ОТЗЫВ ОФИЦИАЛЬНОГО ОППОНЕНТА

на диссертацию Балкановой Ольги Германовны «L-функции симметрического квадрата», представленную на соискание учёной степени доктора физико-математических наук по специальности 1.1.5 — математическая логика, алгебра теория чисел и дискретная математика

L-функции, представляющие собой далеко идущие обобщения дзета-функции Римана, являются традиционным объектом изучения в аналитической теории чисел. В самых общих чертах, L-функция – это функция комплексного аргумента, заданная в некоторой полуплоскости рядом Дирихле или эйлеровым произведением, допускающая мероморфное продолжение на комплексную плоскость и удовлетворяющая некоторому функциональному уравнению. Первые примеры появились ещё в XIX веке (дзета-функция, L-функции Дирихле), а позднее к ним добавились и функции более сложной природы (L-функции алгебраических кривых, L-функции, связанные с модулярными формами и формами Мааса, L-ряды Загира, L-функции Сельберга и др.) Интерес к ним вызван тем фактом, что аналитические свойства L-функций влекут справедливость различных результатов арифметической природы. Тем самым удаётся решать арифметические задачи методами комплексного анализа и спектральной теории. Так, классическое доказательство закона распределения простых чисел опирается на отсутствие нулей дзета-функции на прямой $\mathrm{Re} z = 1$, а теорема Дирихле о простых числах в арифметических прогрессиях использует свойства L-функций Дирихле. Из более современных результатов отметим доказательство Иванца теоремы о простых геодезических.

Даже для L-функций наиболее простого вида многие важные вопросы до сих пор не решены. Например, две из открытых «Проблем тысячелетия «связаны с L-функциями: обобщённая гипотеза Римана для L-функций Дирихле и гипотеза Бёрча и Свиннертон-Дайера, связывающая ранги эллиптических кривых и порядки нулей L-функций. Для L-функций более сложной природы открытых вопросов ещё больше. Многие важные задачи, в том числе оценка поведения на критической прямой, а также оценки моментов, остаются нерешёнными.

Таким образом, тематика диссертационного исследования несомненно является актуальной и находится на переднем крае современной теории чисел. Основной круг проблем, рассматриваемых в диссертации, включает исследование свойств так называемых L-функций симметрического квадрата, связанных с модулярными формами и с формами Мааса (данные тип L-функций был введен в работах Г. Шимуры), а также исследование свойств L-рядов Загира.

Объём диссертации составляет 283 страницы. Диссертация включает введение и 11 глав. Список цитируемой литературы содержит 185 наименований.

Кратко обсудим содержание основных разделов диссертации. В главе 1 изучается первый момент L-функций симметрического квадрата модулярных форм и его асимптотика при фиксированном уровне и весе, стремящемся к бесконечности. Для вывода основных результатов также получена асимптотика значений некоторых гипергеометрических функций. Она получается с использованием приближений Лиувилля–Грина для решений дифференциальных уравнений специального вида.

В главе 2 рассматривается аналогичная задача, но при фиксированном весе и уровне, равном степени простого и стремящемся к бесконечности. При этом ранее известные результаты Блумера и Суна усиливаются сразу в двух направлениях. Во-первых, вместо простого уровня допускается уровень, равный степени простого. Во-вторых, даже для простого уровня новые оценки остаточного члена оказываются более точными по сравнению с прежними.

В главе 3 получены новые асимптотические формулы на критической прямой для L-функций симметрического квадрата форм Мааса. Одним из технических средств является применение формулы следа Кузнецова.

Целью 4 главы является получение нижних оценок на пропорцию L-функций симметрического квадрата форм Мааса, не обращающихся в 0 в критической точке.

В главе 5 установлены новые верхние оценки экспоненциальной спектральной суммы. Как следствие, они позволяют получить новый вывод рекордных на данный момент оценок остаточного члена в задаче о простых геодезических, восходящей к фундаментальной работе Иванца.

Основной результат главы 6 – формула, выражающая среднее значение L-рядов Загира через моменты L-функций симметрического квадрата.

Глава 7 в некотором смысле дополняет предыдущую. В ней также рассматривается спектральное разложение для сумм L-рядов Загира, но в этом случае суммирование ведется по другому параметру.

В главе 8 получена точная формула для второго момента L-функций симметрического квадрата форм Мааса. Этот результат служит ещё одним новым примером формул взаимности, выражающих один момент L-функций через другие моменты.

В главе 9 получен новый вариант так называемых формул суммирования Вороного. А именно, рассматривается сумматорное тождество с коэффициентами, равными значениям L-рядов Загира.

В главах 10 и 11 автор вновь возвращается к L-функциям форм Мааса. В главе 10 доказывается асимптотическая формула для гипергеометрической функции, возникающей в точной формуле для первого момента на критической прямой. Далее, в главе 11 этот результат используется для получения верхней оценки второго момента L-функций симметрического квадрата форм Мааса. Результаты главы 11 также опираются на формулы суммирования Вороного, полученные в главе 9.

