullet_{\mathrm{sm},Q}(Q)$$

является квазиизоморфизмом.

3. *Для подмножества $V \subset \mathbb{R}^m$ морфизм комплексов*

$$\mathrm{sh} : \mathrm{S}^\bullet_{\mathrm{Lip},V}(V) \to {}^+\mathrm{S}^\bullet_{\mathrm{Lip},V}(V)$$

является квазиизоморфизмом.

См. [11, p. 26] для доказательства первого утверждения. Остальные случаи аналогичны.

Лемма 3.

1. *Для локально стягиваемого топологического пространства X коаугментация $\varepsilon : \underline{\mathbb{R}}_X[0] \to {}^+\mathrm{S}^\bullet_X$ является квазиизоморфизмом.*
2. *Для гладкого многообразия M коаугментация $\varepsilon : \underline{\mathbb{R}}_M[0] \to {}^+\mathrm{S}^\bullet_{\mathrm{sm},M}$ является квазиизоморфизмом.*
3. *Для липшицево локально стягиваемого $V \subset \mathbb{R}^m$ коаугментация $\varepsilon : \underline{\mathbb{R}}_V[0] \to {}^+\mathrm{S}^\bullet_{\mathrm{Lip},V}$ является квазиизоморфизмом.*

См. [11, Example II.1.2] для случая ${}^+\mathrm{S}^\bullet_X$. Остальные случаи аналогично.

1.2.3 Липшицева локальная стягиваемость алгебраических множеств

Важным результатом для этой работы является теорема Шарцера о липшицевой локальной стягиваемости алгебраических множеств, [38, Theorem 4.1.8].

Теорема 4. *Рассмотрим алгебраическое множество $V \subset \mathbb{R}^m$ и точку $v_0 \in V$. Тогда существует открытое множество $U \subset \mathbb{R}^m$, т.ч. $v_0 \in U$, и липшицево отображение $F : U \times [0,1] \to U$, такое что*

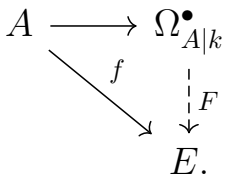
1. *$F(u,0) = u$ для $u \in U$;*
2. *$F(u,1) = v_0$ для $u \in U$;*
3. *$F(v,t) \in V$ для всех $v \in V \cap U$ и $t \in [0,1]$.*

Следствие 5. *Коаугментация $\varepsilon : \underline{\mathbb{R}}_V[0] \to {}^+\mathrm{S}^\bullet_{\mathrm{Lip},V}$ является квазиизоморфизмом для алгебраического множества V в $\mathbb{R}^m$.*

Доказательство. Следует и леммы 3 и теоремы 4. □

1.3 Алгебраические формы де Рама

k-алгебре A можно поставить в соответствие dg-алгебру *алгебраических форм де Рама* $\Omega^\bullet_{A|k}$ ([30, Theorem 3.2]), такую что $\Omega^0_{A|k} = A$. Для неё выполнено следующее универсальное свойство: для любой dg-алгебры E и любого гомоморфизма алгебр $f : A \to E^0$ существует единственный морфизм dg-алгебр $F : \Omega^\bullet_{A|k} \to E$, такой что $F|_A = f$:



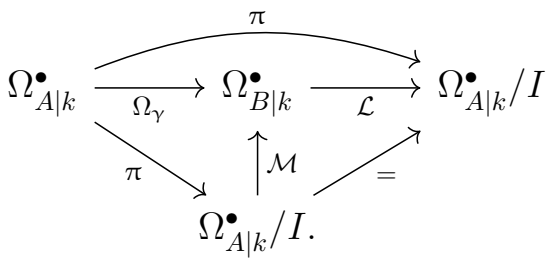
Элементы пространства $\Omega^n_{A|k}$ называются алгебраическими n-формами. dg-алгебра $\Omega^\bullet_{A|k}$ ковариантна относительно алгебры A.

Лемма 6. *Пусть A и B — k-алгебры, и $\gamma : A \to B$ — сюръективный гомоморфизм алгебр. Тогда индуцированный морфизм $\Omega_\gamma : \Omega^\bullet_{A|k} \to \Omega^\bullet_{B|k}$ является сюръективным, и его ядро — это идеал в $\Omega^\bullet_{A|k}$, порожденный $\operatorname{Ker}\gamma$ и $d(\operatorname{Ker}\gamma)$.*

Доказательство. Введем обозначение $T := \operatorname{Ker}\gamma$, тогда достаточно рассмотреть случай, когда $B = A/T$, а $\gamma : A \to B$ является канонической проекцией. Рассмотрим идеал I в $\Omega^\bullet_{A|k}$, порожденный подпространствами T и dT. I является dg-идеалом, следовательно, $\Omega^\bullet_{A|k}/I$ является dg-алгеброй и каноническая проекция $\pi : \Omega^\bullet_{A|k} \to \Omega^\bullet_{A|k}/I$ является морфизмом dg-алгебр. По универсальному свойству существует единственный морфизм dg-алгебр $\mathcal{L} : \Omega^\bullet_{B|k} \to \Omega^\bullet_{A|k}/I$, такой что $\mathcal{L}|_B$ является тождественным отображением. С другой стороны, ядро Ω_γ содержит T и dT. Следовательно, морфизм Ω_γ раскладывается в композицию морфизмов dg-алгебр $\Omega^\bullet_{A|k} \xrightarrow{\pi} \Omega^\bullet_{A|k}/I \xrightarrow{\mathcal{M}} \Omega^\bullet_{B|k}$. Композиция

$$\Omega^\bullet_{B|k} \xrightarrow{\mathcal{L}} \Omega^\bullet_{A|k}/I \xrightarrow{\mathcal{M}} \Omega^\bullet_{B|k},$$

очевидно, является тождественным отображением по универсальному свойству $\Omega^{\bullet}_{B|k}$. Рассмотрим диаграмму



Проекция π является сюръекцией и левый треугольник коммутативен. Верхний треугольник коммутативен по универсальному свойству $\Omega^{\bullet}_{A|k}$. Следовательно, правый треугольник также коммутативен. Таким образом, морфизмы $\mathcal{L}$ и $\mathcal{M}$ взаимно обратны. Морфизм π является сюръективным и его ядро порождено подпространствами T и dT, следовательно, Ω_γ является сюръекцией и его ядро порождено подпространствами T и dT. □

Лемма 7. *Пусть k-алгебра A является фильтрованным копределом k-алгебр A_i. Тогда $\Omega^n_{A|k} \cong \varinjlim \Omega^n_{A_i|k}$.*

Доказательство. См. доказательство в [30, Proposition 4.1]. □

Мы можем обобщить понятие алгебраических форм на случай пучков k-алгебр. Для топологического пространства X и пучка k-алгебр $\mathcal{F}$ на X рассмотрим следующий предпучок $\Omega^n_{\mathcal{F}|k}$ $\mathcal{F}$-модулей:

$$U \mapsto \Omega^n_{\mathcal{F}(U)|k}.$$

Для любого открытого множества U получаем комплекс $\Omega^{\bullet}_{\mathcal{F}(U)|k}$ и, следовательно, имеем комплекс предпучков $\Omega^{\bullet}_{\mathcal{F}|k}$. Ассоциированные с $\Omega^n_{\mathcal{F}|k}$ пучки образуют комплекс пучков ${}^{+}\Omega^{\bullet}_{\mathcal{F}|k}$.

Для множеств $W' \subset W$, открытых или замкнутых, зафиксируем обозначения

$$\mathrm{res}_{W,W'} : \Omega^{\bullet}_{\mathcal{F}(W)|k} \to \Omega^{\bullet}_{\mathcal{F}(W')|k}$$

и

$$\mathrm{res}_{W,W'} : {}^{+}\Omega^{\bullet}_{\mathcal{F}|k}(W) \to {}^{+}\Omega^{\bullet}_{\mathcal{F}|k}(W')$$

для отображений ограничения, индуцированных отображением ограничения $\mathrm{res}_{W,W'} : \mathcal{F}(W) \to \mathcal{F}(W')$.

Рассмотрим морфизм комплексов предпучков $k_X[0] \to \Omega^\bullet_{\mathcal{F}|k}$, $1 \mapsto 1$, где $\mathbb{R}_X$ — постоянный предпучок. Функтор шификации дает морфизм комплексов пучков, коаугментацию, $\varepsilon : \underline{k}_X[0] \to {}^+\Omega^\bullet_{\mathcal{F}|k}$.

Лемма 8. *Для мягкого пучка алгебр $\mathcal{F}$ на X пучки ${}^+\Omega^n_{\mathcal{F}|k}$, $n \geqslant 0$, являются мягкими.*

Доказательство. Ассоциированный пучок ${}^+\Omega^n_{\mathcal{F}|k}$ имеет естественную структуру $\mathcal{F}$-модуля. Следовательно, он является пучком модулей над мягким пучком и, следовательно, является мягким по [17, Theorem II.3.7.1]. □

1.4 Комбинаторные симплициальные комплексы

Определение. Мы называем множество X конечных непустых подмножеств конечного множества E *комбинаторным симплициальным комплексом*, если для любого $v \in E$ имеем $\{v\} \in X$ и для любого $s \in X$ и любого непустого подмножества $s' \subset s$ имеем $s' \in X$. Мы обозначаем через $V(X)$ множество E и называем его элементы *вершинами* комплекса X. Множества $s \in X$ мощности $m+1$ называются m-симплексами. Комбинаторный симплициальный комплекс Y является *подкомплексом* X, если $V(Y) \subset V(X)$ и $Y \subset X$.

Мы обозначаем через $T_p(X)$ множество всех последовательностей $u = (u_0, \ldots, u_p)$ вершин комплекса X для $p \geqslant -1$. Мы обозначаем через $\partial_i u$ последовательность $(u_0, \ldots, \widehat{u_i}, \ldots, u_p)$. Для вершины v мы обозначаем через $v * u$ последовательность $(v, u_0, \ldots, u_p)$. Симметрическая группа Σ_{p+1} действует на $T_p(X)$. Рассмотрим последовательность вершин $u \in T_p(X)$. Мы обозначаем через $\operatorname{St} u$ *звезду* u, то есть наименьший подкомплекс комплекса X, содержащий все симплексы, содержащие вершины u_i. Если $p = -1$, имеем $\operatorname{St} u = X$. Если последовательность u порождает симплекс в X, тогда $\operatorname{St} u$ — это звезда этого симплекса. Если $p \geqslant 0$ и последовательность u не порождает симплекс, имеем $\operatorname{St} u = \varnothing$. Для подкомплекса Y комбинаторного симплициального комплекса X мы обозначаем через $\operatorname{St}_Y u$ наименьший подкомплекс Y, содержащий все симплексы, содержащие вершины u_i. Если $u \notin T_p(Y)$, то $\operatorname{St}_Y u = \varnothing$.

Глава 2. Отображение $\Lambda_{\mathcal{F}}$ и первое расщепление

Зафиксируем произвольное поле k.

2.1 Глобальные сечения пучка ${}^{+}\Omega^{n}_{\mathcal{F}|k}$

В этом параграфе мы рассматриваем мягкий пучок k-алгебр $\mathcal{F}$ на компактном хаусдорфовом пространстве X.

Лемма 9. *Пусть S,$F \subset X$ — замкнутые непересекающиеся множества. Тогда существует сечение $g \in \mathcal{F}(X)$, такое что $\operatorname{res}_{X,S}(g) = 0$ и $\operatorname{res}_{X,F}(g) = 1$.*

См. доказательство в [17, Theorem II.3.7.2].

Лемма 10. *Пусть $U \subset X$ — открытое множество. Рассмотрим форму $\omega \in \Omega^{n}_{\mathcal{F}(X)|k}$ такую, что $\omega|_U = 0$ в $\Omega^{n}_{\mathcal{F}(U)|k}$. Также рассмотрим сечение $\varphi \in \mathcal{F}(X)$ такое что $\operatorname{supp}\varphi \subset U$. Тогда $\varphi\omega = 0$.*

Доказательство. Пусть $S := \operatorname{supp}\varphi$. Гомоморфизм ограничения $\operatorname{res}_{X,S} : \mathcal{F}(X) \to \mathcal{F}(S)$ сюръективен, так как пучок $\mathcal{F}$ мягкий. По лемме 6 ядро $\operatorname{res}_{X,S} : \Omega^{\bullet}_{\mathcal{F}(X)|k} \to \Omega^{\bullet}_{\mathcal{F}(S)|k}$ — это идеал, порожденный подпространствами $\operatorname{Ker}\operatorname{res}_{X,S}$ и $d(\operatorname{Ker}\operatorname{res}_{X,S})$. По предположению $\omega \in \operatorname{Ker}\operatorname{res}_{X,S}$ и, следовательно, достаточно доказать утверждение для ω вида

$$\omega = dt \wedge \lambda + u\eta,$$

где t,$u \in \mathcal{F}(X)$, λ,$\eta \in \Omega^{\bullet}_{\mathcal{F}(X)|k}$ и $\operatorname{res}_{X,S}(t) = \operatorname{res}_{X,S}(u) = 0$. Рассмотрим равенство

$$\varphi\omega = (\varphi dt) \wedge \lambda + (\varphi u)\eta.$$

Имеем $\varphi u = 0$, так как носители φ и u не пересекаются. Остается доказать, что $\varphi dt = 0$. По лемме 9 существует сечение $g \in \mathcal{F}(X)$, такое что $\operatorname{res}_{X,S}(g) = 0$ и $\operatorname{res}_{X,\operatorname{supp} t}(g) = 1$. Имеем

$$\varphi dt = \varphi d(tg) = (\varphi t)dg + (\varphi g)dt = 0,$$

так как $t = tg$, $\varphi t = 0$ и $\varphi g = 0$. □

Лемма 11. *Предположим, что $\mathcal{F}$ является мягким пучком алгебр на X. Тогда шифификация* $\mathrm{sh} : \Omega^n_{\mathcal{F}(X)|k} = \Omega^n_{\mathcal{F}|k}(X) \to {}^+\Omega^n_{\mathcal{F}|k}(X)$ *является изоморфизмом.*

Доказательство. Сначала докажем инъективность. Рассмотрим n-форму $\omega \in \Omega^n_{\mathcal{F}|k}(X)$ такую, что её образ в ${}^+\Omega^n_{\mathcal{F}|k}(X)$ равен 0. Тогда существует конечное открытое покрытие (U_i) пространства X такое, что ограничения $\omega|_{U_i}$ равны 0 для всех i. Выберем разбиение единицы $(\varphi_i \in \mathcal{F}(X))$, подчиненное покрытию (U_i). Это всегда можно сделать по [17, Theorem II 3.6.1]. По лемме 10, $\varphi_i\omega = 0$ для всех i. Следовательно, $\omega = \sum_i \varphi_i\omega = 0$.

Для доказательства сюръективности возьмем глобальное сечение пучка ${}^+\Omega^n_{\mathcal{F}|k}$. Его можно представить как набор пар (U_i, ω_i), где множества U_i образуют конечное открытое покрытие X, а $\omega_i \in \Omega^n_{\mathcal{F}(U_i)|k}$ такие, что их сечения согласуются в каждой точке. Необходимо найти форму $\omega \in \Omega^n_{\mathcal{F}(X)|k}$ такую, что $\omega_x = (\omega_i)_x$ в $\Omega^n_{\mathcal{F}_x|k}$ для каждого i и $x \in U_i$. Выберем разбиение единицы (φ_i), подчиненное покрытию (U_i), и обозначим $F_i := \operatorname{supp}\varphi_i$. Ограничение $\mathrm{res}_{X,S} : \Omega^n_{\mathcal{F}(X)|k} \to \Omega^n_{\mathcal{F}(S)|k}$ сюръективно для любого замкнутого S по лемме 6. Следовательно, мы можем продолжить формы $\mathrm{res}_{X,F_i}(\omega_i)$ до некоторых форм $\overline{\omega}_i \in \Omega^n_{\mathcal{F}(X)|k}$. Теперь, пусть $\omega := \sum_i \varphi_i\overline{\omega}_i \in \Omega^n_{\mathcal{F}(X)|k}$. Возьмем i и точку $x \in U_i$. Введем обозначение $J := \{j | x \in F_j\}$. Тогда

$$\omega_x = (\sum_j \varphi_j\overline{\omega}_j)_x = (\sum_{j\in J} \varphi_j\overline{\omega}_j)_x = (\sum_{j\in J} \varphi_j\omega_j)_x = (\sum_{j\in J} \varphi_j)_x(\omega_i)_x = (\omega_i)_x.$$

□

2.2 Построение и естественность отображения $\Lambda_{\mathcal{F}} : \mathbb{H}^*(X,\underline{k}_X[0]) \to \mathrm{H}^*(\Omega^\bullet_{\mathcal{F}(X)|k})$

Определение. Для мягкого пучка алгебр $\mathcal{F}$ на компактном хаусдорфовом пространстве X определим отображение $\Lambda_{\mathcal{F}}$ следующей диаграммой:

$$\begin{array}{ccc}
\mathbb{H}^*(X,\underline{k}_X[0]) & \xrightarrow{\mathbb{H}^*(\varepsilon)} & \mathbb{H}^*(X,{}^+\Omega^\bullet_{\mathcal{F}|k}) \\
& \searrow^{\Lambda_{\mathcal{F}}} & \cong\uparrow\Upsilon \\
& & \mathrm{H}^*({}^+\Omega^\bullet_{\mathcal{F}|k}(X)) \\
& & \cong\uparrow\mathrm{H}^*(\mathrm{sh}) \\
& & \mathrm{H}^*(\Omega^\bullet_{\mathcal{F}(X)|k}).
\end{array}$$

Здесь отображение $\mathrm{H}^*(\mathrm{sh})$ является изоморфизмом по лемме 11 а отображение Υ является изоморфизмом, так как пучки ${}^+\Omega^\bullet_{\mathcal{F}|k}$ ацикличны по лемме 8.

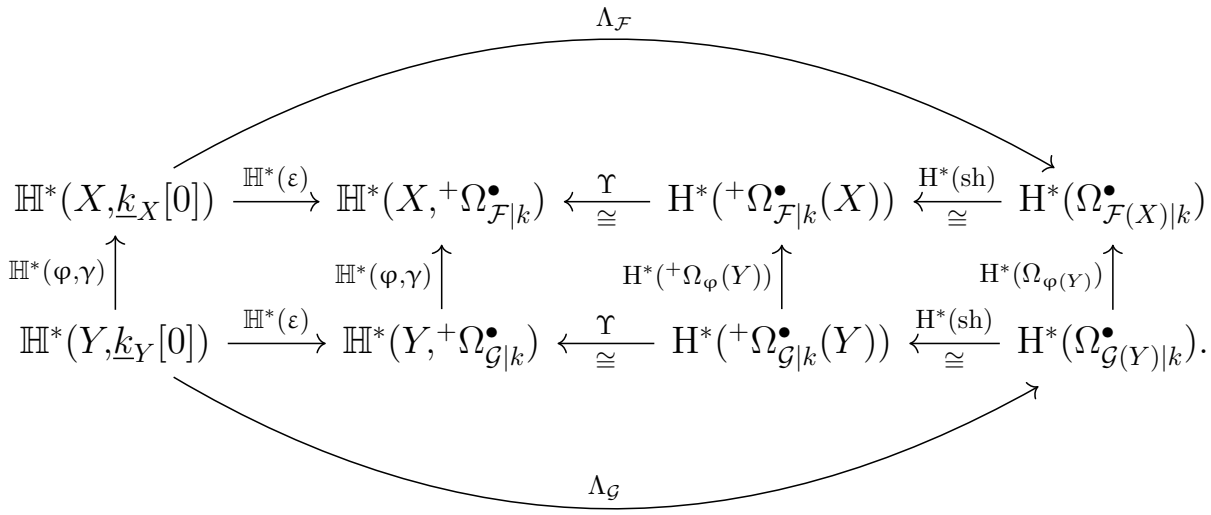
Морфизм k-окольцованных пространств $(\varphi,\gamma) : (X,\mathcal{F}) \to (Y,\mathcal{G})$ состоит из непрерывного отображения $\varphi : X \to Y$ и морфизма пучков $\gamma : \mathcal{G} \to \varphi_*\mathcal{F}$.

Предложение 12. *Линейное отображение Λ_- является естественным относительно морфизмов k-окольцованных пространств в следующем смысле: для морфизма k-окольцованных пространств $(\varphi,\gamma) : (X,\mathcal{F}) \to (Y,\mathcal{G})$ следующая диаграмма коммутативна:*

$$\begin{array}{ccc}
\mathbb{H}^*(X,\underline{k}_X[0]) & \xrightarrow{\Lambda_{\mathcal{F}}} & \mathrm{H}^*(\Omega^\bullet_{\mathcal{F}(X)|k}) \\
{\scriptstyle\mathbb{H}^*(\varphi,\gamma)}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle\mathrm{H}^*(\Omega_{\varphi(Y)})} \\
\mathbb{H}^*(Y,\underline{k}_Y[0]) & \xrightarrow{\Lambda_{\mathcal{G}}} & \mathrm{H}^*(\Omega^\bullet_{\mathcal{G}(Y)|k}).
\end{array}$$

Доказательство. Морфизм пучков $\varphi : \mathcal{G} \to \varphi_*\mathcal{F}$ определяет морфизм комплексов пучков ${}^+\Omega_\varphi : {}^+\Omega^\bullet_{\mathcal{G}|k} \to \varphi_*{}^+\Omega^\bullet_{\mathcal{F}|k}$.

Рассмотрим диаграмму



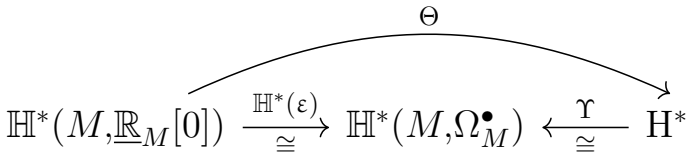
Средний квадрат коммутативен по лемме 1. Остальные квадраты коммутативны по очевидным причинам. □

2.3 Расщепление для алгебры гладких функций

В этом параграфе M — компактное гладкое многообразие. Мы докажем, что для гладкого многообразия M группы $\mathbb{H}^*(M,\underline{\mathbb{R}}_M[0])$ канонически отщепляются от $\mathrm{H}^*(\Omega^\bullet_{C^\infty(M)|\mathbb{R}})$.

2.3.1 Канонический изоморфизм Θ

Обозначим через $\Omega^\bullet_M$ комплекс пучков гладких дифференциальных форм на M. Часто мы будем обозначать через $\Omega^\bullet(M)$ комплекс $\Omega^\bullet_M(M)$. Рассмотрим морфизм комплексов, коаугментацию, $\varepsilon : \underline{\mathbb{R}}_M[0] \to \Omega^\bullet_M$, определенный правилом $\varepsilon(1) := 1$. Определим отображение Θ следующей коммутативной диаграммой



Отображение $\mathbb{H}^*(\varepsilon)$ является изоморфизмом (так как ε является квазиизоморфизмом), и Υ является изоморфизмом, поэтому Θ является изоморфизмом.

2.3.2 Морфизмы π и $\underline{\pi}$

Рассмотрим открытое множество $U \subset M$. Тождественное отображение $C^\infty(U) \to \Omega^0(U)$ может быть продолжено единственным образом до морфизма dg-алгебр $\pi : \Omega^\bullet_{C^\infty(U)|\mathbb{R}} \to \Omega^\bullet(U)$ по универсальному свойству $\Omega^\bullet_{C^\infty(U)|\mathbb{R}}$. Следующая диаграмма коммутативна:

$$\begin{array}{ccc} C^\infty(U) & \longrightarrow & \Omega^\bullet_{C^\infty(U)|\mathbb{R}} \\ & \searrow & \downarrow \pi \\ & & \Omega^\bullet(U). \end{array}$$

Таким образом, получаем морфизм комплексов предпучков $\pi : \Omega^\bullet_{C^\infty_M|\mathbb{R}} \to \Omega^\bullet_M$. По универсальному свойству ассоциированных пучков имеется морфизм комплексов пучков $\underline{\pi} : {}^+\Omega^\bullet_{C^\infty_M|\mathbb{R}} \to \Omega^\bullet_M$.

Следующие диаграммы коммутативны:

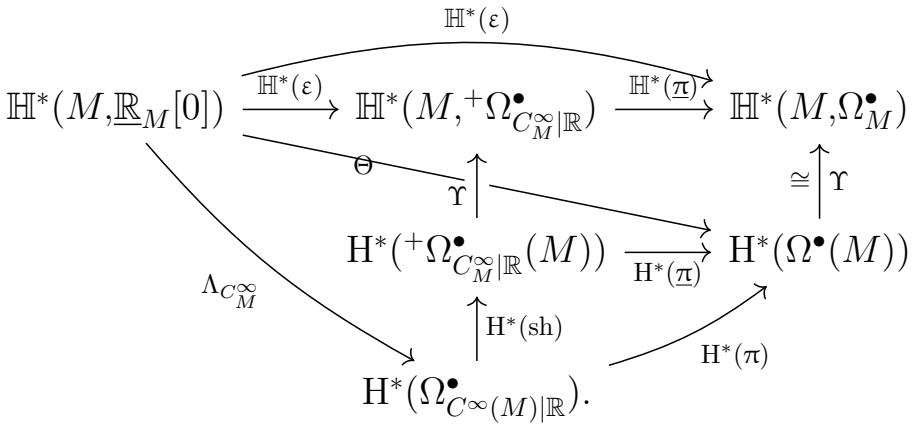
$$\begin{array}{ccc} \underline{\mathbb{R}}_M[0] & \xrightarrow{\varepsilon} & {}^+\Omega^\bullet_{C^\infty_M|\mathbb{R}} \\ & \searrow^{\varepsilon} & \downarrow \underline{\pi} \\ & & \Omega^\bullet_M, \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \Omega^\bullet_{C^\infty_M|\mathbb{R}} & \xrightarrow{\pi} & \Omega^\bullet_M \\ \downarrow \mathrm{sh} & \nearrow_{\underline{\pi}} & \\ {}^+\Omega^\bullet_{C^\infty_M|\mathbb{R}}. & & \end{array} \tag{2.1}$$

2.3.3 Первая теорема о расщеплении

Теорема 13. *Следующая диаграмма коммутативна:*

$$\mathbb{H}^*(M, \underline{\mathbb{R}}_M[0]) \xrightarrow{\Lambda_{C^\infty_M}} \mathrm{H}^*(\Omega^\bullet_{C^\infty(M)|\mathbb{R}}) \xrightarrow{\mathrm{H}^*(\pi)} \mathrm{H}^*(\Omega^\bullet(M)), \qquad \mathbb{H}^*(M, \underline{\mathbb{R}}_M[0]) \xrightarrow{\Theta} \mathrm{H}^*(\Omega^\bullet(M)).$$

Доказательство. Рассмотрим диаграмму



Левый четырехугольник коммутативен по определению $\Lambda_{C^\infty_M}$. Верхний треугольник и нижний правый треугольники являются коммутативными по диаграммам 2.1. Верхний правый квадрат коммутативен по естественности Υ. Верхний треугольник с Θ коммутативен по определению Θ. Так как правая стрелка Υ является изоморфизмом, вся диаграмма является коммутативной. □

Глава 3. Отображение $\Psi_A : \mathrm{H}^*(\Omega^\bullet_{A|\mathbb{R}}) \to \mathbb{H}^*(X, \underline{\mathbb{R}}_X[0])$ и теорема о расщеплении

3.1 Симплициальная dg-алгебра бемольных коцепей

3.1.1 Построение симплициальной dg-алгебры $\Omega^\bullet_\flat(\Delta^-)$

В данном пункте мы введем dg-алгебру $\Omega^\bullet_\flat(\Delta^n)$ бемольных цепей на замкнутом n-симплексе. Мы следуем [44], см. также [25]. dg-алгебры $\Omega^\bullet_\flat(\Delta^n)$, $n \geqslant 0$, образуют симплициальную dg-алгебру $\Omega^\bullet_\flat(\Delta^-)$.

Для выпуклого множества $V \subset \mathbb{R}^m$ обозначим через $\operatorname{aff} V$ аффинную оболочку V. Обозначим через $\operatorname{relint} V$ внутренность V относительно $\operatorname{aff} V$.

Определение. Для выпуклого множества $V \subset \mathbb{R}^m$ обозначим через $\mathrm{S}^{\mathrm{aff}}_k(V)$ векторное пространство аффинных сингулярных k-цепей в V с коэффициентами в $\mathbb{R}$. Граница $\partial : \mathrm{S}^{\mathrm{aff}}_k(V) \to \mathrm{S}^{\mathrm{aff}}_{k-1}(V)$ определяется обычным образом: через $\gamma_i : \Delta^{k-1} \to \Delta^k$ обозначим i-ю (аффинно) параметризованную грань; тогда для симплекса $\sigma : \Delta^k \to V$ обозначим через $\partial_i\sigma : \Delta^{k-1} \to V$ композицию $\sigma \circ \gamma_i$ и $\partial\sigma$ определим как сингулярную цепь $\sum_{i=0}^k (-1)^i \partial_i\sigma$. Векторные пространства $\mathrm{S}^{\mathrm{aff}}_k(V)$ вместе с граничным отображением образуют цепной комплекс $\mathrm{S}^{\mathrm{aff}}_\bullet(V)$.

Аффинное отображение $f : V \to V'$ индуцирует морфизм комплексов

$$\mathrm{S}^{\mathrm{aff}}(f) : \mathrm{S}^{\mathrm{aff}}_\bullet(V) \to \mathrm{S}^{\mathrm{aff}}_\bullet(V').$$

Таким образом, соответствие $V \mapsto \mathrm{S}^{\mathrm{aff}}_\bullet(V)$ ковариантно относительно аффинных отображений.

Определим *массу* $|\alpha|$ аффинной k-цепи $\alpha = \sum \lambda_i\sigma_i$, где σ_i — различные сингулярные симплексы, полагая

$$|\alpha| := \sum |\lambda_i||\sigma_i|_{\mathrm{L}},$$

где $|\sigma_i|_{\mathrm{L}}$ — мера Лебега k-мерного симплекса σ_i. Определим бемольную полунорму $|\cdot|^\flat$ на $\mathrm{S}^{\mathrm{aff}}_k(V)$, полагая

$$|\alpha|^\flat := \inf_{\beta \in \mathrm{S}^{\mathrm{aff}}_{k+1}(V)} \{|\alpha - \partial\beta| + |\beta|\}.$$

Лемма 14. *Отображение* $\mathrm{S}^{\mathrm{aff}}_k(V) \to \mathrm{S}^{\mathrm{aff}}_k(V')$, *индуцированное вложением выпуклых множеств* $V \hookrightarrow V'$, *сохраняет бемольную полунорму.*

Доказательство. Следует из [44, Lemma V.2b]. □

Лемма 15. *Пусть* V — *выпуклое множество. Отображение* $\mathrm{S}^{\mathrm{aff}}_k(\operatorname{relint} V) \to \mathrm{S}^{\mathrm{aff}}_k(V)$, *индуцированное включением* $\operatorname{relint} V \hookrightarrow V$, *имеет всюду плотный образ относительно бемольной полунормы.*

Доказательство. Любой аффинный сингулярный симплекс в V может быть аппроксимирован аффинным сингулярным симплексом в $\operatorname{relint} V$, см. [44, VIII.1(h)]. □

Определение. Если V — выпуклое множество, определим $\Omega^k_\flat(V)$ как векторное пространство линейных функционалов $\mathrm{S}^{\mathrm{aff}}_k(V) \to \mathbb{R}$, ограниченных относительно полунормы $|\cdot|^\flat$. Элементы пространства $\Omega^k_\flat(V)$ называются *бемольными коцепями* на V. Определим дифференциал dX цепи X формулой $\langle dX,\alpha\rangle := \langle X,\partial\alpha\rangle$. Получим комплекс $\Omega^\bullet_\flat(V)$. Это определение эквивалентно тому, что дано Уитни в [44, VIII.1(b) и VII.10].

Комплекс $\mathrm{S}^{\mathrm{aff}}_\bullet(V)$ ковариантен по V относительно аффинных отображений, поэтому комплекс $\Omega^\bullet_\flat(V)$ контравариантен по V относительно аффинных отображений.

В [44, IX.14] Уитни определяет градуированно-коммутативное умножение бемольных коцепей на открытых множествах. Умножение естественно относительно аффинных отображений [44, X.11]. Для открытого выпуклого множества V комплекс $\Omega^\bullet_\flat(V)$ становится dg-алгеброй, которая контравариантна относительно аффинных отображений. Таким образом, умножение корректно определено в относительно открытых выпуклых множествах. Далее мы определим произведение двух бемольных цепей на замкнутом выпуклом множестве V. Для этого нам потребуется следующая лемма.

Лемма 16. *Для замкнутого выпуклого множества* $V \subset \mathbb{R}^m$ *включение* $\operatorname{relint} V \hookrightarrow V$ *индуцирует изоморфизм* $\rho : \Omega^\bullet_\flat(V) \to \Omega^\bullet_\flat(\operatorname{relint} V)$.

Доказательство. Следует из лемм 14 и 15. □

Для замкнутого выпуклого множества $V \subset \mathbb{R}^m$ введем умножение в $\Omega^\bullet_\flat(V)$ таким образом, чтобы изоморфизм комплексов $\rho : \Omega^\bullet_\flat(V) \to \Omega^\bullet_\flat(\operatorname{relint} V)$ из

леммы 16 стал изоморфизмом dg-алгебр. Это умножение и его естественность подразумеваются в [44, VII.12]. В предложении 19 мы покажем, что умножение естественно относительно аффинных отображений.

Пусть V — замкнутое выпуклое множество. Включение $V \hookrightarrow \operatorname{aff} V$ индуцирует отображение $\pi : \Omega_\flat^\bullet(\operatorname{aff} V) \to \Omega_\flat^\bullet(V)$.

Лемма 17. *Отображение $\pi : \Omega_\flat^\bullet(\operatorname{aff} V) \to \Omega_\flat^\bullet(V)$ является сюръективным.*

Доказательство. Следует из леммы 14 по теореме Хана — Банаха. В качестве альтернативы см. [44, VIII.1(h)] и примените лемму 16. □

Лемма 18. *Отображение $\pi : \Omega_\flat^\bullet(\operatorname{aff} V) \to \Omega_\flat^\bullet(V)$ является морфизмом dg-алгебр.*

Доказательство. Рассмотрим диаграмму

$$\Omega_\flat^\bullet(\operatorname{aff} V) \xrightarrow{\pi} \Omega_\flat^\bullet(V) \xrightarrow{\rho} \Omega_\flat^\bullet(\operatorname{relint} V).$$

Композиция $\rho \circ \pi$ индуцирована включением $\operatorname{relint} V \hookrightarrow \operatorname{aff} V$ и, следовательно, является морфизмом dg-алгебр. Так как ρ является изоморфизмом dg-алгебр, π является морфизмом dg-алгебр. □

Предложение 19. *Пусть $f : V \to V'$ — аффинное отображение замкнутых выпуклых множеств. Тогда индуцированный морфизм $\Omega_\flat(f) : \Omega_\flat^\bullet(V') \to \Omega_\flat^\bullet(V)$ сохраняет умножение.*

Доказательство. Рассмотрим коммутативную диаграмму:

$$\begin{array}{ccc} \Omega_\flat^\bullet(\operatorname{aff} V') & \xrightarrow{\Omega_\flat(\operatorname{aff} f)} & \Omega_\flat^\bullet(\operatorname{aff} V) \\ \pi\downarrow & & \downarrow\pi \\ \Omega_\flat^\bullet(V') & \xrightarrow{\Omega_\flat(f)} & \Omega_\flat^\bullet(V). \end{array}$$

Здесь $\operatorname{aff} f : \operatorname{aff} V \to \operatorname{aff} V'$ — аффинное продолжение отображения f. Левая вертикальная стрелка сюръективна по лемме 17. Вертикальные стрелки являются морфизмами dg-алгебр по лемме 18. Отображение $\Omega_\flat(\operatorname{aff} f)$ является морфизмом dg-алгебр, так как оно индуцировано аффинным отображением открытых множеств. Следовательно, $\Omega_\flat(f)$ является морфизмом dg-алгебр. □

Отображение $[n] \to [l]$ индуцирует аффинное отображение $\Delta^n \to \Delta^l$. Таким образом, получаем симплициальную dg-алгебру $\Omega^\bullet_\flat(\Delta^-)$, определенную как $[n] \mapsto \Omega^\bullet_\flat(\Delta^n)$. В частности, существуют отображения граней $\partial_i : \Omega^\bullet_\flat(\Delta^n) \to \Omega^\bullet_\flat(\Delta^{n-1})$, индуцированные параметризованными гранями $\gamma_i : \Delta^{n-1} \to \Delta^n$.

3.1.2 Свойства симплициальной dg-алгебры $\Omega^\bullet_\flat(\Delta^-)$

(1) Определим линейные отображения $\mathfrak{J}_n : \Omega^n_\flat(\Delta^n) \to \mathbb{R}$ как

$$\mathfrak{J}_n(\omega) := \langle \omega, \mathrm{id}_{\Delta^n} \rangle .$$

Предложение 20 (Формула Стокса)**.** *Для любой формы* $\eta \in \Omega^{n-1}_\flat(\Delta^n)$ *верна следующая формула*

$$\mathfrak{J}_n(d\eta) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \mathfrak{J}_{n-1}(\partial_i \eta).$$

Доказательство. Имеем

$$\mathfrak{J}_n(d\eta) = \langle d\eta, \mathrm{id}_{\Delta^n} \rangle = \langle \eta, \partial\, \mathrm{id}_{\Delta^n} \rangle = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \langle \eta, \gamma_i \rangle =$$

$$= \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \langle \partial_i \eta, \mathrm{id}_{\Delta^{n-1}} \rangle = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \mathfrak{J}_{n-1}(\partial_i \eta).$$

□

(2) Липшицевы функции на Δ^n образуют алгебру $\mathrm{Lip}(\Delta^n)$. Соответствие $[n] \mapsto \mathrm{Lip}(\Delta^n)$ задает симплициальную алгебру $\mathrm{Lip}(\Delta^-)$. Каждая липшицева функция $f \in \mathrm{Lip}(\Delta^n)$ определяет бемольную 0-цепь $\zeta(f)$ на Δ^n следующим образом. Для аффинного симплекса $\sigma : \{v_0\} = \Delta^0 \to \Delta^n$ положим

$$\langle \zeta(f), \sigma \rangle := f(\sigma(v_0)).$$

Легко проверить, что 0-цепь $\zeta(f)$ является бемольной (см. [44, Theorem VII.4B]). Получим линейное отображение $\zeta : \mathrm{Lip}(\Delta^n) \to \Omega^\bullet_\flat(\Delta^n)$ с образом в $\Omega^0_\flat(\Delta^n)$. Композиция $\rho \circ \zeta : \mathrm{Lip}(\Delta^n) \to \Omega^\bullet_\flat(\Delta^n) \xrightarrow{\cong} \Omega^\bullet_\flat(\mathrm{relint}\, \Delta^n)$ является гомоморфизмом алгебр (по определению умножения на открытых множествах [44, IX.14]).

Следовательно, ζ является гомоморфизмом алгебр. Отображение ζ сохраняет симплициальную структуру, и мы получаем морфизм симплициальных алгебр

$$\zeta : \mathrm{Lip}(\Delta^-) \to \Omega^0_\flat(\Delta^-).$$

(3) Рассмотрим симплициальную dg-алгебру $\Omega^\bullet(\Delta^-)$ гладких дифференциальных форм. Каждая гладкая форма $\theta \in \Omega^k(\Delta^n)$ задает бемольную коцепь $\nabla(\theta) \in \Omega^k_\flat(\Delta^n)$ по правилу

$$\langle \nabla(\theta), \sigma \rangle := \int_{\Delta^k} \sigma^* \theta$$

для аффинного $\sigma : \Delta^k \to \Delta^n$. Свойство бемольности легко проверить (см. [44, V.14 и Theorem V.10A]). Это соответствие порождает симплициальное линейное отображение

$$\nabla : \Omega^\bullet(\Delta^-) \to \Omega^\bullet_\flat(\Delta^-).$$

По формуле Стокса для гладких форм дифференциал сохраняется. Композиция

$$\Omega^\bullet(\Delta^n) \xrightarrow{\nabla} \Omega^\bullet_\flat(\Delta^n) \xrightarrow{\rho} \Omega^\bullet_\flat(\mathrm{relint}\, \Delta^n)$$

сохраняет умножение по определению умножения бемольных коцепей [44, X.14]. Следовательно, по определению умножения в $\Omega^\bullet_\flat(\Delta^n)$, отображение ∇ сохраняет умножение. Таким образом, отображение

$$\nabla : \Omega^\bullet(\Delta^-) \to \Omega^\bullet_\flat(\Delta^-)$$

является морфизмом симплициальных dg-алгебр.

(4) Определим линейные отображения $\mathfrak{T}_n : \Omega^n(\Delta^n) \to \mathbb{R}$ как

$$\mathfrak{T}_n(\omega) := \int_{\Delta^n} \omega.$$

Диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \Omega^n(\Delta^n) & \xrightarrow{\mathfrak{T}_n} & \mathbb{R} \\ \downarrow{\scriptstyle \nabla} & \nearrow{\scriptstyle \mathfrak{J}_n} & \\ \Omega^n_\flat(\Delta^n) & & \end{array}$$

является коммутативной по построению.

(5) Гладкие функции образуют симплициальную алгебру $C^\infty(\Delta^-)$. Отображение $i : C^\infty(\Delta^-) \hookrightarrow \mathrm{Lip}(\Delta^-)$ является вложением в симплициальную

алгебру $\mathrm{Lip}(\Delta^-)$. Следующая диаграмма морфизмов симплициальных алгебр является коммутативной:

$$\begin{array}{ccc} C^\infty(\Delta^-) & \hookrightarrow & \Omega^\bullet(\Delta^-) \\ \downarrow{\scriptstyle i} & & \downarrow{\scriptstyle \nabla} \\ \mathrm{Lip}(\Delta^-) & \xrightarrow{\zeta} & \Omega^\bullet_\flat(\Delta^-). \end{array}$$

3.2 Построение отображения Ψ_A

3.2.1 Пулбэк алгебраической формы

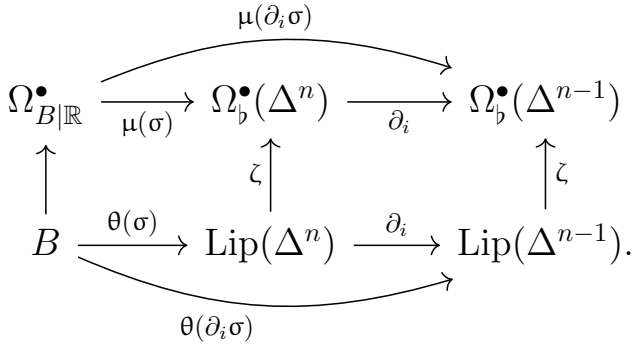
Пусть B — конечно-порожденная $\mathbb{R}$-алгебра. Для сингулярного липшицева симплекса $\sigma : \Delta^n \to \mathrm{spec}_{\mathbb{R}} B$ построим морфизм dg-алгебр $\mu(\sigma) : \Omega^\bullet_{B|\mathbb{R}} \to \Omega^\bullet_\flat(\Delta^n)$. Определим гомоморфизм алгебр $\theta(\sigma) : B \to \mathrm{Lip}(\Delta^n)$ формулой $b \mapsto \hat{b} \circ \sigma$. По универсальному свойству dg-алгебры $\Omega^\bullet_{B|\mathbb{R}}$ существует единственный морфизм dg-алгебр $\mu(\sigma) : \Omega^\bullet_{B|\mathbb{R}} \to \Omega^\bullet_\flat(\Delta^n)$, который делает следующую диаграмму коммутативной:

$$\begin{array}{ccc} \Omega^\bullet_{B|\mathbb{R}} & \overset{\mu(\sigma)}{\dashrightarrow} & \Omega^\bullet_\flat(\Delta^n) \\ \uparrow & & \uparrow{\scriptstyle \zeta} \\ B & \xrightarrow{\theta(\sigma)} & \mathrm{Lip}(\Delta^n). \end{array}$$

Лемма 21. *Следующая диаграмма коммутативна:*

$$\begin{array}{ccc} \Omega^\bullet_{B|\mathbb{R}} & & \\ \downarrow{\scriptstyle \mu(\sigma)} & \searrow^{\mu(\partial_i\sigma)} & \\ \Omega^\bullet_\flat(\Delta^n) & \xrightarrow{\partial_i} & \Omega^\bullet_\flat(\Delta^{n-1}). \end{array}$$

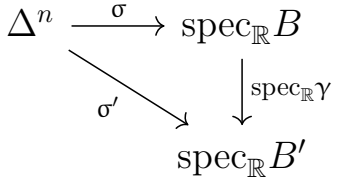
Доказательство. Рассмотрим следующую диаграмму:



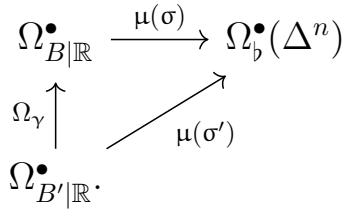
Правый квадрат, очевидно, коммутативен. По определению μ левый квадрат и внешний контур коммутативны. Нижний треугольник коммутативен по определению θ. Следовательно, по универсальному свойству $\Omega^\bullet_{B|\mathbb{R}}$ верхний треугольник также коммутативен. □

Отображение $\mu(\sigma)$ естественно по алгебре в следующем смысле:

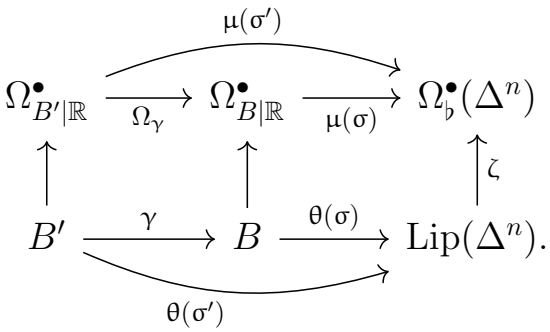
Лемма 22. *Пусть $\gamma : B' \to B$ — гомоморфизм конечно-порожденных $\mathbb{R}$-алгебр. Рассмотрим коммутативную диаграмму*



где σ и σ' являются липшицевыми. Тогда следующая диаграмма коммутативна:



Доказательство. Рассмотрим следующую диаграмму:



Левый квадрат, очевидно, коммутативен. По определению μ правый квадрат и внешний контур коммутативны. Нижний треугольник коммутативен: для $c \in$