Все основные результаты диссертации снабжены подробными и строгими доказательствами. При этом автор успешно оперирует всем современным аппаратом аналитической теории чисел. Используемые результаты других авторов аккуратно и корректно цитируются и снабжены необходимыми подробными ссылками на внешние источники. Автореферат полностью и точно отражает содержание диссертации.

Основные результаты диссертации полностью и своевременно опубликованы в рецензируемых научных изданиях, в том числе в таких ведущих изданиях, как Математический сборник, Известия РАН, серия матем., Journal of the London Mathematical Society, Ramanujan Journal и др. По теме диссертации автором опубликовано 11 работ. Помимо этого результаты диссертационной работы прошли апробацию на многих всероссийских и международных конференциях. Результаты О. Г. Балкановой хорошо известны специалистам по теории чисел как в России, так и за рубежом. По данным базы MathSciNet недавние работы О. Г. Балкановой были процитированы более 130 раз 50 авторами.

Диссертация носит теоретический характер. Полученные автором результаты и

разработанные теоретические положения можно несомненно охарактеризовать как крупное научное достижения, имеющее важное научное значение и представляющее значительный интерес для дальнейшего развития аналитической теории чисел. Результаты, представленные в диссертации могут найти и уже находят применение при изучении задач, связанных с L-функциями симметрического квадрата и L-рядов Загира.

Следует отметить, что в работе встречаются отдельные незначительные недочёты (в основном, стилистического характера) и опечатки. Приведём их ниже.

- Неоднократно используется дефис вместо тире, в частности, при упоминании именных результатов, принадлежащих двум или более *разным* авторам.
- На странице 15, в строке 9 в определении оператора Гекке область (внутреннего) суммирования должна быть указана как $0 \leq b < d$ (либо $0 \leq b \leq d-1$) вместо $0 \leq b < d1$.
- На странице 20 с строке 4 снизу вместо $\sigma(l_2)$ должно быть $\sigma_0(l_2)$ (или, что то же самое, $\tau_0(l_2) = \tau(l_2)$).
- На странице 25 в строке 10 вместо ссылки [178] на упомянутую в тексте статью Ватсона 1918 г., приведена ссылка [179] на работу А. Вейля.
- На странице 25 в формуле (1.9) пропущен знак + между двумя гипергеометрическими функциями.
- На странице 29 в формулировке теоремы 1.2.5 союз *и*, стоящий рядом с латинской буквой u, визуально неотличимы.
- На странице 31 в строке 5 должно быть u вместо *and*.
- На странице 37 формула в последней строке одновременно содержит как определение $E_2(k,l)$, так и утверждение о справедливости оценки.
- На странице 85 в строке 3 должно быть *если* вместо *if*.
- На странице 198 в строке 18 должно быть $\mathcal{L}_n(s) \neq 0$ вместо $\mathcal{L}_0(s) \neq 0$.
- На странице 199 с строке 12 снизу должно быть *для* вместо *for*.
- Не слишком удачным представляется изложение, когда мультипликаторы $\vartheta(M_i)$ появляются в формулировках теорем 9.0.1–9.0.4 на страницах 200–201, а их формальное определение отложено до страницы 202 (хотя автор и честно предупреждает об этом).
- На странице 261 в строке 11 опечатка в слове *вторую*.

Однако все эти замечания носят исключительно технический характер. Данные недочёты могут быть легко устранены, никоим образом не влияют на высокий уровень исследования и не снижают благоприятного впечатления от диссертации.

Считаю, что диссертация О. Г. Балкановой «L-функции симметрического квадрата» удовлетворяет всем требованиям ВАК РФ, предъявляемым к диссертациям на соискание ученой степени доктора физико-математических наук, сформулированным в пунктах 9–11, 13, 14 Постановления Правительства РФ от 24.09.2013 г. № 842 «О порядке присуждения ученых степеней», а её автор Балканова Ольга Германовна заслуживает присуждения учёной степени доктора физико-математических наук по специальности 1.1.5 — математическая логика, алгебра, теория чисел и дискретная математика.

Официальный оппонент:
доктор физико-математических наук
(по специальности 01.01.06 — математическая логика, алгебра и теория чисел),
доцент, член-корреспондент РАН,
директор
Федерального государственного бюджетного учреждения науки
Санкт-Петербургского отделения Математического института
им. В. А. Стеклова Российской академии наук (ПОМИ РАН),
Всемирнов Максим Александрович

01 июня 2026 г.

/ Всемирнов М.А. /

Почтовый адрес: 191023, Санкт-Петербург, наб. р. Фонтанки, д. 27, ПОМИ РАН
Телефон: (812) 312-40-58
Электронный адрес: vsemir@pdmi.ras.ru

Подпись руки Всемирнова М. А.

УДОСТОВЕРЯЮ
Помощник директора
по кадрам ПОМИ РАН В.Э. Владимирова
«01» 06 2026 г.