B'

$$\theta(\sigma)(\gamma(c)) = \widehat{\gamma(c)} \circ \sigma = \hat{c} \circ (\mathrm{spec}_{\mathbb{R}}\gamma) \circ \sigma = \hat{c} \circ \sigma' = \theta(\sigma')(c).$$

Следовательно, по универсальному свойству $\Omega^{\bullet}_{B'|\mathbb{R}}$ верхний треугольник также коммутативен. □

3.2.2 Отображение $\xi_B : \Omega^{\bullet}_{B|\mathbb{R}} \to \mathrm{S}^{\bullet}_{\mathrm{Lip}}(\mathrm{spec}_{\mathbb{R}}B)$

Пусть B — конечно-порожденная $\mathbb{R}$-алгебра. Алгебраической n-форме де Рама $\omega \in \Omega^n_{B|\mathbb{R}}$ сопоставим липшицеву сингулярную коцепь $\xi_B(\omega)$. На липшицевом сингулярном симплексе $\sigma : \Delta^n \to \mathrm{spec}_{\mathbb{R}}B$ определим $\xi_B(\omega)$, положив

$$\langle \xi_B(\omega), \sigma \rangle := \mathfrak{J}_n(\mu(\sigma)(\omega)) \in \mathbb{R}. \tag{3.1}$$

Предложение 23. *Вышеописанное задает морфизм комплексов*

$$\xi_B : \Omega^{\bullet}_{B|\mathbb{R}} \to \mathrm{S}^{\bullet}_{\mathrm{Lip}}(\mathrm{spec}_{\mathbb{R}}B).$$

Доказательство. Необходимо проверить, что сохраняется d. Возьмем липшицев сингулярный симплекс $\sigma : \Delta^n \to \mathrm{spec}_{\mathbb{R}}B$ и $\eta \in \Omega^{n-1}_{B|\mathbb{R}}$. Тогда

$$\langle \xi_B(d\eta), \sigma \rangle = \mathfrak{J}_n(\mu(\sigma)(d\eta)) \overset{(2)}{=} \mathfrak{J}_n(d(\mu(\sigma)(\eta))) \overset{(3)}{=} \sum_{i=0}^{n}(-1)^i \mathfrak{J}_{n-1}(\partial_i(\mu(\sigma)(\eta))) \overset{(4)}{=}$$

$$\overset{(4)}{=} \sum_{i=0}^{n}(-1)^i \mathfrak{J}_{n-1}(\mu(\partial_i\sigma)(\eta)) = \sum_{i=0}^{n}(-1)^i \langle \xi_B(\eta), \partial_i\sigma \rangle = \langle \xi_B(\eta), \partial\sigma \rangle = \langle d\xi_B(\eta), \sigma \rangle .$$

Второе равенство следует из того, что $\mu(\sigma)$ является морфизмом комплексов. Третье равенство следует из предложения 20. Четвертое равенство следует из леммы 21. □

Лемма 22 позволяет нам доказать естественность ξ относительно алгебр:

Лемма 24. *Пусть $\gamma : B' \to B$ — гомоморфизм конечно-порожденных $\mathbb{R}$-алгебр. Тогда следующая диаграмма коммутативна:*

$$\begin{array}{ccc} \Omega^{\bullet}_{B|\mathbb{R}} & \xrightarrow{\xi_B} & \mathrm{S}^{\bullet}_{\mathrm{Lip}}(\mathrm{spec}_{\mathbb{R}}B) \\ {\scriptstyle \Omega_\gamma}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle \mathrm{S}_{\mathrm{Lip}}(\mathrm{spec}_{\mathbb{R}}\gamma)} \\ \Omega^{\bullet}_{B'|\mathbb{R}} & \xrightarrow{\xi_{B'}} & \mathrm{S}^{\bullet}_{\mathrm{Lip}}(\mathrm{spec}_{\mathbb{R}}B'). \end{array}$$

3.2.3 Отображение $\Phi_B : \mathrm{H}^*(\Omega^\bullet_{B|\mathbb{R}}) \to \mathbb{H}^*(\mathrm{spec}_{\mathbb{R}} B, \underline{\mathbb{R}}_{\mathrm{spec}_{\mathbb{R}} B}[0])$

Определим гомоморфизм Φ_B как вертикальную стрелку, которая делает следующую диаграмму коммутативной:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{H}^*(\mathrm{spec}_{\mathbb{R}} B, \underline{\mathbb{R}}_{\mathrm{spec}_{\mathbb{R}} B}[0]) & \xrightarrow[\cong]{\mathbb{H}^*(\varepsilon)} & \mathbb{H}^*(\mathrm{spec}_{\mathbb{R}} B, {}^+\mathrm{S}^\bullet_{\mathrm{Lip}, \mathrm{spec}_{\mathbb{R}} B}) \\ \Phi_B \uparrow & & \cong \uparrow \Upsilon \circ \mathrm{H}^*(\mathrm{sh}) \\ \mathrm{H}^*(\Omega^\bullet_{B|\mathbb{R}}) & \xrightarrow{\mathrm{H}^*(\xi_B)} & \mathrm{H}^*(\mathrm{S}^\bullet_{\mathrm{Lip}}(\mathrm{spec}_{\mathbb{R}} B)). \end{array}$$

Здесь $\mathbb{H}^*(\varepsilon)$ является изоморфизмом по следствию 5.

Лемма 25. *Пусть $\gamma : B' \to B$ — гомоморфизм конечно-порожденных $\mathbb{R}$-алгебр. Тогда следующая диаграмма коммутативна:*

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{H}^*(\Omega^\bullet_{B|\mathbb{R}}) & \xrightarrow{\Phi_B} & \mathbb{H}^*(\mathrm{spec}_{\mathbb{R}} B, \underline{\mathbb{R}}_{\mathrm{spec}_{\mathbb{R}} B}[0]) \\ \mathrm{H}^*(\Omega_\gamma) \uparrow & & \uparrow (\mathrm{spec}_{\mathbb{R}} \gamma)^* \\ \mathrm{H}^*(\Omega^\bullet_{B'|\mathbb{R}}) & \xrightarrow[\Phi_{B'}]{} & \mathbb{H}^*(\mathrm{spec}_{\mathbb{R}} B', \underline{\mathbb{R}}_{\mathrm{spec}_{\mathbb{R}} B'}[0]). \end{array}$$

Доказательство. Это непосредственно следует из леммы 24 и естественности отображения $\Upsilon \circ \mathrm{H}^*(\mathrm{sh})$. □

Замечание. Существуют и другие способы определить отображение, аналогичное Φ_B. Один из способов — рассматривать полуалгебраические коцепи вместо липшицевых, см. [24]. Другой способ — использовать *фильтрованный комплекс де Рама*, см. [35, Proposition 7.24]. Наша конструкция отображения Φ_B позволяет связать её с классическим комплексом де Рама $\Omega^\bullet(M)$ в случае $B \subset C^\infty(M)$, см. лемму 35.

3.2.4 Отображение $\Psi_A : \mathrm{H}^*(\Omega^\bullet_{A|\mathbb{R}}) \to \mathbb{H}^*(X, \underline{\mathbb{R}}_X[0])$

Для топологического пространства X и подалгебры $A \subset C(X)$ представим A как фильтрованный копредел своих конечно-порожденных подалгебр: $A = \varinjlim B$. Функторы Ω и H^* сохраняют фильтрованные копределы. Для

включения конечно-порожденных подалгебр $i : B' \hookrightarrow B$ в $C(X)$ рассмотрим диаграмму

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{H}^*(\Omega^\bullet_{B|\mathbb{R}}) & \xrightarrow{\Phi_B} & \mathbb{H}^*(\mathrm{spec}_{\mathbb{R}} B, \underline{\mathbb{R}}_{\mathrm{spec}_{\mathbb{R}} B}[0]) & \xrightarrow{\Gamma^*_B} & \mathbb{H}^*(X, \underline{\mathbb{R}}_X[0]) \\ {\scriptstyle \mathrm{H}^*(\Omega_i)}\uparrow & & {\scriptstyle (\mathrm{spec}_{\mathbb{R}} i)^*}\uparrow & \nearrow_{\Gamma^*_{B'}} & \\ \mathrm{H}^*(\Omega^\bullet_{B'|\mathbb{R}}) & \xrightarrow{\Phi_{B'}} & \mathbb{H}^*(\mathrm{spec}_{\mathbb{R}} B', \underline{\mathbb{R}}_{\mathrm{spec}_{\mathbb{R}} B'}[0]). & & \end{array}$$

Левый квадрат коммутативен по лемме 25, а правый треугольник коммутативен по естественности Γ_B (см. параграф 1.2). Перейдем к копределу $\Gamma^*_B \circ \Phi_B$ по всем конечно-порожденным подалгебрам $B \subset A$ и получим отображение

$$\Psi_A : \mathrm{H}^*(\Omega^\bullet_{A|\mathbb{R}}) \to \mathbb{H}^*(X, \underline{\mathbb{R}}_X[0]).$$

Предложение 26. *Пусть $\varphi : X \to Y$ — непрерывное отображение топологических пространств. Пусть $A \subset C(X)$ и $A' \subset C(Y)$ — подалгебры, и $\gamma : A' \to A$ — гомоморфизм, такой что следующая диаграмма коммутативна:*

$$\begin{array}{ccc} C(X) & \longleftarrow & A \\ {\scriptstyle \varphi^*}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle \gamma} \\ C(Y) & \longleftarrow & A'. \end{array}$$

Тогда следующая диаграмма коммутативна:

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{H}^*(\Omega^\bullet_{A|\mathbb{R}}) & \xrightarrow{\Psi_A} & \mathbb{H}^*(X, \underline{\mathbb{R}}_X[0]) \\ {\scriptstyle \mathrm{H}^*(\Omega_\gamma)}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle \mathbb{H}^*(\varphi, \gamma)} \\ \mathrm{H}^*(\Omega^\bullet_{A'|\mathbb{R}}) & \xrightarrow{\Psi_{A'}} & \mathbb{H}^*(Y, \underline{\mathbb{R}}_Y[0]). \end{array}$$

Доказательство. Это непосредственно следует из леммы 25 и естественности отображения Γ. □

3.3 Идентификация отображения $\Psi_{C^\infty(M)}$

3.3.1 Отображение $\xi^{\mathrm{sm}}_B : \Omega^\bullet_{B|\mathbb{R}} \to \mathrm{S}^\bullet_{\mathrm{sm}}(\mathrm{spec}_{\mathbb{R}} B)$

Материал этого пункта аналогичен материалу пунктов 3.2.1 и 3.2.2, поэтому доказательства будут опущены.

Пусть B — конечно-порожденная $\mathbb{R}$-алгебра. Построим морфизм dg-алгебр $\mu^{\mathrm{sm}}(\sigma) : \Omega^{\bullet}_{B|\mathbb{R}} \to \Omega^{\bullet}(\Delta^n)$ для гладкого сингулярного симплекса $\sigma : \Delta^n \to \mathrm{spec}_{\mathbb{R}} B$. Определим гомоморфизм алгебр $\theta^{\mathrm{sm}}(\sigma) : B \to C^{\infty}(\Delta^n)$ правилом $b \mapsto \hat{b} \circ \sigma$. По универсальному свойству $\Omega^{\bullet}_{B|\mathbb{R}}$ существует единственный морфизм dg-алгебр $\mu^{\mathrm{sm}}(\sigma) : \Omega^{\bullet}_{B|\mathbb{R}} \to \Omega^{\bullet}(\Delta^n)$, делающий следующую диаграмму коммутативной:

$$\begin{array}{ccc} \Omega^{\bullet}_{B|\mathbb{R}} & \overset{\mu^{\mathrm{sm}}(\sigma)}{\dashrightarrow} & \Omega^{\bullet}(\Delta^n) \\ \uparrow & & \uparrow \\ B & \xrightarrow{\theta^{\mathrm{sm}}(\sigma)} & C^{\infty}(\Delta^n). \end{array}$$

Лемма 27 (ср. лемму 21). *Следующая диаграмма коммутативна:*

$$\begin{array}{ccc} \Omega^{\bullet}_{B|\mathbb{R}} & & \\ {\scriptstyle \mu^{\mathrm{sm}}(\sigma)}\downarrow & \searrow^{\mu^{\mathrm{sm}}(\partial_i \sigma)} & \\ \Omega^{\bullet}(\Delta^n) & \xrightarrow{\partial_i} & \Omega^{\bullet}(\Delta^{n-1}). \end{array}$$

Отображение $\mu^{\mathrm{sm}}(\sigma)$ является естественным по алгебре, а именно:

Лемма 28 (ср. лемму 22). *Пусть $\gamma : B' \to B$ — гомоморфизм конечно-порожденных $\mathbb{R}$-алгебр. Рассмотрим коммутативную диаграмму*

$$\begin{array}{ccc} \Delta^n & \xrightarrow{\sigma} & \mathrm{spec}_{\mathbb{R}} B \\ & \searrow^{\sigma'} & \downarrow {\scriptstyle \mathrm{spec}_{\mathbb{R}} \gamma} \\ & & \mathrm{spec}_{\mathbb{R}} B' \end{array}$$

с гладкими σ и σ'. Тогда следующая диаграмма коммутативна:

$$\begin{array}{ccc} \Omega^{\bullet}_{B|\mathbb{R}} & \xrightarrow{\mu^{\mathrm{sm}}(\sigma)} & \Omega^{\bullet}_{\flat}(\Delta^n) \\ {\scriptstyle \Omega_\gamma}\uparrow & \nearrow_{\mu^{\mathrm{sm}}(\sigma')} & \\ \Omega^{\bullet}_{B'|\mathbb{R}}. & & \end{array}$$

Далее, построим отображение $\xi^{\mathrm{sm}}_B : \Omega^{\bullet}_{B|\mathbb{R}} \to \mathrm{S}^{\bullet}_{\mathrm{sm}}(\mathrm{spec}_{\mathbb{R}} B)$ для конечно-порожденной $\mathbb{R}$-алгебры B. Для алгебраической n-формы $\omega \in \Omega^n_{B|\mathbb{R}}$ и гладкого симплекса $\sigma : \Delta^n \to \mathrm{spec}_{\mathbb{R}} B$ положим

$$\langle \xi^{\mathrm{sm}}_B(\omega), \sigma \rangle := \mathfrak{T}_n(\mu^{\mathrm{sm}}(\sigma)(\omega)) \in \mathbb{R}$$

(отображение $\mathfrak{T}_n$ было определено в пункте 3.1.2(4)).

Предложение 29 (ср. предложение 23)**.** *Вышеописанное задает морфизм комплексов*

$$\xi^{\mathrm{sm}}_B : \Omega^\bullet_{B|\mathbb{R}} \to \mathrm{S}^\bullet_{\mathrm{sm}}(\mathrm{spec}_{\mathbb{R}} B).$$

Лемма 28 позволяет показать естественность ξ^{sm} по алгебре:

Лемма 30 (ср. лемму 24)**.** *Пусть $\gamma : B' \to B$ — гомоморфизм конечно-порожденных $\mathbb{R}$-алгебр. Тогда следующая диаграмма коммутативна:*

$$\begin{array}{ccc} \Omega^\bullet_{B|\mathbb{R}} & \xrightarrow{\xi^{\mathrm{sm}}_B} & \mathrm{S}^\bullet_{\mathrm{sm}}(\mathrm{spec}_{\mathbb{R}} B) \\ {\scriptstyle \Omega_\gamma}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle \mathrm{S}_{\mathrm{sm}}(\mathrm{spec}_{\mathbb{R}}\gamma)} \\ \Omega^\bullet_{B'|\mathbb{R}} & \xrightarrow{\xi^{\mathrm{sm}}_{B'}} & \mathrm{S}^\bullet_{\mathrm{sm}}(\mathrm{spec}_{\mathbb{R}} B'). \end{array}$$

3.3.2 Сравнение отображений ξ_B и ξ^{sm}_B

Пусть B — конечно-порожденная $\mathbb{R}$-алгебра.

Лемма 31. *Пусть $\sigma : \Delta^n \to \mathrm{spec}_{\mathbb{R}} B$ — гладкий симплекс. Тогда следующая диаграмма коммутативна:*

$$\begin{array}{ccc} \Omega^\bullet_{B|\mathbb{R}} & \xrightarrow{\mu^{\mathrm{sm}}(\sigma)} & \Omega^\bullet(\Delta^n) \\ & {\scriptstyle \mu(\sigma)}\searrow & \downarrow{\scriptstyle \nabla} \\ & & \Omega^\bullet_\flat(\Delta^n). \end{array}$$

Доказательство. Рассмотрим диаграмму

$$\begin{array}{ccccc} & & \overset{\mu(\sigma)}{\frown} & & \\ \Omega^\bullet_{B|\mathbb{R}} & \xrightarrow[\mu^{\mathrm{sm}}(\sigma)]{} & \Omega^\bullet(\Delta^n) & \xrightarrow[\nabla]{} & \Omega^\bullet_\flat(\Delta^n) \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow{\scriptstyle \zeta} \\ B & \xrightarrow{\theta^{\mathrm{sm}}(\sigma)} & C^\infty(\Delta^n) & \hookrightarrow & \mathrm{Lip}(\Delta^n). \\ & & \underset{\theta(\sigma)}{\smile} & & \end{array}$$

Левый квадрат и внешний контур коммутативны по определению μ и μ^{sm}. Правый квадрат коммутативен по пункту 3.1.2(5). Нижний треугольник коммутативен по определениям θ и θ^{sm}. Следовательно, по универсальному свойству $\Omega^\bullet_{B|\mathbb{R}}$, верхний треугольник также коммутативен. □

Лемма 32. *Следующая диаграмма коммутативна:*

$$\begin{array}{ccc} \Omega^\bullet_{B|\mathbb{R}} & \xrightarrow{\xi^{\mathrm{sm}}_B} & \mathrm{S}^\bullet_{\mathrm{sm}}(\mathrm{spec}_{\mathbb{R}} B) \\ & \searrow^{\xi_B} & \uparrow{\scriptstyle \mathrm{res}} \\ & & \mathrm{S}^\bullet_{\mathrm{Lip}}(\mathrm{spec}_{\mathbb{R}} B). \end{array} \tag{3.2}$$

Здесь res *— ограничение коцепи с липшицевых цепей на гладкие цепи.*

Доказательство. Рассмотрим диаграмму

$$\begin{array}{ccccc} \Omega^\bullet_{B|\mathbb{R}} & \xrightarrow{\mu^{\mathrm{sm}}(\sigma)} & \Omega^\bullet(\Delta^n) & \xrightarrow{\mathfrak{T}_n} & \mathbb{R} \\ & \searrow^{\mu(\sigma)} & \downarrow{\scriptstyle \nabla} & \nearrow_{\mathfrak{I}_n} & \\ & & \Omega^\bullet_{\mathfrak{b}}(\Delta^n). & & \end{array} \tag{3.3}$$

Левый треугольник коммутативен по лемме 31. Правый треугольник коммутативен по пункту 3.1.2(4). Следовательно, утверждение следует из определений ξ и ξ^{sm}. □

3.3.3 Морфизмы $\varkappa$ и $\underline{\varkappa}$

Пусть M — гладкое многообразие. Рассмотрим открытое множество $U \subset M$, гладкий симплекс $\sigma : \Delta^n \to U$ и гладкую n-форму $\omega \in \Omega^n(U)$. Положим $\langle \varkappa(\omega), \sigma \rangle := \mathfrak{T}_n(\sigma^*(\omega))$. По формуле Стокса получаем морфизм комплексов

$$\varkappa : \Omega^\bullet(U) \to \mathrm{S}^\bullet_{\mathrm{sm}}(U).$$

Таким образом, получаем морфизм комплексов предпучков $\varkappa : \Omega^\bullet_M \to \mathrm{S}^\bullet_{\mathrm{sm},M}$. Взяв композицию с отображением шификации, получаем морфизм комплексов пучков

$$\underline{\varkappa} : \Omega^\bullet_M \to {}^+\mathrm{S}^\bullet_{\mathrm{sm},M}.$$

Следующая диаграмма коммутативна:

$$\begin{array}{ccc} \underline{\mathbb{R}}_M[0] & \xrightarrow{\varepsilon} & \Omega^\bullet_M \\ & \searrow^{\varepsilon} & \downarrow{\scriptstyle \underline{\varkappa}} \\ & & {}^+\mathrm{S}^\bullet_{\mathrm{sm},M}. \end{array} \tag{3.4}$$

Следующая диаграмма также коммутативна:

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{H}^*(\mathrm{S}^\bullet_{\mathrm{sm}}(M)) & \xrightarrow{\mathrm{H}^*(\mathrm{sh})} & \mathrm{H}^*({}^+\mathrm{S}^\bullet_{\mathrm{sm}}(M)) & \xrightarrow{\Upsilon} & \mathbb{H}^*(M,{}^+\mathrm{S}^\bullet_{\mathrm{sm},M}) \\ & \nwarrow^{\mathrm{H}^*(\varkappa)} & \uparrow{\scriptstyle \mathrm{H}^*(\underline{\varkappa}(M))} & & \uparrow{\scriptstyle \mathbb{H}^*(\underline{\varkappa})} \\ & & \mathrm{H}^*(\Omega^\bullet(M)) & \xrightarrow{\Upsilon} & \mathbb{H}^*(M,\Omega^\bullet_M) \end{array} \tag{3.5}$$

3.3.4 Идентификация отображения Ψ_B

В этом пункте M — гладкое многообразие.

Лемма 33. *Для вложения конечно-порожденной подалгебры $i : B \hookrightarrow C^\infty(M)$ и гладкого сингулярного симплекса $\sigma : \Delta^n \to M$ следующая диаграмма коммутативна:*

$$\begin{array}{ccccc} \Omega^\bullet_{B|\mathbb{R}} & & & \xrightarrow{\mu^{\mathrm{sm}}(\Gamma_B \circ \sigma)} & \\ \downarrow{\scriptstyle \Omega_i} & & & & \\ \Omega^\bullet_{C^\infty(M)|\mathbb{R}} & \xrightarrow{\pi} & \Omega^\bullet(M) & \xrightarrow{\sigma^*} & \Omega^\bullet(\Delta^n). \end{array}$$

Доказательство. Рассмотрим диаграмму:

$$\begin{array}{ccccccc} & & & \xrightarrow{\mu^{\mathrm{sm}}(\Gamma_B \circ \sigma)} & & & \\ \Omega^\bullet_{B|\mathbb{R}} & \xrightarrow{\Omega_i} & \Omega^\bullet_{C^\infty(M)|\mathbb{R}} & \xrightarrow{\pi} & \Omega^\bullet(M) & \xrightarrow{\sigma^*} & \Omega^\bullet(\Delta^n) \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ B & \xrightarrow{i} & C^\infty(M) & = & C^\infty(M) & \xrightarrow{\sigma^*} & C^\infty(\Delta^n). \\ & & & \xrightarrow[\theta^{\mathrm{sm}}(\Gamma_B \circ \sigma)]{} & & & \end{array}$$

Левый и правый квадраты очевидно коммутативны. Средний квадрат коммутативен по определению π. Внешний контур коммутативен по определению μ^{sm}. Для $b \in B$ имеем

$$\theta^{\mathrm{sm}}(\Gamma_B \circ \sigma)(b) = \hat{b} \circ \Gamma_B \circ \sigma = b \circ \sigma = \sigma^*(b)$$

по определению θ^{sm} и равенству 1.2. Следовательно, нижний четырехугольник коммутативен. По универсальному свойству dg-алгебры $\Omega^\bullet_{B|\mathbb{R}}$ верхний четырехугольник коммутативен. □

Лемма 34. *Для вложения конечно-порожденной подалгебры $i : B \hookrightarrow C^\infty(M)$ следующая диаграмма коммутативна:*

$$\begin{array}{ccccc}
\Omega^\bullet_{B|\mathbb{R}} & & \xrightarrow{\quad\xi^{\mathrm{sm}}_B\quad} & & \mathrm{S}^\bullet_{\mathrm{sm}}(\mathrm{spec}_{\mathbb{R}} B) \\
\Big\downarrow{\scriptstyle \Omega_i} & & & & \Big\downarrow{\scriptstyle \mathrm{S}_{\mathrm{sm}}(\Gamma_B)} \\
\Omega^\bullet_{C^\infty(M)|\mathbb{R}} & \xrightarrow{\pi} & \Omega^\bullet(M) & \xrightarrow{\varkappa} & \mathrm{S}^\bullet_{\mathrm{sm}}(M).
\end{array}$$

Доказательство. Для формы $\omega \in \Omega^\bullet_{B|\mathbb{R}}$ имеем

$$\langle \mathrm{S}_{\mathrm{sm}}(\Gamma_B)(\xi^{\mathrm{sm}}_B(\omega)), \sigma\rangle = \langle \xi^{\mathrm{sm}}_B(\omega), \Gamma_B \circ \sigma\rangle = \mathfrak{T}_n(\mu^{\mathrm{sm}}(\Gamma_B \circ \sigma)(\omega)) \overset{(3)}{=}$$

$$\overset{(3)}{=} \mathfrak{T}_n(\sigma^*(\pi(\Omega_i(\omega)))) = \langle \varkappa(\pi(\Omega_i(\omega))), \sigma\rangle\,.$$

Равенство (3) следует из леммы 33. □

Лемма 35. *Для вложения конечно-порожденной подалгебры $i : B \hookrightarrow C^\infty(M)$ следующая диаграмма коммутативна:*

$$\begin{array}{ccccc}
\mathrm{H}^*(\Omega^\bullet_{B|\mathbb{R}}) & & \xrightarrow{\quad\Phi_B\quad} & & \mathbb{H}^*(\mathrm{spec}_{\mathbb{R}} B, \underline{\mathbb{R}}_{\mathrm{spec}_{\mathbb{R}} B}[0]) \\
\Big\downarrow{\scriptstyle \mathrm{H}^*(\Omega_i)} & & & & \Big\downarrow{\scriptstyle \Gamma_B^*} \\
\mathrm{H}^*(\Omega^\bullet_{C^\infty(M)|\mathbb{R}}) & \xrightarrow{\mathrm{H}^*(\pi)} & \mathrm{H}^*(\Omega^\bullet(M)) & \xleftarrow[\Theta]{} & \mathbb{H}^*(M, \underline{\mathbb{R}}_M[0]).
\end{array}$$

Доказательство. Рассмотрим диаграмму

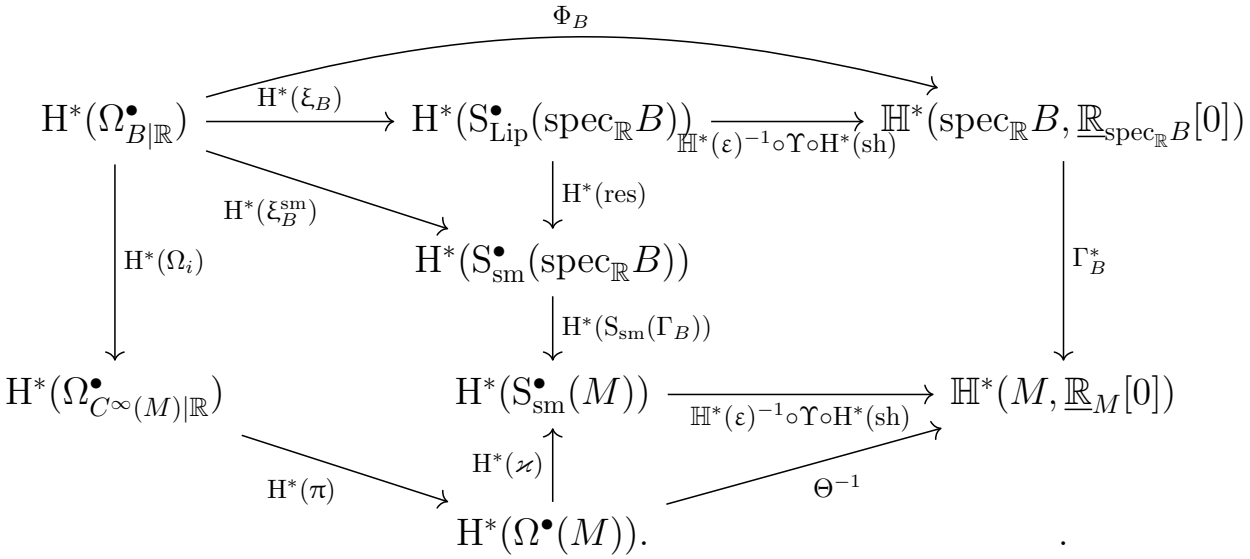
$$\begin{array}{ccccccc}
\mathrm{H}^*(\mathrm{S}^\bullet_{\mathrm{Lip}}(\mathrm{spec}_{\mathbb{R}} B)) & \overset{\Upsilon\circ \mathrm{H}^*(\mathrm{sh})}{\underset{\cong}{\longrightarrow}} & \mathbb{H}^*(\mathrm{spec}_{\mathbb{R}} B, {}^+\mathrm{S}^\bullet_{\mathrm{Lip}, \mathrm{spec}_{\mathbb{R}} B}) & & & \xleftarrow{\quad\mathbb{H}^*(\varepsilon)\quad}_{\cong} & \\
\Big\downarrow{\scriptstyle \mathrm{H}^*(\mathrm{res})} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \mathbb{H}^*(\mathrm{res})} & & & & \\
\mathrm{H}^*(\mathrm{S}^\bullet_{\mathrm{sm}}(\mathrm{spec}_{\mathbb{R}} B)) & \overset{\Upsilon\circ \mathrm{H}^*(\mathrm{sh})}{\underset{\cong}{\longrightarrow}} & \mathbb{H}^*(\mathrm{spec}_{\mathbb{R}} B, {}^+\mathrm{S}^\bullet_{\mathrm{sm}, \mathrm{spec}_{\mathbb{R}} B}) & & \xleftarrow{\mathbb{H}^*(\varepsilon)} & & \mathbb{H}^*(\mathrm{spec}_{\mathbb{R}} B, \underline{\mathbb{R}}_{\mathrm{spec}_{\mathbb{R}} B}[0]) \\
\Big\downarrow{\scriptstyle \mathrm{H}^*(\mathrm{S}_{\mathrm{sm}}(\Gamma_B))} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \Gamma_B^*} & & & & \Big\downarrow{\scriptstyle \Gamma_B^*} \\
\mathrm{H}^*(\mathrm{S}^\bullet_{\mathrm{sm}}(M)) & \overset{\Upsilon\circ \mathrm{H}^*(\mathrm{sh})}{\underset{\cong}{\longrightarrow}} & \mathbb{H}^*(M, {}^+\mathrm{S}^\bullet_{\mathrm{sm}, M}) & & \xleftarrow{\mathbb{H}^*(\varepsilon)}_{\cong} & & \mathbb{H}^*(M, \underline{\mathbb{R}}_M[0]) \\
\Big\uparrow{\scriptstyle \mathrm{H}^*(\varkappa)} & & & \nwarrow^{\mathbb{H}^*(\underline{\varkappa})} & & & \Big\downarrow{\scriptstyle \cong\ \mathbb{H}^*(\varepsilon)} \\
\mathrm{H}^*(\Omega^\bullet(M)) & & & \xrightarrow{\qquad\Upsilon\qquad} & & & \mathbb{H}^*(M, \Omega^\bullet_M).
\end{array} \tag{3.6}$$

Диаграмма без нижней строки коммутативна по очевидным причинам. Нижний левый четырехугольник коммутативен по диаграмме (3.5). Нижний правый

треугольник коммутативен по диаграмме (3.4). Мы не знаем, является ли отображение $\mathbb{H}^*(\varepsilon)$ в средней строке изоморфизмом. Далее, рассмотрим следующую диаграмму:

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{H}^*(\mathrm{S}^\bullet_{\mathrm{sm}}(M)) & \xrightarrow{\mathbb{H}^*(\varepsilon)^{-1}\circ\Upsilon\circ\mathrm{H}^*(\mathrm{sh})} & \mathbb{H}^*(M, \underline{\mathbb{R}}_M[0]) \\ \uparrow{\scriptstyle \mathrm{H}^*(\varkappa)} & \nearrow{\scriptstyle \Theta^{-1}} & \cong\downarrow{\scriptstyle \mathbb{H}^*(\varepsilon)} \\ \mathrm{H}^*(\Omega^\bullet(M)) & \xrightarrow[\Upsilon]{} & \mathbb{H}^*(M, \Omega^\bullet_M). \end{array} \tag{3.7}$$

Внешний контур этой диаграммы коммутативен, так как коммутативны нижние два этажа предыдущей диаграммы. Нижний треугольник коммутативен по определению Θ, см. пункт 2.3.1. Вертикальное отображение $\mathbb{H}^*(\varepsilon)$ является изоморфизмом. Следовательно, верхний треугольник коммутативен. Рассмотрим диаграмму



Верхний треугольник коммутативен по определению отображения Φ_B. Левый пятиугольник коммутативен по лемме 34. Левый треугольник коммутативен по диаграмме (3.2). Правый пятиугольник коммутативен по диаграмме (3.6). Нижний правый треугольник коммутативен по диаграмме (3.7), и Θ является изоморфизмом. Таким образом, вся диаграмма коммутативна. □

3.3.5 Идентификация отображения $\Psi_{C^\infty(M)}$

В предыдущем пункте мы построили отображение $\Psi_A : \mathrm{H}^*(\Omega^\bullet_{A|\mathbb{R}}) \to \mathbb{H}^*(X, \underline{\mathbb{R}}_X[0])$ для произвольного топологического пространства X и произвольной подалгебры $A \subset C(X)$. В случае, когда $X = M$ — гладкое многообразие и $A = C^\infty(M)$, мы хотим вычислить это отображение явно. Переходя в лемме 35 к копределу по всем конечно-порожденным подалгебрам $B \subset C^\infty(M)$, получаем

Теорема 36. *Следующая диаграмма коммутативна:*

$$\begin{array}{ccccc} & & \overset{\Psi_{C^\infty(M)}}{\frown} & & \\ \mathrm{H}^*(\Omega^\bullet_{C^\infty(M)|\mathbb{R}}) & \xrightarrow[\mathrm{H}^*(\pi)]{} & \mathrm{H}^*(\Omega^\bullet(M)) & \xleftarrow[\Theta]{} & \mathbb{H}^*(M, \underline{\mathbb{R}}_M[0]). \end{array}$$

3.4 Основная теорема о расщеплении

Лемма 37. *Пусть M — компактное гладкое многообразие. Тогда следующая диаграмма коммутативна:*

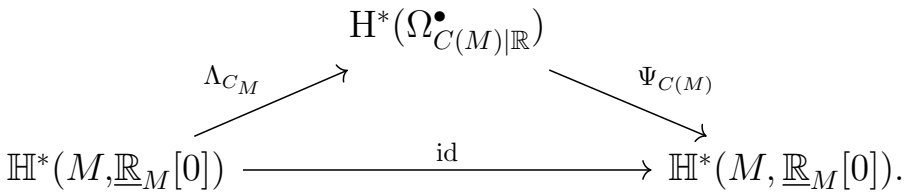
$$\begin{array}{ccccc} & & \mathrm{H}^*(\Omega^\bullet_{C^\infty(M)|\mathbb{R}}) & & \\ & \overset{\Lambda_{C^\infty_M}}{\nearrow} & & \overset{\Psi_{C^\infty(M)}}{\searrow} & \\ \mathbb{H}^*(M, \underline{\mathbb{R}}_M[0]) & & \xrightarrow{\mathrm{id}} & & \mathbb{H}^*(M, \underline{\mathbb{R}}_M[0]). \end{array}$$

Доказательство. Рассмотрим следующую диаграмму:

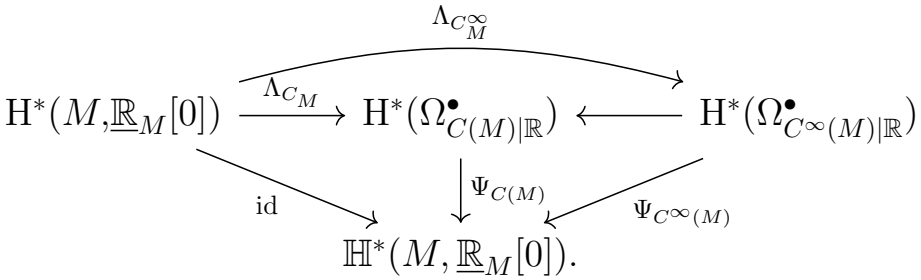
$$\begin{array}{ccc} \mathrm{H}^*(\Omega^\bullet_{C^\infty(M)|\mathbb{R}}) & \xrightarrow{\mathrm{H}^*(\pi)} & \mathrm{H}^*(\Omega^\bullet(M)) \\ \uparrow{\scriptstyle \Lambda_{C^\infty_M}} & \searrow^{\Psi_{C^\infty(M)}} & \uparrow{\scriptstyle \Theta} \\ \mathbb{H}^*(M, \underline{\mathbb{R}}_M[0]) & \xrightarrow{\mathrm{id}} & \mathbb{H}^*(M, \underline{\mathbb{R}}_M[0]). \end{array}$$

Правый треугольник коммутативен в силу теоремы 36. Внешний контур коммутативен в силу теоремы 13. Так как Θ — изоморфизм, левый треугольник также коммутативен. □

Следствие 38. *Для компактного гладкого многообразия M следующая диаграмма коммутативна:*

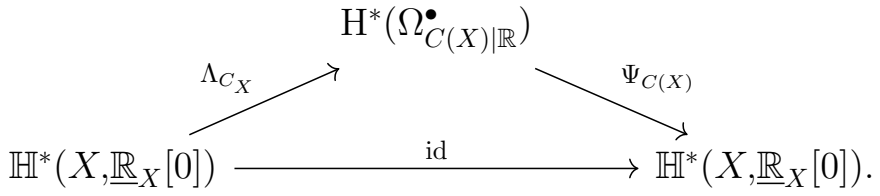


Доказательство. Морфизм вложения пучков $C^\infty_M \hookrightarrow C_M$ позволяет рассмотреть диаграмму



Внешний контур коммутативен в силу леммы 37. Правый треугольник коммутативен в силу предложения 26. Верхний треугольник коммутативен в силу предложения 12. Следовательно, левый треугольник коммутативен. □

Следствие 39. *Для компактного хаусдорфова пространства X следующая диаграмма коммутативна:*



Доказательство. Выберем класс когомологий $\lambda \in \mathbb{H}^*(X,\underline{\mathbb{R}}_X[0])$. Покажем, что $(\Psi_{C(X)} \circ \Lambda_{C_X})(\lambda) = \lambda$. Во-первых, по [17, II.5.10] существует полиэдр N (геометрическая реализация нерва некоторого открытого конечного покрытия пространства X) и непрерывное отображение $f : X \to N$, такие что $\lambda = f^*(\delta)$ для некоторого $\delta \in \mathbb{H}^*(N,\underline{\mathbb{R}}_N[0])$. Во-вторых, существует компактное гладкое многообразие (с краем) M такое, что $N \subset M$ и N — деформационный ретракт M (см. [26, Theorem 1]). Существует класс $\gamma \in \mathbb{H}^*(M,\underline{\mathbb{R}}_M[0])$ такой, что $\gamma|_N = \delta$.

Рассмотрим композицию $g : X \xrightarrow{f} N \hookrightarrow M$. Имеем $\lambda = g^*(\gamma)$. Рассмотрим диаграмму

$$\begin{array}{ccccc}
\mathbb{H}^*(X,\underline{\mathbb{R}}_X[0]) & \xrightarrow{\Lambda_{C_X}} & \mathrm{H}^*(\Omega^\bullet_{C(X)|\mathbb{R}}) & \xrightarrow{\Psi_{C(X)}} & \mathbb{H}^*(X,\underline{\mathbb{R}}_X[0]) \\
\uparrow{\scriptstyle g^*} & & \uparrow{\scriptstyle \mathrm{H}^*(\Omega_{g^*})} & & \uparrow{\scriptstyle g^*} \\
\mathbb{H}^*(M,\underline{\mathbb{R}}_M[0]) & \xrightarrow{\Lambda_{C_M}} & \mathrm{H}^*(\Omega^\bullet_{C(M)|\mathbb{R}}) & \xrightarrow{\Psi_{C(M)}} & \mathbb{H}^*(M,\underline{\mathbb{R}}_M[0]).
\end{array}$$

Эта диаграмма коммутативна в силу предложений 12 и 26. По следствию 38 справедливо равенство $(\Psi_{C(X)} \circ \Lambda_{C_X})(\lambda) = \lambda$. □

Теорема 40. *Для компактного хаусдорфова пространства X и мягкого подпучка алгебр $\mathcal{F} \hookrightarrow C_X$ следующая диаграмма коммутативна*

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \mathrm{H}^*(\Omega^\bullet_{\mathcal{F}(X)|\mathbb{R}}) & & \\
 & \overset{\Lambda_{\mathcal{F}}}{\nearrow} & & \overset{\Psi_{\mathcal{F}(X)}}{\searrow} & \\
\mathbb{H}^*(X,\underline{\mathbb{R}}_X[0]) & & \xrightarrow{\quad\mathrm{id}\quad} & & \mathbb{H}^*(X,\underline{\mathbb{R}}_X[0]).
\end{array}$$

Доказательство. Это непосредственно следует из естественности Λ и Ψ (предложения 12 и 26) и следствия 39. □

Глава 4. Мультипликативность отображений $\Lambda_{\mathcal{F}}$ и Ψ_A

4.1 Техники симплициальной алгебры

Мы называем фибрантное пунктированное симплициальное множество (K,o) *связным*, если для каждого $v \in K_0$ существует симплициальное отображение $\Delta[1] \to K$ такое, что $0 \mapsto o$ и $1 \mapsto v$ (здесь $0,1 \in \Delta[1]_0$ — концы). Мы называем (K,o) *стягиваемым*, если существует сохраняющая отмеченную точку гомотопия $\Delta[1] \times K \to K$, отображающая нижнее основание в o и являющаяся тождественным отображением на верхнем основании. Симплициальное векторное пространство B называется симплициальным модулем над симплициальной алгеброй A, если задано симплициальное линейное отображение

$$A \otimes B \xrightarrow{\times} B,$$

делающее B_p модулем над A_p для каждого $p \geqslant 0$, ср. [36, § 2.6].

Лемма 41. *Пусть B — симплициальный модуль над связной симплициальной алгеброй A. Тогда B является стягиваемым.*

Доказательство. Так как A связна, существует симплициальное отображение

$$\gamma : \Delta[1] \to A,$$

соединяющее 0 и 1. Тогда композиция

$$\Delta[1] \times B \xrightarrow{\gamma \times \mathrm{id}} A \times B \xrightarrow{\times} B$$

является требуемой гомотопией. □

Мы называем симплициальный комплекс (симплициальный объект в категории комплексов) векторных пространств $A^\bullet$ *почленно стягиваемым*, если симплициальное векторное пространство A^q является стягиваемым для каждого $q \geqslant 0$. Стоит отметить, что в [14] почленно стягиваемые симплициальные комплексы называются «extendable complexes». Мы называем симплициальное отображение симплициальных комплексов $A^\bullet \to B^\bullet$ *покомпонентным квазиизоморфизмом*, если оно является квазиизоморфизмом в каждой симплициальной степени.

Следствие 42. *Пусть $A^\bullet$ — симплициальная градуированная алгебра, такая что симплициальная алгебра A^0 связна. Тогда $A^\bullet$ является почленно стягиваемой.*

Следствие 43. *Пусть $A^\bullet$ и $B^\bullet$ — симплициальные градуированные алгебры и $A^\bullet$ является почленно стягиваемой. Тогда $A^\bullet \otimes B^\bullet$ является почленно стягиваемой.*

Доказательство. Алгебра A^0 является связной, так как $A^\bullet$ почленно стягиваема. Симплициальное векторное пространство $(A^\bullet \otimes B^\bullet)^q$ является симплициальным модулем над связной симплициальной алгеброй A^0, следовательно, по лемме 41 доказано. □

Для симплициального комплекса $A^\bullet$ и симплициального множества K определим комплекс векторных пространств $A^\bullet(K)$ обычным образом: для $q \geqslant 0$ векторное пространство $A^q(K)$ состоит из всех симплициальных отображений $K \to A^q$, ср. [14, Глава 10, (b)]. Если $A^\bullet$ — симплициальная dg-алгебра, то $A^\bullet(K)$ — dg-алгебра.

Лемма 44. *Пусть $\theta : A^\bullet \to B^\bullet$ — покомпонентной квазиизоморфизм почленно стягиваемых симплициальных комплексов. Тогда для любого симплициального множества K индуцированное отображение комплексов $\theta(K) : A^\bullet(K) \to B^\bullet(K)$ является квазиизоморфизмом.*

Доказательство. См. [14, Proposition 10.5]. □

4.1.1 Симплициальная dg-алгебра $\mathbb{R}[0]_{\text{const}}$

Мы обозначаем через $\mathbb{R}[0]_{\text{const}}$ симплициальную dg-алгебру, которая равна $\mathbb{R}[0]$ в каждой симплициальной размерности. Тогда

$$\mathbb{R}[0]_{\text{const}} \otimes \mathbb{R}[0]_{\text{const}} = \mathbb{R}[0]_{\text{const}}.$$

4.1.2 Симплициальная dg-алгебра $\mathrm{C}^\bullet$

Мы обозначаем через $\mathrm{C}^\bullet$ симплициальную dg-алгебру (ненормализованных) симплициальных коцепей на комбинаторных симплексах $\Delta[n]$, ср. [14, § 10, (d)]. Умножение в каждой степени — это обычное cup-произведение Александера — Уитни. Существует единственный морфизм симплициальных dg-алгебр $\varepsilon : \mathbb{R}[0]_{\mathrm{const}} \to \mathrm{C}^\bullet$, называемый коаугментацией.

Лемма 45. *Симплициальная dg-алгебра $\mathrm{C}^\bullet$ является почленно стягиваемой. Более того, коаугментация $\varepsilon : \mathbb{R}[0]_{\mathrm{const}} \to \mathrm{C}^\bullet$ является покомпонентным квазиизоморфизмом.*

Ср. [14, Lemma 10.12] для нормализованных симплициальных коцепей.

4.2 Умножение в $\mathbb{H}^*(X, {}^+\Omega^\bullet_{\mathcal{F}|k})$

Пусть $\mathcal{F}$ — пучок k-алгебр на пространстве X. Внешнее произведение

$$\Omega^\bullet_{A|k} \otimes \Omega^\bullet_{A|k} \xrightarrow{\wedge} \Omega^\bullet_{A|k}$$

для k-алгебры A индуцирует произведение

$$\Omega^\bullet_{\mathcal{F}|k} \otimes \Omega^\bullet_{\mathcal{F}|k} \xrightarrow{\wedge} \Omega^\bullet_{\mathcal{F}|k} \tag{4.1}$$

для комплекса пучков $\Omega^\bullet_{\mathcal{F}|k}$. Переходя к ассоциированным пучкам, получаем произведение

$${}^+\Omega^\bullet_{\mathcal{F}|k} \otimes {}^+\Omega^\bullet_{\mathcal{F}|k} \xrightarrow{\wedge} {}^+\Omega^\bullet_{\mathcal{F}|k}.$$

Позже на понадобится следующая коммутативная диаграмма.

$$\begin{array}{ccc} \Omega^\bullet_{\mathcal{F}(X)|k} \otimes \Omega^\bullet_{\mathcal{F}(X)|k} & \xrightarrow{\quad\wedge\quad} & \Omega^\bullet_{\mathcal{F}(X)|k} \\ \Big\downarrow{\scriptstyle \mathrm{sh}\otimes\mathrm{sh}} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \mathrm{sh}} \\ {}^+\Omega^\bullet_{\mathcal{F}|k}(X) \otimes {}^+\Omega^\bullet_{\mathcal{F}|k}(X) & \xrightarrow{\quad\wedge\quad} & {}^+\Omega^\bullet_{\mathcal{F}|k}(X). \end{array} \tag{4.2}$$

Получим cup-произведение (см. пункт 1.1.3)

$$\mathbb{H}^*(X, {}^+\Omega^\bullet_{\mathcal{F}|k}) \otimes \mathbb{H}^*(X, {}^+\Omega^\bullet_{\mathcal{F}|k}) \xrightarrow{\cup} \mathbb{H}^*(X, {}^+\Omega^\bullet_{\mathcal{F}|k}).$$

4.3 Мультипликативность отображения $\Lambda_{\mathcal{F}}$

Для мягкого пучка k-алгебр $\mathcal{F}$ на компактном хаусдорфовом пространстве X отображение

$$\Lambda_{\mathcal{F}} : \mathbb{H}^*(X, \underline{k}_X[0]) \to \mathbb{H}^*(X, {}^+\Omega^\bullet_{\mathcal{F}|k})$$

определялось диаграммой (2.2)

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{H}^*(X,\underline{k}_X[0]) & \xrightarrow{\mathbb{H}^*(\varepsilon)} & \mathbb{H}^*(X,{}^+\Omega^\bullet_{\mathcal{F}|k}) \\ & \searrow^{\Lambda_{\mathcal{F}}} & \cong\uparrow\Upsilon \\ & & \mathrm{H}^*({}^+\Omega^\bullet_{\mathcal{F}|k}(X)) \\ & & \cong\uparrow\mathrm{H}^*(\mathrm{sh}) \\ & & \mathrm{H}^*(\Omega^\bullet_{\mathcal{F}(X)|k}). \end{array}$$

Умножение на $\mathrm{H}^*(\Omega^\bullet_{\mathcal{F}(X)|k})$ индуцируется морфизмом (4.1).

Отображение $\mathrm{H}^*(\mathrm{sh})$ является мультипликативным по диаграмме (4.2). Отображение Υ является мультипликативным по свойству 3 внутреннего cup-произведения. Отображение $\mathbb{H}^*(\varepsilon)$ является мультипликативным по свойству 1 внутреннего cup-произведения.

Следовательно, получаем следующую теорему.

Теорема 46. *Отображение*

$$\Lambda_{\mathcal{F}} : \mathbb{H}^*(X, \underline{k}_X[0]) \to \mathrm{H}^*(\Omega^\bullet_{\mathcal{F}(X)|k})$$

является мультипликативным.

4.4 Отображение Ψ_A мультипликативно

В главе 3 мы построили отображение

$$\Psi_A : \mathrm{H}^*(\Omega^\bullet_{A|\mathbb{R}}) \to \mathbb{H}^*(X, \underline{\mathbb{R}}_X[0])$$

для любого топологического пространства X и любой подалгебры A алгебры $C(X)$. В этом параграфе мы докажем, что это отображение является мультипликативным.

4.4.1 Симплициальная dg-алгебра $\Omega^\bullet_\flat$

В параграфе 3.1 мы ввели симплициальную dg-алгебру бемольных коцепей $\Omega^\bullet_\flat$. В пункте 3.1.2(2) мы ввели морфизм симплициальных алгебр

$$\zeta : \mathrm{Lip} \to \Omega^0_\flat.$$

Лемма 47. *Симплициальная dg-алгебра $\Omega^\bullet_\flat$ почленно стягиваема.*

Доказательство. Для каждого $q \geqslant 0$ симплициальное пространство $\Omega^q_\flat$ является симплициальным модулем над $\Omega^0_\flat$ и, следовательно, над Lip. По лемме 41 достаточно доказать, что симплициальная алгебра Lip связна, что легко увидеть. □

Существует единственный морфизм симплициальных dg-алгебр $\varepsilon : \mathbb{R}[0]_{\mathrm{const}} \to \Omega^\bullet_\flat$, называемый коаугментацией.

Лемма 48. *Отображение $\varepsilon : \mathbb{R}[0]_{\mathrm{const}} \to \Omega^\bullet_\flat$ является покомпонентным квазиизоморфизмом.*

Доказательство. См. построение $\Omega^\bullet_\flat(\Delta^n)$ и [44, Chapter VII, Theorem 12A]. □

4.4.2 Мультипликативность отображения $\mathrm{H}^*(\xi_B)$

Для множества $Z \subset \mathbb{R}^n$ определим симплициальное множество $\mathrm{Sing}^{\mathrm{Lip}}(Z)$ липшицевых сингулярных симплексов. Комплекс $\mathrm{S}^\bullet_{\mathrm{Lip}}(Z)$ липшицевых сингулярных коцепей на Z можно снабдить некоммутативным cup-произведением Александера — Уитни. Имеем

$$\mathrm{C}^\bullet(\mathrm{Sing}^{\mathrm{Lip}}(Z)) = \mathrm{S}^\bullet_{\mathrm{Lip}}(Z),$$

где произведение слева, которое приходит из произведения на $\mathrm{C}^\bullet$, совпадает с cup-произведением Александера — Уитни справа.

Лемма 49. *Пусть $h : [m] \to [n]$ — морфизм в категории $\mathbf{\Delta}$. Следующая диаграмма коммутативна:*

$$\begin{array}{ccc} \Omega^\bullet_{B|\mathbb{R}} & & \\ {\scriptstyle \mu(\sigma)}\downarrow & \searrow^{\mu(h^*\sigma)} & \\ \Omega^\bullet_\flat(\Delta^n) & \xrightarrow{h^*} & \Omega^\bullet_\flat(\Delta^{n-1}). \end{array}$$

Доказательство. Доказательство аналогично доказательству леммы 21. □

Лемма позволяет нам построить морфизм dg-алгебр

$$\hat{\mu} : \Omega^\bullet_{B|\mathbb{R}} \to \Omega^\bullet_\flat(\mathrm{Sing}^{\mathrm{Lip}}(\mathrm{spec}_{\mathbb{R}} B)),$$

положив

$$\hat{\mu}(\omega)(\sigma) = \mu(\sigma)(\omega) \tag{4.3}$$

для любого $\omega \in \Omega^\bullet_{B|\mathbb{R}}$ и любого $\sigma \in \mathrm{Sing}^{\mathrm{Lip}}(\mathrm{spec}_{\mathbb{R}} B)_n$. Каждый симплекс $\beta \in \Delta[n]_m$ задает аффинный сингулярный симплекс $\Delta^m \to \Delta^n$. Получаем морфизм ограничения симплициальных комплексов

$$\tau : \Omega^\bullet_\flat \to \mathrm{C}^\bullet,$$

который не является мультипликативным. Следующая диаграмма коммутативна по формулам (4.3) и (3.1):

$$\begin{array}{ccc} \Omega^\bullet_\flat(\mathrm{Sing}_{\mathrm{Lip}}(\mathrm{spec}_{\mathbb{R}} B)) & \xrightarrow{\tau(\mathrm{Sing}_{\mathrm{Lip}}(\mathrm{spec}_{\mathbb{R}} B))} & \mathrm{C}^\bullet(\mathrm{Sing}_{\mathrm{Lip}}(\mathrm{spec}_{\mathbb{R}} B)) \\ {\scriptstyle \hat{\mu}}\uparrow & & \| \\ \Omega^\bullet_{B|\mathbb{R}} & \xrightarrow[\xi_B]{} & \mathrm{S}^\bullet_{\mathrm{Lip}}(\mathrm{spec}_{\mathbb{R}} B). \end{array} \tag{4.4}$$

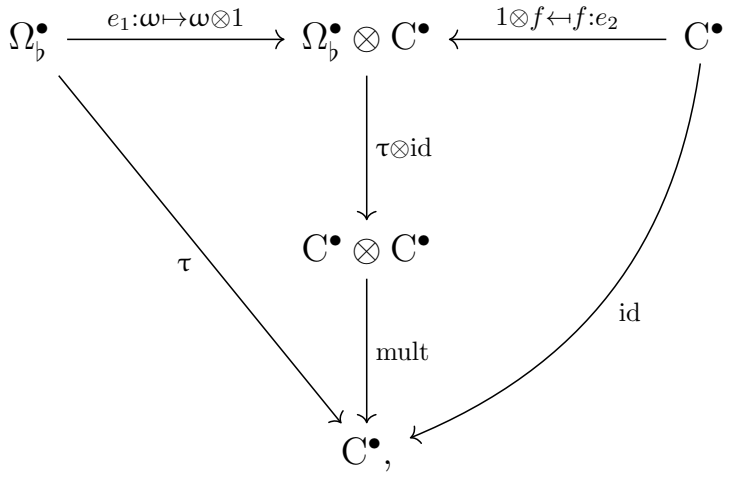
Лемма 50. *Отображение*

$$\mathrm{H}^*(\xi_B) : \mathrm{H}^*(\Omega^\bullet_{B|\mathbb{R}}) \to \mathrm{H}^*(\mathrm{S}^\bullet_{\mathrm{Lip}}(\mathrm{spec}_{\mathbb{R}} B))$$

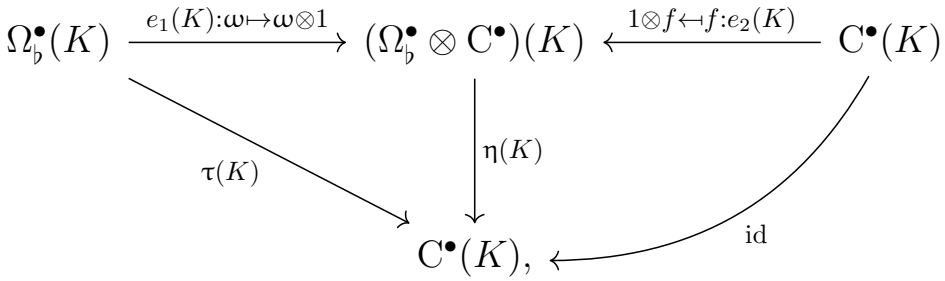
является мультипликативным.

Доказательство следует идеям [14, Theorem 10.9].

Доказательство. Рассмотрим следующую коммутативную диаграмму симплициальных dg-алгебр и симплициальных коцепных отображений:



где mult — умножение в $\mathrm{C}^\bullet$. Взяв тензорное произведение коаугментаций на $\Omega^\bullet_\flat$ и $\mathrm{C}^\bullet$, получаем коаугментации на $\Omega^\bullet_\flat\otimes\mathrm{C}^\bullet$ и $\mathrm{C}^\bullet\otimes\mathrm{C}^\bullet$. По лемме 45, лемме 47 и следствию 43 все симплициальные dg-алгебры в этой диаграмме почленно стягиваемы. По лемме 45, лемме 48 и тому факту, что все отображения коцепных комплексов в диаграмме сохраняют коаугментацию, все отображения коцепных комплексов являются покомпонентным квазиизоморфизмами. Заметим, что отображения e_1 и e_2 являются морфизмами симплициальных dg-алгебр. Пусть $\eta:\Omega^\bullet_\flat\otimes\mathrm{C}^\bullet\to\mathrm{C}^\bullet$ — композиция вертикальных стрелок. Подстановка симплициального множества K приводит к коммутативной диаграмме dg-алгебр и отображений коцепных комплексов



где все стрелки являются квазиизоморфизмами по лемме 44. Отображения $e_1(K)$ и $e_2(K)$ являются морфизмами dg-алгебр. Возьмем когомологии. Отображение $\mathrm{H}^*(e_2(K))$ является изоморфизмом. Поскольку $\mathrm{H}^*(\eta(K))\circ\mathrm{H}^*(e_2(K))$ — тождественное отображение, имеем $\mathrm{H}^*(\eta(K))=(\mathrm{H}^*(e_2(K)))^{-1}$. Получаем

$$\mathrm{H}^*(\tau(K))=\mathrm{H}^*(\eta(K))\circ\mathrm{H}^*(e_1(K))=(\mathrm{H}^*(e_2(K)))^{-1}\circ\mathrm{H}^*(e_1(K)),$$

следовательно, отображение $\mathrm{H}^*(\tau(K))$ мультипликативно. Подставляя $K = \mathrm{Sing}_{\mathrm{Lip}}(\mathrm{spec}_{\mathbb{R}} B)$ и вместе с диаграммой (4.4) заключаем, что отображение

$$\mathrm{H}^*(\xi_B) : \mathrm{H}^*(\Omega^\bullet_{B|\mathbb{R}}) \to \mathrm{H}^*(\mathrm{S}^\bullet_{\mathrm{Lip}}(\mathrm{spec}_{\mathbb{R}} B))$$

мультипликативно. □

Комплекс пучков ${}^+\mathrm{S}^\bullet_{\mathrm{Lip},\mathrm{spec}_{\mathbb{R}} B}$ можно снабдить cup-произведением Александера — Уитни, которое некоммутативно.

4.4.3 Мультипликативность отображения Ψ_A

Теорема 51. *Пусть X — топологическое пространство, $A \subset C(X)$ — подалгебра алгебры непрерывных вещественнозначных функций на X. Тогда отображение*

$$\Psi_A : \mathrm{H}^*(\Omega^\bullet_{A|\mathbb{R}}) \to \mathbb{H}^*(X, \underline{\mathbb{R}}_X[0])$$

является мультипликативным.

Доказательство. Рассмотрим конечно порожденную подалгебру $B \subset A$. Такая подалгебра задает непрерывную функцию $\Gamma_B : X \to \mathrm{spec}_{\mathbb{R}} B$, см. пункт 1.2.1. Существует морфизм dg-алгебр

$$\mathrm{sh} : \mathrm{S}^\bullet_{\mathrm{Lip}}(\mathrm{spec}_{\mathbb{R}} B) \to {}^+\mathrm{S}^\bullet_{\mathrm{Lip},\mathrm{spec}_{\mathbb{R}} B}(\mathrm{spec}_{\mathbb{R}} B),$$

естественный по подалгебре B. Морфизм комплексов пучков с умножением

$$\varepsilon : \underline{\mathbb{R}}_{\mathrm{spec}_{\mathbb{R}} B}[0] \to {}^+\mathrm{S}^\bullet_{\mathrm{Lip},\mathrm{spec}_{\mathbb{R}} B}$$

является квазиизоморфизмом, см. лемму 3. Рассмотрим следующие отображения.

1. Отображение
$$\mathrm{H}^*(\Omega^\bullet_{B|\mathbb{R}}) \xrightarrow{\mathrm{H}^*(\xi_B)} \mathrm{H}^*(\mathrm{S}^\bullet_{\mathrm{Lip}}(\mathrm{spec}_{\mathbb{R}} B))$$
мультипликативно по лемме 50.
2. Отображение
$$\mathrm{H}^*(\mathrm{S}^\bullet_{\mathrm{Lip}}(\mathrm{spec}_{\mathbb{R}} B)) \xrightarrow{\mathrm{H}^*(\mathrm{sh})} \mathrm{H}^*({}^+\mathrm{S}^\bullet_{\mathrm{Lip}}(\mathrm{spec}_{\mathbb{R}} B)),$$
очевидно, мультипликативно.

3. Отображение

$$\mathrm{H}^*({}^+\mathrm{S}^\bullet_{\mathrm{Lip}}(\mathrm{spec}_{\mathbb{R}} B)) \xrightarrow{\Upsilon} \mathbb{H}^*(\mathrm{spec}_{\mathbb{R}} B, {}^+\mathrm{S}^\bullet_{\mathrm{Lip},\mathrm{spec}_{\mathbb{R}} B})$$

мультипликативно по свойству 3 пункта 1.1.3.

4. Отображение

$$\mathbb{H}^*(\mathrm{spec}_{\mathbb{R}} B, {}^+\mathrm{S}^\bullet_{\mathrm{Lip},\mathrm{spec}_{\mathbb{R}} B}) \xrightarrow{(\mathbb{H}^*(\varepsilon))^{-1}} \mathbb{H}^*(\mathrm{spec}_{\mathbb{R}} B, \underline{\mathbb{R}}_{\mathrm{spec}_{\mathbb{R}} B}[0])$$

мультипликативно по свойству 1 пункта 1.1.3.

5. Отображение

$$\mathbb{H}^*(\mathrm{spec}_{\mathbb{R}} B, \underline{\mathbb{R}}_{\mathrm{spec}_{\mathbb{R}} B}[0]) \xrightarrow{\Gamma^*} \mathbb{H}^*(X, \underline{\mathbb{R}}_X[0])$$

мультипликативно по свойству 2 пункта 1.1.3.

Следовательно, композиция отображений (1)–(5)

$$\mathrm{H}^*(\Omega^\bullet_{B|\mathbb{R}}) \to \mathbb{H}^*(X, \underline{\mathbb{R}}_X[0])$$

мультипликативна. Перейдем к копределу по всем конечно порожденным подалгебрам $B \subset A$ и получим, что Ψ_A мультипликативно. □

Глава 5. Кусочно-полиномиальные функции

5.1 Полиэдры и прямолинейные отображения

Мы принимаем следующие определения.

Полиэдр K — это конечное множество аффинных симплексов в $\mathbb{R}^m$, такое что:

1. для любого $a \in K$ и любой грани $b \subset a$ имеем $b \in K$;
2. если $a,b \in K$, то $a \cap b$ является либо общей гранью a и b, либо пустым множеством.

Подмножество P множества K, которое само является полиэдром, называется *подполиэдром* K. Для полиэдра K определим $|K|$ как объединение всех симплексов K. Мы говорим, что функция $f : |K| \to |K'|$ является *прямолинейным отображением*, если для любого $a \in K$ существует $b \in K'$ такой, что $f(a) \subset b$ и f отображает a в b аффинно. Два прямолинейных отображения $f,g : |K| \to |K'|$ называются *смежными*, если для любого симплекса $a \in K$ множество $f(a) \cup g(a)$ содержится в некотором симплексе из K'. Мы говорим, что полиэдр P является *минором* полиэдра K, если $|P| \subset |K|$ и $|P| \hookrightarrow |K|$ является прямолинейным отображением (иными словами, для любого $a \in P$ существует $b \in K$ такой, что $a \subset b$). Мы называем минор P полиэдра K *подразбиением*, если $|P| = |K|$. Полиэдр S называется *звездой* с центром $x \in \mathbb{R}^m$, если x является вершиной полиэдра S и каждый максимальный по включению симплекс полиэдра S имеет x в качестве вершины. Для полиэдра K с $x \in |K|$ минор S называется *звездной окрестностью* x, если S является звездой с центром x и $x \in \operatorname{int}_{|K|} |S|$. Для полиэдра K рассмотрим алгебру $\operatorname{Pol}(K)$ функций $\varphi : |K| \to \mathbb{R}$ таких, что для каждого симплекса $a \in K$ функция $\varphi|_a$ является многочленом. (Эта алгебра уже встречалась ранее как $A^0(X)$, см. параграф 6.1, и будет рассмотрена подробно в следующей главе.) Алгебра $\operatorname{Pol}(K)$ контравариантна относительно прямолинейных отображений, в частности, если $i : |P| \hookrightarrow |K|$ — вложение минора, то имеем гомоморфизм ограничения $\operatorname{Pol}(i) : \operatorname{Pol}(K) \to \operatorname{Pol}(P)$. Алгебра Pol — это алгебра A^0 из параграфа 6.1.

Для следующих лемм см. [37, Chapter 2].

Лемма 52. *Пусть $K, P_1, \ldots, P_l$ — полиэдры, и P_i являются минорами K. Тогда существуют подразбиения K' полиэдра K и P_i' полиэдров P_i такие, что P_i' является подполиэдром K' для каждого i.*

Доказательство. См. [37, Addendum 2.12]. □

Лемма 53. *Пусть K — полиэдр, $U \subset |K|$ — множество, открытое в $|K|$, и $D \subset U$ — множество, замкнутое в $|K|$. Тогда существует минор P полиэдра K такой, что $|P| \subset U$ и $D \subset \operatorname{int}_{|K|} |P|$.*

Доказательство. Для каждой точки $x \in D$ выберем куб Q_x с центром x, такой что $|Q_x| \subset U$. По компактности множества D выберем конечное множество кубов $(Q_{x_i})_{i=1}^l$, таких что

$$S \subset \bigcup_{i=1}^{l} \operatorname{int}_{|K|} |Q_{x_i}|.$$

По лемме 52 существует подразбиение K' полиэдра K и подразбиение Q'_{x_i} куба Q_{x_i}, такие что полиэдр Q'_{x_i} является подполиэдром полиэдра K' для каждого i. Следовательно, объединение полиэдров Q'_{x_i} образует подполиэдр полиэдра K' и, тогда, является минором полиэдра K. □

Определение. Определим пучок кусочно-полиномиальных функций на полиэдре.

1. Для полиэдра K и подмножества $U \subset |K|$, открытого в $|K|$, функцию $s : U \to \mathbb{R}$ называют *кусочно-полиномиальной*, если для каждой точки $x \in U$ существует минор K_x полиэдра K, такой что $|K_x| \subset U$, $x \in \operatorname{int}_{|K|} |K_x|$ и $s|_{|K_x|} \in \operatorname{Pol}(K_x)$.
2. Множество $\operatorname{PPol}(U)$ кусочно-полиномиальных функций на U образует алгебру (используйте лемму 52).
3. Для двух множеств $V \subset U$, открытых в $|K|$, ограничение кусочно-полиномиальной функции $s \in \operatorname{PPol}(U)$ на V является кусочно-полиномиальной. Таким образом, соответствие $U \mapsto \operatorname{PPol}(U)$ определяет пучок на $|K|$, который мы обозначаем PPol_K.

Предложение 54. *Для любого полиэдра K пучок PPol_K является мягким.*

Доказательство. Пусть $D \subset |K|$ — замкнутое в $|K|$ подмножество. Рассмотрим элемент в $\operatorname{PPol}_K(D)$, представленный открытым в $|K|$ множеством $U \subset$

$|K|$, таким что $D \subset U$ и сечением $s \in \mathrm{PPol}_K(U)$. По лемме 53 существует минор P полиэдра K, такой что $D \subset \mathrm{int}_{|K|}|P|$ и $|P| \subset U$. Применив лемму 53 снова, получаем минор P_2 полиэдра K такой, что $|P| \subset \mathrm{int}_{|K|}|P_2|$ и $|P_2| \subset U$. По лемме 52 существуют подразбиения K' полиэдра K, P_2' полиэдра P_2 и P' полиэдра P такие, что P' и P_2' являются подполиэдрами K'. Возьмем элемент $t \in \mathrm{Pol}(K')$ такой, что $t||P'| \equiv 1$ и $t||K'| - |P_2'| \equiv 0$. Функция ts является глобальным сечением PPol_K и совпадает с s на $\mathrm{PPol}_K(D)$. □

5.2 Отображения $\Lambda_{\mathrm{PPol}_K}$ и $\Psi_{\mathrm{PPol}_K(|K|)|\mathbb{R}}$

Здесь мы докажем, что для пучка кусочно-полиномиальных функций на K отображения $\Lambda_{\mathrm{PPol}_K}$ и $\Psi_{\mathrm{PPol}_K(|K|)|\mathbb{R}}$ являются изоморфизмами. Следующее понятие можно найти в [16]. Два гомоморфизма $\mathbb{R}$-алгебр $\gamma_0,\gamma_1 : A \to B$ называются *просто гомотопными*, если существует гомоморфизм $H : A \to B \otimes \mathbb{R}[t]$ такой, что следующая диаграмма коммутативна для $\lambda = 0,1$:

$$A \xrightarrow[H]{} B \otimes \mathbb{R}[t] \xrightarrow[t\mapsto\lambda]{} B, \qquad \overset{\gamma_\lambda}{\frown} \tag{5.1}$$

Следующее определение гомотопных морфизмов dg-алгебр является хорошо известным и может быть найдено в [32, II.1].

Определение. Два морфизма dg-алгебр $\gamma_0,\gamma_1 : E \to E'$ называются *гомотопными*, если существует морфизм $H : E \to E' \otimes \Omega^\bullet_{\mathbb{R}[t]|\mathbb{R}}$, такой что следующая диаграмма коммутативна для $\lambda = 0,1$:

$$E \xrightarrow[H]{} E' \otimes \Omega^\bullet_{\mathbb{R}[t]|\mathbb{R}} \xrightarrow[t\mapsto\lambda]{} E', \qquad \overset{\gamma_\lambda}{\frown}$$

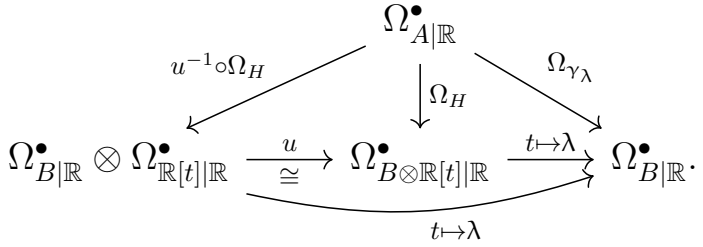
Здесь $t \mapsto \lambda$ — морфизм dg-алгебр, который тождественен на E' и отображает t в λ.

Лемма 55. *Гомотопные морфизмы dg-алгебр индуцируют равные отображения на группах когомологий.*

Доказательство. См. [32, Lemma II.1]. □

Предложение 56. *Пусть гомоморфизмы алгебр* $\gamma_0,\gamma_1 : A \to B$ *являются просто гомотопными. Тогда индуцированные отображения* $\mathrm{H}^*(\Omega_{\gamma_\lambda}) : \mathrm{H}^*(\Omega^\bullet_{A|\mathbb{R}}) \to \mathrm{H}^*(\Omega^\bullet_{B|\mathbb{R}})$, $\lambda = 0,1$, *равны.*

Доказательство. По лемме 55 достаточно доказать, что морфизмы dg-алгебр $\Omega_{\gamma_\lambda} : \Omega^\bullet_{A|\mathbb{R}} \to \Omega^\bullet_{B|\mathbb{R}}$ гомотопны для $\lambda = 0$ и $\lambda = 1$. Так как γ_λ просто гомотопны для $\lambda = 0,1$, имеем гомоморфизм $H : A \to B \otimes \mathbb{R}[t]$ такой, что диаграмма 5.1 коммутативна. Очевидные морфизмы $\Omega^\bullet_{B|\mathbb{R}} \to \Omega^\bullet_{B\otimes\mathbb{R}[t]|\mathbb{R}}$ и $\Omega^\bullet_{\mathbb{R}[t]|\mathbb{R}} \to \Omega^\bullet_{B\otimes\mathbb{R}[t]|\mathbb{R}}$ образуют каноническое отображение $u : \Omega^\bullet_{B|\mathbb{R}} \otimes \Omega^\bullet_{\mathbb{R}[t]|\mathbb{R}} \to \Omega^\bullet_{B\otimes\mathbb{R}[t]|\mathbb{R}}$, которое является изоморфизмом по [30, Corollary 4.2]. Рассмотрим следующую коммутативную диаграмму:



Мы получаем, что Ω_{γ_λ} гомотопны для $\lambda = 0,1$. □

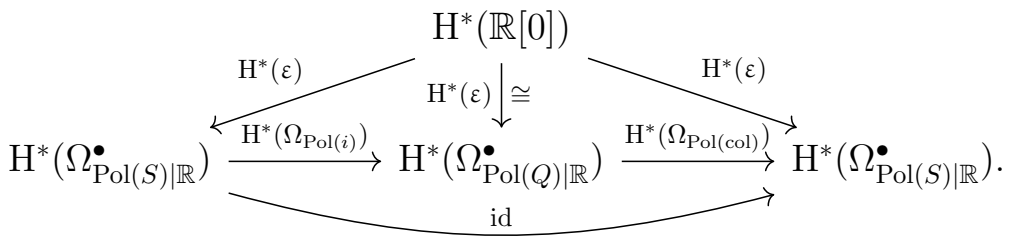
Лемма 57. *Пусть* $f_0,f_1 : |K| \to |K'|$ *— два смежных прямолинейных отображения полиэдров. Тогда индуцированные гомоморфизмы* $f_0^*,f_1^* : \mathrm{Pol}(K') \to \mathrm{Pol}(K)$ *просто гомотопны.*

Доказательство. Рассмотрим алгебру T функций s на $|K| \times [0,1]$ таких, что для каждого симплекса $a \in K$ ограничение $s|_{a\times[0,1]}$ является полиномиальной функцией. Отображение $\mathrm{Pol}(K) \otimes \mathbb{R}[t] \to T$, отправляющее $\beta \otimes p(t)$ в функцию $(x,t) \mapsto \beta(x)p(t)$, является изоморфизмом. Построим гомоморфизм $H : \mathrm{Pol}(K') \to T$ как $H(\alpha)(x,t) := \alpha(f_0(x)(1-t)+f_1(x)t)$. Так как f_0 и f_1 смежны, $H(\alpha) \in T$. Также, $H(\alpha)|_{t=\lambda} = \alpha(f_\lambda(x)) = f_\lambda^*(\alpha)$ для $\lambda = 0,1$. Требуемая гомотопия — это поднятие гомоморфизма H в $\mathrm{Pol}(K) \otimes \mathbb{R}[t]$. □

Следствие 58 (лемма Пуанкаре)**.** *Пусть* S *— звезда с центром* x*. Тогда коаугментация* $\varepsilon : \mathbb{R}[0] \to \Omega^\bullet_{\mathrm{Pol}(S)|\mathbb{R}}$ *является квазиизоморфизмом.*

Доказательство. Обозначим через Q одноточечный полиэдр $\{\{x\}\}$. Рассмотрим прямолинейные отображения $\mathrm{col} : |S| \to |Q|$ и $i : |Q| \hookrightarrow |S|$. По определению звезды композиция $i \circ \mathrm{col}$ смежна тождественному отображению

$\mathrm{id} : |S| \to |S|$. Рассмотрим следующую диаграмму:



По предложению 56 и лемме 57 нижний треугольник коммутативен. Остальная часть диаграммы коммутирует по очевидным причинам. Легко видеть, что морфизм комплексов $\varepsilon : \mathbb{R}[0] \to \Omega^\bullet_{\mathrm{Pol}(Q)|\mathbb{R}}$ является квазиизоморфизмом. Следовательно, $\mathrm{H}^*(\varepsilon) : \mathrm{H}^*(\mathbb{R}[0]) \to \mathrm{H}^*(\Omega^\bullet_{\mathrm{Pol}(K)|\mathbb{R}})$ является изоморфизмом. □

Лемма 59. *Пусть K — полиэдр и $x \in |K|$. Предположим, что S_0 и S_1 — звездные окрестности x в K. Тогда существует звездная окрестность S' точки x в K, которая является минором полиэдров S_i для $i = 0{,}1$.*

Доказательство. Следует из леммы 52. □

Рассмотрим полиэдр K и точку $x \in |K|$. Пусть $\Sigma(x)$ — множество всех звездных окрестностей S точки x в K. Определим частичный порядок на $\Sigma(x)$: пусть $S \leqslant S'$, если S' является минором S. По лемме 59 множество $\Sigma(x)$ направлено. Каждая звездная окрестность S точки x в K порождает гомоморфизм $\mathrm{Pol}(S) \to (\mathrm{PPol}_K)_x$. Взяв предел по направленному множеству $\Sigma(x)$, получаем гомоморфизм

$$\chi : \varinjlim_{S \in \Sigma(x)} \mathrm{Pol}(S) \to (\mathrm{PPol}_K)_x.$$

Лемма 60. *Отображение χ является изоморфизмом.*

Доказательство. Для доказательства инъективности рассмотрим звездную окрестность S точки x в K и $t \in \mathrm{Pol}(S)$ такие, что $\chi(t) = 0$. Существует открытое множество U в $|K|$ с $x \in U$ такое, что $t|_U = 0$ как функция. Возьмем звездную окрестность S' точки x такую, что $|S'| \subset U$ и S' является минором полиэдра S. Видим, что $t|_{|S'|} = (t|_U)|_{|S'|} = 0$, и, следовательно, t равен нулю в $\varinjlim_{S \in \Sigma(x)} \mathrm{PPol}_K(S)$.

Для доказательства сюръективности рассмотрим росток $g \in (\mathrm{PPol}_K)_x$, открытое множество $U \subset |K|$ и сечение $\tilde{g} \in \mathrm{PPol}_K(U)$ такие, что $\tilde{g}_x = g$.

Так как $\tilde{g} \in \mathrm{PPol}_K(U)$, существует минор $P \subset K$, такой что $|P| \subset U$, $x \in \mathrm{int}_{|K|}|P|$ и $\tilde{g}|_{|P|} \in \mathrm{Pol}(P)$. Возьмем звездную окрестность S точки x в P. Тогда χ отображает $\tilde{g}|_{|S|}$ в g. □

Предложение 61. *Для полиэдра K коаугментация*

$$\varepsilon : \underline{\mathbb{R}}_{|K|}[0] \to {}^{+}\Omega^{\bullet}_{\mathrm{PPol}_K|\mathbb{R}}$$

является квазиизоморфизмом.

Доказательство. Мы докажем, что ε является квазиизоморфизмом на стеблях. Имеем

$$(\underline{\mathbb{R}}_{|K|}[0])_x \to ({}^{+}\Omega^{\bullet}_{\mathrm{PPol}_K|\mathbb{R}})_x = (\Omega^{\bullet}_{\mathrm{PPol}_K|\mathbb{R}})_x = \Omega^{\bullet}_{(\mathrm{PPol}_K)_x|\mathbb{R}} \cong \varinjlim_{S\in\Sigma(x)} \Omega^{\bullet}_{\mathrm{Pol}(S)|\mathbb{R}}.$$

Последний изоморфизм следует из леммы 60. По следствию 58 морфизм $(\underline{\mathbb{R}}_{|K|}[0])_x \to \varinjlim_{S\in\Sigma(x)} \Omega^{\bullet}_{\mathrm{Pol}(S)|\mathbb{R}}$ является квазиизоморфизмом. □

Теорема 62. *Отображения*

$$\Lambda_{\mathrm{PPol}_K} : \mathbb{H}^*(|K|, \underline{\mathbb{R}}_{|K|}[0]) \to \mathrm{H}^*(\Omega^{\bullet}_{\mathrm{PPol}_K(|K|)|\mathbb{R}})$$

и

$$\Psi_{\mathrm{PPol}_K(|K|)} : \mathrm{H}^*(\Omega^{\bullet}_{\mathrm{PPol}_K(|K|)|\mathbb{R}}) \to \mathbb{H}^*(|K|, \underline{\mathbb{R}}_{|K|}[0])$$

являются изоморфизмами.

Доказательство. По теореме 40 достаточно доказать, что $\Lambda_{\mathrm{PPol}_K}$ является изоморфизмом. Напомним, что $\Lambda_{\mathrm{PPol}_K}$ определяется как диагональная стрелка в диаграмме

$$\begin{array}{ccc}
\mathbb{H}^*(|K|, \underline{\mathbb{R}}_{|K|}[0]) & \xrightarrow{\mathbb{H}^*(\varepsilon)} & \mathbb{H}^*(|K|, {}^{+}\Omega^{\bullet}_{\mathrm{PPol}_K|\mathbb{R}}) \\
 & \searrow^{\Lambda_{\mathrm{PPol}_K}} & \cong \uparrow \Upsilon \\
 & & \mathrm{H}^*({}^{+}\Omega^{\bullet}_{\mathrm{PPol}_K|\mathbb{R}}(|K|)) \\
 & & \cong \uparrow \mathrm{H}^*(\mathrm{sh}) \\
 & & \mathrm{H}^*(\Omega^{\bullet}_{\mathrm{PPol}_K(|K|)|\mathbb{R}}).
\end{array}$$

По предложению 61 отображение $\mathbb{H}^*(\varepsilon)$ является изоморфизмом, следовательно, $\Lambda_{\mathrm{PPol}_K}$ является изоморфизмом. □

Глава 6. Полиномиальные функции

6.1 dg-алгебра полиномиальных дифференциальных форм Сулливана

Для комбинаторного симплициального комплекса X определим dg-алгебру $A^\bullet(X)$ согласно Сулливану, см. [41, § 7], [22]. Для m-симплекса a рассмотрим dg-алгебру

$$A^\bullet(a) := \frac{\Lambda\left(t_v, dt_v \mid \deg(t_v) = 0,\, \deg(dt_v) = 1, v \in a\right)}{\left(\sum_{v\in a} t_v - 1, \sum_{v\in a} dt_v\right)}$$

с дифференциалом $t_v \mapsto dt_v$ для $v \in a$. Для симплекса b, такого что $b \subset a$, имеем естественный морфизм dg-алгебр

$$|_b : A^\bullet(a) \to A^\bullet(b), \qquad t_v \mapsto \begin{cases} 0, v \notin b, \\ t_v, v \in b. \end{cases}$$

Тогда элемент $\omega = (\omega_a)_{a\in X}$ из $A^\bullet(X)$ - это семейство элементов $\omega_a \in A^\bullet(a)$, таких что для двух симплексов $b \subset a$ выполняется $\omega_a|_b = \omega_b$. Мы называем алгебру $A^0(X)$ *алгеброй полиномиальных функций* на X. Эта алгебра имеет другое описание — как фактор-алгебра алгебры Стэнли — Рейснера, см. [9]. Включение комбинаторных симплициальных комплексов $Y \subset X$ индуцирует морфизм ограничения dg-алгебр

$$|_Y : A^\bullet(X) \to A^\bullet(Y).$$

Лемма 63. *Данный морфизм ограничения является сюръективным.*

Доказательство. Этот факт довольно нетривиален, см. [41, § 7]. □

Введем дважды градуированное векторное пространство $\mathcal{D}^{p,q}$, $p,q \in \mathbb{Z}$, следующим образом. Для $p \leqslant -2$ положим $\mathcal{D}^{p,q} = 0$, а для $p \geqslant -1$ определим $\mathcal{D}^{p,q}$ как подпространство пространства

$$\prod_{u\in T_p(X)} A^q(\mathrm{St}\, u),$$

состоящее из семейств форм $\omega_u \in A^q(\operatorname{St} u)$, таких что для любого $\sigma \in \Sigma_{p+1}$ выполняется

$$\omega_{\sigma u} = (\operatorname{sgn} \sigma)\omega_u.$$

Определим линейное отображение

$$\delta : \mathcal{D}^{p,q} \to \mathcal{D}^{p+1,q}.$$

Для $p \geqslant -1$ и для

$$\omega = (\omega_u)_{u \in T_p(X)} \in \mathcal{D}^{p,q}$$

зададим значение $\delta\omega$ на $s \in T_{p+1}(X)$, полагая

$$(\delta\omega)_s = \sum_{i=0}^{p+1} (-1)^i \omega_{\partial_i s}|_{\operatorname{St} s}.$$

Дифференциал d на $A^\bullet(\operatorname{St} u)$ индуцирует дифференциал d на $\mathcal{D}^{p,\bullet}$ для каждого p.

Предложение 64. *Отображение δ является дифференциалом на $\mathcal{D}^{\bullet,q}$ для каждого $q \in \mathbb{Z}$. Более того, дважды градуированное векторное пространство $\mathcal{D}^{\bullet,\bullet}$ вместе с δ и d образует двойной комплекс, т.е. $d\delta = \delta d$.*

Предложение 65. *Комплекс*

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathcal{D}^{-1,q} & \xrightarrow{\delta} & \mathcal{D}^{0,q} & \xrightarrow{\delta} & \mathcal{D}^{1,q} & \xrightarrow{\delta} & \dots \\ & & \| & & & & & & \\ & & A^q(X) & & & & & & \end{array}$$

является точным.

Доказательство. Доказательство аналогично доказательству предложения 70 ниже и основывается на лемме 63. В данном случае можно использовать разложение единицы $t_v, v \in V(X)$, вместо $\rho_v, v \in V(X)$. □

6.2 Алгебраические формы де Рама на комбинаторном симплициальном комплексе

В данной главе мы рассматриваем комбинаторные симплициальные комплексы, см. параграф 1.4. В этом параграфе $A^0(X)$ — это алгебра полиномиальных функций на комбинаторном симплициальном комплексе X, см. параграф 6.1. Включение комбинаторных симплициальных комплексов $Y \subset X$ порождает морфизм ограничения dg-алгебр

$$|_Y : \Omega^\bullet_{A^0(X)} \to \Omega^\bullet_{A^0(Y)}.$$

Из леммы 6 и леммы 63 следует, что для вложения комбинаторных симплициальных комплексов $Y \subset X$ морфизм ограничения $|_Y : \Omega^\bullet_{A^0(X)} \to \Omega^\bullet_{A^0(Y)}$ является сюръективным.

Напомним, как в параграфе 6.1 строились элементы $t_v \in A^0(X)$. Для вершины $v \in V(X)$ и m-симплекса $a \in X$ положим $(t_v)_a = 0$, если $v \notin a$, и $(t_v)_a = t_v \in A^0(a)$, если $v \in a$.

Лемма 66. *Пусть X — комбинаторный симплициальный комплекс и $Y \subset X$ — подкомплекс. Предположим, что $\omega \in \Omega^q_{A^0(Y)}$ такой, что $\omega|_{\operatorname{St}_Y(v)} = 0$ для некоторой вершины $v \in V(X)$. Тогда $t_v^2|_Y \omega = 0$.*

Доказательство. Если $v \notin V(Y)$, то $t_v|_Y = 0$, чего достаточно. Пусть $v \in V(Y)$. По лемме 63 и лемме 6 форма ω лежит в dg-идеале I dg-алгебры $\Omega^\bullet_{A^0(X)}$, порожденном элементами $m \in A^0(X)$ с ограничениеми на $\operatorname{St}_Y(v)$ равными нулю, поэтому $t_v|_Y m = 0$. Достаточно рассмотреть случаи $\omega = m$ и $\omega = dm$. Мы имеем $t_v^2|_Y m = 0$ и $t_v^2|_Y\, dm = t_v|_Y\, d(t_v|_Y\, m) - t_v|_Y\, m dt_v|_Y = 0$. □

Введем дважды градуированное векторное пространство $\mathcal{C}^{p,q}$, $p,q \in \mathbb{Z}$ следующим образом. Для $p \leqslant -2$ положим $\mathcal{C}^{p,q} = 0$, а для $p \geqslant -1$ определим $\mathcal{C}^{p,q}$ как подпространство пространства

$$\prod_{u \in T_p(X)} \Omega^q_{A^0(\operatorname{St} u)},$$

состоящее из семейств форм $\omega_u \in \Omega^q_{A^0(\operatorname{St} u)}$, таких что для любого $\sigma \in \Sigma_{p+1}$ выполняется

$$\omega_{\sigma u} = (\operatorname{sgn} \sigma)\omega_u.$$

Определим линейное отображение

$$\delta : \mathcal{C}^{p,q} \to \mathcal{C}^{p+1,q}.$$

Для $p \geqslant -1$ и для

$$\omega = (\omega_u)_{u \in T_p(X)} \in \mathcal{C}^{p,q}$$

мы задаем значение $\delta\omega$ на $s \in T_{p+1}(X)$ как

$$(\delta\omega)_s = \sum_{i=0}^{p+1} (-1)^i \omega_{\partial_i s}|_{\mathrm{St}\, s}.$$

Дифференциал d на $\Omega^\bullet_{A^0(\mathrm{St}\, u)}$ индуцирует дифференциал d на $\mathcal{C}^{p,\bullet}$ для каждого p.

Предложение 67. *Отображение δ является дифференциалом на $\mathcal{C}^{\bullet,q}$ для каждого $q \in \mathbb{Z}$. Более того, дважды градуированное векторное пространство $\mathcal{C}^{\bullet,\bullet}$ вместе с δ и d образует двойной комплекс, т.е. $d\delta = \delta d$.*

Лемма 68. *Существуют элементы $p_v \in A^0(X), v \in V(X)$, такие что*

$$\sum_{v \in V(X)} p_v t_v^2 = 1.$$

Доказательство. В $A^0(X)$ мы имеем равенство

$$\sum_{v \in V(X)} t_v = 1.$$

Возведем обе части в достаточно большую степень и получим требуемое равенство. □

Положим $\rho_v = p_v t_v^2$. Для включения комбинаторных симплициальных комплексов $Y \subset X$ зафиксируем линейное отображение, «выделенное продолжение»,

$$[-] : \Omega^q_{A^0(Y)} \to \Omega^q_{A^0(X)},$$

такое что $[\omega]|_Y = \omega$. Такое продолжение существует по лемме 63, примененной к $A^0(X)$, и лемме 6.

Лемма 69. *Для включения комбинаторных симплициальных комплексов $Y \subset X$ и формы $\omega \in \Omega^q_{A^0(Y)}$ имеем*

$$\sum_{v \in V(X)} \rho_v [\omega|_{\mathrm{St}_Y(v)}]|_Y = \omega.$$

Доказательство. Так как $\sum_v \rho_v = 1$ в $A^0(X)$, мы имеем

$$\sum_{v\in V(X)} \rho_v[\omega|_{\operatorname{St}_Y(v)}]|_Y - \omega = \sum_{v\in V(X)} \rho_v|_Y \left([\omega|_{\operatorname{St}_Y(v)}]|_Y - \omega\right).$$

Тогда

$$\left([\omega|_{\operatorname{St}_Y(v)}]|_Y - \omega\right)|_{\operatorname{St} Y(v)} = \omega|_{\operatorname{St} Y(v)} - \omega|_{\operatorname{St}_Y(v)} = 0.$$

Следовательно, по лемме 66 получаем $\rho_v|_Y \left([\omega|_{\operatorname{St}_Y(v)}]|_Y - \omega\right) = 0$. □

Предложение 70. *Комплекс*

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathcal{C}^{-1,q} & \xrightarrow{\delta} & \mathcal{C}^{0,q} & \xrightarrow{\delta} & \mathcal{C}^{1,q} & \xrightarrow{\delta} & \dots \\ & & \| & & & & & & \\ & & \Omega^q_{A^0(X)} & & & & & & \end{array}.$$

является точным.

Доказательство следует доказательству [10, Proposition 8.5].

Доказательство. Заметим, что

$$\operatorname{St}(v * u) = \operatorname{St}_{\operatorname{St} u}(v).$$

Для $u \in T_p(X)$ и $\omega \in \Omega^q_{A^0(\operatorname{St} u)}$ по лемме 69 мы имеем

$$\sum_{v\in V(X)} \rho_v[\omega|_{\operatorname{St} v*u}]|_{\operatorname{St} u} = \omega. \tag{6.1}$$

Для $\omega \in \Omega^q_{A^0(Z)}$, где Z — подкомплекс комплекса X такой, что $\operatorname{St} v * u \subset Z$, по лемме 66 имеем

$$\rho_v\left([\omega] - [\omega|_{\operatorname{St} v*u}]\right)|_{\operatorname{St} u} = 0. \tag{6.2}$$

Построим коцепную гомотопию

$$K : \mathcal{C}^{p,q} \to \mathcal{C}^{p-1,q}.$$

Для $p \geqslant 0$ и $\omega \in \mathcal{C}^{p,q}$ и $w \in T_{p-1}(X)$ положим

$$(K\omega)_w := \sum_{v\in V(X)} \rho_v[\omega_{v*w}]|_{\operatorname{St} w}.$$

По лемме 66 это отображение не зависит от выбора выделенного продолжения. Проверим, что $\delta K + K\delta = 1$. Для $p \geqslant -1$ и

$$\omega = (\omega_u)_{u \in T_p(X)} \in \mathcal{C}^{p,q} \subset \prod_{u \in T_p(X)} \Omega^q_{A^0(\operatorname{St} u)},$$

где $\omega_u \in \Omega^q_{A^0(\operatorname{St} u)}$, мы имеем

$$(\delta K \omega)_u = \sum_{i=0}^{p} (-1)^i (K\omega)_{\partial_i u}|_{\operatorname{St} u} = \sum_{i=0}^{p} (-1)^i \sum_{v \in V(X)} \rho_v[\omega_{v*\partial_i u}]|_{\operatorname{St} u},$$

и

$$(K\delta\omega)_u = \sum_{v \in V(X)} \rho_v[(\delta\omega)_{v*u}]|_{\operatorname{St} u} =$$

$$= \sum_{v \in V(X)} \rho_v[\sum_{i=0}^{p+1} (-1)^i \omega_{\partial_i(v*u)}|_{\operatorname{St} v*u}]|_{\operatorname{St} u} =$$

$$= \sum_{v \in V(X)} \rho_v[\omega_u|_{\operatorname{St} v*u}]|_{\operatorname{St} u} + \sum_{v \in V(X)} \rho_v[\sum_{i=1}^{p+1} (-1)^i \omega_{\partial_i(v*u)}|_{\operatorname{St} v*u}]|_{\operatorname{St} u} \overset{\text{равенство 6.1}}{=}$$

$$= \omega_u - \sum_{v \in V(X)} \rho_v[\sum_{i=0}^{p} (-1)^i \omega_{v*\partial_i u}|_{\operatorname{St} v*u}]|_{\operatorname{St} u}$$

$$= \omega_u - \sum_{i=0}^{p} (-1)^i \sum_{v \in V(X)} \rho_v[\omega_{v*\partial_i u}|_{\operatorname{St} v*u}]|_{\operatorname{St} u}.$$

Следовательно,

$$((\delta K + K\delta)\omega)_u = \omega_u + \sum_{i=0}^{p} (-1)^i \sum_{v \in V(X)} \rho_v\left([\omega_{v*\partial_i u}] - [\omega_{v*\partial_i u}|_{\operatorname{St} v*u}]\right)|_{\operatorname{St} u} \overset{\text{равенство 6.2}}{=} \omega_u.$$

□

6.3 Квазиизоморфизм $P : \Omega^\bullet_{A^0(X)} \to A^\bullet(X)$

Для комбинаторного симплициального комплекса X, согласно универсальному свойству $\Omega^\bullet_{A^0(X)}$, существует канонический морфизм dg-алгебр

$$P : \Omega^\bullet_{A^0(X)} \to A^\bullet(X),$$

который является тождественным в степени 0. Элемент из k порождает постоянную функцию в $A^0(X)$, следовательно, существуют морфизмы комплексов $\varepsilon : k[0] \to \Omega^\bullet_{A^0(X)}$ и $\bar{\varepsilon} : k[0] \to A^\bullet(X)$ такие, что $\bar{\varepsilon} = P \circ \varepsilon$.

Предложение 71. *Для последовательности $u \in T_p(X)$, $p \geqslant 0$, коммутативная диаграмма*

$$\begin{array}{ccc} k[0] & \xrightarrow{\varepsilon} & \Omega^\bullet_{A^0(\mathrm{St}\, u)} \\ & \searrow^{\bar{\varepsilon}} & \downarrow P \\ & & A^\bullet(\mathrm{St}\, u) \end{array}$$

состоит из квазиизоморфизмов.

Доказательство. Отображение ε является квазиизоморфизмом согласно предложению 58. Отображение $\bar{\varepsilon}$ является квазиизоморфизмом согласно [14, Theorem 10.9]. Следовательно, морфизм P является квазиизоморфизмом. □

Теорема 72. *Естественное отображение*

$$P : \Omega^\bullet_{A^0(X)} \to A^\bullet(X)$$

является квазиизоморфизмом.

Доказательство. Морфизм P на звездах порождает отображения $\pi_p : \mathcal{C}^{p,\bullet} \to \mathcal{D}^{p,\bullet}$ для каждого $p \geqslant 0$. Имеем коммутативную диаграмму неотрицательных комплексов

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \Omega^\bullet_{A^0(X)} & \xrightarrow{\delta} & \mathcal{C}^{0,\bullet} & \xrightarrow{\delta} & \mathcal{C}^{1,\bullet} & \xrightarrow{\delta} & \dots \\ & & \downarrow P & & \downarrow \pi_0 & & \downarrow \pi_1 & & \\ 0 & \longrightarrow & A^\bullet(X) & \xrightarrow{\delta} & \mathcal{D}^{0,\bullet} & \xrightarrow{\delta} & \mathcal{D}^{1,\bullet} & \xrightarrow{\delta} & \dots . \end{array}$$

Вертикальные стрелки π_p, $p \geqslant 0$, являются квазиизоморфизмами согласно следствию 71. Первая строка точна согласно предложению 70. Вторая строка точна согласно предложению 65. Следовательно, отображение P также является квазиизоморфизмом. □

Замечание. Как было сказано во введении, в работе [20] утверждается, что теорема 72 неверна. А именно, в [20, Example 3.8] рассматривается комбинаторный симплициальный комплекс X, соответствующий границе треугольника с вершинами 1, 2, 3. dg-алгебра $\Omega^\bullet_{A^0(X)}$ порождается элементами t_1, t_2, t_3 по модулю

dg-идеала, порожденного $t_1 + t_2 + t_3 - 1$ и $t_1 t_2 t_3$. Далее, автор рассматривает форму $t_1^2 t_2^2 dt_3$ и утверждает, что эта форма отлична от нуля. Однако, эта форма равна нулю, что можно увидеть следующим образом: применяя дифференциал d к равенству $t_1 t_2 t_3 = 0$, получаем

$$t_2 t_3 dt_1 + t_1 t_3 dt_2 + t_1 t_2 dt_3 = 0.$$

Далее, умножая это равенство на $t_1 t_2$, получаем

$$0 = t_1 t_2^2 t_3 dt_1 + t_1^2 t_2 t_3 dt_2 + t_1^2 t_2^2 dt_3 = t_1^2 t_2^2 dt_3.$$

6.4 Отображение $\Psi_{A^0(X)}$

В данном параграфе полем k будет являться поле $\mathbb{R}$. Для комбинаторного симплициального комплекса X будем обозначать через $|X|$ его геометрическую реализацию. Для симплекса $s \in X$ имеем аффинный симплекс $|s| \subset |X|$. Каждый элемент алгебры $A^0(s)$ представляет гладкую функцию на $|s|$. Каждый элемент алгебры $A^0(X)$ представляет непрерывную функцию на $|X|$. Следующая диаграмма коммутативна:

$$\begin{array}{ccccc} A^0(X) & & \hookrightarrow & & C(|X|) \\ \downarrow{\scriptstyle |_s} & & & & \downarrow{\scriptstyle |_{|s|}} \\ A^0(s) & \hookrightarrow & C^\infty(|s|) & \hookrightarrow & C(|s|). \end{array}$$

6.4.1 Канонический изоморфизм $\Pi : \mathrm{H}^*(A^\bullet(X)) \to \mathbb{H}^*(|X|, \underline{\mathbb{R}}_{|X|}[0])$

Хорошо известно, что когомологии $\mathrm{H}^*(A^\bullet(X))$ изоморфны стандартным когомологиям пространства $|X|$, см. [14, § 10, (e)]. Нам понадобится конкретная конструкция такого изоморфизма.

Пусть $\sigma : \Delta^n \to |X|$ — аффинный сингулярный симплекс. Каждый такой симплекс пропускается через некоторый симплекс $|s|$, где $s \in X$. Имеем следующую коммутативную диаграмму, где все стрелки являются гомоморфизмами

алгебр, а в нижней строке все стрелки являются морфизмами dg-алгебр:

$$\begin{array}{ccccccc} A^0(X) & \xrightarrow{|_s} & A^0(s) & \longrightarrow & C^\infty(|s|) & \xrightarrow{\sigma^*} & C^\infty(\Delta^n) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ A^\bullet(X) & \xrightarrow{|_s} & A^\bullet(s) & \longrightarrow & \Omega^\bullet(|s|) & \xrightarrow{\sigma^*} & \Omega^\bullet(\Delta^n). \end{array}$$

$$\nu(\sigma)$$

Здесь морфизм dg-алгебр $A^\bullet(s) \to \Omega^\bullet(|s|)$ однозначно определен коммутативностью среднего квадрата, так как $A^\bullet(s) = \Omega^\bullet_{A^0(s)|\mathbb{R}}$. Нетрудно убедиться, что $\nu(\sigma)$ не зависит от выбора симплекса s.

Каждой форме $\omega \in A^n(X)$ сопоставим аффинную сингулярную коцепь $\tau(\omega) \in \mathrm{S}^n_{\mathrm{aff}}(|X|)$ формулой

$$\tau(\omega)(\sigma) = \mathfrak{T}_n(\nu(\sigma)),$$

см. пункт 3.1.2(4). Получим морфизм комплексов

$$\tau : A^\bullet(X) \to \mathrm{S}^\bullet_{\mathrm{aff}}(|X|).$$

Известно, что τ является квазиизоморфизмом.

Имеем квазиизоморфизм коаугментации $\varepsilon : \underline{\mathbb{R}}_{|X|}[0] \to {}^+\mathrm{S}^\bullet_{\mathrm{aff},|X|}$. Изоморфизм $\Pi : \mathrm{H}^*(A^\bullet(X)) \to \mathbb{H}^*(|X|, \underline{\mathbb{R}}_{|X|}[0])$ задается коммутативной диаграммой

$$\begin{array}{ccccccc} \mathrm{H}^*(A^\bullet(X)) & \xrightarrow{\mathrm{H}^*(\tau)} & \mathrm{H}^*(\mathrm{S}^\bullet_{\mathrm{aff}}(|X|)) & \xrightarrow{\mathrm{H}^*(\mathrm{sh})} & \mathrm{H}^*({}^+\mathrm{S}^\bullet_{\mathrm{aff},|X|}(|X|)) & \xrightarrow{\Upsilon} & \mathbb{H}^*(|X|, {}^+\mathrm{S}^\bullet_{\mathrm{aff},|X|}) \\ & \searrow^{\Pi} & & & & & \uparrow{\scriptstyle \mathbb{H}^*(\varepsilon)} \\ & & & & & & \mathbb{H}^*(|X|, \underline{\mathbb{R}}_{|X|}[0]). \end{array}$$

Здесь отображения $\mathrm{H}^*(\mathrm{sh})$ и Υ являются изоморфизмами, ср. параграф 1.2.

6.4.2 Идентификация отображения $\Psi_{A^0(X)}$

Включение $A^0(X) \to C(|X|)$ задает непрерывное отображение $\Gamma_{A^0(X)} : |X| \to \mathrm{spec}_{\mathbb{R}} A^0(X)$ (несложно видеть, что $\Gamma_{A^0(X)}$ является инъективной гомотопической эквивалентностью).

Лемма 73. *Для аффинного сингулярного симплекса* $\sigma : \Delta^n \to |X|$ *следующая диаграмма dg-алгебр коммутативна.*

$$\begin{array}{ccc} \Omega^\bullet_{A^0(X)|\mathbb{R}} & \xrightarrow{\nu(\sigma)} & \Omega^\bullet(\Delta^n) \\ & \searrow^{\mu(\Gamma_{A^0(X)}\circ\sigma)} & \downarrow{\scriptstyle \nabla} \\ & & \Omega^\bullet_\flat(\Delta^n). \end{array}$$

Отображение ∇ введено в пункте 3.1.2(3). Отображение μ введено в пункте 3.2.1.

Доказательство. Аффинный сингулярный симплекс $\sigma : \Delta^n \to |X|$ пропускается через геометрическую реализацию некоторого симплекса $s \in X$. Непосредственно проверяется, что следующая диаграмма гомоморфизмов алгебр коммутативна:

$$\begin{array}{ccccccc} A^0(X) & \xrightarrow{|_s} & A^0(s) & \hookrightarrow & C^\infty(|s|) & \xrightarrow{\sigma^*} & C^\infty(\Delta^n) \\ & \searrow^{\theta(\Gamma_{A^0(X)}\circ\sigma)} & & & & & \downarrow{\scriptstyle i} \\ & & & & & & \mathrm{Lip}(\Delta^n), \end{array}$$

где θ введено в пункте 3.2.1. Следовательно, необходимая диаграмма dg-алгебр коммутативна по универсальному свойству $\Omega^\bullet_{A^0(X)}$ и определениям ∇, μ и ν. □

Теорема 74. *Следующая диаграмма коммутативна:*

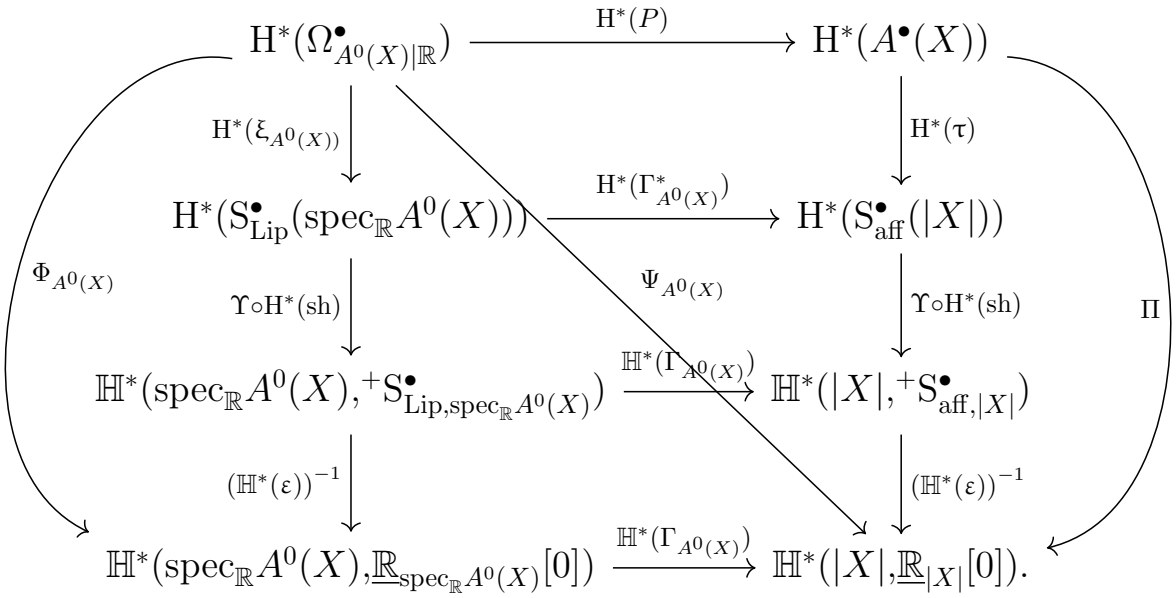
$$\begin{array}{ccc} \mathrm{H}^*(\Omega^\bullet_{A^0(X)|\mathbb{R}}) & \xrightarrow{\mathrm{H}^*(P)} & \mathrm{H}^*(A^\bullet(X)) \\ & \searrow^{\Psi_{A^0(X)}} & \downarrow{\scriptstyle \Pi} \\ & & \mathbb{H}^*(|X|, \underline{\mathbb{R}}_{|X|}[0]). \end{array}$$

Доказательство. Рассмотрим диаграмму комплексов

$$\begin{array}{ccc} \Omega^\bullet_{A^0(X)|\mathbb{R}} & \xrightarrow{P} & A^\bullet(X) \\ \downarrow{\scriptstyle \xi_{A^0(X)}} & & \downarrow{\scriptstyle \tau} \\ \mathrm{S}^\bullet_{\mathrm{Lip}}(\mathrm{spec}_{\mathbb{R}} A^0(X)) & \xrightarrow{\Gamma^*_{A^0(X)}} & \mathrm{S}^\bullet_{\mathrm{aff}}(|X|), \end{array}$$

где ξ введено в пункте 3.2.2. Данная диаграмма коммутативна по лемме 73 определениям ξ и τ и диаграмме пункта 3.1.2(4).

Рассмотрим диаграмму



Верхний квадрат коммутативен по сказанному выше. Средний квадрат коммутативен по естественности sh и Υ. Нижний квадрат очевидно коммутативен. Правый криволинейный четырехугольник — определение отображения Π. Левый криволинейный четырехугольник — определение отображения $\Phi_{A^0(X)}$, см. пункт 3.2.3. Треугольник с отображениями $\Phi_{A^0(X)}$, $\Psi_{A^0(X)}$ — определение отображения $\Psi_{A^0(X)}$. Следовательно, нужная диаграмма коммутативна. □

6.4.3 Отображение $\Psi_{A^0(X)}$ является изоморфизмом

Предложение 75. *Отображение*

$$\Psi_{A^0(X)} : \mathrm{H}^*(\Omega^\bullet_{A^0(X)|\mathbb{R}}) \to \mathbb{H}^*(|X|, \underline{\mathbb{R}}_{|X|}[0])$$

является изоморфзимом.

Доказательство. Следует из теоремы 72 и теоремы 74. □

Глава 7. Расщепление для произвольной алгебры функций

7.1 Пространство $\mathrm{H}^0(\Omega^\bullet_{A|k})$ для алгебры функций A

Пусть k — поле.

Определение. Элементы $a_1,\dots,a_n$ k-алгебры A называются *алгебраически независимыми над* k, если нет ненулевого многочлена q над k такого, что $q(a_1,\dots,a_n)=0$. Элемент a называется *алгебраическим над* k, если существует ненулевой многочлен p над k такой, что $p(a)=0$.

Лемма 76. *Пусть A — k-алгебра. Если элементы $a_1,\dots,a_n$ алгебры A алгебраически независимы над k, то существует простой идеал $\mathfrak{p}\subset A$ такой, что образы $a_1,\dots,a_n$ в $A/\mathfrak{p}$ алгебраически независимы над k.*

Доказательство. См. [18, Proposition 6]. □

Лемма 77. *Пусть k — поле характеристики 0 и K/k — расширение полей. Рассмотрим дифференциал $d: K\to\Omega^1_{K|k}$. Тогда для $x\in K$ равенство $dx=0$ выполнено тогда и только тогда, когда x алгебраичен над k.*

Доказательство. См. [33, §26]. □

Лемма 78. *Пусть k — поле характеристики 0 и A — k-алгебра. Пусть элемент $a\in A$ такой, что $da=0$ в $\Omega^1_{A|k}$. Тогда a алгебраичен.*

Это [18, Proposition 7], где предположение о том, что характеристика равна нулю, неявно подразумевается.

Доказательство. Предположим, что a трансцендентно. По лемме 76 существует простой идеал $\mathfrak{p}\subset A$ такой, что образ $\bar a$ элемента a в $A/\mathfrak{p}$ трансцендентен. Следовательно, $\bar a$ трансцендентно в поле частных $\mathrm{Frac}(A/\mathfrak{p})$. По лемме 77 $d\bar a\neq 0$ в $\Omega^1_{\mathrm{Frac}(A/\mathfrak{p})|k}$, что противоречит предположению. □

Мы называем подалгебру A алгебры $\mathrm{Maps}(X,k)$ *алгеброй функций* на множестве X.

Теорема 79. *Пусть A — алгебра функций на X и $a \in A$. Тогда $da = 0$ в $\Omega^1_{A|k}$ тогда и только тогда, когда a принимает конечное число значений.*

Эта теорема доказана в [18, proof of Theorem 8]. Мы приводим доказательство, которое отличается в части «тогда». Связанным результатом является [34, Proposition 3].

Доказательство. Сначала предположим, что $da = 0$. Согласно лемме 78 существует ненулевой многочлен p такой, что $p(a) = 0$. Следовательно, a принимает конечное число значений. Обратно, предположим, что a принимает различные значения $r_1, \dots, r_m \in k$ и рассмотрим многочлен $q(t) = (t - r_1) \dots (t - r_m)$. Ясно, что $q(a) = 0$ и $\gcd(q, q') = 1$. Следовательно, существуют многочлены $h_0, h_1 \in k[t]$ такие, что $h_0 q + h_1 q' = 1$. Подставляя a в это равенство, получаем $h_1(a)q'(a) = 1$; следовательно, $q'(a)$ обратим. Взяв равенство $q(a) = 0$ и применив d к обеим частям, получаем $q'(a)da = 0$ и, следовательно, $da = 0$. □

Следствие 80. *Пусть A — алгебра функций на пространстве X. Тогда $\mathrm{H}^0(\Omega^\bullet_{A|k})$ — это векторное пространство функций $a \in A$, которые принимают конечное число значений.*

Связанным результатом является [34, Proposition 5].

Предложение 81. *Для мягкого подпучка алгебр $\mathcal{F} \hookrightarrow C_X$ на компактном хаусдорфовом пространстве X отображение $\Lambda_{\mathcal{F}} : \mathbb{H}^0(X, \underline{\mathbb{R}}[0]) \to \mathrm{H}^0(\Omega^\bullet_{\mathcal{F}(X)|\mathbb{R}})$ является изоморфизмом.*

Доказательство. Согласно следствию 80, пространство $\mathrm{H}^0(\Omega^\bullet_{\mathcal{F}(X)|\mathbb{R}})$ состоит из функций $f \in \mathcal{F}(X)$, которые принимают конечное число значений. Так как $\mathcal{F}$ является подпучком C_X и X компактно, функции из $\mathcal{F}(X)$, принимающие конечное число значений, в точности являются локально постоянными функциями из $\mathcal{F}(X)$. Морфизм пучков алгебр $\underline{\mathbb{R}}_X \to \mathcal{F}$ индуцирует гомоморфизм $\underline{\mathbb{R}}_X(X) \to \mathcal{F}(X) = \Omega^0_{\mathcal{F}(X)|\mathbb{R}}$. Как было сказано выше, этот гомоморфизм может быть продолжен до морфизма комплексов $\tilde{\varepsilon} : \underline{\mathbb{R}}_X(X)[0] \to \Omega^\bullet_{\mathcal{F}(X)|\mathbb{R}}$ и $\mathrm{H}^*(\tilde{\varepsilon})$ является изоморфизмом в степени 0. Коаугментация $\varepsilon : \underline{\mathbb{R}}_X[0] \to {}^+\Omega^\bullet_{\mathcal{F}|\mathbb{R}}$ индуцирует морфизм комплексов $\varepsilon(X) : \underline{\mathbb{R}}_X(X)[0] \to {}^+\Omega^\bullet_{\mathcal{F}|\mathbb{R}}(X)$. Следующая диаграмма

коммутативна:

$$\begin{array}{ccc} \underline{\mathbb{R}}_X(X)[0] & & \\ \downarrow{\scriptstyle \varepsilon(X)} & \searrow^{\tilde{\varepsilon}} & \\ {}^{+}\Omega^{\bullet}_{\mathcal{F}|\mathbb{R}}(X) & \xleftarrow[\mathrm{sh}]{} & \Omega^{\bullet}_{\mathcal{F}(X)|\mathbb{R}}. \end{array}$$

Рассмотрим диаграмму:

$$\begin{array}{ccccc} & & \overset{\Lambda_{\mathcal{F}}}{\frown} & & \\ \mathbb{H}^0(X,\underline{\mathbb{R}}_X[0]) & \xleftarrow[\Upsilon]{\cong} & \mathrm{H}^0(\underline{\mathbb{R}}_X(X)[0]) & & \\ \downarrow{\scriptstyle \mathbb{H}^*(\varepsilon)} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{H}^*(\varepsilon(X))} & \searrow^{\mathrm{H}^*(\tilde{\varepsilon})} & \\ \mathbb{H}^0(X,{}^{+}\Omega^{\bullet}_{\mathcal{F}|\mathbb{R}}) & \xleftarrow[\Upsilon]{\cong} & \mathrm{H}^0({}^{+}\Omega^{\bullet}_{\mathcal{F}|\mathbb{R}}(X)) & \xleftarrow[\mathrm{H}^*(\mathrm{sh})]{\cong} & \mathrm{H}^0(\Omega^{\bullet}_{\mathcal{F}(X)|\mathbb{R}}). \end{array}$$

Внешний контур коммутативен по определению $\Lambda_{\mathcal{F}}$. Правый треугольник коммутативен согласно приведенной диаграмме. Левый квадрат очевидно коммутативен. Следовательно, вся диаграмма коммутативна. Верхняя стрелка Υ является изоморфизмом. Значит, $\Lambda_{\mathcal{F}}$ является изоморфизмом. □

Следствие 82. *Для мягкого подпучка алгебр $\mathcal{F} \hookrightarrow C_X$ на компактном хаусдорфовом пространстве X отображение*

$$\Psi_{\mathcal{F}(X)} : \mathrm{H}^0(\Omega^{\bullet}_{\mathcal{F}(X)|\mathbb{R}}) \to \mathbb{H}^0(X,\underline{\mathbb{R}}[0])$$

является изоморфизмом.

Доказательство. Это следует непосредственно из предложения 81 и теоремы 40. □

7.2 Отображения Λ and Ψ не являются изоморфизмами в общем случае

Лемма 83. *Пусть k имеет характеристику 0. Пусть F/k — расширение полей и L/F — конечное расширение полей. Тогда отображение*

$$\mathrm{H}^*(\Omega_i) : \mathrm{H}^*(\Omega^{\bullet}_{F|k}) \to \mathrm{H}^*(\Omega^{\bullet}_{L|k}),$$

индуцированное вложением $i : F \hookrightarrow L$, является инъективным.

Доказательство. Существует морфизм комплексов $\Sigma : \Omega^\bullet_{L|k} \to \Omega^\bullet_{F|k}$ со следующими свойствами (см. [30, §16]):

1. если рассматривать $\Omega^\bullet_{L|k}$ как $\Omega^\bullet_{F|k}$-модуль, то Σ является $\Omega^\bullet_{F|k}$-линейным;
2. ограничение морфизма Σ на элементы степени 0 совпадает со следом $\sigma : L \to F$.

Следовательно, композиция

$$\Omega^\bullet_{F|k} \xrightarrow{\Omega_i} \Omega^\bullet_{L|k} \xrightarrow{\Sigma} \Omega^\bullet_{F|k}$$

является умножением на $\sigma(1) = [L : F]$. Поскольку k имеет характеристику ноль, отображение $\mathrm{H}^*(\Omega_i)$ является инъективным. □

Лемма 84. *Пусть K/k — расширение полей, где K — бесконечное поле, и $K(\Gamma)/K$, где $\Gamma = \{\gamma_1, \ldots, \gamma_l\}$, — чисто трансцендентное расширение. Тогда отображение*

$$\mathrm{H}^*(\Omega_i) : \mathrm{H}^*(\Omega^\bullet_{K|k}) \to \mathrm{H}^*(\Omega^\bullet_{K(\Gamma)|k}),$$

индуцированное вложением $i : K \hookrightarrow K(\Gamma)$, является инъективным.

Доказательство. Поле $K(\Gamma)$ является копределом по конечным множествам $S \subset K[\Gamma] - \{0\}$ локализаций $K[\Gamma]$:

$$K(\Gamma) \cong \varinjlim_{S \subset K[\Gamma] - \{0\}} K[\Gamma][S^{-1}].$$

Следовательно, достаточно доказать, что отображение

$$\mathrm{H}^*(\Omega_{i_S}) : \mathrm{H}^*(\Omega^\bullet_{K|k}) \to \mathrm{H}^*(\Omega^\bullet_{K[\Gamma][S^{-1}]|k}),$$

индуцированное включением $i_S : K \hookrightarrow K[\Gamma][S^{-1}]$, инъективно для каждого S. Существует точка $(\bar\gamma_1, \ldots, \bar\gamma_l) \in K^l$, которая не является нулем ни для одного элемента из S. Рассмотрим гомоморфизм $K[\Gamma] \to K$, $\gamma_j \mapsto \bar\gamma_j$. По универсальному свойству локализации его можно расширить до гомоморфизма $\tau : K[\Gamma][S^{-1}] \to K$ такого, что $\tau|_K$ является тождественным отображением. Следовательно, композиция

$$\mathrm{H}^*(\Omega^\bullet_{K|k}) \xrightarrow{\mathrm{H}^*(\Omega_{i_S})} \mathrm{H}^*(\Omega^\bullet_{K[\Gamma][S^{-1}]|k}) \xrightarrow{\mathrm{H}^*(\Omega_\tau)} \mathrm{H}^*(\Omega^\bullet_{K|k})$$

является тождественным отображением, из чего нужное утверждение следует. □

Лемма 85. *Пусть характеристика k равна нулю. Уравнение*

$$\sum_{i=1}^{n} x_i(\partial/\partial x_i)F_i = c, \tag{7.1}$$

где $c \in k$ и $c \neq 0$, не имеет решений в рациональных функциях $F_i \in k(x_1, \ldots, x_n)$.

Доказательство. Доказательство проводится индукцией по n. Для $n = 0$ утверждение очевидно. Возьмем $l \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ такое, что x_1 не является множителем в знаменателе $x_1^l F_i$ для любого i. Умножим уравнение (7.1) на x_1^l и применим $(\partial/\partial x_1)^l$ к обеим частям уравнения. Получим

$$\sum_{i=1}^{n} (\partial/\partial x_1)^l (x_1^l x_i(\partial/\partial x_i)F_i) = l!c.$$

Заметим, что операторы $x(\partial/\partial x)$ и $(\partial/\partial x)^l x^l$ коммутируют. Это легко проверяется индукцией. Следовательно, операторы $x_i(\partial/\partial x_i)$ и $(\partial/\partial x_j)^l x_j^l$ коммутируют для любых i и j. Получаем

$$\sum_{i=1}^{n} x_i(\partial/\partial x_i)\,(\partial/\partial x_1)^l\,(x_1^l F_i) = l!c.$$

Положим $G_i := (\partial/\partial x_1)^l (x_1^l F_i)$. Получаем

$$\sum_{i=1}^{n} x_i(\partial/\partial x_i)G_i = l!c.$$

Но ни один из G_i не имеет x_1 в знаменателе, поэтому мы можем подставить $x_1 := 0$ в последнее уравнение и получить

$$\sum_{i=2}^{n} x_i(\partial/\partial x_i)(G_i|_{x_1=0}) = l!c.$$

По индукционному предположению это уравнение не имеет решений в рациональных функциях. □

Лемма 86. *Пусть характеристика k равна нулю. Замкнутая форма*

$$\omega = \frac{dx_1}{x_1} \wedge \cdots \wedge \frac{dx_n}{x_n} \in \Omega^n_{k(x_1,\ldots,x_n)|k}$$

не является точной.

Доказательство. Предположим, что существует $\eta \in \Omega^{n-1}_{k(x_1,\dots,x_n)|k}$ такая, что $d\eta = \omega$. Запишем η в виде

$$\eta = \sum_{i=1}^{n} F_i dx_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \dots \wedge dx_n,$$

где $F_i \in k(x_1,\dots,x_n)$. Тогда

$$d\eta = \left[\sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} (\partial/\partial x_i) F_i\right] dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n.$$

Равенство $d\eta = \omega$ тогда принимает вид

$$\left[\sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} (\partial/\partial x_i) F_i\right] dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n = \frac{1}{x_1 \dots x_n} dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n.$$

Вектор $dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$ в векторном пространстве $\Omega^n_{k(x_1,\dots,x_n)|k}$ над полем $k(x_1,\dots,x_n)$ не равен нулю, см. [33, с. 201]. Следовательно,

$$\sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} (\partial/\partial x_i) F_i = \frac{1}{x_1 \dots x_n}.$$

Положим $G_i := (-1)^{i+1} x_1 \dots \hat{x}_i \dots x_n F_i$. Тогда вышеприведенное уравнение принимает вид

$$\sum_{i=1}^{n} x_i (\partial/\partial x_i) G_i = 1.$$

Согласно лемме 85 это уравнение не имеет решений в рациональных функциях. □

Теорема 87. *Пусть k имеет характеристику 0. Возьмем k-алгебру A и набор обратимых элементов $a_1,\dots,a_n$ в A, которые являются алгебраически независимыми над k. Тогда замкнутая форма*

$$\omega = \frac{da_1}{a_1} \wedge \dots \wedge \frac{da_n}{a_n} \in \Omega^n_{A|k}$$

не является точной.

Доказательство. Согласно лемме 7 достаточно рассмотреть случай, когда A конечно порождена. Согласно лемме 76 существует простой идеал $\mathfrak{p} \subset A$ такой, что элементы $a_1,\dots,a_n$ останутся алгебраически независимыми в $A/\mathfrak{p}$.

Рассмотрим поле частных $\mathrm{Frac}(A/\mathfrak{p})$, которое конечно порождено над k как поле. Элементы $a_1,\dots,a_n$ являются алгебраически независимыми в $\mathrm{Frac}(A/\mathfrak{p})$. Рассмотрим конечный трансцендентный базис $\hat{\Gamma} = \{a_1,\dots,a_n,\gamma_1,\dots,\gamma_l\}$ поля $\mathrm{Frac}(A/\mathfrak{p})$ над k. Поле $\mathrm{Frac}(A/\mathfrak{p})$ является конечным расширением $k(\hat{\Gamma})$. Согласно лемме 83 и лемме 84 композиция $k(a_1,\dots,a_n) \to k(\hat{\Gamma}) \to \mathrm{Frac}(A/\mathfrak{p})$ индуцирует инъекцию на алгебраических когомологиях де Рама. Образ формы ω в $\Omega^n_{\mathrm{Frac}(A/\mathfrak{p})|k}$ совпадает с образом замкнутой формы

$$\omega_0 = \frac{da_1}{a_1} \wedge \dots \wedge \frac{da_n}{a_n} \in \Omega^n_{k(a_1,\dots,a_n)|k},$$

которая не является точной согласно лемме 86. □

Теорема 88. *Пусть X — топологическое пространство и $\varphi \in C(X)$ принимает бесконечное число различных значений. Рассмотрим подалгебру $A \subset C(X)$ такую, что $e^{\lambda\varphi} \in A$ для всех $\lambda \in \mathbb{R}$. Тогда для каждого $n \geqslant 1$ $\mathrm{H}^n(\Omega^\bullet_{A|\mathbb{R}}) \neq 0$. Более того, отображение*

$$\Psi_A : \mathrm{H}^n(\Omega^\bullet_{A|R}) \to \mathbb{H}^n(X,\underline{\mathbb{R}}_X[0])$$

не является инъективным.

Доказательство. Выберем набор линейно независимых над $\mathbb{Q}$ чисел $\lambda_1,\dots,\lambda_n \in \mathbb{R}$ и рассмотрим функции $a_i := e^{\lambda_i\varphi(x)} \in A$. Эти функции являются алгебраически независимыми и обратимыми, следовательно, замкнутая форма

$$\omega = \frac{da_1}{a_1} \wedge \dots \wedge \frac{da_n}{a_n} \in \Omega^n_{A|\mathbb{R}}$$

не является точной согласно теореме 87. Для доказательства второй части покажем, что $\Psi_A([\omega]) = 0$. Обозначим через $i : A \hookrightarrow C(X)$ включение. Рассмотрим алгебру $E \subset C(\mathbb{R})$, порожденную как алгебра функциями $e^{\lambda t} \in C(\mathbb{R})$. Имеем коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} C(X) & \longleftarrow & A \\ {\scriptstyle\varphi^*}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle\gamma} \\ C(\mathbb{R}) & \longleftarrow & E, \end{array}$$

где гомоморфизм γ индуцирован гомоморфизмом φ^*. Тогда следующая диаграмма коммутативна по предложению 26:

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{H}^n(\Omega^\bullet_{A|\mathbb{R}}) & \xrightarrow{\Psi_A} & \mathbb{H}^n(X,\underline{\mathbb{R}}_X[0]) \\ {\scriptstyle \mathrm{H}^*(\Omega_\gamma)}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle \mathbb{H}^*(\varphi,\gamma)} \\ \mathrm{H}^n(\Omega^\bullet_{E|\mathbb{R}}) & \xrightarrow{\Psi_E} & \mathbb{H}^n(\mathbb{R},\underline{\mathbb{R}}_{\mathbb{R}}[0])=0. \end{array}$$

Равенство $\mathbb{H}^n(\mathbb{R},\underline{\mathbb{R}}_{\mathbb{R}}[0]) = 0$ хорошо известно. Рассмотрим функции $\tilde{a}_i := e^{\lambda_i t} \in E$ и замкнутую форму

$$\tilde{\omega} = \frac{d\tilde{a}_1}{\tilde{a}_1} \wedge \cdots \wedge \frac{d\tilde{a}_n}{\tilde{a}_n} \in \Omega^n_{E|\mathbb{R}}.$$

Имеем $\omega = \Omega_\gamma(\tilde{\omega})$. Ввиду коммутативности вышеприведенной диаграммы, $\Psi_A([\omega]) = 0$. Так как $[\omega] \neq 0$, отображение Ψ_A не является инъективным. □

Следствие 89. *Пусть X — компактное хаусдорфово пространство и $\mathcal{F}$ — мягкий подпучок пучка C_X такой, что $\mathcal{F}(X)$ удовлетворяет условиям, наложенным на алгебру A в теореме 88. Тогда $\Lambda_{\mathcal{F}} : \mathbb{H}^n(X,\underline{\mathbb{R}}_X[0]) \to \mathrm{H}^n(\Omega^\bullet_{\mathcal{F}|\mathbb{R}})$ не является сюръективным.*

Доказательство. Согласно теореме 40 композиция $\Psi_{\mathcal{F}(X)} \circ \Lambda_{\mathcal{F}} = \mathrm{id}$. Согласно теореме 88 отображение $\Psi_{\mathcal{F}(X)}$ не является инъективным, следовательно, $\Lambda_{\mathcal{F}}$ не является сюръективным. □

В качестве примера можно рассмотреть гладкое многообразие M положительной размерности и $A = C^\infty(M)$. Тогда $\mathrm{H}^n(\Omega^\bullet_{C^\infty(M)|\mathbb{R}}) \neq 0$ для $n \geqslant 1$. Также можно рассмотреть бесконечное компактное хаусдорфово пространство X и $A = C(X)$. Тогда $\mathrm{H}^n(\Omega^\bullet_{C(X)|\mathbb{R}}) \neq 0$ для $n \geqslant 1$.

Публикации автора по теме диссертации

[1] Baskov, Igor. — «The de Rham cohomology of soft function algebras». — *New York Journal of Mathematics* 29 (2023), с. 1302—1340.

[2] Басков, И.С. — «Когомологии де Рама алгебры полиномиальных функций на симплициальном комплексе». — *Чебышевский сборник* 24 (2023), с. 203—212.

[3] Басков, И.С. — «Расщепление когомологий де Рама мягкой функциональной алгебры мультипликативно». — *Зап. научн. сем. ПОМИ* 543 (2025), с. 30—42.

Список литературы

[4] Гельфанд, И. М. и Колмогоров, А. Н. — «О кольцах непрерывных функций на топологических пространствах». — *Доклады Академии Наук СССР* Т. XXII, № 1. (1939), с. 11—15.

[5] Неструев, Джет. — *Гладкие многообразия и наблюдаемые.* — Москва: МЦНМО, 2000.

[6] Савельев, И. В. — «Симплициальные комплексы и линейчатые многообразия». — *Матем. заметки* 50:1 (1991).

[7] Шафаревич, И. Р. — *Основы алгебраической геометрии.* — Наука, 1988.

[8] Arapura, Donu и Kang, Su-Jeong. — «Kähler–de Rham cohomology and Chern classes». — *Communications in Algebra* 39.4 (2011), с. 1153—1167.

[9] Billera, Louis J. — «The algebra of continuous piecewise polynomials». — *Adv. Math.* 76.2 (1989), с. 170—183.

[10] Bott, Raoul и Tu, Loring W. — *Differential forms in algebraic topology.* — Т. 82. — Springer, 1982.

[11] Bredon, Glen E. — *Sheaf theory.* — Second edition. — New York: Springer-Verlag, 1997.

[12] Chen, Kuo Tsai. — «Iterated integrals, fundamental groups and covering spaces». — *Trans. Amer. Math. Soc.* 206 (1975), с. 83—98.

[13] Connes, Alain. — «Noncommutative differential geometry». — *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* 62 (1985), с. 41—144.

[14] Félix, Yves, Halperin, Stephen и Thomas, Jean-Claude. — *Rational homotopy theory.* — New York: Springer, 2001.

[15] Felix, Yves, Jessup, Barry и Parent, Paul-Eugène. — «The combinatorial model for the Sullivan functor on simplicial sets». — *Journal of Pure and Applied Algebra* 213.2 (2009), с. 231—240.

[16] Gersten, S. M. — «Homotopy theory of rings». — *J. Algebra* 19 (1971), с. 396—415.

[17] Godement, Roger. — *Topologie algébrique et théorie des faisceaux.* — Paris: Hermann, 1958.

[18] Gómez, Francisco. — «The number of generators of the algebra of Kähler differentials». — *Demonstratio Math.* 23 (1990), с. 375—383.

[19] Gómez, Francisco. — «Algebraic characteristic classes for idempotent matrices». — *Publ. Mat.* 36.2A (1992), с. 601—608.

[20] Gómez, Francisco. — «Simplicial types and polynomial algebras». — *Archivum Mathematicum* 38 (2002), с. 27—36.

[21] Gracia-Bondía, José M., Várilly, Joseph C. и Figueroa, Héctor. — *Elements of noncommutative geometry.* — Boston, MA: Birkhäuser Boston, Inc., 2001.

[22] Griffiths, Phillip и Morgan, John. — *Rational homotopy theory and differential forms.* — Birkhäuser, 1981.

[23] Grothendieck, Alexander. — «On the de Rham cohomology of algebraic varieties». — *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* 29 (1966), с. 95—103.

[24] Hardt, Robert, Lambrechts, Pascal, Turchin, Victor и Volić, Ismar. — «Real homotopy theory of semi-algebraic sets». — *Algebr. Geom. Topol.* 11, 5 (2011), с. 2477—2545.

[25] Heinonen, Juha. — *Lectures on Lipschitz analysis.* — 100. — University of Jyväskylä, 2005.

[26] Hirsch, Morris W. — «Smooth regular neighborhoods». — *Ann. of Math. (2)* 76 (1962), с. 524—530.

[27] Johnson, Barry Edward. — *Cohomology in Banach algebras.* — T. 127. — Memoirs of the American Mathematical Society. — Providence, RI: American Mathematical Society, 1972.

[28] Kähler, Erich. — «Algebra und Differentialrechnung». — *Bericht über die Mathematikertagung* (1953).

[29] Kan, Daniel M. и Miller, Edward Y. — «Sullivan's de Rham complex is definable in terms of its 0-forms». — *Proceedings of the American Mathematical Society* 57.2 (1976), с. 337—339.

[30] Kunz, Ernst. — *Kähler differentials.* — Braunschweig: Friedr. Vieweg & Sohn, 1986.

[31] Kunz, Ernst. — «Why "Kähler" Differentials?» — *Erich Kähler. Mathematische Werke/Mathematical works* (2011), с. 848—853.

[32] Lehmann, Daniel. — *Théorie homotopique des formes différentielles (d'aprés D. Sullivan).* — T. 45. — 1990.

[33] Matsumura, Hideyuki. — *Commutative ring theory.* — Second edition. — Cambridge: Cambridge University Press, 1989.

[34] Osborn, Howard. — «Derivations of commutative algebras». — *Illinois J. Math.* 13 (1969), с. 137—144.

[35] Peters, Chris A. M. и Steenbrink, Joseph H. M. — *Mixed Hodge structures.* — Berlin: Springer-Verlag, 2008.

[36] Quillen, Daniel. — *Homotopical algebra.* — Lecture Notes in Mathematics. — Cham: Springer, 1967.

[37] Rourke, C. P. и Sanderson, B. J. — *Introduction to piecewise-linear topology.* — Berlin: Springer-Verlag, 1972.

[38] Shartser, Leonid. — «De Rham theory and semialgebraic geometry». — (2011).

[39] Stacks. — *Tag 01F7.* — https://stacks.math.columbia.edu/tag/01F7.

[40] Sullivan, Dennis. — «Differential forms and the topology of manifolds». — *Manifolds Tokyo* (1973), с. 37—49.

[41] Sullivan, Dennis. — «Infinitesimal computations in topology». — *Publications Mathématiques de l'IHÉS* 47 (1977), с. 269—331.

[42] Voisin, Claire. — *Hodge Theory and Complex Algebraic Geometry I.* — Cambridge University Press, 2002.

[43] Wedhorn, Torsten. — *Manifolds, Sheaves, and Cohomology.* — Wiesbaden: Springer Spektrum, 2016.

[44] Whitney, Hassler. — *Geometric integration theory.* — Princeton, NJ: Princeton University Press, 1957.